



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

مدل‌های مکانیابی تک‌وسیله‌ای روی صفحه و شبکه با پارامترهای احتمالی

دانشجو: زینب دورمحمدی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضا زاده

استاد مشاور

دکتر جعفر فتحعلی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیر ماه ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر دلسوز، مادر مهربان و همسر عزیزم

قدردانی و تشکر

در ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نزاکتی که برای من راهنمایی بسیار صبور و راهگشا بودند و همچنین جناب آقای دکتر فتحعلی که ایده‌ها و نظرات حکیمانه ایشان راهگشای بنده بود، کمال سپاسگزاری را دارم. از پدر و مادرم که هیچگاه تنه‌ایم نگذاشتند و بی دریغ هر آنچه در توان داشتند نثار زندگی من کردند، سپاسگذارم و از همسرم که قدم به قدم همراه واقعی و همگام دلسوز من بود متشکرم. همچنین لازم می‌دانم مراتب سپاس خود را از دوستانی که بی‌دریغ مرا در انجام این پایان نامه یاری نمودند اعلام نمایم. برای تمامی این عزیزان آرزوی موفقیت و کامیابی دارم.

پیشگفتار

در سال‌های اخیر مطالعات مکانیابی به عنوان یکی از عناصر کلیدی در زندگی بشر و موفقیت آنها در بسیاری از امور، مطرح شده است. مطالعات مکانیابی هم در سطح ملی و هم در سطح بین‌المللی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این میان شناخت هدف‌ها و روش‌های حل مسائل مکانیابی از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است.

در این تحقیق ضمن بیان اهمیت و اهداف علم مکانیابی، مساله مکانیابی از دیدگاه احتمالی بررسی شد و در فصل اول به بیان مقدمات و تعاریف پرداخته شده است. در فصل دوم مساله مکانیابی مرکز روی شبکه، با این فرض که سرعت روی یال‌ها به طور تصادفی و دارای توزیع نرمال هستند بررسی شده است. در فصل سوم مساله مکانیابی مینیماکس روی صفحه با این شرط که وزن نقاط دارای توزیع یکنواخت هستند حل شده و در پایان در فصل چهارم به بررسی مساله‌ی مرکز در صفحه با وزن‌های تصادفی، در صورتی که وزن‌ها دارای تابع توزیع دلخواه بوده و فاصله‌ها نیز بوسیله هر تابع نرمی اندازه گرفته شوند، پرداخته ایم.

چکیده

مسائل مکانیابی از اوایل دهه ۹۰ میلادی جایگاه مهمی در مباحث تحقیق در عملیات پیدا کرده است. در این گونه مسائل به بررسی چگونگی قرارگیری یک مجموعه از تسهیلات^۱ برای بهینه سازی یک تابع هدف معلوم به همراه تعدادی از محدودیت ها می پردازند. مسائل مکانیابی تسهیلات، در گستره وسیعی از کاربردها بکار می روند. انواع گوناگونی از مسائل مکانیابی تسهیلات وجود دارند که برخی از رده های مهم آن عبارتند از: مکانیابی گسسته، پیوسته، شبکه ای و تصادفی. به دور از واقعیت نیست که در دراز مدت بسیاری از پارامترهای مسائل مکانیابی از جمله تجهیزات، تقاضا، زمان طی مسافت، هزینه تجهیزات و حتی فواصل و سرعت، ممکن است تغییر نمایند و ثابت نباشند که این تغییرات اغلب تصادفی می باشند. در این صورت هر کدام از این متغیرها دارای توزیع احتمال بوده و مساله باید بصورت احتمالی بررسی شود. بنابراین برای هر توزیع احتمال وابسته به متغیر تصادفی مربوطه باید تابع هدفی متناسب با آن توزیع احتمال، مطرح گردد. که در این تحقیق پس از مطرح کردن یک مساله روی شبکه و یک مسئله روی صفحه با توزیع احتمال خاص، در به معرفی دو تابع هدف و دو الگوریتم برای حل مسائل مکانیابی با پارامترهای احتمالی، با تابع توزیع احتمال و تابع نرم دلخواه می پردازیم.

کلمات کلیدی: مکان یابی، مکانیابی تک وسیله ای، تابع توزیع احتمال

^۱Facilities

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه و تعاریف

۲	۱-۱- مقدمه
۳	۱-۲- تعاریف
۶	۱-۳- دسته بندی مسائل مکانیابی
۷	۱-۳-۱- مساله مجموعه پوششی
۸	۱-۳-۲- مدل‌های p - میانه (مسئله وبر)
۸	۱-۳-۲-۱- فرمول بندی مساله p - میانه
۸	۱-۳-۳- مدل‌های p - مرکز
۹	۱-۳-۳-۱- مسئله p - مرکز
۱۰	۱-۳-۳-۲- فرمول بندی مساله p - مرکز
۱۰	۱-۴- اهداف مسائل مکانیابی
۱۱	۱-۵- اشتباهات متداول در مطالعات مکانیابی
۱۳	۱-۶- توزیع های احتمال خاص
۱۴	۱-۶-۱- توزیع برنولی
۱۴	۱-۶-۲- توزیع یکنواخت
۱۵	۱-۶-۳- توزیع نرمال
۱۶	۱-۶-۳-۱- توزیع نرمال یک متغیره
۱۶	۱-۶-۳-۲- توزیع نرمال استاندارد

- ۱-۳-۳-۶- توزیع نرمال دو متغیره
۱۶
۱-۳-۴-۶- توزیع نرمال چند متغیره
۱۷

فصل دوم: مسئله ۱- مرکز احتمالی روی شبکه

- ۱-۲- مقدمه
۱۹
۱-۲- تجزیه و تحلیل مسئله
۲۰
۲-۲- تابع هدف مسئله
۲۱
۳-۲- محاسبه تابع هدف مسئله
۲۳
۴-۲- طرحهای کاهش
۲۴
۵-۲- یافتن یک کران بالا روی یک بازه
۲۴
۶-۲- الگوریتم حل مسئله
۲۵

فصل سوم: مسئله مکانیابی مینیماکس احتمالی روی صفحه

- ۱-۳- مکانیابی در صفحه با احتمال مینیمم
۳۰
۲-۳- تعریف مسئله
۳۱
۱-۲-۳- حالت ۱: به ازای هر i ، $b_i \leq 2a_i$
۳۶
۲-۲-۳- حالت ۲: به ازای هر i ، $b_i > 2a_i$
۴۰

۳-۳- روش مثلث کوچک- مثلث بزرگ برای حل مسئله مکانیابی نامحدب ۴۱

۳-۴- فرمول بندی مسئله WAR ۴۲

۳-۵- مثلثی کردن ۴۳

۳-۶- یک کران پائین برای مسئله WAR در یک مثلث ۴۶

فصل چهارم: مسئله یک مرکز در صفحه با وزنهای تصادفی مستقل

۴-۱- مساله یک مرکز در صفحه ۴۹

۴-۲- اصول مسائل بهینه سازی قطعی ۵۰

۴-۲-۱- ماکزیمم احتمال پوشش برای یک آستانه داده شده ۵۱

۴-۲-۲- کوچکترین آستانه با احتمال پوشش کران دار شده از پایین ۵۵

۴-۳- تحلیل مساله (C_f) ۵۹

۴-۴- اعمال حسابی روی بازه های حقیقی ۶۱

۴-۵- تحلیل مساله (R_α) ۶۸

نتیجه گیری و پیشنهادات ۷۰

مراجع ۷۱

فهرست جداول

جدول ۱-۲: کران بالا برای همه یالها	۲۷
جدول ۲-۲: مقدار تابع هدف در مرکز هر یال	۲۷
جدول ۳-۲: بیشترین احتمال روی یال ۲-۱۴	۲۸
جدول ۱-۳: نقاط تقاضا برای مثال	۳۸
جدول ۲-۳: جواب بهینه برای مقادیر مختلف T برای مثال ۱-۳	۴۰
جدول ۱-۴: ضرب بازه های X و Y	۶۳
جدول ۲-۴: تقسیم بازه های X و Y بطوریکه $0 \neq y$	۶۴

فهرست اشکال

شکل ۱-۳ ۳۵

شکل ۲-۳ ۳۵

شکل ۳-۳: جواب و ناحیه ی S برای مثال ۱-۳ ۳۹

شکل ۴-۳: جواب مثال ۱-۳ ۴۱

شکل ۵-۳: دیاگرام ورنوی ۴۴

شکل ۱-۴ ۶۷

شکل ۲-۴ ۶۸

فصل اول

مقدمه و تعاریف

۱-۱- مقدمه

در این فصل، ابتدا خلاصه ای از تاریخچه مسائل مکانیابی را بیان کرده و سپس به بیان یک سری تعاریف مورد نیاز مسائل مکانیابی و همچنین اهداف، انواع مدل‌های مکانیابی و اشتباهات متداول در مکانیابی می‌پردازیم و چون در این پایان‌نامه، مسائل مکانیابی را با پارامترهای احتمالی مورد بحث قرار می‌دهیم، توضیحی مختصر از توزیع‌های احتمالی بکار برده شده نیز ارائه می‌دهیم.

مطالعات مکانیابی یکی از اقدام‌های کلیدی در فرایند تعیین محل تسهیلات محسوب می‌شود که توجه به این مهم در موفقیت مراکز، نقش بسزایی دارد. اهمیت این مطالعات به اندازه‌ای است که به تازگی درمورد مراکز فعال نیز، این مطالعات دوباره صورت می‌گیرد و در برخی از موارد منجر به تغییر محل تسهیلات نیز می‌شوند. به طور کلی می‌توان گفت: وقتی می‌خواهیم یک سری تجهیزات و تسهیلات را در یک منطقه به گونه‌ای مستقر نمائیم بطوریکه بهترین استفاده از این حداقل امکانات را برده باشیم، از علم مکانیابی جهت رسیدن به اهداف خود سود می‌بریم. از زمان‌های دور، افراد بشر در زندگی روزمره خود بصورت ناخودآگاه از مکانیابی استفاده می‌کرد. برای مثال امپراطور کنتستانین در قرن چهاردهم که مساله مکانیابی نقطه ای بر روی شبکه، که نشان دهنده مکان پایگاه‌های ارتش رم بود، را حل کرد. در این روش پایگاه‌ها باید به گونه‌ای قرار می‌گرفتند که بتوانند درمقابل تهدیدات مهاجمان و شورشی‌های محلی از امپراطوری دفاع کنند [۳۳].

ولی مساله مکانیابی بصورت تئوری توسط فرما^۱ در قرن هفدهم بصورت زیر مطرح شد: فرض کنید ۳ نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را بگونه‌ای بیابید که مجموع فاصله‌های آن تا سه نقطه داده

^۱ Fermat

شده، کمینه شود. توریچلی^۱ در سال ۱۶۴۰ این مساله را حل کرد، به این دلیل نقطه بهینه را نقطه توریچلی و مساله را مساله فرما نامیدند.

در سال ۱۹۰۹ اولین تعریف مساله مکانیابی بصورت کاربردی و مدرن توسط وبر^۲ ارائه شد [۳۸]. در سال ۱۹۶۴ حکیمی^۳ مطالعات جدی را بر روی این مساله انجام داد و تابع هدف این مسائل را بصورت کمترین مجموع و مینیماکس مطرح کرد [۱۷، ۱۸]. او همچنین مسائل مکانیابی را بر روی شبکه‌ها نیز بررسی کرد. اولین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکانیابی توسط هندلر^۴ و میرچندانی^۵ ارائه شد [۲۱، ۲۰]. پس از آن طبقه‌بندی‌های دیگری از مسائل مکانیابی توسط هاماکر^۶ و نیکل^۷ [۱۹] و تانسل^۸ و همکاران [۳۶]، همچنین کراروپ^۹ و پروزن^{۱۰} [۲۶]، هانسن^{۱۱} و همکاران [۲۳] اون و دسکین^{۱۲} [۲۹]، کاپانرا^{۱۳} [۶]، اسکاپارا^{۱۴} و همکاران [۳۴]، کارنت^{۱۵} و همکاران [۹] و پلگرین^{۱۶} [۳۱] نیز انجام شد.

۱-۲- تعاریف

تعریف ۱-۲-۱. گراف $G=(V,E)$ مجموعه‌ای از رئوس V و مجموعه‌ای از یال‌های E است که به

هر عضو e از مجموعه E یک زوج $(a,b) \in V \times V$ (نه لزوماً مرتب) نظیر می‌شود. a, b را نقاط انتهایی یال e گویند.

¹ Torricelli

² Weber

³ Hakimi

⁴ Handler

⁵ Mirchandani

⁶ Hamacher

⁷ Nickel

⁸ Tansel

⁹ Krarup

¹⁰ Pruzan

¹¹ Hansen

¹² Daskin

¹³ Cappanera

¹⁴ Scaparra

¹⁵ Current

¹⁶ pelegrin

تعریف ۱-۲-۲. یک شبکه، گرافی است که به مجموعه رئوس آن، مجموعه گره‌ها و به مجموعه یال‌های آن، مجموعه کمان‌ها گفته می‌شود و هر کدام از کمان‌ها دارای برچسب‌های عددی هستند. این برچسب‌ها معمولاً نشان دهنده هزینه، ظرفیت یا عرضه و تقاضا هستند. در شبکه ممکن است خود راس‌ها نیز برچسب‌گذاری شوند که نشان‌دهنده وزن رئوس خواهند بود.

تعریف ۱-۲-۳. گشت، دنباله‌ای متناهی و متناوب از رئوس ویال‌ها می‌باشد. مسیر، گشتی است که علاوه بر یال‌های متمایز، راس‌های متمایز نیز دارد. دور، مسیری است که رئوس ابتدائی و انتهائی بر هم منطبق باشند.

تعریف ۱-۲-۴. گراف همبند، گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه آن یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۲-۵. درخت، گرافی است که دور ندارد و ضمناً همبند نیز می‌باشد و آن را با $T(V, E)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱-۲-۶. فاصله بین نقاط $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ و $p_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix}$ در صفحه با $d(x, p_i)$ نمایش داده می‌شود.

فاصله بین ۲ نقطه را در صفحه می‌توان توسط نرم‌های مختلفی اندازه‌گیری کرد. از جمله:

$$1- \text{نرم } l_1 \text{ یا نرم مستطیلی: اگر } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ و } p_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix} \text{ آنگاه:}$$

$$d(x, p_i) = l_1(x, p_i) = |x_1 - p_{i1}| + |x_2 - p_{i2}| \quad (1-1)$$

به این نرم اصلاحاً، منهن نرم^۱ نیز گفته می‌شود.

$$2- \text{نرم } l_2 \text{ یا نرم اقلیدسی:}$$

$$d(x, p_i) = l_2(x, p_i) = \sqrt{(x_1 - p_{i1})^2 + (x_2 - p_{i2})^2} \quad (2-1)$$

$$3- \text{نرم } l_\infty \text{ یا نرم چبیشف}^2:$$

^۱Manhattan norm
^۲Chebyshev norm

$$d(x, p_i) = l_\infty(x, p_i) = \max\{|x_1 - p_{i_1}|, |x_2 - p_{i_2}|\} \quad (3-1)$$

تعریف ۷-۲-۱. تابع f محدب است هرگاه:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad 0 < \lambda < 1 \quad x_1, x_2 \in D_f \quad (4-1)$$

که D_f دامنه f می باشد.

تعریف ۸-۲-۱. تابع f مقعر است هرگاه:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad 0 < \lambda < 1 \quad x_1, x_2 \in D_f \quad (5-1)$$

تعریف ۹-۲-۱. یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) محدب است، اگر پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه

آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار گیرد. در غیر اینصورت

آن ناحیه را غیر محدب می‌نامند.

تعریف ۱۰-۲-۱. اگر $S \in R^n$ باشد، پوسته محدب^۲ S که با $H(S)$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام

ترکیبات محدب S است به عبارت دیگر $x \in H(S)$ است اگر و تنها اگر x را بتوان بصورت زیر نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \quad , \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad , \quad \lambda_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

که k عددی صحیح است و $x_1, x_2, \dots, x_k \in S$

به عبارت دیگر، $H(S)$ ، کوچکترین مجموعه محدب شامل S است و همچنین $H(S)$ اشتراک تمام

مجموعه‌های محدب شامل S است.

^۲convex hull

۱-۳- دسته بندی مسائل مکانیابی

مسائل و مدل های مکانیابی را می توان به روش های متفاوتی طبقه بندی نمود. انواع گوناگونی از مسائل

مکانیابی تسهیلات وجود دارند که برخی از رده های مهم آن عبارتند از:

(۱) مسئله مکانیابی تسهیلات گسسته که در آن مجموعه ی نقاط تقاضا و مکان های تسهیلات

مشخص می باشد.

(۲) مسئله مکانیابی تسهیلات پیوسته که در آن مجموعه نقاط تقاضا مشخص ولی مکان های

تسهیلات لزوماً مشخص نیستند.

(۳) مسئله مکانیابی تسهیلات شبکه ای که در یک شبکه تعداد معینی از اتصالات و گره ها محدود

شده اند.

(۴) مسئله مکانیابی تسهیلات تصادفی که در آن برخی از پارامترهای تقاضا یا زمان سفر تصادفی

هستند.

این طبقه بندی ها بر اساس مشخصه های گوناگونی صورت می پذیرند. برخی از این مشخصه ها عبارتند

از:

➤ درختی یا گراف بودن مدل

➤ تعداد مراکز استقرار

➤ ساکن یا پویا بودن مدل

➤ قطعی یا احتمالی بودن مدل

➤ محدود بودن یا نبودن ظرفیت مراکز استقرار

➤ برخی از عوامل موثر بر این طبقه بندی ها ، نیز عبارتند از:

✓ مشخصات تسهیلات جدید: تعداد، اندازه تسهیلات، نقطه ای و یا ناحیه ای بودن مکان تسهیلات

✓ مکان تسهیلات فعلی

✓ اندازه گیری فاصله‌ها: خط مستقیم، اقلیدسی، پله‌ای

✓ فضای جواب: تک بعدی، چند بعدی، پیوسته، گسسته، محدود، نامحدود

✓ تاثیر متقابل تسهیلات جدید رابطه‌ی کیفی/ کمی، پارامتری/ متغیری، قطعی/ احتمالی و...

