بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی توابع یکنواخت ستاره‌گون با ضرایب منفی

نگارنده: سید محمود باقری

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

شهریور ۱۳۹۵

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **سیدمحمودباقری متکازینی** به شماره دانشجویی: ۹۲۳۴۴۱۴ رشته: **ریاضی محض** گرایش: **آنالیز ریاضی**
تحت عنوان: **بررسی توابع یکنواخت ستاره‌گون باضرایب منفی**
که در تاریخ **۱۳۹۵/۰۶/۱۴** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: بسیار خوب امتیاز ۱۸/۳) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ■ عملی ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	احمد زیره	دانشیار	
۲ـ استادراهنمای دوم			
۳ـ استاد مشاور			
۴ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکترعلیرضا ناظمی	دانشیار	
۵ـ استاد ممتحن اول	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکترکامران شریفی	دانشیار	

رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

محمود باقری

تقدیم به یگانه همراهم پروردگارم

تقدیم به امام زمانم(عج)

تقدیم به خاک پاک میهنم

تقدیم به بهترین فرشتگان زندگیم:

استوارترین تکیه گاهم پدرم و قلب پاک مادرم؛

که آرامش روحی و آسایش فکری اینجانب را فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم؛

امیدوارم قادر به درک زیبایی های وجودشان باشم.

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. سلام و درود بر محمّد و خاندان او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز... بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند؛ بر حسب وظیفه از استاد راهنمای با کمالات و شایسته ام؛ جناب دکتر احمد زیره که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند بسیار سپاسگزارم چرا که بدون راهنمایی های ایشان تامین این پایان نامه بسیار مشکل می نمود؛ در نهایت از دو معلم بزرگوارم، پدر و مادر عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشمداشت برای من بوده اند و هم چنین از همکاری بی دریغ کلیه کسانی که جهت پیشبرد این پایان‌نامه مرا یاری نمودند سپاسگزارم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات این عزیزان را سپاس گوید.

سید محمود باقری
شهریور ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **سید محمود باقری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی توابع یکنواخت ستاره‌گون با ضرایب منفی** ، تحت راهنمایی **احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ’’ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید محمود باقری
شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه کرانی برای ضرایب متعلق به رده $\mathcal{T}$ همچنین کرانی برای مقادیر $|f|$ و $|f'|$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه زیر رده‌های متعددی از $\mathcal{T}$ مانند توابع ستاره‌گون با ضرایب منفی و توابع محدب با ضرایب منفی همچنین توابع ستاره‌گون قوی با ضرایب منفی و توابع قویا محدب با ضرایب منفی را معرفی می‌کنیم و شرط لازم و کافی برای اینکه تابع f متعلق به رده توابع قویا ستاره‌گون باشد را بررسی می‌کنیم این قضیه ارتباط مستقیم با ضرایب تابع f دارد.

کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک‌ارز، توابع ستاره‌گون، توابع محدب

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

Re قسمت حقیقی اعداد مختلط

تعریف ۱.۱.۱. تابع $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ را در z_0 تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند در $\mathbb{C}$، یک میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. **(قرارداد)** $\mathcal{A}$ را رده‌ای از توابع به شکل $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ گوییم که در دیسک یکه‌ی باز $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ تحلیلی می‌باشند.

تعریف ۴.۱.۱. **(لم شوارتز[1])** فرض کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = 0$ صفر مرتبه m تابع f باشد، در

[1] Schwarz

این‌صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m \quad (z \in U_R).$$

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

به‌طوری‌که در آن θ مقداری ثابت است.

تعریف ۵.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x,y)$ که در میدان D تعریف شده، در D همساز گویند هرگاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام D در معادله زیرصادق باشند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است. با به‌کار بردن این قضیه که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه نقاط آن میدان دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند. اگر $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همسازی از u نام دارد.

ملاحظه ۶.۱.۱. این خاصیت پادتقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگرو تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u+iv) = -v+iu$ نیز تحلیلی است.
معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی همساز با قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

قضیه ۷.۱.۱. (نگاشت ریمان[۲]) [۲۴]فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و z_0 نقطه‌ای در این میدان باشد. در این‌صورت تابع منحصر به فرد، تحلیلی، یک به یک و پوشا $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z| < 1$ می‌نگارد و $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$ است.

۲.۱ رده $\mathbb{S}$

توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارز (یک به یک) هستند، واجد شرایط جالبی هستند که میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک ارز، که در میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر کرد. بنابراین خود را به توابعی که بر قرص $|z| < 1$ تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبدا صفر است(که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در

[۲] Riemann

مبدا مشتق مخالف صفر دارد، در این‌صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود. زیرا مشتق تابع تک ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک ارز $f(z)$ را می‌توان به $\frac{[f(z)-f(0)]}{f'(0)}$، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده توابعی که در محدودیت‌های مذکور صادق‌اند با یک حرف مشخص می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z|<1$ تحلیلی و تک ارز بوده و با شرایط $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ نرمالیزه گردیده‌اند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots \qquad (|z|<1).$$

لم ۲.۲.۱. اگر $f(z)\in\mathbb{S}$، آنگاه $g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}\in\mathbb{S}$.

ملاحظه ۳.۲.۱. به جای $\sqrt{f(z^2)}$، می‌نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)}=e^{(\frac{1}{2})\log f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.

برهان. فرض کنید $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ لذا داریم:

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+\dots} \tag{۱.۱}$$

(شاخه‌ی اصلی $\sqrt{\cdot}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0)=0$ و $g'(0)=1$ است. برای اثبات تک ارزی، اگر $g(z_1)=g(z_2)$ یعنی $z_1\sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}}=z_2\sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در این‌صورت $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_1^2=z_2^2$، یعنی $z_1=z_2$ یا $z_1=-z_2$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1=-z_2$ تساوی $g(z_1)=-g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_1=z_2$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱. [۲۴]اگر $f(z)\in\mathbb{S}$ باشد، آنگاه $|a_2|\leq 2$.

مثال ۵.۲.۱. **(تابع کوئب)** در قضیه۴.۲.۱، اگر $a_2=2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه $g(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z^2)}=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. لذا

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}=z+2e^{i\alpha}z^2+3e^{2i\alpha}z^3+\cdots$$

با قرار دادن $\alpha=0$ به تابع زیر می‌رسیم :

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z|<1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۶.۲.۱. (پوشش). اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و برای $|z| < 1$، $f(z) \neq c$ که $c \in \mathbb{C}$، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \dfrac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{c})z^2 + \cdots$$

بنا به قضیه‌۴.۲.۱داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$. از طرفی:

$$|\frac{1}{c}| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \Longrightarrow |\frac{1}{c}| \leq 2 + |a_2|$$

چون $f(z) \in \mathbb{S}$، پس $|a_2| \leq 2$ است. لذا داریم :

$$|\frac{1}{c}| \leq 4 \Longrightarrow |c| \geq \frac{1}{4}$$

□

لم ۷.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و $z = re^{i\theta}$ باشد، آنگاه :

$$Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z| < 1$، $f'(z) \neq 0$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا :

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| = Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}.$$

□

قضیه ۸.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega = \dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ نیز به ازای $(|z|<1)$ تحلیلی و تک ارز است، داریم:

$$g(0) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1-|z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1-|z_0|^2))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به $\mathbb{S}$ نیست، با توجه به این‌که تابع $\dfrac{g(z)-g(0)}{g'(0)} = z + \dfrac{b_2}{b_1}z^2 + \cdots$ در S قرار می‌گیرد، لذا بنابر قضیه۴.۲.۱، $|\dfrac{b_2}{b_1}| \leq 2$ یعنی:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2) - 2\overline{z_0}\right| \leq 2$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\dfrac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم :

$$|\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است، قرار می‌دهیم :

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

یعنی $\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\dfrac{4r}{1-r^2}$ و به مرکز $\dfrac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است لذا:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

بنا به لم ۷.۲.۱ می‌دانیم $\mathrm{Re}\dfrac{zf''(z)}{f'(z)} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ یعنی :

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از 0 تا r انتگرال می‌گیریم :

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

در نتیجه :

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad (|z| = r < 1).$$

□

مثال ۹.۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots$ برابر است با
$$k'(z)=\frac{1+z}{(1-z)^3}$$
لذا کران بالای قضیه‌ی ۸.۲.۱، در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. اگر $f(z)\in\mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{(1-r)^2}\qquad(|z|=r<1)$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۸.۲.۱ برای $|z|=r<1$ داریم $|f'(z)|\leq\dfrac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه‌ی 0 را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)|\leq\int_0^r|f'(t)|\mathrm{d}t\leq\int_0^r\frac{1+t}{(1-t)^3}\mathrm{d}t=\frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوی $\frac{1}{4}\leq\dfrac{r}{(1+r)^2}$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z)|\geq\frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $|f(z)|\leq\dfrac{r}{(1+r)^2}$ و اگر $|f(z)|<\frac{1}{4}$ باشد، بنا بر قضیه‌ی ۶.۲.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکه از 0 تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از 0 تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت :

$$|f(z)|=\int_{c_0}|\mathrm{d}\omega|=\int_c|f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی ۸.۲.۱ :

$$|f(z)|=\int_c|f'(s)||\mathrm{d}s|\geq\int_c|f'(s)|\mathrm{d}|s|\geq\int_0^r\frac{1-t}{(1+t)^3}\mathrm{d}t=\frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

مثال ۱۱.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots$ کران بالای قضیه‌ی ۱۰.۲.۱ در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۲.۲.۱. (لیتلوود[3]) [۲۴]اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای هر n، $|a_n|\leq en$.

قضیه ۱۳.۲.۱. اگر تابع $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n|\leq n$.

[3] Littlewood's

برهان. برای $r<1$، $z=re^{i\theta}$ قرار میدهیم:

$$Imf(z)=v(re^{i\theta})=\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^k\sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطهی فوق در$\sin n\theta$ و انتگرالگیری از 0 تا π داریم :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(re^{i\theta})\sin n\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a_nr^n\sin^2 n\theta\mathrm{d}\theta=a_nr^n \qquad (۲.۱)$$

با توجه به رابطهی

$$|\sin(n+1)\theta|=|\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta|\leq|\sin n\theta|+|\sin\theta|$$

و به روش استقرایی میتوان نشان داد که $|sinn\theta|\leq n|sin\theta|$ لذا از رابطهی (۲.۱)نتیجه میشود که

$$|a_nr^n|\leq\frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}|v(re^{i\theta})|\sin\theta\mathrm{d}\theta \qquad (۳.۱)$$

حال نشان میدهیم $v(re^{i\theta})\neq 0$ ، که در آن $(0<\theta<\pi,\ 0<r<1)$:

$$0\neq f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n(e^{in\theta}-e^{-in\theta})=2i\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\theta=2iv(re^{i\theta})$$

چون$v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $0<\theta<\pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا :

$$r=|a_1r|=|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(re^{i\theta})\sin\theta\mathrm{d}\theta|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|v(re^{i\theta})|\sin\theta\mathrm{d}\theta. \qquad (۴.۱)$$

با جایگزینی (۴.۱)در (۳.۱) ، رابطه $|a_nr^n|\leq nr$ بدست میآید و با $r\to 1$ قضیه ثابت میگردد. □

۳.۱ ردهی $\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستارهگون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل میکند در D قرار بگیرد. تابع $f(z)\in\mathbb{S}$ را نسبت به مبدا ستارهگون گوییم هر گاه قرص $|z|<1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $\omega=0$ ستارهگون است. این زیر ردهی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده میشود.

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم $f(z)\in\mathbb{S}$، در اینصورت $f(z)\in\mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z|<r<1$ را بر میدان ستارهگون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم$f(z)\in\mathbb{S}^*$ و D تصویر $|z|<1$ و D_r تصویر $|z|<r<1$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w\in D$ باشد، آنگاه برای $0<t<1$، $tw\in D$ (چون D ستارهگون نسبت به مبدا میباشد) لذا تابع $g(z)=f^{-1}(tf(z))$ در $|z|<1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)|<1$ صدق میکند.

چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \le |z|$. اکنون نقطه‌ی $w_0 \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت برای نقطه‌ی z_0 ای با فرض $0 < |z_0|$ و برای t دلخواه با فرض $0 < t < 1$ داریم :

$$|f^{-1}(tw_0)| = |f^{-1}(tf(z_0))| = |g(z_0)| \le |z_0| < r$$

ولی این بدان معنی است که tw_0در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی W_0 ها در D_r و همه‌ی tها که $0 < t < 1$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است.
بر عکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_0 \in D$ موجود است به‌طوری‌که برای t_0ای، $(0 < t_0 < 1)$ ، $t_0 w_0$ متعلق به D نمی‌باشد. اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $t_0 w_0$ متعلق به D_r نیست.
پس $f(z)$ ، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. □

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگرو تنها اگر:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

برهان. با توجه به لم ۲.۳.۱ $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این‌صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص می‌شود. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = Im\log f(re^{i\theta})$، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Im\log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0.$$

□

مثال ۴.۳.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < 1$ صفحه‌ی ω می‌باشد که در امتداد پرتو $-\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$Re\left\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\right\} = Re\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}.$$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم برای $|z| < 1$، $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ تحلیلی است. اگر برای $|z| < 1$، $\mathrm{Re} f(z) > 0$، آنگاه برای هر n، $|a_n| \le 2$.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ باشد آنگاه برای هر n، $|a_n| \le n$.

برهان. چون برای $0 < |z| < 1$ ، $f(z) \neq 0$ تابع

$$P(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \tag{۵.۱}$$

در $|z| < 1$ تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{۶.۱}$$

از طرفی برای $|z| < 1$، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ پس $Re\{P(z)\} > 0$. بنا بر قضیه‌ی ۴.۲.۱ می‌دانیم:

$$|\alpha_n| \leq 2 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{۷.۱}$$

از(۵.۱) و(۶.۱) داریم:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = (1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1})(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$k a_k = a_k + a_{k-1}\alpha_1 + a_{k-2}\alpha_2 + \cdots + a_2\alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}$$

و یا به‌صورت معادل :

$$(k-1)a_k = a_{k-1}\alpha_1 + a_{k-2}\alpha_2 + \cdots + a_2\alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \cdots) \tag{۸.۱}$$

با استفاده از کران (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱)به‌کار برد لذا

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \cdots + |a_2| + 1)$$

از رابطه‌ی فوق داریم $|a_2| \leq 2$. سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, \cdots, n-1$ داشته باشیم $|a_k| \leq k$. در این‌صورت :

$$(n-1)|a_n| \leq 2\,[(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

و لذا رابطه $|a_n| \leq n$ برقرار می‌باشد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. □

تعریف ۷.۳.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ ستاره‌گون از مرتبه $\alpha(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می‌شود هرگاه :

$$Re\left\{\frac{zf'}{f}\right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ را به $\mathbb{S}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$، $(0 \leq \alpha < 1)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1 - \alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۷.۳.۱کافی است نشان دهیم $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز 1 قرار دارد.

$$|z\frac{f'}{f}-1|=|\frac{zf'-f}{f}|=|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|z^n}{z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n}|$$

$$\leq\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^{n-1}}\leq\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|}$$

آخرین جمله قبل دارای کران بالای $1-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|\leq(1-\alpha)(1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|)$$

که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است. بنابراین $|z\frac{f'}{f}-1|\leq 1-\alpha$. □

۴.۱ رده‌ی $\mathbb{K}$

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه ازD را به‌هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z)\in\mathbb{S}$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z|<1$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{K}$ نشان می‌دهیم .

