دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مقایسه تحلیلی و عددی ویژه مقادیر و ویژه توابع رده‌ای از معادلات شرودینگرگونه

زهره شکوری

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند جزی

استادان مشاور

دکتر حسن حسن‌آبادی و دکتر علی مس‌فروش

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به خانواده عزیزم

که وجودشان، امنیت
سلامتی‌شان، مایه ی آرامش
وشادیشان، شادی بخش روح و جانم است.

سپاس‌گزاری...

به‌نام آنکه هستی نام ازو یافت	فلک جنبش، زمین آرام، ازو یافت
خدایی کافرینش در سجودش	گواهی مطلق آمد بر وجودش

نظامی

سپاس خدای یکتا که به راه علم و دانش رهنمونم شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم فرمود. سپاس از دو وجود بسیار مقدس، اویی که ناتوان شد تا من به توانایی برسم، پدرم، پشتیبانی محکم و مطمئن، و اویی که موهایش سپید شد تا من روسفید شوم، مادرم، یاوری دلسوز و غمخوار همیشگی ام.
با تشکر از زحمات استاد راهنمای محترمم جناب آقای دکتر مهدی قوتمند که با خلوص نیت و مهربانی در نوشتن این پایان‌نامه یاری‌ام کردند. تشکر ویژه ای دارم از مشاورین محترمم جناب آقای دکتر حسن حسن‌آبادی که پدرانه با صبر و تحمل پاسخگوی تمام سوالاتم بودند و اطلاعاتشان را در اختیارم قرار دادند، همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که سخاوتمندانه علم خود را به بنده حقیر منتقل کردند، سپاس‌گذارم.
و همینطور از داوران گرامی آقای دکتر احسنی و آقای دکتر ناظمی که زحمت مطالعه و داوری رساله‌ی بنده را به عهده گرفتند تشکر دارم.

زهره شکوری

شهریور ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **زهره شکوری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مقایسه تحلیلی و عددی ویژه مقادیر و ویژه توابع رده‌ای از معادلات شرودینگرگونه** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی قوتمند جزی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره شکوری

شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم شرودینگرگونه را به چالش می‌کشیم که در فیزیک و علوم مهندسی از اهمیت بالایی برخوردار است. از آنجاییکه این معادلات به روش‌های متداول موجود، دارای حل دقیق نیستند، روشی حدسی کاربردی برای تعیین ویژه مقادیر و ویژه توابع این معادلات مطرح می‌کنیم که به روش تحلیلی بث آنساتز[1] معروف است، و جواب بصورت چندجمله‌ای دقیق حاصل می‌شود. جهت اطمینان از درستی نتایج، معادلات مربوطه را با روش‌های دیگر نیز حل می‌کنیم.

کلمات کلیدی: معادله شرودینگر[2]، ویژه مقادیر، ویژه توابع، روش بث آنساتز

[1] Bethe Ansatz method

[2] Schrodinger equation

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Z. Shakoori and M. Ghovatmand, (2016) ”Exact polynomial solution of Schrodinger equation with Killingbeck potential in non-commutative phase-space”, The 6th Seminar on Numerical Analysis and Its Applications, University of Maragheh.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا تاریخچه و خلاصه‌ای از هدف این پایان‌نامه را مطرح می‌کنیم و سپس تعاریف، قضایا و مفاهیم پایه‌ای قابل استفاده در فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم.

۱.۱ تاریخچه

تعریف ۱.۱.۱. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم به‌صورت کلی

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

یا به‌صورت ساده‌تر

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

می‌باشند. که اگر $R(x) = ۰$ باشد، معادله‌ی فوق را همگن می‌گوییم [۱].

معادله‌ی شرودینگر یکی از انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم، در صورت مستقل از زمان بودن به‌شکل زیر فرض می‌شود

$$\left[\frac{-\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲} + V(r)\right]\psi(r) = E\psi(r)$$

که در آن m جرم ذره، $V(r)$ انرژی پتانسیل آن، $\nabla^{۲}$ لاپلاسین، $\hbar$ ثابت پلانک، $\psi(r)$ تابع موج که معرف تابع‌ویژه و E انرژی که معرف مقدارویژه است. حل معادله‌ی شرودینگر در بعدهای دلخواه از اهمیت بالایی در فیزیک و علوم مهندسی برخوردار است. همانطور که می‌دانیم راه‌حل دقیق برای این معادله ممکن است تنها مختص چند پتانسیل و برخی از روش‌های تقریبی باشد. اخیرا مطالعات زیادی توسط ریاضیدانان و فیزیکدانان بر پتانسیل‌های ناموزون انجام گرفته است [۲، ۳]، که می‌خواهد به درک چند پدیده تازه کشف شده در زمینه‌های مختلف فیزیک بپردازد [۳].

چندین روش تقریبی برای محاسبه‌ی ویژه‌مقدار معادله‌ی شرودینگر توسط پژوهشگران بسیاری مطرح شده است، در این میان به چند مورد اشاره می‌کنیم، روش پرتاب[۱] [۴]، تبدیل پروفر[۲] تابع روش پرتاب [۵، ۶]، روش اختلال پایدار [۷، ۸]، روش تفاضل محدود [۹، ۱۰]، روش متغیر [۱۱، ۱۲]، رویکرد رونسکین[۳] [۱۳]، روش تعیین کننده‌ی هیل[۴] [۱۴، ۱۵]، تقریب WKB و JWKB [۱۶، ۱۷]، روش سری بازگشتی [۱۸]، رویکرد مسیر انتگرال [۱۹]، روش شبه طیفی[۵] مانند روش مربع گسسته‌سازی [۲۰، ۲۱] و روش شبه طیفی بر اساس تعامد کلاسیک چندجمله‌ای [۲۲، ۲۳].
در واقع می‌توان ویژه مقادیر را با روش‌های عددی و به وسیله‌ی نرم‌افزار بدست آورد اما مشکلی که کمتر به آن توجه می‌شود این است که این روش‌ها در ابعاد بالاتر به مراتب کارایی کمتری نسبت به یک بعدی دارند. با این وجود امکان دارد در بسیاری از مقالات به راه‌حل‌های عددی معادله شرودینگر برخورد کنیم [۲۴]. به عنوان مثال تاسلی[۶] و عید[۷] [۲۵]، ویژه‌مقادیر مسئله را با وجود پتانسیل ناموزون با دقت بالا و با استفاده از ترکیب چندین تابع مثلثاتی به عنوان دستگاهی در روش تغییرات ریلی–ریتز[۸] محاسبه کرده‌اند. در [۲۶] تاسلی و همکارانش یک بسط ویژه‌تابع را برای معادله‌ی شرودینگر در خصوص یک ذره در حال حرکت با یک پتانسیل غیرمرکزی دلخواه در مختصات قطبی استوانه‌ای استفاده کرده‌اند و به‌عنوان کاربرد، ویژه‌مقادیر آن را محاسبه کرده‌اند. وانگ[۹] و شائو[۱۰] [۲۷] فرمول متفاوت چند نقطه‌ای متقارن را برای این مسئله به‌کار برده‌اند و مقادیرویژه‌ی پتانسیل‌های نوسانگر هارمونیک دو بعدی و هنون–هیلیز[۱۱] بدست آوردند. برای دو پتانسیل یاد شده، لیو[۱۲] و همکارانش [۲۸] روش ماتریس تدبیر مقدارویژه را به‌کار گرفتند. مونواسیلیس[۱۳] و سیموز[۱۴] [۲۹] از روش شماره‌ی سوم استفاده کرده‌اند. کالوگیراتو[۱۵] و همکارانش [۳۰] روش نامرو[۱۶] را به‌کار برده‌اند.
با این‌حال در این رساله سعی بر این بوده است که معادلات شرودینگرگونه را با روشی تحلیلی معروف به بث آنساتز به گونه‌ای حل کنیم که جواب آن به‌صورت چندجمله‌ای باشد با ریشه‌هایی که از دستگاه معادلات آنساتز حاصل می‌شوند و در نهایت موجب تشکیل تابع موج (تابع‌ویژه) می‌شوند، همچنین به‌طور همزمان ویژه‌مقدار را تعیین می‌کنیم.

۲.۱ مفاهیم اولیه

قابل ذکر است که تمامی مفاهیم بیان شده در این بخش از [۳۱] تا [۳۳] جمع‌آوری شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. توابع مختلط
فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد که می‌توانیم آن را به‌صورت مجموعه‌ای از نقاط، در صفحه مختلط تصور کنیم. منظور ما از متغیر مختلط، عدد مختلط $z = x + iy$ است که می‌تواند هر مقدار از مجموعه‌ی E را بپذیرد، و منظور از تابع مختلط W از متغیر z، قاعده‌ای است که به هر z

[۱] Shooting
[۲] Prufer
[۳] Wronskian
[۴] Hill
[۵] Pseudospectral
[۶] Taseli
[۷] Eid
[۸] Reyleigh-Ritz
[۹] Wang
[۱۰] Shao
[۱۱] Henon-Heiles
[۱۲] Liu
[۱۳] Monovasilis
[۱۴] Simos
[۱۵] Kalogiratou
[۱۶] Namerov

متعلق به E یک عدد مختلط یکتای W را نسبت می‌دهد. در این‌صورت می‌نویسیم $W = f(z)$ و E را حوزه‌ی تابع می‌خوانیم.

تعریف ۲.۲.۱. مشتق توابع مختلط
می‌گوییم تابع مختلط $f(z)$ که در حوزه‌ی G تعریف شده است در یک نقطه‌ی G مانند z مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود و متناهی باشد

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \qquad (z, z+\Delta z \in G)$$

حد فوق را با $f'(z)$ نشان داده، آن را مشتق $f(z)$ در z گویند.

تعریف ۳.۲.۱. توابع تحلیلی[۱۷]
تابع $f(z)$ را در حوزه‌ی G تحلیلی گویند، هرگاه $f(z)$ در هر نقطه‌ی G مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی z تحلیلی گویند اگر $f(z)$ در یک همسایگی z تحلیلی باشد.

مثال ۴.۲.۱. تابع

$$f(z) = z^2$$

در تمام صفحه‌ی z مشتق‌پذیر است، زیرا واضح است که حد

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z + \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$$

موجود و در هر نقطه‌ی متناهی z برابر $2z$ است.

تعریف ۵.۲.۱. سری‌ها و مجموع‌های جزئی
فرض می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{1.1}$$

یک سری نامتناهی است، که تمام جملات آن اعداد مختلط هستند (به‌طور خلاصه می‌گوییم سری مختلط)، و همچنین فرض می‌کنیم

$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

مجموع جزئی nام سری (۱.۱)، یعنی مجموع n جمله‌ی اول (۱.۱) است، آنگاه می‌گوییم دنباله‌ی نامتناهی اعداد مختلط

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \tag{2.1}$$

به‌وسیله‌ی سری (۱.۱) تولید شده است، برعکس، سری اصلی (۱.۱) به‌آسانی از (۲.۱) به‌دست می‌آید، فقط کافی‌است توجه کنیم که (۱.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots$$

[۱۷] Analytic function

تعریف ۶.۲.۱. می‌گوییم سری (۱.۱) همگراست (یا به s همگراست)، اگر دنباله‌ی متناظر (۲.۱) به حد متناهی s همگرا باشد؛ آنگاه s را مجموع سری (۱.۱) می‌گوییم. به‌طور خلاصه‌تر، سری (۱.۱) به مجموع s همگراست اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

اگر دنباله‌ی (۲.۱) به یک حد متناهی همگرا نباشد، می‌گوییم سری (۱.۱) واگراست.

تعریف ۷.۲.۱. بسط لوران یک تابع تحلیلی
سری زیر را تعریف می‌کنیم

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{۳.۱}$$

که به‌عنوان مجموع دو سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}(z-a)^{-m} \tag{۴.۱}$$

تعبیر می‌شود. سری (۳.۱) که شامل توان‌های مثبت و منفی $z-a$ است به سری لوران معروف است. سری لوران، معرف یک تابع تحلیلی در ناحیه‌ی همگرایی‌اش (یک حلقه) است.

تعریف ۸.۲.۱. نقطه منفرد[۱۸]

z_0 برای تابع $f(z) \neq 0$ که در G تحلیلی باشد یک نقطه‌ی منفرد است در صورتیکه یک همسایگی z_0 وجود دارد که در آن غیر از خود z_0 صفر دیگری نیست.

تعریف ۹.۲.۱. نقاط تکین منفرد[۱۹]

یک نقطه‌ی z_0 مفروض است، گیریم $f(z)$ یک تابع تحلیلی یک مقداری است که در هر نقطه‌ی یک همسایگی z_0، تعریف شده است. در این‌صورت z_0 را یک نقطه‌ی تکین منفرد $f(z)$ می‌نامند. فرض می‌کنیم $f(z)$ در z_0 دارای یک نقطه تکین منفرد است. لذا بسط لوران $f(z)$ را در نقطه‌ی z_0 به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{۵.۱}$$

حال سه حالت زیر وجود دارد:

- سری (۵.۱) شامل هیچ توان منفی $z-z_0$ نیست، در این حالت z_0 را یک نقطه‌ی تکین برداشتنی می‌نامند.

[۱۸] Isolated
[۱۹] Singular point

- سری (۱.۵) فقط شامل تعدادی متناهی از توان‌های منفی $z - z_\circ$ است، در این حالت $z_\circ$ را یک قطب[20] می‌گویند.

- سری (۱.۵) شامل تعداد بینهایت از توان‌های منفی $z - z_\circ$ است، در این حالت $z_\circ$ را یک نقطه‌ی تکین اساسی می‌خوانند.

در اینجا فقط به بررسی قطب‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱۰. قطب
فرض می‌کنیم $z_\circ$ یک قطب $f(z)$ است، یعنی فرض می‌کنیم که سری (۱.۵) فقط شامل تعدادی متناهی از توان‌های منفی $z - z_\circ$ است. گیریم بالاترین توان $\frac{1}{(z-z_\circ)}$ که در (۱.۵) ظاهر می‌شود m باشد، به قسمی که

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n (z - z_\circ)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_\circ} + \frac{c_{-2}}{(z - z_\circ)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z - z_\circ)^m} \qquad (۱.۶)$$

که درآن $c_{-m} \neq \circ$. در این‌صورت نقطه‌ی $z_\circ$ یک قطب مرتبه‌ی mام $f(z)$ نامیده می‌شود. به‌ویژه اگر $m = 1$، $z_\circ$ را یک قطب ساده، و اگر $m > 1$، آن را قطب چندگانه می‌گویند.

تعریف ۱.۲.۱۱. مانده[21]
فرض می‌کنیم $z_\circ$ یک نقطه تکین منفرد تابع $f(z)$ است، در این‌صورت منظور از مانده‌ی $f(z)$ در $z_\circ$ که با

$$Res\, f(z)_{z=z_\circ}$$

نشان داده می‌شود، ضریب c_{-1} در بسط لوران زیر است

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_\circ)^n$$

توجه کنید که اگر $z_\circ$ یک قطب یا یک نقطه‌ی تکین اساسی باشد ممکن است مانده‌ی $f(z)$ در $z_\circ$ صفر یا مخالف صفر باشد، اما اگر $z_\circ$ یک نقطه تکین برداشتنی باشد، مانده خودبه‌خود صفر است.

محاسبه‌ی مانده
حال نشان می‌دهیم که چگونه مانده‌ها را در یک قطب ساده محاسبه می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $z_\circ$ یک قطب ساده‌ی $f(z)$ است، به‌طوریکه $f(z)$ در یک همسایگی سفته‌ی $z_\circ$، بسط لورانی به‌صورت زیر دارد

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_\circ} + c_\circ + c_1 (z - z_\circ) + \ldots$$

[20] Pole
[21] Residue

در این‌صورت

$$(z-z_\circ)f(z)=c_{-۱}+c_\circ(z-z_\circ)+c_۱(z-z_\circ)^۲+\dots$$

که در آن، طرف راست یک سری توانی معمولی است و لذا در $z_\circ$ پیوسته است. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$c_{-۱}=Resf(z)_{z=z_\circ}=\lim_{z=z_\circ}(z-z_\circ)f(z) \tag{۷.۱}$$

محاسبه بسیار ساده است، اگر $f(z)$ به‌شکل

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

باشد، که در آن $\varphi(z_\circ)\neq\circ$ و $z_\circ$ یک صفر ساده‌ی $\psi(z)$ است، یعنی $\psi(z_\circ)=\circ$، $\psi'(z_\circ)\neq\circ$. آنگاه $z_\circ$ یک قطب ساده‌ی $f(z)$ است، و از آنجا بنا به (۷.۱)،

$$\begin{aligned}Resf(z)_{z=z_\circ}&=Res_{z\to z_\circ}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_\circ}\frac{(z-z_\circ)\varphi(z)}{\psi(z)}\\&=\lim_{z\to z_\circ}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_\circ)}{(z-z_\circ)}}=\frac{\varphi(z_\circ)}{\psi'(z_\circ)}\end{aligned} \tag{۸.۱}$$

حال فرض می‌کنیم $z_\circ$ یک قطب مرتبه‌ی $m>۱$ام $f(z)$ باشد. در این‌صورت بسط لوران $f(z)$ در $z_\circ$ به‌صورت زیر است

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_\circ)^m}+\dots+\frac{c_{-۱}}{z-z_\circ}+c_\circ+c_۱(z-z_\circ)+\dots$$

و لذا

$$\begin{aligned}(z-z_\circ)^mf(z)&=c_{-m}+\dots+c_{-۱}(z-z_\circ)^{m-۱}\\&\quad+c_\circ(z-z_\circ)^m+c_۱(z-z_\circ)^{m+۱}+\dots\end{aligned} \tag{۹.۱}$$

از (۹.۱)، $m-۱$ بار مشتق می‌گیریم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}[(z-z_\circ)^mf(z)]&=(m-۱)!c_{-۱}+\frac{m!}{۱!}c_\circ(z-z_\circ)\\&\quad+\frac{(m+۱)!}{۲!}c_۱(z-z_\circ)^۲+\dots\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(m-۱)!c_{-۱}=\lim_{z\to z_\circ}\frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}[(z-z_\circ)^mf(z)]$$

یا

$$c_{-۱}=Resf(z)_{z=z_\circ}=\lim_{z\to z_\circ}\frac{۱}{(m-۱)!}\frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}[(z-z_\circ)^mf(z)] \tag{۱۰.۱}$$

توجه کنید که اگر $m=۱$، (۱۰.۱) به (۷.۱) تبدیل می‌شود.

مثال ۱.۲.۱۲. رابطه‌ی بدست آمده از (۱.۰۱) را در مورد تابع $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^n}$ در نقطه‌ی $z=1$ به کار می‌بریم

$$Res\left(\frac{e^z}{(z-1)^n}\right)_{z=1}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}e^z}{dz^{n-1}}=\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(n-1)!}=\frac{e}{(n-1)!}$$

چندجمله‌ای‌های متعامد

تعریف ۱.۲.۱۳. گوییم $\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n\}$ یک مجموعه‌ی متعامد از توابع برای بازه‌ی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ است اگر

$$\int_a^b \omega(x)\phi_j(x)\phi_k(x)\,dx=\begin{cases}0 & j\neq k\\ \alpha_k>0 & j=k\end{cases}$$

قضیه ۱.۲.۱۴. مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های $\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n\}$ تعریف شده به طریق زیر، بر بازه‌ی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامد است

$$\phi_0(x)=1$$
$$\phi_1(x)=x-B_1\,,\ a\leq x\leq b \text{ به ازای هر}$$

که در آن

$$B_1=\frac{\int_a^b x\omega(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}{\int_a^b \omega(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}$$

وقتی $k\geq 2$،

$$\phi_k(x)=(x-B_k)\phi_{k-1}(x)-C_k\phi_{k-2}(x)\,,\ a\leq x\leq b \text{ به ازای هر}$$

که در آن

$$B_k=\frac{\int_a^b x\omega(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx}{\int_a^b \omega(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx}$$

و

$$C_k=\frac{\int_a^b x\omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx}{\int_a^b \omega(x)[\phi_{k-2}(x)]^2\,dx}$$

برهان. به استقرا بر k، نشان می‌دهیم که

$$\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_i(x)\,dx=0\,,\ i<k$$

به ازای $k = 1$

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x)\phi_1(x)\phi_0(x)\,dx &= \int_a^b \omega(x)(x-B_1)\,dx\\ &= \int_a^b x\omega(x)\,dx - B_1\int_a^b \omega(x)\,dx\\ &= \int_a^b x\omega(x)[\phi_0(x)]^2\,dx\\ &- \left[\frac{\int_a^b x\omega(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}{\int_a^b \omega(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}\right]\int_a^b \omega(x)[\phi_0(x)]^2\,dx = 0\end{aligned}$$

فرض کنیم نتیجه به ازای $k = n-1$ درست باشد. در اینصورت

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x)\phi_n(x)\phi_{n-1}(x)\,dx &= \int_a^b \omega(x)[(x-B_n)\phi_{n-1}(x) - C_n\phi_{n-2}(x)]\,.\,\phi_{n-1}(x)\,dx\\ &= \int_a^b \omega(x)(x-B_n)[\phi_{n-1}(x)]^2\,dx\\ &= \int_a^b x\omega(x)[\phi_{n-1}(x)]^2\,dx - B_n\int_a^b \omega(x)[\phi_{n-1}(x)]^2\,dx = 0\end{aligned}$$

به همین نحو می‌توان نشان داد که

$$\int_a^b \omega(x)\phi_n(x)\phi_{n-2}(x)\,dx = 0$$

به ازای $i < n-2$

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x)\phi_n(x)\phi_i(x)\,dx &= \int_a^b \omega(x)[(x-B_n)\phi_{n-1}(x) - C_n\phi_{n-2}(x)]\,\phi_i(x)\,dx\\ &= \int_a^b \omega(x)x\phi_{n-1}(x)\phi_i(x)\,dx\\ &= \int_a^b \omega(x)\phi_{n-1}(x)[\phi_{i+1}(x) + B_{i+1}\,.\,\phi_i(x) + C_{i+1}\phi_{i-1}(x)]\,dx = 0\end{aligned}$$

□

درونیابی

تعریف ۱.۲.۱۵. مسئله‌ی تعیین یک چندجمله‌ای از درجه‌ی یک که از نقاط متمایز (x_0, y_0) و (x_1, y_1) می‌گذرد را در نظر می‌گیریم. این مسئله عبارت است از تقریب‌سازی یک تابع مانند f، که $f(x_0) = y_0$ و $f(x_1) = y_1$، به‌وسیله‌ی یک چندجمله‌ای درجه‌ی اول که با مقادیر f در نقاط مفروض حالت درونیابی دارد یا با آن‌ها یکی است. اگر

$$P(x) = a_0 + a_1 x \qquad (۱.۱۱)$$

چندجمله‌ای باشد، a_0 و a_1 باید در روابط زیر صدق کنند

$$y_0 = P(x_0) = a_0 + a_1\, x_0$$
$$y_1 = P(x_1) = a_0 + a_1\, x_1$$

با حل این معادلات نسبت به a_0 و a_1 داریم

$$a_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$
$$a_0 = y_1 - a_1 x_1 = y_1 - (\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}) x_1$$

با جایگذاری مقادیر a_0 و a_1 در معادله‌ی (۱۱.۱)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} P(x) &= y_1 - (\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}) x_1 + (\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}) x \\ &= \frac{y_1(x_0 - x_1) - x_1(y_0 - y_1) + x(y_0 - y_1)}{x_0 - x_1} \\ &= \frac{y_1(x_0 - x_1 + x_1 - x)}{x_0 - x_1} + \frac{y_0(-x_1 + x)}{x_0 - x_1} \\ &= \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 \end{aligned}$$

واضح است که با نوشتن $P(x)$ به شکل اخیر خواهیم داشت $P(x_0) = y_0$ و $P(x_1) = y_1$. با این روش می‌توان مقادیر یک تابع را بین دو مقدار ثبت شده تقریب کرد. برای تعمیم مفهوم درونیابی خطی، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n می‌یابیم که از نقاط $n + 1$ نقطه‌ی معلوم بگذرد. این کار را می‌توان یک روش تقریبی دانست که در آن به ازای تابع معلوم f، چندجمله‌ایی مانند P می‌یابیم که با مقادیر تابع در نقاطی معلوم یکی بوده، و سپس، چندجمله‌ای P را برای تقریب f در نقاط دیگر بکار می‌بریم. روند درونیابی که هم‌اکنون به اختصار توضیح داده شد به تفصیل در قضیه‌ی بعد توصیف می‌شود. این چندجمله‌ای شکل لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب نامیده می‌شود.

قضیه ۱۶.۲.۱. هرگاه $x_1, x_2, \ldots, x_n$، $(n + 1)$ نقطه‌ی متمایز بوده و f تابعی با مقادیر معلوم در این نقاط باشد، آنگاه چندجمله‌ای منحصر بفردی مانند P، از درجه‌ی حداکثر n، وجود دارد با این خاصیت که،

$$f(x_k) = P(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

این چندجمله‌ای با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$P(x) = f(x_0)\ell_{n,0}(x) + \ldots + f(x_n)\ell_{n,n}(x) \tag{۱۲.۱}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_{n,k}(x) \tag{۱۳.۱}$$

که در آن به ازای $k = ۰, ۱, \dots, n$،

$$\ell_{n,k} = \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)\dots(x-x_{k-۱})(x-x_{k+۱})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_۰)(x_k-x_۱)\dots(x_k-x_{x-۱})(x_k-x_{k+۱})\dots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=۰\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \tag{۱۴.۱}$$

وقتی در مورد درجه اشتباهی رخ ندهد، به‌جای $\ell_{n,k}(x)$ فقط می‌نویسیم $\ell_k(x)$.

برهان. توجه کنید که چندجمله‌ای ℓ_k به‌ازای هر $k = ۰, ۱, \dots, n$ از درجه‌ی n است و به‌علاوه، به ازای هر $i = ۰, ۱, \dots, n$

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} ۰ & k \neq i \\ ۱ & k = i \end{cases}$$

از این‌رو، به‌ازای $i = ۰, ۱, \dots, n$، $P(x_i) = \sum_{k=۰}^{n} f(x_k)\,\ell_k(x_i) = f(x_i)\,\ell_i(x_i) = f(x_i)$. چون هر ℓ_k یک چندجمله‌ای درجه‌ی n است، P یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n است و وجود Pای صادق در $P(x_k) = f(x_k)$ ثابت می‌شود. □

همچنین اگر نام‌گذاری $\psi_n(x) = (x-x_۰)(x-x_۱)\dots(x-x_n)$ را داشته باشیم، آنگاه تعریف (۱۴.۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\ell_{n,k}(x) = \frac{\psi_n(x)}{(x-x_k)\psi'_n(x_k)}$$

$\ell_{n,k}(x)$ به چندجمله‌ای‌های لاگرانژ معروف هستند.

تابع گاما

تعریف ۱۷.۲.۱. برای $x > ۰$ تابع $\Gamma(x)$ به‌وسیله‌ی انتگرال زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(x) = \int_۰^\infty t^{x-۱}\, e^{-t}\, dt$$

همچنین به‌ازای هر n صحیح مثبت، خواص زیر را می‌توان برای این تابع در نظر گرفت

$$\Gamma(n) = (n-۱)!$$
$$\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$$

فصل ۲

روش شبه طیفی لاگور

معادله شرودینگر دو بعدی مستقل از زمان را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$\left[-\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}-\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}+V(x,y)\right]\psi(x,y)=E\psi(x,y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^۲ \tag{۱.۲}$$

به‌طوریکه شرط مرزی برای آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{\|r\|\to\infty}\psi(r)=۰, \qquad r=(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \tag{۲.۲}$$

که $V(x,y)$ پتانسیل، $E(x,y)$ و $\psi(x,y)$ به‌ترتیب مقدارویژه و تابع موج معادله هستند. این معادله در مرجع [۲۴] با روش شبه طیفی هرمیتی حل شده است.
معادله شرودینگر شعاعی را در بعد M در نظر می‌گیریم

$$\left[-\frac{d^۲}{dr^۲}-\frac{M-۱}{r}\frac{d}{dr}+\frac{\ell(\ell+M-۲)}{r^۲}+V(r)\right]R^{(M)}_{n,\ell}(r)=E^{(M)}_{n,\ell}\,R^{(M)}_{n,\ell}(r), \tag{۳.۲}$$
$$R^{(M)}_{n,\ell}(r)\in L^۲(۰,\infty)$$

به‌همراه پتانسیل متفاوت به فرم $V(\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲+\ldots+x_M^۲})=V(r)$ که به‌صورت مختصات کروی M بعدی $r^۲=\sum_{i=۱}^{M}x_i^۲$ نشان داده می‌شود. معادله شعاعی شرودینگر M بعدی، موضوع بسیاری از روش‌های محاسباتی شده است. رایج‌ترین نوع مطالعه‌ی معادله‌ی (۳.۲)، حالت سه بعدی با $M=۳$ است که تبدیل می‌شود به

$$\left[-\frac{d^۲}{dr^۲}-\frac{۲}{r}\frac{d}{dr}+\frac{\ell(\ell+۱)}{r^۲}+V(r)\right]R(r)=E\,R(r) \tag{۴.۲}$$

با استفاده از تبدیل $\psi(r)=rR(r)$ داریم

$$\frac{d}{dr}R(r)=-\frac{۱}{r^۲}\psi(r)+\frac{۱}{r}\psi'(r)$$
$$\frac{d^۲}{dr^۲}R(r)=\frac{۲}{r^۳}\psi(r)-\frac{۲}{r^۲}\psi'(r)+\frac{۱}{r}\psi''(r)$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله‌ی (۴.۲) خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&-\Big[\frac{2}{r^3}\psi(r)-\frac{2}{r^2}\psi'(r)+\frac{1}{r}\psi''(r)\Big]-\frac{2}{r}\Big[-\frac{1}{r^2}\psi(r)+\frac{1}{r}\psi'(r)\Big]\\
&+\Big[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+V(r)\Big]\frac{1}{r}\psi(r)=\frac{1}{r}E\,\psi(r)
\end{aligned}
$$

که در اینصورت از عبارت $\frac{1}{r}$ فاکتور می‌گیریم

$$
\frac{1}{r}\Big[-\frac{2}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r^2}-\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+V(r)\Big]\psi(r)=\frac{1}{r}E\,\psi(r)
$$

پس از ساده کردن عبارات فوق معادله‌ی زیر حاصل می‌شود

$$
\Big[-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+V(r)\Big]\psi(r)=E\,\psi(r) \tag{۵.۲}
$$

همانطور که مشاهده می‌شود، مشتق مرتبه‌ی اول از معادله‌ی (۴.۲) حذف شده است. جالب است توجه کنید که معادله‌ی فوق می‌تواند بدون هیچ تبدیلی، فقط با قرار دادن $M=1$ و جابجایی ℓ با $\ell+1$ حاصل شود، بنابراین رابطه‌ی میان زوج‌های $\{\varepsilon_{n,\ell},\psi_{n,\ell}\}$ و $\{E_{n,\ell},R_{n,\ell}\}$ از معادلات (۳.۲) و (۵.۲) به‌صورت زیر است

$$
\varepsilon_{n,\ell}=E^{(1)}_{n,\ell+1}\,,\qquad\qquad \psi_{n,\ell}(r)=R^{(1)}_{n,\ell+1}(r) \tag{۶.۲}
$$

به‌طور خاص، معادله‌ی شرودینگر (۵.۲) را به‌وسیله‌ی یک معادله به فرم زیر مطالعه می‌کنیم

$$
\sigma(\xi)y''+\tau(\xi)y'+Q(\xi)y=-\lambda y \tag{۷.۲}
$$

که معادله‌ی فوق را معادله‌ی نوع فوق هندسی همراه با اختلال (EHTP)[1] می‌نامیم که در اینجا $\sigma(\xi)$ و $\tau(\xi)$ چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی ۲ و ۱ هستند و λ یک پارامتر است. در واقع، برای مورد خاص $Q(\xi)=0$، معادله‌ی (۷.۲) به معادله‌ی شناخته شده‌ای از نوع فوق هندسی که راه‌حل‌های مناسبی به‌صورت چندجمله‌ای متعامد کلاسیک دارد کاهش می‌یابد. براین اساس، معادله‌ی شعاعی شرودینگر (۳.۲) را به یک EHTP تبدیل می‌کنیم، به این‌صورت که ابتدا تغییرمتغیر زیر را معرفی می‌کنیم

$$
\xi=(cr)^\alpha\,,\qquad \alpha,c>0\,,\ \xi\in(0,\infty) \tag{۸.۲}
$$

در اینصورت روابط زیر را داریم

$$
\begin{aligned}
r&=\frac{1}{c}\xi^{\frac{1}{\alpha}}\\
\frac{dR}{dr}&=\frac{dR}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dr}=\alpha c^\alpha r^{(\alpha-1)}\frac{dR}{d\xi}=\alpha c^\alpha\frac{1}{c^{\alpha-1}}\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{dR}{d\xi}=\alpha c\,\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{dR}{d\xi}\\
\frac{d^2R}{dr^2}&=\Big(\alpha c\,\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d}{d\xi}\Big)\cdot\Big(\alpha c\,\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{dR}{d\xi}\Big)=\alpha c\,\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\Big(\alpha c(\frac{\alpha-1}{\alpha})\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha}-1)}\frac{dR}{d\xi}\\
&\quad+\alpha c\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d^2R}{d\xi^2}\Big)=\alpha c\,\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\Big(c(\alpha-1)\xi^{(\frac{-1}{\alpha})}\frac{dR}{d\xi}+\alpha c\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d^2R}{d\xi^2}\Big)\\
&=c^2\alpha(\alpha-1)\xi^{(\frac{\alpha-2}{\alpha})}\frac{dR}{d\xi}+(\alpha c)^2\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d^2R}{d\xi^2}
\end{aligned}
$$

[1] Equation of Hypergeometric Type with a Perturbation

روابط فوق را در معادله‌ی (۳.۲) قرار می‌دهیم

$$\Big\{-\Big(c^{2}\alpha(\alpha-1)\xi^{(\frac{\alpha-2}{\alpha})}\frac{d}{d\xi}+(\alpha c)^{2}\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d^{2}}{d\xi^{2}}\Big)-\frac{c(M-1)}{\xi^{(\frac{1}{\alpha})}}\Big(\alpha c\,\xi^{(\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d}{d\xi}\Big)$$
$$+\frac{c^{2}\ell(\ell+M-2)}{\xi^{(\frac{2}{\alpha})}}+V(\xi^{(\frac{1}{\alpha})}/c)\Big\}R(\xi)=E\,R(\xi)$$

پس از ساده کردن روابط فوق خواهیم داشت

$$\Big\{-(\alpha c)^{2}\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d^{2}}{d\xi^{2}}-\Big(c^{2}\alpha(\alpha-1)\xi^{(\frac{\alpha-2}{\alpha})}+c^{2}\alpha(M-1)\xi^{(\frac{\alpha-2}{\alpha})}\Big)\frac{d}{d\xi}$$
$$+\frac{c^{2}\ell(\ell+M-2)}{\xi^{(\frac{2}{\alpha})}}+V(\xi^{(\frac{1}{\alpha})}/c)\Big\}R(\xi)=E\,R(\xi) \qquad (۹.۲)$$

حال از تبدیل زیر برای تغییر تابع موج استفاده می‌کنیم

$$R(\xi)=\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi) \qquad (۱۰.۲)$$

در اینصورت مشتقات آن را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{d\xi}&=\frac{\ell}{\alpha}\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-1)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)-\frac{1}{2}\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)+\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y'(\xi)\\
\frac{d^{2}R}{d\xi^{2}}&=\frac{\ell}{\alpha}(\frac{\ell}{\alpha}-1)\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-2)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)-\frac{\ell}{2\alpha}\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-1)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)+\frac{\ell}{\alpha}\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-1)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y'(\xi)\\
&-\frac{\ell}{2\alpha}\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-1)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)+\frac{1}{4}\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)-\frac{1}{2}\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y'(\xi)\\
&+\frac{\ell}{\alpha}\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-1)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y'(\xi)-\frac{1}{2}\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y'(\xi)+\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y''(\xi)\\
&=\frac{\ell}{\alpha}(\frac{\ell}{\alpha}-1)\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-2)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)-\frac{\ell}{\alpha}\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-1)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)+\frac{2\ell}{\alpha}\xi^{(\frac{\ell}{\alpha}-1)}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y'(\xi)\\
&+\frac{1}{4}\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y(\xi)-\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y'(\xi)+\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}y''(\xi)
\end{aligned}$$

روابط بدست آمده از بالا را در معادله‌ی (۹.۲) قرار می‌دهیم

$$\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}\Big\{-(\alpha c)^{2}\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}\Big(\frac{\ell}{\alpha}(\frac{\ell}{\alpha}-1)\xi^{-2}-\frac{\ell}{\alpha}\xi^{-1}+\frac{2\ell}{\alpha}\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}+\frac{1}{4}-\frac{d}{d\xi}$$
$$+\frac{d^{2}}{d\xi^{2}}\Big)-\Big(c^{2}\alpha(\alpha-1)\xi^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}+\alpha c^{2}(M-1)\xi^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\Big)\Big(\frac{\ell}{\alpha}\xi^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{d}{d\xi}\Big)$$
$$+\frac{c^{2}\ell(\ell+M-2)}{\xi^{\frac{2}{\alpha}}}+V(\xi^{\frac{1}{\alpha}/c})\Big\}y(\xi)=\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi}{2}}\,E\,y(\xi)$$

عبارت $\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\, e^{-\frac{\xi}{2}}$ را از طرفین حذف می‌کنیم و پس از مرتب کردن روابط فوق داریم

$$\begin{aligned}
&\Big\{ -(\alpha c)^2\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}\frac{d^2}{d\xi^2} - (\alpha c)^2\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}\big(\frac{2\ell}{\alpha}\xi^{-1}-1\big)\frac{d}{d\xi} - \big(c^2\alpha(\alpha-1)\xi^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \\
&+ \alpha c^2(M-1)\xi^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\big)\frac{d}{d\xi} - (\alpha c)^2\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}\big(\frac{\ell}{\alpha}(\frac{\ell}{\alpha}-1)\xi^{-2} - \frac{\ell}{\alpha}\xi^{-1}+\frac{1}{4}\big) \\
&- \big(c^2\alpha(\alpha-1)\xi^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} + \alpha c^2(M-1)\xi^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\big)\,\big(\frac{\ell}{\alpha}\xi^{-1}-\frac{1}{2}\big) + \frac{c^2\ell(\ell+M-2)}{\xi^{\frac{2}{\alpha}}} \\
&+ V(\xi^{\frac{1}{\alpha}}/c)\Big\}y(\xi) = E\,y(\xi)
\end{aligned}$$

طرفین معادله‌ی فوق را بر عبارت $-(\alpha c)^2\xi^{(2\frac{\alpha-1}{\alpha})}$ تقسیم می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\Big\{\frac{d^2}{d\xi^2} + \big(\frac{2\ell}{\alpha}\,\xi^{-1} - 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\xi^{-1} + \frac{M-1}{\alpha}\,\xi^{-1}\big)\frac{d}{d\xi} + \frac{\ell}{\alpha}\,\big(\frac{\ell}{\alpha}-1\big)\,\xi^{-2} \\
&- \frac{\ell}{\alpha}\,\xi^{-1} + \frac{1}{4} + \big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\,\xi^{-1} + \frac{M-1}{\alpha}\,\xi^{-1}\big)\big(\frac{\ell}{\alpha}\,\xi^{-1}-\frac{1}{2}\big) \\
&- \frac{\ell(\ell+M+2)}{\alpha^2}\,\xi^{-2} - \frac{V(\xi^{\frac{1}{\alpha}}/c)}{(\alpha c)^2}\,\xi^{\frac{2}{\alpha}-2}\Big\}y(\xi) = -\frac{E}{(\alpha c)^2}\,\xi^{\frac{2}{\alpha}-2}\,y(\xi)
\end{aligned}$$

حال طرفین رابطه‌ی بالا را در یک متغیر ξ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\Big\{\xi\frac{d^2}{d\xi^2} + \big(\frac{2\ell}{\alpha} - \xi + \frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{M-1}{\alpha}\big)\frac{d}{d\xi} + \frac{\ell}{\alpha}\,\big(\frac{\ell}{\alpha}-1\big)\,\xi^{-1} - \frac{\ell}{\alpha} + \frac{1}{4}\xi \\
&+ \big(\frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{M-1}{\alpha}\big)\big(\frac{\ell}{\alpha}\xi^{-1}-\frac{1}{2}\big) - \frac{\ell(\ell+M+2)}{\alpha^2}\,\xi^{-1} - \frac{V(\xi^{\frac{1}{\alpha}}/c)}{(\alpha c)^2}\xi^{\frac{2}{\alpha}-1}\Big\}y(\xi) \\
&= -\frac{E}{(\alpha c)^2}\,\xi^{\frac{2}{\alpha}-1}\,y(\xi)
\end{aligned}$$

در نهایت با ساده کردن معادله‌ی بالا داریم

$$\xi y'' + (\gamma - \xi + 1)y' + Q(\xi)y = \lambda\xi^{\frac{2}{\alpha}-1}y \qquad (۲.۱۱)$$

به‌طوریکه γ پارامتری است به‌صورت

$$\gamma = \gamma(\alpha,\ell,M) = \frac{1}{\alpha}(2\ell + M - 2) \qquad (۲.۱۲)$$

و همینطور

$$\lambda = \lambda_n(\alpha, c) = -\frac{1}{(\alpha c)^2}E_{n,\ell}^{(M)} \qquad (۲.۱۳)$$

مقدار انرژی را دوباره پارامترسازی کردیم و همچنین پتانسیل را در حضور متغیر جدید اصلاح کردیم

$$\begin{aligned}
Q = Q(\xi;\alpha,c,\gamma) &= \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}\big(\frac{M-1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + \frac{2\ell}{\alpha} + 1\big) - \frac{V(\xi^{\frac{1}{\alpha}}/c)}{(\alpha c)^2}\xi^{\frac{2}{\alpha}-1} \\
&= \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}(\gamma+1) - \frac{V(\xi^{\frac{1}{\alpha}}/c)}{(\alpha c)^2}\xi^{\frac{2}{\alpha}-1} \qquad (۲.۱۴)
\end{aligned}$$

جمله‌ی $\xi^{\frac{2}{\alpha}-1}$ در طرف راست رابطه‌ی (۱۱.۲) می‌تواند به‌عنوان تابع وزن دیده شود. و از این رو می‌توان شکل جدیدی از معادله با عنوان معادله‌ی اختلال‌یافته‌ی لاگور وزن‌دار (WPL)[۲] در نظر گرفته شود. حال در EHTP (۱۱.۲)، α پارامتری انعطاف‌پذیر است که جهت سرعت بخشیدن به روش همگرایی به کار گرفته می‌شود، به یک مورد خاص آن در صورتی‌که $\alpha = 2$ می‌توان اشاره کرد، در اینصورت تغییرمتغیر به‌صورت $\xi = (cr)^2$ در نظر گرفته می‌شود و تابع موج را به‌صورت $R(\xi) = \xi^{\frac{\ell}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} y(\xi)$ تغییر می‌دهیم، از این‌رو معادله‌ی (۳.۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\xi y'' + (\ell + \frac{1}{2}M - \xi)y' + \frac{1}{4}[\xi - c^{-2}V(c^{-1}\sqrt{\xi})]y = (2\ell + M - \frac{1}{4}c^{-2}E)y \quad (۱۵.۲)$$

روابط (۱۱.۲) و (۱۵.۲) مشابه معادله دیفرانسیل لاگور هستند

$$\xi y'' + (\gamma + 1 - \xi)y' = \lambda y\,; \quad \xi \in (0, \infty) \quad (۱۶.۲)$$

که γ یک پارامتر حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی است.