✓ نوع هدف: مینیمم/ماکسیمم/ کمی/ کیفی

اما درحالت کلی مسائل مکانیابی با توجه به هدف‌های متعدد به دسته‌های گوناگونی تقسیم می‌شوند که به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم.

۱-۳-۱- مساله مجموعه پوششی^۱

دربسیاری از مسائل واقعی تعداد مراکز لازم برای سرویس دهی به تمام تقاضا بسیار زیاد است به علاوه مدل مجموعه پوششی در مواجهه با این واقعیت که مقدار تقاضا در نقاط مختلف، متفاوت است به مشکلاتی برمی‌خورد. به منظور بر طرف کردن این نواقص ، مدل مکانیابی مجموعه پوششی ماکزیمال^۲ ارائه می‌شود. که هدف این مدل قرار دادن تعداد از پیش تعیین شده ای از تسهیلات مثلا p تا در شبکه است به گونه‌ای که بیشترین گره‌های تقاضا پوشش داده شوند[۸]

^۱ Set covering problem

^۲ Maximum covering

۱-۳-۲- مدل های p -میانه (مسئله وبر^۱)

این قبیل مسائل برای مکانیابی p مرکز، در p مکان انجام می شود و یک معیار هزینه ای را مینیمم می کند. هزینه ممکن است برحسب زمان، پول، تعداد سفر، مسافت کل یا هر مقیاس دیگری بیان شود. به علت این که در این گونه مسائل، هدف حداقل کردن هزینه کل است، با نام مسائل حداقل مجموع یا مسئله وبر نیز مطرح است [۱۷، ۱۹].

۱-۳-۲-۱- فرمول بندی مساله p - میانه

فرض کنید n نقطه $p_1, p_2, \dots, p_n$ موجودند و به ترتیب دارای وزن های $w_1, w_2, \dots, w_n$ هستند. می خواهیم مجموعه ای $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ را بگونه ای بیابیم تا مجموع فواصل وزنی X تا نقاط موجود، کمینه شود و به صورت زیر می نویسیم

$$\min \sum_{i=1}^n w_i d(X, p_i) \quad (۶-۱)$$

$$d(X, p) = \min_{x_i \in X} \{d(x_i, p)\} \text{ و}$$

۱-۳-۳- مدل های p - مرکز

این قبیل مسائل برای تعیین مکان p مرکز به منظور حداقل کردن حداکثر فاصله هر مرکز تا نقطه تقاضایی که برای خدمت دادن به آن نقطه مورد تقاضا تعیین شده است، استفاده می شوند. در واقع این گونه مسائل برای استقرار خدمات اورژانس، آتش نشانی، خدمات آمبولانس و مراکز پلیس در جامعه مورد استفاده قرار می گیرند. در این مسائل تعداد مراکز از پیش مشخص است. مسائل p -مرکز با عنوان مسائل مینیماکس نیز معرفی می شوند [۱۵].

^۱ Weber problem

۱-۳-۳-۱- مسئله p -مرکز

مفهوم کلی مسئله p -مرکز عبارت است از استقرار بهینه p مرکز عرضه (کالا یا خدمات) در یک جامعه (مجموعه‌ای از مراکز تقاضا) به گونه‌ای که حداکثر فاصله (هزینه یا زمان) حمل کالا (خدمات) از مراکز عرضه به مراکز تقاضا حداقل گردد. به عبارت دیگر هدف، حداقل کردن حداکثر هزینه تامین تقاضا از مراکز عرضه می‌باشد. در حالتی که مسئله بر روی شبکه انجام می‌گیرد (یعنی مراکز عرضه و تقاضا هر کدام گره‌هایی از یک شبکه باشند) مسئله عبارت خواهد بود از یافتن p مرکز عرضه روی یک شبکه به گونه‌ای که حداکثر هزینه تامین تقاضا حداقل شود.

معرفی یک مدل ریاضی بدون بحث درمورد فواید آن کامل نیست. در این جا به طور خیلی مختصر به برخی از کاربردهای مدل p -مرکز اشاره می‌کنیم. تعدادی از کاربردهای بالقوه این مدل را می‌توان برای تصمیم‌گیری درباره مکان، استقرار سیستم‌های خدمات اضطراری (همانند خدمات و اورژانس بیمارستانی، آتش نشانی، پلیس و...) شبکه ارتباطات کامپیوتری (مانند مکان، فایل‌های داده‌ها) مسائل توزیع (مانند کارخانه‌های صنعتی، انبارها و گاراژها) کاربردهای نظامی، بخش‌های عمومی و دولتی (مانند مکان موسسات دولتی، پارکینگ‌ها و هتل‌ها و خوابگاه) کاربردهای مالی (مانند حساب‌های بانکی) و مکانیابی صندوق‌های پستی و ایستگاه‌های اتوبوس فهرست کرد.

ویژگی‌های عمده ای که تاکنون در مورد مدل p -مرکز شناسایی شده‌اند، عبارتند از:

- ❖ روی سطح یا شبکه بودن مساله
- ❖ درحالت شبکه، سیکلی یا درختی بودن شبکه
- ❖ محدود یا نامحدود بودن ظرفیت منابع
- ❖ یکسان یا متفاوت بودن نوع مراکز تقاضا
- ❖ یکسان یا متفاوت بودن نوع مراکز عرضه

❖ آیا تقاضا لزوماً از نزدیکترین مرکز عرضه به نقطه تقاضا تامین می‌شود.

❖ وزن دار بودن یا بدون وزن بودن تقاضاها

❖ قطعی یا احتمالی بودن مدل

❖ تک منظوره یا چند منظوره بودن تابع هدف

البته آنچه در فوق به آن اشاره گردید، مجموعه خواصی است که از میان توابع مطالعه شده استخراج گردیده است. واضح است که این امکان نیز می‌تواند وجود داشته باشد که مسائلی با ویژگی‌های جدید مطرح شوند و یا مسائلی دارای ترکیبی از ویژگی‌های فوق الذکر باشند.

۱-۳-۲- فرمول‌بندی مساله p -مرکز

فرض کنید n نقطه $p_1, p_2, \dots, p_n$ موجودند و به ترتیب دارای وزن‌های $w_1, w_2, \dots, w_n$ هستند. می‌خواهیم مجموعه‌ی $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ را بگونه‌ای بیابیم تا فاصله وزنی X تا دورترین نقطه موجود کمینه شود و به صورت زیر می‌نویسیم [15,37].

$$\min \max_{i=1, \dots, n} w_i d(X, p_i) \quad (7-1)$$

۱-۴- اهداف مسائل مکانیابی

مسائل مکانیابی، هدف‌های مختلفی را در بر دارند. هدف‌ها در شناسایی و اولویت‌بندی معیارهای تصمیم‌گیری در یک مساله مکان‌یابی و زیرمعیارهای آن‌ها، اهمیت و نقش مهمی دارند. در یک تقسیم‌بندی هدف‌های مسایل مکانیابی با رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی و بر حسب انواع تابع هدف، به ۳ دسته زیر می‌توان اشاره کرد [۱۰]:

۱- هدف‌های کششی (pull): این هدف‌ها اشاره به نزدیکی هر چه بیشتر محل استقرار سرویس

دهنده (تسهیلات) به مشتریان و کمتر کردن مسافت دارند که شامل قدیمی‌ترین مسائل مکانیابی

می‌شوند. در واقع مسائلی که تابع هدف آنها بصورت کمینه سازی است، هدف‌های کششی دارند.

۲- هدف‌های فشاری (push): این هدف‌ها مسایل مکانیابی مراکز نامطلوب را دربر می‌گیرند و از اوایل

دهه ۱۹۷۰ بوجود آمدند. هدف در این مسائل، حداکثر کردن فاصله مراکز جدید از مراکز موجود

است. مدل‌هایی که برای این نوع هدف‌ها ارائه شدند بعدها به مدل‌های مکانیکی مضر^۱ معروف

شدند. مثال برای این هدف‌ها، یافتن مکان مناسب برای دفن زباله است که در آن، یکی از هدف‌ها

بهینه کردن فاصله این مکان از مناطق مسکونی است.

۳- هدف‌های متعادل (Balancing): هدف‌هایی هستند که تلاش در متعادل ساختن مسافت بین

مراکز و مشتریان دارند و هدف اصلی آن‌ها دستیابی به برابری است. این هدف‌ها بیشتر در

تصمیم‌گیری‌های عمومی کاربرد دارند. جایی که هدف برقراری عدالت بین افراد است. مانند

متعادل کردن حجم کاری مراکز پلیس که سبب متعادل شدن ارائه خدمات به متقاضیان می‌شود.

۱-۵- اشتباهات متداول در مطالعات مکانیابی

اشتباه در تعیین محل، ضررهای جبران ناپذیری به دنبال خواهد داشت که گاهی منجر به تغییر محل

سرویس دهنده با صرف هزینه‌های زیاد شده، یا به رکود و تعطیلی سرویس دهنده (مثلاً کارخانه) می-

انجامد. عموماً اشتباه در تعیین محل، هنگامی پیش می‌آید که تعریف درستی از آنچه از ما خواسته می

^۱ Noxious location models

شود در دست نباشد. ولی اشتباه‌های دیگری نیز وجود دارد که حتی مدیران زیرک نیز دچار آن می‌شوند. برخی از این نوع اشتباه‌ها برای توجه بیشتر مدیران، محققان و افراد کلیدی و تصمیم‌گیری در مسائل مکانیابی به این شرح بیان می‌شود [۴۱]:

- ۱- فقدان بازرسی و شرح دقیق عوامل و نیازمندی‌ها.
- ۲- چشم‌پوشی از بعضی شرایط مورد نیاز و بررسی ناقص نیازمندی‌های طرح.
- ۳- علائق شخصی یا تعصبات مسئولان در پذیرش حقایق و دلایل منطقی و علمی.
- ۴- مقاومت مدیران اجرایی در انتقال به محل جدید
- ۵- توجه بیش از اندازه به نواحی شلوغ و صنعتی و در نتیجه نادیده گرفتن ناحیه‌هایی که به تازگی صنعتی شده و یا در شرف صنعتی شدن قرار دارند.
- ۶- توجه بیش از اندازه به هزینه‌های زمین و در نتیجه انتخاب زمین‌های ارزان یا رایگان
- ۷- بی‌توجهی به هزینه حمل و نقل و عدم برآورد درست آن
- ۸- قضاوت در مورد نیروی انسانی بالقوه بر مبنای نرخ دستمزد و بدون توجه به کارایی، مهارت، سابقه و تاریخچه کارگری و سایر عوامل موثر در انتخاب نیروی انسانی
- ۹- انتخاب جامعه‌ای با سطح فرهنگ و تحصیلات پایین به گونه‌ای که جذب نیروی متخصص بسیار مشکل باشد.
- ۱۰- پافشاری در منافع آنی و کوتاه مدت و بی‌توجهی به آن
- ۱۱- کافی نبودن اطلاعات و یا نادرست بودن آن‌ها در مورد بازار، شیوه‌های حمل و نقل، مواد خام و سایر عوامل که در برآورد هزینه‌ها تاثیر دارند.
- ۱۲- عوامل محیطی از جمله فشارهای سیاسی
- ۱۳- خطا در به کارگیری روش‌ها و تکنیک‌های تصمیم‌گیری مکانیابی

۱۴- عدم اولویت‌بندی (وزن دهی) مناسب به معیارهای تصمیم‌گیری

۱۵- نبود اطلاعات دقیق و کلی در زمینه معیارهای مورد نظر

۱۶- بی‌توجهی به استراتژیک بودن و اثرات بلند مدت تصمیم‌های مکانیابی

۱۷- بی‌توجهی به تغییر و تحولات آینده (تهدیدها، فرصت‌ها، رشد تقاضا، به هم خوردن توازن مناطق)

۱۸- در نظر نگرفتن تغییرات سازمانی لازمه مکانیابی

بنابراین انجام مطالعات مکانیابی درست و مناسب، علاوه بر تاثیر اقتصادی، اثرات اجتماعی، محیط زیستی و فرهنگی را باعث خواهد شد.

۱-۶- توزیع‌های احتمال خاص

فرض کنید X یک متغیر تصادفی دلخواه است. توزیع احتمال X تابعی است از دامنه آن به بازه $[0,1]$ ، به طوری که احتمال رخ دادن پیشامد $X \leq x$ را به ازای هر $x \in R$ نشان می‌دهد. و بصورت دقیق به شکل زیر نمایش داده می‌شود

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (۱-۸)$$

بر اساس اینکه X گسسته یا پیوسته باشد توزیع، گسسته یا پیوسته نام می‌گیرد. از آن‌جا که در این تحقیق، مکانیابی را بصورت احتمالی مورد بحث قرار دادیم لازم است توضیحی مختصر در مورد تابع توزیع‌های بکار رفته، داده شود [۴۰].

۱-۶-۱- توزیع برنولی

توزیع برنولی توزیعی گسسته است که نام آن از نام دانشمند سوئیسی ژاکوب برنولی^۱ گرفته شده است. اگر آزمایشی تصادفی دو برآمد داشته باشد، "پیروزی" و "شکست". و احتمال آن‌ها به ترتیب p و $q=1-p$ باشند، آنگاه نتیجه آزمایش، توزیع برنولی دارد.

به صورت نمادی: متغیر تصادفی X با گستره‌ی $k=\{0,1\}$ توزیع برنولی دارد، و به آن عنوان متغیر تصادفی برنولی داده می‌شود اگر و تنها اگر تابع توزیع احتمال آن بصورت زیر باشد

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } k < 0 \\ q & \text{for } 0 \leq k < 1. \\ 1 & \text{for } k \geq 1 \end{cases} \quad (۹-۱)$$

و تابع جرم احتمال آن نیز به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{if } k = 1 \\ q & \text{if } k = 0 \end{cases} \quad (۱۰-۱)$$

میانگین توزیع برنولی p و واریانس آن pq است.

۱-۶-۲- توزیع یکنواخت

متغیر X در بازه $[a, b]$ ، متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته است اگر و تنها اگر تابع توزیع احتمال آن بصورت زیر باشد

^۱Jakob bernoulli

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{for } a \leq x < b \\ 1 & \text{for } x \geq b \end{cases} \quad (11-1)$$

و تابع جرم احتمال آن نیز بصورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{o.w} \\ \frac{1}{b-a} & \text{for } a \leq x < b \end{cases} \quad (12-1)$$

هرگاه $a=0$ و $b=1$ باشد، آنگاه توزیع یکنواخت پیوسته را توزیع یکنواخت پیوسته استاندارد گویند.

میانگین توزیع یکنواخت برابر $\frac{a+b}{2}$ و واریانس آن $\frac{(b-a)^2}{12}$ است.

۱-۶-۳- توزیع نرمال

توزیع نرمال ابتدا در سال ۱۷۳۳ در مقاله‌ای توسط آبراهام دموار^۱ معرفی شد. این مقاله در دومین ویرایش از "قانون اساسی شانس‌ها" در قسمت "تخمین قطعی توزیع‌های دو جمله‌ای برای n های بزرگ" در سال ۱۷۳۸ مجدداً به چاپ رسید. توزیع نرمال یا توزیع گاوسی یکی از توزیع‌های احتمالاتی پیوسته است. این توزیع با میانگین و واریانس آن توصیف می‌شود. به علت شباهت نمودار توزیع نرمال به زنگوله به آن انحنای زنگوله‌ای نیز گفته می‌شود. دلیل اهمیت توزیع نرمال از وجود قضیه حد مرکزی ناشی می‌شود. بر اساس قضیه ی حد مرکزی هنگامی که تعداد بسیار زیادی متغیر تصادفی با توزیع دلخواه (واریانس محدود) را با هم جمع کنیم و میانگین بگیریم، توزیع نهایی به توزیع نرمال میل می‌کند. به همین خاطر هنگامی که شاهد تاثیر حجمی بسیاری از پدیده‌های تصادفی هستیم، نتیجه نهایی با

¹ Demoar

توزیع نرمال قابل توصیف است. به تجربه ثابت شده است که در دنیای اطراف ما توابع بسیاری از متغیرهای طبیعی از همین تابع پیروی می کنند.

۱-۳-۶-۱- توزیع نرمال یک متغیره

متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال است و به آن متغیر تصادفی نرمال اطلاق می شود، اگر و تنها اگر تابع چگالی احتمال آن بصورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (13-1)$$

که در آن μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار توزیع نرمالند.

۱-۳-۶-۲- توزیع نرمال استاندارد

توزیع نرمال با $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ ، را توزیع نرمال استاندارد می نامند.

قضیه: اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، آنگاه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ توزیع نرمال استاندارد دارد.

۱-۳-۶-۳- توزیع نرمال دو متغیره

جفت متغیر تصادفی X و Y دارای توزیع نرمال دو متغیره اند و به آنها متغیرهای تصادفی که توأماً به صورت نرمال توزیع شده اند اطلاق می شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال توأمشان برای $-\infty < x < +\infty$ و $-\infty < y < +\infty$ بصورت زیر باشد:

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}. \quad (14-1)$$

که در آن σ_1, σ_2 و μ_1, μ_2 به ترتیب انحراف معیارها و میانگینهای متغیرهای تصادفی X و Y هستند. و $-1 \leq \rho \leq 1$ ضریب همبستگی نامیده می شود که چگونگی تغییر توأم X و Y را اندازه گیری می کند و توسط رابطه زیر داده می شود

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_1\sigma_2} \quad (15-1)$$

اگر متغیرهای X و Y مستقل باشند آنگاه $\text{Cov}(X, Y) = 0$ و $\rho = 0$. در این حالت متغیرهای تصادفی را ناهمبسته می گویند.