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم $f(z)\in\mathbb{S}$، در این‌صورت $f(z)\in\mathbb{K}$ اگرو تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z|<r<1$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم$f(z)\in\mathbb{K}$ وD تصویر $|z|<1$ و D_r تصویر $|z|<r<1$ تحت $f(z)$باشد. نقاط w_1، w_2 را درD_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(0<t<1)$، $tw_1+(1-t)w_2$ هم در D_r قرار دارد. نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z|<1$ موجود هستند به‌طوری که $w_1=f(z_1)$ و $w_2=f(z_2)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_1|\leq|z_2|$ آنگاه تصویر $|z|<1$ تحت تابع $g(z)=tf\left((\frac{z_1}{z_2})z\right)+(1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z)=f^{-1}(g(z))$ در $|z|<1$ تحلیلی است و چون $f(z)\in\mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)|<1$ و $h(0)=0$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)|\leq|z|$. به‌ویژه :

$$|h(z_2)|=|f^{-1}(tw_1+(1-t)w_2)|\leq|z_2|<r \qquad (۹.۱)$$

چون$D_r\subset D$ ، نقطه‌ی z_3ای در قرص $|z|<1$ موجود است که $f(z_3)=tw_1+(1-t)w_2$ ولی بنابر(۹.۱) نقطه‌ی $f^{-1}(f(z_3))=z_3$ نیز می‌بایست در قرص $|z|<1$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط

$t\omega_1 + (1-t)\omega_2$ در D_r قرار دارد.
برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{K}$ نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z|<r<1$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z|<r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. □

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z|<1$ تحلیلی باشد و $f(0)=0$ و $f'(0)=1$. در این‌صورت $f(z)\in\mathbb{K}$ اگر و تنها اگر:

$$Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0 \qquad (|z|<1).$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۹.۱، $f(z)\in K$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z|<r<1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w=f(re^{i\theta})$ دایره $|z|=r<1$ را بر یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی ω با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{2}+\theta+\arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{2}+\theta+\arg f'(re^{i\theta})\right)>0$$

و لذا:

$$1+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Im\log f'(re^{i\theta})\right)=1+Im\left\{(ire^{i\theta})\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\}=Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

□

قضیه ۵.۴.۱. **(الکساندر[۴])** فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(0)=0$ و $f'(0)=1$. در این‌صورت $f(z)\in\mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $zf'\in\mathbb{S}^*$.

برهان. اگر $g(z)=zf'(z)$ در این‌صورت :

$$\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}=\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۶.۴.۱. فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در $\mathbb{K}$ باشد. در این‌صورت برای هر n، $|a_n|\leq 1$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۴.۱ تابع $zf'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد لذا بنا بر قضیه‌ی ۶.۳.۱ برای هر n، $|na_n|\leq n$ و در نتیجه $|a_n|\leq 1$. □

[۴] Alexander

قضیه ۷.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ برای $|z| < 1$ داشته باشیم $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{1}{2}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک ارز است ، دو نقطه متمایز z_1 و z_2 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم در این‌صورت :

$$g(z_1) - g(z_2) = \left((c - f(z_1))^2 - (c - f(z_2))^2\right) = \left(f(z_1) - f(z_2)\right)\left(f(z_1) + f(z_2) - 2c\right)$$

اکنون $f(z_1) \neq f(z_2)$ زیرا $f(z)$ تک ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{1}{2}[f(z_1) + f(z_2)]$ به تصویر $|z| < 1$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس

$$f(z_1) + f(z_2) - 2c \neq 0$$

و لذا تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \cdots$ تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + (\frac{-z^2}{2c}) + \cdots$$

بعلاوه در $|z| < 1$ ، $h(z) \neq \frac{c}{2}$، زیرا $g(z)$ هرگز در آن‌جا صفر نیست. با به‌کار بردن قضیه‌ی پوششی در می‌یابیم $|\frac{c}{2}| \geq \frac{1}{4}$ و یا $|c| \geq \frac{1}{2}$. □

قضیه ۸.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد، آنگاه برای $|z| = r < 1$:

$$\frac{1}{(1 + r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)^2}$$

برهان. می‌دانیم تابع $(|z_1| < 1)$ $w = \frac{z + z_1}{1 + \bar{z}_1 z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_1}{1 + \bar{z}_1 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$$

نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک ارز است. بنابراین :

$$g(0) = b_0 = f(z_1) \qquad b_1 = g'(0) = f'(z_1)(1 - |z_1|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}\left(f''z_1(1 - |z_1|^2)^2 - 2f'(z_1)\bar{z}_1(1 - |z_1|^2)\right).$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به این‌که تابع

$$\frac{g(z) - g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \cdots$$

در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد لذا در $\mathbb{K}$ نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی ۶.۴.۱ :

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}(1 - |z_1|^2) - 2\bar{z}_1\right| \leq 1$$

با قرار دادن $z_{} = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{|z_{}|}{-|z_{}|}$ داریم:

$$\left|\frac{z_{} f''(z_{})}{f'(z_{})} - \frac{|z_{}|}{-|z_{}|}\right| \le \frac{|z_{}|}{-|z_{}|}.$$

حال چون $z_{}$ دلخواه است داریم:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{r}{-r}\right| \le \frac{r}{-r}$$

$$\Longrightarrow \frac{r - r}{-r} \le \frac{zf''(z)}{f'(z)} \le \frac{r + r}{-r}$$

$$\Longrightarrow \frac{r -}{-r} \le \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \le \frac{r +}{-r}$$

حال از تا r انتگرال می‌گیریم :

$$-\log(+r) \le \log|f'(z)| \le -\log(-r)$$

لذا :

$$\frac{}{(+r)} \le |f'(z)| \le \frac{}{(-r)}.$$

□

قضیه ۹.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد آنگاه برای $|z| = r <$ ،

$$\frac{r}{+r} \le |f(z)| \le \frac{r}{-r}$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۸.۴.۱ برای $|z| = r <$ داریم. $|f'(z)| \le \frac{}{(-r)}$ نقطه‌ی را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| = \int^r |f'(t)|\mathrm{d}t \le \int^r \frac{}{(-t)}\mathrm{d}t = \frac{r}{-r}.$$

نامساوی $\frac{}{} \le \frac{r}{(+r)}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \ge$ لذا $|f(z)| \ge \frac{r}{(+r)}$ و اگر $|f(z)| <$ طبق قضیه‌ی پوششی مسیر c داخل دایره‌ی یکه از تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_{}$ از تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_{}} |\mathrm{d}w| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا بر قضیه‌ی قبل :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \ge \int_c |f'(s)|\mathrm{d}|s| \ge \frac{}{(+t)}\mathrm{d}t = \frac{r}{+r}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(+r)} \le |f(z)| \le \frac{r}{(-r)}.$$

□

۵.۱ رده‌ی $\mathbb{T}$

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم T زیر رده‌ای از $\mathbb{S}$ شامل توابعی با ضرایب منفی باشد. گوییم یک تابع تک ارز و تحلیلی f در $\mathbb{T}$ قرار دارد هرگاه بتوانیم آن را به شکل $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ بیان کنیم.

قضیه ۲.۵.۱. تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در T قرار دارد اگر و تنها اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f(z) \in \mathbb{T}$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. چون $f(z) \in \mathbb{T}$ ، $f(z)$ در دیسک واحد Δ تک ارز است در این‌صورت $f'(z) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1} \neq 0$ بنابراین :

$$f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \neq 0 \qquad (z = r).$$

فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| > 1$. در این‌صورت اندیس مثبت N وجود دارد به‌طوری‌که

$$\sum_{n=2}^{N} n|a_n| > 1$$

بنابراین وجود دارد $0 < r_1 < 1$ که $1 - \sum_{n=2}^{N} n|a_n| r_1^{n-1} < 0$ لذا :

$$f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r_1^{n-1} \leq 1 - \sum_{n=2}^{N} n|a_n| r_1^{n-1} < 0$$

چون $f'(r)$ پیوسته است و $f'(0) = 1$ پس وجود دارد $0 < r_2 < r_1$ به‌طوری‌که $f'(r_2) = 0$ و این با فرض $f'(z) \neq 0$ در تناقض می‌باشد. لذا فرض خلف باطل و $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$.

بر عکس، فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ در این‌صورت :

$$Re\Big(f'(z)\Big) = Re\Big(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1}\Big) > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 0$$

پس برای $z_1, z_2 \in \Delta$ و $z_1 \neq z_2$ ،

$$Re\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \int_0^1 Re f'[z_1 + t(z_2 - z_1)]dt$$

لذا $f(z)$ در Δ تک ارز است و $f(z) \in \mathbb{T}$. □

قضیه ۳.۵.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{T}$ باشد آنگاه:

$$r - \tfrac{1}{2} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \tfrac{1}{2} r^2 \qquad (|z| = r) \tag{۱۰.۱}$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۲.۵.۱ داریم $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1\,{}^{2}$. بنابراین :

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq r + \tfrac{1}{2} r^2$$

و

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq r - \tfrac{1}{2} r^2$$

لذا داریم:

$$r - \tfrac{1}{2} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \tfrac{1}{2} r^2 \qquad (|z| = r).$$

□

مثال ۱.۵.۴. بنا بر قضیه‌ی ۱.۵.۲، تابع $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2$ متعلق به رده‌ی $\mathbb{T}$ می‌باشد هرگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$، حال با جایگزینی $n=2$ و $a_2=\frac{1}{2}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می‌کند. لذا کران بالای قضیه‌ی ۱.۵.۳در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱.۵.۵. اگر $f(z)\in\mathbb{T}$ باشد، آنگاه :

$$1-r \leq |f'(z)| \leq 1+r \qquad (|z|=r).$$

برهان. می‌دانیم :

$$|f'(z)| \leq 1+\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq 1+r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1+r$$

و

$$|f'(z)| \geq 1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \geq 1-r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1-r$$

لذا داریم :

$$1-r \leq |f'(z)| \leq 1+r \qquad (|z|=r).$$

□

مثال ۱.۵.۶. برای تابع $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2$ کران بالای قضیه‌ی ۱.۵.۵ در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱.۵.۷. فرض کنیم توابع $(m=1,2,3,\cdots,n)$ و $f_m(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}|a_{j,m}|z^j$ متعلق به رده‌ی $\mathbb{T}$ باشند. در این‌صورت تابع $h(z)$ تعریف شده به صورت $h(z)=\sum_{m=1}^{n} c_m f_m(z), (c_m \geq 0)$ که در آن $\sum_{m=1}^{n} c_m = 1$ نیز در رده $\mathbb{T}$ قرار دارد.

برهان. طبق تعریف $h(z)$ داریم:

$$h(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{n} c_m|a_{j,m}|\Big)z^j$$

چون برای هر $f_m(z), m=1,2,3,\cdots,n$ در T قرار دارد، لذا داریم $\sum_{j=2}^{\infty} j|a_{j,m}| \leq 1$ که $m=1,2,\cdots,n$ بنابراین می‌توانیم ببینیم:

$$\sum_{j=2}^{\infty} j\Big(\sum_{m=1}^{n} c_m|a_{j,m}|\Big)=\sum_{m=1}^{n} c_m\Big(\sum_{j=2}^{\infty} j|a_{j,m}|\Big) \leq \sum_{m=1}^{n} c_m = 1$$

حال با توجه به قضیه ۱.۵.۲ نتیجه می‌شود که $h(z)$ در $\mathbb{T}$ قرار دارد. □

قضیه ۱.۵.۸. (توابع اکسترمال). فرض کنیم

$$f_n(z)=z-\frac{1}{n}z^n, f_1(z)=z \qquad (n=2,3,\cdots)$$

در این‌صورت $f(z)\in T$ اگر و تنها اگر بتوانیم آن‌را به شکل $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم به‌طوری‌که $\lambda_n \geq 0$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = 1$.

برهان. فرض کنیم:

$$\begin{aligned}
f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) &= \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\
&= \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n (z - \frac{1}{n} z^n) \\
&= \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n
\end{aligned}$$

در این‌صورت:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} n = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

لذا بنابر قضیه‌ی ۲.۵.۱، $f(z) \in \mathbb{T}$.