۱.۲ روش شبه طیفی لاگور برای معادله WPL

در این قسمت فرمول شبه طیفی معادله‌ی WPL براساس چندجمله‌ای لاگور $L_n^\gamma(\xi)$ می‌سازیم. روش شبه طیفی همچنین به‌عنوان روش منظم طیفی نیز شناخته شده است که بر اساس چندجمله‌ای درجه‌ی N-ام درونیابی شده‌ی تابع $y(\xi)$ ساخته می‌شود که با $P_N(\xi)$ نشان داده شده است

$$P_N(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \ell_n(\xi) y_n \quad (۱۷.۲)$$

به‌طوریکه $y_n = y(\xi_n)$ مقدار واقعی $y(\xi)$ در نقاط مشخص شده‌ی $\xi = \xi_n$ برای $n = 0, 1, \ldots, N$ است. همچنین چندجمله‌ای لاگرانژ درجه‌ی N-ام در روش شبه طیفی به‌صورت زیر استفاده شده است[۴۶]

$$\ell_n(\xi) = \frac{\psi_{N+1}(\xi)}{(\xi - \xi_n)\psi'_{N+1}(\xi_n)} = \frac{L_{N+1}^\gamma(\xi)}{(\xi - \xi_n)\left[\frac{d}{d\xi}L_{N+1}^\gamma(\xi)\right]|_{\xi=\xi_n}} \quad (۱۸.۲)$$

برای $n = 0, 1, \ldots, N$. به‌طوریکه

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{h_n} L_n^\gamma(\xi)\,, \qquad h_n = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\gamma+1)}{n!}}\,, \gamma > -1 \quad (۱۹.۲)$$

که $L_n^\gamma(\xi)$ را چندجمله‌ای‌های استاندارد لاگور[۳] LPM می‌نامند، به‌طوریکه گره‌های حقیقی ξ_n، ریشه‌های مثبت مجزای $L_{N+1}^\gamma(\xi)$ هستند و $\xi^\gamma e^{-\xi}$ تابع وزن آن است[۴۶]. جواب معادله دیفرانسیل که توسط چندجمله‌ای‌های لاگور تقریب زده می‌شود برای Nهای بزرگ پایدار نیست و رفتار مناسبی در بینهایت

[۲] Weighted and Perturbed Laguerre

[۳] Standard Laguerre polynomials

نشان نمی‌دهد و از این‌رو، معمولا با توابع لاگور $\psi_n(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} L_n^{\gamma}(\xi)/h_n$ کار می‌کنند. این وضعیت به‌صورت تئوری در مرجع [۴۷] نشان داده شده است که توابع لاگور دارای خواص پایداری بهتری نسبت به چندجمله‌ای‌های لاگور هستند. اما از طرفی، در مرجع [۴۸] در صفحه ۲۱۴ بیان شده است که چندحمله‌ای‌های لاگور تعمیم‌یافته برای تقریب توابعی که در بینهایت نزول می‌کنند مفیدتر هستند. بنابراین در این قسمت، با چندجمله‌ای‌های لاگور (۱۹.۲) ادامه می‌دهیم، به‌طوریکه جواب دوبار انتگرال‌پذیر برای معادله‌ی (۳.۲) بیابیم که در مبدا رفتار مناسب داشته باشد و در بینهایت به‌صورت تصاعدی ناپدید شود.
توجه داشته باشید که $y(\xi_n) = P_N(\xi_n)$ برای حداقل گره‌هایی که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ دارای خاصیت $\ell_n(\xi_m) = \delta_{mn}$ هستند برقرار است به‌طوریکه δ_{mn} دلتای کرونکر است. همچنین مشتقات تابع $y(\xi)$ را با مشتقات درونیاب $P_N(\xi)$ تقریب می‌زنیم. به‌علاوه مقادیر مشتق تابع $y_n = P_N(\xi_n)$ در گره‌های ξ_n به وسیله‌ی ماتریس دیفرانسیلی تعریف شده در زیر مشخص می‌شود

$$D^{(k)} := [d_{mn}^{(k)}] = \frac{d^k}{d\xi^k}[\ell_n(\xi)]|_{\xi=\xi_m}, \qquad k = 1, \dots, N \tag{۲۰.۲}$$

برای $m, n = 0, \dots, N$، مقادیر تقریبی مشتق $y^{(k)} = [P_N^{(k)}(\xi_0), \dots, P_N^{(k)}(\xi_N)]^T$ به شکل برداری-ماتریسی زیر نوشته می‌شود

$$y^{(k)} = D^{(k)}\, y \tag{۲۱.۲}$$

به‌طوریکه $y = [y_0, y_1, \dots, y_N]^T$ بردار مقدار تابع در گره‌ها است. با توجه به رابطه‌ی (۱۸.۲) و (۲۰.۲) به‌طور خاص اولین ماتریس دیفرانسیلی را حساب می‌کنیم داریم

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= \frac{d}{d\xi}\left[\frac{\psi_{N+1}}{(\xi-\xi_n)\psi'_{N+1}(\xi_n)}\right]_{\xi=\xi_m} \\ &= \left[\frac{(\xi-\xi_n)\psi'_{N+1}(\xi)\psi'_{N+1}(\xi_n) - \psi'_{N+1}(\xi_n)\psi_{N+1}(\xi)}{(\xi-\xi_n)^2\psi'^2_{N+1}(\xi_n)}\right]_{\xi=\xi_m} \\ &= \left[\frac{(\xi-\xi_n)\psi'_{N+1}(\xi) - \psi_{N+1}(\xi)}{(\xi-\xi_n)^2\psi'_{N+1}(\xi_n)}\right]_{\xi=\xi_m} \end{aligned}$$

و در صورتیکه $m \neq n$ باشد

$$D^{(1)} = \frac{(\xi_m-\xi_n)\psi'_{N+1}(\xi_m) - \psi_{N+1}(\xi_m)}{(\xi_m-\xi_n)^2\psi'_{N+1}(\xi_n)} = \frac{\psi'_{N+1}(\xi_m)}{(\xi_m-\xi_n)\psi'_{N+1}(\xi_n)}$$

به‌طور خاص اولین و دومین ماتریس‌های دیفرانسیلی به صورت زیر حاصل می‌شوند[۴۶]

$$d_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{2}{\xi_m-\xi_n}\frac{\psi'_{N+1}(\xi_m)}{\psi'_{N+1}(\xi_n)} & \text{if} \quad m \neq n \\ \frac{1}{\xi_n}(\xi_n-\gamma-1) & \text{if} \quad m = n \end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

و

$$d_{mn}^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{cases} \frac{3}{\xi_m-\xi_n}\left[\frac{1}{\xi_m}(\xi_n-\gamma-1) - \frac{2}{\xi_m-\xi_n}\right]\frac{\psi'_{N+1}(\xi_m)}{\psi'_{N+1}(\xi_n)} & \text{if} \quad m \neq n \\ \frac{1}{\xi_n}\left[\frac{1}{\xi_n}(\xi_n-\gamma-1)(\xi_n-\gamma-2) - N\right] & \text{if} \quad m = n \end{cases} \tag{۲۳.۲}$$

که با استفاده از روابط (۱۸.۲) و (۲۰.۲) ساخته شده‌اند. از طرف دیگر، رابطه‌ی بازگشتی سه جمله‌ای زیر وجود دارد[۴۶]

$$\begin{aligned}\sqrt{n(n+\gamma)}\psi_{n-1}(\xi)-(2n+\gamma+1-\xi)\psi_n(\xi)\\ -\sqrt{(n+1)(n+\gamma+1)}\psi_{n+1}(\xi)=0\end{aligned}\tag{24.2}$$

برای ریشه‌های چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته $\psi_n(\xi)$ و در نتیجه ریشه‌های $L_n^{\gamma}(\xi)$ استفاده می‌شوند. به‌عنوان مثال برای $n=0$ داریم

$$-(\gamma+1-\xi)\psi_0(\xi)-\sqrt{\gamma+1}\psi_1(\xi)=0$$

که می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix}(\gamma+1-\xi) & -\sqrt{\gamma+1}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\psi_0(\xi)\\ \psi_1(\xi)\end{bmatrix}=0$$

و در مورد $n=1$ نیز نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\sqrt{1+\gamma}\psi_0(\xi)-(\gamma+3-\xi)\psi_1(\xi)-\sqrt{2(2+\gamma)}\psi_2(\xi)=0$$

یا به‌عبارتی

$$\begin{bmatrix}\sqrt{1+\gamma} & -(\gamma+3-\xi) & -\sqrt{2(2+\gamma)}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\psi_0(\xi)\\ \psi_1(\xi)\\ \psi_2(\xi)\end{bmatrix}=0$$

و به همین ترتیب برای بقیه موارد نیز بررسی می‌کنیم، در حقیقت، با اجرای رابطه‌ی بازگشتی (۲۴.۲) در رنج $n=0,1,\dots,N$ یک سیستم جبری خطی $(\omega-\xi I)t=b$ یا یک فرم ماتریس–برداری به شکل زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\gamma+1-\xi & -\sqrt{\gamma+1} & 0 & \cdots & 0\\ \sqrt{1+\gamma} & -(\gamma+3-\xi) & -\sqrt{2(2+\gamma} & \ddots & \vdots\\ 0 & \sqrt{2(2+\gamma)} & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & (\gamma+2N-1-\xi) & -\sqrt{N(\gamma+N)}\\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{N(N+\gamma)} & -(2N+\gamma+1-\xi)\end{bmatrix}\\ &\times\begin{bmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \vdots\\ \psi_{N-1}\\ \psi_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ b_{N+1}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{25.2}$$

به‌طوریکه $\psi_i = \psi_i(\xi)$ و در سمت راست بردار با یک عضر غیر صفر است

$$b_{N+1} = \sqrt{(N+1)(N+\gamma+1)}\psi_{N+1}(\xi)$$

بنابراین اگر $\psi_{N+1}(\xi) = 0$ باشد یا به‌طور معادل $L_{N+1}^{\gamma}(\xi) = 0$ سیستم به یک مسئله مقداارویژه‌ای $\omega t = \xi t$ کاهش می‌یابد که پارامتر مقداارویژه‌ی ξ ریشه‌های ξ_i $(i = 0, 1, \ldots, N)$ از $L_{N+1}^{\gamma}(\xi)$ است. از آنجاییکه برداارویژه‌ی مربوط به هر مقداارویژه‌ی ω یک بردار ثابت منحصربفرد است، m-مین برداارویژه‌ی محاسبه شده

$$V_m = [v_{0,m}, v_{1,m}, \ldots, v_{N-1,m}, v_{N,m}]^T \tag{۲۶.۲}$$

از ماتریس ω مربوط به مقداارویژه‌ی ξ_m، یک ثابت چندگانه‌ی

$$t_m = [\psi_0(\xi_m), \psi_1(\xi_m), \ldots, \psi_{N-1}(\xi_m), \psi_N(\xi_m)]^T$$

است به‌طوریکه $V_m = at_m$ که مقدار a می‌تواند با در نظر گرفتن اولین جملات $v_{0,m}$ و $\psi_0(\xi_m)$ از برداارویژه‌ی V_m و t_m تعیین کرد. با توجه به (۱۹.۲)، $\psi_0(\xi_m) = \frac{1}{h_0} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\gamma+1)}}$ که یک چندجمله‌ای ثابت است بدست می‌آید

$$a = \sqrt{\Gamma(\gamma+1)}v_{0,m}$$

بنابراین برای $n = 0, 1, \ldots, N$ مقادیر $\psi_n(\xi_m)$ چندجمله‌ای‌های متعامد لاگور در صفرهای $\psi_{N+1}(\xi)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{bmatrix} \psi_0(\xi_m) \\ \psi_1(\xi_m) \\ \vdots \\ \psi_{N-1}(\xi_m) \\ \psi_N(\xi_m) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\gamma+1)}v_{0,m}} \begin{bmatrix} v_{0,m} \\ v_{1,m} \\ \vdots \\ v_{N-1,m} \\ v_{N,m} \end{bmatrix} \tag{۲۷.۲}$$

بنابراین تقریب (۱۷.۲) را در (۱۱.۲) قرار می‌دهیم

$$\xi \sum_{n=0}^{N} \ell_n''(\xi) y_n + (\gamma + 1 - \xi) \sum_{n=0}^{N} \ell_n'(\xi) y_n + Q(\xi) \sum_{n=0}^{N} \ell_n(\xi) y_n$$
$$= \lambda \xi^{\frac{2}{\alpha}-1} \sum_{n=0}^{N} \ell_n(\xi) y_n$$

با جمع بستن عبارات فوق داریم

$$\sum_{n=0}^{N} \left[\xi \ell_n''(\xi) + (\gamma + 1 - \xi)\ell_n'(\xi) + Q(\xi)\ell_n(\xi)\right] y_n = \lambda \sum_{n=0}^{N} \xi^{\frac{2}{\alpha}-1} \ell_n(\xi) y_n \tag{۲۸.۲}$$

که رابطه‌ی بالا را می‌توان به‌صورت گسسته به فرم زیر نوشت

$$\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{B}y \qquad (۲۹.۲)$$

به‌طوریکه جملات کلی $\mathcal{A}_{mn}$ و $\mathcal{B}_{mn}$ از ماتریس $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به شکل زیر حاصل می‌شوند

$$\mathcal{A}_{mn} = \xi_m d^{(2)}_{mn} + (\gamma + 1 - \xi_m) d^{(1)}_{mn} + Q(\xi_m; \alpha, c, \gamma)\delta_{mn} \qquad (۳۰.۲)$$

و

$$\mathcal{B}_{mn} = \xi_{mn}^{\frac{2}{\alpha}-1}\delta_{mn} \qquad (۳۱.۲)$$

از آنجاییکه $\mathcal{B}$ یک ماتریس قطری است پس وارون‌پذیر است، بنابراین طرفین رابطه‌ی (۲۹.۲) را در معکوس ماتریس $\mathcal{B}$ ضرب می‌کنیم

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}y = \lambda y$$

که با نام‌گذاری $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ داریم

$$\hat{\mathcal{T}}y = \lambda y \qquad (۳۲.۲)$$

جمله‌ی کلی $\hat{\mathcal{T}}$ به‌صورت زیر است

$$\hat{\mathcal{T}}_{mn} = \xi_m^{1-\frac{2}{\alpha}}\left[\xi_m d^{(2)}_{mn} + (\gamma + 1 - \xi_m) d^{(1)}_{mn} + Q(\xi_m; \alpha, c, \gamma)\delta_{mn}\right] \qquad (۳۳.۲)$$

که $m, n = 0, 1, \ldots, N$. در اینجا بردار $y_n = [y_{0,n}, y_{1,n}, \ldots, y_{N,n}]^T$ شامل n-مین بردارهای تابع ویژه‌ی (۱۱.۲) مربوط به مقدارویژه‌ی λ_n در نقاط گره‌ای است. با استفاده از (۲۲.۲) و (۲۳.۲)، ابتدا دو جمله‌ی (۳۳.۲) می‌توانند به‌صورت زیر تعریف شوند[۴۶]

$$\hat{\mathcal{K}}_{mn} = -\frac{1}{6}\begin{cases} \frac{12\xi_m^{2-\frac{2}{\alpha}}}{(\xi_m-\xi_n)^2}\frac{\psi'_{N+1}(\xi_m)}{\psi'_{N+1}(\xi_n)} & m \neq n \\ \\ \xi_n^{1-\frac{2}{\alpha}}\{2N + \frac{1}{\xi_n}[(\gamma-\xi_n)^2 - 1]\} & m = n \end{cases} \qquad (۳۴.۲)$$

همچنین می‌توان نوشت $\hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{K}} + Q$. به نظر می‌رسیدکه ارزیابی $\hat{\mathcal{K}}_{mn}$ به محاسبه‌ی مشتقات $\psi'_{N+1}(\xi_n)$ از چندجمله‌ای‌های متعامد لاگور در نقاط گره‌ها نیاز دارد. خوشبختانه تبدیل تشابه خوب $\mathcal{T} = S^{-1}\hat{\mathcal{T}}S$ وجود دارد که

$$S = S_m\delta_{mn} = \xi_m^{1-\frac{1}{\alpha}}\psi'_{N+1}(\xi_m)\delta_{mn} \qquad (۳۵.۲)$$

به‌طوریکه S یک ماتریس قطری است که باعث می‌شود از چنین کار دست و پاگیری خلاص شویم، بعلاوه ماتریس در (۳۲.۲) به یک ماتریس متقارن $\mathcal{T} = S^{-1}(\hat{\mathcal{K}} + Q)S$ کاهش می‌یابد به‌طوریکه

$$\mathcal{T} = S^{-1}\hat{\mathcal{K}}S + S^{-1}QS$$

و جملات آن به‌صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\mathcal{T}_{mn}=\mathcal{K}_{mn}+Q_{mn} \tag{۳۶.۲}$$

که

$$\mathcal{K}_{mn}=-\frac{۱}{۶}\begin{cases}\frac{۱۲(\xi_m\xi_n)^{۱-\frac{۱}{\alpha}}}{(\xi_m-\xi_n)^{۲}} & m\neq n\\ \xi_n^{۱-\frac{۲}{\alpha}}\{۲N+\frac{۱}{\xi_n}[(\gamma-\xi_n)^{۲}-۱]\} & m=n\end{cases} \tag{۳۷.۲}$$

و

$$\begin{aligned}Q_{mn}&=\xi_m^{۱-\frac{۲}{\alpha}}Q(\xi_m;\alpha,c,\gamma)\delta_{mn}=\xi_m^{۱-\frac{۲}{\alpha}}[\frac{۱}{۴}\xi_m-\frac{۱}{۲}(\gamma+۱)\\&-\frac{۱}{(\alpha c)^{۲}}\xi_m^{\frac{۲}{\alpha}-۱}V(\xi_m^{\frac{۱}{\alpha}}/c)]\delta_{mn}\end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

از طرفی چون S یک ماتریس وارون‌پذیر است، رابطه‌ی (۳۲.۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$S^{-۱}\hat{\mathcal{T}}S\,S^{-۱}y=\lambda S^{-۱}y$$

بنابراین با تعریف $u=S^{-۱}y$ و $\mathcal{T}=S^{-۱}\hat{\mathcal{T}}S$، مقدارویژه‌ی (۳۲.۲) و از این‌رو مقدارویژه‌ی تقریبی WPL می‌توانند به‌وسیله‌ی مقدارویژه‌ی ماتریس متقارن زیر تعیین شود

$$\mathcal{T}u=\lambda u \tag{۳۹.۲}$$

که $u_n=[u_{۰,n},u_{۱,n},\dots,u_{N,n}]^T$. توجه کنید که nامین بردارویژه‌ی y_n از (۳۲.۲) از فرمول زیر حاصل می‌شود

$$y_n=Su_n \tag{۴۰.۲}$$

بنابراین mامین درایه‌ی $y_{mn}=y_n(\xi_m)$ از nامین بردارویژه‌ی y_m به‌صورت $y_{mn}=S_m u_{mn}$ نوشته می‌شود و با استفاده از (۳۵.۲) داریم

$$y_n(\xi_m)=\xi_m^{۱-\frac{۱}{\alpha}}\psi'_{N+۱}(\xi_m)u_{mn} \tag{۴۱.۲}$$

بنابراین رابطه‌ی (۱۰.۲) تابع موج کلی را به‌صورت زیر تعیین می‌کند

$$R_{n,\ell}^{(M)}(\xi_m)=\psi'_{N+۱}(\xi_m)\xi_m^{۱+\frac{\ell-۱}{\alpha}}\,e^{-\frac{\xi_m}{۲}}u_{mn} \tag{۴۲.۲}$$

حال به متغیر اصلی r برمی‌گردیم و با استفاده از (۸.۲) در نهایت تابع موج به شکل زیر است

$$R_{n,\ell}^{(M)}(r_m)=\psi'_{N+۱}\big((cr_m)^{\alpha}\big)(cr_m)^{\alpha+\ell-۱}\,e^{-\frac{(cr_m)^{\alpha}}{۲}}u_{mn} \tag{۴۳.۲}$$

بنابراین قضیه زیر را بیان می‌کنیم

قضیه ۱.۱.۲. مقداارویژه‌ی تقریبی $E_{n,\ell}^{(M)}$ از معادله شعاعی شرودینگر در (۳.۲) مرتبط شده با سیستم مقداارویژه‌ی خطی (۳۹.۲) با فرمول

$$E_{n,\ell}^{(M)} = -(\alpha c)^{۲}\lambda_n(\alpha, c, \gamma), \qquad n = ۰, ۱, \dots \tag{۴۴.۲}$$

و مقدار مربوط به تابع ویژه $\mathcal{R}_{n,\ell}(r_m)$ (در فضای $L_\rho^{۲}$) در نقاط $r_m = \xi_m^{\frac{۱}{\alpha}}/c$ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\mathcal{R}_{n,\ell}^{(M)}(r_m) = \sqrt{\alpha c^M} R_{n,\ell}^{(M)}(r_M) = -\sqrt{\frac{\alpha c^M (N+۱)(N+\gamma+۱)}{\Gamma(\gamma+۱)}}\frac{v_{N,m}}{v_{۰,m}} \times (cr_m)^{\alpha+\ell-۱}\, e^{-(cr_m)^\alpha/۲} u_{mn} \tag{۴۵.۲}$$

هرگاه u_n (در نرم اقلیدسی ۲) نرمال شده‌ی بردارویژه‌ی سیستم (۳۹.۲) باشد. $v_{۰,m}$ و $v_{N,m}$ اولین و آخرین درایه‌ی (۲۶.۲) هستند.

برهان. مشاهده می‌شود که تابع وزن (۳.۲) و (۱۱.۲) با استفاده از $\rho(r) = r^{M-۱}$ و $\rho(\xi) = \xi^{\gamma+\frac{۲}{\alpha}-۱}\, e^{-\xi}$ داده شده‌اند. ابتدا از تبدیل (۸.۲) استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \| \mathcal{R}_{n,\ell}^{(M)}(r_m) \|_{L^{۲}_{\rho(r)}}^{۲} &= \int_{۰}^{\infty} [\mathcal{R}_{n,\ell}^{(M)}(r)]^{۲} r^{M-۱}\, dr = \int_{۰}^{\infty} [\sqrt{\alpha c^M}\, R_{n,\ell}^{(M)}(r)]^{۲} r^{M-۱}\, dr \\ &= \int_{۰}^{\infty} [R_{n,\ell}^{(M)}(\xi)]^{۲} (\alpha c^M)\, (\xi^{\frac{۱}{\alpha}}/c)^{M-۱}\, d\xi = \int_{۰}^{\infty} [R_{n,\ell}^{(M)}(\xi)]^{۲} (\alpha c)\, \xi^{\frac{M-۱}{\alpha}}\, d\xi \end{aligned} \tag{۴۶.۲}$$

حال از مشتق تبدیل (۸.۲) کمک می‌گیریم

$$\xi^{\frac{۱}{\alpha}-۱} = \alpha c$$

در اینصورت رابطه‌ی (۴۶.۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\| \mathcal{R}_{n,\ell}^{(M)}(r_m) \|_{L^{۲}_{\rho(r)}}^{۲} = \int_{۰}^{\infty} [R_{n,\ell}^{(M)}(\xi)]^{۲}\, \xi^{\frac{۱}{\alpha}-۱}\, \xi^{\frac{M-۱}{\alpha}}\, d\xi = \int_{۰}^{\infty} [R_{n,\ell}^{(M)}(\xi)]^{۲} \xi^{\frac{M}{\alpha}-۱}\, d\xi \tag{۴۷.۲}$$

حال با استفاده از تابع تبدیل (۱۰.۲) و رابطه‌ی (۱۲.۲) داریم

$$\| \mathcal{R}_{n,\ell}^{(M)}(r_m) \|_{L^{۲}_{\rho(r)}}^{۲} = \int_{۰}^{\infty} [\xi^{\frac{\ell}{\alpha}}\, e^{-\frac{\xi}{۲}} y_n(\xi)]^{۲}\, \xi^{\frac{M}{\alpha}-۱}\, d\xi = \int_{۰}^{\infty} y_n^{۲}(\xi)\, \xi^{\gamma+\frac{۲}{\alpha}-۱}\, e^{-\xi}\, d\xi \tag{۴۸.۲}$$

در اینصورت با اعمال $N+۱$ نقطه‌ی لاگور–گوس مربعی بر تابع $\xi^{\frac{۲}{\alpha}-۱}\, y_n^{۲}(\xi)$، و با در نظر گرفتن $\omega(\xi) = \xi^{\gamma}\, e^{-\xi}$، حد زیر را بدست می‌آوریم

$$\| \mathcal{R}_{n,\ell}^{(M)}(r_m) \|_{L^{۲}_{\rho(r)}}^{۲} = \int_{۰}^{\infty} \xi^{\frac{۲}{\alpha}-۱} y_n^{۲}(\xi)\, \xi^{\gamma}\, e^{-\xi}\, d\xi = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=۰}^{N} \xi_m^{\frac{۲}{\alpha}-۱}\, y_n^{۲}(\xi_m)\, \omega_m \tag{۴۹.۲}$$

که $m = 0, 1, \dots, N$ و

$$\omega_m = \frac{1}{(N+1)(N+\gamma+1)} \frac{\xi_m}{\psi_N^2(\xi_m)} \tag{۵۰.۲}$$

اکنون رابطه‌ی تفاضلی-دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید[۴۶]

$$\xi \psi_n'(\xi) = n\psi_n(\xi) - \sqrt{n(n+\gamma)}\psi_{n-1}(\xi) \tag{۵۱.۲}$$

از چندجمله‌ای نرمال شده‌ی لاگور با $n = N+1$ و $\xi = \xi_m$ داریم

$$\psi_{N+1}'(\xi_m) = -\frac{1}{\xi_m}\sqrt{(N+1)(N+\gamma+1)}\psi_N(\xi_m) \tag{۵۲.۲}$$

و برای $m = 0, 1, \dots, N$، $\psi_{N+1}(\xi_m) = 0$ و از این‌رو (۴۱.۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$y_n(\xi_m) = -\sqrt{(N+1)(N+\gamma+1)}\, \psi_N(\xi_m)\, \xi_m^{-\frac{1}{\alpha}}\, u_{mn} \tag{۵۳.۲}$$

با جایگذاری (۵۰.۲) و (۵۳.۲) در (۴۹.۲) داریم

$$\| \mathcal{R}_{n,\ell}^{(M)}(r_m) \|_{L^2_{\rho(r)}}^2 = \lim_{N\to 0} \sum_{m=0}^{N} u_{mn}^2 = \lim_{N\to\infty} \| u_n \|_2^2 = \lim_{N\to\infty} 1 = 1 \tag{۵۴.۲}$$

از طرف دیگر، (۴۳.۲) به‌همراه (۵۲.۲) و (۲۷.۲)، (۴۵.۲) را نتیجه می‌دهد و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

۱.۱.۲ مثال عددی

با در نظر گرفتن پتانسیل $V(r) = r^{۲} + \nu_{۴} r^{۴}$ و انرژی $E_{n,\ell}^{(۳)}$ به‌طوریکه $\alpha_{opt} = ۲$ جدول زیر را خواهیم داشت

$\nu_{۴}$	c_{opt}	N	n	ℓ	$E_{n,\ell}^{(۳)}$
$۱۰^{-۴}$	۱	۸	۰	۰	۳٫۰۰۰۳۷۴۸۹۶۹۳۶۱۲۱۰۹۸۳۳۷۸۴۶۸۲۹۹
	۱	۴۰	۲۵	۱	۱۰۵٫۴۱۰۳۴۳۸۵۲۴۳۹۵۵۹۵۵۳۶۲۱۰۱۴۵۹۱۰
	۱	۶۶	۵۰	۵	۲۱۴٫۶۷۴۹۶۴۹۹۰۸۰۴۸۲۲۰۲۵۵۷۰۵۱۱۲۱۶۲
	۱	۱۲۴	۱۰۰	۱۰	۴۲۹٫۵۱۴۴۸۲۰۱۱۹۱۶۰۰۸۳۹۹۵۹۲۲۳۸۹۳۸
۱	۳	۳۰	۰	۱۰	۵۴٫۱۸۴۹۸۴۶۱۰۴۵۴۴۳۹۹۲۴۱۲۳۴۸۰۱۷۵۶
	۳	۶۵	۲۵	۵	۴۸۳٫۰۲۲۲۰۷۴۱۳۳۹۴۷۰۹۴۲۸۶۰۸۲۷۰۷۲۹۱
	۲.۵	۱۰۰	۵۰	۱	۱۰۶۲٫۸۸۹۸۵۳۸۵۳۶۵۵۶۷۱۸۳۴۹۷۵۷۳۵۶۹۱
	۲	۱۶۰	۱۰۰	۰	۲۶۰۴٫۴۳۲۴۸۵۷۱۴۶۳۹۳۰۷۴۵۹۴۰۵۶۸۱۵۵
$۱۰^{۴}$	۹	۳۰	۰	۰	۸۱٫۹۰۳۳۱۶۹۵۳۲۸۴۴۶۷۵۶۷۴۷۱۳۰۸۵۵۵
	۹	۸۰	۲۵	۱	۹۲۵۳٫۹۲۳۴۹۹۴۱۵۴۹۹۷۱۴۸۲۱۵۸۶۳۷۳۹۸
	۱۲	۱۰۰	۵۰	۵	۲۳۷۵۶٫۵۳۳۹۸۳۶۹۰۹۷۶۱۰۸۴۵۸۵۱۴۹۵۵۳
	۱۳	۱۶۲	۱۰۰	۱۰	۵۹۳۰۲٫۰۶۰۳۱۳۴۵۵۵۱۵۴۹۱۲۹۴۱۵۴۶۰۴۹

فصل ۳

روش حدسی

در این قسمت معادله دیفرانسیل شرودینگر را در حضور پتانسیل‌های $V(r) = ar^{۲} + br^{-۲} + cr^{-۴}$ و $V(r) = ar^{-۱} + br^{-۲}$ در فضای ناجابجایی به‌وسیله‌ی یک روش حدسی، حل می‌کنیم [۳۴]. هامیلتونی معادله شرودینگر در فضای ناجابجایی به‌وسیله‌ی معادله‌ی زیر توصیف می‌شود

$$H(p,x) \star \psi(x) = E\psi \qquad (۱.۳)$$

این معادله معمولا به‌صورت زیر کاهش پیدا می‌کند

$$H(\hat{p},\hat{x})\psi(x) = E\psi \qquad (۲.۳)$$

به‌طوریکه

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{۲}p_j\,, \qquad \hat{p}_i = p_i \qquad (۳.۳)$$

که θ_{ij} پارامتر جابجایی است.

۱.۳ در حضور پتانسیل $V(r) = ar^{۲} + br^{-۲} + cr^{-۴}$

تغییریافته‌ی پتانسیل $V(r) = ar^{۲} + br^{-۲} + cr^{-۴}$ در فضای ناجابجایی به شکل زیر است[۳۴]

$$V(\hat{r}) = \frac{a}{۲}\theta L_z + ar^{۲} + br^{-۲} + \Big(c + \frac{b}{۴}\theta L_z\Big)r^{-۴} + \frac{c}{۴}\theta L_z r^{-۶} \qquad (۴.۳)$$

معادله‌ی شرودینگر در فضای ناجابجایی دو بعدی در حضور پتانسیل $V(\hat{r})$ به‌صورت زیر کاهش پیدا می‌کند

$$\Big(-\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}} + V(\hat{r})\Big)\psi(\hat{r}) = E\psi(\hat{r}) \qquad (۵.۳)$$

یا

$$-\left(\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial\varphi^{2}}-V(\hat{r})\right)\psi(\hat{r})=E\psi(\hat{r}) \qquad (۶.۳)$$

جواب معادله‌ی (۶.۳) در مختصات قطبی به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\psi(\hat{r})=r^{-\frac{1}{2}}R_{m}(\hat{r})e^{im\varphi} \qquad (۷.۳)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\psi(\hat{r})=R'_{m}(\hat{r})r^{-\frac{1}{2}}e^{im\varphi}-\frac{1}{2}R_{m}(\hat{r})r^{-\frac{3}{2}}e^{im\varphi}\\
&\frac{d^{2}}{dr^{2}}\psi(\hat{r})=R''_{m}(\hat{r})r^{-\frac{1}{2}}e^{im\varphi}-\frac{1}{2}R'_{m}(\hat{r})r^{-\frac{3}{2}}e^{im\varphi}-\frac{1}{2}R'_{m}(\hat{r})r^{-\frac{3}{2}}e^{im\varphi}+\frac{3}{4}R_{m}(\hat{r})r^{-\frac{5}{2}}e^{im\varphi}\\
&\frac{d}{d\varphi}\psi(\hat{r})=R_{m}(\hat{r})r^{-\frac{1}{2}}(im)e^{im\varphi}\\
&\frac{d^{2}}{d\varphi^{2}}\psi(\hat{r})=R_{m}(\hat{r})r^{-\frac{1}{2}}(-m^{2})e^{im\varphi}
\end{aligned}$$

روابط فوق را در معادله‌ی (۶.۳) قرار می‌دهیم

$$-r^{-\frac{1}{2}}e^{im\varphi}\left\{\frac{d^{2}}{dr^{2}}-r^{-1}\frac{d}{dr}+\frac{3}{4}r^{-2}+\frac{1}{r}\Big(\frac{d}{dr}-\frac{1}{2}r^{-1}\Big)+\frac{1}{r^{2}}(-m^{2})-\tilde{V}+\tilde{E}\right\}R_{m}(\hat{r})=0$$

در نهایت معادله‌ی (۶.۳) به معادله شعاعی زیر کاهش می‌یابد

$$\frac{d^{2}R_{m}(\hat{r})}{dr^{2}}+\left[\tilde{E}-\tilde{V}(r)-\frac{m^{2}-1/4}{r^{2}}\right]R_{m}(\hat{r})=0 \qquad (۸.۳)$$

در حضور پتانسیل زیر

$$\tilde{V}(r)=ar^{2}+br^{-2}+\tilde{c}r^{-4}+\tilde{d}r^{-6} \qquad (۹.۳)$$

در نظر می‌گیریم و همچنین

$$\tilde{E}=E-\frac{a}{2}\theta_{m}\,,\qquad \tilde{c}=c+\frac{b}{4}\theta_{m}\,,\qquad \text{و}\qquad \tilde{d}=\frac{c}{2}\theta_{m} \qquad (۱۰.۳)$$

در اینصورت برای حل معادله‌ی (۸.۳)، تابع شعاعی را بصورت زیر می‌نویسیم

$$R_{m}(\hat{r})=e^{\tilde{p}_{m}(r)}\sum_{n=0}\tilde{a}_{n}r^{2n+\nu} \qquad (۱۱.۳)$$

به‌طوریکه

$$\tilde{p}_{m}(r)=\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2} \qquad (۱۲.۳)$$

در اینصورت با توجه به معادله دیفرانسیل (۸.۳) به مشتق دوم (۱۱.۳) نیاز داریم پس مشتق اول (۱۱.۳) را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\frac{dR_m}{dr} = \frac{d}{dr}\left(e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu}\right) = (\alpha r - \beta r^{-3})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu}$$
$$+ e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\Big(\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)r^{2n+\nu-1}\Big)$$

حال مشتق دوم را حساب می‌کنیم

$$\frac{d^2R_m}{dr^2} = (\alpha + 3\beta r^{-4})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu} + (\alpha r - \beta r^{-3})^2 e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu}$$
$$+ (\alpha r - \beta r^{-3})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\Big(\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)r^{2n+\nu-1}\Big)$$
$$+ (\alpha r - \beta r^{-3})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\Big(\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)r^{2n+\nu-1}\Big)$$
$$+ e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\Big(\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)(2n+\nu-1)r^{2n+\nu-2}\Big)$$

در اینصورت مشتق دوم بدست آمده را در معادله دیفرانسیل (۸.۳) قرار می‌دهیم

$$(\alpha + 3\beta r^{-4})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu} + (\alpha r - \beta r^{-3})^2 e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu}$$
$$+ 2(\alpha r - \beta r^{-3})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\Big(\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)r^{2n+\nu-1}\Big)$$
$$+ e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\Big(\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)(2n+\nu-1)r^{2n+\nu-2}\Big)$$
$$+ \left[\tilde{E} - \tilde{V}(r) - \frac{m^2 - 1/4}{R^2}\right]\Big(e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu}\Big) = 0$$

پس از ساده‌سازی رابطه‌ی فوق داریم

$$\left[(\alpha + 3\beta r^{-4}) + (\alpha r - \beta r^{-3})^2 + \tilde{E} - \tilde{V}(r)\right]e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu}$$
$$+ 2(\alpha r - \beta r^{-3})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)r^{2n+\nu}$$
$$+ e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n(2n+\nu)(2n+\nu-1)r^{2n+\nu-2}$$
$$- (m^2 - \frac{1}{4})e^{\frac{\alpha}{2}r^{2}+\frac{\beta}{2}r^{-2}}\sum_{n=0}\tilde{a}_n r^{2n+\nu-2} = 0$$

با فاکتورگیری عبارت $e^{\frac{\alpha}{۲}r^{۲}+\frac{\beta}{۲}r^{-۲}}$ از طرفین تساوی و قرار دادن پتانسیل (۹.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\Big[(\alpha+۳\beta r^{-۴})+(\alpha^{۲}r^{۲}+\beta^{۲}r^{-۶}-۲\alpha\beta r^{-۲})+\tilde{E}-ar^{۲}-br^{-۲}-\tilde{c}r^{-۴}\\&-\tilde{d}r^{-۶}\Big]\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu}+\Big[۲\alpha r-۲\beta r^{-۳}\Big]\sum_{n=۰}\tilde{a}_n(۲n+\nu)r^{۲n+\nu-۱}\\&+\sum_{n=۰}\tilde{a}_n(۲n+\nu)(۲n+\nu-۱)r^{۲n+\nu-۲}-(m^{۲}-\frac{۱}{۴})\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۲}=۰\end{aligned}$$

در اینصورت با ساده‌سازی رابطه‌ی فوق داریم

$$\begin{aligned}&\Big[(\alpha+\tilde{E})+(\alpha^{۲}-a)r^{۲}+(-۲\alpha\beta-b)r^{-۲}+(۳\beta-\tilde{c})r^{-۴}+(\beta^{۲}-\tilde{d})r^{-۶}\Big]\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu}\\&+\Big[۲\alpha r-۲\beta r^{-۳}\Big]\sum_{n=۰}\tilde{a}_n(۲n+\nu)r^{۲n+\nu-۱}+\sum_{n=۰}\tilde{a}_n(۲n+\nu)(۲n+\nu-۱)r^{۲n+\nu-۲}\\&-(m^{۲}-\frac{۱}{۴})\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۲}=۰\end{aligned}$$

در نتیجه رابطه‌ی فوق، به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}&(\alpha+\tilde{E})\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu}+(\alpha^{۲}-a)\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu+۲}+(-۲\alpha\beta-b)\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۲}\\&+(۳\beta-\tilde{c})\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۴}+(\beta^{۲}-\tilde{d})\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۶}+۲\alpha\sum_{n=۰}\tilde{a}_n(۲n+\nu)r^{۲n+\nu}\\&-۲\beta\sum_{n=۰}\tilde{a}_n(۲n+\nu)r^{۲n+\nu-۴}+\sum_{n=۰}\tilde{a}_n(۲n+\nu)(۲n+\nu-۱)r^{۲n+\nu-۲}\\&-(m^{۲}-\frac{۱}{۴})\sum_{n=۰}\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۲}=۰\end{aligned}$$

در نهایت با جمع کردن تمام عبارات فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\sum_{n=۰}\Big[\big(\alpha+\tilde{E}+۲\alpha(۲n+\nu)\big)\tilde{a}_n r^{۲n+\nu}+\big(\alpha^{۲}-a\big)\tilde{a}_n r^{۲n+\nu+۲}\\&+\big((-۲\alpha\beta-b)+(۲n+\nu)(۲n+\nu-۱)-(m^{۲}-\frac{۱}{۴})\big)\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۲}\\&+\big((۳\beta-\tilde{c})-۲\beta(۲n+\nu)\big)\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۴}+(\beta^{۲}-\tilde{d})\tilde{a}_n r^{۲n+\nu-۶}\Big]=۰\end{aligned}$$

بنابراین چون طرف راست صفر است، با متناظر قرار دادن ضرایب سمت چپ، نتایج زیر حاصل می‌شود

$$\tilde{E}=-\alpha(\alpha+۲\nu+۴n) \tag{۱۳.۳}$$

$$-۲\alpha\beta-b+(۲n+\nu)(۲n+\nu-۱)-(m^{۲}-\frac{۱}{۴})=۰ \tag{۱۴.۳}$$

$$\beta(۳-۲\nu-۴n)-\tilde{c}=۰ \tag{۱۵.۳}$$

$$\alpha^{۲}-a=۰\ \Rightarrow\ \alpha=\pm\sqrt{a}\quad,\quad\beta^{۲}-\tilde{d}=۰\ \Rightarrow\ \beta=\sqrt{|\tilde{d}|} \tag{۱۶.۳}$$

۲.۳ در حضور پتانسیل $V(r)=ar^{-1}+br^{-2}$

تغییریافته‌ی پتانسیل $V(r)=ar^{-1}+br^{-2}$ در فضای ناجابجایی به شکل زیر است

$$\tilde{V}(\hat{r})=ar^{-1}+br^{-2}+\tilde{c}r^{-3}+\tilde{d}r^{-4} \tag{۱۷.۳}$$

بطوریکه

$$\tilde{c}=\frac{a}{2}\theta_m\,, \qquad \text{و} \qquad \tilde{d}=\frac{b}{4}\theta_m \tag{۱۸.۳}$$

دراینصورت معادله دیفرانسیل مرتبه‌دوم شرودینگر (۸.۳) را در حضور پتانسیل (۱۷.۳) حل می‌کنیم، به اینصورت که تبدیل زیر را به کار می‌بریم

$$R_m(\hat{r})=h_m(\hat{r})e^{f(\hat{r})} \tag{۱۹.۳}$$

به‌طوریکه

$$f(\hat{r})=Ar^{-1}+Br+C\log r \qquad ;\,A<0\,,\,B<0 \tag{۲۰.۳}$$

$$h_m(\hat{r})=\prod_{j=1}^{m}(r-\tilde{\sigma}_j^m)=\sum_{j=1}^{m}a_jr^j \tag{۲۱.۳}$$

همانند بخش قبل، با توجه به ساختار معادله دیفرانسیل (۸.۳)، مشتق دوم (۱۹.۳) را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{dR_m(\hat{r})}{dr}=\frac{d}{dr}\left[e^{f(\hat{r})}h_m(\hat{r})\right]=f'(\hat{r})e^{f(\hat{r})}h_m(\hat{r})+e^{f(\hat{r})}h'_m(\hat{r})$$
$$\frac{d^2R_m(\hat{r})}{dr^2}=f''(\hat{r})e^{f(\hat{r})}h_m(\hat{r})+f'(\hat{r})^2e^{f(\hat{r})}h_m(\hat{r})+f'(\hat{r})e^{f(\hat{r})}h'_m(\hat{r})+f'(\hat{r})e^{f(\hat{r})}h'_m(\hat{r})$$
$$+e^{f(\hat{r})}h''_m(\hat{r})=\left[(f''(\hat{r})+f'(\hat{r})^2)+\frac{2f'(\hat{r})h'_m(\hat{r})+h''_m(\hat{r})}{h_m(\hat{r})}\right]\underbrace{e^{f(\hat{r})}h_m(\hat{r})}_{R_m(\hat{r})}$$

در اینصورت با جایگذاری در معادله دیفرانسیل (۸.۳) داریم

$$\left[(f''(\hat{r})+f'(\hat{r})^2)+\frac{2f'(\hat{r})h'_m(\hat{r})+h''_m(\hat{r})}{h_m(\hat{r})}+\tilde{E}-\tilde{V}(\hat{r})-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]R_m(\hat{r})=0 \tag{۲۲.۳}$$

اما چون $R_m(\hat{r})\neq 0$ پس

$$f''(\hat{r})+f'(\hat{r})^2+\frac{2f'(\hat{r})h'_m(\hat{r})+h''_m(\hat{r})}{h_m(\hat{r})}+\tilde{E}-\tilde{V}(\hat{r})-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{r^2}=0 \tag{۲۳.۳}$$

بنابراین با در نظر گرفتن (۲۰.۳) داریم

$$
\begin{aligned}
f'(\hat{r}) &= -\frac{A}{r^{۲}} + B + \frac{C}{r} \\
f'^{۲}(\hat{r}) &= \frac{A^{۲}}{r^{۴}} + B^{۲} + \frac{C^{۲}}{r^{۲}} + \frac{۲BC}{r} - \frac{۲AB}{r^{۲}} - \frac{۲AC}{r^{۳}} \\
f''(\hat{r}) &= \frac{۲A}{r^{۳}} - \frac{C}{r^{۲}} \\
f''(\hat{r}) + f'(\hat{r})^{۲} &= B^{۲} + \frac{۲BC}{r} + \frac{-۲AB + C^{۲} - C}{r^{۲}} + \frac{۲A - ۲AC}{r^{۳}} + \frac{A^{۲}}{r^{۴}}
\end{aligned}
\tag{۲۴.۳}
$$

در اینصورت با قرار دادن نتایج بدست آمده از (۲۴.۳) در (۲۳.۳) داریم

$$
\begin{aligned}
&B^{۲} + \frac{۲BC}{r} + \frac{C^{۲} - C - ۲AB}{r^{۲}} + \frac{۲A - ۲AC}{r^{۳}} + \frac{A^{۲}}{r^{۴}} + \frac{۲f'(\hat{r})h'_m(\hat{r}) + h''_m(\hat{r})}{h_m(\hat{r})} \\
&+ \tilde{E} - \tilde{V} - \frac{m^{۲} - \frac{۱}{۴}}{r^{۲}} = ۰
\end{aligned}
$$

تساوی فوق را در عبارت $h_m(\hat{r})$ ضرب می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
&B^{۲}h_m(\hat{r}) + \frac{۲BC}{r}h_m(\hat{r}) + \frac{C^{۲} - C - ۲AB}{r^{۲}}h_m(\hat{r}) + \frac{۲A - ۲AC}{r^{۳}}h_m(\hat{r}) + \frac{A^{۲}}{r^{۴}}h_m(\hat{r}) \\
&+ ۲f'(\hat{r})h'_m(\hat{r}) + h''_m(\hat{r}) = -\tilde{E}h_m(\hat{r}) + \tilde{V}h_m(\hat{r}) + \frac{m^{۲} - \frac{۱}{۴}}{r^{۲}}h_m(\hat{r})
\end{aligned}
\tag{۲۵.۳}
$$

از طرفی حاصلضرب (۲۱.۳) را به‌صورت زیر باز می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
h_m(\hat{r}) &= \prod_{j=۱}^{m}(r - \tilde{\sigma}_j^m) = r^m - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۱} \\
&+ \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۲} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۳} + \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} \\
&- \sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} + \sum_{s<q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_s^m\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \mp \ldots
\end{aligned}
\tag{۲۶.۳}
$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی فوق و تعریف دیگر رابطه‌ی (۲۱.۳) داریم

$$
a_m = ۱ \quad , \quad a_{m-۱} = -\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m \quad , \quad a_{m-۲} = \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m
\tag{۲۷.۳}
$$

بنابراین برای حل (۲۳.۳) به مشتق اول و مشتق دوم $h_m(\hat r)$ نیاز داریم پس

$$\begin{aligned} h'_m(\hat r) &= mr^{m-۱} - (m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۲} + (m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۳} \\ &\quad - (m-۳)\sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۴} + (m-۴)\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۵} \\ &\quad - (m-۵)\sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_q^m\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \pm \dots \qquad (۲۸.۳) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''_m(\hat r) &= m(m-۱)r^{m-۲} - (m-۱)(m-۲)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۳} \\ &\quad + (m-۲)(m-۳)\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۴} - (m-۳)(m-۴)\sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۵} \\ &\quad + (m-۴)(m-۵)\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \mp \dots \qquad (۲۹.۳) \end{aligned}$$