۱-۶-۳-۴- توزیع نرمال چند متغیره

بردار متغیرهای تصادفی $X = (x_1, \dots, x_n)$ دارای توزیع نرمال n متغیره است اگر و تنها اگر چگالی احتمال توأم آن برای $-\infty < x_i < +\infty$ بصورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1}(X-\mu)} \quad (16-1)$$

که Σ ماتریس واریانس کواریانس است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad X-\mu = \begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ \vdots \\ X_n-\mu_n \end{bmatrix}$$

که $\sigma_{ij} = \text{cov}(x_i, x_j)$ ، $\sigma_i = \text{var}(x_i)$ و μ_i میانگین متغیر تصادفی X_i است.

فصل دوم

مساله ۱- مرکز احتمالی روی شبکه

۲-۱- مقدمه

مساله تک مرکزی روی یک شبکه در ابتدا توسط حکیمی فرمول‌بندی شد [۱۷]. و یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(n)$ (که n تعداد گره‌ها است) برای پیدا کردن یک مرکز روی یک درخت توسط هندلر ارائه شد [۲۱]. سپس مسئله با یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(mn)$ (m تعداد یال‌ها است) برای پیدا کردن یک تک مرکز روی یک شبکه معمولی توسط کریو و حکیمی توسعه داده شد [۲۵]. یک بحث دیگر از متغیرهای مساله‌ی تک مرکزی توسط میرچندانی و فرانسیس^۱ ارائه شده است [۲۷]. فرانک^۲ یک مساله تک میانه‌ای و تک مرکزی با یک سرویس‌دهنده روی شبکه، هنگامی که وزن‌ها بصورت نرمال توزیع شده‌اند و متغیرهای تصادفی مستقل هستند را بررسی کرده است [۱۶]. برمن^۳ و همکارانش مساله تک مرکزی را با وزن‌های توزیع شده مستقل روی شبکه‌ها و روی صفحه مورد مطالعه قرار دادند [۴،۵]. یک تجدید نظر وسیع از بقیه مدل‌های تصادفی روی شبکه در فصلی از کتاب برمن و کراس^۴ در سال ۲۰۰۲ داده شده است [۳].

در این بخش یک مساله تک مرکزی روی شبکه، هنگامی که سرعت‌ها بصورت تصادفی و نه قطعی هستند را در نظر می‌گیریم که با داشتن یک زمان مطلوب برای رسیدن مشتریان ساکن در گره‌ها، هدف یافتن مکانی برای نوعی سرویس‌دهی است بطوریکه احتمال اینکه تمام این گره‌ها در این محدوده زمانی قرار بگیرند به حداکثر برسد. (اگر شبکه‌ی مورد نظر را یک استان و گره‌های آن را شهرستان‌های موجود در آن استان در نظر بگیریم آنگاه یال‌های شبکه را می‌توان مسافت بین دو شهر در نظر گرفت).

^۱ Francis

^۲ Frank

^۳ Berman

^۴ Krass

یک شبکه را با n گره و m یال در نظر بگیرید. مجموعه‌ی تمامی گره‌هایی که مشتریان در آن قرار دارند V و مجموعه تمامی یال‌ها E است. سرعت حرکت روی هر یال ثابت نیست و بصورت تصادفی توزیع شده است. فرض بر این است که معکوس سرعت بصورت نرمال توزیع شده است بطوریکه زمانی که برای حرکت در امتداد یک یال صرف می‌شود بصورت نرمال توزیع شده است. همچنین سرعت روی یال-های مختلف لزوماً مستقل نیستند و ممکن است به هم وابسته باشند. یک مشتری مسیری را به سمت سرویس‌دهنده یا برعکس انتخاب می‌کند بدون اینکه بداند چه سرعتی روی هر یال وجود دارد. بنابراین مسیر مطابق با زمان سفر انتظار رفته روی هر یال انتخاب می‌شود. برای مثال روی یک شبکه‌ی درختی تنها یک مسیر بین سرویس‌دهنده و گره وجود دارد و بنابراین کاربر هیچ انتخابی برای یک مسیر ندارد. برای مکانیابی ارائه شده‌ی تک سرویس‌دهنده، زمانی که صرف می‌شود تا سرویس دهنده به یک مشتری (گره) برسد بصورت نرمال توزیع شده است. حداکثر زمان لازم برای رسیدن سرویس‌دهنده به همه گره‌ها نیز یک متغیر تصادفی توزیع شده به عنوان یک ماکسیمم از توزیعات نرمال وابسته بهم است. مطلوب این است که ما قادر به رسیدن به هر گره در یک آستانه زمانی T باشیم. و احتمال اینکه ما به تمامی گره‌ها درون حد آستانه T برسیم، باید به حداکثر برسد و این معادل با به حداکثر رسانی احتمال این است که زمان حداکثر سرویس‌دهی برای همه‌ی گره‌ها از محدوده زمانی T تجاوز نکند.

مطالب این فصل از مرجع [۲] گرفته شده است.

۲-۱- تجزیه و تحلیل مساله

فرض کنید n : تعداد گره‌ها، m : تعداد یال‌ها، d_i : طول یال i برای $i=1, \dots, m$ ، t_k : توزیع معکوس سرعت روی یال k ، μ_k : میانگین t_k برای $k=1, \dots, m$ ، δ_k : انحراف معیار t_k برای $k=1, \dots, m$ ، ρ_{ij} : ضریب

همبستگی بین t_i و t_j ، T : زمان مطلوب برای رسیدن به تمامی گره‌ها باشد. زمانی که صرف می‌شود تا از گره i به گره l برسیم، یک متغیر تصادفی T_{il} است که بصورت نرمال توزیع شده است فرض بر این است یال‌هایی که گره i را به l متصل می‌کنند در امتداد کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از سرعت‌های مورد نظر $i_1, i_2, \dots, i_{m(l)}$ باشند. حال روابط زیر را داریم:

$$T_{il} = \sum_{r=1}^{m(l)} t_{i_r} d_{i_r} \quad (۱-۲)$$

$$E(T_{il}) = \sum_{r=1}^{m(l)} \mu_{i_r} d_{i_r} \quad (۲-۲)$$

$$Var(T_{il}) = \sum_{r=1}^{m(l)} \sum_{s=1}^{m(l)} \sigma_{i_r} d_{i_r} \sigma_{i_s} d_{i_s} \rho_{i_r i_s} \quad (۳-۲)$$

که $E(T_{il})$ و $Var(T_{il})$ به ترتیب امید ریاضی و واریانس T_{il} هستند.

۲-۲- تابع هدف مساله

یک نقطه x روی یال k در نظر بگیرید که گره‌های i و j را بهم متصل می‌کند. فرض کنید نقطه x فاصله‌ای از گرهی i با یک نسبت $\alpha \leq 1$ از طول یال d_k داشته باشد. زمانی که سپری می‌شود تا از نقطه x به گرهی l برسیم برابر با زمان رسیدن از گره i به گرهی l بعلاوه زمان از x به j است، یا زمان رسیدن از گره j به گرهی l بعلاوه زمان از x به i است. بنابراین کوتاه‌ترین مسیر از x به l را انتخاب می‌کنیم. برای مثال اگر شبکه یک درخت باشد، ماکسیمم فاصله از نقطه x تا تمام گره‌های درخت بصورت فاصله‌ی نقطه x تا دورترین برگ است. به این خاطر که یک گره که برگ نیست توسط یالی به یک برگ منتهی شده و فاصله افزایش می‌یابد. در یک شبکه، یک زیرمجموعه از دورترین گره‌ها نسبت به گرهی x وجود دارد که آن را با $N(x)$ نمایش می‌دهیم. روش ساده زیر، مجموعه‌ی $N(x)$ را تعیین می‌کند.

۱. با $N(x) = N$ شروع کنید.

۲. باید به تمامی گره‌ها رفت و برای هر گره‌ی انتخاب شده موارد زیر را در نظر گرفت:

- تمامی گره‌ها را که در سر راه گره انتخاب شده قرار دارند، باید تعیین کرد.

- تمامی گره‌های روی مسیر $N(x)$ حذف می‌شوند.

۳. گره‌های باقی مانده در $N(x)$ یک زیر مجموعه از دورترین گره‌ها نسبت به گره x هستند.

برای هر $l \in N(x)$ ، با توجه به این که هر ترکیب خطی از متغیرهای نرمال، دارای توزیع نرمال است،

توزیع نرمال حاشیه‌ای که با $T_l(x)$ نشان داده می‌شود با تعریف زیر بدست می‌آید:

$$T_l(x) = \sum_{r=1}^{m(l)} t_{i_r} d_{i_r} + \alpha_l d_k t_k . \quad (۴-۲)$$

که در آن k یالی است که نقطه x روی آن قرار دارد. اگر مسیر از x به گره‌ی l از گره‌ی i عبور کند

آنگاه دنباله i_r و مقدار $m(l)$ توسط گره i تعیین می‌شود و $\alpha_l = \alpha$. و اگر مسیر از x به گره‌ی l از گره‌ی

j عبور کند آنگاه دنباله i_r و مقدار $m(l)$ توسط گره j تعیین می‌شود و $\alpha_l = 1 - \alpha$. تابع هدف در نقطه

x ، که باید به حداکثر برسد توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$f(x) = P_r \left(\bigcap_{l \in N(x)} \{T_l(x) \leq T\} \right) \quad (۵-۲)$$

تابع هدف در نقطه ارائه شده x ، احتمالی از یک توزیع نرمال چندمتغیره است که از نظر ابعاد معادل

$n(x)$ (عدد اصلی $N(x)$) است و بنابراین روابط زیر بدست می‌آیند.

$$E(T_l(x)) = \sum_{r=1}^{m(l)} \mu_{i_r} d_{i_r} + \alpha_l \mu_k d_k \quad (۶-۲)$$

$$Var(T_l(x)) = \sum_{r=1}^{m(l)} \sum_{s=1}^{m(l)} \sigma_{i_r} d_{i_r} \sigma_{i_s} d_{i_s} \rho_{i_r i_s} + 2 \sum_{r=1}^{m(l)} \sigma_{i_r} d_{i_r} \alpha_l \sigma_k d_k \rho_{i_r k} + \alpha_l^2 \sigma_k^2 d_k^2 \quad (۷-۲)$$

کواریانس بین $T_r(x)$ و $T_s(x)$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T_r(x), T_s(x)) = & \sum_{r=1}^{m(r)} \sum_{s=1}^{m(s)} \sigma_{i_r} d_{i_r} \sigma_{i_s} d_{i_s} \rho_{i_r i_s} + \sum_{r=1}^{m(r)} \sigma_{i_r} d_{i_r} \alpha_r \sigma_k d_k \rho_{i_r k} + \sum_{s=1}^{m(s)} \sigma_{i_s} d_{i_s} \alpha_s \sigma_k d_k \rho_{i_s k} \\ & + \alpha_r \alpha_s \sigma_k^2 d_k^2 \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

ضریب همبستگی بین $T_r(x)$ و $T_s(x)$ یعنی R_{rs} نیز بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_{rs} = \frac{\text{Cov}(T_r(x), T_s(x))}{\sqrt{\text{Var}(T_r(x)) \text{Var}(T_s(x))}} \quad (۹-۲)$$

ماتریس همبستگی R ، از توزیع نرمال چند متغیره بصورت $\forall r, s \in N(x)$ $R = \{R_{rs}\}$ است.

۲-۳- محاسبه تابع هدف مسئله

تابع هدف $f(x)$ در مسئله (۵-۲) می‌تواند توسط احتمالات نرمال چندمتغیره بیان شود. ابتدا شرط

$$T_l(x) \leq T \quad \text{با تعریف} \quad h_l = \frac{T - E(T_l(x))}{\sqrt{\text{Var}(T_l(x))}} \quad \text{استاندارد می‌شود و بنابراین} \quad f(x) = P_r \left(\bigcap_{l \in N(x)} \{Z_l \leq h_l\} \right) \quad \text{را داریم.}$$

که در آن Z_l یک توزیع نرمال استاندارد تک متغیره است و توزیع نرمال چند متغیره بر اساس یک

ماتریس همبستگی R است. اگر Z را بردار متغیره‌های $\{z_1, z_2, \dots, z_{n(x)}\}$ قرار دهیم، f با استفاده از

رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n(x)} |R|}} \times \int_{-\infty}^{h_1} \dots \int_{-\infty}^{h_{n(x)}} e^{-\frac{1}{2} Z^T R^{-1} Z} dz_{n(x)} \dots dz_1 \quad (۱۰-۲)$$

که در آن $|R|$ دترمینان R است. برای محاسبه چنین انتگرال‌هایی به [۱۱، ۱۲] مراجعه کنید. احتمالات

نرمال چندمتغیره برای یک دقت 10^{-4} ، با استفاده از کامپیوتر در کمتر از ۱ ثانیه برای ابعاد ۶ یا کمتر

محاسبه می‌شود. زمان اجرا برای ابعاد بیشتر از ۷ بصورت نمائی رشد می‌کند. احتمالات توزیع های نرمال

چند متغیره با ابعاد ۱۰ در حدود ۲ دقیقه محاسبه می‌شوند و این یعنی مسئله‌هایی تا بیش از ۱۰ نقطه

راسی می‌توانند به راحتی بهینه‌سازی شوند.

۲-۴- طرح‌های کاهشی

برای تعداد گره‌های بیشتر از ۱۰، طرح‌های کاهشی وجود دارد که یک تخمین خوب برای احتمال

$$f(x) = P_r \left(\bigcap_{l \in N(x)} Z_l \leq h_l \right)$$

ارائه می‌دهد. دو طرح اول برای تعداد گره‌های کمتر از ۱۰ نیز می‌توانند به عنوان

کاهش‌دهنده زمان اجرا به کار برده شوند.

۱. اگر یک $h_l \leq -4$ وجود داشته باشد، آنگاه $P_r(Z_l \leq h_l) \approx 0$ و ما نیاز به محاسبه انتگرال و

استفاده از $P = 0$ نداریم.

۲. اگر برای برخی از l ها، $h_l \geq 4$ ، آنگاه می‌توان از این متغیر صرف‌نظر کرد. زیرا

$$P_r(Z_l \leq h_l) \approx 1$$

است. بنابراین ابعاد انتگرال کاهش پیدا می‌کند.

۳. اگر ابعاد باقی مانده هنوز بزرگتر از ۱۰ است، احتمال می‌تواند توسط حذف بزرگترین h_l ها

برآورد شود، تا زمانی که ابعاد به ۱۰ کاهش یابد، احتمال بر اساس ۱۰ متغیر باقی‌مانده

محاسبه می‌شود و سپس در $P_r(Z_l \leq h_l)$ برای h_l های حذف شده ضرب می‌شود که هر

یک توسط توزیع نرمال تک متغیره محاسبه می‌شوند.

۲-۵- یافتن یک کران بالا روی یک بازه

یک بازه‌ی $[x, y]$ را روی یال k در نظر بگیرید (یک بازه را روی بیش از یک یال در نظر نمی‌گیریم).

این بازه می‌تواند تمام یال باشد. برای هر $i \in N(x) \cup N(y)$ ، کوتاه‌ترین مسیر را برای تمامی نقاط در

$[x, y]$ به سمت گره i پیدا می‌کنیم. حال با توجه به فاصله نقطه مورد نظر در بازه $[x, y]$ از گره‌های دو

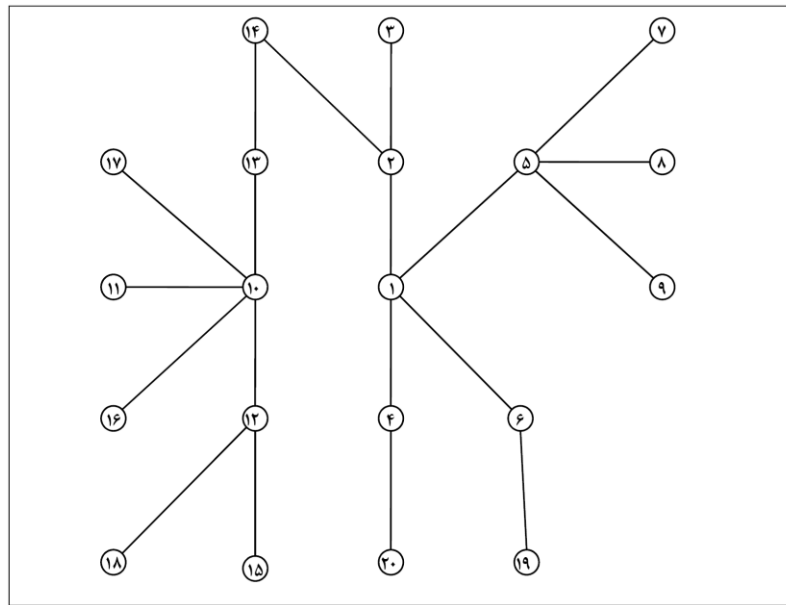
سر یال k ، کوتاه‌ترین مسیر برای این نقطه به سمت گره i پیدا می‌شود. این کوتاه‌ترین مسیر در محاسبه

تابع هدف (۲-۵) استفاده می‌شود. احتمال بدست آمده، یک کران بالا برای تمامی نقاط بازه $[x, y]$ است.

۲-۶- الگوریتم حل مسئله

روش شاخه و کران زیر، جواب بهینه را با دقت ε می‌دهد.