بر عکس، فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{T}$، چون $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ قرار می‌دهیم:
$\lambda_n = n|a_n|$ و $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$، لذا:

$$\begin{aligned}
f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda_n z^n \\
&= z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n [z - f_n(z)] = z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\
&= \Big(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n\Big) z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\
&= \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z).
\end{aligned}$$

□

۶.۱ رده‌ی $\mathbb{T}^*$، $C(\alpha)$

تعریف ۱.۶.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{T}$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می‌شود هرگاه:

$$Re\left\{\frac{zf'}{f}\right\} > \alpha \qquad (|z| < 1).$$

این زیر رده‌ی $\mathbb{T}$ را با $\mathbb{T}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۶.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{T}$ محدب از مرتبه‌ی α $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\left\{1 + \frac{zf''}{f'}\right\} > \alpha \qquad (|z| < 1).$$

این زیر رده‌ی $\mathbb{T}$ را با $C(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۶.۱. یک تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در $\mathbb{T}^*(\alpha)$ قرار دارد اگر و تنها اگر :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ لذا :

$$Re\frac{zf'}{f} = Re\left\{\frac{z - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n}\right\} > \alpha \qquad (|z|<1) \tag{۱۱.۱}$$

هرگاه $z \to 1$ (که z یک مقدار حقیقی) داریم:

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq \alpha(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

حال اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

کافی است نشان دهیم $\frac{zf'}{f}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز 1 قرار دارد. داریم:

$$|\frac{zf'}{f} - 1| = |\frac{zf'-f}{f}| = |\frac{\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $1-\alpha$ میباشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|).$$

که رابطهی فوق معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. □

نتیجه ۴.۶.۱. تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در $C(\alpha)$ قرار دارد اگر و تنها اگر :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in C(\alpha)$. برای $(|z|<1)$ میدانیم:

$$Re\left\{1 + \frac{zf''}{f'}\right\} = Re\left\{1 - \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}}\right\} = Re\left\{\frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}}\right\} > \alpha \tag{۱۲.۱}$$

در رابطه۱۲.۱ هرگاه $z \to 1$ (که z یک مقدار حقیقی)داریم:

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \geq \alpha(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|)$$

بنابراین :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

حال اگر
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$
کافی است نشان دهیم $1+\frac{zf''}{f'}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز 1 قرار دارد. لذا :
$$\begin{aligned} |1+\frac{zf''}{f'}-1| &= |\frac{zf''}{f'}| = |\frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1}}| \\ &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|} \end{aligned}$$
عبارت فوق دارای کران بالای $1-\alpha$ می‌باشد اگر
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|).$$
که رابطه‌ی فوق معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. □

قضیه ۵.۶.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ در این‌صورت :
$$r-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \qquad (|z|=r) \tag{۱۳.۱}$$

برهان. بنا به قضیه ۳.۶.۱ می‌دانیم :
$$(2-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$
بنابراین
$$|f(z)| \leq r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \leq r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq r+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2$$
و به‌طور مشابه :
$$|f(z)| \geq r-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \geq r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \geq r-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2$$
لذا نتیجه می‌شود :
$$r-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \qquad (|z|=r).$$
□

مثال ۶.۶.۱. بنا به قضیه‌ی ۳.۶.۱ تابع $f(z)=z-\frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)}z^2$ متعلق به رده‌ی $\mathbb{T}^*$ است هرگاه
$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$
حال با جایگزینی $n=2$ و $a_2=\frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرایط فوق صدق می‌کند؛ لذا کران بالای قضیه‌ی ۵.۶.۱ در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱.۶.۷. اگر $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ در این‌صورت:

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \qquad (|z| = r)$$

برهان. داریم :

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq 1 + r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \qquad (۱.۱۴)$$

و همچنین طبق قضیه‌ی ۱.۶.۳می‌دانیم :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1 - \alpha + \alpha\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq 1 - \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \qquad (۱.۱۵)$$

با جایگزینی عبارت (۱.۱۵)در ۱.۱۴طرف راست حکم نتیجه می‌شود ؛ از طرف دیگر:

$$|f'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \geq 1 - r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r$$

□

مثال ۱.۶.۸. برای تابع $f(z) = z - \frac{(1-\alpha)}{(2-\alpha)} z^2$ کران بالای قضیه‌ی ۱.۶.۷ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

نتیجه ۱.۶.۹. اگر $f(z) \in C(\alpha)$ در این‌صورت :

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \qquad (|z| = r)$$

برهان. بنا به نتیجه ۱.۶.۴داریم:

$$2(2-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1 - \alpha$$

بنابراین

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \leq r + r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2$$

و به‌طور مشابه :

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \geq r - r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \geq r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2$$

لذا نتیجه می‌شود :

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \qquad (|z| = r)$$

□

نتیجه ۱.۶.۱۰. اگر $f(z) \in C(\alpha)$ در این‌صورت:

$$1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \qquad (|z| = r)$$

برهان. داریم :

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq 1 + r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|$$

و همچنین بنابر نتیجه ۴.۶.۱ می‌دانیم :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2}|a_n| \leq 1-\alpha + 2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq 1-\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \qquad (۱۶.۱)$$

یا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{2-2\alpha}{2-\alpha} \qquad (۱۷.۱)$$

با جایگزینی عبارت۱۶.۱ در۱۷.۱ طرف راست حکم نتیجه می‌شود ؛از طرف دیگر:

$$|f'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \geq 1 - r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - \frac{2-2\alpha}{2-\alpha}r$$

□

قضیه ۱۱.۶.۱. (توابع اکسترمال) فرض کنیم

$$f_n(z) = z - \frac{(1-\alpha)}{(n-\alpha)}z^n, f_1(z) = z \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ اگر و تنها اگر بتوانیم آن‌را به شکل $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم به‌طوری‌که $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1, \lambda_n \geq 0$

برهان. فرض کنیم:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{(1-\alpha)}{(n-\alpha)} z^n$$

در این‌صورت:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1-\alpha}{n-\alpha}\left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

لذا $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$.

بر عکس؛ فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$. چون

$$|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{n-\alpha} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

قرار می‌دهیم:

$$\lambda_n = \frac{(n-\alpha)|a_n|}{1-\alpha}, \lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

در این‌صورت $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ و برهان کامل می‌شود. □

قضیه ۱۲.۶.۱. اگر $f(z) \in C(\alpha)$ آنگاه $f(z) \in T^*(\frac{2}{3-\alpha})$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۳.۶.۱ و نتیجه ۴.۶.۱ باید ثابت کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|\leq 1\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\frac{2}{3-\alpha}}{1-\frac{2}{3-\alpha}}|a_n|\leq 1$$

کافی است نشان دهیم:

$$\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}\geq\frac{n-\frac{2}{3-\alpha}}{1-\frac{2}{3-\alpha}}=\frac{n(3-\alpha)-2}{1-\alpha}\qquad(n=2,3,\cdots)$$

و عبارت فوق معادل با اینست که $(n=2,3,\cdots)$, $n^2-3n+2\geq 0$. □

فصل ۲

بررسی خواص زیر رده‌هایی از توابع ستاره‌گون با ضرایب منفی

۱.۲ یادداشت کوتاه از رده‌های تحلیلی جدید خاص از توابع تک‌ارز در دیسک واحد

۱.۱.۲ نامساوی ضریب

قضیه ۱.۱.۲. تابع $f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} | a_j | z^j$ متعلق به رده $\mathcal{T}$است اگر و تنها اگر

$$\sum_{j=2}^{\infty} j | a_j | \leqslant 1$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in \mathcal{T}$ نشان می‌دهیم که

$$\sum_{j=2}^{\infty} j | a_j | \leqslant 1$$

چون $f(z) \in \mathcal{T}$و در دیسک واحد تک ارز می‌باشد داریم

$$f'(z) = 1 - \sum_{j=2}^{\infty} j | a_j | z^{j-1} \neq 0$$

بنابراین

$$f'(r) = 1 - \sum_{j=2}^{\infty} j \mid a_j \mid z^{j-1} \neq 0 \qquad (\mid z \mid = r)$$

فرض کنیم

$$\sum_{j=2}^{\infty} j \mid a_j \mid > 1$$

لذا $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\sum_{j=2}^{N} j \mid a_j \mid > 1$$

بنابراین $0 < r_1 < 1$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\sum_{j=2}^{N} j \mid a_j \mid r_1^{j-1} > 1$$

و هم چنین

$$f'(r_1) = 1 - \sum_{j=2}^{\infty} j \mid a_j \mid r_1^{j-1} \leqslant 1 - \sum_{j=2}^{\infty} j \mid a_j \mid r_1^{j-1} < 0$$

از آنجا که $f'(r)$ پیوسته است و $f'(0) = 1$ هم چنین وجود دارد $0 < r_0 < r_1$ لذا طبق قضیه مقدار میانی داریم $f'(r_0) = 0$ این تناقض است، بنابراین $\sum_{j=2}^{\infty} j \mid a_j \mid \leqslant 1$

برعکس ، فرض کنیم

$$\sum_{j=2}^{\infty} j \mid a_j \mid \leqslant 1$$

داریم

$$Ref'(z) = Re(1 - \sum_{j-2}^{\infty} j \mid a_j \mid z^{j-1}) > 1 - \sum_{j=2}^{\infty} j \mid a_j \mid \geqslant 0$$

بنابراین

$$Re\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \int_0^1 Ref'[z_1 + t(z_2 - z_1)]dt > 0$$

برای $z_1, z_2 \in U$ و $z_1 \neq z_2$. از این رو $f(z)$ در U تک ارز است و $f(z) \in \mathcal{T}$

□

۲.۱.۲ قضایای انحراف و پوششی

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید $f \in \mathcal{T}$ در این صورت داریم:

$$r - \tfrac{1}{2}r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \tfrac{1}{2}r^2 \qquad (|z| = r)$$

به طوری‌که

$$f(z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 \qquad (z = \pm r)$$

برهان. طبق قضیه (۱.۱.۲) داریم

$$2\sum_{j=2}^{\infty}|a_j| \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} j|a_j| \leqslant 1$$

بنابراین

$$|f(z)| \leqslant r + \sum_{j=2}^{\infty}|a_j|r^j \leqslant r + r^2\sum_{j=2}^{\infty}|a_j| \leqslant r + \frac{1}{2}r^2$$

و

$$|f(z)| \geqslant r - \sum_{j=2}^{\infty}|a_j|r^j \geqslant r - r^2\sum_{j=2}^{\infty}|a_j| \geqslant r - \frac{1}{2}r^2$$

لذا به دست می‌آوریم

$$r - \frac{1}{2}r^2 \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{1}{2}r^2 \quad (|z| = r)$$

□

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنید $f \in \mathcal{T}$ در این صورت داریم:

$$1 - r \leqslant |f(z)| \leqslant 1 + r \quad (|z| = r)$$

به طوری‌که

$$f(z) = z - \frac{1}{2}z^2 \quad (z = \pm r)$$

برهان. داریم

$$|f'(z)| \leqslant 1 + \sum_{j=2}^{\infty} j|a_j|r^{j-1} \leqslant 1 + r\sum_{j=2}^{\infty} j|a_j| \leqslant 1 + r$$

و

$$|f'(z)| \geqslant 1 - \sum_{j=2}^{\infty} j|a_j|r^{j-1} \geqslant 1 - r\sum_{j=2}^{\infty} j|a_j| \geqslant 1 - r.$$

□

۳.۱.۲ قضیه بستار

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنید تابع $f_m(z)$ تعریف شده به صورت

$$f_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty}|a_{j,m}|z^j \quad (m = 1, \cdots, n)$$

متعلق به رده $\mathcal{T}$ باشد، در این‌صورت تابع $h(z)$ تعریف شده به‌صورت زیر متعلق به $\mathcal{T}$ است.

$$h(z) = \sum_{m=1}^{n} c_m f_m(z) \quad (c_m \geqslant 0)$$

به طوری‌که

$$\sum_{m=1}^{n} c_m = 1$$

برهان. طبق تعریف $h(z)$ می‌توان نوشت

$$h(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} (\sum_{m=1}^{n} c_m |a_{j,m}| z^j$$

به‌علاوه، از آنجایی که $f_m(z) \in \mathcal{T}$ برای هر $m = 1, \cdots, n$ داریم

$$\sum_{j=2}^{\infty} |a_{j,m}| \leqslant 1$$

از این‌رو می‌توان دید که

$$\sum_{j=2}^{\infty} j (\sum_{m=1}^{n} c_m |a_{j,m}| = \sum_{m=1}^{n} c_m (\sum_{j=2}^{\infty} j |a_{j,m}|) \leqslant \sum_{m=1}^{n} c_m = 1$$

در نتیجه $h(z)$ متعلق به $\mathcal{T}$ می‌باشد. □

نتیجه ۵.۱.۲. رده $\mathcal{T}$ تحت ترکیب خطی محدب است.

برهان. فرض کنیم توابع

$$f_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} |a_{j,m}| z^j \quad (m = 1, 2)$$

متعلق به رده $\mathcal{T}$ باشند. کافیست نشان دهیم تابع

$$h(z) = \xi f_1(z) + (1 - \xi) f_2(z) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

متعلق به رده $\mathcal{T}$ است. اگر در قضیه ۴.۱.۲ قراردهیم $n = 2$، $c_1 = \xi$ و $c_2 = \xi$ نتیجه برقرار است. □

۴.۱.۲ نقاط بحرانی

قضیه ۶.۱.۲. فرض کنید $f_1(z) = z$ و $f_j(z) = z - \frac{1}{j} z^j$ برای $j = 2, 3, \cdots$، $f \in \mathcal{T}$ اگر وتنها اگر

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(z)$$

به طوری‌که $\lambda_j > 0$ و $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1$.

برهان. فرض کنیم

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j f_j(z)=\lambda_1 f_1(z)+\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j f_j(z)=\lambda_1 z+\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j(z-\frac{1}{j}z^j)=z-\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j\frac{1}{j}z^j$$

سپس

$$\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j\frac{1}{j}z^j=\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j=1-\lambda_j\leqslant 1\,.$$

بنابراین طبق قضیه ۲.۱.۲ داریم $f\in\mathcal{T}$

برعکس: فرض کنیم $f\in\mathcal{T}$

از آنجایی که

$$|a_j|\leqslant\frac{1}{j}\qquad(j=2,3,\cdots)$$

قرار می‌دهیم

$$\lambda_j=j|a_j|\quad,\quad\lambda_1=1-\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j$$

سپس

$$f(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}|a_j|z^j=z-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}\lambda_j z^j=z-\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j[z-f_j(z)]=z-\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j z+\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j f_j(z)$$

$$=\left(1-\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j\right)z+\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j f_j(z)=\lambda_1 f_1(z)+\sum_{j=2}^{\infty}\lambda_j f_j(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j f_j(z)$$

□

۵.۱.۲ عملگر انتگرال

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنید تابع $f(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}|a_j|z^j$ متعلق به رده $\mathcal{T}$ و c عدد حقیقی باشد به طوری‌که $c>-1$، آنگاه تابع $F(z)$ تعریف شده به‌صورت زیر متعلق به رده $\mathcal{T}$ است.

$$F(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)\mathrm{d}t$$

برهان. طبق تعریف $F(z)$ می‌توان نوشت

$$F(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}|b_j|z^j \tag{۱.۲}$$

به طوری‌که

$$|b_j|=\frac{c+1}{c+j}|a_j|.$$

بنابراین

$$\sum_{j=2}^{\infty}j|b_j|=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{c+1}{c+j}|a_j|\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}j|a_j|\leqslant 1$$

از آنجایی که $f(z)\in\mathcal{T}$ لذا طبق قضیه ۱.۱.۲ داریم $F(z)\in\mathcal{T}$. □

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنید تابع $F(z) \in \mathcal{T}$ و c عدد حقیقی باشد به طوری‌که $c > -1$، آنگاه تابع $f(z)$ تعریف شده به‌صورت (۱.۲) در $|z| < R^*$ تک‌ارز است به طوری‌که

$$R^* = \inf j \left(\frac{c+1}{c+j}\right)^{\frac{1}{j-1}} \qquad (j \geqslant 2)$$

برهان. فرض کنید $F(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} |a_j| z^j$ طبق (۱.۲) داریم

$$f(z) = \frac{z^{1-c}[z^c F(z)]'}{c+1} = z - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c+j}{c+1} |a_j| z^j \qquad (c > -1)$$

به عبارت دیگر کافی است نشان دهیم در $|z| < R^*$،

$$|f'(z) - 1| < 1$$

حال

$$|f'(z) - 1| \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j(c+j)}{c+1} |a_j| |z|^{j-1}$$

بنابراین

$$|f'(z) - 1| < 1$$

اگر

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j(c+j)}{c+1} |a_j| |z|^{j-1} < 1 \tag{۲.۲}$$

لذا طبق $\sum_{j=2}^{\infty} j|a_j| < 1$ و (۲.۲) خواهیم داشت

$$\frac{j(c+j)}{c+1} |z|^{j-1} \leqslant j$$

یا

$$|z| \leqslant \left(\frac{c+1}{c+j}\right)^{\frac{1}{j-1}} \qquad (j \geqslant 2)$$

بنابراین $f(z)$ در $|z| < R^*$ تک‌ارز است. □

۶.۱.۲ کاربردهایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

در این زیر بخش به تعاریفی از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری که توسط اوا [1] [۶، ۱۵] معرفی شده می‌پردازیم.