در اینصورت با قرار دادن نتایج بدست آمده از (۲۶.۳)، (۲۸.۳) و (۲۹.۳) در (۲۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} & B^۲\Big[r^m - \sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۱} + \sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۲} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۳} \\ & + \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۴} - \sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_q^m\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۵} \\ & + \sum_{s<q<l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_s^m\tilde\sigma_q^m\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \mp \dots\Big] + ۲BC\Big[r^{m-۱} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۲} \\ & + \sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۳} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۴} + \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۵} \\ & - \sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_q^m\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \pm \dots\Big] + (C^۲ - C - ۲AB)\Big[r^{m-۲} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۳} \\ & + \sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۴} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۵} + \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \mp \dots\Big] \\ & + (۲A - ۲AC)\Big[r^{m-۳} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۴} + \sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۵} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \pm \dots\Big] \\ & + A^۲\Big[r^{m-۴} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۵} + \sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \mp \dots\Big] - ۲A\Big[mr^{m-۳} \\ & - (m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m r^{m-۴} + (m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۵} - (m-۳)\sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m r^{m-۶} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\pm \dots \Big] + ۲B\Big[mr^{m-۱} - (m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۲} + (m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۳} \\
&- (m-۳)\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} + (m-۴)\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} \\
&- (m-۵)\sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \pm \dots \Big] + ۲C\Big[mr^{m-۲} \\
&- (m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۳} + (m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} - (m-۳)\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} \\
&+ (m-۴)\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \pm \dots \Big] + \Big[m(m-۱)r^{m-۲} \\
&- (m-۱)(m-۲)\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۳} + (m-۲)(m-۳)\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} \\
&- (m-۳)(m-۴)\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} + (m-۴)(m-۵)\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \\
&\mp \dots \Big] = -E\Big[r^m - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۱} + \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۲} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۳} \\
&+ \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} - \sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} \\
&+ \sum_{s<q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_s^m\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \mp \dots \Big] + a\Big[r^{m-۱} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۲} \\
&+ \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۳} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} + \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} \\
&- \sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \pm \dots \Big] + b\Big[r^{m-۲} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۳} + \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} \\
&- \sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} + \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \mp \dots \Big] + \tilde{c}\Big[r^{m-۳} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۴} \\
&+ \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} - \sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \pm \dots \Big] + \tilde{d}\Big[r^{m-۴} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۵} \\
&+ \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \mp \dots \Big] + (m^۲ - \frac{۱}{۴})\Big[r^{m-۲} - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m r^{m-۳} + \sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۴} \\
&- \sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۵} + \sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m r^{m-۶} \mp \dots \Big]
\end{aligned}
$$

با یک مرتب‌سازی بر اساس توان r خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
& B^2 r^m + \Big[- B^2 \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + 2BC + 2Bm \Big] r^{m-1} + \Big[C^2 - C - 2AB - 2BC \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \\
& + B^2 \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - 2B(m-1) \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + 2Cm + m(m-1) \Big] r^{m-2} \\
& + \Big[- B^2 \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + 2A - 2AC - (C^2 - C - 2AB) \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + 2BC \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - 2Am + 2B(m-2) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - 2C(m-1) \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m - (m-1)(m-2) \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \Big] r^{m-3} \\
& + \Big[B^2 \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - 2BC \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + A^2 - (2A - 2AC) \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \\
& + (C^2 - C - 2AB) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + 2A(m-1) \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + 2C(m-2) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& + (m-2)(m-3) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - 2B(m-3) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \Big] r^{m-4} \\
& + \Big[- B^2 \sum_{q<l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_q^m \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + 2BC \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - (C^2 - C - 2AB) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - A^2 \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + (2A - 2AC) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - 2A(m-2) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + 2B(m-4) \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - 2C(m-3) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - (m-3)(m-4) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \Big] r^{m-5} \\
& + \Big[B^2 \sum_{s<q<l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_s^m \tilde{\sigma}_q^m \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - 2BC \sum_{q<l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_q^m \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& + (C^2 - C - 2AB) \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + 2A(m-3) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - 2B(m-5) \sum_{q<l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_q^m \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + 2C(m-4) \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& + (m-4)(m-5) \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - A^2 \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \Big] r^{m-6} + \dots \\
& + \Big[(2A - 2AC) \sum_{j_1<\dots<j_m} \tilde{\sigma_j}^m \sigma_{\tilde{j_m}}^{\;m} - A^2 \sum_{j_1<\dots<j_m} \tilde{\sigma_j}^m \sigma_{\tilde{j}_{m-1}}^{\;m} \Big] r^{-3} \\
& + \Big[A^2 \sum_{j_1<\dots<j_m} \tilde{\sigma_j}^m \sigma_{\tilde{j_m}}^{\;m} \Big] r^{-4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tilde{E}r^m + \Big[\tilde{E}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + a\Big]r^{m-1} + \Big[-\tilde{E}\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - a\sum_{j=1}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + b + m^2 - \frac{1}{4}\Big]r^{m-2} \\
&+ \Big[E\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + a\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - b\sum_{j=1}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + \tilde{c} - (m^2 - \frac{1}{4})\sum_{j=1}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\Big]r^{m-3} \\
&+ \Big[-E\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - a\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + b\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - \tilde{c}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + \tilde{d} \\
&+ (m^2 - \frac{1}{4})\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m\Big]r^{m-4} + \Big[E\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + a\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m \\
&- b\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - \tilde{c}\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - \tilde{d}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\sigma}_j^m - (m^2 - \frac{1}{4})\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m\Big]r^{m-5} \\
&+ \Big[-E\sum_{s<q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_s^m\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - a\sum_{q<l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_q^m\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m \\
&+ b\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - \tilde{c}\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m \\
&+ \tilde{d}\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + (m^2 - \frac{1}{4})\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m\Big]r^{m-6} + \dots \\
&+ \Big[\tilde{c}\sum_{j_1<\dots<j_m}\tilde{\sigma_j}^m\tilde{\sigma_{j_m}}^m - \tilde{d}\sum_{j_1<\dots<j_m}\tilde{\sigma_j}^m\tilde{\sigma_{j_{m-1}}}^m\Big]r^{-3} + \Big[\tilde{d}\sum_{j_1<\dots<j_m}\tilde{\sigma_j}^m\tilde{\sigma_{j_m}}^m\Big]r^{-4}
\end{aligned}
$$

در اینصورت با تساوی قرار دادن ضرایب متناظر در دو طرف تساوی، نتایج دلخواه حاصل می‌شود، پس در مورد ضرایب r^{-4} داریم

$$A^2 = \tilde{d} \tag{۳۰.۳}$$

همچنین با تساوی قرار دادن ضرایب r^{-3} داریم

$$
\begin{aligned}
&(2A - 2AC)\sum_{j_1<\dots<j_m}\tilde{\sigma_j}^m\tilde{\sigma_{j_m}}^m - A^2\sum_{j_1<\dots<j_m}\tilde{\sigma_j}^m\tilde{\sigma_{j_{m-1}}}^m \\
&= \tilde{c}\sum_{j_1<\dots<j_m}\tilde{\sigma_j}^m\tilde{\sigma_{j_m}}^m - \tilde{d}\sum_{j_1<\dots<j_m}\tilde{\sigma_j}^m\tilde{\sigma_{j_{m-1}}}^m
\end{aligned}
$$

بنابراین با توجه به (۳۰.۳) نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\tilde{c} = 2A(1 - C) \tag{۳۱.۳}$$

حال ضریب r^m را بررسی می‌کنیم

$$B^2 = -\tilde{E} \tag{۳۲.۳}$$

همچنین برای ضریب $r^{m-۱}$ خواهیم داشت

$$-B^{۲}\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + ۲BC + ۲Bm = \tilde{E}\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + a$$

بطوریکه با توجه به (۳۲.۳)، مقدار a بصورت زیر بدست می‌آید

$$a = ۲BC + ۲Bm = ۲B(C+m) \tag{۳۳.۳}$$

اما در مورد ضریب $r^{m-۲}$ داریم

$$\begin{aligned}
&-\tilde{E}\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - a\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + b + m^{۲} - \frac{۱}{۴} = C^{۲} - C - ۲AB - ۲BC\sum_{j=۱}^{m}\sigma_j^m\\
&+B^{۲}\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - ۲B(m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + ۲Cm + m(m-۱) = B^{۲}\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m\\
&-[۲BC+۲Bm]\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + C^{۲} - C - ۲AB + ۲B\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + ۲Cm + m(m-۱)
\end{aligned}$$

در اینصورت با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده از (۳۲.۳) و (۳۳.۳) خواهیم داشت

$$b + m^{۲} - \frac{۱}{۴} = C(C-۱+۲m) - ۲B(A - \sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m) + m(m-۱) \tag{۳۴.۳}$$

به همین ترتیب ضریب $r^{m-۳}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
&E\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + a\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - b\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + \tilde{c} - (m^{۲} - \frac{۱}{۴})\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\\
&= -B^{۲}\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + ۲A - ۲AC - (C^{۲} - C - ۲AB)\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m + ۲BC\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m\\
&-۲Am + ۲B(m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - ۲C(m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m - (m-۱)(m-۲)\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m
\end{aligned}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در (۳۰.۳) تا (۳۴.۳)، تساوی فوق را مرتب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&a\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m - b\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m + \tilde c - (m^۲ - \frac{۱}{۴})\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m = [\overbrace{۲BC+۲Bm}^{a}]\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m\\
&- \underbrace{[C(C-۱+۲m) - ۲AB + \overbrace{۲B\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m}^{\text{اضافه و کم کردیم}} + m(m-۱)]}_{(b+m^۲-\frac{۱}{۴})}\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m + [\overbrace{۲A-۲AC}^{\tilde c}]\\
&+ [-۲\overbrace{A}^{\sqrt{\tilde d}}m + ۲(C+m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m \overbrace{-۴B\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m + ۲B(\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m)^۲}^{۲B\sum_{j=۱}^{m}(\tilde\sigma_j^m)^۲}]
\end{aligned}$$

و پس از ساده‌سازی، نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید

$$m\sqrt{\tilde d} + (C+m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m + B\sum_{j=۱}^{m}(\tilde\sigma_j^m)^۲ = ۰ \tag{۳۵.۳}$$

همین روند را برای ضریب $r^{m-۴}$ بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&-E\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde\sigma_l^m\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m - a\sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m + b\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m - \tilde c\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m + \tilde d\\
&+ (m^۲ - \frac{۱}{۴})\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m = B^۲\sum_{k<j<i}^{m}\tilde\sigma_k^m\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m + ۲A - ۲AC\\
&- (C^۲ - C - ۲AB)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m + ۲BC\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m - ۲Am\\
&+ ۲B(m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde\sigma_j^m\tilde\sigma_i^m - ۲C(m-۱)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m - (m-۱)(m-۲)\sum_{j=۱}^{m}\tilde\sigma_j^m
\end{aligned}$$

در اینصورت با توجه به روابط (۳۰.۳) تا (۳۴.۳) عبارات فوق را مرتب می‌سازیم

$$
\begin{aligned}
& - a \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + b \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - \tilde{c} \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + \tilde{d} + (m^۲ - \frac{۱}{۴}) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& = -[\overbrace{۲BC + ۲Bm}^{a}] \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& + [\overbrace{C(C - ۱ + ۲m) - ۲AB + ۲B \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + m(m-۱)}^{(b + m^۲ - \frac{۱}{۴})}] \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - [\overbrace{۲A - ۲AC}^{\tilde{c}}] \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + [\overbrace{A^۲}^{\tilde{d}} + ۲ \overbrace{A}^{-\sqrt{\tilde{d}}} (m-۱) \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + ۶B \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - ۴C \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - ۲(۲m - ۳) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - ۲B \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m]
\end{aligned}
$$

پس از ساده‌سازی عبارات فوق، آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{\tilde{d}}(m-۱) \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + ۲(m + C - \frac{۳}{۲}) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& + B[\sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - ۳ \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m] = ۰
\end{aligned}
\tag{۳۶.۳}
$$

در نهایت ضریب $r^{m-۵}$ را بررسی می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
& E \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + a \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - b \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - \tilde{c} \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - \tilde{d} \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m - (m^۲ - \frac{۱}{۴}) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& = -B^۲ \sum_{q<l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_q^m \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + ۲BC \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - (C^۲ - C - ۲AB) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - A^۲ \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m + (۲A - ۲AC) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - ۲A(m-۲) \sum_{j<i}^{m} \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m + ۲B(m-۴) \sum_{l<k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_l^m \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m \\
& - ۲C(m-۳) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m - (m-۳)(m-۴) \sum_{k<j<i}^{m} \tilde{\sigma}_k^m \tilde{\sigma}_j^m \tilde{\sigma}_i^m
\end{aligned}
$$

در این قسمت نیز از نتایج بدست آمده در (۳۰.۳) تا (۳۴.۳) استفاده می‌کنیم

$$a\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - b\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - \tilde{c}\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - (m^۲-\frac{۱}{۴})\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m$$

$$= [\overbrace{۲BC+۲Bm}^{a}]\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m$$

$$-\underbrace{[C(C-۱+۲m)-۲AB+۲B\overbrace{\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m}^{\text{اضافه و کم کردیم}}+m(m-۱)]}_{(b+m^۲-\frac{۱}{۴})}\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m$$

$$+[\overbrace{۲A(۱-C)}^{\tilde{c}}]\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + [-۲\overbrace{A}^{\sqrt{\tilde{d}}}(m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - ۸B\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m$$

$$+۶\mathrm{C}\sum_{\mathrm{k<j<i}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} + ۲(۳\mathrm{m}-۶)\sum_{\mathrm{k<j<i}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} + ۲\mathrm{B}\sum_{\mathrm{j=۱}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k<j<i}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{m}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}}]$$

در اینصورت نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\sqrt{\tilde{d}}(m-۲)\sum_{j<i}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m + ۳(C+m-۲)\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m$$
$$+B[\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m\sum_{k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m - ۴\sum_{l<k<j<i}^{m}\tilde{\sigma}_l^m\tilde{\sigma}_k^m\tilde{\sigma}_j^m\tilde{\sigma}_i^m] = ۰ \qquad (۳۷.۳)$$

حال توجه کنید که از رابطه (۳۴.۳) داریم

$$\lambda - m(m-۱) - C(C-۱+۲m) + ۲B(A-\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m) = ۰$$

که از رابطه (۳۱.۳) خواهیم داشت $C-۱=\frac{\tilde{c}}{۲\sqrt{\tilde{d}}}$، پس در اینصورت

$$\lambda - m(m-۱) - C(\frac{\tilde{c}}{۲\sqrt{\tilde{d}}}+۲m) + ۲B(A-\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m) = ۰$$

و از رابطه (۳۳.۳)، $C=\frac{a}{۲B}-m$ حاصل می‌شود، که در نتیجه

$$\lambda - m(m-۱) - (\frac{a}{۲B}-m)(\frac{\tilde{c}}{۲\sqrt{\tilde{d}}}+۲m) + ۲B(A-\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m) = ۰$$

با نام گذاری $\tilde{\omega}=\lambda-m(m-۱)+m(۲m+\frac{\tilde{c}}{۲\sqrt{\tilde{d}}})$ و $\nu=\frac{\tilde{c}}{۲\sqrt{\tilde{d}}}$ در رابطه‌ی فوق داریم

$$\tilde{\omega} - \frac{a}{۲B}(۲m+\nu) + ۲B(A-\sum_{j=۱}^{m}\tilde{\sigma}_j^m) = ۰$$

در نهایت با ضرب عبارت $۲B$ در طرفین معادله فوق، خواهیم داشت

$$۴(A - \sum_{j=۱}^{m} \tilde{\sigma}_j^m)B^۲ + ۲\tilde{\omega}B - a(۲m + \nu) = ۰ \tag{۳۸.۳}$$

با حل معادله فوق نسبت به B داریم

$$\begin{aligned} B &= \frac{-\tilde{\omega} \pm \sqrt{\tilde{\omega}^۲ + ۴\big(A - \sum_{j=۱}^{m} \sigma_j^m\big)a(\nu + ۲m)}}{۴\big(A - \sum_{j=۱}^{m} \sigma_j^m\big)} \\ &= \tilde{\omega}\frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۴\big(A - \sum_{j=۱}^{m} \sigma_j^m\big)a\frac{(\nu+۲m)}{\tilde{\omega}^۲}}}{۴\big(A - \sum_{j=۱}^{m} \sigma_j^m\big)} \end{aligned} \tag{۳۹.۳}$$

بدین‌وسیله انرژی $\tilde{E}$ از رابطه‌ی (۳۲.۳)، به راحتی محاسبه می‌شود

$$\tilde{E} = \tilde{\omega}^۲\frac{\Big(-۱ \pm \sqrt{۱ + ۴\big(A - \sum_{j=۱}^{m} \sigma_j^m\big)a\frac{(\nu+۲m)}{\tilde{\omega}^۲}}\Big)^۲}{۱۶\big(A - \sum_{j=۱}^{m} \sigma_j^m\big)^۲} \tag{۴۰.۳}$$

فصل ۴

روش بث آنساتز

۱.۴ مقدمه و نتایج اصلی

معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$\left\{X(z)\frac{d^۲}{dz^۲}+Y(z)\frac{d}{dz}+Z(z)\right\}S(z)=۰ \qquad (۱.۴)$$

بطوریکه $X(z)$، $Y(z)$ و $Z(z)$ چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۴، ۳ و ۲ بصورت زیر هستند

$$X(z)=\sum_{k=۰}^{۴}a_kz^k\,,\qquad Y(z)=\sum_{k=۰}^{۳}b_kz^k\,,\qquad Z(z)=\sum_{k=۰}^{۲}c_kz^k \qquad (۲.۴)$$

معادله(۱.۴)، ۱۲ پارامتر a_k،b_k و c_k دارد بطوریکه معادله‌ی هیون و معادلات تعمیم‌یافته‌ی هیون را مشمول می‌شود. با تغییر تعداد پارامترهای فوق، به‌عنوان مثال در اینجا ۵ معادله دیفرانسیل معمولی را لیست می‌کنیم که برای هر یک از آن‌ها یک کاربرد فیزیکی در بخش بعد، ارائه می‌کنیم.

- فرض کنید $a_۴=b_۳=c_۲=۰$ باشد، یعنی $degX(z)=۳$، $degY(z)\leq ۲$ و $degZ(z)\leq ۱$ باشد. اگر $X(z)$ ریشه‌های چندگانه نداشته باشد، داریم

$$X(z)=\prod_{s=۱}^{۳}(z-d_s)\,,\qquad \frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{s=۱}^{۳}\frac{\alpha_s}{z-d_s}$$

که به ازای ثوابت α_s و d_s مختلط مناسب، معادله‌ی هیون زیر را داریم

$$\left\{\frac{d^۲}{dz^۲}+\sum_{s=۱}^{۳}\frac{\alpha_s}{z-d_s}\frac{d}{dz}+\frac{Z(z)}{\prod_{s=۱}^{۳}(z-d_s)}\right\}S(z)=۰ \qquad (۳.۴)$$

- فرض کنید $degX(z)=۴$، $degY(z)\leq ۳$ و $degZ(z)\leq ۲$ باشد، اگر $X(z)$ ریشه‌ی چندگانه نداشته باشد

$$X(z)=\prod_{s=۱}^{۴}(z-e_s)\,,\qquad \frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{s=۱}^{۴}\frac{\alpha_s}{z-e_s}$$

که معادله تعمیم‌یافته‌ی هیون زیر حاصل می‌شود

$$\left\{\frac{d^۲}{dz^۲}+\sum_{s=۱}^{۴}\frac{\mu_s}{z-e_s}\frac{d}{dz}+\frac{Z(z)}{\prod_{s=۱}^{۴}(z-e_s)}\right\}S(z)=۰ \qquad (۴.۴)$$

- فرض کنید $degX(z)=۳$ $(a_۴=۰)$ ، $degY(z)\leq ۳$ و $degZ(z)\leq ۲$باشد. اگر $X(z)$ ریشه های چندگانه نداشته باشد

$$X(z)=\prod_{s=۱}^{۳}(z-f_s), \qquad \frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{s=۱}^{۳}\frac{\nu_s}{z-f_s}+\nu$$

که فرم معادلات شافکه[1] و اسمیت[2] بدست می‌آید[۳۵]

$$\left\{\frac{d^۲}{dz^۲}+(\sum_{s=۱}^{۳}\frac{\nu_s}{z-f_s}+\nu)\frac{d}{dz}+\frac{Z(z)}{\prod_{s=۱}^{۳}(z-f_s)}\right\}S(z)=۰ \qquad (۵.۴)$$

- فرض کنید $degX(z)=۲$ $(a_۴=a_۳=۰)$، $degY(z)\leq ۳$ و $degZ(z)\leq ۲$ اگر $X(z)$ ریشه های چندگانه نداشته باشد در اینصورت $X(z)=(z-g_۱)(z-g_۲)$ و

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sigma_۱}{z-g_۱}+\frac{\sigma_۲}{z-g_۲}+\sigma z+k$$

که معادله‌ی (۱.۴) به شکل زیر حاصل می‌شود

$$\left\{\frac{d^۲}{dz^۲}+(\frac{\sigma_۱}{z-g_۱}+\frac{\sigma_۲}{z-g_۲}+\sigma z+k)\frac{d}{dz}+\frac{Z(z)}{(z-g_۱)(z-g_۲)}\right\}S(z)=۰ \qquad (۶.۴)$$

- و اما در صورتیکه $degX(z)=۱$ $(a_۴=a_۳=a_۲=۰)$ ، $degY(z)\leq ۳$ و $degZ(z)\leq ۲$ باشد داریم

$$X(z)=(z-h) \qquad , \qquad \frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\eta}{z-h}+\lambda z^۲+\gamma z+\delta$$

که معادله(۱.۴) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\left\{\frac{d^۲}{dz^۲}+(\frac{\eta}{z-h}+\lambda z^۲+\gamma z+\delta)\frac{d}{dz}+\frac{Z(z)}{z-h}\right\}S(z)=۰ \qquad (۷.۴)$$

اخیرا تحقیقات زیادی برای یافتن جواب چندجمله‌ای‌وار معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱.۴) صورت گرفته است[۳۶، ۳۷]. اما در این رساله این مسائل را با روش کاربردی (یا تحلیلی)، روش بث آنساتز حل می‌کنیم[۳۸، ۳۹] و دقیقا مقادیر صریح و روشن برای ضرایب $c_۰$ ، $c_۱$ و $c_۲$ از چندجمله‌ای $Z(z)$ پیدا می‌کنیم که موجب تعیین درجه چندجمله‌ای جواب $S(z)$ از معادله (۱.۴) با ریشه‌های $z_۱,\ldots,z_n$ می‌شوند در نهایت به یک دستگاه n معادله جبری (به اصطلاح معادلات آنساتز) می‌رسیم که این ریشه‌ها را تعیین می‌کند[۴۰].

قضیه ۱.۱.۴. دو چند جمله‌ای $X(z)$ و $Y(z)$ را در نظر بگیرید، مقادیر ضرایب $c_۰$ ، $c_۱$ و $c_۲$ از چندجمله‌ای $Z(z)$ چنان حاصل می‌شوند که معادله دیفرانسیل (۱.۴) یک جواب چند جمله‌ای از درجه n با ریشه‌های مجزای $z_۱,\ldots,z_n$ داشته باشد

$$S(z)=\prod_{i=۱}^{n}(z-z_i) \qquad (۸.۴)$$

[1] Schafke

[2] Schmidt

در اینصورت مقادیر c_0 ، c_1 و c_2 به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$c_2 = -n(n-1)a_4 - nb_3 \tag{۹.۴}$$

$$c_1 = -[2(n-1)a_4 + b_3]\sum_{i=1}^{n} z_i - n(n-1)a_3 - nb_2 \tag{۱۰.۴}$$

$$\begin{aligned} c_0 = &-[2(n-1)a_4 + b_3]\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2a_4\sum_{i<j}^{n} z_i z_j \\ &- [2(n-1)a_3 + b_2]\sum_{i=1}^{n} z_i - n(n-1)a_2 - nb_1 \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

همچنین ریشه‌های $z_1, \ldots, z_n$ از معادلات آنساتز به‌صورت زیر مشخص می‌شوند

$$\sum_{i\neq j}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} + \frac{b_3 z_i^3 + b_2 z_i^2 + b_1 z_i + b_0}{a_4 z_i^4 + a_3 z_i^3 + a_2 z_i^2 + a_1 z_i + a_0} = 0\,; \qquad i = 1, \ldots, n \tag{۱۲.۴}$$

معادلات (۹.۴) تا (۱۲.۴) چندجمله‌ای $Z(z)$ را می‌دهد به‌طوریکه معادله دیفرانسیل (۱.۴) دارای جواب چندجمله‌ای (۸.۴) باشد.

برهان. فرض کنید

$$S(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i) \tag{۱۳.۴}$$

یک چند جمله‌ای درجه n با ریشه‌های مجزای نامعین $z_1, \ldots, z_n$ باشد. مقادیر c_0، c_1 و c_2 ضرایب $Z(z)$ و ریشه‌های z_i $(1 \leq i \leq n)$ را طوری پیدا می‌کنیم که چندجمله‌ای (۱۳.۴) جواب معادله‌ی (۱.۴) باشد. چندجمله‌ای $S(z)$ را در معادله دیفرانسیل (۱.۴) جایگزین می‌کنیم

$$X(z)\frac{d^2}{dz^2}S(z) + Y(z)\frac{d}{dz}S(z) + Z(z)S(z) = 0$$

طرفین معادله‌ی فوق را بر $S(z)$ تقسیم می‌کنیم

$$X(z)\frac{\frac{d^2}{dz^2}S(z)}{S(z)} + Y(z)\frac{\frac{d}{dz}S(z)}{S(z)} + Z(z) = 0$$

با جایگزینی چندجمله‌ای‌های $X(z)$، $Y(z)$ و $Z(z)$ تعریف شده در(۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4)\frac{\frac{d^2}{dz^2}S(z)}{S(z)} + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3)\frac{\frac{d}{dz}S(z)}{S(z)} \\ &+ (c_0 + c_1 z + c_2 z^2) = 0 \end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

در اینصورت مشتق اول و مشتق دوم $S(z)$ را نسبت به z به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}S(z) &= \frac{d}{dz}\Big(\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)\Big) = \frac{d}{dz}\Big((z-z_1)\dots(z-z_n)\Big)\\
&= (z-z_2)\dots(z-z_n) + (z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_n) + \dots\\
&+ (z-z_1)\dots(z-z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{i\neq j}^{n}(z-z_j)\Big)\\
\frac{d^2}{dz^2}S(z) &= \frac{d}{dz}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{i\neq j}^{n}(z-z_j)\Big)\Big) = \frac{d}{dz}\Big(\Big[(z-z_2)\dots(z-z_n)\Big]\\
&+ \Big[(z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_n)\Big] + \dots + \Big[(z-z_1)\dots(z-z_{n-1})\Big]\Big)\\
&= \Big[(z-z_3)\dots(z-z_n) + (z-z_2)(z-z_4)\dots(z-z_n) + \dots\\
&+ (z-z_2)\dots(z-z_{n-1})\Big] + \Big[(z-z_3)\dots(z-z_n)\\
&+ (z-z_1)(z-z_4)\dots(z-z_n) + \dots + (z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_{n-1})\Big]\\
&+ \dots + \Big[(z-z_2)\dots(z-z_{n-1}) + (z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_{n-1})\\
&+ \dots + (z-z_1)\dots(z-z_{n-2})\Big] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big(\prod_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}}^{n}(z-z_k)\Big)
\end{aligned}$$

جهت محاسبه‌ی (۱۴.۴)، نتایج فوق را بر $S(z)$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{\frac{d}{dz}S(z)}{S(z)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overbrace{\prod_{i\neq j}^{n}(z-z_j)}^{\text{درجه } n-1}}{\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}_{\text{درجه } n}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i} \tag{۱۵.۴}$$

$$\frac{\frac{d^2}{dz^2}S(z)}{S(z)} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\overbrace{\prod_{\substack{k\neq j\\ i\neq j}}^{n}(z-z_k)}^{\text{درجه } n-2}}{\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}_{\text{درجه } n}} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{(z-z_i)(z-z_j)}$$

برای محاسبه‌ی عبارت نهایی، کسر فوق را تجزیه می‌کنیم

$$\frac{1}{(z-z_i)(z-z_j)} = \frac{A}{z-z_i} + \frac{B}{z-z_j}$$

با تساوی قرار دادن صورت کسرهای فوق داریم

$$A(z-z_j)+B(z-z_i)=۱$$

در اینصورت

$$(A+B)z-(Az_j+Bz_i)=۱$$

پس با متناظر قرار دادن ضرایب عبارت فوق داریم

$$A=-B=\frac{۱}{z_i-z_j}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{(z-z_i)(z-z_j)}=\frac{۱}{z_i-z_j}\frac{۱}{z-z_i}+\frac{۱}{z_j-z_i}\frac{۱}{z-z_j}$$

در اینصورت داریم

$$\frac{\frac{d^۲}{dz^۲}S(z)}{S(z)}=\sum_{\substack{i,j=۱\\ i\neq j}}^{n}\frac{۱}{(z-z_i)(z-z_j)}=\sum_{\substack{i,j=۱\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{۱}{z_i-z_j}\frac{۱}{z-z_i}+\frac{۱}{z_j-z_i}\frac{۱}{z-z_j}\right)$$

اما چون i و j اندیس‌هایی با شرایط یکسان هستند پس عبارت فوق به‌صورت زیر کاهش پیدا می‌کند

$$\frac{\frac{d^۲}{dz^۲}S(z)}{S(z)}=\sum_{\substack{i,j=۱\\ i\neq j}}^{n}۲\left(\frac{۱}{z-z_i}\frac{۱}{z_i-z_j}\right)=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j} \tag{۱۶.۴}$$

در اینصورت با توجه به روابط (۱۵.۴) و (۱۶.۴) معادله‌ی (۱۴.۴) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$(a_۰+a_۱z+a_۲z^۲+a_۳z^۳+a_۴z^۴)\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}$$
$$+(b_۰+b_۱z+b_۲z^۲+b_۳z^۳)\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{z-z_i}+(c_۰+c_۱z+c_۲z^۲)=۰$$

بنابراین داریم:

$$-c_۰=(a_۰+a_۱z+a_۲z^۲+a_۳z^۳+a_۴z^۴)\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}$$
$$+(b_۰+b_۱z+b_۲z^۲+b_۳z^۳)\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{z-z_i}+c_۱z+c_۲z^۲ \tag{۱۷.۴}$$

در رابطه فوق، عبارت سمت چپ ثابت و عبارت سمت راست تابع با قطب ساده‌ی $z = z_i$ و تکین در $z = \infty$ می‌باشد، لذا مانده $(-c_0)$ در قطب ساده $z = z_i$ قابل محاسبه است. پس یک جمله از رابطه (۱۷.۴) را به‌صورت زیر را در نظر می‌گیریم

$$A = a_4 z^4 \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i} = \sum_{j\neq i}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2 a_4 z^4}{z_i - z_j} \times \frac{1}{z - z_i}$$

حال مانده عبارت A را در قطب ساده‌ی $z = z_i$ بصورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} Res(A)_{z=z_i} &= \lim_{z\to z_i} \left[(z - z_i) \sum_{j\neq i}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2 a_4 z^4}{z_i - z_j} \times \frac{1}{z - z_i} \right] \\ &= \lim_{z\to z_i} \left[\sum_{j\neq i}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2 a_4 z^4}{z_i - z_j} \times \frac{z - z_i}{z - z_i} \right] = \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2 a_4 z_i^4}{z_i - z_j} = a_4 z_i^4 \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} \end{aligned}$$

برای بقیه جملات نیز می‌توان به‌همین صورت تعمیم داد، بنابراین مانده‌ی $(-c_0)$ در رابطه (۱۷.۴) به‌صورت زیر حساب می‌شود

$$\begin{aligned} Res(-c_0)_{z=z_i} &= (a_0 + a_1 z_i + a_2 z_i^2 + a_3 z_i^3 + a_4 z_i^4) \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} \\ &+ (b_0 + b_1 z_i + b_2 z_i^2 + b_3 z_i^3) \end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

برای ادامه‌ی اثبات، عبارت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{z=z_i}}{z - z_i} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[&\frac{a_4 z_i^4 + a_3 z_i^3 + a_2 z_i^2 + a_1 z_i + a_0}{z - z_i} \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} \\ &+ \frac{b_3 z_i^3 + b_2 z_i^2 + b_1 z_i + b_0}{z - z_i} \Bigg] \end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

از طرفی رابطه (۱۷.۴) را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} -c_0 = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[&\frac{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z - z_i} \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} \\ &+ \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z - z_i} \Bigg] + c_2 z^2 + c_1 z \end{aligned} \tag{۲۰.۴}$$

در اینصورت از تفاضل روابط (۱۹.۴) و (۲۰.۴) داریم

$$\begin{aligned} -c_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{z=z_i}}{z - z_i} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[&\frac{a_4(z^4 - z_i^4)}{z - z_i} + \frac{a_3(z^3 - z_i^3)}{z - z_i} + \frac{a_2(z^2 - z_i^2)}{z - z_i} \\ &+ \frac{a_1(z - z_i)}{z - z_i} + a_0 - a_0 \Bigg] \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} + \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\frac{b_3(z^3 - z_i^3)}{z - z_i} + \frac{b_2(z^2 - z_i^2)}{z - z_i} \\ &+ \frac{b_1(z - z_i)}{z - z_i} + b_0 - b_0 \Bigg] + c_2 z^2 + c_1 z \end{aligned}$$

اما با توجه به اتحاد زیر

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

داریم

$$\begin{aligned}
&- c_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{z=z_0}}{z-z_i} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\frac{a_4(z-z_i)(z^3 + z^2z_i + zz_i^2 + z_i^3)}{z-z_i} \\
&+ \frac{a_3(z-z_i)(z^2 + zz_i + z_i^2)}{z-z_i} + \frac{a_2(z-z_i)(z+z_i)}{z-z_i} + a_1 \Bigg] \sum_{i\neq j}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\frac{b_3(z-z_i)(z^2 + zz_i + z_i^2)}{z-z_i} + \frac{b_2(z-z_i)(z+z_i)}{z-z_i} + b_1 \Bigg] + c_2z^2 + c_1z \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big[a_4(z^3 + z_i^3 + z^2z_i + zz_i^2) + a_3(z^2 + z_i^2 + zz_i) + a_2(z+z_i) \\
&+ a_1 \big] \sum_{i\neq j}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} + \sum_{i=1}^{n} \big[b_3(z^2 + z_i^2 + zz_i) + b_2(z+z_i) + b_1 \big] + c_2z^2 + c_1z \\
&= z^2 \Bigg[\sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{2a_4z_i}{z_i - z_j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{2a_3}{z_i - z_j} + \sum_{i=1}^{n} b_3 + c_2 \Bigg] + z \Bigg[\sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{2a_4z_i^2}{z_i - z_j} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{a_3z_i}{z_i - z_j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{2a_2}{z_i - z_j} + \sum_{i=1}^{n} b_3z_i + \sum_{i=1}^{n} b_2 + c_1 \Bigg] \\
&+ 2a_4z^3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{1}{z_i - z_j} + 2a_4 \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{z_i^3}{z_i - z_j} + 2a_3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{z_i^2}{z_i - z_j} \\
&+ 2a_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{z_i}{z_i - z_j} + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \frac{1}{z_i - z_j} + b_3 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} z_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

در اینصورت:

$$\begin{aligned}
&- c_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{z=z_i}}{z-z_i} = z^2 \Big[a_4n(n-1) + b_3n + c_2 \Big] \\
&+ z \Big[2a_4(n-1) \sum_{i=1}^{n} z_i + a_3n(n-1) + b_3 \sum_{i=1}^{n} z_i + b_2n + c_1 \Big] \\
&+ 2a_4(n-1) \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2a_4 \sum_{j<i}^{n} z_iz_j + 2a_3(n-1) \sum_{i=1}^{n} z_i + a_2n(n-1) \\
&+ b_3 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} z_i + b_1n
\end{aligned} \tag{۴.۲۱}$$

$$= \big[n(n-۱)a_۴ + nb_۳ + c_۲\big]z^۲ + \big[\big(۲(n-۱)a_۴ + b_۳\big)\sum_{i=۱}^{n} z_i + n(n-۱)a_۳$$
$$+ nb_۲ + c_۱\big]z + \big(۲(n-۱)a_۴ + b_۳\big)\sum_{i=۱}^{n} z_i^۲ + ۲a_۴ \sum_{i<j}^{n} z_i z_j$$
$$+ \big(۲(n-۱)a_۳ + b_۲\big)\sum_{i=۱}^{n} z_i + n(n-۱)a_۲ + nb_۱ \qquad (۲۲.۴)$$

بطوریکه از موارد زیر استفاده کردیم:

$$۱.\ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \frac{۱}{z_i - z_j} = ۰$$
$$۲.\ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \frac{z_i}{z_i - z_j} = \frac{۱}{۲}n(n-۱)$$
$$۳.\ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \frac{z_i^۲}{z_i - z_j} = (n-۱)\sum_{i=۱}^{n} z_i$$
$$۴.\ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \frac{z_i^۳}{z_i - z_j} = (n-۱)\sum_{i=۱}^{n} z_i^۲ + \sum_{i<j}^{n} z_i z_j \qquad (۲۳.۴)$$

زیرا

$$۱.\ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \frac{۱}{z_i - z_j} = \left[\frac{۱}{z_۱ - z_۲} + \frac{۱}{z_۱ - z_۳} + \ldots + \frac{۱}{z_۱ - z_n}\right] + \left[\frac{۱}{z_۲ - z_۱}\right.$$
$$\left. + \frac{۱}{z_۲ - z_۳} + \ldots + \frac{۱}{z_۲ - z_n}\right] + \left[\frac{۱}{z_۳ - z_۱} + \frac{۱}{z_۳ - z_۲} + \frac{۱}{z_۳ - z_۴} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{۱}{z_۳ - z_n}\right] + \ldots + \left[\frac{۱}{z_n - z_۱} + \frac{۱}{z_n - z_۲} + \frac{۱}{z_n - z_۳} + \ldots + \frac{۱}{z_n - z_{n-۱}}\right] = ۰$$

$$۲.\ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \frac{z_i}{z_i - z_j} = \left[\frac{z_۱}{z_۱ + z_۲} + \frac{z_۱}{z_۱ + z_۳} + \frac{z_۱}{z_۱ + z_۴} + \ldots + \frac{z_۱}{z_۱ + z_n}\right] + \left[\frac{z_۲}{z_۲ + z_۱}\right.$$
$$\left. + \frac{z_۲}{z_۲ + z_۳} + \frac{z_۲}{z_۲ + z_۴} + \ldots + \frac{z_۲}{z_۲ + z_n}\right] + \left[\frac{z_۳}{z_۳ + z_۱} + \frac{z_۳}{z_۳ + z_۲} + \frac{z_۳}{z_۳ + z_۴} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{z_۳}{z_۳ + z_n}\right] + \ldots + \left[\frac{z_{n-۱}}{z_{n-۱} + z_۱} + \frac{z_{n-۱}}{z_{n-۱} + z_۲} + \frac{z_{n-۱}}{z_{n-۱} + z_۳} + \ldots + \frac{z_{n-۱}}{z_{n-۱} + z_{n-۲}}\right.$$
$$\left. + \frac{z_{n-۱}}{z_{n-۱} + z_n}\right] + \left[\frac{z_n}{z_n + z_۱} + \frac{z_n}{z_n + z_۲} + \frac{z_n}{z_n + z_۳} + \ldots + \frac{z_n}{z_n + z_{n-۱}}\right]$$

$$= \left[\left(\overbrace{\frac{z_1}{z_1+z_2}+\frac{z_2}{z_2+z_1}}^{1}\right)+\left(\overbrace{\frac{z_1}{z_1+z_3}+\frac{z_3}{z_3+z_1}}^{1}\right)+\dots\right.$$
$$\left.+\left(\overbrace{\frac{z_1}{z_1+z_n}+\frac{z_n}{z_n+z_1}}^{1}\right)\right]+\left[\left(\overbrace{\frac{z_2}{z_2+z_3}+\frac{z_3}{z_3+z_2}}^{1}\right)+\left(\overbrace{\frac{z_2}{z_2+z_4}+\frac{z_4}{z_4+z_2}}^{1}\right)\right.$$
$$\left.+\dots+\left(\overbrace{\frac{z_2}{z_2+z_n}+\frac{z_n}{z_n+z_2}}^{1}\right)\right]+\dots+\left[\overbrace{\left(\frac{z_{n-1}}{z_{n-1}+z_n}+\frac{z_n}{z_n+z_{n-1}}\right)}^{1}\right]$$

حاصل براکت اول $(n-1)$، حاصل براکت دوم $(n-2)$ و به همین ترتیب حاصل براکت نهایی مقدار ۱ است، در اینصورت

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{z_i}{z_i-z_j}=(n-1)+(n-2)+\dots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{z_i^2}{z_i-z_j}=\left[\frac{z_1^2}{z_1-z_2}+\frac{z_1^2}{z_1-z_3}+\frac{z_1^2}{z_1-z_4}+\dots+\frac{z_1^2}{z_1-z_n}\right]$$
$$+\left[\frac{z_2^2}{z_2-z_1}+\frac{z_2^2}{z_2-z_3}+\frac{z_2^2}{z_2-z_4}+\dots+\frac{z_2^2}{z_2-z_n}\right]+\left[\frac{z_3^2}{z_3-z_1}+\frac{z_3^2}{z_3-z_2}\right.$$
$$\left.+\frac{z_3^2}{z_3-z_4}+\dots+\frac{z_3^2}{z_3-z_n}\right]+\dots+\left[\frac{z_{n-1}^2}{z_{n-1}-z_1}+\frac{z_{n-1}^2}{z_{n-1}-z_2}+\frac{z_{n-1}^2}{z_{n-1}-z_3}\right.$$
$$\left.+\dots+\frac{z_{n-1}^2}{z_{n-1}-z_{n-2}}+\frac{z_{n-1}^2}{z_{n-1}-z_n}\right]+\left[\frac{z_n^2}{z_n-z_1}+\frac{z_n^2}{z_n-z_2}+\frac{z_n^2}{z_n-z_3}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{z_n^2}{z_n-z_{n-1}}\right]=\left[\left(\frac{z_1^2}{z_1-z_2}+\frac{z_2^2}{z_2-z_1}\right)+\left(\frac{z_1^2}{z_1-z_3}+\frac{z_3^2}{z_3-z_1}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{z_1^2}{z_1-z_4}+\frac{z_4^2}{z_4-z_1}\right)+\dots+\left(\frac{z_1^2}{z_1-z_{n-1}}+\frac{z_{n-1}^2}{z_{n-1}-z_1}\right)+\left(\frac{z_1^2}{z_1-z_n}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{z_n^2}{z_n-z_1}\right)\right]+\left[\left(\frac{z_2^2}{z_2-z_3}+\frac{z_3^2}{z_3-z_2}\right)+\left(\frac{z_2^2}{z_2-z_4}+\frac{z_4^2}{z_4-z_2}\right)+\dots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{z_2^2}{z_2-z_n}+\frac{z_n^2}{z_n-z_2}\right)\right]+\left[\left(\frac{z_3^2}{z_3-z_4}+\frac{z_4^2}{z_4-z_3}\right)+\dots+\left(\frac{z_3^2}{z_3-z_n}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{z_n^2}{z_n-z_3}\right)\right]+\dots+\left[\frac{z_{n-1}^2}{z_{n-1}-z_n}+\frac{z_n^2}{z_n-z_{n-1}}\right]$$
$$=\left[\frac{(z_1-z_2)(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)}+\frac{(z_1-z_3)(z_1+z_3)}{(z_1-z_3)}+\frac{(z_1-z_4)(z_1+z_4)}{(z_1-z_4)}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{(z_1-z_{n-1})(z_1+z_{n-1})}{(z_1-z_{n-1})}+\frac{(z_1-z_n)(z_1+z_n)}{(z_1-z_n)}\right]+\left[\frac{(z_2-z_3)(z_2+z_3)}{(z_2-z_3)}\right.$$
$$\left.+\frac{(z_2-z_4)(z_2+z_4)}{(z_2-z_4)}+\dots+\frac{(z_2-z_n)(z_2+z_n)}{(z_2-z_n)}\right]+\left[\frac{(z_3-z_4)(z_3+z_4)}{(z_3-z_4)}\right.$$
$$\left.+\dots+\frac{(z_3-z_n)(z_3+z_n)}{(z_3-z_n)}\right]+\dots+\left[\frac{(z_{n-1}-z_n)(z_{n-1}+z_n)}{(z_{n-1}-z_n)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[(z_1+z_2)+(z_1+z_3)+(z_1+z_4)+\ldots+(z_1+z_{n-1})+(z_1+z_n)\Big] \\
&+ \Big[(z_2+z_3)+(z_2+z_4)+\ldots+(z_2+z_n)\Big] + \Big[(z_3+z_4)+\ldots \\
&+ (z_3+z_n)\Big]+\ldots+\Big[z_{n-1}-z_n\Big] = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} z_i+\sum_{i=1}^{n} z_i+\sum_{i=1}^{n} z_i+\ldots+\sum_{i=1}^{n} z_i}^{\text{تا}(n-1)} \\
&= (n-1)\sum_{i=1}^{n} z_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4.\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}\frac{z_i^3}{z_i-z_j} &= \left[\frac{z_1^3}{z_1-z_2}+\frac{z_1^3}{z_1-z_3}+\frac{z_1^3}{z_1-z_4}+\ldots+\frac{z_1^3}{z_1-z_n}\right] \\
&+ \left[\frac{z_2^3}{z_2-z_1}+\frac{z_2^3}{z_2-z_3}+\ldots+\frac{z_2^3}{z_2-z_n}\right]+\left[\frac{z_3^3}{z_3-z_1}+\frac{z_3^3}{z_3-z_2}+\frac{z_3^3}{z_3-z_4}\right. \\
&+ \left.\ldots+\frac{z_3^3}{z_3-z_n}\right]+\ldots+\left[\frac{z_n^3}{z_n-z_1}+\frac{z_n^3}{z_n-z_2}+\ldots+\frac{z_n^3}{z_n-z_{n-1}}\right] \\
&= \left[\left(\frac{z_1^3}{z_1-z_2}+\frac{z_2^3}{z_2-z_1}\right)+\left(\frac{z_1^3}{z_1-z_3}+\frac{z_3^3}{z_3-z_1}\right)\right. \\
&+ \left.\ldots+\left(\frac{z_1^3}{z_1-z_n}+\frac{z_n^3}{z_n-z_1}\right)\right]+\left[\left(\frac{z_2^3}{z_2-z_3}+\frac{z_3^3}{z_3-z_2}\right)\right. \\
&+ \left.\ldots+\left(\frac{z_2^3}{z_2-z_n}+\frac{z_n^3}{z_n-z_2}\right)\right]+\ldots+\left[\frac{z_n^3}{z_n-z_{n-1}}+\frac{z_{n-1}^3}{z_{n-1}-z_n}\right] \\
&= \left[\frac{(z_1-z_2)(z_1^2+z_2z_1+z_2^2)}{(z_1-z_2)}+\frac{(z_1-z_3)(z_1^2+z_3z_1+z_3^2)}{(z_1-z_3)}\right. \\
&+ \left.\ldots+\frac{(z_1-z_n)(z_1^2+z_nz_1+z_n^2)}{(z_1-z_n)}\right]+\left[\frac{(z_2-z_3)(z_2^2+z_3z_2+z_3^2)}{(z_2-z_3)}+\ldots\right. \\
&+ \left.\frac{(z_2-z_n)(z_2^2+z_nz_2+z_n^2)}{(z_2-z_n)}\right]+\ldots+\left[\frac{(z_{n-1}-z_n)(z_{n-1}^2+z_{n-1}z_n+z_n^2)}{(z_{n-1}-z_n)}\right] \\
&= \Big[(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+(z_1^2+z_1z_3+z_3^2)+\ldots+(z_1^2+z_1z_n+z_n^2)\Big] \\
&+ \Big[(z_2^2+z_2z_3+z_3^2)+\ldots+(z_2^2+z_2z_n+z_n^2)\Big]+\ldots+\Big[z_n^2+z_nz_{n-1}+z_{n-1}^2\Big] \\
&= \Big[(z_1^2+z_2^2)+(z_1^2+z_3^2)+\ldots+(z_1^2+z_n^2)\Big]+\Big[(z_2^2+z_3^2)+\ldots+(z_2^2+z_n^2)\Big] \\
&+ \ldots+\Big[z_n^2+z_{n-1}^2\Big]+\Big[z_1z_2+z_1z_3+\ldots+z_1z_n+z_2z_3+z_2z_4 \\
&+ \ldots+z_2z_n+\ldots+z_{n-1}z_n\Big] = (n-1)\sum_{i=1}^{n} z_i^2+\sum_{i<j} z_iz_j
\end{aligned}
$$

اما برمی‌گردیم به ادامه‌ی اثبات قضیه، رابطه‌ی (۲۱.۴) را به صورت زیر داریم

$$\begin{aligned}-c_0 &= \left[n(n-1)a_4 + nb_3 + c_2\right] z^2 \\ &+ \left[\left(2(n-1)a_4 + b_3\right)\sum_{i=1}^{n} z_i + n(n-1)a_3 + nb_2 + c_1\right] z \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{z=z_i}}{z - z_i} \\ &+ \left(2(n-1)a_4 + b_3\right)\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2a_4 \sum_{i<j}^{n} z_i z_j \\ &+ \left(2(n-1)a_3 + b_2\right)\sum_{i=1}^{n} z_i + n(n-1)a_2 + nb_1\end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

سمت راست رابطه‌ی (۲۴.۴) عدد ثابت است اگر و تنها اگر ضرایب z^2، z و همچنین مانده در قطب ساده $z = z_i$ با صفر برابر باشند. در اینصورت ضرایب ثابت c_1 و c_2 به‌دست می‌آیند

$$n(n-1)a_4 + nb_3 + c_2 = 0 \tag{۲۵.۴}$$

$$\left(2(n-1)a_4 + b_3\right)\sum_{i=1}^{n} z_i + n(n-1)a_3 + nb_2 + c_1 = 0 \tag{۲۶.۴}$$

و n معادلات جبری z_iها، ریشه‌های $S(z)$ را تعیین می‌کنند

$$\sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} + \frac{b_3 z_i^3 + b_2 z_i^2 + b_1 z_i + b_0}{a_4 z_i^4 + a_3 z_i^3 + a_2 z_i^2 + a_1 z_i + a_0} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{۲۷.۴}$$

این معادلات چیزی جز (۹.۴) ، (۱۰.۴) و (۱۲.۴) نیستند. همچنین ضریب ثابت c_0 را به‌صورت زیر نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}-c_0 &= \left(2(n-1)a_4 + b_3\right)\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2a_4 \sum_{i<j}^{n} z_i z_j \\ &+ \left(2(n-1)a_3 + b_2\right)\sum_{i=1}^{n} z_i + n(n-1)a_2 + nb_1\end{aligned} \tag{۲۸.۴}$$

که همان (۱۱.۴) است. □

نتیجه ۲.۱.۴. اگر برای یک عدد صحیح دلخواه n، ضرایب a_4 و b_3 در معادله دیفرانسیل (۱.۴) وابسته جبری باشند

$$2(n-1)a_4 + b_3 = 0 \tag{۲۹.۴}$$

$n+1$ چندجمله ای $Z(z)$ با ضرایب $c_2 = n(n-1)a_4$، $c_1 = -n[(n-1)a_3 + b_2]$ و

$$c_0 = -n[(n-1)a_2 + 2b_1] - 2a_4 \sum_{i<j}^{n} z_i z_j - [2(n-1)a_3 + b_2]\sum_{i=1}^{n} z_i$$

وجود دارد به‌طوریکه معادله دیفرانسیل (۱.۴) دارای چندجمله ای جواب $S(z)$ (۸.۴) از درجه n می‌باشد در صورتیکه ریشه های z_i از رابطه‌ی (۱۲.۴) حاصل شوند.