۱. مجموعه S شامل تمامی یال‌ها است. کران بالا، UB_i را، برای تمامی یال‌ها محاسبه کنید.
۲. مقدار تابع هدف را در مرکز بازه با بیشترین کران بالائی محاسبه کرده و آن را کران پائین، LB و x^* را مرکز آن بازه بنامید.
۳. از مجموعه S تمامی بازه‌هایی را که در آن‌ها $UB_i \leq LB + \varepsilon$ هستند را حذف کنید.
۴. اگر مجموعه S تهی است الگوریتم را با LB و x^* به عنوان جواب متوقف کنید.
۵. بازه‌ای را در S با کوچکترین UB_i انتخاب کنید و آنرا از مرکز به دو بازه تقسیم کنید.
۶. بازه قدیمی را از S حذف کنید.
۷. کران بالا را برای دو بازه‌ی جدید محاسبه کنید.
۸. اگر هر کدام از این کران‌های بالا کمتر از $LB + \varepsilon$ باشد، بازه مربوطه نادیده گرفته می‌شود.
۹. در غیراین صورت بازه جدید را به S اضافه کنید و مقدار تابع هدف را در مرکز بازه محاسبه کنید.
- و LB و x^* قدیمی را با مقادیر جدید جایگزین کنید.
۱۰. اگر LB قدیمی با مقدار جدید جایگزین شد به گام ۳ بروید در غیر این صورت به گام ۴ بروید.



شکل ۱-۲: شبکه برای مثال ۱-۲

مثال ۱-۲. شبکه درختی نشان داده شده در شکل (۱-۲) را در نظر بگیرید. طول هر یال ۱ است. تعداد برگ‌های انتهائی ۱۱ است. فرض کنید معکوس سرعت روی هر یال داری میانگین ۱ و انحراف معیار ۰,۲ است. جواب تک مرکزی قطعی مسئله با تمام سرعت‌های معادل ۱، گره ۱۴ با یک فاصله ماکسیمم ۴ است. حال احتمالاتی را محاسبه می‌کنیم که فاصله حداکثر آن‌ها از T برای $T = 4.0, 4.2, \dots, 5.0$ تجاوز نمی‌کند. فرض بر این است که ضریب همبستگی بین هر یک از دو یال صفر است. تنها طرح کاهش ۲ (حذف متغیرهای با $h_l \geq 4$) اجرا می‌شود و بنابراین هیچ تقریبی نیاز نیست. این حدود بالائی در جدول ۱-۲ نشان داده شده است. بالاترین کران بالا برای یال ۲-۱۴ است و بعدی یال ۱۳-۱۴ می‌باشد. این به همان شکلی است که انتظار می‌رود زیرا راه حل گسسته بهینه در گره ۱۴ است. سپس مقدار تابع هدف در مرکز هر یال محاسبه می‌شود. این نتایج در جدول ۲-۲ آورده شده است. طبق الگوریتم کران پایین مقدار تابع هدف در مرکز بازه‌ی ۲-۱۴ برای هر مقدار T می‌باشد. همه یال‌ها بجز ۲-۱۴ و ۱۳-۱۴ کنار گذاشته می‌شوند. زیرا کران بالای آن‌ها از کران پایین بدست آمده به ازای هر مقدار T کوچکتر است. در بهینه سازی گسسته، بیشترین فاصله تا بقیه گره‌ها چهار واحد می‌باشد که این فاصله برای هفت گره

اتفاق می‌افتد، که پنج تای آنها در در سمت راست و تنها دو تای آنها در سمت چپ قرار دارند. به خاطر این عدم تعادل و کران‌های بالا و جواب‌های مرکزی، احتمال می‌دهیم جواب بهتر برای این مساله‌ی احتمالی، روی یالی باشد که گره‌های ۲ و ۱۴ را به هم وصل می‌کند. برای روشن‌تر شدن رفتار تابع هدف، احتمال را برای ۱۰۱ نقطه روی یال ۲-۱۴ با شروع از گره‌ی ۲ به سمت گره‌ی ۱۴ با طول گام‌های ۰,۰۱، محاسبه می‌کنیم. در همه حالت‌ها (بازه‌های به طول ۰,۰۱) یک ماکسیمم محلی وجود دارد. این اطلاعات در جدول ۲-۳ نشان داده شده است.

جدول ۲-۱: کران بالا برای همه یال‌ها

یال		کران بالا					
i	j	$T = ۴,۰$	$T = ۴,۲$	$T = ۴,۴$	$T = ۴,۶$	$T = ۴,۸$	$T = ۵,۰$
۲	۱۴	۰,۲۴۶۳	۰,۴۷۷۲	۰,۷۰۷۹	۰,۸۷۰۹	۰,۹۵۵۰	۰,۹۸۷۶
۱۲	۱۸	.	.	.	.	.	.
۱۲	۱۵	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۲	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۶	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۱	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۷	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۳	.	.	۰,۰۰۰۱	۰,۰۰۱۹	۰,۰۱۴۸	۰,۰۶۹۶
۱۳	۱۴	۰,۰۶۲۲	۰,۲۱۹۲	۰,۴۷۹۸	۰,۷۳۷۲	۰,۹۰۰۲	۰,۹۷۱۱
۲	۳	.	۰,۰۰۰۴	۰,۰۰۴۸	۰,۰۲۸	۰,۱۰۰۱	۰,۲۴۵۴
۱	۲	.	۰,۰۰۰۴	۰,۰۰۴۸	۰,۰۲۸	۰,۱۰۰۱	۰,۲۴۵۴
۱	۵	.	.	.	.	.	۰,۰۰۰۱
۱	۶	.	.	.	.	.	۰,۰۰۰۱
۱	۴	.	.	.	.	.	۰,۰۰۰۱
۴	۲۰	.	.	.	.	.	.
۶	۱۹	.	.	.	.	.	.
۵	۷	.	.	.	.	.	.
۵	۸	.	.	.	.	.	.
۵	۹	.	.	.	.	.	.

جواب بهینه در بازه‌ای بین گره‌ی ۱۴-۲ قرار می‌گیرد. جواب بهینه بستگی به آستانه زمانی T دارد و

نزدیکتر به گره‌ی ۱۴ حرکت می‌کند هنگامی که آستانه زمانی افزایش پیدا می‌کند.

جدول ۲-۲: مقدار تابع هدف در مرکز هر یال

یال		مقدار در مرکز					
i	j	$T = ۴,۰$	$T = ۴,۲$	$T = ۴,۴$	$T = ۴,۶$	$T = ۴,۸$	$T = ۵,۰$
۲	۱۴	۰,۰۱۰۳	۰,۰۵۳۱	۰,۱۶۶۸	۰,۳۶۱۶	۰,۵۹۲۷	۰,۷۸۹۷
۱۲	۱۸	.	.	.	.	.	.
۱۲	۱۵	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۲	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۶	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۱	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۷	.	.	.	.	.	.
۱۰	۱۳	.	.	.	.	۰,۰۰۱	۰,۰۰۱۱
۱۳	۱۴	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۵۵	۰,۰۳۶۱	۰,۱۴۰۱	۰,۳۴۹۱	۰,۶۰۹۰
۲	۳	.	.	.	۰,۰۰۰۳	۰,۰۰۲۷	۰,۰۱۶۵
۱	۲	.	.	.	۰,۰۰۰۳	۰,۰۰۲۷	۰,۰۱۶۵
۱	۵	.	.	.	.	.	.
۱	۶	.	.	.	.	.	.
۱	۴	.	.	.	.	.	.
۴	۲۰	.	.	.	.	.	.
۶	۱۹	.	.	.	.	.	.
۵	۷	.	.	.	.	.	.
۵	۸	.	.	.	.	.	.
۵	۹	.	.	.	.	.	.

جدول: ۳-۲: بیشترین احتمال روی یال ۱۴-۲

ماکسیمم مقدار	موقعیت	T
۰,۰۸۵۵	۰,۸۳	۴,۰
۰,۲۵۱۲	۰,۸۶	۴,۲
۰,۵۰۲۰	۰,۸۸	۴,۴
۰,۷۴۴۴	۰,۹۰	۴,۶
۰,۹۰۰۳	۰,۹۱	۴,۸
۰,۹۷۰۲	۰,۹۳	۵,۰

فصل سوم

مسئله مکانیابی مینیماکس احتمالی روی صفحه

در این فصل یک مسئله مکانیابی مینیماکس وزن دار در صفحه، هنگامی که وزن‌ها داده نشده‌اند، اما اغلب دارای توزیع یکنواخت مستقل هستند را بررسی می‌کنیم. ثابت می‌شود هنگامی که تابع هدف محدب است مسئله می‌تواند توسط روش‌های آسان حل شود و در صورتی که تابع هدف محدب نیست از روش مثلثی کردن استفاده می‌کنیم.

اولین کار در مورد مساله مینیماکس در صفحه با وزن‌های نامعین (که هم‌ارز با پیدا کردن کوچکترین دایره است که همه نقاط تقاضا را بپوشاند) به سیلوستر^۱ نسبت داده شده است [۳۵]. و اولین تکنیک حل کارآمد و موثر بوسیله الزینگ و هرن^۲ در سال ۱۹۷۲ ارائه شد [۱۴]. مسئله مینیماکس وزن دار توسط هرن و ویجی در سال ۱۹۸۲ حل شد [۲۴]. به هر حال در همه این مدل‌ها فرض شده است وزن‌ها داده شده‌اند و تصادفی نیستند. وزن‌های تصادفی برای مسائل مسطح توسط وسولوسکی^۳ در سال ۱۹۷۷ مورد توجه بوده است [۳۹].

۳-۱- مکانیابی در صفحه با احتمال مینیمم

در این نوع مسائل یک مجموعه از نقاط در صفحه داده می‌شوند ولی وزن‌های متناظر با هر یک از نقاط تقاضا مشخص نیست. فرض بر این است که هر کدام از وزن‌ها دارای توزیع یکنواخت در یک بازه‌ی داده شده باشند، زیرا تحلیل یک توزیع یکنواخت آسان‌تر است و می‌تواند به عنوان یک تقریب از بقیه توزیع‌ها بکار گرفته شود.

یک محدوده تعریف می‌شود و هدف ما کسیم کردن احتمال آن است که بیشترین فاصله وزنی از سرویس دهنده، از محدوده داده شده تجاوز نکند. این قبیل مسائل، اساساً برای مکانیابی محل‌های اضطراری همچون ایستگاه‌های آتش‌نشانی، بیمارستان‌ها، آمبولانس و غیره بکار گرفته می‌شود. برای

¹ Sylvester

² Herren

³ Wesolowsky

مکانیابی چنین محلی، هدف مینیمم کردن ماکسیمم فاصله به همه نقاط تقاضا است چون می‌خواهیم بهترین سرویس‌دهی ممکن را به دورترین نقطه تقاضا فراهم کنیم.

مطالب این فصل از مراجع [۵] و [۱۳] گرفته شده است.

۳-۲- تعریف مسئله

فرض کنید w_i به ازای $i=1, \dots, n$ تعداد تقاضا برای سرویس، از نقطه تقاضای i باشد. بعلاوه فرض کنید w_i متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[a_i, b_i]$ باشد و همچنین w_i ها دو بدو مستقل باشند. فاصله اقلیدسی بین نقطه تقاضای i و $X = (x, y)$ را با $d_i(x)$ نشان می‌دهیم.

توجه داشته باشید که اکثر نتایج این بخش برای اکثر فاصله‌های محدب بخوبی برقرار است. هدف پیدا کردن یک مکان سرویس‌دهی است بطوریکه احتمال اینکه بیشترین فاصله وزنی از مکان سرویس‌دهی به همه نقاط تقاضا از یک محدوده T ، تجاوز کند، مینیمم شود. ماکسیمم فاصله وزنی بین مکان سرویس-دهی و همه نقاط تقاضا به عنوان MAX تعریف می‌شود یعنی داریم

$$MAX = \max_{i=1, \dots, n} \{w_i d_i(X)\} \quad (۱-۳)$$

چون وزن‌ها متغیرهای تصادفی هستند، ماکسیمم فاصله وزنی یک متغیر تصادفی برای یک مکان داده شده X دارای یک توزیع احتمال است.

به عبارتی داریم:

$$P(MAX \geq T) = P\left(\max_{i=1, \dots, n} \{w_i d_i(X)\} \geq T\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P\left(w_i \leq \frac{T}{d_i(X)}\right). \quad (۲-۳)$$

چون w_i ها متغیرهای تصادفی یکنواخت روی بازه $[a_i, b_i]$ هستند پس

$$P\left(w_i \leq \frac{T}{d_i(X)}\right) = \begin{cases} \frac{T - d_i(X)a_i}{d_i(X)(b_i - a_i)}, & d_i(X)a_i < T < d_i(X)b_i \\ 1, & T \geq d_i(X)b_i, \\ 0, & T \leq d_i(X)a_i, \end{cases} \quad (3-3)$$

بنابراین هدف ما، ماکسیمم کردن عبارت زیر است

$$F(X) = \prod_{i=1}^n P\left(w_i \leq \frac{T}{d_i(X)}\right). \quad (4-3)$$

حال لم‌های زیر برقرار است.

لم ۳-۱. اگر $\min_X \{\max_{1 \leq i \leq n} \{a_i d_i(X)\}\} \geq T$ ، آنگاه هر نقطه در صفحه یک جواب مسئله (۳-۴) با مقدار

بهینه صفر است.

اثبات: اگر $\min_X \{\max_{1 \leq i \leq n} \{a_i d_i(X)\}\} \geq T$ ، آنگاه برای هر نقطه X ، $\max_{1 \leq i \leq n} \{a_i d_i(X)\} \geq T$ ، که این یعنی

برای هر X ، یک i وجود دارد بطوریکه $P\left(w_i \leq \frac{T}{d_i(X)}\right) = 0$. یعنی به ازای هر X ، $F(X) = 0$. ■

لم ۳-۲. اگر $\min_X \{\max_{1 \leq i \leq n} \{b_i d_i(X)\}\} \leq T$ ، آنگاه جواب این مسئله مینیمم سازی یک جواب مسئله (۳-۴)

(۴) است با مقدار بهینه ۱.

اثبات: جواب مسئله مینیمم سازی در رابطه $b_i d_i(X) \leq T$ به ازای هر i ، صدق می‌کند و بنابراین

$$F(X) = 1. \quad \blacksquare$$

مجموعه S را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$S = \{X \mid a_i d_i(X) \leq T \quad \forall i\}. \quad (5-3)$$

توجه کنید هنگامی که به ازای هر i ، $a_i = 0$ ، مجموعه S تمام صفحه است. در ادامه ما این موضوع را به خاطر آسانی ارائه نادیده می‌گیریم. هنگامی که $\min_X \{\max_{1 \leq i \leq n} \{b_i d_i(X)\}\} \geq T$ آنگاه $S = \emptyset$. و اگر این قید بصورت تساوی درآید، آنگاه S فقط شامل یک نقطه است، زیرا جواب مسئله مینیمم سازی یکتا است. از هم اکنون ما فرض می‌کنیم مجموعه S دارای یک ناحیه درونی باشد و در بیرون و روی مجموعه S داریم $F(X) = 0$ و داخل مجموعه S داریم $F(X) > 0$.

لم ۳-۳. مجموعه S یک مجموعه محدب است.

اثبات: مجموعه S اشتراک دایره‌هائی با شعاع $\frac{T}{a_i}$ است. (یا همه صفحه اگر به ازای هر i ، $a_i = 0$) که در هر صورت مجموعه S محدب است. ■

اگر شرط لم ۱ برقرار نباشد (یعنی $\min_X \{\max_{1 \leq i \leq n} \{b_i d_i(X)\}\} < T$)، آنگاه جواب بهینه باید در مجموعه S باشد. در ادامه این بخش فرض می‌کنیم نقطه X در مجموعه S قرار دارد یعنی به ازای هر i ، $a_i d_i(X) \leq T$.

مسئله می‌تواند بصورت زیر فرمول‌بندی شود.

$$\max_{X \in S} F(X) = \prod_{i=1}^n \min \left\{ 1, \frac{T - d_i(X) a_i}{d_i(X) (b_i - a_i)} \right\}. \quad (۶-۳)$$

فرض کنید $G(X) = \ln F(X)$. چون تابع $\ln(\cdot)$ یک تابع اکیداً صعودی است، یک فرمول‌بندی دیگر

می‌تواند بصورت زیر به دست آید.

$$\max_{X \in S} G(X) = \sum_{i=1}^n \min \left\{ 0, \ln \left[\frac{T - d_i(X) a_i}{d_i(X) (b_i - a_i)} \right] \right\}.$$

و اگر تعریف کنیم $H(X) = -G(X)$ ، آنگاه:

$$\min_{X \in S} H(X) = \sum_{i=1}^n \max \left\{ 0, \ln \left[\frac{d_i(X)(b_i - a_i)}{T - d_i(X)a_i} \right] \right\}. \quad (۷-۳)$$

حال اگر $h_i(d) = \max \left\{ 0, \ln \left[\frac{d_i(X)(b_i - a_i)}{T - d_i(X)a_i} \right] \right\}$ را تعریف کنیم. داریم

$$H(X) = \sum_{i=1}^n h_i(d_i(X)). \quad \blacksquare (۸-۳)$$

تابع $h_i(d)$ ، برای $0 \leq d \leq \frac{T}{b_i}$ مقدار صفر و برای $\frac{T}{b_i} < d < \frac{T}{a_i}$ مقدار $\ln \left[\frac{d(b_i - a_i)}{T - da_i} \right]$ را دارد. و برای

$d \geq \frac{T}{a_i}$ مقداری ندارد. این تابع برای $T = 1$ و $a_i = 1$ ، برای $b_i = 2$ در شکل (۱-۳) و برای $b_i = 4$ در

شکل (۲-۳) رسم شده است.

تابع $y = \ln[(b-a)d/(T-da)] = \ln(b-a) + \ln d - \ln[T-da]$ را در نظر بگیرید. بنابراین داریم:

$$D_d y = \frac{1}{d} + \frac{a}{T - ad} \quad (۹-۳)$$

$$D_d y' = -\frac{1}{d^2} + \frac{a^2}{[T - ad]^2} \quad (۱۰-۳)$$

لم‌های زیر از (۹-۳) و (۱۰-۳) نتیجه می‌شود.