[1] Owa

تعریف ۹.۱.۲. انتگرال کسری از مرتبه δ برای تابع تحلیلی و پیوسته در یک ناحیه از صفحه z شامل مبدا را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{D}_z^{-\delta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{1-\delta}} \mathrm{d}t$$

به طوری‌که $\delta > 0$.

تعریف ۱۰.۱.۲. مشتق کسری از مرتبه δ برای تابع تحلیلی و پیوسته در یک ناحیه از صفحه z شامل مبدا را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{D}_z^{\delta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{\delta}} \mathrm{d}t$$

به طوری‌که $\delta > 0$.

تعریف ۱۱.۱.۲. تحت فرضیه از تعریف ۱۰.۱.۲ مشتق کسری از مرتبه $k+\delta$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{D}_z^{k+\delta} f(z) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \mathrm{D}_z^{\delta} f(z)$$

به طوری‌که $0 < \delta < 1$ و $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

قضیه ۱۲.۱.۲. اگر تابع $f(z) \in \mathcal{T}$ آنگاه

$$\frac{|z|^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)} \left[1 - \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+2)}{2(\Gamma(\delta+3))}|z|\right] \leqslant |\mathrm{D}_z^{-\delta} f(z)| \leqslant \frac{|z|^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)} \left[1 + \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+2)}{2(\Gamma(\delta+3))}|z|\right]$$

با مساوی برای

$$\Gamma(2+\delta) z^{-\delta} \mathrm{D}_z^{-\delta} f(z) = z - \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+2)}{2(\Gamma(\delta+3))} z^2$$

برهان. به آسانی می‌توان دید که

$$\Gamma(2+\delta) z^{-\delta} \mathrm{D}_z^{-\delta} f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(\delta+2)}{\Gamma(j+\delta+1)} |a_j| z^j = z - \sum_{j=2}^{\infty} \psi(j) |a_j| z^j$$

به طوری‌که

$$\psi(j) = \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(\delta+2)}{\Gamma(j+\delta+1)} \qquad (j \leqslant 2)$$

از آنجایی که $\psi(j)$ یک تابع نزولی از j است داریم

$$0 < \psi(j) \leqslant \psi(2) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+2)}{\Gamma(3+\delta)}$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$|\Gamma(2+\delta)z^{-\delta}\mathrm{D}_z^{-\delta}f(z)| \geqslant |z| - \psi(2)|z|^2 \sum_{j=2}^{\infty}|a_j| \geqslant |z| - \frac{1}{2}\psi(2)|z|^2$$
$$= |z| - \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(3+\delta)}|z|^2$$

و

$$|\Gamma(2+\delta)z^{-\delta}\mathrm{D}_z^{-\delta}f(z)| \leqslant |z| + \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+1)}{2\Gamma(3+\delta)}|z|^2$$

بنابراین

$$\frac{|z|^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\left[1 - \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+1)}{2(\Gamma(\delta+3))}|z|\right] \leqslant |\mathrm{D}_z^{-\delta}f(z)| \leqslant \frac{|z|^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\left[1 + \frac{\Gamma(3)\Gamma(\delta+1)}{2(\Gamma(\delta+3))}|z|\right]$$

□

قضیه ۱۳.۱.۲. اگر تابع $f(z) \in \mathcal{T}$ آنگاه

$$\frac{|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)}\left[1 - \frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}|z|\right] \leqslant |\mathrm{D}_z^{\delta}f(z)| \leqslant \frac{|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)}\left[1 + \frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}|z|\right]$$

با مساوی برای

$$\Gamma(2-\delta)z^{\delta}\mathrm{D}_z^{\delta}f(z) = z - \frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}z^2$$

برهان. با توجه به اینکه

$$\Gamma(2-\delta)z^{\delta}\mathrm{D}_z^{\delta}f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(j-\delta+1)}|a_j|z^j = z - \sum_{j=2}^{\infty}\varphi(j)|a_j|z^j$$

به طوری‌که

$$\varphi(j) = \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(j-\delta+1)} \qquad (j \leqslant 2)$$

از آنجایی که $\varphi(j)$ یک تابع نزولی از j است داریم

$$0 < \varphi(j) \leqslant \varphi(2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}$$

بنابراین داریم

$$|\Gamma(2-\delta)z^{\delta}\mathrm{D}_z^{\delta}f(z)| \geqslant |z| - \varphi(2)|z|^2 \sum_{j=2}^{\infty}j|a_j| \geqslant |z| - \frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}|z|^2$$

و

$$|\Gamma(2-\delta)z^{\delta}\mathrm{D}_z^{\delta}f(z)| \leqslant |z| + \frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}|z|^{2}$$

لذا

$$\frac{|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)}\left[1-\frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}|z|\right] \leqslant |\mathrm{D}_z^{\delta}f(z)| \leqslant \frac{|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)}\left[1+\frac{\Gamma(2)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(3-\delta)}|z|\right]$$

□

در این بخش رده‌های $\mathcal{H}(w,\alpha)$ و $\mathcal{K}(w,\alpha)$ از توابع تحلیلی با ضرایب منفی را معرفی و برخی از خواص توابع در این رده‌ها مانند تخمین ضریب، همسایگی و انتگرال نامساوی میانگین را به دست می‌آوریم.

تعریف ۱۴.۱.۲. رده $\mathcal{A}(w) \subset \mathcal{A}$ را رده همه توابع به فرم

$$f(z) = (z-w) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-w)^k \tag{۳.۲}$$

که در دیسک واحد $\mathbb{U}$ تحلیلی و با $f(w)=0$ و $f'(w)=1$ نرمالیزه شده‌اند تعریف می‌کنیم.

در سال ۱۹۹۹ کاناس [2] و رنینگ[3] [۱] رده‌هایی از توابع زیر را تعریف و معرفی کرده‌اند.

$$\mathcal{S}(w) = \{f \in \mathcal{A}(w) : \text{تک ارز است } U \text{ در } f\}$$

$$\mathcal{ST}(w) = \mathcal{S}^*(w) = \left\{f \in \mathcal{S}(w) : \mathrm{Re}\left(\frac{(z-w)f'(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in U\right\}$$

$$\mathcal{CV}(w) = \mathcal{S}^c(w) = \left\{f \in \mathcal{S}(w) : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{(z-w)f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, z \in U\right\}$$

که به ترتیب رده‌های توابع تک‌ارز، ستاره‌گون و محدب می‌باشند.

تعریف ۱۵.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{T}(w)$ زیر رده‌ای از $\mathcal{S}(w)$ باشد که این عناصر را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

$$f(z) = (z-w) - \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-w)^k \tag{۴.۲}$$

تعریف ۱۶.۱.۲. رده‌های $\mathcal{H}(w,\alpha)$ و $\mathcal{K}(w,\alpha)$ به ترتیب زیر خانواده‌هایی از $\mathcal{S}^*(w,\alpha)$ و $\mathcal{S}^c(w,\alpha)$ می‌باشند، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{H}(w,\alpha) = \mathcal{S}^*(w,\alpha) \cap \mathcal{T}(w)$$

---

[2] Kanas

[3] Ronning

$$\mathcal{K}(w,\alpha)=\mathcal{S}^c(w,\alpha)\cap\mathcal{T}(w)$$

که $\mathcal{S}^*(w,\alpha)$ و $\mathcal{S}^c(w,\alpha)$ به ترتیب رده‌هایی از توابع ستاره‌گون و محدب از مرتبه α هستند. [۱۶] داریم

$$\mathcal{H}(w,0)=\mathcal{S}^*(w,0)\cap\mathcal{T}(w)\Rightarrow\mathcal{H}(w)=\mathcal{S}^*(w)\cap\mathcal{T}(w)$$

$$\mathcal{K}(w,\alpha)=\mathcal{S}^c(w,0)\cap\mathcal{T}(w)\Rightarrow\mathcal{K}(w)=\mathcal{S}^c(w)\cap\mathcal{T}(w)$$

تعریف ۱۷.۱.۲. رده $\mathcal{P}(w)\subset\mathcal{P}$ را رده‌ای از توابع به فرم

$$\mathcal{P}_w(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}B_k(z-w)^k \qquad (۵.۲)$$

که در دیسک واحد U منظم هستند و برای $z\in U$ داریم

$$\mathcal{P}_w(z)=1,\mathrm{Re}\mathcal{P}_w(z)>0$$

به طوری‌که

$$|B_k|\leqslant\frac{2}{(1+d)(1-d)^k},k\geqslant 1,d=|w|$$

۷.۱.۲ تخمین ضریب

لم ۱۸.۱.۲. تابع $f(z)\in\mathcal{T}(w)$ متعلق به رده $\mathcal{H}(w,\alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)(1-d)^{k-1}\leqslant 1-\alpha. \qquad (۶.۲)$$

برهان. فرض کنیم که نامساوی (۶.۲) درست باشد و $|z-w|=1-d<1$
پس داریم

$$|\frac{(z-w)f'(z)}{f(z)}-1|=|\frac{-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_k(z-w)^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z-w)^{k-1}}|$$

$$\leqslant\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)(1-d)^{k-1}a_k}{1-\sum_{k=2}^{\infty}(1-d)^{k-1}a_k}\leqslant 1-\alpha \qquad (۷.۲)$$

این نشان می‌دهد که مقدار $\frac{(z-w)f'(z)}{f(z)}$ در دایره به مرکز $\gamma=1$ و به شعاع $1-\alpha$ نادرست است.
از این‌رو $f(z)$ متعلق به رده $\mathcal{H}(w,\alpha)$ است.
پس

$$\mathrm{Re}\frac{(z-w)f'(z)}{f(z)}=\mathrm{Re}\{\frac{1-\sum_{k=2}^{\infty}ka_k(z-w)^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z-w)^{k-1}}>\alpha \qquad (۸.۲)$$

برای $z \in U$ و w نقطه ثابت شده در U است.

مقدار z را روی محور اعداد حقیقی به طوری‌که $\dfrac{(z-w)f'(z)}{f(z)}$ حقیقی است انتخاب می‌کنیم.

با حذف مخرج در (۷.۲) و با فرض $z \to 1^-$ در امتداد مقادیر حقیقی داریم

$$\alpha\left(1-\sum_{k=2}^{\infty}(1-d)^{k-1}a_k\right) \leqslant 1-\sum_{k=2}^{\infty}k(1-d)^{k-1}a_k \tag{۹.۲}$$

لذا نتیجه لازم بدیهی است.

در نهایت توجه داشته باشید که ادعای (۶.۲) از لم ۱۸.۱.۲ برای تابع اکسترمال زیر اکیدا برقرار است.

$$f(z)=(z-w)-\frac{1-\alpha}{(k-\beta)(1-d)^{k-1}}(z-w)^k. \tag{۱۰.۲}$$

□

نتیجه ۱۹.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{T}(w)$ متعلق به رده $\mathcal{H}(w,\alpha)$ باشد، آنگاه

$$a_k \leqslant \frac{1-\alpha}{(k-\beta)(1-d)^{k-1}}\,\frac{1-\alpha}{(k-\beta)(1-d)^{k-1}} \tag{۱۱.۲}$$

نامساوی (۱۱.۲) برای تابع $f(z)$ داده شده در (۱۰.۲) درست است.

لم ۲۰.۱.۲. تابع $f(z) \in \mathcal{T}(w)$ متعلق به رده $\mathcal{K}(w,\alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-\beta)(1-d)^{k-1}a_k \leqslant 1-\alpha \tag{۱۲.۲}$$

این نتیجه اکیدا برقرار است.

برهان. مشابه اثبات در لم ۱۸.۱.۲ است.

ادعای (۲۳.۱.۲) از لم ۲۰.۱.۲ برای تابع اکسترمال زیر اکیدا برقرار است.

$$f(z)=(z-w)-\frac{1-\alpha}{k(k-\beta)(1-d)^{k-1}}(z-w)^k. \tag{۱۳.۲}$$

□

نتیجه ۲۱.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{T}(w)$ متعلق به رده $\mathcal{K}(w,\alpha)$ باشد، آنگاه

$$a_k \leqslant \frac{1-\alpha}{k(k-\beta)(1-d)^{k-1}}\,\frac{1-\alpha}{(k-\beta)(1-d)^{k-1}} \tag{۱۴.۲}$$

نامساوی (۱۴.۲) برای تابع $f(z)$ داده شده در (۱۳.۲) درست است.

قضیه ۲۲.۱.۲. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده به‌صورت زیر متعلق به رده $\mathcal{H}(w,\alpha)$ باشد

$$f(z)=(z-w)-a_2(z-w)^2-\dots$$

که $\; \leqslant \alpha < \;$ ، آنگاه

$$|a| \leqslant \frac{-(-\alpha)}{-d} \tag{۱۵.۲}$$

$$|a| \leqslant -\left[\frac{(-\alpha)}{(-d)(-d)} + \frac{(-\alpha)}{(-d)}\right] \tag{۱۶.۲}$$

$$|a| \leqslant -\left[\frac{(-\alpha)}{(+d)(-d)} + \frac{(-\alpha)}{(-d)(-d)} + \frac{(-\alpha)}{(-d)}\right] \tag{۱۷.۲}$$

برهان. با فرض تعریف

$$\mathcal{P}_w(z) = \frac{\dfrac{(z-w)f'(z)}{f(z)} - \alpha}{-\alpha} \tag{۱۸.۲}$$

به طوری‌که

$$(z-w)f'(z) = f(z)\left[+(-\alpha)\sum_{k=}^{\infty} B_k(z-w)^k\right] \tag{۱۹.۲}$$

در مقایسه ضریب در (۱۹.۲) نتایج زیر را دنبال می‌کنیم.

پس از تحقیقات قبلی از گودمان [۴] و راسچوی [۵] [۱۰] δ-همسایگی از تابع $f(z) \in \mathcal{T}(w)$ بوسیله

$$N_\delta = \left\{ g \in \mathcal{T}(w) : g(z) = (z-w) - \sum_{k=}^{\infty} b_k(z-w)^k, \quad \sum_{k=}^{\infty} k(-d)^{k-}|b_k| \leqslant \delta \right\} \tag{۲۰.۲}$$

تعریف می‌کنیم.