برهان. اگر ضرایب $X(z)$ و $Y(z)$ وابسته جبری باشند یعنی

$$b_۳ = -۲(n-۱)a_۴$$

پس معادله دیفرانسیل (۱.۴) دارای یک $sl(۲)$ پنهان جبری متقارن است اگر

$$c_۱ = -n[(n-۱)a_۳ + b_۲] \qquad , \qquad c_۲ = n(n-۱)a_۴$$

معادله (۱.۴) با ضرایب $c_۱$ و $c_۲$ را به فرم معادله شرودینگر می‌نویسیم

$$H\, S(z) = -c_\circ S(z) \tag{۳۰.۴}$$

که می‌توان نشان داد H یک عنصر محاط شده جبری $sl(۲)$ است

$$\begin{aligned} H =& a_۴ J^+J^+ + a_۳ J^+J^\circ + a_۲ J^\circ J^\circ + a_۱ J^\circ J^- + a_\circ J^- J^- \\ &+ \Big[\frac{۱}{۲}(۳n-۲)a_۳ + b_۲\Big]J^+ + \Big[(n-۱)a_۲ + b_۱\Big]J^\circ \\ &+ \Big(\frac{n}{۲}a_۱ + b_\circ\Big)J^- - \frac{n^۲}{۴}a_۲ + \frac{n}{۲}\Big[(n-۱)a_۲ + b_۱\Big] \end{aligned} \tag{۳۱.۴}$$

بطوریکه

$$J^+ = z^۲\frac{d}{dz} - nz\,, \qquad J^\circ = z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲}\,, \qquad J^- = \frac{d}{dz} \tag{۳۲.۴}$$

عامل‌های دیفرانسیلی $n+۱$ بعدی معرف $sl(۲)$ جبری هستند. برای اثبات رابطه‌ی (۳۱.۴) ابتدا ترکیبات زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} J^+J^+ =&(z^۲\frac{d}{dz} - nz)(z^۲\frac{d}{dz} - nz) = z^۲\frac{d}{dz}(z^۲\frac{d}{dz} - nz) - nz(z^۲\frac{d}{dz} - nz) \\ =&z^۲(۲z\frac{d}{dz} + z^۲\frac{d^۲}{dz^۲} - n) - nz^۳\frac{d}{dz} + n^۲z^۲ \\ =&۲z^۳\frac{d}{dz} + z^۴\frac{d^۲}{dz^۲} - nz^۲ - nz^۳\frac{d}{dz} + n^۲z^۲ \\ J^+J^\circ =&(z^۲\frac{d}{dz} - nz)(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲}) = z^۲\frac{d}{dz}(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲}) - nz(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲}) \\ =&z^۲(\frac{d}{dz} + z\frac{d^۲}{dz^۲}) - nz^۲\frac{d}{dz} + \frac{n^۲}{۲}z = z^۲\frac{d}{dz} + z^۳\frac{d^۲}{dz^۲} - nz^۲\frac{d}{dz} + \frac{n^۲}{۲}z \\ J^\circ J^\circ =&(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲})(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲}) = z\frac{d}{dz}(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲}) - \frac{n}{۲}(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲}) \\ =&z(\frac{d}{dz} + z\frac{d^۲}{dz^۲}) - \frac{n}{۲}z\frac{d}{dz} + \frac{n^۲}{۴} = z\frac{d}{dz} + z^۲\frac{d^۲}{dz^۲} - \frac{n}{۲}z\frac{d}{dz} + \frac{n^۲}{۴} \\ J^\circ J^- =&(z\frac{d}{dz} - \frac{n}{۲})\frac{d}{dz} = z\frac{d^۲}{dz^۲} - \frac{n}{۲}\frac{d}{dz} \\ J^-J^- =&\frac{d}{dz}\frac{d}{dz} = \frac{d^۲}{dz^۲} \end{aligned} \tag{۳۳.۴}$$

$$
\begin{aligned}
[\tfrac{1}{2}(3n-2)a_3+b_2]J^+ &= [\tfrac{1}{2}(3n-2)a_3+b_2](z^2\frac{d}{dz}-nz)\\
&= \frac{3}{2}nz^2a_3\frac{d}{dz}-a_3z^2\frac{d}{dz}+b_2z^2\frac{d}{dz}-\frac{3}{2}n^2a_3z-a_3nz-b_2nz\\
[(n-1)a_2+b_1]J^\circ &= [(n-1)a_2+b_1](z\frac{d}{dz}-\frac{n}{2})\\
&= na_2z\frac{d}{dz}-a_2z\frac{d}{dz}+b_1z\frac{d}{dz}-\frac{n^2}{2}a_2+\frac{n}{2}a_2-b_1\frac{n}{2}\\
(\frac{n}{2}a_1+b_0)J^- &= (\frac{n}{2}a_1+b_0)\frac{d}{dz}=\frac{n}{2}a_1\frac{d}{dz}+b_0\frac{d}{dz}
\end{aligned}
$$

حال با توجه به (۳۱.۴) مجموع ترکیبات فوق را محاسبه می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
H &= a_4J^+J^+ + a_3J^+J^\circ + a_2J^\circ J_0 + a_1J^\circ J^- + a_0J^-J^-\\
&+ [\tfrac{1}{2}(3n-2)a_3+b_2]J^+ + [(n-1)a_2+b_1]J^\circ + (\frac{n}{2}a_1+b_0)J^- - \frac{n^2}{4}a_2\\
&+ \frac{n}{2}[(n-1)a_2+b_1] = a_4[2z^3\frac{d}{dz}+z^4\frac{d^2}{dz^2}-nz^2-nz^3\frac{d}{dz}+n^2z^2]\\
&+ a_3[z^2\frac{d}{dz}+z^3\frac{d^2}{dz^2}-nz^2\frac{d}{dz}+\frac{n^2}{2}z] + a_2[z\frac{d}{dz}+z^2\frac{d^2}{dz^2}-\frac{n}{2}z\frac{d}{dz}+\frac{n^2}{4}]\\
&+ a_1[z\frac{d^2}{dz^2}-\frac{n}{2}\frac{d}{dz}] + a_0\frac{d^2}{dz^2}+\frac{3}{2}nz^2a_3\frac{d}{dz}-a_3z^2\frac{d}{dz}+b_2z^2\frac{d}{dz}-\frac{3}{2}n^2a_3z\\
&- a_3nz-b_2nz+na_2z\frac{d}{dz}-a_2z\frac{d}{dz}+b_1z\frac{d}{dz}-\frac{n^2}{2}a_2+\frac{n}{2}a_2-b_1\frac{n}{2}-\frac{n}{2}a_1\frac{d}{dz}\\
&+ b_0\frac{d}{dz}-\frac{n^2}{4}a_2+\frac{n^2}{2}a_2-\frac{n}{2}a_2+\frac{n}{2}b_1\\
&= \overbrace{[a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0]}^{X(z)}\frac{d^2}{dz^2} + \overbrace{[\underbrace{(-2na_4+2a_4)}_{b_3}z^3+b_2z^2+b_1z+b_0]}^{Y(z)}\frac{d}{dz}\\
&+ [\underbrace{(n^2a_4-na_4)}_{c_2}z^2+\underbrace{(na_3-n^2a_3-nb_2)}_{c_1}z]
\end{aligned}
$$

توجه داشته باشید که در (۳۱.۴)، $-c_0$ مقدارویژه H است که $S(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$ نقش چندجمله‌ای تابع ویژه را دارد و البته $-c_0$ به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است

$$
-c_0 = n[(n-1)a_2+2b_1]+2a_4\sum_{i<j}^{n}z_iz_j+[2(n-1)a_3+b_2]\sum_{i=1}^{n}z_i \qquad (۳۴.۴)
$$

و ریشه‌های z_i به وسیلهٔ معادلات آنساتز تعیین می‌شوند

$$
\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+\frac{b_3z_i^3+b_2z_i^2+b_1z_i+b_0}{a_4z_i^4+a_3z_i^3+a_2z_i^2+a_1z_i+a_0}=0 \qquad i=1,\dots,n \qquad (۳۵.۴)
$$

در اینصورت از آنجاییکه H را با عامل‌های دیفرانسیلی مرتبه‌ی دوم جبری سازی $sl(2)$ (۳۲.۴) نوشتیم پس مشخص است که H، $(n+1)$ بعدی است. با توجه به کاربرد H در (۳۰.۴)، نتیجه می‌گیریم که

معادلات آنساتز (۳۵.۴)، دستگاه $(n+1)$، جواب دارد بنابراین $n+1$ مقدار ویژه $-c_0$ وجود دارد در اینصورت $n+1$ چند جمله ای $Z(z)$ حاصل می‌شود. □

(۳۴.۴) و (۳۵.۴) اولین جواب دقیق برای معادله‌ی دیفرانسیل کلی (۳۰.۴) است[۴۰].

۲.۴ کاربردها

در این بخش نتایج کلی بدست آمده از بخش ۱ را به کار میبریم و برای بدست آوردن جواب های دقیق ۵ سیستم فیزیکی (۳.۴) تا (۷.۴)، مثال ها و کاربردهای معادلات دیفرانسیل را ارائه می‌کنیم.

۱.۲.۴ دافعه‌ی کولنی دو الکترون بر روی یک کره

یک سیستم دو الکترونی را در نظر بگیرید که با یک کولن پتانسیل فعل و انفعال دارد اما مجبور است که روی یک گوی با شعاع R بماند. تابع موج شرودینگر سیستم به صورت زیر است

$$\left(\frac{u^2}{4R^2}-1\right)\frac{d^2\psi}{du^2}+\left(\frac{\delta u}{4R^2}-\frac{1}{\gamma u}\right)\frac{d\psi}{du}+\frac{\psi}{u}=E\psi \tag{۳۶.۴}$$

که δ و γ پارامترهای مربوط به گوی D بعدی است. با تغییر متغیر $z=\frac{u}{2R}$ روابط زیر برقرار است

$$\frac{d\psi}{du}=\frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{dz}{du}=\frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{1}{2R}$$
$$\frac{d^2\psi}{du^2}=\left(\frac{d}{dz}\cdot\frac{1}{2R}\right)\cdot\left(\frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{1}{2R}\right)=\frac{d^2\psi}{dz^2}\cdot\frac{1}{4R^2}$$

با توجه به $u=2Rz$ و جایگذاری نتایج فوق در رابطه‌ی (۳۶.۴) داریم

$$\left(\frac{z^2-1}{4R^2}\right)\frac{d^2\psi}{dz^2}+\left(\frac{\delta 2Rz}{4R^2}-\frac{1}{2\gamma Rz}\right)\frac{d\psi}{2Rdz}+\frac{1}{2Rz}\psi=E\psi$$

تمامی عبارات را به یک طرف تساوی انتقال می‌دهیم

$$\left(\frac{z^2-1}{4R^2}\right)\frac{d^2\psi}{dz^2}+\left(\frac{\delta z}{4R^2}-\frac{1}{4\gamma R^2 z}\right)\frac{d\psi}{dz}+\left(\frac{1}{2Rz}-E\right)\psi=0$$

معادله‌ی فوق را بر عبارت $\left(\frac{z^2-1}{4R^2}\right)$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+\left(\frac{\delta z}{z^2-1}-\frac{1}{\gamma z(z^2-1)}\right)\frac{d\psi}{dz}+\left(\frac{2R}{z(z^2-1)}-\frac{4R^2E}{(z^2-1)}\right)\psi=0$$

یا می‌توانیم داشته باشیم

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+\left(\frac{\delta z^2-1/_{\gamma}}{z(z^2-1)}\right)\frac{d\psi}{dz}+\left(\frac{2R-4R^2Ez}{z(z^2-1)}\right)\psi=0 \tag{۳۷.۴}$$

در اینصورت با تفکیک کسر در رابطه‌ی فوق داریم

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{1/\gamma}{z}+\frac{1/2(\delta-1/\gamma)}{z+1}+\frac{1/2(\delta-1/\gamma)}{(z-1)}\right)\frac{d}{dz}+\frac{-4R^2Ez+2R}{z(z+1)(z-1)}\right\}\psi=0 \tag{۳۸.۴}$$

که معادله دیفرانسیل فوق، فرم معادله‌ی هیون (۳.۴) را دارد. در اینصورت برای حل این معادله و پیدا کردن ویژه تابع $\psi(z)$و ویژه مقدار E با روش بث آنساتز ، معادله‌ی (۳۸.۴) را بصورت زیر می‌نویسیم

$$\Big\{z(z+1)(z-1)\frac{d^2}{dz^2}+\big[(z+1)(z-1)\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})z(z-1)$$
$$+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})z(z+1)\big]\frac{d}{dz}-4R^2Ez+2R\Big\}\psi=0$$

یا به‌عبارتی

$$\Big\{(z^3-z)\frac{d^2}{dz^2}+\big[(z^2-1)\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z^2-z)+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z^2+z)\big]\frac{d}{dz}$$
$$-4R^2Ez+2R\Big\}\psi=0$$

در اینصورت فرض کنید $\psi=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$ جواب معادله فوق باشد

$$(z^3-z)\frac{\frac{d^2}{dz^2}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}+\big[(z^2-1)\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z^2-z)$$
$$+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z^2+z)\big]\frac{\frac{d}{dz}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}-4R^2Ez+2R=0$$

پس با توجه به روابط (۱۵.۴) و (۱۶.۴) داریم

$$(z^3-z)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}\right)+\big[(z^2-1)\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z^2-z)$$
$$+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z^2+z)\big]\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}\right)-4R^2Ez=-2R$$

در رابطه‌ی فوق، عبارت سمت راست مقدار ثابت و در سمت چپ، تابعی با قطب ساده‌ی z_i است پس می‌توان برای مقدار ثابت $(-2R)$ مانده در $z=z_i$ حساب کرد

$$Res(-2R)_{z=z_i}=(z_i^3-z_i)\left(\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}\right)+\big[(z_i^2-1)\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z_i^2-z_i)$$
$$+\frac{1}{2}(\delta-\frac{1}{\gamma})(z_i^2+z_i)\big]$$

در اینصورت می‌توانیم رابطه‌ی زیر را محاسبه کنیم

$$
\begin{aligned}
&-۲R-\sum_{i=۱}^{n}\frac{Res(-۲R)_{z=z_i}}{z-z_i}=\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{(z^{۳}-z_i^{۳})}{z-z_i}-\sum_{i=۱}^{n}\frac{z-z_i}{z-z_i}\right)\left(\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}\right)\\
&+\frac{۱}{\gamma}\sum_{i=۱}^{n}\frac{z^{۲}-z_i^{۲}}{z-z_i}+\frac{۱}{۲}(\delta-\frac{۱}{\gamma})\sum_{i=۱}^{n}\frac{z^{۲}-z_i^{۲}}{z-z_i}-\frac{۱}{۲}(\delta-\frac{۱}{\gamma})\sum_{i=۱}^{n}\frac{z-z_i}{z-z_i}\\
&+\frac{۱}{۲}(\delta-\frac{۱}{\gamma})\sum_{i=۱}^{n}\frac{z^{۲}-z_i^{۲}}{z-z_i}+\frac{۱}{۲}(\delta-\frac{۱}{\gamma})\sum_{i=۱}^{n}\frac{z-z_i}{z-z_i}-۴R^{۲}Ez\\
&=\sum_{i=۱}^{n}(z^{۲}+zz_i+z_i^{۲})\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}-\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}+\frac{۱}{\gamma}\sum_{i=۱}^{n}(z+z_i)\\
&+(\delta-\frac{۱}{\gamma})\sum_{i=۱}^{n}(z+z_i)-۴R^{۲}Ez\\
&=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲z^{۲}}{z_i-z_j}+\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲z_iz}{z_i-z_j}+\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲z_i^{۲}}{z_i-z_j}-\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}\\
&+\frac{۱}{\gamma}\sum_{i=۱}^{n}(z+z_i)-\frac{۱}{\gamma}\sum_{i=۱}^{n}(z+z_i)+\delta nz+\delta\sum_{i=۱}^{n}z_i-۴R^{۲}Ez
\end{aligned}
$$

با ساده‌سازی روابط فوق داریم

$$
\begin{aligned}
&-۲R=\sum_{i=۱}^{n}\frac{Res(-۲R)_{z=z_i}}{z-z_i}+\big(n(n-۱)+\delta n-۴R^{۲}E\big)z\\
&+۲(n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_i+\delta\sum_{i=۱}^{n}z_i
\end{aligned}
$$

سمت چپ عبارت ثابت است، با متناظر قرار دادن ضرایب در طرفین خواهیم داشت

$$۱.\; n(n-۱)+\delta n-۴R^{۲}E=۰\quad\Rightarrow\quad E=\frac{n}{۴R^{۲}}(n-۱+\delta) \tag{۳۹.۴}$$

$$۲.\; -۲R=۲(n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_i+\delta\sum_{i=۱}^{n}z_i\Rightarrow R=-\frac{۱}{۲}\big(۲(n-۱)+\delta\big)\sum_{i=۱}^{n}z_i \tag{۴۰.۴}$$

$$۳.\; \sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}+\frac{\left[(z_i^{۲}-۱)\frac{۱}{\gamma}+\frac{۱}{۲}(\delta-\frac{۱}{\gamma})(z_i^{۲}-z_i)+\frac{۱}{۲}(\delta-\frac{۱}{\gamma})(z_i^{۲}+z_i)\right]}{(z_i^{۳}-z_i)}=۰ \tag{۴۱.۴}$$

اما به‌عنوان مثال برای $n=۱$، از معادلات آنساتز (۴۱.۴) داریم

$$\overbrace{\sum_{j\neq i}^{n}\frac{۲}{z_i-z_j}}^{=۰}+\frac{۱/\gamma}{z_۱}+\frac{۱/۲(\delta-۱/\gamma)}{z_۱+۱}+\frac{۱/۲(\delta-۱/\gamma)}{z_۱-۱}=۰$$

در اینصورت

$$z_۱=\pm\sqrt{\frac{۱}{\delta\gamma}} \tag{۴۲.۴}$$

از (۴۰.۴) داریم

$$R=-\frac{1}{2}\delta z_1$$

که با جایگذاری مقدار z_1 از (۴۲.۴)

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \tag{۴۳.۴}$$

به اینصورت که با انتخاب ریشه منفی $z_1=-\frac{1}{\sqrt{\delta\gamma}}$، شعاع R مثبت و نامنفی می‌شود، همچنین از رابطه‌ی (۳۹.۴) و با استفاده از مقدار بدست آمده‌ی R از (۴۳.۴) داریم

$$E=\gamma$$

معادله موج نیز به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\psi=z-z_1=\frac{u}{2R}+\frac{1}{\sqrt{\delta\gamma}}=\frac{u}{\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}+\frac{1}{\sqrt{\delta\gamma}}=\frac{1}{\sqrt{\delta\gamma}}(1+u\gamma)$$

به این ترتیب تمام مجهولات معادله به ازای $n=1$ حاصل می‌شود. اما برای $n=2$ نیز می‌توان همین محاسبات را انجام داد، از دستگاه معادلات (۴۱.۴) داریم

$$\begin{aligned}
i=1;\qquad & \frac{2}{z_1-z_2}+\frac{1/\gamma}{z_1}+\frac{1/2(\delta-1/\gamma)}{z_1+1}+\frac{1/2(\delta-1/\gamma)}{z_1-1}=0\\
i=2;\qquad & \frac{2}{z_2-z_1}+\frac{1/\gamma}{z_2}+\frac{1/2(\delta-1/\gamma)}{z_2+1}+\frac{1/2(\delta-1/\gamma)}{z_2-1}=0
\end{aligned}$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق توسط نرم افزار ریاضی متمتیکا[۳]، مقدار z_1 و z_2 را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
z_1&=\frac{1}{2(\delta+2)}\left(-\sqrt{2(\delta+2)+\frac{4\delta+6}{\gamma}}\pm\sqrt{2(\delta+2)-\frac{2}{\gamma}}\right)\\
z_2&=\frac{1}{2(\delta+2)}\left(-\sqrt{2(\delta+2)+\frac{4\delta+6}{\gamma}}\mp\sqrt{2(\delta+2)-\frac{2}{\gamma}}\right)
\end{aligned} \tag{۴۴.۴}$$

در اینصورت با توجه به (۴۴.۴) داریم

$$z_1+z_2=\frac{2}{2(\delta+2)}\left(-\sqrt{2(\delta+2)+\frac{4\delta+6}{\gamma}}\right)=\frac{-1}{\delta+2}\sqrt{2(\delta+2)+\frac{4\delta+6}{\gamma}}$$

بنابراین از رابطه‌ی (۴۰.۴) و رابطه‌ی فوق، مقدار R به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$R=-\frac{1}{2}(2(2-1)+\delta)(z_1+z_2)=\frac{1}{2}\sqrt{2(\delta+2)+\frac{4\delta+6}{\gamma}}$$

[۳] Mathematica

همچنین با استفاده از رابطه‌ی (۳۹.۴) و مقدار بدست آمده‌ی R داریم

$$E = \frac{n}{۴R^۲}(n+\delta-۱) = \frac{۲(۱+\delta)}{\delta+۲+\frac{۲\delta+۳}{\gamma}} = \frac{۲\gamma(۱+\delta)}{\gamma(\delta+۲)+۲\delta+۳}$$

در اینصورت برای محاسبه‌ی تابع موج به شکل زیر

$$\psi = (z-z_۱)(z-z_۲) = z^۲ - z(z_۱+z_۲) + z_۱z_۲ \tag{۴۵.۴}$$

با توجه به تبدیل $z = \frac{u}{۲R}$، عبارات $z^۲$ و $z_۱z_۲$ را محاسبه می‌کنیم

$$z = \frac{u}{۲R} = \frac{u}{\sqrt{۲(\delta+۲)+\frac{۴\delta+۶}{\gamma}}}$$
$$z^۲ = \frac{u^۲}{۴R^۲} = \frac{u^۲}{۲(\delta+۲)+\frac{۴\delta+۶}{\gamma}}$$
$$z_۱z_۲ = \frac{۱}{۴(\delta+۲)^۲}\left(۲(\delta+۲)+\frac{۴\delta+۶}{\gamma}-۲(\delta+۲)+\frac{۲}{\gamma}\right) = \frac{۱}{\gamma(\delta+۲)}$$

پس در رابطه‌ی (۴۵.۴) داریم

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{u^۲}{۲(\delta+۲)+\frac{۴\delta+۶}{\gamma}} - \frac{u}{\sqrt{۲(\delta+۲)+\frac{۴\delta+۶}{\gamma}}} \times \frac{-۱}{\delta+۲}\sqrt{۲(\delta+۲)+\frac{۴\delta+۶}{\gamma}} \\ &+ \frac{۱}{\gamma(\delta+۲)} = \frac{\gamma u^۲}{۲\gamma(\delta+۲)+۴\delta+۶} + \frac{u\gamma}{\gamma(\delta+۲)} + \frac{۱}{\gamma(\delta+۲)} \\ &= \frac{۱}{\gamma(\delta+۲)}\Big[۱+u\gamma+\frac{\gamma^۲(\delta+۲)}{۲\gamma(\delta+۲)+۴\delta+۶}u^۲\Big]\end{aligned}$$

پس تابع موج نیز محاسبه شد.

۲.۲.۴ معادله شرودینگر حاصل از آنالیز پایداری پیچش میدان $\phi^۶$

معادله‌ی شرودینگر میدان $\phi^۶$ مشخص شده به‌وسیله لاگرانژ زیر

$$L = \frac{۱}{۲}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{\mu^۲}{۸g^۲(۱+\epsilon^۲)}(g^۲\phi^۲+\epsilon^۲)(۱-g^۲\phi^۲)^۲ \tag{۴۶.۴}$$

که ϵ یک ثابت حقیقی بی‌بعد و μ بعد حجم است، را به شکل زیر در نظر بگیرید[۴۰]

$$\Big\{-\frac{d^۲}{dx^۲}+V(x)\Big\}\psi(x) = E\psi(x) \tag{۴۷.۴}$$

بطوریکه $E \geq ۰$ و پتانسیل $V(x)$ به‌صورت زیر است

$$V(x) = \mu^۲\frac{۸\sinh^۴\frac{\mu x}{۲} - (\frac{۲۰}{\epsilon^۲}-۴)\sinh^۲\frac{\mu x}{۲} + ۲(\frac{۱}{\epsilon^۲}+۱)(\frac{۱}{\epsilon^۲}-۲)}{۸(۱+\frac{۱}{\epsilon^۲}+\sinh^۲\frac{\mu x}{۲})^۲} \tag{۴۸.۴}$$

نشان می‌دهیم که معادله شرودینگر می‌تواند به فرم (۴.۴) تبدیل شود. این کار قابل انجام است اگر فرض کنیم

$$\psi = (1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})^{\frac{-3}{2}} y \tag{4.49}$$

در اینصورت با در نظر گرفتن

$$U := (1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})$$

داریم

$$\psi = U^{-\frac{3}{2}} y$$

بنابراین با توجه به معادله‌ی (۴۷.۴)، به مشتق دوم تابع ψ نیاز داریم

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dx} =& \frac{d}{dx}(U^{-\frac{3}{2}} y) = -\frac{3}{2} U^{-\frac{5}{2}} U' y + U^{-\frac{3}{2}} y' \\
\frac{d^2\psi}{dx^2} =& \frac{d^2}{dx^2}(U^{-\frac{3}{2}} y) = \frac{d}{dx}\Big[-\frac{3}{2} U^{-\frac{5}{2}} U' y + U^{-\frac{3}{2}} y' \Big] \\
=& \frac{15}{4} U^{-\frac{7}{2}} U'^2 y - \frac{3}{2} U^{-\frac{5}{2}} U'' y - \frac{3}{2} U^{-\frac{5}{2}} U' y' - \frac{3}{2} U^{-\frac{5}{2}} U' y' + U^{-\frac{3}{2}} y''
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
U' =& \frac{d}{dx}(1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2}) = 2\frac{\mu}{2} \sinh \frac{\mu x}{2} \cosh \frac{\mu x}{2} = \mu \sinh \frac{\mu x}{2} \cosh \frac{\mu x}{2} \\
U'' =& \frac{d}{dx}(\mu \sinh \frac{\mu x}{2} \cosh \frac{\mu x}{2}) = \frac{\mu^2}{2} \cosh \frac{\mu x}{2} \cosh \frac{\mu x}{2} + \frac{\mu^2}{2} \sinh \frac{\mu x}{2} \sinh \frac{\mu x}{2} \\
=& \frac{\mu^2}{2}(\cosh^2 \frac{\mu x}{2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})
\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{dx^2} =& \frac{15}{4}(1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})^{-\frac{7}{2}} (\mu \sinh \frac{\mu x}{2} \cosh \frac{\mu x}{2})^2 y \\
& - \frac{3}{2}(1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{\mu^2}{2} (\cosh^2 \frac{\mu x}{2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2}) \right) y \\
& - \frac{3}{2}(1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})^{-\frac{5}{2}} (\mu \sinh \frac{\mu x}{2} \cosh \frac{\mu x}{2}) y' \\
& - \frac{3}{2}(1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})^{-\frac{5}{2}} \mu (\sinh \frac{\mu x}{2} \cosh \frac{\mu x}{2}) y' \\
& + (1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \sinh^2 \frac{\mu x}{2})^{-\frac{3}{2}} y''
\end{aligned} \tag{4.50}$$

همچنین با توجه به پتانسیل (۴.۴۸)

$$\begin{aligned}V\,.\,\psi =&\mu^2\frac{8\sinh^4\frac{\mu x}{2}-(\frac{20}{\epsilon^2}-4)\sinh^2\frac{\mu x}{2}+2(\frac{1}{\epsilon^2}+1)(\frac{1}{\epsilon^2}-2)}{8(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^2}\\ &\times(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{3}{2}}y=\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{7}{2}}\sinh^4\frac{\mu x}{2}y\\ &-\frac{1}{8}(\frac{20}{\epsilon^2}-4)(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{7}{2}}\sinh^2\frac{\mu x}{2}y\\ &+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{7}{2}}(\frac{1}{\epsilon^2}+1)(\frac{1}{\epsilon^2}-2)y\end{aligned}\tag{۴.۵۱}$$

در اینصورت با جایگذاری نتایج (۴.۵۰) و (۴.۵۱) در معادله دیفرانسیل (۴.۴۷) و فاکتورگیری از عبارت $(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{3}{2}}$ از طرفین، داریم

$$\begin{aligned}&(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{3}{2}}\Big[-\frac{15}{4}\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-2}\sinh^2\frac{\mu x}{2}\cosh^2\frac{\mu x}{2}y\\ &+\frac{3}{4}\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-1}(\cosh^2\frac{\mu x}{2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})y+\frac{3}{2}\mu(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-1}\\ &\times\sinh\frac{\mu x}{2}\cosh\frac{\mu x}{2}y'+\frac{3}{2}\mu(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-1}(\sinh\frac{\mu x}{2}\cosh\frac{\mu x}{2})y'-y''\\ &+\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-2}\sinh^4\frac{\mu x}{2}y-\frac{1}{8}(\frac{20}{\epsilon^2}-4)(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-2}\sinh^2\frac{\mu x}{2}y\\ &+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-2}(\frac{1}{\epsilon^2}+1)(\frac{1}{\epsilon^2}-2)y\Big]=(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{3}{2}}E\,.\,y\end{aligned}$$

بنابراین با حذف عبارت $(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-\frac{3}{2}}$ از طرفین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&-y''+\Big[\frac{3}{2}\mu(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-1}\sinh\frac{\mu x}{2}\cosh\frac{\mu x}{2}+\frac{3}{2}\mu(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-1}\\ &\times\sinh\frac{\mu x}{2}\cosh\frac{\mu x}{2}\Big]y'+\Big[-\frac{15}{4}\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-2}\sinh^2\frac{\mu x}{2}\cosh^2\frac{\mu x}{2}\\ &+\frac{3}{2}\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-1}(\cosh^2\frac{\mu x}{2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})+\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{-2}\\ &\times\sinh^4\frac{\mu x}{2}\Big]=E\,.\,y\end{aligned}$$

در نهایت داریم

$$-y''+3\mu\frac{\sinh\frac{\mu x}{2}\cosh\frac{\mu x}{2}}{1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2}}y'+\frac{\frac{3}{2}\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2})}{1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2}}y=(E+\frac{5}{4}\mu^2)y\tag{۴.۵۲}$$

برای حل معادله‌ی فوق، تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$z=\cosh\frac{\mu x}{2}\tag{۴.۵۳}$$

می‌دانیم رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\cosh^2 \frac{\mu x}{2} - \sinh^2 \frac{\mu x}{2} = 1$$

در اینصورت با توجه به (۵۳.۴)، رابطه‌ی زیر را داریم

$$\sinh^2 \frac{\mu x}{2} = z^2 - 1$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\left(\frac{\mu}{2}\sinh\frac{\mu x}{2}\right) = \frac{\mu}{2}\sqrt{z^2-1}\,\frac{dy}{dz}\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{\mu}{2}\sqrt{z^2-1}\,\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{\mu}{2}\sqrt{z^2-1}\,\frac{dy}{dz}\right)\\
&= \frac{\mu}{2}\sqrt{z^2-1}\left(\frac{\mu}{2}\,\frac{2z}{2\sqrt{z^2-1}}\,\frac{dy}{dz} + \frac{\mu}{2}\sqrt{z^2-1}\,\frac{d^2y}{dz^2}\right) = \frac{\mu^2}{4}z\frac{dy}{dz} + \frac{\mu^2}{4}(z^2-1)\frac{d^2y}{dz^2}
\end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری روابط فوق در معادله دیفرانسیل (۵۲.۴)

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu^2}{4}z\frac{dy}{dz} - \frac{\mu^2}{4}(z^2-1)\frac{d^2y}{dz^2} + 3\mu\,\frac{z\sqrt{z^2-1}}{1+\frac{1}{\epsilon^2}+z^2-1}\,\frac{\mu}{2}\sqrt{z^2-1}\,\frac{dy}{dz}\\
&+\frac{\frac{3}{2}\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2})}{1+\frac{1}{\epsilon^2}+z^2-1}\,y = (E+\frac{5}{4}\mu^2)\,y
\end{aligned}$$

با ساده‌سازی و ضرب طرفین در عبارت $(\frac{1}{\epsilon^2}+z^2)$

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{\mu^2}{4}(z^2-1)(\frac{1}{\epsilon^2}+z^2)\right]\frac{d^2y}{dz^2} + \left[-\frac{\mu^2}{4}z(\frac{1}{\epsilon^2}+z^2) + \frac{3}{2}\mu^2 z(z^2-1)\right]\frac{dy}{dz}\\
&+\left[\frac{3}{2}\mu^2(1+\frac{1}{\epsilon^2}) - (E+\frac{5}{4}\mu^2)(\frac{1}{\epsilon^2}+z^2)\right]y = 0
\end{aligned}$$

همچنین با ضرب طرفین در عبارت $(-\frac{4}{\mu^2})$ داریم

$$\begin{aligned}
&\left[(\frac{1}{\epsilon^2}-1)z^2 + z^4 - \frac{1}{\epsilon^2}\right]\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{1}{\epsilon^2}z + z^3 - 6z^3 + 6z\right]\frac{dy}{dz}\\
&+\left[-6(1+\frac{1}{\epsilon^2}) + (\frac{4}{\mu^2}E+5)(\frac{1}{\epsilon^2}+z^2)\right]y = 0
\end{aligned}$$

و در نهایت به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}
&\left[(\frac{1}{\epsilon^2}-1)z^2 + z^4 - \frac{1}{\epsilon^2}\right]\frac{d^2y}{dz^2} - \left[5z^3 - (6+\frac{1}{\epsilon^2})z\right]\frac{dy}{dz}\\
&+\left[(\frac{4E}{\mu^2}+5)z^2 + \frac{4E}{\mu^2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2} - 6\right]y = 0
\end{aligned} \tag{۵۴.۴}$$

معادله دیفرانسیل (۵۲.۴) به‌راحتی به معادلهٔ مشخص شده هیون (۴.۴) تبدیل شد. توجه کنید که $X(z) = z^4 + (\frac{1}{\epsilon^2}-1)z^2 - \frac{1}{\epsilon^2} = (z+1)(z-1)(z+\frac{i}{\epsilon})(z-\frac{i}{\epsilon})$ ریشه چندگانه ندارد.

بنابراین برای حل معادله‌ی (۵۴.۴)، با استفاده از نتایج کلی بخش قبل، فرض می‌کنیم چندجمله‌ای جواب از درجه $n=1,2,\ldots$ به‌صورت زیر دارد

$$y(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i) \tag{۵۵.۴}$$

که z_iها ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص شده هستند. در اینصورت با جایگذاری در معادله داریم

$$\begin{aligned}&\Big[z^4+(\frac{1}{\epsilon^2}-1)z^2-\frac{1}{\epsilon^2}\Big]\frac{\frac{d^2}{dz^2}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}-\Big[5z^3-(\frac{1}{\epsilon^2}+6)z\Big]\frac{\frac{d}{dz}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}\\&+(\frac{4E}{\mu^2}+5)z^2+\frac{4E}{\epsilon^2\mu^2}-\frac{1}{\epsilon^2}-6=0\end{aligned}$$

در اینصورت با توجه به روابط (۱۵.۴) و (۱۶.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\Big[z^4+(\frac{1}{\epsilon^2}-1)z^2-\frac{1}{\epsilon^2}\Big]\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}\Big)\\&-\Big[5z^3-(\frac{1}{\epsilon^2}+6)z\Big]\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}\Big)+(\frac{4E}{\mu^2}+5)z^2=-(\frac{4E}{\epsilon^2\mu^2}-\frac{1}{\epsilon^2}-6)\end{aligned} \tag{۵۶.۴}$$

توجه کنید که طرف راست رابطه‌ی فوق، عبارت ثابت است و طرف چپ تابعی تحلیلی که دارای قطب $z=z_i$ است پس می‌توان مانده را در این نقطه محاسبه کرد

$$\begin{aligned}Res\Big[-(\frac{4E}{\epsilon^2\mu^2}-\frac{1}{\epsilon^2}-6)\Big]_{z=z_i}&=\Big[z_i^4+(\frac{1}{\epsilon^2}-1)z_i^2-\frac{1}{\epsilon^2}\Big]\Big(\sum_{j\neq i}\frac{2}{z_i-z_j}\Big)\\&-\Big[5z_i^3-(\frac{1}{\epsilon^2}+6)z_i\Big]\end{aligned} \tag{۵۷.۴}$$

با استفاده از روابط (۵۶.۴) و (۵۷.۴) تفاضل زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}&-(\frac{4E}{\epsilon^2\mu^2}-\frac{1}{\epsilon^2}-6)-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\Big[-(\frac{4E}{\epsilon^2\mu^2}-\frac{1}{\epsilon^2}-6)\Big]_{z=z_i}}{z-z_i}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{z^4-z_i^4}{z-z_i}\\&+(\frac{1}{\varepsilon^2}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{z^2-z_i^2}{z-z_i}\Big)\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}-5\sum_{i=1}^{n}\frac{z^3-z_i^3}{z-z_i}+(\frac{1}{\varepsilon^2}+6)\sum_{i=1}^{n}\frac{z-z_i}{z-z_i}\\&+(\frac{4E}{\mu^2}+5)z^2=\Big(\sum_{i=1}^{n}(z^3+z^2z_i+zz_i^2+z_i^3)+(\frac{1}{\varepsilon^2}-1)\sum_{i=1}^{n}(z+z_i)\Big)\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}\\&-5\sum_{i=1}^{n}(z^2+zz_i+z_i^2)+(\frac{1}{\varepsilon^2}+6)n+(\frac{4E}{\mu^2}+5)z^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z^3}{z-z_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_iz^2}{z-z_i}\\&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_i^2z}{z-z_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_i^3}{z-z_i}+(\frac{1}{\varepsilon^2}-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z}{z-z_i}+(\frac{1}{\varepsilon^2}-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_i}{z-z_i}\\&-5nz^2-5\sum_{i=1}^{n}z_iz-5\sum_{i=1}^{n}z_i^2+(\frac{1}{\varepsilon^2}+6)n+(\frac{4E}{\mu^2}+5)z^2\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به روابط اثبات شده‌ی (۲۳.۴) بدست خواهد آمد

$$-\big(\frac{۴E}{\epsilon^۲\mu^۲}-\frac{۱}{\epsilon^۲}-۶\big)-\sum_{i=۱}^{n}\frac{Res\Big[-\big(\frac{۴E}{\epsilon^۲\mu^۲}-\frac{۱}{\epsilon^۲}-۶\big)\Big]_{z=z_i}}{z-z_i}=n(n-۱)z^۲$$
$$+۲(n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_iz+۲\big((n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_i^۲+\sum_{i=۱}^{n}z_iz_j\big)+(\frac{۱}{\varepsilon^۲}-۱)n(n-۱)-۵nz^۲$$
$$-۵\sum_{i=۱}^{n}z_iz-۵\sum_{i=۱}^{n}z_i^۲+(\frac{۱}{\varepsilon^۲}+۶)n+(\frac{۴E}{\mu^۲}+۵)z^۲$$

در نتیجه پس از تفکیک عبارات بر حسب ضرایب z خواهیم داشت

$$-\big(\frac{۴E}{\epsilon^۲\mu^۲}-\frac{۱}{\epsilon^۲}-۶\big)=\sum_{i=۱}^{n}\frac{Res\Big[-\big(\frac{۴E}{\epsilon^۲\mu^۲}-\frac{۱}{\epsilon^۲}-۶\big)\Big]_{z=z_i}}{z-z_i}+\big(n(n-۱)-۵n$$
$$+(\frac{۴E}{\mu^۲}+۵)\big)z^۲+\big(۲(n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_i-۵\sum_{i=۱}^{n}z_i\big)z+۲\big((n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_i^۲+\sum_{j<i}^{n}z_iz_j\big)$$
$$+(\frac{۱}{\varepsilon^۲}-۱)n(n-۱)-۵\sum_{i=۱}^{n}z_i^۲+(\frac{۱}{\varepsilon^۲}+۶)n$$

ضرایب طرفین را متناظر قرار می‌دهیم، ابتدا ضریب $z^۲$ را بررسی می‌کنیم

$$n(n-۱)-۵n+(\frac{۴E}{\mu^۲}+۵)=۰$$

در اینصورت مقدار E بدست می‌آید

$$E=\frac{\mu^۲}{۴}(n-۱)(۵-n) \tag{۵۸.۴}$$

حال ضریب z را در نظر می‌گیریم

$$۲(n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_i-۵\sum_{i=۱}^{n}z_i=۰$$

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n}z_i=۰ \tag{۵۹.۴}$$

اما ضرایب ثابت را از طرفین مساوی هم قرار داده و داریم

$$-\big(\frac{۴E}{\epsilon^۲\mu^۲}-\frac{۱}{\epsilon^۲}-۶\big)=۲\big((n-۱)\sum_{i=۱}^{n}z_i^۲+\sum_{j<i}^{n}z_iz_j\big)+(\frac{۱}{\varepsilon^۲}-۱)n(n-۱)$$
$$-۵\sum_{i=۱}^{n}z_i^۲+(\frac{۱}{\varepsilon^۲}+۶)n$$

از رابطه‌ی فوق خواهیم داشت

$$\frac{4(\frac{\mu^2}{4}(n-1)(5-n))}{\varepsilon^2\mu^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} - 6 + n(n-1)(\frac{1}{\varepsilon^2}+1) + n(\frac{1}{\varepsilon^2}+6)$$
$$= (5-2(n-1))\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\sum_{j<i}^{n} z_i z_j$$

در نتیجه

$$\frac{6(n-1)}{\varepsilon^2} = (1-n)(n+6) + (5-2(n-1))\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\sum_{j<i}^{n} z_i z_j \qquad (۶۰.۴)$$

در نهایت مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$Res\big[-(\frac{4E}{\epsilon^2\mu^2} - \frac{1}{\epsilon^2} - 6)\big]_{z=z_i} = 0$$

بعبارتی

$$\Big[z_i^4 + (\frac{1}{\epsilon^2}-1)z_i^2 - \frac{1}{\epsilon^2}\Big]\Big(\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}\Big) - \Big[5z_i^3 - (\frac{1}{\epsilon^2}+6)z_i\Big] = 0 \qquad (۶۱.۴)$$

برای مثال در مورد $n=1$، از (۵۸.۴) $E=0$ و از (۵۹.۴) $z_1=0$ حاصل می‌شود، بنابراین از (۵۵.۴) $y(z)=z-z_1$، پس

$$y(z) = z$$

هیچ محدودیتی روی ϵ وجود ندارد و تابع ویژه از قرار دادن $y=z=\cosh\frac{\mu x}{2}$ در رابطه (۴۹.۴) حاصل می‌شود

$$\psi(x) = \frac{\cosh\frac{\mu x}{2}}{(1+\frac{1}{\epsilon^2}+\sinh^2\frac{\mu x}{2})^{\frac{3}{2}}} \qquad (۶۲.۴)$$

همچنین برای $n=2$ از (۵۸.۴) داریم $E=\frac{3}{4}\mu^2$ و از (۵۹.۴)، $z_1=-z_2$ حاصل می‌شود، در اینصورت بنا به (۶۰.۴) خواهیم داشت

$$\frac{6}{\epsilon^2} = -4 + 3(z_1^2+z_2^2) - 2z_1z_2 \qquad (۶۳.۴)$$

و در رابطه‌ی (۶۱.۴) با قرار دادن $n=2$ برای بدست آوردن ریشه‌ها، دستگاه زیر را داریم

$$\begin{cases} [z_1^4 + (\frac{1}{\epsilon^2}-1)z_1^2 - \frac{1}{\epsilon^2}]\frac{2}{z_1-z_2} = 5z_1^3 - (\frac{1}{\epsilon^2}+6)z_1 \\ \\ [z_2^4 + (\frac{1}{\epsilon^2}-1)z_2^2 - \frac{1}{\epsilon^2}]\frac{2}{z_2-z_1} = 5z_2^3 - (\frac{1}{\epsilon^2}+6)z_2 \end{cases} \qquad (۶۴.۴)$$

به‌طوریکه جواب دستگاه فوق به‌صورت زیر است

$$z_۱ = -z_۲ = \sqrt{۲}$$

از (۵۵.۴)، $y(z) = (z-\sqrt{۲})(z+\sqrt{۲}) = z^۲ - ۲$ ، و با در نظر گرفتن محدودیت $۲ = \frac{۱}{\epsilon^۲}$ از رابطه‌ی (۶۳.۴)، در رابطه‌ی (۴۹.۴) خواهیم داشت

$$\psi(x) = \frac{\cosh^۲ \frac{\mu x}{۲} - ۲}{(۱ + \frac{۱}{\epsilon^۲} + \sinh^۲ \frac{\mu x}{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \tag{۶۵.۴}$$

و این اولین حالت تابع ویژه موجود است.