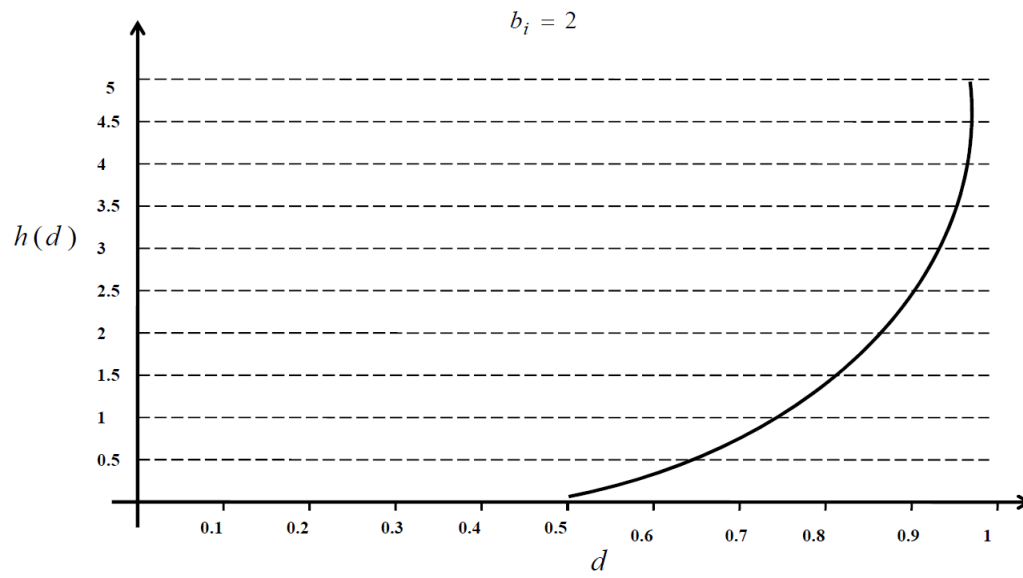
لم ۳-۴. تابع $y = \ln[(b-a)d/(T-da)]$ در d صعودی یکنواخت است و برای $ad \leq \frac{T}{2}$ مقعر و برای

$$\frac{T}{2} < ad < T \text{ محدب است.}$$

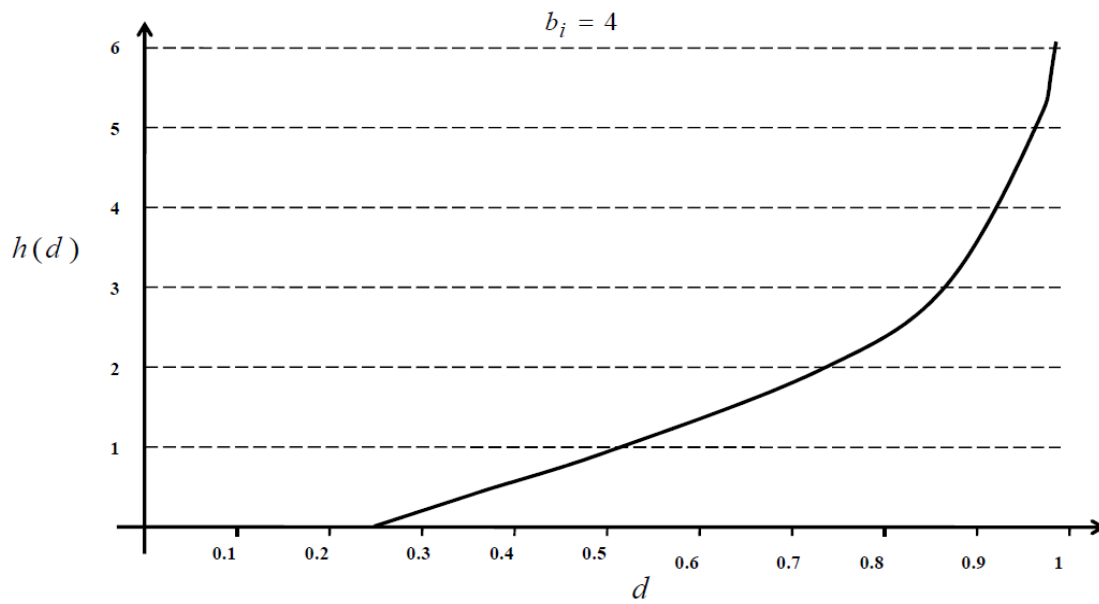
لم ۳-۵. اگر به ازای هر i $d_i(X) \leq d_i(Z)$ آنگاه $H(X) \leq H(Z)$.

اثبات: تابع $H_i(d_i(X))$ در $d_i(X)$ صعودی است و بقیه اثبات از لم ۳-۴ نتیجه می‌شود.

قضیه ۳-۱. یک جواب بهینه در پوسته محدب نقاط تقاضا وجود دارد.



شکل ۱-۳



شکل ۲-۳

اثبات: نقطه Z را بیرون پوسته محدب نقاط تقاضا در نظر بگیرید، یک نقطه X در پوسته محدب وجود

دارد بطوری که به ازای هر i ، $d_i(X) \leq d_i(Z)$. بوسیله لم ۳-۵ داریم، $H(X) \leq H(Z)$. پس قضیه ثابت می شود.

حال به بررسی دو حالت زیر می پردازیم.

۳-۲-۱- حالت ۱: به ازای هر i ، $b_i \leq 2a_i$

در این مورد تابع $h_i(d)$ در فاصله d محدب است. (بااستفاده از رابطه (۳-۱۰)). با توجه به اینکه یک تابع محدب و اکیداً صعودی از یک تابع محدب، محدب است پس $H_i(d_i(X))$ روی X محدب است. در نتیجه $H(X)$ ، به عنوان مجموعی از توابع محدب، روی X محدب است. چون مجموعه S محدب است (لم ۳-۳)، مسئله بهینه سازی (۳-۸)، مینیمم سازی یک تابع محدب روی یک ناحیه محدب است که باید فقط یک مکان مینیمم داشته باشد و مکان بهینه درون مجموعه S قرار دارد و روی مرز S قرار ندارد.

مقدار تابع هدف روی مرز S نامتناهی است زیرا حداقل برای یک i ، $T - a_i d_i(X) = 0$. این بدین معنی است که، در مسئله بهینگی، هیچکدام از قیدهای تشکیل دهنده S فعال نیستند. در نتیجه اگر یک روش کاهشی سریع از یک نقطه درونی S به کار برده شود و قیدهای تعریف کننده S نادیده گرفته شوند، الگوریتم زیر جواب بهینه را پیدا خواهد کرد.

الگوریتم ۳-۱.

مرحله ۱- مسئله مینیمم سازی $\min_X \{ \max_{1 \leq i \leq n} \{ b_i d_i(X) \} \}$ را حل کنید. این یک مسئله محدب است

که می تواند به آسانی حل شود. فرض کنید X^* یک جواب مسئله با مقدار تابع هدف

τ^* باشد.

مرحله ۲- اگر $\tau^* \leq T$ ، آنگاه X^* یک جواب بهینه ی مسئله است.

مرحله ۳- در غیر این صورت، مسئله مینیمم سازی $\min_X \{\max_{1 \leq i \leq n} \{a_i d_i(X)\}\}$ را حل کنید. و

مجموعه جواب، X^T و مقدار تابع هدف، τ^T را بدست آورید. توجه داشته باشید اگر

$$\text{نسبت } b_i/a_i \text{ برای همه } i \text{ ها یکسان باشد آنگاه } X^T = X^*.$$

مرحله ۴- اگر $\tau^T \geq T$ ، آنگاه هر نقطه‌ای برای مسئله یک جواب است.

مرحله ۵- در غیر این صورت، X^T درون S قرار دارد و می‌تواند به عنوان یک نقطه شروع برای

یک الگوریتم کاهشی برای پیدا کردن جواب بهینه، بکار گرفته شود.

مثال ۳-۱: ۱۰ نقطه که در مربع واحد بطور تصادفی انتخاب شده‌اند را در نظر بگیرید. مختصات این نقاط

در جدول (۳-۱) داده شده است و همچنین در شکل (۳-۳) نیز رسم شده اند. قرار می‌دهیم $a_i = 1$ و

$b_i = 2$. پس مسئله بهینه سازی (۳-۷) محدب است. برای حل مساله با استفاده از اکسل در نرم افزار

آفیس داریم:

۱. نقطه مینیماکس مسئله با استفاده از لم ۳-۱ پیدا می‌شود. مکان بهینه در $(0.45914, 0.48103)$ با

مقدار تابع هدف 0.52848 است. این یعنی S برای $T \geq 0.52848$ تهی نیست. بنابراین برای مقادیر

کوچکتر T ، مقدار تابع هدف برای همه نقاط تقاضا یکسان است و $P(MAX \leq T) = 0$. جواب مسئله

مینیمم سازی در لم ۳-۲ با جواب مسئله در لم ۳-۱ یکسان است زیرا نسبت b_i/a_i برای همه i ها

برابر ۲ است. فقط مقدار تابع هدف ۲ برابر می‌شود که این یعنی برای $T \geq 1.05696$ جواب مینیمم

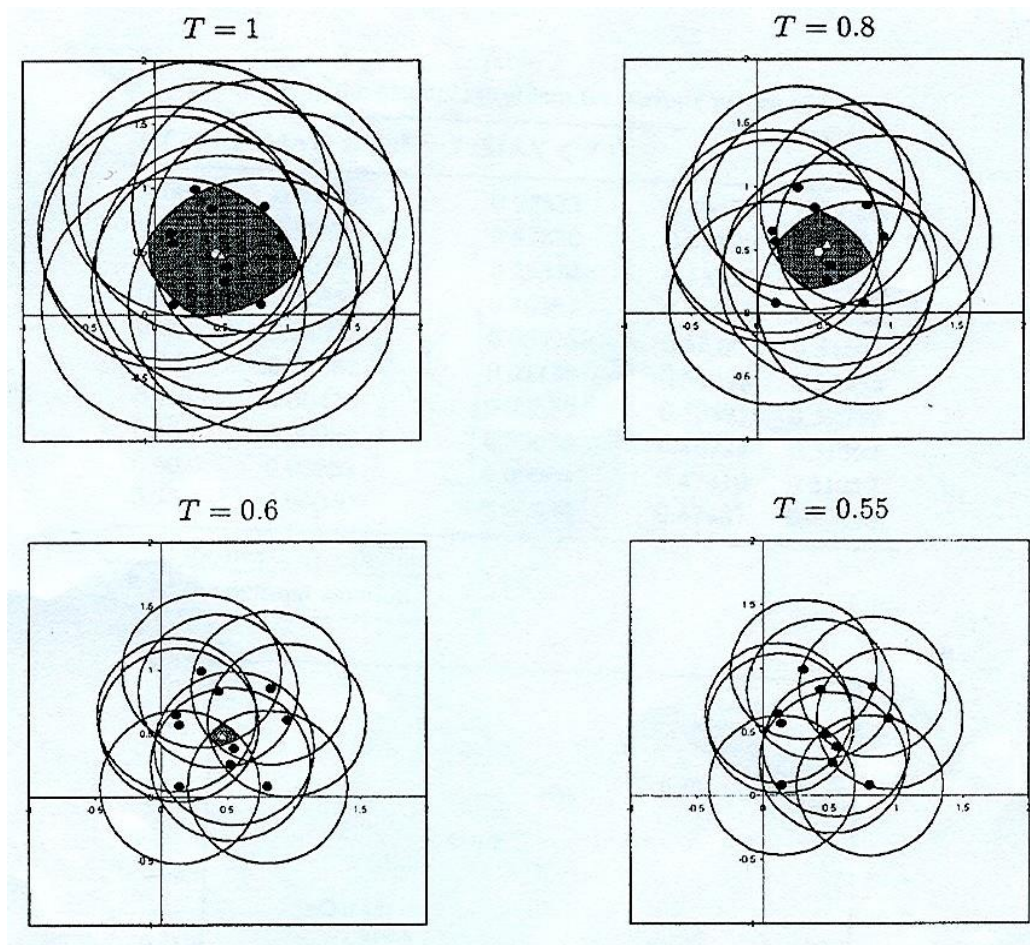
یک جواب مسئله با $P(MAX \leq T) = 1$ است. بنابراین بررسی T های بین این دو مقدار نهائی مورد

توجه است.

۲. مسئله (۷-۳) را با استفاده از اکسل برای $T = 0.55, 0.6, \dots, 1$ حل می‌کنیم. قیده‌های تشکیل دهنده S را نادیده می‌گیریم. (ولو اینکه اضافه کردن آن‌ها به مسئله مشکلی ایجاد نمی‌کند.) و حل را برای این مقادیر T از جواب مینیمم که در S است شروع می‌کنیم. ما نباید در مورد S نگران باشیم زیرا اگر یک نقطه در خارج S بررسی شود آنگاه لازم می‌شود $\ln x$ برای یک مقدار منفی x محاسبه شود و با یک پیغام خطا مواجه می‌شویم، زیرا تابع هدف تعریف نمی‌شود. در حقیقت ما با چنین مشکلی در $T = 0.55$ مواجه می‌شویم که ناحیه شدنی S خیلی کوچک است و الگوریتم ممکن است در طی گام‌هایش نقاط خارج S را محاسبه کند. و ما حل مسئله برای $T = 0.55$ را با استفاده از جواب مسئله با $T = 0.6$ بررسی می‌کنیم.

جدول ۳-۱: نقاط تقاضا برای مثال

x	y
۰/۸۰۲۲۴۵	۰/۰۷۹۰۷۵
۰/۳۰۷۱۷۶	۰/۹۸۷۱۹۳
۰/۴۳۱۱۸۰	۰/۸۳۰۵۴۱
۰/۹۵۰۴۵۲	۰/۶۰۱۰۹۱
۰/۵۲۳۳۷۳	۰/۲۵۷۴۴۲
۰/۵۵۲۲۰۲	۰/۳۸۲۵۴۰
۰/۱۳۷۳۹۵	۰/۵۶۴۰۴۳
۰/۱۳۹۹۸۳	۰/۰۸۰۲۳۷
۰/۱۱۸۸۷۱	۰/۶۴۴۰۹۱
۰/۸۲۷۵۷۸	۰/۸۵۲۹۵۵



شکل 3-3: جواب و ناحیه ی S برای مثال ۱-۳

۳. جواب‌ها در جدول ۲-۳ خلاصه شده‌اند و همچنین در شکل ۴-۳ توصیف شده‌اند. احتمال اینکه ماکسیمم از T تجاوز نکند یعنی $P(MAX \leq T)$ برای نقاط بهینه بطور محسوس بالاتر از نقاط مینیماکس است. برای $T \geq 1.05696$ ، نقطه مینیماکس، جواب مسئله است. هنگامی که T کاهش می‌یابد مجموعه S منقبض می‌شود و برای $T = 0.52848$ مجموعه S به نقطه جواب مینیماکس منقبض می‌شود. از آنجائی که جواب برای $T \geq 0.52848$ باید در S باشد، هنگامی که T به این مقدار میل می‌کند مسیر باید همگرا به نقطه جواب مینیماکس باشد.

۴. در شکل ۳-۳، نقاط جواب و ناحیه S برای $T = 1, 0.8, 0.6, 0.55$ رسم شده است. قسمت تیره رنگ، مجموعه S را نشان می‌دهد. نقطه جواب مینیماکس بوسیله دایره توخالی و نقطه جواب بهینه بوسیله یک مثلث توخالی نشان داده شده است. برای $T = 0.55$ ، S بسیار کوچک است بطوری که به زحمت نمایان می‌شود. انقباض S هنگامی که T کاهش می‌یابد واضح است زیرا هنگامی که T کاهش می‌یابد شعاع دایره‌ها کاهش می‌یابد. در این مرحله جواب بهینه بسیار نزدیک به جواب مینیماکس است.