به ویژه برای تابع مشخصه

$$\mathrm{e}(z) = \left(-\frac{w}{z}\right) z \tag{۲۱.۲}$$

مستقیما داریم

$$N_\delta(e) = \left\{ g \in \mathcal{T}(w) : g(z) = (z-w) - \sum_{k=}^{\infty} b_k(z-w)^k, \quad \sum_{k=}^{\infty} k(-d)^{k-}|b_k| \leqslant \delta \right\} \tag{۲۲.۲}$$

□

قضیه ۲۳.۱.۲. $\mathcal{H}(w,\alpha) \subset N_\delta(e)$ به طوری‌که $\delta = \dfrac{(-\alpha)}{(-\alpha)(-d)}$

---

[۴] Goodman

[۵] Ruschwey

برهان. فرض کنیم $f(z) \in \mathcal{H}(w,\alpha)$. لذا از آنجایی که $(k-\alpha)(1-d)^{k-1}$ تابع نزولی از k، ($k \geqslant 2$) است و طبق لم ۱۸.۱.۲ داریم

$$(2-\alpha)(1-d)\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)(1-d)^{k-1} a_k \leqslant 1-\alpha \qquad (۲۳.۲)$$

در نتیجه داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leqslant \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)(1-d)} \qquad (۲۴.۲)$$

به عبارت دیگر از (۹.۲) داریم

$$(1-d)\sum_{k=2}^{\infty} k a_k - \alpha(1-d)\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)(1-d)^{k-1} \leqslant 1-\alpha \qquad (۲۵.۲)$$

لذا طبق (۲۴.۲) و (۲۵.۲) داریم

$$(1-d)\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \leqslant (1-\alpha)+\alpha(1-d)\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leqslant (1-\alpha)+\frac{\alpha(1-\alpha)}{(2-\alpha)} \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \qquad (۲۶.۲)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)(1-d)} \qquad (۲۷.۲)$$

در نتیجه $f \in N_\delta(e)$

بنابراین $\mathcal{H}(w,\alpha) \subset N_\delta(e)$. □

۸.۱.۲ انتگرال نامساوی میانگین

لم ۲۴.۱.۲. فرض کنید f و g در دیسک واحد U با $f \prec g$ تحلیلی هستند در این‌صورت

$$\int_0^{2\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^\delta \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^\delta \mathrm{d}\theta \qquad (۲۸.۲)$$

که $\delta > 0$، $z = re^{i\theta}$، $w = de^{i\theta}$ و $0 < r+d < 1$

قضیه ۲۵.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{H}(w,\alpha)$ که در آن $\delta > 0$، $z = re^{i\theta}$، $w = de^{i\theta}$ و $0 < r+d < 1$ در این‌صورت

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^\delta \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f_2(re^{i\theta})\right|^\delta \mathrm{d}\theta \qquad (۲۹.۲)$$

که

$$f_2(z) = (z-w) - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)(1-d)}(z-w)^2 \qquad (۳۰.۲)$$

برهان. فرض کنید $f(z)$ در (۴.۲) و $f_2(z)$ در (۳۰.۲) تعریف شده‌اند، باید نشان دهیم که

$$\int_0^{2\pi}\left|1-\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z-w)^{k-1}\right|^{\delta}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{2\pi}\left|1-\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)(1-d)}(z-w)\right|^{\delta}\mathrm{d}\theta.$$

طبق لم ۲۴.۱.۲ کافی است نشان دهیم که

$$1-\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z-w)^{k-1}<1-\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)(1-d)}(z-w) \tag{۳۱.۲}$$

قرار می‌دهیم

$$1-\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z-w)^{k-1}=1-\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)(1-d)}(z-w)h(z) \tag{۳۲.۲}$$

لذا طبق (۳۲.۲) و (۶.۲) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|h(z)|&=\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2-\alpha)(1-d)}{1-\alpha}a_k(z-w)^{k-1}\right|\\&\leqslant|(z-w)|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-\alpha)(1-d)^{k-1}}{1-\alpha}a_k\leqslant|(z-w)|.\end{aligned} \tag{۳۳.۲}$$

□

فصل ۳

بررسی زیر رده‌هایی از توابع یکنواخت ستاره‌گون و محدب بوسیله پیچش و عملگر سالاگان

مقدمه

در این فصل یک زیر رده جدید از تابع تحلیلی با ضرایب منفی بوسیله پیچش و عملگر سالاگان تعمیم یافته شده در دیسک واحد معرفی ومطالعه می‌کنیم و با دادن مقادیر خاص رده‌های مهم مطالعه شده توسط نویسندگان مختلف در کارهای اخیر به‌دست می‌آوریم. در حقیقت به یک مطالعه دقیق از توابع یکنواخت محدب و توابع ستاره‌گون مربوط به توابع یکنواخت محدی تلاش شده است. نتایج ارائه شده در اینجا شامل ضریب تخمین، قضیه بستار، قضیه انحراف، ترکیب خطی محدب و شعاع تقریبا محدبی، ستاره‌گونی و محدب برای توابع متعلق به $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ می‌باشد.

۱.۳ بررسی زیر رده‌های توابع تحلیلی بوسیله پیچش

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید توابع f و g تعریف شده به فرم زیر

$$f(z)=z+\sum_{k=۲}^{\infty}a_kz^k \qquad (۱.۳)$$

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \tag{۲.۳}$$

متعلق به رده $\mathcal{A}$ باشند، حاصلضرب هادامارد این دو تابع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f * g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k = g * f(z) \tag{۳.۳}$$

گودمان [1] [۹، ۱۱] و رنینگ [2] [۱۷، ۱۸] زیر رده‌های زیر را معرفی و مطالعه کرده‌اند:

۱. تابع $f(z)$ به فرم (۱.۳) متعلق به رده $S_p(\alpha, \beta)$ از توابع ستاره‌گون β-یکنواخت است هرگاه:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right\} > \beta\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \quad (z \in U) \tag{۴.۳}$$

که $-1 \leqslant \alpha < 1$ و $\beta \geqslant 0$.

۲. تابع $f(z)$ به فرم (۱.۳) متعلق به رده $UCV(\alpha, \beta)$ از توابع محدب β-یکنواخت است هرگاه:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1 + zf''(z)}{f'(z)} - \alpha\right\} > \beta\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \quad (z \in U) \tag{۵.۳}$$

که $-1 \leqslant \alpha < 1$ و $\beta \geqslant 0$.

از (۴.۳) و (۵.۳) داریم:

$$f(z) \in UCV(\alpha, \beta) \Longleftrightarrow zf'(z) \in S_p(\alpha, \beta) \tag{۶.۳}$$

برای $-1 \leqslant \alpha < 1$، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ و $\beta \geqslant 0$.

تعریف ۲.۱.۳. زیر رده $S(g, \lambda; \alpha, \beta)$ از رده $\mathcal{A}$ شامل توابع $f(z)$ و $g(z)$ داده شده به ترتیب به فرم (۱.۳) و (۲.۳) به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z(f*g)'(z)}{(1-\lambda)(f*g)(z) + \lambda z(f*g)'(z)} - \alpha\right\}$$

$$> \beta\left|\frac{z(f*g)'(z)}{(1-\lambda)(f*g)(z) + \lambda z(f*g)'(z)} - 1\right| \tag{۷.۳}$$

ملاحظه ۳.۱.۳. ۱. اگر در رده $S(g, \lambda; \alpha, \beta)$ قرار دهیم $g(z) = \dfrac{z}{1-z}$ رده $S_p(\lambda, \alpha, \beta)$ تعریف شده توسط موروگوساندرامورتی [3] و ماگش [4] [۱۴] به دست می‌آید.

[1] Goodman

[2] Ronning

[3] Murugusandramoorthy

[4] Magesh

۲. اگر در رده $S(g,\lambda;\alpha,\beta)$ قرار دهیم $g(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ رده $UCV(\lambda,\alpha,\beta)$ تعریف شده در [۱۴] به دست می‌آید.

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنیم T رده‌ای از $\mathcal{A}$ شامل توابع به فرم زیر باشد

$$f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k \quad (a_k\geqslant 0) \tag{۸.۳}$$

رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$TS(g,\lambda;\alpha,\beta)=S(g,\lambda;\alpha,\beta)\cap T \tag{۹.۳}$$

ملاحظه ۵.۱.۳. توجه داشته باشید:

۱) $TS(\frac{z}{1-z},0;\alpha,1)=TS_p(\alpha)$

و

$TS(\frac{z}{(1-z)^2},0;\alpha,1)=UCV(\alpha)$[۴]

۲) $TS(\frac{z}{1-z},0;\alpha,\beta)=TS_p(\alpha,\beta)$

و

$TS(\frac{z}{(1-z)^2},0;\alpha,\beta)=UCV(\alpha,\beta)$[۴]

۳) $TS(\frac{z}{1-z},0;\alpha,0)=T*(\alpha)$

و

$TS(\frac{z}{(1-z)^2},0;\alpha,0)=C(\alpha)$[۲۳]

۴) $TS(z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}}z^k,0;\alpha,\beta)=TS(\alpha,\beta) \quad (c\neq 0,-1,-2,\dots)$[۱۲, ۱۳]

۵) $TS(z+\sum_{k=2}^{\infty}k^nz^k,0;\alpha,\beta)=TS(n,\alpha,\beta) \quad n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$[۱۹]

۶) $TS(\frac{z}{1-z},\lambda;\alpha,\beta)=TS_p(\lambda,\alpha,\beta)$

و

$TS(\frac{z}{(1-z)^2},\lambda;\alpha,\beta)=UCV(\lambda,\alpha,\beta)$[۱۴]

۷) $TS(z+\sum_{k=2}^{\infty}\binom{k+\delta-1}{\delta}z^k,0;\alpha,\beta)=D(\beta,\alpha,\delta) \quad (\delta>-1)$[۲۱]

$$TS(z+\sum_{k=2}^{\infty}[1+\delta(k-1)]^n z^k, 0; \alpha, \beta) = TS_{\delta}(\alpha, \beta) \quad (\delta > -1, n \in \mathbb{N}_0)[۳] \quad (۶$$

هم چنین

$$TS(z+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_k(\alpha_1)z^k, \lambda; \alpha, \beta) = TS_{q,s}(\alpha_1; \lambda, \alpha, \beta)$$
$$= \left\{ f \in T : \mathrm{Re}\left\{ \frac{z(H_{q,s}(\alpha_1, \beta_1)f(z))'}{(1-\lambda)H_{q,s}(\alpha_1, \beta_1)f(z) + \lambda z(H_{q,s}(\alpha_1, \beta_1)f(z))'} - \alpha \right\} \right.$$
$$\left. > \beta \left| \frac{z(H_{q,s}(\alpha_1, \beta_1)f(z))'}{(1-\lambda)H_{q,s}(\alpha_1, \beta_1)f(z) + \lambda z(H_{q,s}(\alpha_1, \beta_1)f(z))'} - 1 \right| \right\},$$

که $-1 \leqslant \alpha < 1$، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$، $\beta \geqslant 0$، $z \in U$ و $\Gamma_k(\alpha_1)$ تعریف شده به صورت زیر

$$\Gamma_k(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1)_{k-1} \dots (\alpha_q)_{k-1}}{(\beta_1)_{k-1} \dots (\beta_s)_{k-1} (1)_{k-1}} \tag{۳.۱۰}$$

به طوری‌که $\alpha_i > 0$، $i = 1, \dots, q$؛ $\beta_j > 0$، $j = 1, \dots, s$ و $q + 1$، $q, s \in \mathbb{N}_0$. هم چنین عملگر $H_{q,s}(\alpha_1, \beta_1)$ توسط دزوک-سریوستا [۵] [۷، ۸] معرفی و مطالعه شده است.

$$TS(z+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{l+1+\mu(k-1)}{l+1}\right]^m z^k, \alpha, \beta) = TS(m, \mu, l, \lambda; \alpha, \beta)$$
$$= \left\{ f \in T : \mathrm{Re}\left\{ \frac{z(I^m(\mu, l)f(z))'}{(1-\lambda)I^m(\mu, l)f(z) + \lambda z(I^m(\mu, l)f(z))'} - \alpha \right\} \right.$$
$$\left. > \beta \left| \frac{z(I^m(\mu, l)f(z))'}{(1-\lambda)I^m(\mu, l)f(z) + \lambda z(I^m(\mu, l)f(z))'} - 1 \right| \right\},$$

که $-1 \leqslant \alpha < 1$، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$، $\beta \geqslant 0$، $z \in U$، $\mu, l \geqslant 0$، $m \in \mathbb{N}_0$ و عملگر $I^m(\mu, l)$ توسط کاتاس [۶] [۵] معرفی و مطالعه شده است.

$$TS(z+\sum_{k=2}^{\infty}C_k(b, \mu)z^k, \lambda; \alpha, \beta) = TS(b, \mu, \lambda; \alpha, \beta)$$
$$= \left\{ f \in T : \mathrm{Re}\left\{ \frac{z(J_b^{\mu}f(z))'}{(1-\lambda)J_b^{\mu}f(z) + \lambda z(J_b^{\mu}f(z))'} - \alpha \right\} \right.$$
$$\left. > \beta \left| \frac{z(J_b^{\mu}f(z))'}{(1-\lambda)J_b^{\mu}f(z) + \lambda z(J_b^{\mu}f(z))'} - 1 \right| \right\},$$

که $-1 \leqslant \alpha < 1$، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$، $\beta \geqslant 0$، $z \in U$ و $C_k(b, \mu)$ تعریف شده به صورت زیر

$$C_k(b, \mu) = \left(\frac{1+b}{k+b}\right)^{\mu} \quad (b \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z} - \mathbb{N}) \tag{۳.۱۱}$$

هم چنین عملگر J_b^{μ} توسط سریوستا و آتیا [۷] [۲۲] معرفی و مطالعه شده است.

[۵] Dziok- Srivastava

[۶] Catas

[۷] Attiya

۱.۱.۳ تخمین ضریب

قضیه ۶.۱.۳. تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۱.۳) متعلق به رده $S(g,\lambda;\alpha,\beta)$ است اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}\,b_k|a_k| \leqslant 1-\alpha \tag{۱۲.۳}$$

که $b_{k+1} \geqslant b_k > 0$ و $k \geqslant 2$.