۳.۲.۴ اختلالات پایدار برای جواب غیراکسترمم رایسنر-نوردستروم

معادله دیفرانسیل سیاه چاله‌ی رایسنر-نوردستروم به وسیله لاگرانژ زیر[۴۱]

$$L = \sqrt{g}\left[\frac{R}{۱۶\pi G} - \frac{۱}{۲}(\partial_\mu \phi)^۲ - \frac{f(\phi)}{۴}F^۲_{\mu\nu} - V(\phi)\right] \tag{۶۶.۴}$$

$$V(\phi) = \frac{۱}{۲}m_s^۲\phi^۲ , \qquad f(\phi) = \frac{۱}{۱ + a^۲\phi^۲}$$

که در آن R پارامتر خمیدگی، G ثابت نیوتن و a پارامتری است که بعد طول دارد، به شکل زیر است

$$\phi'' + p(r)\phi' + q(r)\phi = ۰ \tag{۶۷.۴}$$

به‌طوریکه

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{۱}{r-۱} + \frac{۱}{r - r_-}, \\ q(r) &= -m_s^۲ + \frac{۲a^۲}{r^۲} + ۲a^۲(۱ + \frac{۱}{r_-})\frac{۱}{r} + \frac{a^۲g_m^۲ - m_s^۲(۱ + r_-^۲)}{۱ - r_-}\frac{۱}{r-۱} \\ &+ \frac{m_s^۲ g_m^۲ r_+ + \frac{۲a^۲}{r_-}}{۱ - r_-}\frac{۱}{r - r_-} \end{aligned} \tag{۶۸.۴}$$

بطوریکه r_- و r_+ کران‌های سیاه چاله هستند، در اینصورت یک جواب برای معادله دیفرانسیل (۶۷.۴) با $p(r)$ و $q(r)$ داده شده در (۶۸.۴) پیدا می‌کنیم. با استفاده از تبدیل زیر

$$\phi(r) = r^\mu e^{-m_s r} f(r), \qquad \mu = \frac{۱}{۲}(۱ \pm \sqrt{۱ - ۸a^۲}) \tag{۶۹.۴}$$

پس

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \mu r^{\mu-۱}e^{-m_s r}f(r) - m_s r^\mu e^{-m_s r}f(r) + r^\mu e^{-m_s r}f'(r) \\ \phi''(r) &= \mu(\mu-۱)r^{\mu-۱}e^{-m_s r}f(r) - ۲m_s\mu r^{\mu-۱}e^{-m_s r}f(r) + ۲\mu r^{\mu-۱}e^{-m_s r}f'(r) \\ &+ m_s^۲ r^{\mu-۱}e^{-m_s r}f(r) - ۲m_s r^\mu e^{-m_s r}f'(r) + r^\mu e^{-m_s r}f''(r) \end{aligned}$$

روابط فوق را در معادله‌ی (۶۷.۴) قرار می‌دهیم

$$r^{\mu}e^{-m_s r}\Big\{f''(r)+(\frac{2\mu}{r}-2m_s)f'(r)+(\frac{\mu(\mu-1)}{r^2}-\frac{2m_s}{r}+m_s^2)f(r) \\ +p(r)\big(\mu f(r)-m_s f(r)+f'(r)\big)+q(r)f(r)\Big\}=0$$

یا به‌عبارتی

$$f''(r)+\big(\frac{2\mu}{r}-2m_s+p(r)\big)f(r) \\ +\big(\frac{\mu(\mu-1)}{r^2}-\frac{2m_s}{r}+m_s^2+\frac{\mu}{r}p(r)-m_s p(r)+q(r)\big)f(r)=0$$

با استفاده از (۶۸.۴) به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$f''+(\frac{2\mu}{r}+\frac{1}{r-1}+\frac{1}{r-r_-}-2m_s)f'+\frac{c_2r^2+c_1r+c_0}{r(r-1)(r-r_-)}f=0 \tag{۷۰.۴}$$

بطوریکه

$$c_2=2a^2\left(1+\frac{1}{r_-}\right)-2m_s(\mu+1)+\frac{1}{1-r_-}\left(g_m^2(a^2+m_s^2r_-)-m_s^2(1+r_-^2)+\frac{2a^2}{r_-}\right)$$

$$c_1=\big[m_s(2\mu+1)+\mu\big](r_-+1)-\frac{2a^2(r_-+1)^2}{r_-} \\ -\frac{1}{1-r_-}\left(g_m^2(a^2+m_s^2)r_--m_s^2(1+r_-^2)r_-+\frac{2a^2}{r_-}\right)$$

$$c_0=2a^2+2\big[a^2-\mu(m_s+1)\big]r_- \tag{۷۱.۴}$$

در اینصورت معادله دیفرانسیل (۷۰.۴) با شرایط (۷۱.۴) را به روش آنساتز حل می‌کنیم، فرض کنید $f=\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)$ جواب معادله باشد پس

$$r(r-1)(r-r_-)\frac{\frac{d^2}{dr^2}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+\big(2\mu(r-1)(r-r_-)+r(r-r_-) \\ +r(r-1)-2m_s r(r-1)(r-r_-)\big)\frac{\frac{d}{dr}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+c_2r^2+c_1r+c_0=0$$

حال با استفاده از روابط (۱۵.۴) و (۱۶.۴) داریم

$$\big[r^3-(1+r_-)r^2+r_-r\big]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+\big[2\mu\big(r^2-(1+r_-)r+r_-\big) \\ +(r^2-r_-r)+(r^2-r)-2m_s\big(r^3-(1+r_-)r^2+r_-r\big)\big]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i} \\ +c_2r^2+c_1r=-c_0$$

توجه کنید که $-c_0$ عبارت ثابت و عبارت سمت چپ، تابع تحلیلی با قطب $r=r_i$، در اینصورت مانده $-c_0$ را در $r=r_i$ بصورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
Res(-c_0)_{r=r_i} &= \big[r_i^3-(1+r_-)r_i^2+r_-r_i\big]\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+\big[2\mu\big(r_i^2-(1+r_-)r_i+r_-\big)\\
&+(r_i^2-r_-r_i)+(r_i^2-r_i)-2m_s\big(r_i^3-(1+r_-)r_i^2+r_-r_i\big)\big]
\end{aligned}$$

همچنین می‌توان محاسبات زیر را انجام داد

$$\begin{aligned}
-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r-r_i} &= \Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{r^3-r_i^3}{r-r_i}-(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}\\
&+r_-\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}\Big]\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}-2\mu(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}-r_-\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}-2m_s\sum_{i=1}^{n}\frac{r^3-r_i^3}{r-r_i}\\
&+2m_s(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}-2m_sr_-\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}+c_2r^2+c_1r\\
&=\Big[\sum_{i=1}^{n}(r^2+rr_i+r_i^2)-(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)+\sum_{i=1}^{n}r_-\Big]\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}\\
&+2\mu\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)-2\mu(1+r_-)n+\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)-r_-n+\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)-n\\
&-2m_s\sum_{i=1}^{n}(r^2+rr_i+r_i^2)+2m_s(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)-2m_sr_-n+c_2r^2+c_1r\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r^2}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_ir}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_i^2}{r_i-r_j}-(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r}{r_i-r_j}\\
&-(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_i}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_-}{r_i-r_j}+2\mu nr+2\mu\sum_{i=1}^{n}r_i-2\mu(1+r_-)n\\
&+nr+\sum_{i=1}^{n}r_i-r_-n+nr+\sum_{i=1}^{n}r_i-n-2m_snr^2-2m_sr\sum_{i=1}^{n}r_i-2m_s\sum_{i=1}^{n}r_i^2\\
&+2m_s(1+r_-)nr+2m_s(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}r_i-2m_sr_-n+c_2r^2+c_1r
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از روابط اثبات شده‌ی (۲۳.۴) خواهیم داشت

$$-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r-r_i}=n(n-1)r+2(n-1)\sum_{i=1}^{n}r_i-(1+r_-)n(n-1)+2\mu\sum_{i=1}^{n}r_i$$
$$+2\mu nr-2\mu(1+r_-)n+nr+\sum_{i=1}^{n}r_i-r_-n+nr+\sum_{i=1}^{n}r_i-n-2m_snr^2-2m_sr\sum_{i=1}^{n}r_i$$
$$-2m_s\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2m_s(1+r_-)nr+2m_s(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}r_i-2m_sr_-n+c_2r^2+c_1r$$

پس از یک تفکیک ساده نسبت به توان‌های موجود r داریم

$$-c_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r-r_i}+\Big(c_2-2m_sn\Big)r^2+\Big(n(n-1)+2\mu n$$
$$+2n-2m_s\sum_{i=1}^{n}r_i+2m_s(1+r_-)n+c_1\Big)r+2(n-1)\sum_{i=1}^{n}r_i$$
$$-(1+r_-)n(n-1)+2\mu\sum_{i=1}^{n}r_i-2\mu(1+r_-)n+\sum_{i=1}^{n}r_i-r_-n+\sum_{i=1}^{n}r_i-n$$
$$-2m_s\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2m_s(1+r_-)\sum_{i=1}^{n}r_i-2m_sr_-n$$

حال ضرایب طرفین را متناظر قرار می‌دهیم، ابتدا ضریب r^2 را در نظر می‌گیریم

$$c_2-2m_sn=0$$

با قرار دادن عبارت c_2 از (۷۱.۴) داریم

$$2a^2\Big(1+\frac{1}{r_-}\Big)-2m_s(\mu+1)$$
$$+\frac{1}{1-r_-}\Big(g_m^2(a^2+m_s^2r_-)-m_s^2(1+r_-^2)+\frac{2a^2}{r_-}\Big)=2m_sn \quad (72.4)$$

حال ضریب r را از طرفین در نظر می‌گیریم

$$n(n-1)+2\mu n+2n-2m_s\sum_{i=1}^{n}r_i+2m_s(1+r_-)n+c_1=0$$

با قرار دادن عبارت c_1 نیز از (۷۱.۴) خواهیم داشت

$$\big[m_s(2\mu+1)+\mu\big](r_-+1)-\frac{2a^2(r_-+1)^2}{r_-}-\frac{1}{1-r_-}\Big(g_m^2(a^2+m_s^2)r_-$$
$$-m_s^2(1+r_-^2)r_-+\frac{2a^2}{r_-}\Big)=2m_s\sum_{i=1}^{n}r_i-n\big[n+1+2\mu+2m_s(1+r_-)\big] \quad (73.4)$$

همچنین ضرایب ثابت را از طرفین متناظر قرار می‌دهیم

$$-c_\circ = ۲(n-۱)\sum_{i=۱}^{n} r_i - (۱+r_-)n(n-۱) + ۲\mu\sum_{i=۱}^{n} r_i - ۲\mu(۱+r_-)n + \sum_{i=۱}^{n} r_i - r_- n$$
$$+\sum_{i=۱}^{n} r_i - n - ۲m_s\sum_{i=۱}^{n} r_i^۲ + ۲m_s(۱+r_-)\sum_{i=۱}^{n} r_i - ۲m_s r_- n$$

پس از مرتب سازی داریم

$$۲a^۲ + ۲\big[a^۲ - \mu(m_s+۱)\big]r_- = ۲m_s\sum_{i=۱}^{n} r_i^۲ - ۲\big[n+\mu+m_s(r_-+۱)\big]\sum_{i=۱}^{n} r_i$$
$$+n\big[(n-۲\mu)(r_-+۱) - ۲m_s r_-\big] \tag{۷۴.۴}$$

توجه کنید که $f(r)=۱$ یک جواب معادله دیفرانسیل (۷۰.۴) است، به‌طوریکه مقادیر a، m_s و g_m از روابط زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned}
۱.\quad & ۲a^۲\left(۱+\frac{۱}{r_-}\right) - ۲m_s(\mu+۱)\\
& +\frac{۱}{۱-r_-}\left(g_m^۲(a^۲+m_s^۲ r_-) - m_s^۲(۱+r_-^۲) + \frac{۲a^۲}{r_-}\right) = \circ\\
۲.\quad & \big[m_s(۲\mu+۱)+\mu\big](r_-+۱) - \frac{۲a^۲(r_-+۱)^۲}{r_-} - \frac{۱}{۱-r_-}\left(g_m^۲(a^۲+m_s^۲)r_-\right.\\
& \left. - m_s^۲(۱+r_-^۲)r_- + \frac{۲a^۲}{r_-}\right) = \circ\\
۳.\quad & ۲a^۲ + ۲\big[a^۲-\mu(m_s+۱)\big]r_- = \circ
\end{aligned} \tag{۷۵.۴}$$

به‌طوریکه موارد فوق از روابط (۷۲.۴) تا (۷۴.۴) با قرار دادن $n=\circ$ حاصل می‌شوند.

۴.۲.۴ الکترون مسطح دیراک در میدان‌های کولنی و مغناطیسی

معادله دیفرانسیل سیستم نسبیتی یک الکترون دیراک (با جرم m_e) در حضور میدان الکترومغناطیسی خارجی A_μ در نظر بگیرید

$$F'' + \left(\frac{۱}{r} - \frac{۱}{r+r_\circ}\right)F' + \Big\{E^۲ - m_e^۲ - eB(l+۱) + \frac{۲EZ\alpha + (l+\frac{۱}{۲})/r_\circ}{r}$$
$$- \frac{\frac{eB}{۲}r_\circ + (l+\frac{۱}{۲})/r_\circ}{r+r_\circ} - \frac{(l+\frac{۱}{۲})^۲ - (Z\alpha)^۲}{r^۲} - \frac{(eB)^۲}{۴}r^۲\Big\}F = \circ \tag{۷۶.۴}$$

که $r_\circ = \frac{Z\alpha}{E+m_e}$، l یک عدد صحیح، B میدان مغناطیسی است و $\alpha = e^۲ = ۱/۱۳۷$، تغییر متغیر زیر را بر معادله‌ی فوق تاثیر می‌دهیم

$$F(r) = r^{\xi} e^{-eB\frac{r^۲}{۴}} f(r), \qquad \xi = \sqrt{(l+\frac{۱}{۲})^۲ - (Z\alpha)^۲} \tag{۷۷.۴}$$

به‌طوریکه با توجه به معادله‌ی (۷۶.۴) ملزم به محاسبه‌ی مشتق اول و مشتق دوم تابع $F(r)$ هستیم، پس

$$
\begin{aligned}
F'(r) &= \xi r^{\xi-1}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)+(-eB\frac{r}{2})r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)+r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f'(r)\\
F''(r) &= \xi(\xi-1)r^{\xi-2}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)+\xi(-eB\frac{r}{2})r^{\xi-1}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)+\xi r^{\xi-1}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f'(r)\\
&\quad-\frac{eB}{2}r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)-\xi eB\frac{r}{2}r^{\xi-1}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)+(eB\frac{r}{2})^2r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)\\
&\quad-eB\frac{r}{2}r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f'(r)+\xi r^{\xi-1}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f'(r)-eB\frac{r}{2}r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f'(r)\\
&\quad+r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f''(r)
\end{aligned}
$$

در اینصورت با استفاده از روابط فوق در معادله‌ی (۷۶.۴) خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&\Big[\xi(\xi-1)r^{-2}f(r)+\xi(-eB\frac{r}{2})r^{-1}f(r)+\xi r^{-1}f'(r)-\frac{eB}{2}f(r)\\
&-\xi eB\frac{r}{2}r^{-1}f(r)+(eB\frac{r}{2})^2f(r)-eB\frac{r}{2}f'(r)+\xi r^{-1}f'(r)-eB\frac{r}{2}f'(r)\\
&+f''(r)\Big]r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}+\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+r_0}\Big)\Big[\xi r^{-1}f(r)+(-eB\frac{r}{2})f(r)+f'(r)\Big]r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}\\
&+\Big\{E^2-m_e^2-eB(l+1)+\frac{2EZ\alpha+(l+\frac{1}{2})/r_0}{r}-\frac{\frac{eB}{2}r_0+(l+\frac{1}{2})/r_0}{r+r_0}\\
&-\frac{(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2}{r^2}-\frac{(eB)^2}{4}r^2\Big\}r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}f(r)=0
\end{aligned}
$$

حال عبارت $r^{\xi}e^{-eB\frac{r^2}{4}}$ را از طرفین حذف کرده و پس از مرتب‌سازی داریم

$$
\begin{aligned}
&f''(r)+\Big[\xi r^{-1}-eB\frac{r}{2}+\xi r^{-1}-eB\frac{r}{2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r+r_0}\Big]f'(r)\\
&+\Big[\xi(\xi-1)r^{-2}+\xi(-eB\frac{r}{2})r^{-1}-\frac{eB}{2}-\xi eB\frac{r}{2}r^{-1}+(eB\frac{r}{2})^2\\
&+\xi r^{-1}\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+r_0}\Big)+(-eB\frac{r}{2})\Big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+r_0}\Big)\\
&+E^2-m_e^2-eB(l+1)+\frac{2EZ\alpha+(l+\frac{1}{2})/r_0}{r}\\
&-\frac{\frac{eB}{2}r_0+(l+\frac{1}{2})/r_0}{r+r_0}-\frac{(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2}{r^2}-\frac{(eB)^2}{4}r^2\Big]f(r)=0
\end{aligned}
\tag{۷۸.۴}
$$

اما عبارت ضریب $f(r)$ را هم مخرج می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\xi(\xi-1)r^{-2}-\xi eB-eB+\xi r^{-2}-\xi\frac{1}{r(r+r_0)}+\frac{eB}{2}\frac{r}{r+r_0}+E^2-m_e^2\\
&-eB(l+1)+\frac{2EZ\alpha+(l+\frac{1}{2})/r_0}{r}-\frac{\frac{eB}{2}r_0+(l+\frac{1}{2})/r_0}{r+r_0}-\frac{(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2}{r^2}\\
&=\frac{\xi(\xi-1)r^{-1}(r+r_0)-\xi eBr(r+r_0)-eBr(r+r_0)+\xi r^{-1}(r+r_0)-\xi}{r(r+r_0)}\\
&+\frac{\frac{eB}{2}r^2+\big[E^2-m_e^2-eB(l+1)\big]r(r+r_0)+\big[2EZ\alpha+(l+\frac{1}{2})/r_0\big](r+r_0)}{r(r+r_0)}\\
&-\frac{\big[\frac{eB}{2}r_0+(l+\frac{1}{2})/r_0\big]r+\big[(l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2\big]r^{-1}(r+r_0)}{r(r+r_0)}\\
&=\frac{\Big[-\xi eB-eB+\frac{eB}{2}+E^2-m_e^2-eB(l+1)\Big]r^2+\Big[-\xi eBr_0-eBr_0}{r(r+r_0)}\\
&+\frac{\big(E^2-m_e^2-eB(l+1)\big)r_0+2EZ\alpha+(l+\frac{1}{2})/r_0-\frac{eB}{2}r_0-(l+\frac{1}{2})/r_0\Big]r}{r(r+r_0)}\\
&+\frac{\Big[\xi(\xi-1)+\xi-\xi+\big(2EZ\alpha+(l+\frac{1}{2})/r_0\big)r_0-\big((l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2\big)\Big]}{r(r+r_0)}\\
&+\frac{\overbrace{\Big[\xi(\xi-1)+\xi-\big((l+\frac{1}{2})^2-(Z\alpha)^2\big)\Big]}^{0}r_0r^{-1}}{r(r+r_0)}
\end{aligned}$$

در اینصورت پس از ساده سازی معادله‌ی (۷۸.۴) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$f''(r)+\Big(\frac{2\xi+1}{r}-\frac{1}{r+r_0}-eBr\Big)f'(r)+\frac{c_2r^2+c_1r+c_0}{r(r+r_0)}f(r)=0 \tag{۷۹.۴}$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}
c_2&=E^2-m_e-eB(\xi+l+\frac{3}{2})\\
c_1&=2EZ\alpha+\Big[E^2-m_e^2-eB\Big(\xi+l+\frac{5}{2}\Big)\Big]r_0\\
c_0&=2EZ\alpha r_0+l+\frac{1}{2}-\xi
\end{aligned} \tag{۸۰.۴}$$

که این معادله همان فرم (۶.۴) است. روش بث آنساتز را بر معادله فوق پیاده می‌کنیم، فرض می‌کنیم $f(r)=\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)$ جواب معادله باشد، پس

$$\begin{aligned}
&r(r+r_0)\frac{\frac{d^2}{dr^2}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+\Big[(2\xi+1)(r+r_0)-r\\
&-eBr^2(r+r_0)\Big]\frac{\frac{d}{dr}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+\Big[c_2r^2+c_1r+c_0\Big]f(r)=0
\end{aligned}$$

در اینصورت با استفاده از نتایج (۱۵.۴) و (۱۶.۴) داریم

$$\begin{aligned}(r^2+r_0r)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}&+\big((2\xi+1)(r+r_0)-r\\ &-eB(r^3+r_0r^2)\big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}+c_2r^2+c_1r=-c_0\end{aligned}$$

توجه کنید که طرف راست جمله ثابت است و طرف چپ تابع تحلیلی دارای قطب $r=r_i$، که می‌توان مانده را برای آن محاسبه کرد بنابراین

$$Res(-c_0)_{r=r_i}=(r_i^2+r_0r_i)\sum\frac{2}{r_i-r_j}+(2\xi+1)(r_i+r_0)-r_i-eB(r_i^3+r_0r_i^2)$$

همچنین می‌توانیم رابطه‌ی زیر را بنویسیم

$$\begin{aligned}&-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r-r_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}+r_0\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}\right)\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}\\
&+(2\xi+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}-eB\sum_{i=1}^{n}\frac{r^3-r_i^3}{r-r_i}-eBr_0\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}\\
&+c_2r^2+c_1r=\left(\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)+\sum_{i=1}^{n}r_0\right)\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+(2\xi+1)n-n\\
&-eB\Big(\sum_{i=1}^{n}(r^2+r_ir+r_i^2)\Big)-eBr_0\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)+c_2r^2+c_1r\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r}{r_i-r_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_i}{r_i-r_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_0}{r_i-r_i}+(2\xi+1)n\\
&-n-eBnr^2-eBr\sum_{i=1}^{n}r_i-eB\sum_{i=1}^{n}r_i^2-eBr_0nr-eBr_0\sum_{i=1}^{n}r_i+c_2r^2+c_1r\end{aligned}$$

با توجه به روابط اثبات شده در (۲۳.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r-r_i}&=n(n-1)+(2\xi+1)n-n-eBnr^2-eBr\sum_{i=1}^{n}r_i\\
&-eB\sum_{i=1}^{n}r_i^2-eBr_0nr-eBr_0\sum_{i=1}^{n}r_i+c_2r^2+c_1r\end{aligned}$$

در نهایت با یک تفکیک‌سازی نسبت به توان‌های r نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}-c_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r-r_i}&+(c_2-eBn)r^2+(c_1-eB\sum_{i=1}^{n}r_i-eBnr_0)r\\
&+n(n-1)+(2\xi+1)n-n-eB\sum_{i=1}^{n}r_i^2-eBr_0\sum_{i=1}^{n}r_i\end{aligned}$$

حال ضرایب طرفین تساوی را متناظر قرار می‌دهیم، ابتدا ضریب $r^{۲}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$c_{۲} - eBn = ۰$$

با جایگزینی عبارت $c_{۲}$ از (۸۰.۴) داریم

$$E^{۲} = m_e + eB(\xi + l + \frac{۳}{۲} - n) \tag{۸۱.۴}$$

ضریب r را بررسی می‌کنیم

$$c_{۱} - eB\sum_{i=۱}^{n} r_i - eBnr_{۰} = ۰$$

با جایگذاری عبارت $c_{۱}$ نیز از (۸۰.۴) خواهیم داشت

$$۲EZ\alpha = eB\big(nr_{۰} + \sum_{i=۱}^{n} r_i\big) - \Big[E^{۲} - m_e^{۲} - eB\Big(\xi + l + \frac{۵}{۲}\Big)\Big]r_{۰} \tag{۸۲.۴}$$

همچنین ضرایب ثابت متناظر را از طرفین مساوی قرار می‌دهیم

$$-c_{۰} = n(n-۱) + (۲\xi + ۱)n - n - eB\sum_{i=۱}^{n} r_i^{۲} - eBr_{۰}\sum_{i=۱}^{n} r_i$$

بنابراین با جاگذاری عبارت $c_{۰}$ از (۸۰.۴) داریم

$$۲EZ\alpha r_{۰} = -n(n + ۲\xi - ۱) + \xi - (l + \frac{۱}{۲}) + eB(\sum_{i=۱}^{n} r_i^{۲} - \sum_{i=۱}^{n} r_i) \tag{۸۳.۴}$$

اما در نهایت، مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$Res(-c_{۰})_{r=r_i} = ۰$$

به‌طوریکه جملات Bethe Ansatz را به ما می‌دهد

$$\sum \frac{۲}{r_i - r_j} + \frac{(۲\xi + ۱)(r_i + r_{۰}) - r_i - eB(r_i^{۳} + r_{۰}r_i^{۲})}{(r_i^{۲} + r_{۰}r_i)} = ۰ \tag{۸۴.۴}$$

۵.۲.۴ معادله شرودینگر ثابت کننده مستقیم نوسان‌ساز ناموزون

نوسان‌ساز ناموزون را در بعد N در نظر بگیرید، معادله‌ی شرودینگر آن بصورت زیر است

$$\Big(-\frac{۱}{۲}\nabla^{۲} + V(x)\Big)\psi(x) = E\psi(x) \tag{۸۵.۴}$$

با پتانسیل $V(x)$ تعریف شده بوسیله‌ی

$$V(x)=\lambda_1 x^2+\lambda_2 (x^2)^2+\lambda_3 (x^2)^3+\lambda_4 (x^2)^4+(x^2)^5,\qquad x^2=\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{۸۶.۴}$$

بدون کم شدن کلیتی از بحث، پتانسیل را با قرار دادن ضریب $(x^2)^5$ برابر یک، نرمال‌سازی کردیم. در مختصات کروی N بعدی تابع موج شعاعی $R(r)$ به‌صورت زیر مشخص شده است[۴۰]

$$\frac{1}{2}\Big[-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{N-1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{l(l+N-2)}{r^2}+2\big(V(r)-E\big)\Big]R(r)=0 \tag{۸۷.۴}$$

با به‌کارگیری انتقال $R(r)=r^{\frac{1-N}{2}}\psi(r)$ در معادله‌ی فوق، به مشتق اول و مشتق دوم آن نیاز داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(R(r))&=\frac{d}{dr}\left(r^{\frac{1-N}{2}}\psi(r)\right)=\frac{1-N}{2}r^{\frac{1-N}{2}-1}\psi(r)+r^{\frac{1-N}{2}}\psi'(r)\\ \frac{d^2}{dr^2}(R(r))&=\frac{1-N}{2}(\frac{1-N}{2}-1)r^{\frac{1-N}{2}-2}\psi(r)\\ &\quad+\frac{1-N}{2}r^{\frac{1-N}{2}-1}\psi'(r)+\frac{1-N}{2}r^{\frac{1-N}{2}-1}\psi'(r)+r^{\frac{1-N}{2}}\psi(r)''\end{aligned}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله دیفرانسیل (۸۷.۴) داریم

$$\begin{aligned}&\Big[-\frac{(1-N)^2}{4}r^{\frac{1-N}{2}-2}\psi(r)+\frac{1-N}{2}r^{\frac{1-N}{2}-2}\psi(r)-(1-N)r^{\frac{1-N}{2}-1}\psi'(r)-r^{\frac{1-N}{2}}\psi''(r)\Big]\\ &-\frac{N-1}{r}\left(\frac{1-N}{2}r^{\frac{1-N}{2}-1}\psi(r)+r^{\frac{1-N}{2}}\psi'(r)\right)+\frac{l(l+N-2)}{r^2}r^{\frac{1-N}{2}}\psi(r)\\ &+2(V-E)r^{\frac{1-N}{2}}\psi(r)=0\end{aligned}$$

پس از مرتب‌سازی

$$\begin{aligned}&-r^{\frac{1-N}{2}}\psi''(r)+\Big[-(1-N)r^{\frac{1-N}{2}-1}-(N-1)r^{\frac{1-N}{2}-1}\Big]\psi'(r)\\ &+\Big[-\frac{(1-N)^2}{4}r^{\frac{1-N}{2}-2}+\frac{(1-N)}{2}r^{\frac{1-N}{2}-2}+\frac{(N-1)^2}{2}r^{\frac{1-N}{2}-2}\\ &+l(l+N-2)r^{\frac{1-N}{2}-2}+2(V-E)r^{\frac{1-N}{2}}\Big]\psi(r)=0\end{aligned}$$

با فاکتورگیری عبارت $r^{\frac{1-N}{2}}$ از طرفین و ساده‌سازی

$$\begin{aligned}&-\psi''(r)+\Big[-\frac{(1-N)^2}{4}r^{-2}+\frac{(N-1)^2}{2}r^{-2}+\frac{(1-N)}{2}r^{-2}\\ &+\big(l^2+l(N-2)\big)r^{-2}\Big]\psi(r)+2(V(r)-E)\psi(r)=0\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\mu = l + \frac{1}{2}(N-1)$، پس $l = \mu - \frac{1}{2}(N-1)$ بنابراین با جایگذاری در معادله دیفرانسیل فوق داریم

$$-\psi''(r) + \Big[-\frac{(1-N)^2}{4} r^{-2} + \frac{(N-1)^2}{2} r^{-2} + \frac{(1-N)}{2} r^{-2} + \Big(\big(\mu - \frac{1}{2}(N-1)\big)^2 + \big(\mu - \frac{1}{2}(N-1)\big)(N-2) \Big) r^{-2} \Big] \psi(r) + 2(V(r)-E)\psi(r) = 0$$

در اینصورت

$$-\psi''(r) + \Big[-\frac{(1-N)^2}{4} + \frac{(N-1)^2}{2} + \frac{(1-N)}{2} + \mu^2 - \mu(N-1) + \frac{(N-1)^2}{4} + \mu(N-2) - \frac{(N-1)(N-2)}{2} \Big] r^{-2}\psi(r) + 2(V(r)-E)\psi(r) = 0$$

پس از ساده‌سازی عبارات در معادله دیفرانسیل فوق خواهیم داشت

$$-\psi''(r) + \Big[\frac{\mu(\mu-1)}{r^2} + 2(V(r)-E) \Big] \psi(r) = 0 \qquad (88.4)$$

با به‌کارگیری انتقال زیر

$$\psi(r) = r^{\mu} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi \quad , \quad z = r^2 \qquad (89.4)$$

که $\alpha, \beta, \gamma > 0$ پارامترهای تعیین شده هستند، برای جایگذاری در معادله دیفرانسیل (۸۸.۴) به مشتق دوم تابع ψ نیاز داریم

$$\frac{d}{dr}\psi(r) = \mu r^{\mu-1} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi + r^{\mu}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5) e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi + r^{\mu} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi'$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dr^2}\psi(r) = {} & \mu(\mu-1) r^{\mu-2} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi + \mu r^{\mu-1}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5) e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi \\
& + \mu r^{\mu-1} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi' + \mu r^{\mu-1}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5) e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi \\
& + r^{\mu}(-\alpha - 3\beta r^2 - 5\gamma r^4) e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi + r^{\mu}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5)^2 \\
& \times e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi + r^{\mu}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5) e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi' \\
& + \mu r^{\mu-1} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi' + r^{\mu}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5) e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi' \\
& + r^{\mu} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}} \phi''
\end{aligned}$$

نتایج فوق را در معادله دیفرانسیل (۸۸.۴) قرار می‌دهیم و از عبارت $r^{\mu} e^{-\alpha\frac{r^2}{2} - \beta\frac{r^4}{4} - \gamma\frac{r^6}{6}}$ فاکتور می‌گیریم

$$\begin{aligned}
& -\big[\mu(\mu-1) r^{-2}\phi + \mu r^{-1}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5)\phi + \mu r^{-1}\phi' + \mu r^{-1}(-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5)\phi \\
& + (-\alpha - 3\beta r^2 - 5\gamma r^4)\phi + (-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5)^2\phi + (-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5)\phi' + \mu r^{-1}\phi' \\
& + (-\alpha r - \beta r^3 - \gamma r^5)\phi' + \phi''\big] + \big[\frac{\mu(\mu-1)}{r^2} + 2(V-E)\big]\phi = 0
\end{aligned}$$

معادله دیفرانسیل فوق را در یک منفی ضرب می‌کنیم و پس از تفکیک‌سازی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\phi'' + \left[\mu r^{-1} + 2(-\alpha r - \beta r^{3} - \gamma r^{5}) + \mu r^{-1}\right]\phi' + \left[\mu(\mu-1)r^{-2}\right.\\
&+ \mu r^{-1}(-\alpha r - \beta r^{3} - \gamma r^{5}) + \mu r^{-1}(-\alpha r - \beta r^{3} - \gamma r^{5}) + (-\alpha - 3\beta r^{2} - 5\gamma r^{4})\\
&\left.+ (-\alpha r - \beta r^{3} - \gamma r^{5})^{2} - 2(V-E)\right]\phi = 0
\end{aligned} \tag{90.4}$$

حال با تغییر متغیر $z = r^{2}$ و با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dz}\cdot\frac{dz}{dr} = \frac{d\phi}{dz}.2r = \frac{d\phi}{dz}.2\sqrt{z}\\
&\frac{d^{2}\phi}{dr^{2}} = \left(2\sqrt{z}\,\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{d\phi}{dz}\,2\sqrt{z}\right) = 2\sqrt{z}\left(\frac{d^{2}\phi}{dz^{2}}\,2\sqrt{z} + \frac{d\phi}{dz}\frac{2}{2\sqrt{z}}\right) = 4z\frac{d^{2}\phi}{dz^{2}} + 2\frac{d\phi}{dz}
\end{aligned}$$

با جایگذاری نتایج فوق در معادله دیفرانسیل (۹۰.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\left(4z\,\frac{d^{2}\phi}{dz^{2}} + 2\frac{d\phi}{dz}\right) + \left[\frac{2\mu}{\sqrt{z}} + 2\sqrt{z}(-\alpha - \beta z - \gamma z^{2})\right]\left(2\sqrt{z}\,\frac{d\phi}{dz}\right) + \Big[2\mu(-\alpha - \beta z\\
&- \gamma z^{2}) + (-\alpha - 3\beta z - 5\gamma z^{2}) + z(-\alpha - \beta z - \gamma z^{2})^{2} - 2(V(z) - E)\Big]\phi = 0
\end{aligned}$$

با قرار دادن پتانسیل (۸۶.۴) در معادله دیفرانسیل فوق داریم

$$\begin{aligned}
&\phi'' + \left[\frac{l + \frac{N}{2}}{z} - \gamma z^{2} - \beta z - \alpha\right]\phi' + \frac{1}{4z}\Big[2\mu(-\alpha - \beta z - \gamma z^{2}) + (-\alpha - 3\beta z - 5\gamma z^{2})\\
&+ \gamma^{2}z^{5} + 2\beta\gamma z^{4} + (\beta^{2} + 2\alpha\gamma)z^{3} + 2\alpha\beta z^{2} + \alpha^{2}z - 2\lambda_{1}z - 2\lambda_{2}z^{2} - 2\lambda_{3}z^{3}\\
&- 2\lambda_{4}z^{4} - 2z^{5} + 2E\Big]\phi = 0
\end{aligned}$$

یا بعبارتی

$$\begin{aligned}
&\phi'' + \left[\frac{l + \frac{N}{2}}{z} - \gamma z^{2} - \beta z - \alpha\right]\phi' + \frac{1}{4z}\Big[(\gamma^{2} - 2)z^{5} + (2\beta\gamma - 2\lambda_{4})z^{4}\\
&+ (\beta^{2} + 2\alpha\gamma - 2\lambda_{3})z^{3} + (-2\gamma\mu - 5\gamma + 2\alpha\beta - 2\lambda_{2})z^{2} + (-2\beta\mu - 3\beta + \alpha^{2} - 2\lambda_{1})z\\
&+ (-2\alpha\mu - \alpha + 2E)\Big]\phi = 0
\end{aligned}$$

با صفر کردن ضرایب z^{5}، z^{4} و z^{3} پارامترهای زیر حاصل می‌شوند

$$\gamma = \sqrt{2} \qquad \beta = \frac{\lambda_{4}}{\sqrt{2}} \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_{3} - \frac{\lambda_{4}^{2}}{4}\right) \tag{91.4}$$

$$\begin{aligned}
&\phi'' + \left[\frac{l + \frac{N}{2}}{z} - \gamma z^{2} - \beta z - \alpha\right]\phi' + \frac{1}{4z}\Big[(2\alpha\beta - \gamma(N + 2l + 4) - 2\lambda_{2})z^{2}\\
&+ (\alpha^{2} - \beta(N + 2l + 2) - 2\lambda_{1})z + 2E - \alpha(N + 2l)\Big]\phi = 0
\end{aligned} \tag{92.4}$$

معادله دیفرانسیل (۴.۹۲)، فرم (۴.۷) است. برای حل آن به روش Bethe Ansatz، فرض کنید $\phi(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$ جواب معادله دیفرانسیل (۴.۹۲) باشد در اینصورت

$$4z\frac{\frac{d^2}{dz^2}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}+\Big[-4\gamma z^3-4\beta z^2-4\alpha z+4(l+\frac{N}{2})\Big]\frac{\frac{d}{dz}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}+\Big[(2\alpha\beta-\gamma(N+2l+4)-2\lambda_2)z^2+(\alpha^2-\beta(N+2l+2)-2\lambda_1)z+2E-\alpha(N+2l)\Big]=0$$

با استفاده از روابط اثبات شده‌ی (۴.۱۵) و (۴.۱۶) داریم

$$\begin{aligned}&4z\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+\Big[-4\gamma z^3-4\beta z^2-4\alpha z+4(l+\frac{N}{2})\Big]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}\\&+(2\alpha\beta-\gamma(N+2l+4)-2\lambda_2)z^2+(\alpha^2-\beta(N+2l+2)-2\lambda_1)z\\&=-2E+\alpha(N+2l)\end{aligned}$$

در رابطه‌ی فوق، یک طرف عبارت ثابت و طرف دیگر تابعی تحلیلی با قطب $z=z_i$ است، بنابراین می‌توان مانده را در نقطه‌ی $z=z_i$ حساب کرد

$$Res\big(-2E+\alpha(N+2l)\big)_{z=z_i}=4z_i\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}-4\gamma z_i^3-4\beta z_i^2-4\alpha z_i+4(l+\frac{N}{2})$$

همچنین می‌توان عبارت زیر را محاسبه کرد

$$\begin{aligned}&-2E+\alpha(N+2l)-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\big(-2E+\alpha(N+2l)\big)_{z=z_i}}{z-z_i}\\&=4\sum_{i=1}^{n}\frac{z-z_i}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}-4\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{z^3-z_i^3}{z-z_i}-4\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{z^2-z_i^2}{z-z_i}-4\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{z-z_i}{z-z_i}\\&+(2\alpha\beta-\gamma(N+2l+4)-2\lambda_2)z^2+(\alpha^2-\beta(N+2l+2)-2\lambda_1)z\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{8}{z_i-z_j}-4\gamma\sum_{i=1}^{n}(z^2+zz_i+z_i^2)-4\beta\sum_{i=1}^{n}(z+z_i)-4\alpha n\\&+(2\alpha\beta-\gamma(N+2l+4)-2\lambda_2)z^2+(\alpha^2-\beta(N+2l+2)-2\lambda_1)z\end{aligned}$$

با استفاده از روابط اثبات شده‌ی (۴.۲۳) داریم

$$\begin{aligned}&-2E+\alpha(N+2l)-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\big(-2E+\alpha(N+2l)\big)_{z=z_i}}{z-z_i}\\&=-4\gamma nz^2-4\gamma\sum_{i=1}^{n}z_iz-4\gamma\sum_{i=1}^{n}z_i^2-4\beta nz-4\beta\sum_{i=1}^{n}z_i-4\alpha n+\big(2\alpha\beta\\&-\gamma(N+2l+4)-2\lambda_2\big)z^2+(\alpha^2-\beta(N+2l+2)-2\lambda_1)z\end{aligned}$$

با تفکیک نسبت به توان‌های z خواهیم داشت

$$-\text{۲}E+\alpha(N+\text{۲}l)=\sum_{i=\text{۱}}^{n}\frac{Res\big(-\text{۲}E+\alpha(N+\text{۲}l)\big)_{z=z_i}}{z-z_i}-\big(\text{۴}\gamma n-\text{۲}\alpha\beta$$
$$+\gamma(N+\text{۲}l+\text{۴})+\text{۲}\lambda_\text{۲}\big)z^\text{۲}-\big(\text{۴}\gamma\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i+\text{۴}\beta n-(\alpha^\text{۲}-\beta(N+\text{۲}l+\text{۲})-\text{۲}\lambda_\text{۱})\big)z$$
$$-\text{۴}\gamma\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i^\text{۲}-\text{۴}\beta\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i-\text{۴}\alpha n$$

حال ضرایب طرفین رابطه‌ی فوق را متناظر قرار می‌دهیم، ابتدا ضریب $z^\text{۲}$ را بررسی می‌کنیم

$$\text{۴}\gamma n-\text{۲}\alpha\beta+\gamma(N+\text{۲}l+\text{۴})+\text{۲}\lambda_\text{۲}=\circ$$

بنابراین

$$\text{۲}\alpha\beta-\gamma(N+\text{۲}l+\text{۴})-\text{۲}\lambda_\text{۲}=\text{۴}\gamma n \qquad (\text{۹۳.۴})$$

ضریب z از طرفین را متناظر قرار می‌دهیم

$$\text{۴}\gamma\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i+\text{۴}\beta n-(\alpha^\text{۲}-\beta(N+\text{۲}l+\text{۲})-\text{۲}\lambda_\text{۱})=\circ$$

در اینصورت

$$\alpha^\text{۲}-\beta(N+\text{۲}l+\text{۲})-\text{۲}\lambda_\text{۱}=\text{۴}\gamma\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i+\text{۴}\beta n \qquad (\text{۹۴.۴})$$

همچنین ضریب ثابت را از طرفین مساوی قرار می‌دهیم

$$-\text{۲}E+\alpha(N+\text{۲}l)=-\text{۴}\gamma\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i^\text{۲}-\text{۴}\beta\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i-\text{۴}\alpha n$$