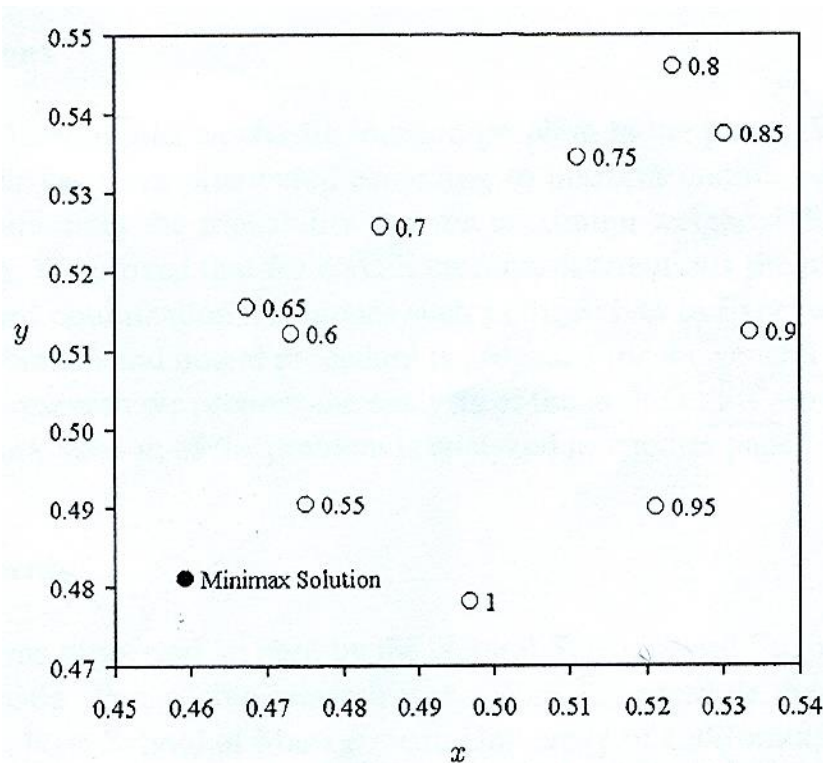
جدول ۳-۲: جواب بهینه برای مقادیر مختلف T برای مثال ۱-۳

T	$P(MAX \leq T)^a$	$P(MAX \leq T)^b$	x	y
۱	۰,۶۷۳۸۸	۰,۷۲۵۲۳	۰,۴۹۶۷۳	۰,۴۷۸۰۶
۰,۹۵	۰,۳۸۸۸۴	۰,۴۷۸۳۰	۰,۴۲۱۲۰	۰,۴۸۹۹۷
۰,۹۰	۰,۲۰۹۶۰	۰,۲۹۳۷۴	۰,۵۳۳۵۳	۰,۵۱۲۳۲
۰,۸۵	۰,۱۰۳۵۴	۰,۱۶۳۹۷	۰,۵۳۰۲۶	۰,۵۳۷۳۸
۰,۸۰	۰,۰۴۵۵۳	۰,۰۶۴۹۶	۰,۵۲۳۴۴	۰,۵۴۶۰۰
۰,۷۵	۰,۰۱۶۸۲	۰,۰۲۱۳۹	۰,۵۱۰۹۸	۰,۵۳۴۵۴
۰,۷۰	۰,۰۰۴۲۶	۰,۰۰۵۳۰	۰,۴۸۴۹۵	۰,۵۲۵۷۲
۰,۶۵	۰,۰۰۰۵۷	۰,۰۰۰۷۸	۰,۴۶۷۲۴	۰,۵۱۵۶۳
۰,۶۰	۰,۰۰۰۰۳	۰,۰۰۰۰۴	۰,۴۷۳۱۰	۰,۵۱۲۱۷
۰,۵۵	۰,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰	۰,۴۷۴۷۸	۰,۴۹۰۵۰

a: احتمال در نقطه ی مینیمم b: احتمال در نقطه ی بهینه

۳-۲-۲- حالت ۲: به ازای هر i ، $b_i > 2a_i$

در این مورد $h_i(d)$ برای i هائی که $b_i > 2a_i$ است، محدب نیست. این نامحدب بودن قابل چشم‌پوشی است همانطور که در شکل ۲-۳ برای $b_i = 4$ نشان داده شده است. تابع هدف در بازه $[0.25, 0.5]$ با یک خمیدگی در نقطه $۰/۵$ ، مقعر است. به هر حال، در بازه $[0.25, 0.5]$ که تابع هدف مقعر است تقریباً خطی است. ولی نمی‌تواند ضامن آن باشد که $H(X)$ محدب باشد در این گونه موارد که تابع هدف



شکل ۳-۴: جواب مثال ۱-۳

محدب نیست از روش مثلثی کردن پوسته محدب نقاط تقاضا استفاده می‌کنیم. لازم به ذکر است طبق قضیه ۱-۳ باید یک جواب در پوسته محدب نقاط تقاضا وجود داشته باشد. برای این منظور ابتدا الگوریتم ۱-۳ را اجرا کرده و مقدار تابع هدف در X^T را به عنوان یک کران بالای ابتدایی (UB) برای الگوریتم ۳-۲ که در بخش (۳-۳) ذکر شده است، بکار می‌بریم.

۳-۳- روش مثلث کوچک- مثلث بزرگ برای حل مسئله مکانیابی نامحدب

تکنیک «مثلث کوچک - مثلث بزرگ»^۱ برای حل بهینگی مسائل مکانیابی نامحدب بکار می‌رود. یک نمونه از این مسائل، مسئله WAR^2 (مسئله وبر با وزن‌های مثبت و منفی) می‌باشد. در مسئله WAR ، هدف پیدا کردن یک مکان بگونه‌ای است که مجموع فواصل وزنی نقاط تقاضا از این مکان، کمینه گردد.

¹ Big Triangle Small Triangle (BTST)

² Weber with Attraction and Repulsion

متری که در این قسمت به کار می رود فاصله اقلیدسی می باشد. همانطور که در بالا ذکر شد در این مسئله ممکن است، بعضی از وزن ها منفی باشند و این موضوع هنگامی رخ می دهد که مجاورت با بعضی از نقاط تقاضا ممکن است زیان آور باشد.

استفاده از مثلث ها دارای ۲ مزیت آشکار نسبت به مربع ها است، در ابتدا هنگامی که ناحیه شدنی یک اجتماع از چند ضلعی ها است، مثلث ها همه ی ناحیه ی شدنی را می پوشانند و هیچ نقطه نشدنی را شامل نمی شوند. بنابراین از شلوغی و زمان انجام آزمون لازم جهت شدنی بودن دور می شود. دوم آن که، محاسبات لازم برای بدست آوردن کران برای هر مثلث آسان تر بوده و همچنین نسبت به روش مربع کوچک - مربع بزرگ^۱، کران ها در این روش به یکدیگر نزدیکتر هستند [۱۳].

۳-۱-۳- فرمول بندی مسئله ی WAR

فرض کنید w_i برای $i=1, \dots, n$ ، وزن های متناظر با نقاط تقاضای i باشند. تابع هدف که باید مینیمم شود بصورت زیر است

$$F(X) = \sum_{i=1}^n w_i d_i(X) \quad (۱۱-۳)$$

فرض کنید I^+ مجموعه نقاط تقاضا با وزن های مثبت و I^- مجموعه نقاط تقاضا با وزن های منفی باشد. تعریف می کنیم.

$$F^+(X) = \sum_{i \in I^+} w_i d_i(X) \quad , \quad F^-(X) = \sum_{i \in I^-} -w_i d_i(X) \quad (۱۲-۳)$$

^۱ Big Square Small Square(BSSS)

هر دو تابع (۳-۱۲) محدب هستند. حال با این تعاریف تابع هدف که باید مینیمم شود بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(X) = F^+(X) - F^-(X) \quad (۳-۱۳)$$

پس بدین صورت می‌توان تابع نامحدب $F(X)$ را بصورت تفاضل دو تابع محدب نوشت. (تفاضل دو تابع محدب لزوماً محدب نیست) [۱۳].

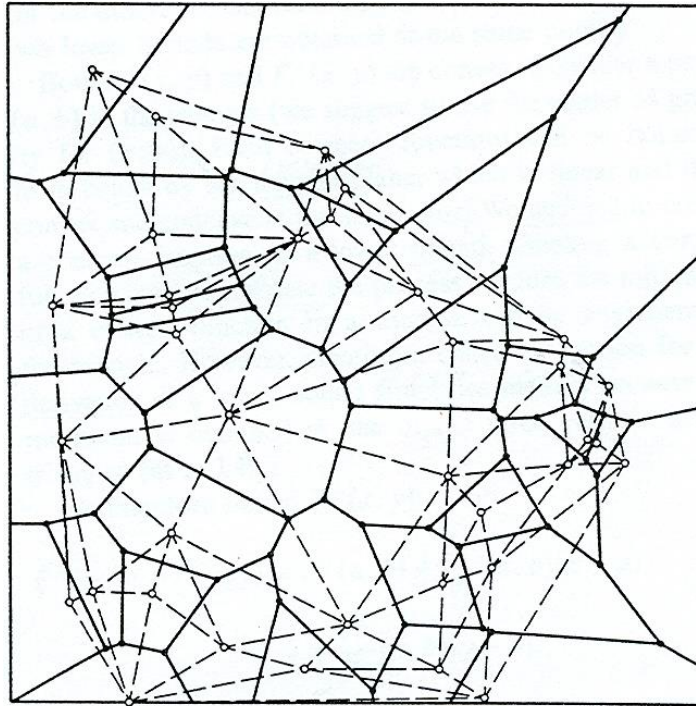
۳-۳-۲- مثلثی کردن

در این بخش مثلثی کردن یک چندضلعی محدب را توصیف می‌کنیم. ابتدا چندضلعی محدب درون پوسته محدب نقاط تقاضا را رسم می‌کنیم بطوری که رئوس آن شامل نقاط تقاضا باشند. بنابراین ممکن است بعضی از نقاط تقاضا نشدنی بشوند. سپس عمودمنصف هر جفت از نقاط تقاضا را رسم می‌کنیم. محل برخورد این عمود منصف‌ها چندضلعی‌های محدب را پدید می‌آورد. حال نقاط تقاضا در این چندضلعی‌ها را طوری به هم وصل می‌کنیم که خط‌های واصل تشکیل مثلث دهند. توجه داشته باشید که نقاط تقاضای نشدنی در مثلثی کردن بکار گرفته نمی‌شوند. مثلثی کردن در الگوریتمی به نام الگوریتم دلاونی^۱ استفاده می‌شود. مثلثی کردن دلاونی نمایش دوگان دیاگرام ورنوی^۲ است. برای مطالعه بیشتر در مورد دیاگرام-های ورنوی می‌توان به [۱۳] مراجعه کرد.

n نقطه $p_1, p_2, \dots, p_n$ داده شده است. دیاگرام ورنوی یک نمایش هندسی است، که صفحه را به n ناحیه محدب متناهی یا نامتناهی افراز می‌کند. برای هر نقطه در یک ناحیه، نقطه p_i موجود در آن ناحیه از بین $p_1, p_2, \dots, p_n$ نسبت به نقاط دیگر، برای سرویس دهی به آن ناحیه نزدیک‌ترین است. این ناحیه، ناحیه ورنوی v_i از p_i نامیده می‌شود. و به شکل زیر نمایش داده می‌شود.

^۱ Delauney

^۲ Voronoi diagram



شکل ۳-۵: دیاگرام ورنوی

$$v_i = \{p \in R^2 \mid d(p, p_i) < d(p, p_j), i \neq j\} \quad (3-14)$$

شکل هندسی حاصل شده توسط این افراز، دیاگرام ورنوی نامیده می‌شود. و نقاط $p_1, p_2, \dots, p_n$ نقاط مولد یا مولد نامیده می‌شوند. توجه کنید که در این شکل هندسی، یک یال و یک نقطه از دیاگرام ورنوی به ترتیب به عنوان یال و نقطه ورنوی نامیده می‌شود نقاط و یال‌ها در عمل مثلثی کردن دلاونی، به ترتیب متناظر با مولدهای دیاگرام ورنوی و بازه‌هایی که دو مولد مجاور را در دیاگرام ورنوی بهم وصل می‌کنند، می‌باشند.

شکل ۳-۵ یک دیاگرام ورنوی است (خط‌های تیره) و مثلثی کردن دلاونی (خط‌های نقطه چین) بوسیله ۳۶ مولد که بصورت تصادفی در یک مربع واحد توزیع شده‌اند، انجام گرفته است.

الگوریتم زیر را می‌توان برای نواحی شدنی که اجتماعی از چندضلعی‌های محدب با درون‌هائی دو بدو مجزا هستند، بکار گرفت. این الگوریتم جواب بهینه را با دقت ϵ پیدا می‌کند.

الگوریتم ۳-۲:

مرحله ۱- مثلثی کردن. ناحیه‌ی شدنی، اجتماعی از چندضلعی‌های محدب است. مثلثی کردن را با استفاده از نقاط تقاضا در داخل این چندضلعی‌ها به عنوان راس‌های مثلث شروع کنید.

نقاط تقاضائی که داخل چندضلعی نیستند در مثلثی کردن استفاده نمی‌شوند.

مرحله ۲- پیدا کردن کران بالا. مقدار تابع هدف در مرکز هر مثلث محاسبه می‌شود (مرکز ثقل هر سه راس با وزن‌های مساوی).

مرحله ۳- کران پائین برای همه مقادیر شدنی تابع هدف در یک مثلث، LB ، برای همه مثلث‌ها محاسبه می‌شود.

مرحله ۴- همه مثلث‌هایی که کران پائین‌شان بزرگتر یا مساوی $\frac{UB}{1+\varepsilon}$ باشند، حذف می‌شوند.

مثلث‌های باقی مانده، مجموعه ابتدائی مثلث‌ها، T_0 را تشکیل می‌دهند.

مرحله ۵- استفاده از شاخه و کران. کوچک‌ترین کران پائین $LB_{\min}$ را بیابید. اگر $LB_{\min} \geq \frac{UB}{1+\varepsilon}$ ،

متوقف شوید. الگوریتم با UB به عنوان جواب بهینه متوقف می‌شود.

مرحله ۶- مثلث با کوچک‌ترین کران پائین، $LB_{\min}$ ، برای تقسیم‌سازی به چهار مثلث کوچک‌تر

انتخاب می‌شود. رئوس این چهار مثلث، شامل سه راس مثلث اصلی و مراکز ضلع‌های این

مثلث هستند. این چهار مثلث همگی شبیه مثلث اصلی هستند و اضلاع‌شان نصف ضلع-

های متناظر با مثلث اصلی است.

مرحله ۷- یکی از این مثلث‌ها، جایگزین مثلث اصلی شده و سه مثلث دیگر به لیست مثلث‌ها اضافه

می‌شوند.

مرحله ۸- مقدار تابع هدف در مرکز هر چهار مثلث محاسبه می‌شود و اگر لازم باشد کران بالا بهنگام می‌شود.

مرحله ۹- کران پائین برای هر کدام از مثلث‌های کوچک محاسبه می‌شود.

مرحله ۱۰- همه مثلث‌های در T که کران پائین‌شان بزرگتر از $\frac{UB}{1+\varepsilon}$ هستند، رد می‌شوند. (اگر

UB تغییر کرد، همه مثلث‌ها بررسی می‌شوند). به مرحله ۵ برمی‌گردیم.

۳-۲-۱- نکات قابل توجه در اجرای الگوریتم مثلثی کردن:

۱- نتیجه مثلثی کردن هر چند ضلعی یک مجموعه از مثلث‌ها است.

۲- اجتماع همه مثلث‌ها، T ، ناحیه شدنی را به مثلث‌هایی بدون نقاط تقاضا در داخل مثلث‌ها افراز می‌کند. توجه داشته باشید که ممکن است بعضی رئوس و ضلع‌ها به چندین مثلث تعلق داشته باشند.

۳- در مثلثی کردن ناحیه شدنی ممکن است مثلث‌های باریک و دراز ایجاد شود بطوریکه مساحت آن‌ها به صفر میل کند. در مثلث‌های با زاویه بیش از 120^0 با قرار دادن سه راس روی بزرگترین ضلع آن و وصل کردن رئوس روی ضلع مذکور به زاویه 120^0 آن را به چهار مثلث کوچکتر تقسیم می‌کنیم.

۴- بیشترین تعداد مثلث‌ها در فرایند شاخه و کران با $T_{\max}$ نشان داده می‌شود.

۵- چند ضلعی‌های نامحدب نیز به خوبی مثلثی می‌شود. به این صورت که هر چندضلعی نامحدب را می‌توان به اجتماعی از چند ضلعی‌های محدب تبدیل کرد.

۳-۳-۳- یک کران پائین برای مسئله WAR در یک مثلث

به آسانی می‌توان یک کران پائین روی $F^+(x, y)$ و یک کران بالا روی $F^-(x, y)$ در (۳-۱۲) ساخت. به هر حال کمترین مقدار برای $F^-(x, y)$ معمولاً در نقاط مختلفی از مثلث اتفاق می‌افتد و استفاده از دو کران پائین جدا، موثر و کارآمد نیست. در حقیقت این مسئله با $n = ۲۰$ نقطه، و استفاده از یک دقت $F^-(x, y)$ ، احتیاج به ۵۰۰۰۰۰ مثلث برای مرحله ۵ (مرحله شاخه و کران) دارد. بنابراین بهتر است بدنبال یک کران مستقیم باشیم.

هر دو تابع $F^+(x, y)$ و $F^-(x, y)$ که در رابطه (۳-۱۲) تعریف شدند، محدب هستند. نقطه (a, b) را در مثلث در نظر بگیرید. (a, b) را مرکز ثقل مثلث در نظر بگیرید. هر کدام از این توابع می‌توانند از پائین توسط صفحه‌ای مماس کران‌دار شوند، که خطی است و بنابراین در یک زمان هم محدب است و هم مقعر است. ما قصد داریم یک تابع مقعر به عنوان یک کران پائین بسازیم. ساختن یک تابع محدب در یک مثلث ممکن است فرایند را پیچیده‌تر کند، زیرا مینیمم یک تابع محدب در مثلث ممکن است هر جای مثلث باشد. به هر حال ساختن یک تابع مقعر برای استخراج یک کران پائین موضوع را ساده می‌کند زیرا مینیمم در یکی از ۳ راس مثلث بدست می‌آید. $F^+(x, y)$ بصورت زیر کران‌دار می‌شود:

$$F^+(x, y) \geq \bar{F}(x, y) = F^+(a, b) + \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)[x - a] + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)[y - b] \quad (۳-۱۵)$$

که عبارت سمت راست، سه جمله‌ی اول بسط تیلور $F^+(x, y)$ است و

$$\bar{F}(x, y) = F^+(x, y) + \sum_{i \in I^+} w_i \frac{x_i - a}{d_i(x, y)}[x - a] + \sum_{i \in I^+} w_i \frac{y_i - a}{d_i(x, y)}[y - b] \quad (۳-۱۶)$$

بنابراین

$$F(x, y) \geq \bar{F}(x, y) - F^-(x, y) \quad (۳-۱۷)$$

سمت راست نامساوی (۱۷-۳) یک تابع مقعر است که مینیمم آن در یکی از سه راس مثلث اتفاق می‌افتد.

تعریف کنید $L_j = \bar{F}(T_j) - F^-(T_j)$ برای هر $j = 1, 2, 3$. در این صورت کران پائین به صورت زیر به

دست می‌آید:

$$LB = \min_{1 \leq j \leq 3} \{L_j\} \quad (۱۸-۳)$$

فصل چهارم

مسئله یک مرکز در صفحه با وزن های تصادفی
مستقل

مسئله یک مرکز در صفحه ابتدا بوسیله سیلوستر^۱ در سال ۱۹۸۷ مطرح شد [۳۵]. و این موضوع با وزن‌های مساوی و نرم اقلیدسی بصورت کارامد بوسیله الزینگ^۲ در سال ۱۹۷۲ حل شد [۱۴]. برای وزن-وزن‌های نامساوی روش‌های حل برای نرم اقلیدسی در [۷،۲۳] و برای نرم مستطیلی در [۱۵] آمده است. توسعه مسئله به p سرویس دهنده با نرم‌های مختلف در [۱،۳۶] بررسی شده است. همچنین مسئله در $R^n (n > 2)$ نشان داده شده است [۳۰،۱۴].