برهان. فرض کنیم نامساوی (۱۲.۳) درست است در این‌صورت داریم

$$\beta\left|\frac{z(f*g)'(z)}{(1-\lambda)(f*g)(z)+\lambda z(f*g)'(z)}-1\right|$$

$$-\mathrm{Re}\left\{\frac{z(f*g)'(z)}{(1-\lambda)(f*g)(z)+\lambda z(f*g)'(z)}-1\right\}$$

$$\leqslant(1+\beta)\left|\frac{z(f*g)'(z)}{(1-\lambda)(f*g)(z)+\lambda z(f*g)'(z)}-1\right|$$

$$\frac{(1+\beta)\sum_{k=2}^{\infty}(1-\lambda)(k-1)b_k|a_k||z^{k-1}|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]b_k|a_k||z^{k-1}|}\leqslant 1-\alpha$$

□

قضیه ۷.۱.۳. شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد این است که

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}\,a_kb_k \leqslant 1-\alpha \tag{۱۳.۳}$$

برهان. با در نظر گرفتن قضیه ۶.۱.۳، تنها نیاز به اثبات ضرورت داریم. اگر $f(z)\in TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ و z حقیقی باشد در این‌صورت داریم

$$\left[\frac{1-\sum_{k=2}^{\infty}ka_kb_kz^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]b_ka_kz^{k-1}}-\alpha\right]$$

$$\geqslant\beta\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(1-\lambda)(k-1)b_k|a_k|z^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]b_ka_kz^{k-1}}\right|$$

با فرض $z\to 1^{-}$ در امتداد محور حقیقی به دست می‌آوریم

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}\,a_kb_k \leqslant 1-\alpha$$

□

نتیجه ۸.۱.۳. فرض کنیدتابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد در این‌صورت

$$a_k \leqslant \frac{1-\alpha}{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]b_k} \quad (k \geqslant 2) \tag{۱۴.۳}$$

این نامساوی برای تابع زیر اکیدا برقرار است.

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]b_k} z^k \quad (k \geqslant 2) \tag{۱۵.۳}$$

اگر در قضیه ۷.۱.۳ قرار دهیم $b_k = \Gamma_k(\alpha_1)$ که $\Gamma_k(\alpha_1)$ تعریف شده در (۱۰.۳) نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹.۱.۳. شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۸.۳) متعلق به رده $TS_{q,s}(\alpha_1;\lambda,\alpha,\beta)$ باشد این است که

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)\left[1+\lambda(k-1)\right]\} \Gamma_k(\alpha_1) a_k \leqslant 1-\alpha$$

اگر در قضیه ۷.۱.۳ قرار دهیم $b_k = \left[\frac{l+1+\mu(k-1)}{l+1}\right]^m$ که $\mu, l \geqslant 0$ و $m \in \mathbb{N}_0$ نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۰.۱.۳. شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۸.۳) متعلق به رده $TS(m,\mu,l,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد این است که

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)\left[1+\lambda(k-1)\right]\} \left[\frac{l+1+\mu(k-1)}{l+1}\right]^m (\alpha_1) a_k \leqslant 1-\alpha$$

اگر در قضیه ۷.۱.۳ قرار دهیم $b_k = C_k(b,\mu)$ که $C_k(b,\mu)$ تعریف شده در (۱۱.۳) نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۱.۱.۳. شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۸.۳) متعلق به رده $TS(b,\mu,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد این است که

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)\left[1+\lambda(k-1)\right]\} |C_k(b,\mu)||a_k| \leqslant 1-\alpha$$

۲.۱.۳ قضیه انحراف

قضیه ۱۲.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد، در این‌صورت برای $|z| = r < 1$ داریم

$$|f(z)| \geqslant r - \frac{1-\alpha}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} r^2 \tag{۱۶.۳}$$

و

$$|f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} r^2 \qquad (۱۷.۳)$$

که $b_{k+1} \geqslant b_k > 0$، $k \geqslant 2$. معادلات در (۲۱.۳) و (۲۲.۳) برای تابع $f(z)$ داده شده به‌صورت زیر به‌دست آمده‌اند.

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} z^2 \qquad (۱۸.۳)$$

در $z=r$ و $z=re^{i(2k+1)\pi}$، $k \in \mathbb{Z}$.

برهان. برای $k \geqslant 2$ داریم

$$[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2 \leqslant \{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k$$

با استفاده از قضیه ۷.۱.۳ داریم

$$[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}a_k b_k \leqslant 1-\alpha \qquad (۱۹.۳)$$

به این معناست که

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leqslant \frac{1-\alpha}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} \qquad (۲۰.۳)$$

از (۸.۳)و (۲۰.۳) داریم

$$|f(z)| \geqslant r - \frac{1-\alpha}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} r^2$$

و

$$|f(z)| \leqslant r + \frac{1-\alpha}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} r^2$$

□

قضیه ۱۳.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد، در این‌صورت برای $|z|=r<1$ داریم:

$$|f'(z)| \geqslant r - \frac{2(1-\alpha)}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} r \qquad (۲۱.۳)$$

و

$$|f'(z)| \leqslant r + \frac{2(1-\alpha)}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2} r \qquad (۲۲.۳)$$

که $b_{k+1} \geqslant b_k > 0$، $k \geqslant 2$. این نتیجه برای تابع $f(z)$ داده شده در (۱۸.۳) اکیدا برقرار است.

برهان. طبق قضیه ۷.۱.۳ و (۲۰.۳) داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{[2+\beta-\alpha-\lambda(\alpha+\beta)]b_2}$$

بخش باقی مانده اثبات مشابه اثبات قضیه ۱۲.۱.۳ است. □

ترکیب خطی محدب

قضیه ۱۴.۱.۳. فرض کنید توابع $F_v(z)$ تعریف شده به‌صورت

$$F_v(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,v} z^k \quad (a_{k,v}, v = 1, \dots, l) \tag{۲۳.۳}$$

متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشند، در اینصورت تابع $f(z)$ تعریف شده به صورت زیر متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ می‌باشد.

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^{l} \mu_v a_{k,v} \right) z^k$$

که $\mu_v \geqslant 0$ و $\sum_{v=1}^{l} \mu_v \leqslant 1$ برای هر $v = 1, \dots, l$.

برهان. از آنجایی که $F_v(z) \in TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ لذا طبق قضیه ۷.۱.۳ برای هر $v = 1, \dots, l$ داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\} a_{k,v} b_k \leqslant 1 - \alpha \tag{۲۴.۳}$$

از این‌رو

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{\infty} \{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\} \left(\sum_{v=1}^{l} \mu_v a_{k,v} \right) b_k \\ &= \sum_{v=1}^{l} \mu_v \left(\sum_{k=2}^{\infty} \{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\} a_{k,v} b_k \right) \\ &\leqslant (1-\alpha) \sum_{v=1}^{l} \mu_v \leqslant 1 - \alpha \end{aligned}$$

لذا طبق قضیه ۷.۱.۳ داریم $f(z) \in TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$. □

نتیجه ۱۵.۱.۳. رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ تحت ترکیب خطی محدب بسته است.

قضیه ۱۶.۱.۳. فرض کنید $f_1(z) = z$ و

$$f_k(z) = z - \frac{1-\alpha}{\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\} b_k} z^k \quad (k \geqslant 2) \tag{۲۵.۳}$$

در این‌صورت تابع $f(z)$ متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ است اگر وتنها اگر بتوان آنرا به‌صورت زیر بیان کرد.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z) \tag{۲۶.۳}$$

که $\mu_k \geqslant 0$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 1$.

برهان. فرض کنیم که

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_k(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}\mu_k z^k \tag{۲۷.۳}$$

لذا داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{1-\alpha}\times\frac{1-\alpha}{\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}\mu_k$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k=1-\mu_1\leqslant 1 \tag{۲۸.۳}$$

بنابراین طبق قضیه ۷.۱.۳داریم $f(z)(g,\lambda;\alpha,\beta)$. بر عکس: فرض کنیم تابع $f(z)$ تعریف شده در (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد، در این‌صورت داریم

$$a_k\leqslant\frac{1-\alpha}{\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}\quad(k\geqslant 2) \tag{۲۹.۳}$$

با قرار دادن

$$\mu_k=\frac{\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}a_k b_k}{1-\alpha}\quad(k\geqslant 2) \tag{۳۰.۳}$$

و

$$\mu_1=1-\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k \tag{۳۱.۳}$$

می‌توان دید که تابع $f(z)$ به‌صورت (۲۶.۳) بیان می‌شود. □

نتیجه ۱۷.۱.۳. توابع $f_1(z)=z$ و

$$f_k(z)=z-\frac{1-\alpha}{\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}z^k\quad(k\geqslant 2) \tag{۳۲.۳}$$

نقاط بحرانی رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ می‌باشند.

۳.۱.۳ شعاع تقریبا محدبی، ستاره‌گونی و محدب

قضیه ۱۸.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده در (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد، در این‌صورت $f(z)$ در $|z|<r_1$ تقریبا محدب از مرتبه ρ، $(0\leqslant\rho\leqslant 1)$ است. که

$$r_1=\inf_{k\geqslant 2}\left\{\frac{(1-\rho)\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{k(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}} \tag{۳۳.۳}$$

این نتیجه برای تابع اکسترمال $f(z)$ داده شده در (۱۵.۳) اکیدا برقرار است.

برهان. باید نشان دهیم که

$$|f'(z)-1|\leqslant 1-\rho \quad |z|<r_1$$

که r_1 در (۳۳.۳) داده شده است.
در واقع از (۸.۳) پیدا می‌کنیم که

$$|f'(z)-1|\leqslant \sum_{k=2}^{\infty} ka_k|z|^{k-1}$$

لذا

$$|f'(z)-1|\leqslant 1-\rho \quad |z|<r_1$$

اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{1-\rho}a_k|z|^{k-1}\leqslant 1 \tag{۳۴.۳}$$

رابطه فوق طبق قضیه ۷.۱.۳ و (۳۴.۳) درست خواهد بود اگر

$$\frac{k}{1-\rho}|z|^{k-1}\leqslant\frac{\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)\}b_k}{1-\alpha}$$

به این معناست اگر

$$|z|\leqslant\left\{\frac{(1-\rho)\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)\}b_k}{k(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}} \quad (k\geqslant 2) \tag{۳۵.۳}$$

طبق رابطه فوق حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۹.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده در (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد، در این‌صورت $f(z)$ در $|z|<r_2$ ستاره‌گون از مرتبه ρ، $(0\leqslant\rho\leqslant 1)$ است که

$$r_2=\inf_{k\geqslant 2}\left\{\frac{(1-\rho)\{k(1+\beta)-(\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{(k-\rho)(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}} \tag{۳۶.۳}$$

این نتیجه برای تابع اکسترمال $f(z)$ داده شده در (۱۵.۳) اکیدا برقرار است.

برهان. باید نشان دهیم که

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leqslant 1-\rho \quad |z|<r_2$$

که r_2 در (۳۶.۳) داده شده است.
در واقع از (۸.۳) پیدا می‌کنیم که

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leqslant\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_k|z|^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}a_k|z|^{k-1}}$$

بنابراین

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leqslant 1 - \rho$$

اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-\rho}{1-\rho} a_k |z|^{k-1} \leqslant 1 \qquad (۳۷.۳)$$

رابطه فوق طبق قضیه ۷.۱.۳ و (۳۷.۳) درست خواهد بود اگر

$$\frac{k-\rho}{1-\rho}|z|^{k-1} \leqslant \frac{\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{1-\alpha}$$

به این معناست اگر

$$|z| \leqslant \left\{\frac{(1-\rho)\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{(k-\rho)(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}} \quad (k \geqslant 2) \qquad (۳۸.۳)$$

طبق رابطه فوق حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲۰.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده در (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ باشد، در این‌صورت $f(z)$ در $|z| < r_3$ محدب از مرتبه ρ، $(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$ است. که

$$r_3 = \inf_{k\geqslant 2} \left\{\frac{(1-\rho)\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{k(k-\rho)(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{k-1}} \qquad (۳۹.۳)$$

این نتیجه برای تابع اکسترمال $f(z)$ داده شده در (۱۵.۳) اکیدا برقرار است.

۴.۱.۳ یک خانواده از عملگرهای انتگرال

قضیه ۲۱.۱.۳. فرض کنید تابع داده شده در (۸.۳) متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ و c عدد حقیقی باشد به طوری‌که $c > -1$، آنگاه تابع $F(z)$ تعریف شده به‌صورت زیر متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ است.

$$F(z) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)\mathrm{d}t \quad (c > -1) \qquad (۴۰.۳)$$

برهان. طبق تعریف $F(z)$ می‌توان نوشت

$$F(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} d_k z^k$$

به طوری‌که

$$d_k = \frac{c+1}{c+k}|a_k| \leqslant a_k \quad (k \geqslant 2)$$

بنابراین

$$\sum_{k=2}^{\infty} k d_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c+1}{c+k}|a_k| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \leqslant 1$$

از آنجایی که $f(z) \in TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ لذا طبق قضیه ۷.۱.۳ داریم $F(z) \in TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$. □

قضیه ۲۲.۱.۳. فرض کنید تابع $F(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$، $(a_k \geqslant 0)$ متعلق به رده $TS(g,\lambda;\alpha,\beta)$ و c عدد حقیقی باشد به طوری‌که $c > -1$، آنگاه تابع $f(z)$ تعریف شده به‌صورت (۴۰.۳) در $|z| < R^*$ تک‌ارز است به طوری‌که

$$R^* = \inf_{k\geqslant 2} \left\{ \frac{(c+1)\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{k(c+k)(1-\alpha)} \right\}^{\frac{1}{k-1}} \tag{۴۱.۳}$$

برهان. طبق (۴۰.۳) داریم

$$f(z) = \frac{z^{1-c}[z^c F(z)]'}{c+1} = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c+k}{c+1} a_k z^k$$

به عبارت دیگر کافی است نشان دهیم در $|z| < R^*$، $|f'(z) - 1| < 1$ حال

$$|f'(z) - 1| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(c+k)}{c+1} a_k |z|^{k-1}$$

بنابراین

$$|f'(z) - 1| < 1$$

اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(c+k)}{c+1} a_k |z|^{k-1} < 1 \tag{۴۲.۳}$$

لذا طبق قضیه ۷.۱.۳ داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}a_k b_k}{1-\alpha} \leqslant 1 \tag{۴۳.۳}$$

از این رو (۴۲.۳) درست خواهد بود اگر

$$\frac{k(k+c)}{(c+1)}|z|^{k-1} \leqslant \frac{\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{1-\alpha}$$

به این معناست

$$|z| \leqslant \left\{ \frac{(c+1)\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k}{k(c+k)(1-\alpha)} \right\}^{\frac{1}{k-1}} \quad (k \geqslant 2) \tag{۴۴.۳}$$

بنابراین $f(z)$ در $|z| < R^*$ تک‌ارز است. نتیجه برای تابع زیر اکیدا برقرار است.

$$f(z) = z - \frac{(c+k)(1-\alpha)}{(c+1)\{k(1+\beta) - (\alpha+\beta)[1+\lambda(k-1)]\}b_k} \tag{۴۵.۳}$$

□

۲.۳ بررسی زیر رده‌های توابع تحلیلی بوسیله عملگر سالاگان تعمیم یافته شده

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید A_j رده‌ای از توابع تحلیلی در دیسک واحد U تعریف شده به‌صورت زیر باشد

$$f(z) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z^k \tag{۴۶.۳}$$

برای تابع $f(z) \in A_j$ آل-ابودی [۸] [۲] عملگر سالاگان تعمیم یافته شده را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathrm{D}_{\lambda}^{0} f(z) = f(z) \tag{۴۷.۳}$$

$$\mathrm{D}_{\lambda}^{1} f(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f'(z) = \mathrm{D}_{\lambda} f(z) \quad \lambda \geqslant 0 \tag{۴۸.۳}$$

$$\mathrm{D}_{\lambda}^{n} f(z) = \mathrm{D}_{\lambda}\left(\mathrm{D}_{\lambda}^{n-1} f(z)\right) \tag{۴۹.۳}$$

بنابراین طبق (۴۸.۳) و (۴۹.۳) داریم

$$\mathrm{D}_{\lambda}^{n} f(z) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} [1 + (k-1)\lambda]^n a_k z^k \tag{۵۰.۳}$$

تعریف ۲.۲.۳. با کمک عملگر دیفرانسیل D_{λ}^{n}، گوییم تابع $f(z)$ متعلق به A_j در رده $A_j(n,m,j,\alpha,\lambda)$ است اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{D}_{\lambda}^{n+m} f(z)}{\mathrm{D}_{\lambda}^{n} f(z)}\right\} \geqslant \alpha \left|\frac{\mathrm{D}_{\lambda}^{n+m} f(z)}{\mathrm{D}_{\lambda}^{n} f(z)} - 1\right|$$

برای بعضی $\alpha \geqslant 0$ و همه $z \in U$.