به‌طوریکه

$$E=\frac{\alpha}{\text{۲}}(\text{۴}n+N+\text{۲}l)+\text{۲}\beta\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i+\text{۲}\gamma\sum_{i=\text{۱}}^{n}z_i^\text{۲} \qquad (\text{۹۵.۴})$$

و در نهایت مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$Res\big(-\text{۲}E+\alpha(N+\text{۲}l)\big)_{z=z_i}=\circ$$

بعبارتی

$$\text{۴}z_i\sum_{j\neq i}^{n}\frac{\text{۲}}{z_i-z_j}-\text{۴}\gamma z_i^\text{۳}-\text{۴}\beta z_i^\text{۲}-\text{۴}\alpha z_i+\text{۴}(l+\frac{N}{\text{۲}})=\circ$$

به‌طوریکه معادلات آنساتز به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\sum_{j\neg i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}=\gamma z_i^2+\beta z_i+\alpha-\frac{l+\frac{N}{2}}{z_i}\quad,\quad i=1,\dots,n \tag{96.4}$$

توجه کنید که $\phi=1$ یک جواب (۹۲.۴) است، به‌طوریکه در (۹۵.۴)، $n=0$ قرار می‌دهیم

$$E=\frac{\alpha}{2}(N+2l)$$

در اینصورت با جایگذاری عبارت α از (۹۱.۴) داریم

$$E=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_3-\frac{\lambda_4^2}{4})(N+2l) \tag{97.4}$$

همچنین در روابط (۹۴.۴) و (۹۵.۴) با قرار دادن $n=0$ می‌توان λ_3 و λ_4 را از دو معادله‌ی زیر محاسبه کرد

$$\lambda_4(\lambda_3-\frac{\lambda_4^2}{4})-\sqrt{2}(N+2l+4)-2\lambda_2=0 \tag{98.4}$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_3-\frac{\lambda_4^2}{4})^2-\frac{\lambda_4}{\sqrt{2}}(N+2l+2)-2\lambda_1=0 \tag{99.4}$$

که با حل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\lambda_4&=-\frac{2\sqrt{2}\lambda_1}{3(N+2l+2)}+\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}\right)^{\frac{1}{3}}\\&+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}\right)^{\frac{1}{3}}\\\lambda_3&=\frac{\lambda_4^2}{4}+\frac{\sqrt{2}(N+2l+4+\sqrt{2}\lambda_2}{\lambda_4}\end{aligned} \tag{100.4}$$

به‌طوریکه

$$\begin{aligned}P&=-\frac{24\lambda_1^2}{9(N+2l+2)^2}\\q&=\frac{32\sqrt{2}\lambda_1^3}{27(N+2l+2)^3}-\frac{(N+2l+4+\sqrt{2}\lambda_2)^2}{N+2l+2}\end{aligned} \tag{101.4}$$

به این‌صورت که λ_3 از (۹۸.۴) نتیجه می‌شود و λ_4 از جاگذاری λ_3 در (۹۹.۴) حاصل می‌شود. بنابراین اولین حالت دقیق معادله شرودینگر شعاعی (۸۷.۴) بدست می‌آید

$$R(r)=r^{\frac{1-N}{2}}\psi=r^{\frac{1-N}{2}}r^{\mu}e^{-\alpha\frac{r^2}{2}-\beta\frac{r^4}{4}-\gamma\frac{r^6}{6}}\phi=r^{\mu-\frac{1}{2}(N-1)}e^{-\alpha\frac{r^2}{2}-\beta\frac{r^4}{4}-\gamma\frac{r^6}{6}}\phi$$

در اینصورت بنابه $\mu=l+\frac{1}{2}(N-1)$ و روابط (۹۱.۴) خواهیم داشت

$$R(r)=r^l\exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\lambda_3-\frac{\lambda_4^2}{4}\right)r^2-\frac{\lambda_4}{4\sqrt{2}}r^4-\frac{1}{3\sqrt{2}}r^6\right] \tag{102.4}$$

برای مثال در مورد $n = 1$ ریشه‌های حقیقی معادلات آنساتز (۹۶.۴) را می‌یابیم

$$z_1 = \frac{\lambda_4}{6} + \left(-\frac{v}{2} + \sqrt{(\frac{v}{2})^2 + (\frac{u}{3})^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{v}{2} - \sqrt{(\frac{v}{2})^2 + (\frac{u}{3})^3}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{103.4}$$

به‌طوریکه

$$u = \frac{\lambda_4^2}{24} - \frac{\lambda_3}{2} \quad , \quad v = \frac{5\lambda_4^3}{432} - \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(N + 2l) \tag{104.4}$$

پارامترهای λ_3 و λ_4 از معادلات (۹۳.۴) و (۹۴.۴) تعیین می‌شوند

$$\lambda_4(\lambda_3 - \frac{\lambda_4^2}{4}) - \sqrt{2}(N + 2l + 8) - 2\lambda_2 = 0 \tag{105.4}$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_3 - \frac{\lambda_4^2}{4})^2 - \frac{\lambda_4}{\sqrt{2}}(N + 2l + 6) - 2\lambda_1 = 4\sqrt{2}z_1 \tag{106.4}$$

انرژی مقدارویژه E از (۹۵.۴) با قرار دادن $n = 1$ به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$E = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_3 - \frac{\lambda_4^2}{4})(N + 2l + 4) + \sqrt{2}\lambda_4 z_1 + 2\sqrt{2}z_1^2 \tag{107.4}$$

و تابع موج شعاعی از (۱۰۲.۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$R(r) = r^l(r^2 - z_1)\exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_3 - \frac{\lambda_4^2}{4})r^2 - \frac{\lambda_4}{4\sqrt{2}}r^4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}r^6\right] \tag{108.4}$$

فصل ۵

مسائل

در این فصل معادلات شرودینگر و کلاین-گوردون[۱] را در حضور پتانسیل‌های مختلف نظیر کیلینگ بک[۲] و کراتزر[۳] در نظر می‌گیریم و در فضاهای متفاوت به روش بث آنساتز حل می‌کنیم. معادله‌ی کلاین-گوردون مدل نسبیتی از معادله‌ی شرودینگر است که قادر به توصیف رفتار نسبیتی الکترون می‌باشد. این معادله در حضور پتانسیل کیلینگ بک دارای یک جواب استاندارد نمی‌باشد و در این فصل، یک جواب چندجمله‌ای دقیق برای آن خواهیم یافت. پتانسیل کیلینگ بک، پتانسیلی است که از ترکیب پتانسیل‌های مختلف ایجاد شده است و شکل کلی آن به‌صورت زیر است

$$V(r) = ar^{۲} + br + c + \frac{d}{r} + \frac{f}{r^{۲}}$$

به‌طوریکه اگر پارامترهای a، b و c صفر باشند، به پتانسیل کراتزر[۴۲] تبدیل می‌شود

$$V(r) = \frac{d}{r} + \frac{f}{r^{۲}}$$

انعطاف‌پذیری این پتانسیل تنها به پتانسیل کراتزر محدود نمی‌شود و با صفر شدن a، c و f به پتانسیل کرنل[۴][۴۳] تغییر می‌کند، همچنین هنگامی که $b = c = d = f = ۰$ باشد، پتانسیل هارمونیک[۵] ایجاد می‌شود. و برای $c = d = f = ۰$ به پتانسیل هارمونیک انتقال‌یافته[۶][۴۴] تبدیل می‌شود.

۱.۵ معادله‌ی شرودینگر در حضور پتانسیل کیلینگ بک در فضای جابجایی

معادله ویژه مقداری شرودینگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H\psi = E\psi \qquad (۱.۵)$$

۱ Klein-Gordon
۲ Killingbeck
۳ Kratzer
۴ Kornell
۵ Harmonic
۶ Harmonic shifted

که H هامیلتونی، ψ تابع موج و E انرژی است. از آنجاییکه معادله شرودینگر یک معادله غیرنسبیتی و به اصطلاح بدون اسپین[۷] است، هامیلتونی آن بصورت زیر تعریف می‌شود

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(r) \tag{۲.۵}$$

بطوریکه P تکانه یا اندازه حرکت، $V(r)$ تابع پتانسیل است. تکانه از رابطه $P = mv$ حاصل می‌شود، که m جرم و v سرعت ذره است. اما فرم عملگری تکانه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar\nabla \tag{۳.۵}$$

بطوریکه

$$P^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\hbar^2\nabla^2 \tag{۴.۵}$$

$\hbar \simeq 10^{-15}$ ثابت پلانک نامیده می‌شود که در فضای یکانی $\hbar$، یک در نظر گرفته می‌شود، پس $P^2 = -\nabla^2$، در اینصورت در رابطه (۲.۵) داریم

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \tag{۵.۵}$$

هامیلتونی بالا را در رابطه‌ی (۱.۵) قرار می‌دهیم

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{۶.۵}$$

یا به‌عبارتی

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}P^2 + V(r)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{۷.۵}$$

اما در میدان مغناطیسی B، رابطه $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ و $\vec{P} \to \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}$ را داریم، که پتانسیل برداری را به‌صورت $\vec{A} = \frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2}$ تعریف می‌کنیم، پس معادله (۷.۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{P} - e\frac{\vec{B}\times r}{2c})^2 + V(r)\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{۸.۵}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
&(\vec{P} - e\frac{\vec{B}\times r}{2c})^2 = (\vec{P} - e\frac{\vec{B}\times r}{2c}).(\vec{P} - e\frac{\vec{B}\times r}{2c}) = P^2 + \frac{e^2}{4c^2}(\vec{B}\times r)^2 \\
&- \frac{e}{c}(\vec{P}.(\vec{B}\times r)) = P^2 + \frac{e^2}{4c^2}\big(|B|.|r|\overbrace{\sin\alpha}^{1}\big)^2 - \frac{e}{c}\big(\vec{B}\overbrace{(r\times\vec{P})}^{L_z}\big) \\
&= P^2 + \frac{e^2B^2}{4c^2}r^2 - \frac{e\vec{B}L_z}{c}
\end{aligned} \tag{۹.۵}$$

---

[۷] spinless

زاویه α، ۹۰ درجه است زیرا میدان مغناطیسی هم راستای محور z است و زاویه بین میدان و بردار مکانی قائمه است. پس با قرار دادن (۹.۵) در (۸.۵) داریم

$$\left[\frac{1}{2m}\left(P^2+\frac{e^2B^2}{4c^2}r^2-\frac{e\vec{B}L_z}{c}\right)+V-E\right]\psi(\vec{r})=0 \qquad (10.5)$$

طرفین را در عبارت $2m$ ضرب کرده و طبق رابطه (۳.۵) رابطه‌ی فوق به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\left(-\nabla^2+\frac{e^2B^2}{4c^2}r^2-\frac{e\vec{B}L_z}{c}\right)+2m(V-E)\right]\psi(\vec{r})=0 \qquad (11.5)$$

با ضرب در یک علامت منفی خواهیم داشت

$$\left[\left(\nabla^2-\frac{e^2B^2}{4c^2}r^2+\frac{e\vec{B}L_z}{c}\right)-2m(V-E)\right]\psi(\vec{r})=0 \qquad (12.5)$$

حال با فرض تابع پتانسیل به‌صورت $V(r)=a'r+b'r^2+\frac{c'}{r}+\frac{d'}{r^2}$ و جایگذاری در معادله‌ی فوق داریم

$$\left[\left(\nabla^2-\frac{e^2B^2}{4c^2}r^2+\frac{e\vec{B}L_z}{c}\right)-2m\left(a'r+b'r^2+\frac{c'}{r}+\frac{d'}{r^2}-E\right)\right]\psi(\vec{r})=0 \qquad (13.5)$$

یا به عبارتی

$$\left[\nabla^2-\left(\frac{e^2B^2}{4c^2}+2mb'\right)r^2-2m\left(a'r+\frac{c'}{r}+\frac{d'}{r^2}-E\right)+\frac{e\vec{B}L_z}{c}\right]\psi(\vec{r})=0 \qquad (14.5)$$

از طرفی $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$، که در معادله‌ی دیفرانسیل بالا قرار می‌دهیم[۴۵]

$$\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]-\left(\frac{e^2B^2}{4c^2}+2mb'\right)r^2-2m\left(a'r+\frac{c'}{r}+\frac{d'}{r^2}-E\right)+\frac{e\vec{B}L_z}{c}\right\}\psi(\vec{r})=0 \qquad (15.5)$$

حال برای حل این معادله دیفرانسیل تابع تبدیل زیر را به کار می‌بریم

$$\psi(\vec{r})=U(r)r^{-\frac{1}{2}}e^{il\varphi}$$

که با توجه به معادله دیفرانسیل (۱۵.۵)، مشتق اول و مشتق دوم آن را برحسب r و φ به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\frac{d}{dr}\psi=U'(r)r^{-\frac{1}{2}}e^{il\varphi}-\frac{1}{2}U(r)r^{-\frac{3}{2}}e^{il\varphi}$$
$$\frac{d^2}{dr^2}\psi=U''(r)r^{-\frac{1}{2}}e^{il\varphi}-\frac{1}{2}U'(r)r^{-\frac{3}{2}}e^{il\varphi}-\frac{1}{2}U'(r)r^{-\frac{3}{2}}e^{il\varphi}+\frac{3}{4}U(r)r^{-\frac{5}{2}}e^{il\varphi}$$
$$\frac{d}{d\varphi}\psi=U(r)r^{-\frac{1}{2}}(il)e^{il\varphi}$$
$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi=U(r)r^{-\frac{1}{2}}(-l^2)e^{il\varphi}$$

در اینصورت در معادله (۱۵.۵) داریم

$$r^{-\frac{1}{2}}e^{il\varphi}\Big\{\frac{d^2}{dr^2}-r^{-1}\frac{d}{dr}+\frac{3}{4}r^{-2}+\frac{1}{r}(\frac{d}{dr}-\frac{1}{2}r^{-1})+\frac{1}{r^2}(-l^2)$$
$$-(\frac{e^2B^2}{4c^2}+2mb')r^2-2m(a'r+\frac{c'}{r}+\frac{d'}{r^2}-E)+\frac{e\vec{B}L_z}{c}\Big\}U(r)=0$$

پس از تقسیم طرفین معادله‌ی بالا بر عبارت $r^{-\frac{1}{2}}e^{il\varphi}$، آن را مرتب می‌کنیم

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}-(\frac{e^2B^2}{4c^2}+2mb')r^2-(2ma')r-(-2mE-\frac{e\vec{B}L_z}{c})$$
$$-(2mc')r^{-1}+(\frac{1}{4}-l^2-2md')r^{-2}\Big\}U(r)=0$$

در نهایت معادله (۱۵.۵)به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2}{dr^2}U+\Big\{\frac{A_1}{r^2}-\frac{A_2}{r}-A_3-A_4r-A_5r^2\Big\}U(r)=0 \qquad (۱۶.۵)$$

بطوریکه

$$A_1=\frac{1}{4}-l^2-2md'$$
$$A_2=2mc'$$
$$A_3=-2mE-\frac{e\vec{B}L_z}{c}$$
$$A_4=2ma'$$
$$A_5=\frac{e^2B^2}{4c^2}+2mb' \qquad (۱۷.۵)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۱۶.۵)، تابع موج را به‌صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم

$$U(r)=e^{g(r)}\tilde{U}(r) \qquad ; \qquad g(r)=\alpha r^2+\beta r+\gamma\log r \qquad (۱۸.۵)$$

بطوریکه α، β و γ مجهولاتی هستند که در طی فرآیند حل معادله حاصل می‌شوند، با توجه به ساختار معادله، نیاز به مشتق دوم تابع موج فوق داریم

$$\frac{d}{dr}U(r)=g(r)'e^{g(r)}\tilde{U}(r)+e^{g(r)}\tilde{U}'(r)$$
$$\frac{d^2}{dr^2}U(r)=g(r)''e^{g(r)}\tilde{U}(r)+g'(r)^2e^{g(r)}\tilde{U}(r)+2g'(r)\tilde{U}'(r)+e^{g(r)}\tilde{U}''(r) \qquad (۱۹.۵)$$

بطوریکه

$$g'(r)=2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r}$$
$$g''(r)=2\alpha-\frac{\gamma}{r^2}$$
$$g'^2(r)=4\alpha^2r^2+(\beta+\frac{\gamma}{r})^2+2(2\alpha r)(\beta+\frac{\gamma}{r})=4\alpha^2r^2+\beta^2+\frac{\gamma^2}{r^2}+\frac{2\beta\gamma}{r}$$
$$+4\alpha\beta r+4\alpha\gamma$$

با استفاده از نتایج بالا، رابطه‌ی (۱۹.۵) را در معادله دیفرانسیل (۱۶.۵) قرار می‌دهیم

$$e^{g(r)}\Big\{(2\alpha-\frac{\gamma}{r^2})+(4\alpha^2r^2+4\alpha\beta r+4\alpha\gamma+\beta^2+\frac{2\beta\gamma}{r}+\frac{\gamma}{r^2})+2(2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r})\frac{d}{dr}$$
$$+\frac{d^2}{dr^2}+\frac{A_1}{r^2}-\frac{A_2}{r}-A_3-A_4r-A_5r^2\Big\}\tilde{U}(r)=0$$

با تقسیم طرفین بر عبارت $e^{g(r)}$ داریم

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+2(2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r})\frac{d}{dr}+(4\alpha^2-A_5)r^2+(4\alpha\beta-A_4)$$
$$+(4\alpha\gamma+\beta^2+2\alpha-A_3)+(2\beta\gamma-A_2)r^{-1}+(\gamma^2-\gamma+A_1)r^{-2}\Big\}\tilde{U}(r)=0 \quad (۲۰.۵)$$

برای اینکه معادله دیفرانسیل به شکلی تبدیل شود که بتوان از روش بث آنساتز برای حل آن استفاده کرد، ضرایب r^2، r و r^{-1} را صفر قرار می‌دهیم که پارامترهای α، β و γ نیز حاصل می‌شوند

$$\alpha=-\frac{\sqrt{A_5}}{2}$$
$$\beta=-\frac{A_4}{2\sqrt{A_5}}$$
$$\gamma=-\frac{A_2\sqrt{A_5}}{A_4} \quad (۲۱.۵)$$

که A_2، A_4 و A_5 در (۱۷.۵) تعریف شده‌اند، بنابراین معادله‌ی (۲۰.۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+2(2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r})\frac{d}{dr}+(4\alpha\gamma+\beta^2+2\alpha-A_3)+(\gamma^2-\gamma+A_1)r^{-2}\Big\}\tilde{U}(r)=0$$

طرفین را در r^2 ضرب می‌کنیم

$$\Big\{r^2\frac{d^2}{dr^2}+2(2\alpha r^3+\beta r^2+\gamma r)\frac{d}{dr}+(4\alpha\gamma+\beta^2+2\alpha-A_3)r^2+(\gamma^2-\gamma+A_1)\Big\}\tilde{U}(r)=0 \quad (۲۲.۵)$$

برای حل معادله‌ی فوق، فرض می‌کنیم $\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)$ یک جواب چندجمله‌ای معادله باشد

$$r^2\frac{\frac{d^2}{dr^2}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+2(2\alpha r^3+\beta r^2+\gamma r)\frac{\frac{d}{dr}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}$$
$$+(4\alpha\gamma+\beta^2+2\alpha-A_3)r^2+(\gamma^2-\gamma+A_1)=0$$

با استفاده از (۱۵.۴) و (۱۶.۴) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2(2\alpha r^3+\beta r^2+\gamma r)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}+c_1r^2=-c_0 \quad (۲۳.۵)$$

به‌طوریکه

$$c_0 = \gamma^2 - \gamma + A_1$$
$$c_1 = 4\alpha\gamma + \beta^2 + 2\alpha - A_3 \qquad (۲۴.۵)$$

رابطه‌ی (۲۳.۵) تابعی تحلیلی با قطب $r = r_i$ که به محاسبه‌ی مانده در آن می‌پردازیم

$$Res(-c_0)_{r=r_i} = r_i^2 \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{r_i - r_j} + 2(2\alpha r_i^3 + \beta r_i^2 + \gamma r_i) \qquad (۲۵.۵)$$

در اینصورت داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r - r_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2}{r - r_i} \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{r_i - r_j} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(2\alpha r_i^3 + \beta r_i^2 + \gamma r_i)}{r - r_i} \qquad (۲۶.۵)$$

از تفاضل (۲۳.۵) و (۲۶.۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -c_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r - r_i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 - r_i^2}{r - r_i} \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{r_i - r_j} \\ &+ 4\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{r^3 - r_i^3}{r - r_i} + 2\beta \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 - r_i^2}{r - r_i} + 2\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{r - r_i}{r - r_i} + c_1 r^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (r + r_i) \sum_{j\neq i} \frac{2}{r_i - r_j} + 4\alpha \sum_{i=1}^{n} (r^2 + r r_i + r_i^2) + 2\beta \sum_{i=1}^{n} (r + r_i) + 2\gamma n + c_1 r^2 \end{aligned}$$

پس از تفکیک نسبت به توان‌های r داریم

$$\begin{aligned} -c_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r - r_i} &= [4\alpha n + c_1] r^2 + [\sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{r_i - r_j} + 4\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i + 2\beta n] r \\ &+ [\sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2 r_i}{r_i - r_j} + 4\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + 2\beta \sum_{i=1}^{n} r_i + 2\gamma n] \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از رابطه‌ی (۲۳.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -c_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{Res(-c_0)_{r=r_i}}{r - r_i} &= [4\alpha n + c_1] r^2 + [4\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i + 2\beta n] r \\ &+ [n(n-1) + 4\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + 2\beta \sum_{i=1}^{n} r_i + 2\gamma n] \end{aligned}$$

با متناظر قرار دادن ضرایب متغیرها و ثابت‌های طرفین داریم

$$4\alpha n + 4\alpha\gamma + \beta^2 + 2\alpha - A_3 = 0 \qquad (۲۷.۵)$$

$$4\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i + 2\beta n = 0 \qquad (۲۸.۵)$$

$$4\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + 2\beta \sum_{i=1}^{n} r_i + n(n - 1 + 2\gamma) + \gamma^2 - \gamma + A_1 = 0 \qquad (۲۹.۵)$$

مانده را نیز برابر صفر قرار می‌دهیم

$$r_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{r_j - r_i} + (2\alpha r_i^2 + \beta r_i + \gamma) = 0 \qquad (۳۰.۵)$$

تابع موج $\tilde{U}(r) = 1$ یک جواب بدیهی معادله دیفرانسیل (۲۲.۵) است، به‌طوریکه $n = 0$ فرض می‌شود که در اینصورت مقدار انرژی E تنها مجهول معادله است و با قرار دادن $n = 0$ در روابط (۲۷.۵) تا (۳۰.۵) حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} &4\alpha\gamma + \beta^2 + 2\alpha - A_3 = 0 \\ &\gamma^2 - \gamma + A_1 = 0 \end{aligned}$$

که E در عبارت A_3 تعریف شده در (۱۷.۵) قرار دارد و رابطه‌ی دوم قید محسوب می‌شود.
اما اگر در روابط (۲۷.۵) تا (۳۰.۵)، به n مقدار یک دهیم، با دو مجهول E و r_1 طرف هستیم که از روابط زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} &2\alpha(3 + 2\gamma) + \beta - A_3 = 0 \\ &4\alpha r_1 + 2\beta = 0 \\ &4\alpha r_1^2 + 2\beta r_1 + \gamma + \gamma^2 + A_1 = 0 \\ &2\alpha r_1^2 + \beta r_1 + \gamma = 0 \end{aligned}$$

که به روابط زیر کاهش می‌یابند

$$\begin{aligned} &2\alpha(3 + 2\gamma) + \beta - A_3 = 0 \\ &4\alpha r_1 + 2\beta = 0 \\ &\gamma^2 - \gamma + A_1 = 0 \end{aligned}$$

همچنین اگر در روابط (۲۷.۵) تا (۳۰.۵)، به n مقدار ۲ بدهیم، سه مجهول E، r_1 و r_2 را داریم که از روابط زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} &10\alpha + 4\alpha\gamma + \beta^2 - A_3 = 0 \\ &\alpha(r_1 + r_2) + \beta = 0 \\ &4\alpha(r_1^2 + r_2^2) + 2\beta(r_1 + r_2) + 2(2\gamma + 1) + \gamma^2 - \gamma + A_1 = 0 \end{aligned}$$

و دستگاه معادلات آنساتز به‌صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} &\frac{r_1}{r_1 - r_2} + 2\alpha r_1^2 + \beta r_1 + \gamma = 0 \\ &\frac{r_2}{r_2 - r_1} + 2\alpha r_2^2 + \beta r_2 + \gamma = 0 \end{aligned}$$

۲.۵ معادله‌ی شرودینگر در حضور پتانسیل کیلینگ بک در فضای ناجابجایی

در این بخش، معادله شرودینگر را تحت پتانسیل $V^{(C)}(r) = a'r + b'r^2 + \frac{c'}{r} + \frac{d'}{r^2}$ با در نظر گرفتن $\vec{r} \to \vec{r} + \frac{1}{2\hbar}\vec{\theta} \times \vec{P}$ و $\vec{P} \to \vec{P}$ بدست می‌آوریم که θ پارامتر فضای ناجابجایی است، در اینصورت از معادله (۸.۵) داریم[۴۵]

$$\Big\{\frac{1}{2m}\Big(\vec{P} - \frac{e}{2c}\vec{B} \times (r + \frac{1}{2\hbar}(\vec{\theta} \times \vec{P}))\Big)^2 + \Big(V^{(NC)}(\vec{r}) - E_{n,l}^{(NR-NC)}\Big)\Big\}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r}) = 0 \tag{۳۱.۵}$$

یا به‌عبارتی

$$\Big\{\Big(\vec{P} - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times r) - \frac{e}{4c\hbar}(\vec{B} \times (\vec{\theta} \times \vec{P}))\Big)^2 - 2m\Big(E_{n,l}^{(NR-NC)} - V^{(NC)}(\vec{r})\Big)\Big\}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r}) = 0 \tag{۳۲.۵}$$

بطوریکه

$$\Big(\vec{P} - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}) - \frac{e}{4c\hbar}(\vec{B} \times (\vec{\theta} \times \vec{P}))\Big)^2 = (\vec{P} - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}))^2 + \frac{e^2}{16c^2\hbar^2}(\vec{B} \times (\vec{\theta} \times \vec{P}))^2 - \frac{e}{2c\hbar}(\vec{P} - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r})).(\vec{B} \times (\vec{\theta} \times \vec{P})) \tag{۳۳.۵}$$

که از (۹.۵) رابطه‌ی زیر را بدست آوردیم

$$(\vec{P} - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}))^2 = P^2 + \frac{e^2B^2}{4c^2}r^2 - \frac{e\vec{B}L_z}{c}$$

و همچنین داریم

$$\begin{aligned}
(\vec{B} \times (\vec{\theta} \times \vec{P}))^2 &= (\vec{\theta}(\vec{B}.\vec{P}) - \vec{P}(\vec{B}.\vec{\theta}))^2 = (\vec{\theta}\underbrace{(|B||P|\cos\overbrace{\alpha}^{90^\circ})}_{0} - \vec{P}(|B||\theta|\underbrace{\cos\overbrace{\beta}^{0^\circ}}_{1}))^2 \\
&= (-\vec{P}|B||\theta|)^2 = P^2B^2\theta^2 \\
(\vec{P} - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}))(\vec{B} \times (\vec{\theta} \times \vec{P})) &= -P^2|B||\theta| + \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}).\vec{P}|B|\,|\theta| \\
&= -P^2|B||\theta| + \frac{e}{2c}\vec{P}|B||\theta|.(\vec{B} \times \vec{r}) = -P^2|B||\theta| + \frac{e}{2c}\vec{B}|B||\theta|(\vec{r} \times \vec{P}) \\
&= -P^2|B||\theta| + \frac{e}{2c}B^2|\theta|L_z = -P^2B\theta + \frac{e}{2c}B^2\theta L_z
\end{aligned}$$

که زاویه α، زاویه بین تکانه و میدان است که بر هم عمودند و زاویه β، زاویه بین θ و میدان است که در یک راستا قرار دارند. بنابراین در نهایت نتایج فوق را در رابطه‌ی (۳۳.۵) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
&\Big(\vec{P}-\frac{e}{۲c}(\vec{B}\times\vec{r})-\frac{e}{۴c\hbar}(\vec{B}\times(\vec{\theta}\times\vec{P}))\Big)^{۲}=(\vec{P}-\frac{e}{۲c}(\vec{B}\times\vec{r}))^{۲}\\
&+\frac{e^{۲}}{۱۶c^{۲}\hbar^{۲}}(\vec{B}\times(\vec{\theta}\times\vec{P}))^{۲}-\frac{e}{۲c\hbar}(\vec{P}-\frac{e}{۲c}(\vec{B}\times\vec{r})).(\vec{B}\times(\vec{\theta}\times\vec{P}))\\
&=P^{۲}+\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}}r^{۲}-\frac{e\vec{B}L_z}{c}+\frac{e^{۲}}{۱۶c^{۲}\hbar^{۲}}P^{۲}B^{۲}\theta^{۲}-\frac{e}{۲c\hbar}\big(-P^{۲}B\theta+\frac{e}{۲c}B^{۲}\theta L_z\big)\\
&=P^{۲}+\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}}r^{۲}-\frac{e\vec{B}L_z}{c}+\frac{e^{۲}}{۱۶c^{۲}\hbar^{۲}}P^{۲}B^{۲}\theta^{۲}+\frac{e}{۲c\hbar}P^{۲}B\theta-\frac{e^{۲}}{۴c^{۲}\hbar}B^{۲}\theta L_z\\
&=(۱+\frac{e^{۲}}{۱۶c^{۲}\hbar^{۲}}B^{۲}\theta^{۲}+\frac{e}{۲c\hbar}B\theta)P^{۲}+\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}}r^{۲}-\frac{e\vec{B}L_z}{c}-\frac{e^{۲}}{۴c^{۲}\hbar}B^{۲}\theta L_z
\end{aligned}\qquad(۳۴.۵)$$

از طرفی در فضای ناجابجایی پتانسیل را به صورت $V^{(NC)}(r)=V^{(C)}(r)-\frac{l_z\theta}{۲r}\frac{\partial V^{(c)}(r)}{\partial r}$ در نظر میگیریم، پس

$$\begin{aligned}
&-۲m(E^{(NR-NC)}_{n,l}-V^{(NC)}(r))=-۲m\big(E^{(NR-NC)}_{n,l}-V^{(C)}(r)+\frac{l_z\theta}{۲r}\frac{\partial V^{(C)}(r)}{\partial r}\big)\\
&=-۲m\big(E^{(NR-NC)}_{n,l}-a'r-b'r^{۲}-\frac{c'}{r}-\frac{d'}{r^{۲}}+\frac{l_z\theta}{۲r}(a'+۲b'r-\frac{c'}{r^{۲}}-\frac{۲d'}{r^{۳}})\big)
\end{aligned}\qquad(۳۵.۵)$$

بنابراین نتایج (۳۴.۵) و (۳۵.۵) را در معادله (۳۲.۵) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
&\Big\{(۱+\frac{e^{۲}}{۱۶c^{۲}\hbar^{۲}}B^{۲}\theta^{۲}+\frac{e}{۲c\hbar}B\theta)P^{۲}+\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}}r^{۲}-\frac{e\vec{B}L_z}{c}-\frac{e^{۲}}{۴c^{۲}\hbar}B^{۲}\theta L_z\\
&-۲m\Big(E^{(NR-NC)}_{n,l}-a'r-b'r^{۲}-\frac{c'}{r}-\frac{d'}{r^{۲}}\\
&+\frac{l_z\theta}{۲r}(a'+۲b'r-\frac{c'}{r^{۲}}-\frac{۲d'}{r^{۳}})\Big)\Big\}\psi^{(NR-NC)}_{n,l}(\vec{r})=۰
\end{aligned}\qquad(۳۶.۵)$$

بدون کم شدن کلیتی از بحث برای سادگی در روابط، از نام‌گذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\eta=۱+\frac{e^{۲}}{۱۶c^{۲}\hbar^{۲}}B^{۲}\theta^{۲}+\frac{e}{۲c\hbar}B\theta$$

و با تقسیم طرفین معادله‌ی (۳۶.۵) بر η خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\Big\{P^{۲}+(\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}\eta}+\frac{۲mb'}{\eta})r^{۲}+\frac{۲ma'}{\eta}r+(\frac{۲mc'}{\eta}-\frac{ml_z\theta a'}{\eta})\frac{۱}{r}+\frac{۲md'}{\eta}\frac{۱}{r^{۲}}+\frac{ml_z\theta c'}{\eta r^{۳}}\\
&+\frac{۲l_z\theta d'm}{\eta r^{۴}}+(-\frac{e\vec{B}l_z}{c\eta}-\frac{e^{۲}B^{۲}\theta l_z}{۴c^{۲}\eta\hbar}-\frac{۲ml_z\theta b'}{\eta})-\frac{۲mE}{\eta}\Big\}\psi^{(NR-NC)}_{n,l}(\vec{r})=۰
\end{aligned}$$

با به‌کارگیری رابطه‌ی (۴.۵) و همچنین ضرب معادله فوق در علامت منفی داریم

$$\begin{aligned}
&\Big\{\nabla^{۲}-(\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}\eta}+\frac{۲mb'}{\eta})r^{۲}-\frac{۲ma'}{\eta}r-(\frac{۲mc'}{\eta}-\frac{ml_z\theta a'}{\eta})\frac{۱}{r}-\frac{۲md'}{\eta}\frac{۱}{r^{۲}}-\frac{ml_z\theta c'}{\eta r^{۳}}\\
&-\frac{۲l_z\theta d'm}{\eta r^{۴}}+(\frac{e\vec{B}l_z}{c\eta}+\frac{e^{۲}B^{۲}\theta l_z}{۴c^{۲}\eta\hbar}+\frac{۲ml_z\theta b'}{\eta})+\frac{۲mE}{\eta}\Big\}\psi^{(NR-NC)}_{n,l}(\vec{r})=۰
\end{aligned}$$

از آنجاییکه در مختصات استوانه ای رابطه‌ی $\nabla^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}$ برقرار است، پس

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}-(\frac{e^2B^2}{4c^2\eta}+\frac{2mb'}{\eta})r^2-\frac{2ma'}{\eta}r-(\frac{2mc'}{\eta}-\frac{ml_z\theta a'}{\eta})\frac{1}{r}-\frac{2md'}{\eta r^2}\\&-\frac{ml_z\theta c'}{\eta r^3}-\frac{2l_z\theta d'm}{\eta r^4}+(\frac{e\vec{B}l_z}{c\eta}+\frac{e^2B^2\theta l_z}{4c^2\eta\hbar}+\frac{2ml_z\theta b'}{\eta})\\&+\frac{2mE_{n,l}^{(NR-NC)}}{\eta}\Big\}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=0 \qquad (37.5)\end{aligned}$$

برای حل معادله فوق، تبدیل زیر را استفاده می‌کنیم

$$\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U(r) \qquad (38.5)$$

به‌طوریکه

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=e^{il\varphi}(-\frac{1}{2})r^{-\frac{3}{2}}U(r)+e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U'(r)\\&\frac{d^2}{dr^2}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=e^{il\varphi}(\frac{3}{4})r^{-\frac{5}{2}}U(r)+2e^{il\varphi}(-\frac{1}{2})r^{-\frac{3}{2}}U'(r)+e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U''(r)\\&\frac{d}{d\varphi}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=ile^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U(r)\\&\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=-l^2e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U(r)\end{aligned}$$

نتایج فوق را در معادله (۳۷.۵) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}&e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}\Big\{\frac{3}{4}r^{-2}-r^{-1}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\big(-\frac{1}{2}r^{-1}+\frac{d}{dr}\big)+\frac{1}{r^2}(-l^2)-(\frac{e^2B^2}{4c^2\eta}\\&+\frac{2mb'}{\eta})r^2-\frac{2ma'}{\eta}r-(\frac{2mc'}{\eta}-\frac{ml_z\theta a'}{\eta})\frac{1}{r}-\frac{2md'}{\eta r^2}-\frac{ml_z\theta c'}{\eta r^3}\\&-\frac{2l_z\theta d'm}{\eta r^4}+(\frac{e\vec{B}l_z}{c\eta}+\frac{e^2B^2\theta l_z}{4c^2\eta\hbar}+\frac{2ml_z\theta b'}{\eta})+\frac{2mE}{\eta}\Big\}U(r)=0\end{aligned}$$

با تقسیم طرفین معادله‌ی فوق بر عبارت $e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}$ و تفکیک عبارات نسبت به توان‌های r خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+\Big(-\frac{2md'\theta L_z}{\eta}\Big)\frac{1}{r^4}+\Big(-\frac{mc'\theta L_z}{\eta}\Big)\frac{1}{r^3}+\Big(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-l^2-\frac{2md'}{\eta}\Big)\frac{1}{r^2}\\&+\Big(-\frac{2mc'}{\eta}+\frac{ma'\theta L_z}{\eta}\Big)\frac{1}{r}+\Big(\frac{e^2B^2\theta}{4\hbar c^2}+\frac{e\vec{B}}{c}+2mb'\theta\Big)\frac{L_z}{\eta}+\frac{2mE}{\eta}\\&+\Big(-\frac{2ma'}{\eta}\Big)r+\Big(-\frac{e^2B^2}{4\eta c^2}-\frac{2mb'}{\eta}\Big)r^2\Big\}U(r)=0\end{aligned}$$

در نهایت معادله بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{A_1}{r^4}+\frac{A_2}{r^3}+\frac{A_3}{r^2}+\frac{A_4}{r}+A_5+A_6r+A_7r^2\Big\}U(r)=0 \qquad (39.5)$$

به‌طوریکه

$$A_1=-\frac{2md'\theta L_z}{\eta}$$
$$A_2=-\frac{mc'\theta L_z}{\eta}$$
$$A_3=\frac{1}{4}-l^2-2md'$$
$$A_4=-\frac{2mc'}{\eta}+\frac{ma'\theta L_z}{\eta}$$
$$A_5=\left(\frac{e^2B^2\theta}{4\hbar c^2}+\frac{e\vec{B}}{c}+2mb'\theta\right)\frac{L_z}{\eta}+\frac{2mE}{\eta}$$
$$A_6=-\frac{2ma'}{\eta}$$
$$A_7=-\frac{e^2B^2}{4\eta c^2}-\frac{2mb'}{\eta} \tag{۴۰.۵}$$

در اینصورت برای حل معادله دیفرانسیل (۳۹.۵) تابع موج زیر را پیشنهاد می‌دهیم

$$U(r)=e^{g(r)}\tilde{U}(r) \qquad ; \qquad g(r)=\alpha r^2+\beta r+\gamma\log r+\frac{\lambda}{r} \tag{۴۱.۵}$$

که α، β، γ و λ پارامترهایی هستند که در روند حل معادله، تابع شرایطی خاص بدست خواهند آمد به‌طوریکه بتوان از روش بث آنساتز برای حل معادله استفاده کرد. بنابراین با توجه به معادله دیفرانسیل (۳۹.۵)، به مشتق دوم تابع موج $U(r)$ نیاز داریم، پس

$$\frac{d}{dr}U(r)=g'(r)e^{g(r)}\tilde{U}(r)+e^{g(r)}\tilde{U}'(r)$$
$$\frac{d^2}{dr^2}U(r)=g''(r)e^{g(r)}\tilde{U}(r)+g'(r)^2e^{g(r)}\tilde{U}(r)+2g'(r)e^{g(r)}\tilde{U}'(r)+e^{g(r)}\tilde{U}''(r)$$

به‌طوریکه

$$g'(r)=2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r}-\frac{\lambda}{r^2}$$
$$g''(r)=2\alpha-\frac{\gamma}{r^2}+\frac{2\lambda}{r^3}$$
$$\begin{aligned}g'^2(r)&=(2\alpha r+\beta)^2+(\frac{\gamma}{r}-\frac{\lambda}{r^2})^2+2(2\alpha r+\beta)(\frac{\gamma}{r}-\frac{\lambda}{r^2})\\&=4\alpha^2r^2+\beta^2+4\alpha\beta r+\frac{\gamma^2}{r^2}+\frac{\lambda^2}{r^4}-\frac{2\gamma\lambda}{r^3}+4\alpha\gamma-\frac{4\alpha\lambda}{r}+\frac{2\beta\gamma}{r}-\frac{2\beta\lambda}{r^2}\end{aligned}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده‌ی فوق در معادله دیفرانسیل (۳۹.۵) داریم

$$\begin{aligned}e^{g(r)}\Big\{&2\alpha-\frac{\gamma}{r^2}+\frac{2\lambda}{r^3}+4\alpha^2r^2+4\alpha\beta r+\beta^2+4\alpha\gamma+\frac{2\beta\gamma-4\alpha\lambda}{r}+\frac{\gamma^2-2\beta\lambda}{r^2}\\&-\frac{2\gamma\lambda}{r^3}+\frac{\lambda^2}{r^4}+2(2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r}-\frac{\lambda}{r^2})\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}+\frac{A_1}{r^4}+\frac{A_2}{r^3}+\frac{A_3}{r^2}+\frac{A_4}{r}\\&+A_5+A_6r+A_7r^2\Big\}\tilde{U}=0\end{aligned}$$

معادله را بر عبارت $e^{g(r)}$ تقسیم کرده و پس از مرتب کردن معادله خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+2(2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r}-\frac{\lambda}{r^2})\frac{d}{dr}+\left(4\alpha^2+A_7\right)r^2+\left(4\alpha\beta+A_6\right)r\\&+\left(\beta^2+4\alpha\gamma+2\alpha+A_5\right)+\frac{2\beta\gamma-4\alpha\lambda+A_4}{r}+\frac{\gamma^2-\gamma-2\beta\lambda+A_3}{r^2}\\&+\frac{2\lambda-2\gamma\lambda+A_2}{r^3}+\frac{\lambda^2+A_1}{r^4}\Big\}\tilde{U}=0\end{aligned}\tag{42.5}$$

برای اینکه بتوان معادله‌ی فوق را به روش بث آنساتز حل کرد، نیاز داریم ضرایب r^2، r، r^{-3} و r^{-4} را صفر در نظر بگیریم که در اینصورت پارامترهای α، β، γ و λ حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned}\alpha&=-\frac{\sqrt{-A_7}}{2}\\\beta&=\frac{A_6}{2\sqrt{-A_7}}\\\lambda&=\pm\sqrt{-A_1}\\\gamma&=-\frac{A_2}{2\sqrt{-A_1}}+1\end{aligned}\tag{43.5}$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل (۴۲.۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+2(2\alpha r+\beta+\frac{\gamma}{r}-\frac{\lambda}{r^2})\frac{d}{dr}+\left(\beta^2+4\alpha\gamma+2\alpha+A_5\right)\\&+\frac{2\beta\gamma-4\alpha\lambda+A_4}{r}+\frac{\gamma^2-\gamma-2\beta\lambda+A_3}{r^2}\Big\}\tilde{U}=0\end{aligned}\tag{44.5}$$

بدون کم شدن کلیتی از بحث، نام‌گذاری زیر را انجام می‌دهیم

$$\begin{aligned}C_0&=\gamma^2-\gamma-2\beta\lambda+A_3\\C_1&=2\beta\gamma-4\alpha\lambda+A_4\\C_2&=\beta^2+4\alpha\gamma+2\alpha+A_5\end{aligned}\tag{45.5}$$

که معادله دیفرانسیل (۴۴.۵) پس از این نام‌گذاری و همچنین ضرب طرفین معادله در r^2 به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\Big\{r^2\frac{d^2}{dr^2}+2(2\alpha r^3+\beta r^2+\gamma r-\lambda)\frac{d}{dr}+C_2r^2+C_1r+C_0\Big\}\tilde{U}=0\tag{46.5}$$

در اینصورت برای حل معادله دیفرانسیل (۴۶.۵) فرض می‌کنیم $\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)$ جواب معادله باشد

$$r^2\frac{\frac{d^2}{dr^2}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+2(2\alpha r^3+\beta r^2+\gamma r-\lambda)\frac{\frac{d}{dr}\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+C_2r^2+C_1r+C_0=0$$

که با استفاده از روابط (۱۵.۴) و (۱۶.۴) معادله‌ی فوق به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$-C_0=r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2(2\alpha r^3+\beta r^2+\gamma r-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}+C_2r^2+C_1r \tag{47.5}$$

توجه کنید که سمت راست معادله‌ی فوق، تابع تحلیلی با قطب $r=r_i$ است بنابراین برای محاسبه مانده در قطب داریم

$$Res(-C_0)_{r=r_i}=r_i^2\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2(2\alpha r_i^3+\beta r_i^2+\gamma r_i-\lambda) \tag{48.5}$$

همچنین داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-C_0)_{r=r_i}}{r-r_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i^2}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{(2\alpha r_i^3+\beta r_i^2+\gamma r_i-\lambda)}{r-r_i} \tag{49.5}$$

دراینصورت تفاضل رابطه‌ی (۴۷.۵) و (۴۹.۵) را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&-C_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-C_0)_{r=r_i}}{r-r_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+4\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{r^3-r_i^3}{r-r_i}\\
&+2\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}+2\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}-2\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1-1}{r-r_i}+C_2r^2-C_1r\\
&=\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+4\alpha\sum_{i=1}^{n}(r^2+rr_i+r_i^2)+2\beta\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)+2\gamma n+C_2r^2\\
&+C_1r=\Big[4\alpha n+C_2\Big]r^2+\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+4\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i+2\beta n+C_1\Big]r\\
&+\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_i}{r_i-r_j}+4\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2\beta\sum_{i=1}^{n}r_i+2\gamma n\Big]
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از روابط اثبات شده در (۱۹.۴) داریم

$$\begin{aligned}
&-C_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-C_0)_{r=r_i}}{r-r_i}=\Big[4\alpha n+C_2\Big]r^2+\Big[4\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i+2\beta n+C_1\Big]r\\
&+\Big[n(n-1)+4\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2\beta\sum_{i=1}^{n}r_i+2\gamma n\Big]
\end{aligned} \tag{50.5}$$

بنابراین ضرایب متغیرها و ثابت‌ها را متناظر قرار می‌دهیم

$$2\alpha(2n+1+2\gamma)+\beta^2+A_5=0 \tag{51.5}$$

$$4\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i+2\beta(n+\gamma)-4\alpha\lambda+A_4=0 \tag{52.5}$$

$$4\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2\beta\sum_{i=1}^{n}r_i+n(n-1+2\gamma)+\gamma^2-\gamma-2\beta\lambda+A_3=0 \tag{53.5}$$

همچنین معادلات آنساتز از صفر شدن مانده در معادله‌ی (۵۰.۵) به فرم زیر ایجاد می‌شوند

$$r_i^2 \sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{r_i - r_j} + 2(2\alpha r_i^3 + \beta r_i^2 + \gamma r_i - \lambda) = 0 \qquad (۵۴.۵)$$

برای مثال می‌دانیم تابع موج $\tilde{U}(r) = 1$ یک جواب معادله دیفرانسیل (۴۶.۵) است، که حاصل $n = 0$ می‌باشد و در اینصورت ویژه مقدار E تنها مجهول موجود خواهد بود که از روابط زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} &2\alpha(1+2\gamma) + \beta^2 + A_5 = 0 \\ &2\beta\gamma - 4\alpha\lambda + A_4 = 0 \\ &\gamma^2 - \gamma - 2\beta\lambda + A_3 = 0 \end{aligned}$$

نتایج فوق از روابط (۵۱.۵) تا (۵۴.۵) با $n = 0$ حاصل شده‌اند. که می‌توان از معادله دوم β را بدست آورد و در معادله اول قرار داد در اینصورت به دو معادله زیر کاهش پیدا می‌کنند

$$\begin{aligned} &2\alpha(1+2\gamma) + \left(\frac{-4\alpha\lambda + A_4}{2\gamma}\right)^2 + A_5 = 0 \\ &\gamma^2 - \gamma - 2\left(\frac{-4\alpha\lambda + A_4}{2\gamma}\right)\lambda + A_3 = 0 \end{aligned}$$

به‌طوریکه A_3، A_4 و A_5 در (۴۰.۵) تعریف شده‌اند و مجهول E در عبارت A_5 نهفته است.