اما اخیراً مسئله یک مرکز با وزن‌های تصادفی فقط برای بعضی از توزیع‌های احتمال خاص مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی وزن‌های تصادفی اغلب در مکان‌های سرویس‌های اضطراری مفید است که میانگین سرعت برای رفتن از x به p_i (که بوسیله $\frac{1}{w_i}$ داده شده است) وابسته به ترافیک یا نوع خیابان است. یا در ایستگاه‌های چند موجی که وزن‌ها وابسته به شرایط آب و هوایی، وفور اطلاعات یا سطح تقاضا هستند. در این شرایط وزن‌ها ثابت نیستند و تصادفی می‌باشند. هدف این فصل مطالعه مسئله یک مرکز در صفحه با وزن‌های داده شده بوسیله متغیرهای تصادفی مستقل دلخواه و اندازه‌گیری فاصله بوسیله هر نوع تابع نرمی است.

مطالب این فصل از مراجع [۲۲]، [۳۰] و [۳۲] گرفته شده است.

۴-۱- مسئله یک مرکز در صفحه

مسئله یک مرکز در صفحه بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(P_w) \quad \min_{x \in R^2} F(x, w) = \max_{1 \leq i \leq n} \{w_i d(p_i, x)\} \quad (1-4)$$

^۱ Silvester

^۲ Elzing

که $p_i = (p_{i1}, p_{i2})$ برای هر $i = 1, \dots, n$ نقاط تقاضا و w_i ها وزن های نامنفی مربوط به نقاط تقاضا می باشند.

$x = (x_1, x_2)$ مکان سرویس دهنده است و $d(p_i, x)$ فاصله بین نقاط p_i و x می باشد که برای راحتی کار آن را با $d_i(x)$ نشان می دهیم. همانطور که در فصل قبل گفته شد این مسائل مربوط به مکانیابی یک واحد اضطراری (ایستگاه های آتش نشانی) یا ایستگاه چند موجی (تلویزیون، رادیو، موبایل) یا تحویل سرویس (پیک، پست، غذا) و غیره می شود.

در این کاربردها نقاط p_i ، مکانی که واقعه در آن رخ می دهد (آتش، تصادف وسیله نقلیه)، مکان های دریافت یک سیگنال (تلویزیون، رادیو، موبایل)، نقاط فروش غذاهای فاسد شدنی، مقصدهای پست و غیره را نمایش می دهد. مقدار وزن های w_i به تکرار یک واقعه در نقطه p_i بستگی دارد. اهمیت نقطه p_i نسبت به دیگر نقاط به تکرار آن است. فاصله $d_i(x)$ معمولاً بوسیله نرم های اقلیدسی یا مستطیلی اندازه گیری می شود ولی بقیه نرم ها نیز معمولاً امکان پذیرند. $w_i d(p_i, x)$ متناظر با یک فاصله وزنی یا زمان سفر بین نقاط x و p_i می باشد. و هنگامی که $w_i d(p_i, x)$ زمان سفر در نظر گرفته شود، w_i معکوس میانگین سرعت بین x و p_i است. برای وزن ها با توزیع گسسته تکنیک های شمارشی می توانند برای حل مسائل مفید باشند و برای وزن های با توزیع پیوسته، الگوریتم های شاخه و کران بازه ای برای حل مسائل تابع توزیع احتمالی، در نظر گرفته می شود [۳۰].

۴-۲- اصول مسائل بهینه سازی قطعی

بردار متغیرهای تصادفی $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ را در نظر بگیرید. بنابراین $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ به یک مقدار داده شده W نسبت داده می شود و $F(x, W)$ متغیری تصادفی است که مقدار

هنگامی که $W = w$ است، را می‌گیرد. مسئله هنگامی مطلوب و بهینه است که $\max_{1 \leq i \leq n} \{w_i d_i(x)\}$ کوچک‌ترین مقدار ممکن را بگیرد. دو تابع هدف برای تعیین محل x در نظر گرفته می‌شود. اولی احتمال این که $F(x, W)$ کوچکتر یا مساوی با یک آستانه مشخص مانند f ، باشد و در تابع هدف دوم، هدف یافتن کوچکترین آستانه‌ای f بگونه‌ای است که احتمال آن که $F(x, W)$ کوچکتر یا مساوی f باشد، بزرگتر یا مساوی با یک احتمال داده شده $0 < \alpha < 1$ باشد. اگر $F(x, W) \leq f$ ، خواهیم گفت: همه نقاط تقاضا بوسیله مکان x پوشیده می‌شوند.

۴-۲-۱- ماکزیمم احتمال پوشش برای یک آستانه داده شده

برای هر مقدار $f > 0$ داده شده، مساله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(C_f) \quad \max_{x \in R^2} P_f(x) = P_r[F(x, W) \leq f] \quad (۲-۴)$$

که $P_r[F(x, W) \leq f]$ ، احتمال این است که متغیر تصادفی $F(x, W)$ کوچکتر یا مساوی آستانه f باشد. فرض کنید $v(C_f)$ و $X(C_f)$ به ترتیب مقدار بهینه و مجموعه جواب‌های بهینه مساله (C_f) را نشان دهند. هنگامی که وزن‌ها متغیرهای تصادفی مستقل هستند، داریم:

$$P_f(x) = \prod_{i=1}^n G_i\left(\frac{f}{d_i(x)}\right) \quad (۳-۴)$$

که G_i تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی w_i است، که فرض می‌کنیم برای همه i ها تعریف شده است. فرض کنید Ω فضای نمونه بردار تصادفی W باشد و یک پیشامد در Ω را با A نشان می‌دهیم. برای هر نقطه $x \in R^2$ تعریف می‌کنیم:

$$A(x, f) = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \Omega : w_i d_i(x) \leq f, i = 1, 2, \dots, n\}$$

فرض کنید $A_f = \{A(x, f) : x \in R^n\}$ ، بنابراین مساله (C_f) هم ارز با پیدا کردن یک پیشامد در A_f با احتمال ماکزیمم می باشد. پس برای پیدا کردن یک پیشامد بهینه، کافی است مجموعه پیشامدهای ماکزیمم را بررسی کنیم. پیشامد A ماکزیمم است اگر پیشامد A^* دیگری وجود نداشته باشد بطوریکه $A \neq A', A \subset A^*$. حال پیشامد $B(p_i, r)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$B(p_i, r) = \{y \in R^2 : d_i(y) \leq r\}$$

که $B(p_i, r)$ گوی به مرکز p_i وشعاع r است.

به منظور توصیف پیشامدهای ماکزیمال، برای هر $A \in A_f$ نکات زیر را استفاده خواهیم کرد:

$$\begin{aligned} w_i(A) &= \sup\{w_i : w = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) \in A\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ X(A, f) &= \{x \in R^2 : A(x, f) = A\} \end{aligned} \quad (4-4)$$

خاصیت ۴-۱. اگر $A \in A_f$ ، آنگاه

$$X(A, f) \subset \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right) \quad (i)$$

$$X(A, f) = \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right) \quad (ii) \text{ } A \text{ ماکزیمال است اگر و فقط اگر}$$

اثبات:

(i): اگر $x \in X(A, f)$ آنگاه $\forall w \in A, i = 1, \dots, n$ $w_i d_i(x) \leq f$. در نتیجه $w_i(A) d_i(x) \leq f$ یا

$$d_i(x) \leq \frac{f}{w_i(A)} \quad (\text{با فرض } w_i(A) \neq 0) \text{ که نتیجه می شود } x \in \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right) \text{ بنابراین داریم}$$

$$X(A, f) \subset \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right). \blacksquare$$

(ii) فرض کنید A ماکزیمال باشد. اگر $x \in \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right)$ آنگاه از (i) داریم $w_i(A)d_i(x) \leq f$ در

نتیجه $w_i d_i(x) \leq f \quad \forall w \in A, i=1, \dots, n$ پس بنا به تعریف $X(A, f)$ داریم: $A \subset A(x, f)$ از این

که A ماکزیمال است ثابت می‌شود $A = A(x, f)$ که معنی می‌دهد $x \in X(A, f)$. بنابراین داریم:

$$\bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right) \subset X(A, f) \quad (i')$$

از (i) و (i') داریم

$$X(A, f) = \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right)$$

بالعکس فرض کنید $X(A, f) = \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right)$ و فرض کنید $A \subset A^* \in A_f$. (باید ثابت کنیم

$A = A^*$) اگر x نقطه‌ای باشد که $X(A, f) = A^*$ آنگاه $w_i d_i(x) \leq f \quad \forall w \in A^*, i=1, \dots, n$ به ویژه

به ازای هر $w \in A$ این رابطه درست است. پس $x \in \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{w_i(A)}\right) = X(A, f)$ که طبق تعریف

$X(A, f)$ معنی می‌دهد $A(x, f) = A$ پس $A = A'$. بنابراین A ماکسیمال است. ■

فرض کنید H پوسته محدب نقاط تقاضا^۱ باشد.

خاصیت ۴-۲.

(i) برای مسئله (C_f) جواب‌های بهینه وجود دارد و حداقل یک جواب بهینه در H (پوسته محدب

نقاط تقاضا) است.

^۱ Convex hull of demand points

(ii) $X(C_f)$ بوسیله اجتماع مجموعه‌های تعریف شده بوسیله اشتراک گوی‌های به مرکز نقاط تقاضا،

داده می‌شود.

اثبات:

(i) اگر W یک بردار از متغیرهای تصادفی گسسته باشد، تعداد پیشامدهای A_f متناهی است و بنابراین مسئله (C_f) دارای جواب‌های بهینه است. اگر مولفه‌های W دارای توزیع‌های احتمالاً مطلقاً پیوسته باشند، آنگاه توابع G_i پیوسته هستند. در نتیجه تابع هدف (C_f) پیوسته است و در هر مجموعه فشرد به یک مقدار ماکزیمال می‌رسد. اگر $x' \notin H$ آنگاه باید یک نقطه $x \in H$ وجود داشته باشد بطوریکه $d_i(x) \leq d_i(x')$ پس داریم:

$$P_f(x) = \prod_{i=1}^n G_i\left(\frac{f}{d_i(x)}\right) \geq \prod_{i=1}^n G_i\left(\frac{f}{d_i(x')}\right) = P_f(x')$$

بنابراین احتمال نقاط داخل H بیشتر بوده و می‌توان نقاط خارج H را کنار گذاشت. و چون H یک مجموعه فشرد است پس جواب‌های بهینه برای مساله وجود دارد و حداقل یک جواب بهینه در H است. (ii) هنگامی که جواب‌های بهینه متناظر با نقاط مرتبط با مجموعه‌های ماکزیمال هستند، با استفاده از خاصیت ۱، $X(C_f)$ بوسیله اجتماع مجموعه‌های تعریف شده بوسیله اشتراک گوی‌های به مرکز نقاط تقاضا داده می‌شود. ■

اگر هر متغیر تصادفی W_i در بازه $[a_i, b_i]$ که $a_i \geq 0$ است، مقدار بگیرد و f_a^* و f_b^* به ترتیب مقادیر بهینه مساله (P_w) را برای $w = a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $w = b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ نشان دهند، آنگاه خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۳-۴. (i) اگر $f < f_a^*$ آنگاه $v(C_f) = 0$ و $X(C_f) = R^2$.

$$(ii) \text{ اگر } f \geq f_b^* \text{ آنگاه } v(C_f) = 1 \text{ و } X(C_f) = \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{b_i}\right)$$

اثبات:

(i) اگر $f < f_a^*$ آنگاه $\forall x \in R^2$ و $A(x, f) = \emptyset$ بنابراین $P_f(x) = P_r(\emptyset) = 0$ که منجر می شود به $v(C_f) = 0$ و $X(C_f) = R^2$.

(ii) اگر $f \geq f_b^*$ آنگاه Ω در A_f ، پیشامد ماکزیمال است. پس هنگامی که

$$X(C_f) = \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{b_i}\right), \text{ با استفاده از خاصیت ۱، } w(\Omega) = b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ حاصل می شود.} \blacksquare$$

از این خاصیت نتیجه می شود به ازای $f < f_a^*$ نمی توان تمام نقاط تقاضا را پوشش داد، در صورتی که آنها یقیناً توسط $f \geq f_b^*$ پوشیده می شوند. احتمال پوشش برای $f_a^* \leq f < f_b^*$ برای هر مکان، بین صفر و یک است.

۴-۲-۲- کوچکترین آستانه با احتمال پوشش کران شده از پایین

در بعضی شرایط هنگامی که اتفاقاتی در محل سرویس های اضطراری رخ می دهد، $F(x, W)$ را می توان زمان سفر ماکسیمم برای رسیدن به هر نقطه تقاضا در نظر گرفت. بنابراین α ، به عنوان کمترین احتمال پوشش، ثابت در نظر گرفته می شود و جفت (x, f) مورد جستجو قرار می گیرد. که f ، کوچکترین مقدار ممکن را می گیرد بطوریکه همه نقاط تقاضا با احتمال بزرگتر یا مساوی α پوشیده شوند. بنابراین مسئله-ای که باید حل شود بصورت زیر است

$$(R_\alpha) \quad \min \left\{ f : P_r[F(x, W) \leq f] \geq \alpha, x \in R^2, f \geq 0 \right\} \quad (۵-۴)$$

مقدار بهینه و مجموعه جواب‌های بهینه مساله (R_α) را توسط $v(R_\alpha)$ و $X(R_\alpha)$ نشان می‌دهیم.

خاصیت ۴-۴. $v(R_\alpha) = f_\alpha^*$ اگر و تنها اگر:

$$v(C_f) < \alpha, \quad \forall f < f_\alpha^* \quad \& \quad v(C_f) \geq \alpha, \quad \forall f > f_\alpha^*$$

اثبات:

فرض کنید $v(R_\alpha) = f_\alpha^*$. اگر $f < f_\alpha^*$ آنگاه $\forall x \in R^2$ $P_r[F(x, W) \leq f] < \alpha$. بنابراین

$v(C_f) < \alpha$. اگر $f > f_\alpha^*$ آنگاه باید یک نقطه $\hat{x}$ وجود داشته باشد بطوریکه $P_r[F(\hat{x}, W) \leq f] \geq \alpha$ بنابراین $v(C_f) \geq \alpha$.

بالعکس: اگر نامساوی‌ها برای یک مقدار f_α^* ثابت شوند آنگاه هیچ نقطه $x \in R^2$ وجود نخواهد داشت

بطوریکه به ازای هر $f < f_\alpha^*$ ، $P_r[F(x, W) \leq f] < \alpha$ و خلاف آن برای $f > f_\alpha^*$ اتفاق می‌افتد.

بنابراین $v(R_\alpha) = f_\alpha^*$.

فرض کنید $\varphi(f) = v(C_f)$ ، از خاصیت ۴ نتیجه می‌شود مساله (R_α) با مساله زیر هم ارز است

$$(R_\alpha) \quad \min \{f : \varphi(f) \geq \alpha, f \geq 0\} \quad (۴-۶)$$

این یک مساله بهینه‌سازی یک متغیره است که اگر تابع $\varphi(f)$ شناخته شده باشد، حل آن آسان است.

مقدار بهینه این مساله را بوسیله f_α^* نشان می‌دهیم که کمترین مقدار f با شرط $\varphi(f) \geq \alpha$ است.

همچنین مجموعه مکان‌های بهینه بوسیله $X(R_\alpha) = \{x \in R^2 : P_r[A(x, f_\alpha^*)] \geq \alpha\}$ داده می‌شود. در

ادامه بعضی خواص $\varphi(f)$ و رابطه بین مجموعه جواب‌های بهینه مسائل (R_α) و (C_f) نشان داده

خواهد شد.

خاصیت ۴-۵. اگر W یک بردار از متغیرهای تصادفی گسسته باشد آنگاه :

(i) یک دنباله متناهی از مقادیر $f_0 = 0 < f_1 < f_2 < \dots < f_k$ وجود دارد بطوریکه

$$\varphi(f) = \varphi(f_h) \quad \text{if} \quad f_h \leq f \leq f_{h+1}$$

که $\varphi(f_0) = 0$ و $\varphi(f_k) = 1$ ، $f_{k+1} = \infty$

(ii) اگر $\alpha = \varphi(f_h)$ و $X(C_{f_h}) = X(R_\alpha)$ و $\varphi(f_{h-1}) < \alpha \leq \varphi(f_h)$ اگر $X(C_{f_h}) \subset X(R_\alpha)$

$.h = 1, \dots, k$

اثبات:

فرض کنید A_f^* خانواده پیشامدهای با احتمال ماکسیمم را در A_f برای $f > 0$ نشان دهد. اگر

$A \in A_f^*$ باشد آنگاه $X(A, f)$ مجموعه جواب های بهینه مساله (C_f) را نشان می دهد. فرض کنید

$A^* = \{A : A \in A_f^*\}$ برای بعضی $f > 0$ این یک خانواده متناهی از پیشامدهایی است که احتمال-

هایشان می توانند بصورت $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ مرتب شوند. اگر $A \in A^*$ ، مجموعه $X(A, f)$ برای

$f > f_{w(A)}^*$ ناتهی است که $f_{w(A)}^*$ مقدار بهینه مساله (P_w) برای $w = w(A) = (w_1(A), \dots, w_n(A))$ را

نشان می دهد.

مقادیر $f_h = \min \{f_{w(A)} : A \in A^*, P_r(A) = \alpha_h\}$ که $h = 1, \dots, k$ است را در نظر بگیرید که $P_r(A)$

احتمال A است. ثابت می شود $f_0 = 0 < f_1 < f_2 < \dots < f_k$. اگر $f_h \leq f \leq f_{h+1}$ آنگاه $X(A, f)$

حداقل برای یک پیشامد A ناتهی است، بطوریکه $P_r(A) = \alpha_h$ و $X(A, f)$ برای هر پیشامد $\tilde{A}$ با

احتمال بیشتر از احتمال رخداد A تهی است. این نتیجه می دهد $\varphi(f) = \alpha_h$ در صورتی که Ω یک

پیشامد ماکزیمال برای f های به اندازه کافی بزرگ باشد اگر $f \geq f_k$ می توان نتیجه گرفت $\varphi(f) = 1$.