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنید زیر رده T_j شامل توابع به فرم زیر باشد

$$f(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geqslant 0)$$

لذا رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(n,m,j,\alpha,\lambda) = S_j(n,m,j,\alpha,\lambda) \cap T_j$$

[۸] Al-Oboudi

۱.۲.۳ نتایج اصلی

قضیه ۴.۲.۳. تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ است اگر وتنها اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]a_k\leqslant 1 \tag{۵۱.۳}$$

این نتیجه اکیدا برقرار است.

برهان. فرض کنیم که $f(z)\in T(n,m,j,\alpha,\lambda)$. بنابراین طبق تعریف داریم

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{D}_\lambda^{n+m}f(z)}{\mathrm{D}_\lambda^{n}f(z)}\right\}\geqslant\alpha\left|\frac{\mathrm{D}_\lambda^{n+m}f(z)}{\mathrm{D}_\lambda^{n}f(z)}-1\right|,\quad (z\in U)$$

به‌طور معادل داریم

$$Re\left\{\frac{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n+m}a_kz^{k-1}}{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}a_kz^{k-1}}\right\}\geqslant\alpha\left|\frac{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n+m}a_kz^{k-1}}{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}a_kz^{k-1}}-1\right\}$$

$$=\alpha\left|\frac{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n+m}a_kz^{k-1}-1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}a_kz^{k-1}}{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}a_kz^{k-1}}\right|$$

با انتخاب مقادیر z روی محور حقیقی به طوری‌که سمت چپ رابطه فوق حقیقی باشد و با فرض اینکه $z\to 1$ داریم

$$\left\{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n+m}a_k\right\}\geqslant\alpha\sum_{k=j+1}^{\infty}\left\{[1+\lambda(k-1)]^{n+m}-[1+\lambda(k-1)]^{n}\right\}a_k$$

که برابر است

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}\left\{(\alpha+1)[1+\lambda(k-1)]^{m}-\alpha\right\}a_k\leqslant 1$$

برعکس: فرض کنیم که رابطه (۵۱.۳) درست است بنابراین

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{D}_\lambda^{n+m}f(z)}{\mathrm{D}_\lambda^{n}f(z)}\right\}\geqslant\alpha\left|\frac{\mathrm{D}_\lambda^{n+m}f(z)}{\mathrm{D}_\lambda^{n}f(z)}-1\right|\geqslant 0.$$

$$\left[1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n+m}a_k\right]\geqslant\alpha\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[[1+\lambda(k-1)]^{n+m}-[1+\lambda(k-1)]^{n}\right]a_k$$

اگر

$$\left\{\frac{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n+m}a_kz^{k-1}}{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}a_kz^{k-1}}\right\}$$

$$-\alpha\frac{\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}\{[1+\lambda(k-1)]^{m}-1\}a_kz^{k-1}}{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}a_kz^{k-1}a_kz^{k-1}}\geqslant 0$$

لذا

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^n \{(\alpha+1)[1+\lambda(k-1)]^m - \alpha\}\, a_k \leqslant 1 .$$

$\square$

نتیجه ۵.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در اینصورت

$$0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha]} \quad (k \geqslant j+1)$$

این نتیجه برای تابع زیر اکیدا برقرار است.

$$f(z) = z - \frac{z^k}{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha]} \tag{۵۲.۳}$$

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنید $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2, \ldots$ در این‌صورت

$$T(n,m,j,\alpha_1,\lambda) \supseteq T(n,m,j,\alpha_2,\lambda)$$

برهان. فرض کنیم تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت طبق قضیه ۴.۲.۳ داریم

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha_2+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha_2]a_k \leqslant 1$$

در نتیجه

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha_1+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha_1]a_k \leqslant$$
$$\sum_{k=j+1}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha_2+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha_2]a_k$$

$\square$

قضیه ۷.۲.۳. برای $\alpha \geqslant 0$ داریم

$$T(n+1,m,j,\alpha,\lambda) \subseteq T(n,m,j,\alpha,\lambda)$$

برهان. فرض کنیم تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n+1,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت طبق قضیه ۴.۲.۳ داریم

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^{n+1}[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha]a_k \leqslant 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^{m}-\alpha]a_{k}\leqslant 1\\ \leqslant&\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n+1}[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^{m}-\alpha]a_{k}\leqslant 1\end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۸.۲.۳. برای $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 < 1$ داریم

$$T(n,m,j,\alpha,\lambda_1)\subseteq T(n,m,j,\alpha,\lambda)$$

قضیه ۹.۲.۳. $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ یک مجموعه محدب است.

برهان. فرض کنیم تابع

$$f(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}a_{k,v}z^{k},\quad (a_{k,v}\geqslant 0\,;v=1,2) \tag{۵۳.۳}$$

متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد. کافی است نشان دهیم تابع $h(z)$ تعریف شده به‌صورت زیر متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ است.

$$h(z)=\mu f_1(z)+(1-\mu)f_2(z)\quad (0\leqslant\mu\leqslant 1)$$

از آنجایی که $1 \leqslant \mu \leqslant 0$ داریم

$$h(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}[{}_{k,1}-(1-\mu)a_{k,2}]z^{k}$$

با کمک قضیه ۴.۲.۳ به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^{n}[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^{m}-\alpha][{}_{k,1}-(1-\mu)a_{k,2}]\leqslant 1$$

نشان می‌دهد که $h(z)\in T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ لذا $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ مجموعه محدب است. $\square$

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت برای $|z|=r<1$ داریم

$$|\mathrm{D}_{\lambda}^{i}f(z)|\geqslant r-\frac{r^{j+1}}{(1+\lambda)^{n-i}[(\alpha+1)(1-\lambda)^{m}-\alpha]} \tag{۵۴.۳}$$

و

$$|\mathrm{D}_{\lambda}^{i}f(z)|\leqslant r+\frac{r^{j+1}}{(1+\lambda)^{n-i}[(\alpha+1)(1-\lambda)^{m}-\alpha]} \tag{۵۵.۳}$$

برای $z\in U$ و $0\leqslant i\leqslant n$.

برهان. توجه داشته باشیم که $f(z) \in T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ اگر و تنها اگر

$$\mathrm{D}_\lambda^i f(z) \in T(n-i,m,j,\alpha,\lambda)$$

به طوری‌که

$$\mathrm{D}_\lambda^i f(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^i a_k z^k \tag{۵۶.۳}$$

طبق قضیه ۴.۲.۳ می‌دانیم که

$$\begin{aligned}
&(1+\lambda)^{n-i}[(\alpha+1)(1+\lambda)^m-\alpha]\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^i a_k\\
&\leqslant \sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]a_k \leqslant 1
\end{aligned}$$

به این معناست که

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^i a_k \leqslant \frac{1}{(1+\lambda)^{n-i}[(\alpha+1)(1+\lambda)^m-\alpha]} \tag{۵۷.۳}$$

لذا

$$\begin{aligned}
|\mathrm{D}_\lambda^i f(z)| &= |z| + r^{j+1}\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^i a_k\\
&\leqslant r + \frac{r^{j+1}}{(1+\lambda)^{n-i}[(\alpha+1)(1+\lambda)^m-\alpha]}
\end{aligned}$$

و

$$|\mathrm{D}_\lambda^i f(z)| \geqslant r - \frac{r^{j+1}}{(1+\lambda)^{n-i}[(\alpha+1)(1+\lambda)^m-\alpha]}$$

□

نتیجه ۱۱.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده به فرم (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت برای $|z| = r < 1$ داریم

$$|f(z)| \geqslant r - \frac{r^{j+1}}{(1+\lambda)^n[(\alpha+1)(1+\lambda)^m-\alpha]} \tag{۵۸.۳}$$

و

$$|f(z)| \leqslant r + \frac{r^{j+1}}{(1+\lambda)^n[(\alpha+1)(1+\lambda)^m-\alpha]}, \quad z \in U \tag{۵۹.۳}$$

برای تابع تعریف شده به‌صورت زیر نامساوی (۵۸.۳) و (۵۹.۳) تبدیل به مساوی می‌شود.

$$f(z) = z - \frac{z^{j+1}}{(1+\lambda)^n[(\alpha+1)(1+\lambda)^m-\alpha]}$$

برهان. اگر در قضیه ۱۰.۲.۳ قرار دهیم $i=1$ رابطه (۵۸.۳) و (۵۹.۳) به‌دست می‌آید. $\square$

قضیه ۱۲.۲.۳. فرض کنید $f_j(1)=z$ و

$$f_k(z)=z-\frac{z^k}{(1+\lambda(k-1))^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]}\quad (k+1;n\in\mathbb{N})$$

برای $\alpha\geqslant 0$. در این‌صورت $f(z)$ متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ است اگر وتنها اگر بتوان آنرا به‌صورت زیر بیان کرد.

$$f(z)=\sum_{k=j}^{\infty}\mu_k f_k(z) \tag{۶۰.۳}$$

به طوری‌که $\mu_k\geqslant 0$ و $\sum_{k=j}^{\infty}\mu_k=1$.

برهان. فرض کنید که

$$f(z)=\sum_{k=j}^{\infty}\mu_k f_k(z)=z-\frac{\mu_k z^k}{(1+\lambda(k-1))^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]}$$

بنابراین

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]\times$$
$$\frac{\mu_k}{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]}=\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu_k=1-\mu_j\leqslant 1.$$

لذا طبق قضیه ۴.۲.۳ داریم $f(z)\in T(n,m,j,\alpha,\lambda)$.
برعکس: فرض کنیم که تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد در این‌صورت داریم

$$a_k\leqslant\frac{1}{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]}$$

با

$$\mu_k=[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]a_k\quad (k\geqslant j+1,n\in\mathbb{N}_0)$$

و

$$\mu_j=1-\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu_k$$

بنابراین طبق رابطه فوق می بینیم که $f(z)$ را می‌توان به‌صورت (۶۰.۳) بیان کرد. $\square$

قضیه ۱۳.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت $f(z)$ در $|z| < r_1$ تقریبا محدب از مرتبه ρ، $(0 \leqslant \rho < 1)$ است. که

$$r_1 = r_1(n,m,\alpha,\lambda,\rho)$$

$$= \inf_k \left(\frac{1-\rho}{k}\right)\{1+\lambda(k-1)\}^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha\Big]^{\frac{1}{k-1}}$$

این نتیجه برای تابع اکسترمال $f(z)$ داده شده در (۵۲.۳) اکیدا برقرار است.

برهان. باید نشان دهیم که

$$|f'(z)-1| \leqslant 1-\rho \qquad |z|<r_1$$

در واقع از (۴۶.۳) پیدا می‌کنیم که

$$|f'(z)-1| \leqslant \sum_{k=j+1}^{\infty} k a_k |z|^{k-1}$$

بنابراین

$$|f'(z)-1| \leqslant 1-\rho \qquad |z|<r_1$$

اگر

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{k}{1-\rho} a_k |z|^{k-1} \leqslant 1 \tag{۶۱.۳}$$

رابطه فوق طبق قضیه ۴.۲.۳ و (۶۱.۳) درست خواهد بود اگر

$$\frac{k}{1-\rho}|z|^{k-1} \leqslant (1+\lambda(k-1))^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]$$

به این معناست اگر

$$|z| \leqslant \left(\frac{1-\rho}{k}\right)\{1+\lambda(k-1)\}^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha\Big]^{\frac{1}{k-1}}$$

طبق رابطه فوق حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۱۴.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت $f(z)$ در $|z| < r_3$ ستاره‌گون از مرتبه ρ، $(0 \leqslant \rho < 1)$ است. که

$$r_3 = r_3(n,m,\alpha,\lambda,\rho)$$

$$= \inf_k \left(\frac{1-\rho}{k-\rho}\right)\{1+\lambda(k-1)\}^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha\Big]^{\frac{1}{k-1}}$$

این نتیجه برای تابع اکسترمال $f(z)$ داده شده در (۵۲.۳) اکیدا برقرار است.

برهان. باید نشان دهیم که

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant 1-\rho \quad |z|<r_1$$

در واقع از (۴۶.۳) پیدا می‌کنیم که

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{k-\rho}{1-\rho}a_k|z|^{k-1}\leqslant 1 \tag{۶۲.۳}$$

رابطه فوق طبق قضیه ۴.۲.۳ و (۶۲.۳) درست خواهد بود اگر

$$\frac{1-\rho}{k-\rho}|z|^{k-1}\leqslant (1+\lambda(k-1))^n[(\alpha+1)(1+\lambda(k-1))^m-\alpha]$$

به این معناست اگر

$$|z|\leqslant\left(\frac{1-\rho}{k-\rho}\right)\{1+\lambda(k-1)\}^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha\Big]^{\frac{1}{k-1}}$$

طبق رابطه فوق حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۵.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت $f(z)$ در $|z|<r_2$ محدب از مرتبه ρ، $(0\leqslant\rho<1)$ است. که

$$r_2=r_2(n,m,\alpha,\lambda,\rho)$$

$$=\inf_k\left(\frac{1-\rho}{k(k-\rho)}\right)\{1+\lambda(k-1)\}^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha\Big]^{\frac{1}{k-1}}$$

این نتیجه برای تابع اکسترمال $f(z)$ داده شده در (۵۲.۳) اکیدا برقرار است.