همچنین در روابط (۵۱.۵) تا (۵۴.۵)، با قرار دادن $n = 1$ دو مجهول E و تنها گره‌ی r_1 وجود خواهند داشت

$$\begin{aligned} &2\alpha(3+2\gamma) + \beta^2 + A_5 = 0 \\ &4\alpha r_1 + 2\beta(1+\gamma) - 4\alpha\lambda + A_4 = 0 \\ &4\alpha r_1^2 + 2\beta r_1 + \gamma + \gamma^2 - 2\beta\lambda + A_3 = 0 \\ &2\alpha r_1^3 + \beta r_1^2 + \gamma r_1 - \lambda = 0 \end{aligned}$$

۳.۵ معادله شرودینگر در حضور پتانسیل کیلینگ بک در فضای فاز

معادله‌ی شرودینگر را در نظر بگیرید

$$H\psi = E\psi \qquad (۵۵.۵)$$

بطوریکه هامیلتونی آن در فضای فاز ناجابجایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}P^2 + V^{NC} \qquad (۵۶.۵)$$

که در فضای یکانی، $\hbar$ را مقدار یک در نظر می‌گیریم. عبارت H را در (۵۵.۵) قرار می‌دهیم

$$(\frac{P^{2}}{2m}+V^{NC})\psi=E\psi \tag{۵۷.۵}$$

با انتقال $\vec{P}\longrightarrow\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}$ بطوریکه $\vec{A}=\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2}$ باشد، معادله‌ی (۵۷.۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$[\frac{1}{2m}(P-\frac{e}{2c}B\times r)^{2}+V^{NC}]\psi=E\psi \tag{۵۸.۵}$$

اما در فضای فاز ناجابجایی، روابط زیر برقرار هستند

$$\begin{gathered}\vec{r}\longrightarrow\vec{r}\lambda-\frac{\vec{\theta}\times\vec{P}}{2\lambda}\,,\qquad\qquad \vec{P}\longrightarrow\vec{P}\lambda+\frac{\vec{\bar{\theta}}\times\vec{r}}{2\lambda}\\ [x^{i},x^{j}]=i\theta^{ij}\,,\qquad [P^{i},P^{j}]=i\bar{\theta}^{ij}\,,\qquad [x^{i},P^{i}]=i\delta^{ij}\end{gathered} \tag{۵۹.۵}$$

که λ اسکالر مقیاس و θ پارامتر فضای ناجابجایی است. θ^{ij} یک تنسور نامتقارن است که $\theta^{ij}=\theta\varepsilon^{ij}$ نماد لوی چی ویتا است. همچنین $\bar{\theta}^{ij}$یک تنسور نامتقارن است و $\bar{\theta}^{ij}=\bar{\theta}\varepsilon^{ij}$. بنابراین رابطه‌ی (۵۸.۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left\{\frac{\hbar^{2}}{2m}[P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda}-\frac{e}{2c}B\times(\lambda r+\frac{\theta\times P}{2\lambda})]^{2}+V^{NC}\right\}\psi(r)=E\psi(r) \tag{۶۰.۵}$$

در اینصورت

$$\begin{aligned}&[P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda}-\frac{e}{2c}B\times(\lambda r+\frac{\theta\times P}{2\lambda})]^{2}=[P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda}]^{2}\\ &+\frac{e^{2}}{4c^{2}}[B\times(\lambda r+\frac{\theta\times P}{2\lambda})]^{2}-\frac{e}{c}[P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda}].[B\times(\lambda r+\frac{\theta\times P}{2\lambda})]\end{aligned} \tag{۶۱.۵}$$

رابطه‌ی فوق را در معادله‌ی (۶۰.۵) جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{aligned}&\left\{(P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda})^{2}+\frac{e^{2}}{4c^{2}}\left[B\times(r\lambda+\frac{\theta\times P}{2\lambda})\right]^{2}\right.\\ &\left.-\frac{e}{c}(P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda})\left[B\times(r\lambda+\frac{\theta\times P}{2\lambda})\right]+2m(V^{NC}-E)\right\}\psi(r)=0\end{aligned} \tag{۶۲.۵}$$

به‌طوریکه

$$[P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda}]^{2}=[P\lambda-\frac{|\theta||r|\overbrace{\sin\alpha}^{1}}{2\lambda}]^{2}=P^{2}\lambda^{2}+\frac{\theta^{2}}{2\lambda}r^{2}-P\theta r \tag{۶۳.۵}$$

$$\begin{aligned}
&[B\times(\lambda r+\frac{\theta\times P}{2\lambda})]^{2}=[\lambda(B\times r)+\frac{B\times(\theta\times P)}{2\lambda}]^{2}\\
&=[\lambda\big(|B||r|\overbrace{\sin\beta}^{1}\big)+\frac{\theta.(B.P)-P.(B.\theta)}{2\lambda}]^{2}=[\lambda|B||r|+\frac{\theta|B||P|\overbrace{\cos\gamma}^{0}-P|B||\theta|\overbrace{\cos\xi}^{1}}{2\lambda}]^{2}\\
&=[\lambda|B||r|-\frac{P|B||\theta|}{2\lambda}]^{2}=\lambda^{2}B^{2}r^{2}+\frac{P^{2}B^{2}\theta^{2}}{4\lambda^{2}}-|B||r|P|B||\theta|=\lambda^{2}B^{2}r^{2}+\frac{P^{2}B^{2}\theta^{2}}{4\lambda^{2}}\\
&-PB^{2}\theta r
\end{aligned} \tag{۶۴.۵}$$

$$\begin{aligned}
&[P\lambda-\frac{\theta\times r}{2\lambda}].[B\times(\lambda r+\frac{\theta\times P}{2\lambda})]=[P\lambda-\frac{|\theta||r|}{2\lambda}]\,[\lambda|B||r|-\frac{P|B||\theta|}{2\lambda}]\\
&=P\lambda^{2}Br-\frac{P^{2}B\theta}{2}-\frac{\theta B}{2}r^{2}+\frac{PB\theta^{2}}{4\lambda}r
\end{aligned} \tag{۶۵.۵}$$

در نتیجه با استفاده از نتایج (۶۳.۵) در معادله‌ی (۶۲.۵) داریم

$$\begin{aligned}
&\Big\{P^{2}\lambda^{2}+\frac{\theta}{2\lambda}r^{2}-P\theta r+\frac{e^{2}}{4c^{2}}(\lambda^{2}B^{2}r^{2}+\frac{P^{2}B^{2}\theta^{2}}{4\lambda^{2}}-PB^{2}\theta r)\\
&-\frac{e}{c}(P\lambda^{2}Br-\frac{P^{2}B\theta}{2}-\frac{\theta B}{2}r^{2}+\frac{PB\theta^{2}}{4\lambda^{2}}r)+2m(V^{NC}-E)\Big\}\psi(r)=0
\end{aligned} \tag{۶۶.۵}$$

معادله‌ی فوق را مرتب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\Big\{(\lambda^{2}+\frac{e^{2}B^{2}\theta^{2}}{16c^{2}\lambda^{2}}+\frac{eB\theta}{2c})P^{2}+(\frac{\theta^{2}}{2\lambda}+\frac{e^{2}\lambda^{2}B^{2}}{4c^{2}}+\frac{e\theta B}{2c})r^{2}\\
&+(-P\theta-\frac{Pe^{2}B^{2}\theta}{4c^{2}}-\frac{eP\lambda^{2}B}{c}-\frac{ePB\theta^{2}}{4\lambda^{2}})r+2m(V^{NC}-E)\Big\}\psi(r)=0
\end{aligned} \tag{۶۷.۵}$$

بدون اینکه از بحث دور شویم، نام‌گذاری زیر را جهت سادگی روابط پیشنهاد می‌کنیم

$$\eta=\lambda^{2}+\frac{e^{2}B^{2}\theta^{2}}{16c^{2}\lambda^{2}}+\frac{eB\theta}{2c}$$

بنابراین با تقسیم طرفین معادله‌ی (۶۷.۵) بر η داریم

$$\begin{aligned}
&\Big\{P^{2}+(\frac{\theta^{2}}{2\lambda\eta}+\frac{e^{2}\lambda^{2}B^{2}}{4c^{2}\eta}+\frac{e\theta B}{2c\eta})r^{2}\\
&+(-P\theta-\frac{Pe^{2}B^{2}\theta}{4c^{2}\eta}-\frac{eP\lambda^{2}B}{c\eta}-\frac{ePB\theta^{2}}{4\lambda^{2}\eta})r+\frac{2m}{\eta}(V^{NC}-E)\Big\}\psi(r)=0
\end{aligned} \tag{۶۸.۵}$$

حال پتانسیل کیلینگ بک را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$V^{C}(r)=ar^{2}+br+\frac{c}{r}+\frac{d}{r^{2}} \tag{۶۹.۵}$$

از طرفی چون پتانسیل فقط وابسته به r است و به تکانه بستگی ندارد پس در فضای فاز ناجابجایی نیز پتانسیل همانند فضای ناجابجایی بخش قبل، مطرح می‌شود

$$V^{NC}(r) = V^{C}(r) + \frac{\theta \times P}{2}\nabla V^{c}(r) + O(\theta^{2}) \tag{۷۰.۵}$$

که از $O(\theta^{2})$ بدلیل اینکه مقدار بسیار کوچکی است صرفنظر می‌شود، از طرفی داریم

$$\frac{\theta \times P}{2} = \frac{r.(\theta \times P)}{2r} = \frac{\theta(P\times r)}{2r} = \frac{-\theta(r\times P)}{2r} = -\frac{\theta.L_z}{2r} = -\frac{L_z\theta}{2r} \tag{۷۱.۵}$$

بنابراین رابطه (۷۰.۵) تبدیل می‌شود به

$$V^{NC}(r) = V^{C}(r) - \frac{l_z\theta}{2r}\frac{\partial V^{C}}{\partial r} \tag{۷۲.۵}$$

پتانسیل تعریف شده در (۶۹.۵) را در رابطه‌ی فوق قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} V^{NC}(r) &= ar^{2} + br + \frac{c}{r} + \frac{d}{r^{2}} - \frac{l_z\theta}{2r}(2ar + b - \frac{c}{r^{2}} - \frac{2d}{r^{3}}) \\ &= ar^{2} + br + \frac{c}{r} + \frac{d}{r^{2}} - L_z\theta a - \frac{L_z\theta b}{2r} + \frac{L_z\theta c}{2r^{3}} + \frac{L_z\theta d}{r^{4}} \\ &= -L_z\theta a + br + ar^{2} + (c - \frac{L_z\theta b}{2})\frac{1}{r} + \frac{d}{r^{2}} + \frac{L_z\theta c}{2r^{3}} + \frac{L_z\theta d}{r^{4}} \end{aligned} \tag{۷۳.۵}$$

در اینصورت با جایگذاری پتانسیل فوق در رابطه (۶۸.۵) داریم

$$\begin{aligned} &\Big\{P^{2} + (\frac{\theta^{2}}{2\lambda\eta} + \frac{e^{2}\lambda^{2}B^{2}}{4c^{2}\eta} + \frac{e\theta B}{2c\eta})r^{2} - (\frac{P\theta}{\eta} + \frac{Pe^{2}B^{2}\theta}{4c^{2}\eta} + \frac{eP\lambda^{2}B}{c\eta} + \frac{ePB\theta^{2}}{4\lambda^{2}\eta})r \\ &+ \frac{2m}{\eta}(- L_z\theta a + br + ar^{2} + (c - \frac{L_z\theta b}{2})\frac{1}{r} + \frac{d}{r^{2}} + \frac{L_z\theta c}{2r^{3}} + \frac{L_z\theta d}{r^{4}} - E)\Big\}\psi(r) = 0 \end{aligned} \tag{۷۴.۵}$$

یا به‌عبارتی

$$\begin{aligned} &\Big\{P^{2} + (\frac{\theta^{2}}{2\lambda\eta} + \frac{e^{2}\lambda^{2}B^{2}}{4c^{2}\eta} + \frac{e\theta B}{2c\eta} + \frac{2ma}{\eta})r^{2} - (\frac{P\theta}{\eta} + \frac{Pe^{2}B^{2}\theta}{4c^{2}\eta} + \frac{eP\lambda^{2}B}{c\eta} \\ &+ \frac{ePB\theta^{2}}{4\lambda^{2}\eta} - \frac{2mb}{\eta})r + (\frac{2mc}{\eta} - \frac{mL_z\theta b}{\eta})\frac{1}{r} + \frac{2md}{\eta r^{2}} + \frac{mL_z\theta c}{\eta r^{3}} + \frac{2mL_z\theta d}{\eta r^{4}} \\ &- (\frac{2mL_z\theta a}{\eta} + E)\Big\}\psi(r) = 0 \end{aligned} \tag{۷۵.۵}$$

از طرفی در مورد تکانه روابط زیر را داریم

$$\begin{aligned} P &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial r} = -i\hbar\nabla \\ P^{2} &= -\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} = -\hbar^{2}\nabla^{2} \end{aligned} \tag{۷۶.۵}$$

اما چون سیستم را یکانی فرض کرده ایم پس $\hbar = 1$، بنابراین

$$P^2 = -\nabla \tag{۷۷.۵}$$

پس رابطه (۷۵.۵) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}&\Big\{\nabla^2 - \Big(\frac{\theta^2}{2\lambda\eta} + \frac{e^2\lambda^2B^2}{4c^2\eta} + \frac{e\theta B}{2c\eta} + \frac{2ma}{\eta}\Big)r^2 + \Big(\frac{P\theta}{\eta} + \frac{Pe^2B^2\theta}{4c^2\eta} + \frac{eP\lambda^2B}{c\eta}\\ &+ \frac{ePB\theta^2}{4\lambda^2\eta} - \frac{2mb}{\eta}\Big)r - \Big(\frac{2mc}{\eta} - \frac{mL_z\theta b}{\eta}\Big)\frac{1}{r} - \frac{2md}{\eta r^2} - \frac{mL_z\theta c}{\eta r^3} - \frac{2mL_z\theta d}{\eta r^4}\\ &+ \Big(\frac{2mL_z\theta a}{\eta} + E\Big)\Big\}\psi(r) = 0\end{aligned} \tag{۷۸.۵}$$

از طرفی در مختصات استوانه‌ای داریم

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2} \tag{۷۹.۵}$$

با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۷۸.۵) داریم

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2} - \Big(\frac{\theta^2}{2\lambda\eta} + \frac{e^2\lambda^2B^2}{4c^2\eta} + \frac{e\theta B}{2c\eta} + \frac{2ma}{\eta}\Big)r^2\\ &+ \Big(\frac{P\theta}{\eta} + \frac{Pe^2B^2\theta}{4c^2\eta} + \frac{eP\lambda^2B}{c\eta} + \frac{ePB\theta^2}{4\lambda^2\eta} - \frac{2mb}{\eta}\Big)r - \Big(\frac{2mc}{\eta} - \frac{mL_z\theta b}{\eta}\Big)\frac{1}{r}\\ &- \frac{2md}{\eta r^2} - \frac{mL_z\theta c}{\eta r^3} - \frac{2mL_z\theta d}{\eta r^4} + \Big(\frac{2mL_z\theta a}{\eta} + E\Big)\Big\}\psi(r) = 0\end{aligned} \tag{۸۰.۵}$$

برای حل این معادله از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم

$$\psi(r) = e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U(r) \tag{۸۱.۵}$$

که به ترتیب مشتق اول و دوم تبدیل فوق نسبت به r و φ بصورت زیر است

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\psi(r) &= e^{il\varphi}\Big(-\frac{1}{2}\Big)r^{-\frac{3}{2}}U(r) + e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U'(r)\\ \frac{d^2}{dr^2}\psi(r) &= e^{il\varphi}\Big(\frac{3}{4}\Big)r^{-\frac{5}{2}}U(r) + 2e^{il\varphi}\Big(-\frac{1}{2}\Big)r^{-\frac{3}{2}}U'(r) + e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U''(r)\\ \frac{d}{d\varphi}\psi(r) &= ile^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U(r)\\ \frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(r) &= -l^2e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}U(r)\end{aligned} \tag{۸۲.۵}$$

حال با جایگذاری روابط فوق در معادله (۸۰.۵) داریم

$$\begin{aligned}&e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}\Big\{\frac{3}{4}r^{-2} - r^{-1}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\Big(-\frac{1}{2}r^{-1} + \frac{d}{dr}\Big) - l^2\frac{1}{r^2} - \Big(\frac{\theta^2}{2\lambda\eta} + \frac{e^2\lambda^2B^2}{4c^2\eta}\\ &+ \frac{e\theta B}{2c\eta} + \frac{2ma}{\eta}\Big)r^2 + \Big(\frac{P\theta}{\eta} + \frac{Pe^2B^2\theta}{4c^2\eta} + \frac{eP\lambda^2B}{c\eta} + \frac{ePB\theta^2}{4\lambda^2\eta} - \frac{2mb}{\eta}\Big)r - \Big(\frac{2mc}{\eta}\\ &- \frac{mL_z\theta b}{\eta}\Big)\frac{1}{r} - \frac{2md}{\eta r^2} - \frac{mL_z\theta c}{\eta r^3} - \frac{2mL_z\theta d}{\eta r^4} + \Big(\frac{2mL_z\theta a}{\eta} + E\Big)\Big\}U(r) = 0\end{aligned} \tag{۸۳.۵}$$

پس از تقسیم طرفین معادله‌ی فوق بر عبارت $e^{il\varphi}r^{-\frac{1}{2}}$ و مرتب کردن روابط بالا داریم

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}-(\frac{\theta^2}{2\lambda\eta}+\frac{e^2\lambda^2B^2}{4c^2\eta}+\frac{e\theta B}{2c\eta}+\frac{2ma}{\eta})r^2+(\frac{P\theta}{\eta}+\frac{Pe^2B^2\theta}{4c^2\eta}+\frac{eP\lambda^2B}{c\eta} \\ +\frac{ePB\theta^2}{4\lambda^2\eta}-\frac{2mb}{\eta})r-(\frac{2mc}{\eta}-\frac{mL_z\theta b}{\eta})\frac{1}{r}-(\frac{2md}{\eta}+\frac{1}{4}-l^2)\frac{1}{r^2} \\ -\frac{mL_z\theta c}{\eta r^3}-\frac{2mL_z\theta d}{\eta r^4}+(\frac{2mL_z\theta a}{\eta}+E)\Big\}\psi(r)=0 \tag{۸۴.۵}$$

در نهایت به فرم معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+A_0+A_1r+A_2r^2+\frac{A_3}{r}+\frac{A_4}{r^2}+\frac{A_5}{r^3}+\frac{A_6}{r^4}\Big\}U(r)=0 \tag{۸۵.۵}$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}
A_0&=\frac{2mL_z\theta a}{\eta}+E\\
A_1&=\frac{P\theta}{\eta}+\frac{Pe^2B^2\theta}{4c^2\eta}+\frac{eP\lambda^2B}{c\eta}+\frac{ePB\theta^2}{4\lambda^2\eta}-\frac{2mb}{\eta}\\
A_2&=\frac{\theta^2}{2\lambda\eta}+\frac{e^2\lambda^2B^2}{4c^2\eta}+\frac{e\theta B}{2c\eta}+\frac{2ma}{\eta}\\
A_3&=-(\frac{2mc}{\eta}-\frac{mL_z\theta b}{\eta})\\
A_4&=-(\frac{2md}{\eta}+\frac{1}{4}-l^2)\\
A_5&=-\frac{mL_z\theta c}{\eta}\\
A_6&=-\frac{2mL_z\theta d}{\eta}
\end{aligned} \tag{۸۶.۵}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم (۸۵.۵) مشابه معادله دیفرانسیل (۳۹.۵) در بخش قبل است که این معادله را به روش آنساتز حل کرده‌ایم.

۴.۵ معادله‌ی شرودینگر در حضور پتانسیل پوش-تلر

معادله‌ی شرودینگر را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$\Big\{-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\Big\}\psi(x)=E\psi(x) \tag{۸۷.۵}$$

با پتانسیل پوش-تلر که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$V(x)=A\,sech^2\alpha x+B\,cosch^2\alpha x\,, \tag{۸۸.۵}$$

می‌دانیم روابط مثلثاتی زیر همواره برقرار است

$$sech\,\alpha x = \frac{1}{cosh\,\alpha x}\,, \qquad cosch\,\alpha x = \frac{1}{sinh\,\alpha x}$$

در اینصورت پتانسیل تبدیل می‌شود به

$$V(x) = \frac{A}{ch^2\,\alpha x} + \frac{B}{sh^2\,\alpha x} = \frac{A\,sh^2\,\alpha x + B\,ch^2\,\alpha x}{ch^2\,\alpha x\,.\,sh^2\,\alpha x} \tag{۸۹.۵}$$

که برای راحتی کار، نام‌گذاری زیر را انجام دادیم

$$cosh := ch \qquad \text{و} \qquad sinh := sh$$

حال برای حل معادله‌دیفرانسیل شرودینگر (۸۷.۵)، از تبدیل زیر کمک می‌گیریم

$$\psi(x) = \big(ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x\big)^{-\frac{3}{2}}\phi(x) \tag{۹۰.۵}$$

با فرض

$$U(x) = ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x \tag{۹۱.۵}$$

روابط زیر را داریم

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi(x)}{dx} &= -\frac{3}{2}U^{-\frac{5}{2}}(x)U'(x)\phi(x) + U^{-\frac{3}{2}}(x)\phi'(x)\\
\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= \frac{15}{4}U^{-\frac{7}{2}}(x)U'^2(x)\phi(x) - \frac{3}{2}U^{-\frac{5}{2}}(x)U''(x)\phi(x) - \frac{3}{2}U^{-\frac{5}{2}}(x)U'(x)\phi'(x)\\
&\quad - \frac{3}{2}U^{-\frac{5}{2}}(x)U'(x)\phi'(x) + U^{-\frac{3}{2}}(x)\phi''(x)
\end{aligned}$$

پس با جایگذاری در معادله دیفرانسیل (۸۷.۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
U^{-\frac{3}{2}}(x)\Big\{\frac{15}{4}U^{-2}(x)U'^2(x) - \frac{3}{2}U^{-1}(x)U''(x) - \frac{3}{2}U^{-1}(x)U'(x)\frac{d}{dx} - \frac{3}{2}U^{-1}(x)U'(x)\frac{d}{dx}\\
+ \frac{d^2}{dx^2} - V(x) + E\Big\}\phi(x) = 0
\end{aligned}$$

معادله‌ی فوق را ساده می‌کنیم

$$\Big\{\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{U'}{U}\frac{d}{dx} + \frac{15}{4}\frac{U'^2}{U^2} - \frac{3}{2}\frac{U''}{U} - V(x) + E\Big\}\phi(x) = 0 \tag{۹۲.۵}$$

به‌طوریکه با توجه به (۹۱.۵) روابط زیر را داریم

$$\begin{aligned}
U'(x) &= \alpha\,sh^2\,\alpha x + \alpha\,ch^2\,\alpha\\
U''(x) &= 2\alpha\,sh\,\alpha x\,.\,ch\,\alpha x + 2\alpha\,ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x = 4\alpha\,ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x
\end{aligned}$$

بنابراین نتایج فوق را در معادله دیفرانسیل (۹۲.۵) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{d^۲}{dx^۲}-۳\alpha\frac{sh^۲\,\alpha x+ch^۲\,\alpha x}{ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x}\frac{d}{dx}+\frac{۱۵}{۴}\alpha^۲\frac{(sh^۲\,\alpha x+ch^۲\,\alpha x)^۲}{(ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x)^۲}\right.\\&\left.-\frac{۳}{۲}۴\alpha\frac{ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x}{sh\,\alpha x\,.\,ch\,\alpha x}-\frac{A\,sh^۲\,\alpha x+B\,ch^۲\,\alpha x}{ch^۲\,\alpha x\,.\,sh^۲\,\alpha x}+E\right\}\phi(x)=۰\end{aligned}$$

پس از ساده کردن معادله‌ی بالا داریم

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{d^۲}{dx^۲}-۳\alpha\frac{sh^۲\,\alpha x+ch^۲\,\alpha x}{ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x}\frac{d}{dx}+\frac{۱۵}{۴}\alpha^۲\frac{(sh^۲\,\alpha x+ch^۲\,\alpha x)^۲}{(ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x)^۲}\right.\\&\left.-\frac{A\,sh^۲\,\alpha x+B\,ch^۲\,\alpha x}{(ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x)^۲}+E-۶\alpha\right\}\phi(x)=۰\end{aligned}\qquad(۹۳.۵)$$

برای حل این معادله، تغییر متغیر $z=ch^۲\,\alpha x$ را اعمال می‌کنیم که روابط زیر برای آن برقرار است

$$\begin{aligned}&ch^۲\,\alpha x-sh^۲\,\alpha x=۱\\&sh^۲\,\alpha x=z-۱\end{aligned}$$

با اعمال این تغییرمتغیر بر تابع‌موج ϕ داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(x)}{dx}&=\frac{d\phi(x)}{dz}\,.\,\frac{dz}{dx}=\frac{d\phi(x)}{dz}\,.\,۲\alpha\,ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x=۲\alpha\sqrt{z}\,\sqrt{z-۱}\,\frac{d\phi(x)}{dz}\\\frac{d^۲\phi(x)}{dx^۲}&=\left(۲\alpha\sqrt{z}\,\sqrt{z-۱}\,\frac{d\phi(x)}{dz}\right)\left(۲\alpha\sqrt{z}\,\sqrt{z-۱}\,\frac{d\phi(x)}{dz}\right)\\&=۲\alpha\sqrt{z}\,\sqrt{z-۱}\left(\frac{۲\alpha\sqrt{z-۱}}{۲\sqrt{z}}\frac{d\phi(x)}{dz}+\frac{۲\alpha\sqrt{z}}{۲\sqrt{z-۱}}\frac{d\phi(x)}{dz}+۲\alpha\sqrt{z}\sqrt{z-۱}\frac{d^۲\phi(x)}{dz^۲}\right)\\&=۲\alpha^۲(z-۱)\frac{d\phi(x)}{dz}+۲\alpha^۲z\frac{d\phi(x)}{dz}+۴\alpha^۲z(z-۱)\frac{d^۲\phi(x)}{dz^۲}\end{aligned}$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل (۹۳.۵) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}&\left\{۲\alpha^۲(z-۱)\frac{d}{dz}+۲\alpha^۲z\frac{d}{dz}+۴\alpha^۲z(z-۱)\frac{d^۲}{dz^۲}-۳\alpha\frac{\overbrace{sh^۲\,\alpha x}^{z-۱}+\overbrace{ch^۲\,\alpha x}^{z}}{\underbrace{ch\,\alpha x\,.\,sh\,\alpha x}_{\sqrt{z}\sqrt{z-۱}}}\right.\\&\left.\times\;۲\alpha\sqrt{z}\sqrt{z-۱}\frac{d}{dz}+\frac{۱۵}{۴}\alpha^۲\frac{(z+z-۱)^۲}{(\sqrt{z}\,\sqrt{z-۱})^۲}-\frac{A(z-۱)+Bz}{(\sqrt{z}\sqrt{z-۱})^۲}+E-۶\alpha\right\}\phi(x)=۰\end{aligned}$$

پس از ساده کردن معادله‌ی بالا داریم

$$\begin{aligned}&\left\{۴\alpha^۲z(z-۱)\frac{d^۲}{dz^۲}+\left[۲\alpha^۲(z-۱)+۲\alpha^۲z-۶\alpha^۲(۲z-۱)\right]\frac{d}{dz}\right.\\&\left.+\frac{۱۵}{۴}\alpha^۲\frac{(۲z-۱)^۲}{z(z-۱)}-\frac{A(z-۱)+Bz}{z(z-۱)}+E-۶\alpha\right\}\phi(x)=۰\end{aligned}$$

طرفین معادله را در عبارت $z(z-1)$ ضرب می‌کنیم

$$\Big\{4\alpha^2 z^2(z-1)^2\frac{d^2}{dz^2}+\left[2\alpha^2 z(z-1)^2+2\alpha^2 z^2(z-1)-6\alpha^2(2z-1)z(z-1)\right]\frac{d}{dz}$$
$$+\frac{15}{4}\alpha^2(2z-1)^2-A(z-1)+Bz+(E-6\alpha)z(z-1)\Big\}\phi(x)=0$$

یا به‌عبارتی داریم

$$\Big\{4\alpha^2(z^4-2z^3+z^2)\frac{d^2}{dz^2}+\left[2\alpha^2(z^3-2z^2+z)+2\alpha^2(z^3-z^2)-6\alpha^2(2z^3-3z^2\right.$$
$$\left.+z)\right]\frac{d}{dz}+\frac{15}{4}\alpha^2(4z^2-2z+1)-A(z-1)+Bz+(E-6\alpha)(z^2-z)\Big\}\phi(x)=0$$

طرفین معادله را بر عبارت 4α تقسیم می‌کنیم

$$\Big\{\left[z^4-2z^3+z^2\right]\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{4\alpha^2}\left[(2\alpha^2+2\alpha^2-6\alpha)z^3+(-4\alpha^2-2\alpha^2+9\alpha)z^2\right.$$
$$\left.+(2\alpha^2-3\alpha)z\right]\frac{d}{dz}+\frac{1}{4\alpha^2}(15\alpha^2+E-6\alpha)z^2+\frac{1}{4\alpha^2}(-A+B-(E-6\alpha)$$
$$-\frac{15}{2}\alpha^2)z+\frac{1}{4\alpha^2}(\frac{15}{4}\alpha^2+A)\Big\}\phi(x)=0 \qquad (94.5)$$

بدون کم شدن کلیتی از بحث، نام‌گذاری زیر را انجام می‌دهیم

$$\begin{aligned}
A_3&=2\alpha^2+2\alpha^2-6\alpha\\
A_2&=-4\alpha^2-2\alpha^2+9\alpha\\
A_1&=2\alpha^2-3\alpha\\
c_2&=\frac{1}{4\alpha^2}(15\alpha^2+E-6\alpha)\\
c_1&=\frac{1}{4\alpha^2}(-A+B-(E-6\alpha)-\frac{15}{2}\alpha^2)\\
c_0&=\frac{1}{4\alpha^2}(\frac{15}{4}\alpha^2+A)
\end{aligned}$$

که باعث می‌شود معادله دیفرانسیل (۹۴.۵) به شکل زیر تبدیل شود

$$\Big\{\left[z^4-2z^3+z^2\right]\frac{d^2}{dz^2}+\left[A_3z^3+A_2z^2+A_1z\right]\frac{d}{dz}+c_2z^2+c_1z+c_0\Big\}\phi(x)=0 \qquad (95.5)$$

فرض کنید $\phi=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$ جواب معادله‌ی فوق باشد

$$\left[z^4-2z^3+z^2\right]\frac{\frac{d^2}{dz^2}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}+\left[A_3z^3+A_2z^2+A_1z\right]\frac{\frac{d}{dz}\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}$$
$$+c_2z^2+c_1z+c_0=0$$

با استفاده از روابط اثبات شده‌ی (۱۵.۴) و (۱۶.۴) داریم

$$\left[z^4-2z^3+z^2\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+\left[A_3z^3+A_2z^2+A_1z\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}$$
$$+c_2z^2+c_1z=-c_0 \qquad (۹۶.۵)$$

توجه کنید که رابطه‌ی فوق، تابعی تحلیلی دارای قطب $z=z_i$ است که می‌توان با استفاده از حساب مانده‌ها، مانده‌ی $(-c_0)$ را در قطب آن محاسبه کرد پس

$$Res(-c_0)_{z=z_i}=\left[z^4-2z^3+z^2\right]\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+A_3z^3+A_2z^2+A_1z \qquad (۹۷.۵)$$

همچنین داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{z=z_i}}{z-z_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left[z^4-2z^3+z^2\right]}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_3z^3+A_2z^2+A_1z}{z-z_i} \qquad (۹۸.۵)$$

در اینصورت از تفاضل رابطه‌ی (۹۶.۵) و (۹۸.۵) رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{z=z_i}}{z-z_i}=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{z^4-z_i^4}{z-z_i}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{z^3-z_i^3}{z-z_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{z^2-z_i^2}{z-z_i}\right]\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}$$
$$+A_3\sum_{i=1}^{n}\frac{z^3-z_i^3}{z-z_i}+A_3\sum_{i=1}^{n}\frac{z^2-z_i^2}{z-z_i}+A_1\sum_{i=1}^{n}\frac{z-z_i}{z-z_i}+c_2z^2+c_1z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z^3}{z_i-z_j}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_i}{z_i-z_j}z^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_i^2}{z_i-z_j}z+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_i^3}{z_i-z_j}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{4z^2}{z_i-z_j}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{4z_i}{z_i-z_j}z-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{4z_i^2}{z_i-z_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z}{z_i-z_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2z_i}{z_i-z_j}$$
$$+A_3nz^2+A_3\sum_{i=1}^{n}z_iz+A_3\sum_{i=1}^{n}z_i^2+A_2nz+Z_2\sum_{i=1}^{n}z_i+A_1n+c_2z^2+c_1z$$

پس از مرتب کردن روابط فوق و با استفاده از روابط (۲۳.۴) خواهیم داشت

$$-c_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{Res(-c_0)_{z=z_i}}{z-z_i}+\big(n(n-1)+A_3n+c_2\big)z^2+\big(2(n-1)\sum_{i=1}^{n}z_i-2n(n-1)$$
$$+A_3\sum_{i=1}^{n}z_i+A_2n+c_1\big)z+\big(2(n-1)\sum_{i=1}^{n}z_i^2+2\sum_{j<i}^{n}z_iz_j-4(n-1)\sum_{i=1}^{n}z_i+n(n-1)$$
$$+A_3\sum_{i=1}^{n}z_i^2+A_2\sum_{i=1}^{n}z_i+A_1n\big)$$

توجه کنید که تساوی فوق در صورتی برقرار است که ضرایب متغیرها و ثابت‌ها در طرفین برابر باشند، بنابراین ضرایب را متناظر قرار می‌دهیم

$$n(n-1)+A_3 n+c_2=0 \tag{۹۹.۵}$$

$$2(n-1)\sum_{i=1}^{n} z_i-2n(n-1)+A_3\sum_{i=1}^{n} z_i+A_2 n+c_1=0 \tag{۱۰۰.۵}$$

$$-c_0=2(n-1)\sum_{i=1}^{n} z_i^2+2\sum_{j<i} z_i z_j-4(n-1)\sum_{i=1}^{n} z_i+n(n-1)+A_3\sum_{i=1}^{n} z_i^2$$
$$+A_2\sum_{i=1}^{n} z_i+A_1 n \tag{۱۰۱.۵}$$

و با صفر قرار دادن مانده در نقطه‌ی $z=z_i$، معادلات آنساتز به‌صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\left[z^4-2z^3+z^2\right]\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+A_3 z^3+A_2 z^2+A_1 z=0 \tag{۱۰۲.۵}$$

می‌دانیم $\phi=1$ یک جواب بدیهی برای معادله دیفرانسیل (۹۵.۵) می‌باشد، که این تابع موج از درجه‌ی $n=0$ حاصل می‌شود در نتیجه در روابط (۹۹.۵) تا (۱۰۲.۵) با فرض $n=0$ خواهیم داشت

$$E=6\alpha-15\alpha^2$$
$$B-A+\frac{15}{2}\alpha^2=0$$
$$\frac{15}{4}\alpha^2+A=0$$

که در اینصورت ویژه‌مقدار E و قیدهایی برای پارامترهای A و B حاصل می‌شود. اما در صورتیکه $n=1$ فرض شود با دو مجهول ویژه‌مقدار E و ریشه‌ی z_1 برخورد می‌کنیم که از روابط (۹۹.۵) تا (۱۰۲.۵) با فرض $n=1$ حاصل می‌شوند

$$E=6\alpha-(4A_3+15)\alpha^2$$
$$A_3 z_1+A_2=-\frac{1}{4\alpha^2}\left(-A+B+(4A_3+\frac{15}{2})\alpha^2\right)$$
$$\frac{15}{4}\alpha^2+A=0$$

۵.۵ معادله‌ی کلاین-گوردون در حضور پتانسیل کیلینگ بک

معادله‌ی کلاین-گوردون را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\left[E_{n,l}-V(r)\right]^2-\left[M+S(r)\right]^2\right\}U_{n,l}(r)=0 \tag{۱۰۳.۵}$$

در حضور پتانسیل برداری و اسکالر زیر که به پتانسیل کیلینگ بک معروف است

$$\begin{aligned} V(r) &= ar^2 + br + c + \frac{d}{r} + \frac{f}{r^2} \\ S(r) &= a'r^2 + b'r + c' + \frac{d'}{r} + \frac{f'}{r^2} \end{aligned} \tag{۱۰۴.۵}$$

عبارات زیر را برای جایگذاری پتانسیل فوق در معادله دیفرانسیل (۱۰۳.۵) محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} &\big(E_{n,l} - V(r)\big)^2 = E_{n,l}^2 + V^2 - 2E_{n,l}.V = E_{n,l}^2 + (ar^2 + br + c + \frac{d}{r} + \frac{f}{r^2})^2 \\ &- 2E_{n,l}(ar^2 + br + c + \frac{d}{r} + \frac{f}{r^2}) = a^2r^4 + 2abr^3 + (b^2 + 2ac - 2aE_{n,l})r^2 \\ &+ (2ad + 2bc - 2bE_{n,l})r + (E_{n,l}^2 + c^2 + 2af + 2bd - 2cE_{n,l}) \\ &+ (2cd + 2bf - 2dE_{n,l})r^{-1} + (d^2 + 2cf - 2fE_{n,l})r^{-2} + 2dfr^{-3} + f^2r^{-4} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &\big(M + S(r)\big)^2 = M^2 + S^2 + 2M.S = M^2 + (a'r^2 + b'r + c' + \frac{d'}{r} + \frac{f'}{r^2})^2 \\ &+ 2M(a'r^2 + b'r + c + \frac{d'}{r} + \frac{f'}{r^2}) = a'^2r^4 + 2a'b'r^3 + (b'^2 + 2a'c' + 2a'M)r^2 \\ &+ (2a'd' + 2b'c' + 2b'M)r + (M^2 + c'^2 + 2a'f' + 2b'd' + 2c'M) \\ &+ (2c'd' + 2b'f' + 2d'M)r^{-1} + (d'^2 + 2c'f' + 2f'M)r^{-2} + 2d'f'r^{-3} + f'^2r^{-4} \end{aligned}$$

با جایگذاری نتایج فوق در معادله دیفرانسیل (۱۰۳.۵) و تفکیک نسبت به توان r خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &\Big\{\frac{d^2}{dr^2} + [a^2 - a'^2]r^4 + [2ab - 2a'b']r^3 + [b^2 + 2ac - 2Ea - b'^2 - 2a'c' - 2Ma']r^2 \\ &+ [2ad + 2bc - 2Eb - 2a'd' - 2b'c' - 2Mb']r + [E^2 - M^2 + c^2 - c'^2 + 2af - 2a'f' \\ &+ 2bd - 2b'd' - 2Ec - 2Mc'] + [2cd + 2bf - 2Ed - 2c'd' - 2b'f' - 2Md']r^{-1} \\ &+ [d^2 + 2cf - 2Ef - d'^2 - 2c'f' - 2Mf' - l(l+1)]r^{-2} + [2df - 2d'f']r^{-3} \\ &+ [f^2 - f'^2]r^{-4}\Big\}U_{n,l}(r) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین معادله اصلی تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} &HU_{n,l}(r) = 0 \quad ; \\ &H = \frac{d^2}{dr^2} + A_4r^4 + A_3r^3 + A_2r^2 + A_1r + A_0 + A_{-1}r^{-1} + A_{-2}r^{-2} + A_{-3}r^{-3} + A_{-4}r^{-4} \end{aligned} \tag{۱۰۵.۵}$$

به‌طوریکه

$$
\begin{aligned}
&A_{-4} = f^2 - f'^2\\
&A_{-3} = 2df - 2d'f'\\
&A_{-2} = d^2 + 2cf - 2Ef - d'^2 - 2c'f' - 2Mf' - l(l+1)\\
&A_{-1} = 2cd + 2bf - 2Ed - 2c'd' - 2b'f' - 2Md'\\
&A_0 = E^2 - M^2 + c^2 - c'^2 + 2af - 2a'f' + 2bd - 2b'd' - 2Ec - 2Mc'\\
&A_4 = a^2 - a'^2\\
&A_3 = 2ab - 2a'b'\\
&A_2 = b^2 + 2ac - 2Ea - b'^2 - 2a'c' - 2Ma'\\
&A_1 = 2ad + 2bc - 2Eb - 2a'd' - 2b'c' - 2Mb'
\end{aligned}
$$

تابع تبدیل زیر را استفاده می‌کنیم

$$
U_{n,l}(r) = e^{g(r)}\tilde{U}(r) \quad ; \quad g(r) = \alpha r^3 + \beta r^2 + \gamma r + \lambda \log r + \frac{\xi}{r} \tag{۱۰۶.۵}
$$

در اینصورت برای استفاده در معادله دیفرانسیل (۱۰۵.۵)، نیاز به مشتق دوم تابع فوق داریم، پس

$$
\begin{aligned}
&U_{n,l}(r) = e^{g(r)}\tilde{U}(r)\\
&\frac{d}{dr}U_{n,l}(r) = g'(r)e^{g(r)}\tilde{U}(r) + e^{g(r)}\tilde{U}'(r)\\
&\frac{d^2}{dr^2}U_{n,l}(r) = g''(r)e^{g(r)}\tilde{U}(r) + g'(r)^2 e^{g(r)}\tilde{U}(r) + 2g'(r)e^{g(r)}\tilde{U}'(r) + e^{g(r)}\tilde{U}''(r)
\end{aligned}
\tag{۱۰۷.۵}
$$

با به‌کارگیری روابط (۱۰۷.۵) در معادله دیفرانسیل (۱۰۵.۵)، و فاکتورگیری از عبارت $e^{g(r)}$ داریم

$$
\begin{aligned}
e^{g(r)}\Big\{ & g''(r) + g'(r)^2 + 2g'(r)\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} + A_4 r^4 + A_3 r^3\\
& + A_2 r^2 + A_1 r + A_0 + A_{-1} r^{-1} + A_{-2} r^{-2} + A_{-3} r^{-3} + A_{-4} r^{-4}\Big\}\tilde{U}(r) = 0
\end{aligned}
$$

پس از مرتب‌سازی معادله‌ی فوق خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
\Big\{ & \frac{d^2}{dr^2} + 2g'(r)\frac{d}{dr} + g''(r) + g'(r)^2 + A_4 r^4 + A_3 r^3 + A_2 r^2 + A_1 r + A_0 + A_{-1} r^{-1}\\
& + A_{-2} r^{-2} + A_{-3} r^{-3} + A_{-4} r^{-4}\Big\}\tilde{U}(r) = 0
\end{aligned}
\tag{۱۰۸.۵}
$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی (۱۰۶.۵) داریم

$$
\begin{aligned}
g'(r) &= 3\alpha r^2 + 2\beta r + \gamma + \frac{\lambda}{r} - \frac{\xi}{r^2} \\
g''(r) &= 6\alpha r + 2\beta - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{2\xi}{r^3} \\
g'^2(r) &= \left(\left[3\alpha r^2 + 2\beta r\right] + \left[\gamma + \frac{\lambda}{r} - \frac{\xi}{r^2}\right]\right)^2 \\
&= \left(3\alpha r^2 + 2\beta r\right)^2 + \left(\gamma + \frac{\lambda}{r} - \frac{\xi}{r^2}\right)^2 + 2\left(3\alpha r^2 + 2\beta r\right)\left(\gamma + \frac{\lambda}{r} - \frac{\xi}{r^2}\right) \\
&= 9\alpha^2 r^4 + 12\alpha\beta r^3 + \left(4\beta^2 + 6\alpha\gamma\right) r^2 + \left(6\alpha\lambda + 4\beta\gamma\right) r + \left(\gamma^2 - 6\alpha\xi + 4\beta\lambda\right) \\
&+ \left(2\gamma\lambda - 4\beta\xi\right) r^{-1} + \left(\lambda^2 - 2\gamma\xi\right) r^{-2} - 2\lambda\xi r^{-3} + \xi^2 r^{-4}
\end{aligned} \tag{109.5}
$$

پس با به‌کارگیری روابط (۱۰۹.۵) در معادله دیفرانسیل (۱۰۸.۵)

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^2}{dr^2} + 2\left(3\alpha r^2 + 2\beta r + \gamma + \frac{\lambda}{r} - \frac{\xi}{r^2}\right)\frac{d}{dr} + 6\alpha r + 2\beta - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{2\xi}{r^3}\right. \\
&+ 9\alpha^2 r^4 + 12\alpha\beta r^3 + \left(4\beta^2 + 6\alpha\gamma\right) r^2 + \left(6\alpha\lambda + 4\beta\gamma\right) r + \left(\gamma^2 - 6\alpha\xi + 4\beta\lambda\right) \\
&+ \left(2\gamma\lambda - 4\beta\xi\right) r^{-1} + \left(\lambda^2 - 2\gamma\xi\right) r^{-2} - 2\lambda\xi r^{-3} + \xi^2 r^{-4} + A_4 r^4 + A_3 r^3 \\
&\left. + A_2 r^2 + A_1 r + A_0 + A_{-1} r^{-1} + A_{-2} r^{-2} + A_{-3} r^{-3} + A_{-4} r^{-4}\right\}\tilde{U}(r) = 0
\end{aligned}
$$

در نتیجه پس از مرتب‌سازی معادله‌ی زیر حاصل می‌شود

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{d^2}{dr^2} + 2\left[3\alpha r^2 + 2\beta r + \gamma + \lambda r^{-1} - \xi r^{-2}\right]\frac{d}{dr} + \left[9\alpha^2 + A_4\right] r^4\right. \\
&+ \left[12\alpha\beta + A_3\right] r^3 + \left[4\beta^2 + 6\alpha\gamma + A_2\right] r^2 + \left[6\alpha + 6\alpha\lambda + 4\beta\gamma + A_1\right] r \\
&+ \left[2\beta + \gamma^2 - 6\alpha\xi + 4\beta\lambda + A_0\right] + \left[2\gamma\lambda - 4\beta\xi + A_{-1}\right] r^{-1} \\
&\left. + \left[-\lambda^2 - 2\gamma\xi + A_{-2}\right] r^{-2} + \left[2\xi - 2\lambda\xi + A_{-3}\right] r^{-3} + \left[\xi^2 + A_{-4}\right] r^{-4}\right\}\tilde{U}(r) = 0
\end{aligned} \tag{110.5}
$$

برای اینکه معادله‌ی فوق را به روش بث آنساتز حل کنیم، ابتدا ۵مجهول$(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \xi)$ را می‌یابیم، به اینصورت که برای یافتن α، ضریب r^4 را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$
\alpha = \pm\frac{\sqrt{-A_4}}{3} \tag{111.5}
$$

و از صفر شدن ضریب r^3، مقدار β بدست می‌آید

$$
\beta = \frac{-A_3}{12\alpha}
$$

با قرار دادن α از (۱۱۱.۵) داریم

$$\beta = \mp\frac{A_{۳}}{۴\sqrt{-A_{۴}}} \tag{۱۱۲.۵}$$

همچنین با صفر کردن ضریب $r^{۲}$، مقدار γ حاصل می‌شود

$$\gamma = \frac{-A_{۲} - ۴\beta^{۲}}{۶\alpha}$$

با قرار دادن مقدار α و β از (۱۱۱.۵) و (۱۱۲.۵) داریم

$$\gamma = \pm\frac{A_{۳}^{۲} - ۴A_{۲}A_{۴}}{۸A_{۴}\sqrt{-A_{۴}}} \tag{۱۱۳.۵}$$

اما ξ از صفر کردن ضریب $r^{-۴}$ بدست می‌آید

$$\xi = \pm\sqrt{-A_{-۴}} \tag{۱۱۴.۵}$$

مقدار λ نیز از صفر شدن $r^{-۳}$ نتیجه می‌شود

$$\lambda = \frac{-A_{-۳} - ۲\xi}{-۲\xi}$$

در اینصورت با قرار دادن مقدار ξ از (۱۱۴.۵) داریم

$$\lambda = \pm\frac{A_{۳}}{۲\sqrt{-A_{-۴}}} + ۱ \tag{۱۱۵.۵}$$

در اینصورت معادله دیفرانسیل (۱۱۰.۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}
&\Big\{\frac{d^{۲}}{dr^{۲}} + ۲\big[۳\alpha r^{۲} + ۲\beta r + \gamma + \lambda r^{-۱} - \xi r^{-۲}\big]\frac{d}{dr} + \big[۶\alpha + ۶\alpha\lambda + ۴\beta\gamma + A_{۱}\big]r \\
&+ \big[۴\beta\lambda + ۲\beta + \gamma^{۲} - ۶\alpha\xi + A_{۰}\big] + \big[۲\gamma\lambda - ۴\beta\xi + A_{-۱}\big]r^{-۱} \\
&+ \big[\lambda(\lambda - ۱) - ۲\gamma\xi + A_{-۲}\big]r^{-۲}\Big\}\tilde{U}(r) = ۰
\end{aligned}$$

حال طرفین معادله دیفرانسیل فوق را در $r^{۲}$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\Big\{r^{۲}\frac{d^{۲}}{dr^{۲}} + ۲\big[۳\alpha r^{۴} + ۲\beta r^{۳} + \gamma r^{۲} + \lambda r - \xi\big]\frac{d}{dr} + \big[۶\alpha + ۶\alpha\lambda + ۴\beta\gamma + A_{۱}\big]r^{۳} \\
&+ \big[۴\beta\lambda + ۲\beta + \gamma^{۲} - ۶\alpha\xi + A_{۰}\big]r^{۲} + \big[۲\gamma\lambda - ۴\beta\xi + A_{-۱}\big]r \\
&+ \big[\lambda(\lambda - ۱) - ۲\gamma\xi + A_{-۲}\big]\Big\}\tilde{U}(r) = ۰
\end{aligned} \tag{۱۱۶.۵}$$

در اینصورت فرض می‌کنیم $\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)$ جواب معادله فوق باشد

$$r^2\,\frac{\frac{d^2}{dr^2}\left(\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)\right)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}+2\left[3\alpha r^4+2\beta r^3+\gamma r^2+\lambda r-\xi\right]\frac{\frac{d}{dr}\left(\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)\right)}{\prod_{i=1}^{n}(r-r_i)}$$
$$+\left[6\alpha+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\right]r^3+\left[4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2-6\alpha\xi+A_0\right]r^2$$
$$+\left[2\gamma\lambda-4\beta\xi+A_{-1}\right]r+\left[\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\right]=0$$

با استفاده از نتایج اثبات شده‌ی (۱۵.۴) و (۱۶.۴) خواهیم داشت

$$r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\left[3\alpha r^4+2\beta r^3+\gamma r^2+\lambda r-\xi\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}$$
$$+\left[6\alpha+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\right]r^3+\left[4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2-6\alpha\xi+A_0\right]r^2$$
$$+\left[2\gamma\lambda-4\beta\xi+A_{-1}\right]r=-\left[\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\right]$$

در اینصورت توجه کنید که یک طرف رابطه‌ی فوق، عبارت ثابت و طرف دیگر تابع تحلیلی با قطب $r=r_i$ است. پس می‌توان مانده عبارت فوق را در نقطه‌ی $r=r_i$ به‌صورت زیر محاسبه کرد

$$Res\left[-\left(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\right)\right]_{r=r_i}=r_i^2\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}$$
$$+2\left[3\alpha r_i^4+2\beta r_i^3+\gamma r_i^2+\lambda r_i-\xi\right]$$

همچنین می‌توان عبارت زیر را حساب کرد

$$
\begin{aligned}
&-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\big[-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)\big]_{r=r_i}}{r-r_i}\\
&=r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\big[3\alpha r^4+2\beta r^3+\gamma r^2+\lambda r-\xi\big]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}+\big[6\alpha\\
&+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\big]r^3+\big[4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2-6\alpha\xi+A_0\big]r^2+\big[2\gamma\lambda-4\beta\xi+A_{-1}\big]r\\
&-\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i^2}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{r-r_i}\big[3\alpha r_i^4+2\beta r_i^3+\gamma r_i^2+\lambda r_i-\xi\big]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{6\alpha(r^4-r_i^4)}{r-r_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{4\beta(r^3-r_i^3)}{r-r_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2\gamma(r^2-r_i^2)}{r-r_i}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{2\lambda(r-r_i)}{r-r_i}+(2\xi-2\xi)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}+\big[6\alpha+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\big]r^3\\
&+\big[4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2-6\alpha\xi+A_0\big]r^2+\big[2\gamma\lambda-4\beta\xi+A_{-1}\big]r\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(r-r_i)(r+r_i)}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{6\alpha(r-r_i)(r^3+r^2r_i+rr_i^2+r_i^3)}{r-r_i}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{4\beta(r-r_i)(r^2+rr_i+r_i^2)}{r-r_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2\gamma(r-r_i)(r+r_i)}{r-r_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2\lambda(r-r_i)}{r-r_i}+\big[6\alpha\\
&+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\big]r^3+\big[4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2-6\alpha\xi+A_0\big]r^2+\big[2\gamma\lambda-4\beta\xi+A_{-1}\big]r
\end{aligned}
$$

پس از ساده کردن عبارت فوق داریم

$$
\begin{aligned}
&-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\big[-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)\big]_{r=r_i}}{r-r_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}(r+r_i)\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}6\alpha(r^3+r^2r_i+rr_i^2+r_i^3)\\
&+\sum_{i=1}^{n}4\beta(r^2+rr_i+r_i^2)+\sum_{i=1}^{n}2\gamma(r+r_i)+\sum_{i=1}^{n}2\lambda+\big[6\alpha+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\big]r^3\\
&+\big[4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2-6\alpha\xi+A_0\big]r^2+\big[2\gamma\lambda-4\beta\xi+A_{-1}\big]r
\end{aligned}
$$

در اینصورت با یک تفکیک ساده نسبت به توان‌های r نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$
\begin{aligned}
&-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)=\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\big[-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)\big]_{r=r_i}}{r-r_i}\\
&+\Big[\sum_{i=1}^{n}6\alpha+6\alpha+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\Big]r^3+\Big[\sum_{i=1}^{n}6\alpha r_i+\sum_{i=1}^{n}4\beta+4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2\\
&-6\alpha\xi+A_0\Big]r^2+\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}6\alpha r_i^2+\sum_{i=1}^{n}4\beta r_i+\sum_{i=1}^{n}2\gamma+2\gamma\lambda-4\beta\xi\\
&+A_{-1}\Big]r+\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_i}{r_i-r_j}+\sum_{i=1}^{n}6\alpha r_i^3+\sum_{i=1}^{n}4\beta r_i^2+\sum_{i=1}^{n}2\gamma r_i+\sum_{i=1}^{n}2\lambda\Big]
\end{aligned}
$$

بنابراین با استفاده از روابط (۲۳.۴) داریم

$$
\begin{aligned}
&-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)=\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\big[-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)\big]_{r=r_i}}{r-r_i}\\
&+\big[6n\alpha+6\alpha+6\alpha\lambda+4\beta\gamma+A_1\big]r^3+\Big[6\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i+4n\beta+4\beta\lambda+2\beta+\gamma^2\\
&-6\alpha\xi+A_0\Big]r^2+\Big[6\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i^2+4\beta\sum_{i=1}^{n}r_i+2n\gamma+2\gamma\lambda-4\beta\xi\\
&+A_{-1}\Big]r+\Big[2\times\frac{1}{2}n(n-1)+6\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i^3+4\beta\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2\gamma\sum_{i=1}^{n}r_i+2\lambda n\Big]
\end{aligned}
\qquad (117.5)
$$

حال ضرایب دو طرف رابطه‌ی بالا را متناظر قرار می‌دهیم، ابتدا ضریب r^3 را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$6\alpha(\lambda+1+n)+4\beta\gamma+A_1=0 \qquad (118.5)$$

ضریب r^2 را مورد بررسی قرار می‌دهیم، داریم

$$4\beta(\lambda+\frac{1}{2}+n)+6\alpha(\sum_{i=1}^{n}r_i-\xi)+\gamma^2+A_0=0 \qquad (119.5)$$

همچنین در مورد ضریب r خواهیم داشت

$$2\gamma(\lambda+n)+4\beta(\sum_{i=1}^{n}r_i-\xi)+6\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i^2+A_{-1}=0 \qquad (120.5)$$

در نهایت عبارات ثابت را از دو طرف رابطه‌ی (۱۱۷.۵) برابر هم قرار می‌دهیم

$$-\big(\lambda(\lambda-1)-2\gamma\xi+A_{-2}\big)=n(n-1)+6\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i^3+4\beta\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2\gamma\sum_{i=1}^{n}r_i+2\lambda n$$

بنابراین

$$\lambda(\lambda-1+2n)+2\gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i-\xi\Big)+A_{-2}+n(n-1)+6\alpha\sum_{i=1}^{n} r_i^3+4\beta\sum_{i=1}^{n} r_i^2=0 \tag{۱۲۱.۵}$$

و با صفر کردن مانده، معادلات آنساتز را به‌صورت زیر داریم

$$r_i^2\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\Big[3\alpha r_i^4+2\beta r_i^3+\gamma r_i^2+\lambda r_i-\xi\Big]=0 \tag{۱۲۲.۵}$$

در صورتیکه برای $n=1$، ۲ مجهول ویژه‌مقدار انرژی E و ریشه‌ی r_1 را داریم که با قرار دادن $n=1$ در روابط (۱۱۸.۵) تا (۱۲۲.۵) به همراه قیدهایی حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned}
&6\alpha(\lambda+2)+4\beta\gamma+A_1=0\\
&4\beta(\lambda+\frac{3}{2})+6\alpha(r_1-\xi)+\gamma^2+A_0=0\\
&2\gamma(\lambda+1)+4\beta(r_1-\xi)+6\alpha r_1^2+A_{-1}=0\\
&\lambda(\lambda+1)+2\gamma(r_1-\xi)+A_{-2}+6\alpha r_1^3+4\beta r_1^2=0\\
&3\alpha r_1^4+2\beta r_1^3+\gamma r_1^2+\lambda r_1-\xi=0
\end{aligned}$$

به‌طوریکه α، β، γ، ξ و λ از روابط (۱۱۱.۵) تا (۱۱۵.۵) حاصل می‌شوند.

۶.۵ معادله‌ی کلاین-گوردون در حضور پتانسیل کراتزر

معادله شعاعی کلاین-گوردون، برای پتانسیل‌های برداری $V(r)$ و اسکالر $S(r)$، بصورت زیر است

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\big[E_{n,l}-V(r)\big]^2-\big[M+S(r)\big]^2\Big\}U_{n,l}(r)=0 \tag{۱۲۳.۵}$$

که در آن M جرم نسبیتی و $E_{n,l}$ انرژی نسبیتی است. پتانسیل کراتزر را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
V(r)&=\frac{v_0}{r}+\frac{v_1}{r^2}\\
S(r)&=\frac{s_0}{r}+\frac{s_1}{r^2}
\end{aligned} \tag{۱۲۴.۵}$$

که در آن v_0, v_1, s_0 و s_1 مقادیر ثابت می‌باشند. با توجه به ساختار معادله دیفرانسیل (۱۲۳.۵) موارد زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\big(E_{n,l}-V(r)\big)^2&=E_{n,l}^2-2E_{n,l}V(r)+V(r)^2=E_{n,l}^2-2E_{n,l}\Big(\frac{v_0}{r}+\frac{v_1}{r^2}\Big)+\Big(\frac{v_0}{r}+\frac{v_1}{r^2}\Big)^2\\
&=E_{n,l}^2-2E_{n,l}v_0r^{-1}-2E_{n,l}v_1r^{-2}+v_0^2r^{-2}+v_1^2r^{-4}+2v_0v_1r^{-3}\\
\big(M+S(r)\big)^2&=M^2+2MS(r)+S(r)^2=M^2+2M\Big(\frac{s_0}{r}+\frac{s_1}{r^2}\Big)+\Big(\frac{s_0}{r}+\frac{s_1}{r^2}\Big)^2\\
&=M^2+2Ms_0r^{-1}+2Ms_1r^{-2}+s_0^2r^{-2}+s_1^2r^{-4}+2s_0s_1r^{-3}
\end{aligned}$$

بنابراین از جایگذاری پتانسیل (۱۲۴.۵) در رابطه (۱۲۳.۵)، خواهیم داشت

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+E_{n,l}^2-2E_{n,l}v_0r^{-1}-2E_{n,l}v_1r^{-2}+v_0^2r^{-2}+v_1^2r^{-4}+2v_0v_1r^{-3}$$
$$-\big[M^2+2Ms_0r^{-1}+2Ms_1r^{-2}+s_0^2r^{-2}+s_1^2r^{-4}+2s_0s_1r^{-3}\big]^2\Big\}U_{n,l}(r)=0$$

پس از مرتب‌سازی معادله‌ی بالا داریم

$$\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+\big[E_{n,l}^2+M^2\big]+\big[-2E_{n,l}v_0-2Ms_0\big]r^{-1}+\big[-2E_{n,l}v_1+v_0^2-2Ms_1$$
$$-s_0^2-l(l+1)\big]r^{-2}+\big[2v_0v_1-2s_0s_1\big]r^{-3}+\big[v_1^2-s_1^2\big]r^{-4}\Big\}U_{n,l}(r)=0$$

با فاکتورگیری از یک منفی معادله‌ی فوق به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$-\Big\{-\frac{d^2}{dr^2}-\big[E_{n,l}^2-M^2\big]+2\big[E_{n,l}v_0+Ms_0\big]r^{-1}+\big[2E_{n,l}v_1-v_0^2+2Ms_1$$
$$+s_0^2+l(l+1)\big]r^{-2}+2\big[s_0s_1-v_0v_1\big]r^{-3}+\big[s_1^2-v_1^2\big]r^{-4}\Big\}U_{n,l}(r)=0$$

یا به‌عبارتی

$$HU_{n,l}(r)=0;$$
$$H=-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{A_1}{r}+\frac{A_2}{r^2}+\frac{A_3}{r^3}+\frac{A_4}{r^4}-\varepsilon \qquad (۱۲۵.۵)$$

بطوریکه در آن

$$A_1=2(MS_0+E_{n,l}v_0),$$
$$A_2=l(l+1)-v_0^2+s_0^2+2(Ms_1+E_{n,l}v_1),$$
$$A_3=2(s_1s_0-v_0v_1),$$
$$A_4=s_1^2-v_1^2$$
$$\varepsilon=E_{n,l}^2-M^2 \qquad (۱۲۶.۵)$$

اکنون با پیشنهاد تابع موج زیر

$$U_{n,l}(r)=r^{\mu}e^{f(r)}\tilde{U}(r); \qquad f(r)=ar+\frac{b}{r} \qquad (۱۲۷.۵)$$

که تضمین کننده رفتار مجانبی تابع موج در فواصل صفر و بی‌نهایت است و a ، b و μ نامعلوم هستند که در طی حل معادله حاصل می‌شوند. با توجه به معادله دیفرانسیل (۱۲۵.۵) نیاز به مشتق دوم تابع

موج پیشنهادی داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}U_{n,l}(r) &= \mu r^{\mu-1}e^{f(r)}\tilde{U}(r) + r^{\mu}f'(r)e^{f(r)}\tilde{U}(r) + r^{\mu}e^{f(r)}\tilde{U}'(r)\\ \frac{d^2}{dr^2}U_{n,l}(r) &= \mu(\mu-1)r^{\mu-2}e^{f(r)}\tilde{U}(r) + \mu r^{\mu-1}f'(r)e^{f(r)}\tilde{U}(r) + \mu r^{\mu-1}e^{f(r)}\tilde{U}'(r)\\ &\quad + \mu r^{\mu-1}f'(r)e^{f(r)}\tilde{U}(r) + r^{\mu}f''(r)e^{f(r)}\tilde{U}(r) + r^{\mu}f'(r)^2e^{f(r)}\tilde{U}(r)\\ &\quad + r^{\mu}f'(r)e^{f(r)}\tilde{U}'(r) + \mu r^{\mu-1}e^{f(r)}\tilde{U}'(r) + r^{\mu}f'(r)e^{f(r)}\tilde{U}'(r) + r^{\mu}e^{f(r)}\tilde{U}''(r)\end{aligned}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل(۱۲۵.۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}&\Big\{-\big[\mu(\mu-1)r^{-2} + \mu r^{-1}f'(r) + \mu r^{-1}\frac{d}{dr} + \mu r^{-1}f'(r) + f''(r) + f'(r)^2 + f'(r)\frac{d}{dr}\\ &+ \mu r^{-1}\frac{d}{dr} + f'(r)\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2}\big] + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \frac{A_4}{r^4} - \varepsilon\Big\}r^{\mu}e^{f(r)}\tilde{U}(r) = 0\end{aligned}$$

که پس از مرتب کردن معادله‌ی فوق داریم

$$\begin{aligned}&\Big\{-\frac{d^2}{dr^2} + \Big[-\frac{2\mu}{r} - 2f'(r)\Big]\frac{d}{dr} + \Big[\frac{-\mu(\mu-1)}{r^2} - \frac{2\mu}{r}f'(r)\\ &-f''(r) - f'(r)^2 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \frac{A_4}{r^4} - \varepsilon\Big]\Big\}\tilde{U}(r) = 0\end{aligned} \tag{۱۲۸.۵}$$

از طرفی با توجه به (۱۲۷.۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}f'(r) &= a - \frac{b}{r^2}\\ f'(r)^2 &= a^2 + b^2r^{-4} - 2abr^{-2}\\ f''(r) &= \frac{2b}{r^3}\end{aligned}$$

روابط فوق را در معادله دیفرانسیل (۱۲۸.۵) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}&\Big\{-\frac{d^2}{dr^2} - 2\Big[\mu r^{-1} + (-a - br^{-2})\Big]\frac{d}{dr} + \Big[-\mu(\mu-1)r^{-2} - 2\mu r^{-1}(a - br^{-2})\\ &-(2br^{-3}) - (a^2 + b^2r^{-4} - 2abr^{-2}) + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \frac{A_4}{r^4} - \varepsilon\Big]\Big\}\tilde{U}(r) = 0\end{aligned}$$

حال معادله‌ی فوق را نسبت به توان‌های r تفکیک می‌کنیم

$$\begin{aligned}&\Big\{-\frac{d^2}{dr^2} - 2\Big[\mu r^{-1} + (a - br^{-2})\Big]\frac{d}{dr} + \Big[(-a^2 - \varepsilon) + (-2\mu a + A_1)r^{-1}\\ &+ (-\mu(\mu-1) + 2ab + A_2)r^{-2} + (2\mu b - 2b + A_3)r^{-3} + (-b^2 + A_4)r^{-4}\Big]\Big\}\tilde{U}(r) = 0\end{aligned}$$

معادله‌ی بالا را در عبارت r^2 ضرب می‌کنیم

$$\Big\{ -r^2\frac{d^2}{dr^2} - 2\Big[\mu r + ar^2 - b\Big]\frac{d}{dr} + \Big[(-a^2-\varepsilon)r^2 + (-2\mu a + A_1)r \tag{۱۲۹.۵}$$

$$+ (-\mu(\mu-1) + 2ab + A_2) + (2\mu b - 2b + A_3)r^{-1} + (-b^2 + A_4)r^{-2}\Big]\Big\}\tilde{U}(r) = 0 \tag{۱۳۰.۵}$$

در اینصورت با صفر قرار دادن ضرایب r^2، r^{-1} و r^{-2}، مجهولات a، b و μ حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} a &= -\sqrt{-\varepsilon} \\ b &= -\sqrt{A_4} \\ \mu &= 1 + \frac{A_3}{2\sqrt{A_4}} \end{aligned} \tag{۱۳۱.۵}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در معادله دیفرانسیل (۱۲۹.۵) داریم

$$\Big\{ -r^2\frac{d^2}{dr^2} + 2\Big(\sqrt{-\varepsilon}r^2 - (1 + \frac{A_3}{2\sqrt{A_4}})r - \sqrt{A_4}\Big)\frac{d}{dr} + \Big(A_1 + 2\sqrt{-\varepsilon}(1 + \frac{A_3}{2A_4})\Big)r$$

$$+ \Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4} - \frac{A_3^2}{4A_4} - \frac{A_3}{2\sqrt{A_4}} + A_2\Big)\Big\}\tilde{U}(r) = 0 \tag{۱۳۲.۵}$$

به منظور حل دقیق معادله (۱۳۲.۵)، ویژه تابع $\tilde{U}$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\tilde{U}_n(r) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(r - r_i) & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \tag{۱۳۳.۵}$$

که در آن r_iها، گره‌های تابع موج می‌باشند. از جایگذاری(۱۳۳.۵) در (۱۳۲.۵) معادله‌ی زیر حاصل می‌شود

$$-r^2\frac{\frac{d^2}{dr^2}\prod_{i=1}^n(r-r_i)}{\prod_{i=1}^n(r-r_i)} + 2\Big(\sqrt{-\varepsilon}r^2 - (1 + \frac{A_3}{2\sqrt{A_4}})r - \sqrt{A_4}\Big)\frac{\frac{d}{dr}\prod_{i=1}^n(r-r_i)}{\prod_{i=1}^n(r-r_i)}$$

$$+ \Big(A_1 + 2\sqrt{-\varepsilon}(1 + \frac{A_3}{2A_4})\Big)r + \Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4} - \frac{A_3^2}{4A_4} - \frac{A_3}{2\sqrt{A_4}} + A_2\Big) = 0$$

با استفاده از روابط (۱۵.۴) و (۱۶.۴) داریم

$$-r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i - r_j} + 2\Big(\sqrt{-\varepsilon}r^2 - (1 + \frac{A_3}{2\sqrt{A_4}})r - \sqrt{A_4}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}$$

$$+ \Big(A_1 + 2\sqrt{-\varepsilon}(1 + \frac{A_3}{2A_4})\Big)r = -\Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4} - \frac{A_3^2}{4A_4} - \frac{A_3}{2\sqrt{A_4}} + A_2\Big) \tag{۱۳۴.۵}$$

چنانکه مشاهده می‌شود، معادله بدست آمده دارای قطب‌های ساده r_i است. برای رفع تکینگی در $r = r_i$، با استفاده از حساب مانده‌ها و انجام محاسبات لازم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&Res\Big[-\Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\Big)\Big]_{r=r_i}\\
&=-r_i^2\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\Big(\sqrt{-\varepsilon}r_i^2-(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}})r_i-\sqrt{A_4}\Big)
\end{aligned}\tag{135.5}$$

بنابراین رابطه‌ی زیر را جهت روند حل معادله محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&-\Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\Big)\\
&-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\Big[-\Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\Big)\Big]_{r=r_i}}{r-r_i}=-r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}\\
&+2\Big(\sqrt{-\varepsilon}r^2-(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}})r-\sqrt{A_4}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-r_i}+\Big(A_1+2\sqrt{-\varepsilon}(1+\frac{A_3}{2A_4})\Big)r\\
&-\sum_{i=1}^{n}\frac{-r_i^2}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{r-r_i}\Big(\sqrt{-\varepsilon}r_i^2-(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}})r_i-\sqrt{A_4}\Big)
\end{aligned}$$

رابطه‌ی فوق را مرتب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&-\Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\Big)\\
&-\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\Big[-\Big(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\Big)\Big]_{r=r_i}}{r-r_i}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}\\
&+2\sqrt{-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2-r_i^2}{r-r_i}-2(1+\frac{A_3}{2A_4})\sum_{i=1}^{n}\frac{r-r_i}{r-r_i}-2\sqrt{A_4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-1}{r-r_i}\\
&+\Big(A_1+2\sqrt{-\varepsilon}(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}})\Big)r
\end{aligned}$$

در اینصورت پس از فاکتورگیری نسبت به توان‌های r خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&-\left(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\right)\\
&=\left[-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\sqrt{-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}1+A_1+2\sqrt{-\varepsilon}\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right)\right]r\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\left[-\left(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\right)\right]_{r=r_i}}{r-r_i}\\
&-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2r_i}{r_i-r_j}+2\sqrt{-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}r_i-2\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right)\sum_{i=1}^{n}1
\end{aligned}
$$

بنابر روابط اثبات شده‌ی (۲۳.۴) داریم

$$
\begin{aligned}
&-\left(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\right)\\
&=\left[2n\sqrt{-\varepsilon}+A_1+2\sqrt{-\varepsilon}\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right)\right]r\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{Res\left[-\left(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\right)\right]_{r=r_i}}{r-r_i}\\
&-n(n-1)+2\sqrt{-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}r_i-2n\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right)
\end{aligned}
\tag{۱۳۶.۵}
$$

از مقایسه ثوابت و متغیرها در دو طرف رابطه (۱۳۶.۵)، معادلات زیر بدست می‌آیند

$$
2n\sqrt{-\varepsilon}+A_1+2\sqrt{-\varepsilon}\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right)=0 \tag{۱۳۷.۵}
$$

$$
-\left(2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2\right)=-n(n-1)+2\sqrt{-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}r_i-2n\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right) \tag{۱۳۸.۵}
$$

$$
2\sqrt{-\varepsilon A_4}-\frac{A_3^2}{4A_4}-\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}+A_2-n(n-1)+2\sqrt{-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}r_i-2n\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right)=0 \tag{۱۳۹.۵}
$$

با صفر قرار دادن مانده، ریشه‌های r_i از معادلات آنساتز زیر، قابل محاسبه اند

$$
-r_i^2\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{r_i-r_j}+2\left(\sqrt{-\varepsilon}r_i^2-\left(1+\frac{A_3}{2\sqrt{A_4}}\right)r_i-\sqrt{A_4}\right)=0 \tag{۱۴۰.۵}
$$

به این ترتیب، طیف ویژه مقادیر انرژی و قید پارامترهای پتانسیل، برای هر n دلخواه، از روابط (۱۳۷.۵) تا (۱۴۰.۵) قابل محاسبه هستند.

مقایسه نتیجه دو روش آنساتز و شبه طیفی لاگور

برای درک بهتر، هر دو روش را بر معادله‌ی (۳.۲) پیاده می‌کنیم، که این معادله مشابه معادله‌ی (۸۷.۴) است با این تفاوت که در اینجا پتانسیل را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$V(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 (x^2)^2 + \lambda_3 (x^2)^3, \qquad x^2 = \sum_{i=1}^{M} x_i^2$$

در روش آنساتز انجام شده در بخش ۵.۳.۲ به نتایج زیر می‌رسیم

$$\lambda_1 = -4\beta n - 2\mu\beta - 3\beta + \alpha^2 \tag{141.5}$$

$$4z_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{2}{z_i - z_j} + 2(l + \frac{N}{2}) - 4\beta z_i^2 - 4\alpha z_i = 0 \tag{142.5}$$

$$2\mu\alpha + \alpha - E = -4\beta \sum_{i=1}^{n} - 4\alpha n \tag{143.5}$$

بطوریکه

$$\beta = \sqrt{\lambda_3}, \qquad \alpha = \frac{\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_3}}, \qquad \mu = l + \frac{1}{2(N-1)}$$

در اینصورت با فرض $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$، $n = 2$، در فضای $M = 3$ بعدی و $l = 1$، با جایگزینی عبارات فوق در روابط (۱۴۱.۵) تا (۱۴۳.۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = 14{,}75 \\
&\frac{8z_1}{z_1 - z_2} + 5 - 4z_1^2 - 2z_1 = 0 \\
&\frac{8z_2}{z_2 - z_1} + 5 - 4z_2^2 - 2z_2 = 0 \\
&E = \frac{13}{2} + 4(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

که با حل معادلات فوق z_1، z_2 و در نهایت E به صورت زیر حاصل می‌شوند

E_a	z_2	z_1
−۵٫۹۸۳۰	−۰٫۷۸۸۷	−۲٫۳۳۲۰
۳٫۹۴۶۸	۱٫۱۹۹۹	−۱٫۸۳۸۲
۱۵٫۵۳۶۳	۱٫۷۶۹۳	۰٫۴۸۹۶

اما در روش شبه طیفی با توجه به قضیه ۱.۱.۵ و با فرض $\alpha = 2$ و $c = 1$ داریم

$$E = -(\alpha c)^2 \lambda = -4\lambda$$

بطوریکه λ مقدار ویژه‌ی رابطه‌ی زیر است

$$Tu = \lambda u$$

و همانطور که در آنالیز این روش بیان کردیم $T = K + Q$، بطوریکه

$$K_{mn} = -\frac{۱}{۶}\begin{cases} \frac{۱۲(\xi_m \xi_n)^{۱-\frac{۱}{\alpha}}}{(\xi_m - \xi_n)^۲} & m \neq n \\ \\ \xi_n^{۱-\frac{۲}{\alpha}}\{۲N + \frac{۱}{\xi_n}[(\gamma - \xi_n)^۲ - ۱]\} & m = n \end{cases}$$

و

$$Q_{mn} = \xi_m^{۱-\frac{۲}{\alpha}}[\frac{۱}{۴}\xi_m - \frac{۱}{۲}(\gamma + ۱) - \frac{۱}{(\alpha c)^۲}\xi_m^{\frac{۲}{\alpha}-۱}V(\xi_m^{\frac{۱}{\alpha}}/c)]\delta_{mn}, \qquad m, n = ۰, ۱, \ldots, N$$

$\gamma = \frac{۱}{\alpha}(۲l + M - ۲)$، با فرض $N = ۱$، برای مثال $\xi_۰ = ۰/۴۸۹۶$ و $\xi_۱ = ۱/۷۶۹۳$ را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} -۰/۳۳۶۸ & -۱/۱۳۶۶ \\ -۱/۱۳۶۶ & -۰/۲۱۳۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳/۹۱۶۱ & ۰ \\ ۰ & -۶/۷۴۳۴ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -۴/۲۵۲۹ & -۱/۱۳۶۶ \\ -۱/۱۳۶۶ & -۶/۹۵۷۱ \end{bmatrix} \\ \lambda &= \begin{bmatrix} -۷/۳۷۱۳ \\ -۳/۸۳۸۶ \end{bmatrix} \\ E_p &= \begin{bmatrix} ۲۹/۴۸۵۴ \\ ۱۵/۳۵۴۶ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌شود یکی از مقادیر ویژه‌ی بدست آمده از روش شبه طیفی نزدیک به مقدار مقدارویژه‌ی بدست آمده از روش آنساتز است.

$$|\triangle E| = |E_a - E_p| = |۱۵/۵۳۶۳ - ۱۵/۳۵۴۶| = ۰/۱۸۱۷$$

نتیجه‌گیری

در این رساله معادلات شرودینگرگونه تحت سه روش شبه طیفی لاگور، روش حدسی و روش بث آنساتز در حضور پتانسیل‌های گوناگون و در فضاهای مختلف مورد بحث و بررسی قرار گرفت. از معایب هر دو روش شبه طیفی لاگور و روش حدسی می‌توان گفت که در ابعاد بالاتر به سختی و طی روند طولانی به جواب خواهیم رسید، اما روش بث آنساتز این شرایط را فراهم می‌کند که در ابعاد بالاتر بتوانیم به سرعت و با دقت بالا به جواب دست پیدا کنیم. اما ضعف روش بث آنساتز این است که ضرایب چندجمله‌ای‌وار در معادله‌ی شرودینگر دارای محدودیت درجه هستند و اگر دارای درجه‌ای بیشتر از آنچه تعیین شده است ایجاد شود حل این معادله با این روش به جواب نمی‌رسد. در نهایت یک معادله شرودینگر را در حضور یک پتانسیل خاص در نظر گرفتیم و تحت دو روش شبه طیفی لاگور و بث آنساتز، مقدارویژه را بدست آوردیم و نتیجه را با هم مقایسه کردیم.

آینده‌نگری

- تقریب تابع موج بر حسب چندجمله‌ای‌های خاص مثل چندجمله‌ای‌های هرمیتی در روش شبه طیفی لاگور
- تعمیم روش آنساتز به معادلات شرودینگرگونه در مراتب بالاتر
- بکارگیری روش آنساتز برای معادلاتی که رفتار شرودینگرگونه ندارند

مراجع

[1] G. F. Simmons, Differential equations with applications and Historical notes, McGraw-Hill Inc, (1972).

[2] S. Coleman, ”Aspects of Symmetry” selected Erice Lectures (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988), p. 234.

[3] S. H. Dong, Z. Q. Ma, The Exact Solution to the Schrodinger Equation with the Octic Potential, Cosmology and Nuclear Physics (1999) 465-474.

[4] J. Killingbeck, Shooting methods for the Schrodinger equation, J. Phys. A: Math. Gen. 20 (1987) 1411-1417.

[5] P.B. Bailey, W.N. Everitt, A. Zettl, Algorithm 810: The SLEIGN2 Strum-Liouville code, ACM Trans. Math. Softw. 27 (2001) 143-192.

[6] P.B. Bailey, B.S. Garbow, H.G. Kaper, A. Zettl, Eigenvalue and eigenfunction computations for Strum-Liouville problems, ACM Trans. Math. Softw. 17 (1991) 491-499.

[7] V. Ledoux, M. Van Daele, G. Vanden Berghe, MATSLISE: A MATLAB package for the numerical solution of Strum-Liouville and Schrodinger equation, ACM Trans. Math. Softw. 31 (2005) 532-554.

[8] V. Ledoux, M. Van Daele, G. Vanden Berghe, CP methods of higher order for Sturm-Liouville and Schrodinger equations, Comput. Phys. Comm. 162 (2004) 151-165.

[9] V. Fack, G. Vanden Berghe, A Finite difference approach for the calculation of perturbed oscillator energies, J. Phys. A. Math. Gen. 18 (1985) 3355-3363.

[10] M.R.M. Witwit, Finite difference calculations of eigenvalues of various potentials, J. Phys. A: Math. Gen. 25 (1992) 503-512.

[11] H. Taseli, M.B. Ersecen, The scaled Hermite-Weber basis still highly competitive, J. Math. Chem. 34 (2003) 177-188.

[12] H. Taseli, A. Zafer, A Fourier-Bessel expansion for solving radial Schrodinger equation in two dimensions, Int. J. Quantum Chem. 61 (1997) 759-768.

[13] H. Taseli, M. Demiralp, Studies on algebraic methods to solve linear eigenvalue problems: Generalized anharmonic oscillators, J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) 3903-3919.

[14] A.N. Drozdov, On the improvement of convergence of Hill determinants, J. Phys. A. Math. Gen. 28 (1995) 445-457.

[15] M. Znojil, Asymmetric anharmonic oscillators in the Hill determinant picture, J. Math. Phys. 33 (1992) 213-221.

[16] K. Banerjee, S.P. Bhatnagar, Two well oscillators, Phys. Rev. D 18 (1978) 4767-4769.

[17] E. Gildener, A. Patrascioui, Pseudo particle contributions to the energy spectrum of a one dimensional system, Phys. Rev. D 16 (1977) 423-430.

[18] H. Chen, B.D. Shizgal, The Quadrature Discretization Method (QDM) in the solution of the Schrodinger equation, J. Math. Chem. 24 (1998) 321-343.

[19] J. Lo, B.D. Shizgal, Spectral convergence of the quadrature discretization method in the solution of the Schrodinger and Fokker-Planck equations: Comparison with sinc methods, J. Chem. Phys. 125 (2006) 194108.1-194108.17.

[20] H. Taseli, H. Alici, The scaled Hermite-Weber basis in the spectral and pseudospectral pictures, J. Math. Chem. 38 (2005) 367-378.

[21] J.A.C. Weideman, Spectral differentiation matrices for the numerical solution of Schrodinger's equation, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 10229-10237.

[22] H. Alici, The Hermite pseudospectral method for the two-dimensional Schrodinger equation with nonseparable potentials, Computers and Mathematics with Applications (2015) 466–476.

[23] H. Taseli, R. Eid, Eigenvalues of the two-dimensional Schrodinger equation with nonseparable potentials, Int. J. Quantum Chem. 59 (1996) 183–201.

[24] H. Taseli, Inci M. Erhan, O. Ugur, An eigenfunction expansion for the Schrodinger equation with arbitrary non-central potentials, J. Math. Chem. 32 (2002) 323–338.

[25] Z. Wang, H. Shao, A new kind of discretization scheme for solving a two-dimensional time-independent Schrodinger equation, Comput. Phys. Comm. 180 (2009) 842–849.

[26] X.S. Liu, L.W. Su, X.Y. Liu, P.Z. Ding, Numerical solution of a two-dimensional time-independent Schrodinger equation by using symplectic schemes, Int. J. Quantum Chem. 83 (5) (2001) 303–309.

[27] Th. Monovasilis, T.E. Simos, Numerical solution of the two-dimensional time independent Schrodinger equation by third order symplectic schemes, Chem. Phys. 313 (2005) 293–298.

[28] Z. Kalogiratou, Th. Monovasilis and T.E. Simos, Numerical solution of the two-dimensional time independent Schrodinger equation with Numerov-type methods, J. Math. Chem. 37 (2005) 271–279.

[29] R. A. Silverman, Complex Analysis with applications, Prentice-Hall, INC, (1974).

[30] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical analysis, (2001).

[31] G. B. Thomas, Calculus and analytic geometry, Jr. Addison-Wesley Publishing Company, 3rd Printing (1972).

[32] S. Zaim, Exact solutions of the 2D Schrodinger equation with central potentials induced by the non-commutativity of space, (2014).

[33] R. Schafke and D. Schmidt,The connection problem for general linear ordinary differential equations at two regular singular points with applications in the theory of special functions SIAM J. Math. Anal. 11 (1980) 848–62.

[34] D. Gomez-Ullate, N. Kamran and R. Milson, An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm–Liouville problem J. Math. Anal. Appl. 359 (2009) 352–67.

[35] D. Gomez-Ullate, N. Kamran and Milson R, An extension of Bochner's problem: exceptional invariant subspaces J. Approx. Theory 162 (2010) 987–1006 .

[36] LeeY-H,YangW-L and ZhangY-Z, Polynomial algebras and exact solutions of general quantum non-linear optical models: I. Two-mode boson systems J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 185-204.

[37] Y. H. Lee, J. R. Links and Y. Z. Zhang, Exact solutions for a family of spin-boson systems Nonlinearity 24 (2011).

[38] Y. Z. Zhang, Exact polynomial solutions of second order differential equations and their applications, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012).

[39] S. S. Gubser, Phase transitions near black hole horizons Class. Quantum Grav. 22 (2005) 5121–43.

[40] S. H. Dong, Z. Q. Ma, Exact solutions of the Schr¨odinger Equation with the Sextic Potential in Two Dimensions, arxive: quant-ph / 9901037v1 , 15 Jan (1999).

[41] H. Hassanabadi, H. Rahimov, S. Zarrinkamar, Cornell and Coulomb interactions for the D-dimensional Klein-Gordon equation, Ann. Phys. (Berlin) 523 (2011).

[42] O. Aydogdu, R. Sever, Pseudospin and spin symmetry in the Dirac equation with Woods-Saxon potential and tensor potential, Phys. Scr. 80, 015001 (2009).

[43] H. Hassanabadi, F. Hoseini, and S. Zarrinkamar, A generalized interaction in non-commutative space: Both relativistic and nonrelativistic fields, Eur. Phys. J. Plus (2015).

[44] H. Taseli and H. Alici, The Laguerre pseudospectral method for the reflection symmetric Hamiltonians on the real line, Journal of Mathematical Chemistry, Vol. 41, No. 4, May (2007).

[45] B. Y. Guo, L.L. Wang, Z.Q. Wang, Generalized Laguerre interpolation and pseudospectral method for unbounded domains, SIAM J. Numer. Anal. 43(6) (2006) 2567–2589.

[46] J. Shen, L.L. Wang, Some recent advances on spectral methods for unbounded domains, Commun. Comput. Phys. 5 (2009) 195–241.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پتانسیل پوش–تلر	Poschl-Teller potential
پتانسیل کراتزر	Kratzer potential
پتانسیل کرنل	Kornell potential
پتانسیل کیلینگ بک	Killingbeck potential
پتانسیل موزون	Harmonic potential
پتانسیل موزون انتقال‌یافته	Shifted Harmonic potential
تابع موج	Wavefunction
روش بث آنساتز	Bethe Ansatz method
فضای جابه‌جایی	commutative space
فضای فاز	Phase space
فضای ناجابه‌جایی	Noncommutative space
قطب	Pole
مانده	Residue
مختصات قطبی	Polar coordinate
معادله دیفرانسیل شرودینگر	Schrodinger dirffrential equation
معادله دیفرانسیل کلاین–گوردون	Klein-Gordon differential equation
همیلتونی	Hamiltonian
ویژه‌تابع	Eigenfunction
ویژه‌مقدار	Eigenvalue

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

روش بث آنساتز .... Bethe Ansatz method
فضای جابه‌جایی .... Commutative space
پتانسیل کرنل .... Cornell potential
ویژه‌تابع .... Eigenfunction
ویژه‌مقدار .... Eigenvalue
همیلتونی .... Hamiltonian
پتانسیل موزون .... Harmonic potential
پتانسیل کیلینگ بک .... Killingbeck
معادله دیفرانسیل کلین-گوردون .... Klein-Gordon differential equation
پتانسیل کراتزر .... Kratzer potential
فضای ناجابه‌جایی .... Noncommutative space
فضای فاز .... Phase space
قطب .... Pole
مختصات قطبی .... Polar coodinate
پتانسیل پوش-تلر .... Poschl-Teller potential
مانده .... Residue
معادله دیفرانسیل شرودینگر .... Schrodinger differential equation
پتانسیل موزون انتقال‌یافته .... Shifted Harmonic potential
تابع موج .... Wavefunction

نمایه

Aabstract

In this thesis, the solution of second order differential equation schrodinger kill any challenge that is very important in physics and engineering sciences. Since these equations do not have the exact solution by existing conventional method, we proposed guesswork method apllied to determine this equations the eigenvalues and eigenfunctions that analytical method is known Bethe Ansatz, and answer just the polynomial the result is accurate. To ensure the integrity of the result, the corresponding equations are solved in other ways.

keywords: Schrodinger equation, eigenvalues, eigenfunctions, Bethe Ansatz method.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Comparison of analytical and numerical eigenvalues and eigenfunctions for a class of Schrodinger equation type

Zohre Shakoori

Supervisor

Dr.M. Ghovatmand

Advisors

Dr.H. Hassan Abadi and Dr.A. Mesforush

september 2016