برهان. مشابه اثبات در قضیه ۱۴.۲.۳ است. □

قضیه ۱۶.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ و c عدد حقیقی باشد به طوری‌که $c>-1$، آنگاه تابع $F(z)$ تعریف شده به‌صورت زیر متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ است.

$$F(z)=z-\int_0^z t^{c-1}f(t)\mathrm{d}t \quad (c>-1) \tag{۶۳.۳}$$

برهان. طبق تعریف $F(z)$ می‌توان نوشت

$$F(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}b_kz^k$$

به طوری‌که

$$b_k = \frac{c+1}{c+k} a_k \leqslant a_k \quad (k \geqslant 2)$$

بنابراین داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^n [(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha] b_k \leqslant$$
$$\sum_{k=2}^{\infty} [1+\lambda(k-1)]^n [(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha] a_k \leqslant 1$$

از آنجایی که $f(z) \in T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ لذا طبق قضیه ۴.۲.۳ داریم $F(z) \in T(n,m,j,\alpha,\lambda)$. $\square$

قضیه ۱۷.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده در (۴۶.۳) متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ و c عدد حقیقی باشد به طوری‌که $c > -1$، آنگاه تابع $f(z)$ تعریف شده به‌صورت (۶۳.۳) در $|z| < R^*$ تک‌ارز است به طوری‌که

$$R^* = \inf_k \left\{ \frac{(c+1)[1+\lambda(k-1)]^n [(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha]}{(c+k)} \right\}^{\frac{1}{k-1}} \quad (k \geqslant j+1)$$
(۶۴.۳)

این نتیجه اکیدا برقرار است.

برهان. طبق (۶۳.۳) داریم

$$f(z) = \frac{z^{1-c}[z^c F(z)]'}{c+1} = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{c+k}{c+1} a_k z^k$$

به عبارت دیگر کافی است نشان دهیم در $|z| < R^*$، $|F'(z) - 1| < 1$ حال

$$|F'(z) - 1| \leqslant \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{k(c+k)}{c+1} a_k |z|^{k-1}$$

بنابراین

$$|F'(z) - 1| < 1$$

اگر

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{k(c+k)}{c+1} a_k |z|^{k-1} < 1 \qquad (۶۵.۳)$$

لذا طبق قضیه ۴.۲.۳ داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{[1+\lambda(k-1)]^n [(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m - \alpha]\} \leqslant 1 \qquad (۶۶.۳)$$

بدین ترتیب

$$\frac{k(k+c)}{(c+1)}|z|^{k-1} < [1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]$$

به این معناست

$$|z| \leqslant \left\{\frac{(c+1)[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]}{(c+k)}\right\}^{\frac{1}{k-1}} \quad (k \geqslant j+1)$$

(۶۷.۳)

بنابراین $F(z)$ در $|z| < R^*$ تک‌ارز است. □

قضیه ۱۸.۲.۳. برای هر تابع $f_v(z)$ ، $(v = 1, 2)$ داده شده در (۵۳.۳) متعلق به رده $T(n, m, j, \alpha, \lambda)$ داریم:

$$f_1 * f_2(z) \in T(n, m, j, \beta, \lambda)$$

که

$$\beta = \frac{(1+\lambda)^n[(\alpha+1)(1+\lambda j)^m-\alpha]^2-(1+\lambda j)^m}{(1+\lambda j)^m-1} \qquad (۶۸.۳)$$

این نتیجه اکیدا برقرار است.

برهان. طبق روش مورد استفاده توسط شیلد [۹] و سیلورمن [۱۰] [۲۰] نیاز به پیدا کردن بزرگترین $\beta = \beta(n, m, j, \alpha, \lambda)$ داریم. به طوری‌که

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\beta+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\beta]a_{k,1}a_{k,2} \leqslant 1$$

از آنجایی‌که

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]a_{k,1} \leqslant 1$$

و

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]a_{k,2} \leqslant 1$$

با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز داریم

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]\sqrt{a_{k,1}a_{k,2}} \leqslant 1$$

---

[۹] Schild

[۱۰] Silverman

بدین ترتیب کافی است نشان دهیم که

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\beta+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\beta]a_{k,1}a_{k,2}$$
$$\leqslant \sum_{k=j+1}^{\infty}[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]\sqrt{a_{k,1}a_{k,2}}$$

به این معناست

$$\sqrt{a_{k,1}a_{k,2}} \leqslant \frac{[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]}{[(\beta+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\beta]} \quad k\geqslant j+1$$

توجه داشته باشید

$$\sqrt{a_{k,1}a_{k,2}} \leqslant \frac{1}{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]}$$

برعکس: نیاز داریم فقط ثابت کنیم که

$$\frac{1}{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]}$$

$$\leqslant \frac{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]}{[(\beta+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\beta]}$$

یا به‌طور معادل

$$\beta[\{1+\lambda(k-1)\}^m-1]+\{1+\lambda(k-1)\}^m \leqslant$$
$$[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]^2$$

$$\beta \leqslant \frac{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha]^2[1+\lambda(k-1)]^m}{[1+\lambda(k-1)]^m-1} \tag{۶۹.۳}$$

از آنجایی که سمت راست نامساوی (۶۹.۳) تابعی نزولی از k است با فرض $k=j+1$ در معادله فوق داریم

$$\beta \leqslant \frac{(1+\lambda j)^n[(\alpha+1)(1+\lambda j)^m-\alpha]^2-(1+\lambda j)^m}{(1+\lambda j)^m-1}$$

لذا حکم اصلی قضیه ۱۸.۲.۳ ثابت می‌شود. سرانجام با در نظر گرفتن تابع زیر می‌توان دید که نتیجه اکیدا برقرار است.

$$f_v(z)=z-\frac{z^{j+1}}{(1+\lambda j)^n[(\alpha+1)(1+\lambda j)^m-\alpha]} \tag{۷۰.۳}$$

□

قضیه ۱۹.۲.۳. فرض کنید $f_1(z) \in T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ و $f_2(z) \in T(n,m,j,\gamma,\lambda)$ در این‌صورت $f_1 * f_2(z) \in T(n,m,j,\xi,\lambda)$ که

$$\xi = \frac{(1+\lambda j)^n[(\alpha+1)(1+\lambda j)^m-\alpha][(\gamma+1)(1+\lambda j)^m-\gamma]-(1+\lambda j)^m}{(1+\lambda j)^m-1} \qquad (۷۱.۳)$$

نتیجه برای توابع زیر اکیدا برقرار است.

$$f_1(z) = z - \frac{z^{j+1}}{(1+\lambda j)^n[(\alpha+1)(1+\lambda j)^m-\alpha]}$$

و

$$f_2(z) = z - \frac{z^{j+1}}{(1+\lambda j)^n[(\gamma+1)(1+\lambda j)^m-\gamma]}$$

برهان. طبق روند اثبات در قضیه ۱۸.۲.۳ به‌دست می‌آوریم

$$\xi \leqslant \frac{[1+\lambda(k-1)]^n[(\alpha+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\alpha][(\gamma+1)\{1+\lambda(k-1)\}^m-\gamma]}{1+\lambda(k-1)]^m-1} - \frac{[1+\gamma(k-1)]^m}{[1+\lambda(k-1)]^m-1} \quad (k \geqslant j+1) \qquad (۷۲.۳)$$

از آنجایی که سمت راست نامساوی (۷۲.۳) تابعی نزولی از k است با فرض $k=2$ در معادله فوق رابطه (۷۱.۳) به دست می‌آید. لذا حکم اصلی قضیه ۱۸.۲.۳ ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲۰.۲.۳. فرض کنید تابع $f_v(z)$ تعریف شده به‌صورت

$$f_v(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_{k,v} z^k \quad (a_{k,v} \geqslant 0, v = 1,2,3) \qquad (۷۳.۳)$$

متعلق به رده $T(n,m,j,\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت $f_1 * f_2 * f_3(z) \in T(n,m,j,\delta,\lambda)$ که

$$\delta = \frac{(1+\lambda j)^{2n}[(\alpha+1)(1+\lambda j)^m-\alpha]^2-(1+\lambda j)^m}{(1+\lambda j)^m-1} \qquad (۷۴.۳)$$

نتیجه برای توابع زیر اکیدا برقرار است.

$$f_v(z) = z - \frac{z^{j+1}}{(1+\lambda j)^n[(\alpha+1)(1+\lambda j)^m-\alpha]^2} \qquad (۷۵.۳)$$

برهان. طبق قضیه ۱۸.۲.۳ داریم

$$f_1 * f_2(z) \in T(n,m,j,\beta,\lambda)$$

که β در (۶۸.۳) داده شده است. حال با استفاده از قضیه ۱۹.۲.۳ داریم

$$f_1 * f_2 * f_3(z) \in T(n,m,j,\delta,\lambda)$$

که δ در (۷۴.۳) داده شده است.

مراجع

[1] Acu, Mugur, and Shigeyoshi Owa. ”On some subclasses of univalent functions.” Journal of inequalities in pure and applied mathematics 6.3 (2005): 1-14.

[2] Al-Oboudi, F. M. ”On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator.” International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2004.27 (2004): 1429-1436.

[3] Aouf, M. K., and A. O. Mostafa. ”Some properties of a subclass of uniformly convex functions with negative coefficients.” Demonstratio Math 41.2 (2008): 353-370.

[4] Bharati, R., R. Parvatham, and A. Swaminathan. ”On subclasses of uniformly convex functions and corresponding class of starlike functions.” Tamkang Journal of Mathematics 28 (1997): 17-32.

[5] Cătaş, Adriana, Georgia Irina Oros, and Gheorghe Oros. ”Differential subordinations associated with multiplier transformations.” Abstract and Applied Analysis. Vol. 2008. Hindawi Publishing Corporation, 2008.

[6] Cahetterjea, S. K. ”On starlike functions.” J. Pure Math 1 (1981): 23-26.

[7] Dziok, J., and H. M. Srivastava. ”Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function.” Applied Mathematics and Computation 103.1 (1999): 1-13.

[8] Dziok, J., and H. M. Srivastava. ”Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function.” Integral Transforms and Special Functions 14.1 (2003): 7-18.

[9] Goodman, A. W. ”On uniformly convex functions.” Annales Polonici Mathematici. Vol. 56. No. 1. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1991.

[10] Goodman, Adolph W. ”Univalent functions and nonanalytic curves.” Proceedings of the American Mathematical Society 8.3 (1957): 598-601.

[11] Goodman, A. W. ”On uniformly starlike functions.” Journal of Mathematical Analysis and Applications 155.2 (1991): 364-370.

[12] Murugusundaramoorthy, G., and N. Magesh. ”A new subclass of uniformly convex functions and a corresponding subclass of starlike functions with fixed second coefficient.” J. Inequal. Pure Appl. Math 5.4 (2004): 1-10.

[13] Murugusundaramoorthy, G., and N. Magesh. ”Linear operators associated with a subclass of uniformly convex functions.” IJPAMS 3.1 (2006): 113-125.

[14] Murugusundaramoorthy, G., and Nanjundan Magesh. ”On certain subclasses of analytic functions associated with hypergeometric functions.” Applied Mathematics Letters 24.4 (2011): 494-500.

[15] Owa, S. ”On the distortion theorems. I.” Kyungpook Math. J 18.1 (1978): 53-59.

[16] Oladipo, A. T. ”On subclasses of analytic and univalent functions.” Advances in Applied Mathematical Analysis 4.1 (2009): 87-93.

[17] Ronning, F. ”On starlike functions associated with parabolic regions.” Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 45 (1991): 117-122.

[18] Ronning, Frode. ”Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions.” Proceedings of the American Mathematical Society 118.1 (1993): 189-196.

[19] Rosy, Thomas, and G. Murugusundaramoorthy. ”Fractional calculus and their applications to certain subclass of uniformly convex functions.” Far East J. Math. Sci.(FJMS) 15.2 (2004): 231-242.

[20] Schild, A., and H. Silverman. ”Convolution of univalent functions with negative coefficients.” Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 29 (1975): 99-107.

[21] Shams, Saeid, S. R. Kulkarni, and Jay M. Jahangiri. ”Classes of uniformly starlike and convex functions.” International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2004.55 (2004): 2959-2961.

[22] Srivastava, H. M., and A. A. Attiya. ”An integral operator associated with the Hurwitz–Lerch Zeta function and differential subordination.” Integral Transforms and special functions 18.3 (2007): 207-216.

[23] Silverman, Herb. ”Univalent functions with negative coefficients.” Proceedings of the American Mathematical Society 51.1 (1975): 109-116.

[24] Thomas, Rosy, Subramanian Kg, and M. Jahanairi Jay. ”Goodman-Ronning-type harmonic univalent functions.” Kyungpook Mathematical Journal 41.1 (2001): 45-45.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پوسته محدب	Convex Hull
تابع اکسترمال	Extremal Function
تابع تحلیلی	Analytic Fuction
تابع محدب	Convex Fuction
تابع همساز	Harmonic Fuction
تابع ستاره‌گون	Starlike Function
تابع تک‌ارز	Univalent Function
حاصل ضرب هادامارد	Hadamard Product
عملگر سالاگان	Salagean Operator
قضیه انحراف	Distortion Theorem
قضیه بستار	Closure Theorem
کران	Bound
نقطه بحرانی	Extreme Point
مختلط	Complex
مرتبه	Order

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

تابع تحلیلی	Analytic Function
کران	Bound
قضیه بستار	Closure Theorem
مختلط	Complex
تابع محدب	Convex Function
پوسته محدب	Convex Hull
قضیه انحراف	Distortion Theorem
نقطه بحرانی	Extreme Point
تابع اکسترمال	Extremal Function
حاصلضرب هادامارد	Hadamard Product
تابع همساز	Harmonic Function
مرتبه	Order
عملگر سالاگان	Salagean Operator
تابع ستاره‌گون	Starlike Function
تابع تک‌ارز	Univalent Function

Aabstract

in this theses coefficient estimate for subclass of$\mathcal{T}$ and distortion for $|f|$, $|f'|$ are investigated. Furthermore, subclasses of , as the class of starlike functions with negative coefficients, the class of convex functions with negative coefficients also the class of strongly starlike functions with negative coefficients and the class of strongly convex functions with negative coefficients are studied here.we investigate sufficient and necessary conditions on coefficient estimate for the class of strongly starlike functions.
latin keywords: Analytic Functions, Starlike Functions, Univalent Functions, Convex Functions

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Analysis Math

On strongly univalent functions with negative coefficients

By: Seyd Mahmoud Bagheri

Supervisor

Ahmad Zireh

September 2016