(ii) اگر $x \in X(C_f)$ آنگاه $P_r[F(x, W) \leq f_h] = \varphi(f_h) \geq \alpha$. بنابراین $x \in X(R_\alpha)$ حال اگر

$\varphi(f_h) = \alpha$ ، هنگامی که $P_r[F(x, W) \leq f_h] \geq \varphi(f_h)$ ، نتیجه می‌شود $x \in X(R_\alpha)$ ، که این نشان

می‌دهد $A(x, f_h)$ یک پیشامد با احتمال ماکسیمم است پس $x \in X(C_{f_h})$.

نتیجه قسمت (ii) خاصیت ۴-۵، اکید است هرگاه یک پیشامد A در A_f با $P_r(A) = \alpha$ که

$\varphi(f_{h-1}) < \alpha < \varphi(f_h)$ ، وجود داشته باشد بطوریکه ماکزیمال نباشد، بطوریکه $X(A, f_h)$ مجموعه

جواب بهینه مساله (R_α) است.

خاصیت ۴-۶. اگر W یک بردار از متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته باشد آنگاه

(i) $\varphi(f)$ یک تابع پیوسته است.

(ii) $X(R_\alpha) = X(C_{f_\alpha}^*)$

اثبات: (i) فرض کنید $\{f_h\}$ یک دنباله همگرا به f باشد. از خاصیت ۴-۲ نتیجه می‌شود برای هر f_h ،

یک نقطه $x_h \in H$ وجود دارد بطوریکه یک جواب بهینه از مساله (C_{f_h}) است. چون H یک مجموعه

فشرده است دنباله $\{x_h\}$ باید شامل یک زیر دنباله مانند $\{x_k\}$ که همگرا به یک نقطه $x \in H$ است،

باشد. از آن جایی که توابع توزیع G_i حداقل از راست پیوسته هستند و هم چنین ضرب توابع پیوسته،

پیوسته است، داریم :

$$\lim_{f_k \rightarrow f} \{\varphi(f_k)\} = \lim_{f_k \rightarrow f} \{P_{f_k}(x)\} = P_f(x) \leq \varphi(f)$$

از طرف دیگر اگر x^* یک جواب بهینه از (C_f) باشد، آنگاه $P_{f_k}(x^*) \leq \varphi(f_k)$ و ثابت می‌شود:

$$\lim_{f_k \rightarrow f} \{\varphi(f_k)\} = \varphi(f) \text{ بنابراین } \lim_{f_k \rightarrow f} \{\varphi(f_k)\} \geq \lim_{f_k \rightarrow f} \{P_{f_k}(x^*)\} = P_f(x^*) = \varphi(f)$$

تابع یکنوا است می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{f_h \rightarrow f} \{\varphi(f_h)\} = \varphi(f)$.

(ii) چون $\varphi(f)$ پیوسته است ثابت می‌شود $\varphi(f_\alpha^*) = \alpha$ و $x \in X(C_{f_\alpha^*})$ هم‌ارز با این است که x در

رابطه $P_r[F(x, W) \leq f_\alpha^*] \geq \alpha$ صدق کند. و این یعنی $x \in X(R_\alpha)$. ■

۴-۳- تحلیل مساله (C_f)

اگر W یک بردار از متغیرهای تصادفی گسسته باشد، می‌توان بوسیله شمارش پیشامدهای ماکسیمال

در A_f ، (C_f) را حل کرد. توضیحی مختصر در ادامه آمده است. فرض کنید w_i مقادیر صحیحی را در

بازه $[a_i, b_i]$ بگیرد. می‌توانیم با $(W(A) = b)$ $A = \Omega$ شروع کنیم که بطور بدیهی پیشامد بهینه

یکتاست هنگامی که $f_b^* \leq f$. در این مورد $v(C_f) = 1$ و $X(C_f) = \bigcap_{i=1}^n B\left(p_i, \frac{f}{b_i}\right)$ برای مقادیر

کوچکتر f نزدیک به f_b^* ، پیشامدهای ماکزیمال در A_f متناظر با نقاطی در Ω که کوچکتر از b بوده

و در R^n به ترتیب الفبایی (ترتیبی برای مقایسه زوج مرتب‌ها) آمده‌اند، می‌باشند. این نقاط عبارتند

از: $pb(i) = (b_1, \dots, pb_i, \dots, b_n)$ که $pb(i)$ بزرگترین مقدار متغیر w_i کوچکتر از b_i است.

پس مساله (P_w) برای $w = pb(i)$ ، $i = 1, \dots, n$ حل می‌شود. اگر $f_{pb_i}^* \leq f$ ، آنگاه

$A_i = \{w \in \Omega : w \leq pb_i\}$ یک پیشامد ماکزیمال در A_f است. بنابراین، حداکثر n پیشامد ماکزیمال

وجود دارد. در نتیجه مجموعه $X(C_f)$ را بوسیله اجتماع مجموعه‌های $X(A_k, f)$ بدست خواهیم آورد.

که A_k پیشامد ماکزیمال با احتمال ماکسیمم است.

اگر $f < f_{pb_i}^*$ ، آنگاه پیشامد A_i در A_f نیست. در این روش یک برد جدید از مقادیر

$f((f_{pb(i)}, f_b^*))$ ، برای بعضی از i ها بدست می‌آید در نتیجه (C_f) حل می‌شود. این فرایند را ادامه

می‌دهیم تا وقتی که مسئله در بازه‌ای برای مقدار f ثابت شود. روش ذکر شده را با یک مثال، شرح می‌دهیم.

مثال ۴-۱. نقاط $p_1 = (2,1)$ و $p_2 = (3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 3 + \frac{3}{\sqrt{2}})$ و $p_3 = (5,2)$ و متغیرهای تصادفی w_1 و w_2

و w_3 با توزیع برنولی، به ترتیب با پارامترهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ را در نظر بگیرید (فاصله به صورت نرم

اقلیدسی است). فضای نمونه عبارت است از:

$$\Omega = \left\{ w^1 = (0,0,0), w^2 = (1,0,0), w^3 = (0,1,0), w^4 = (0,0,1), w^5 = (1,1,0), w^6 = (1,0,1), w^7 = (0,1,1), w^8 = (1,1,1) \right\}$$

با $b = w^8$ شروع می‌کنیم. جواب بهینه برای مساله P_{w^8} ، $x_{w^8}^* = (3,3)$ با مقدار بهینه $f_{w^8}^* = 2.2361$

می‌باشد. پس برای $f \geq 2.2361$ مجموعه مکان‌های بهینه عبارتند از $X(C_f) = \bigcap_{i=1,2,3} B(p_i, f)$ و

$v(C_f) = 1$. برای $f < f_{w^8}^*$ (f های نزدیک به $f_{w^8}^*$)، پیشامدهای ماکزیمال در A_f متناظر با نقاط

$pb_1 = w^7 = (0,1,1)$ و $pb_2 = w^6 = (1,0,1)$ و $pb_3 = w^5 = (1,1,0)$ هستند، جواب‌های بهینه مسائل

(P_{w^i}) به ترتیب عبارتند از: $i=1,2,3$

$$x_{w^5}^* = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right), \quad x_{w^6}^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right), \quad x_{w^7}^* = \left(4 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$$

و مقادیر بهینه عبارتند از:

$$f_{w^5}^* = 2.0659, \quad f_{w^6}^* = 1.5811, \quad f_{w^7}^* = 2.06591$$

احتمال پیشامدهای ماکزیمال متناظر عبارتند از:

$$P_r(A_1) = P_r(w_1 = 0) = 0.5, \quad P_r(A_2) = P_r(w_2 = 0) = 0.4, \quad P_r(A_3) = P_r(w_3 = 0) = 0.6$$

اگر $f_{w^5}^* \leq f < f_{w^8}^*$ ، آنگاه A_3 پیشامد با احتمال ماکسیمم است. بنابراین مجموعه مکان‌های بهینه

عبارتند از: $X(C_f) = \bigcap_{i=1,2} B(p_i, f)$ و $v(C_f) = 0.6$ برای $f < f_{w^5}^*$ (f های نزدیک به $f_{w^5}^*$)

پیشامدهای ماکزیمال در A_f متناظر با نقاط $w^3 = (0,1,0)$ و $w^6 = (1,0,1)$ هستند. پیشامد متناظر

برای w^6 ، A_2 است که قبلاً بررسی شده بود. پیشامد متناظر با w^3 ، A_4 است. داریم:

$P_r(A_4) = P_r(w_1 = 0, w_3 = 0) = 0.3$. جواب بهینه برای مساله (P_{w^3}) عبارت است از $x_{w^3}^* = p_2$ و

مقدار بهینه آن $f_{w^3}^* = 0$ است. اگر $f_{w^6}^* \leq f < f_{w^5}^*$ باشد، A_2 پیشامد با احتمال ماکسیمم است.

مجموعه مکان‌های بهینه عبارت است از $X(C_f) = \bigcap_{i=1,3} B(p_i, f)$ و $v(C_f) = 0.4$ برای $f < f_{w^6}^*$

(f های نزدیک به $f_{w^6}^*$) پیشامدهای ماکزیمال در A_f متناظر با نقاط $w^2 = (1,0,0)$ و $w^3 = (0,1,0)$

و $w^4 = (0,0,1)$ هستند. پیشامد متناظر با w^4 ، A_5 است و داریم: $P_r(A_5) = P_r(w_1 = 0, w_2 = 0) = 0.2$

جواب بهینه برای مساله (P_{w^4}) ، $x_{w^4}^* = p_3$ است و مقدار بهینه آن $f_{w^4}^* = 0$ است. پیشامد متناظر با

w^3 ، A_4 است که قبلاً بررسی شده بود.

پیشامد متناظر با w^2 با A_6 نشان داده می‌شود داریم: $P_r(A_6) = P_r(w_2 = 0, w_3 = 0) = 0.24$ جواب

بهینه برای مساله (P_{w^2}) ، $x_{w^2}^* = p_2$ با مقدار بهینه $f_{w^2}^* = 0$ است. اگر $0 \leq f < f_{w^6}^*$ ، مجموعه

مکان‌های بهینه عبارت است از: $X(C_f) = B(p_2, f)$ و $v(C_f) = 0.3$.

اگر W یک بردار از متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته باشد، تابع هدف پیوسته است و در این مورد تابع

هدف نه محدب است و نه مقعر. در این مورد باید تکنیک‌های بهینه‌سازی کلی را برای بررسی (C_f) بکار

برد. در بخش‌های بعدی یک الگوریتم شاخه و کران بازه‌ای بیان می‌کنیم که مسئله (C_f) را هنگامی که هر یک از وزن‌ها بوسیله یک متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته داده شده است، حل می‌کند.

۴-۴- اعمال حسابی روی بازه‌های حقیقی

در این قسمت، حروف بزرگ بازه‌ها را نشان می‌دهند و حروف کوچک برای مقادیر و بردارها استفاده می‌شوند. کروشه‌ها $[.]$ برای تعیین حدود بازه‌ها و پرانتزها $(.)$ برای نشان دادن بردارها و ماتریس‌ها بکار می‌روند. خط‌های زیرین کران‌های پایین و خط‌های بالایی کران‌های بالا را نشان می‌دهند. برای مثال، بردار بازه‌ای $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ که $X_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ عرض بازه X_i بوسیله $w(X_i) = \bar{x}_i - \underline{x}_i$ نشان داده می‌شود. و عرض بردار بازه‌ای $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ توسط رابطه $w(X) = \max\{w(X_i) : i = 1, \dots, n\}$ نشان داده می‌شود. نقطه میانی X نیز بوسیله $mid(X)$ نشان داده می‌شود. مجموعه بازه‌ها بوسیله R مجموعه بردارهای فاصله‌ای n بعدی که حجره نامیده می‌شوند بوسیله R^n نشان داده می‌شوند.

از آنجائیکه عملکرد بازه‌ها شبیه به عملکرد مجموعه‌هاست، پس روابط تساوی $(=)$ ، عضویت $(\in)$ ، زیرمجموعه $(\subseteq)$ ، زیرمجموعه‌ی سره $\subset$ و همچنین اشتراک $\cap$ نیز برای بازه‌ها تعریف می‌شوند. برای مثال رابطه $X \subset Y; X, Y \in R$ یعنی $X \neq Y, X \subseteq Y$.

بازه X ، درون بازه Y قرار دارد هرگاه $\underline{y} < \underline{x}$ ، $\bar{x} < \bar{y}$. در این صورت می‌نویسیم $[x] \subset [y]$. همچنین پوسته دو بازه X, Y نیز توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$X \cup Y := [\min\{\underline{x}, \underline{y}\}, \max\{\bar{x}, \bar{y}\}] \quad (۷-۴)$$

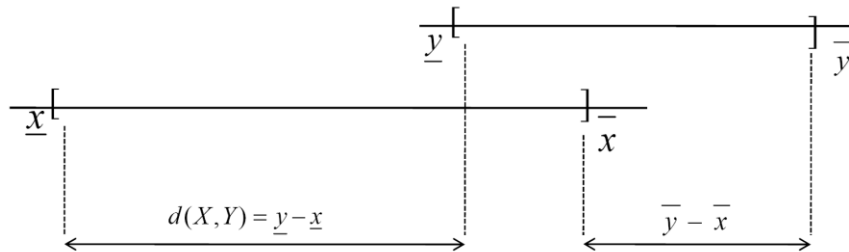
مثال ۴-۱: فرض کنید $X = [1, 3]$ و $Y = [1, 6]$. آنگاه روابط زیر درست هستند:

$$\frac{4}{3} \in X, \quad X \subseteq Y, \quad Y \supset X$$

بعلاوه $X \cup [4,5] = [1,5]$ ، $X \cap Y = X$ را داریم.

فاصله بین دو بازه X, Y که با $d(x, y)$ نشان داده می‌شود توسط رابطه زیر به دست می‌آید

$$d(X, Y) := \max\{|\underline{x} - \underline{y}|, |\bar{x} - \bar{y}|\}$$



اعمال حسابی روی بازه‌ها بوسیله رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$X * Y = \{x * y : x \in X, y \in Y\} \quad \text{for } X, Y \in R \quad (\text{A-4})$$

جدول ۴-۱: ضرب بازه‌های X و Y

$X.Y$	$0 \leq \bar{y}$	$\underline{y} < 0 < \bar{y}$	$\bar{y} \leq 0$
$0 < \underline{x}$	$[\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}]$	$[\bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}]$	$[\bar{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}]$
$\underline{x} < 0 < \bar{x}$	$[\underline{x}\bar{y}, \bar{x}\bar{y}]$	$[\min\{\underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]$	$[\bar{x}\underline{y}, \underline{x}\underline{y}]$
$\bar{x} < 0$	$[\underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}]$	$[\underline{x}\bar{y}, \underline{x}\underline{y}]$	$[\underline{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}]$

که نماد $*$ نماینده اعمال $+$ ، $-$ ، $.$ و $/$ است که $\frac{X}{Y}$ زمانی تعریف می‌شود که $Y \neq 0$ باشد. برای مثال

جمع، ضرب، تفریق و تقسیم بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

$$X.Y = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}\}]$$

$$X - Y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \left[\frac{1}{\underline{y}}, \frac{1}{\bar{y}} \right]$$

حاصل ضرب و تقسیم دو بازه X و Y بترتیب در جدول های (۴-۱) و (۴-۲) آمده است.

جدول ۴-۲: تقسیم بازه های X و Y بطوریکه $0 \notin Y$

$\frac{X}{Y}$	$0 < \bar{y}$	$\bar{y} < 0$
$0 < \underline{x}$	$[\underline{x}/\bar{y}, \bar{x}/\underline{y}]$	$[\bar{x}/\bar{y}, \underline{x}/\underline{y}]$
$\underline{x} < 0 < \bar{x}$	$[\underline{x}/\underline{y}, \bar{x}/\underline{y}]$	$[\bar{x}/\bar{y}, \underline{x}/\bar{y}]$
$\bar{x} < 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \bar{x}/\bar{y}]$	$[\bar{x}/\underline{y}, \underline{x}/\bar{y}]$

توجه داشته باشید هنگامی که $\bar{x} = \underline{x}$ آنگاه بازه ی X را توسط یکی از $\underline{x}$ یا $\bar{x}$ نشان می دهیم.

خواص جبری (۴-۸) با اعمال حسابی روی اعداد حقیقی متفاوت هستند (برای مثال تفریق و تقسیم در

R به ترتیب معکوس اعمال جمع و ضرب نیستند)، اما خواص عمده اعداد حقیقی، در اینجا نیز برقرار

است، به عنوان مثال خاصیت شمول زیر را می توان در نظر گرفت [۲۲، ۳۲]:

$$X \subseteq Y, Z \subseteq T \Rightarrow X * Z \subseteq Y * T \quad \text{for } X, Y, Z, T \in R \quad (۴-۹)$$

در الگوریتم ۴-۱ یک نمونه اولیه از الگوریتم شاخه و کران بازه ای قابل حل برای مسئله ماکسیم

احتمال پوشش (C_f)، ارائه شده است.

الگوریتم ۴-۱: شاخه و کران بازه ای

ورودی: y_0 : یک بازه ی اولیه دلخواه، L_w : مجموعه ای تهی، L_φ : مجموعه ای تهی.

مرحله ۱- y_0 را در φ_w و ϕ را در φ_ϕ قرار می‌دهیم.

مرحله ۲- تا زمانی که $\varphi_w = \phi$ آنگاه یک بازه‌ی y را از φ_w انتخاب کنید (قانون انتخاب). و y را

به زیر بازه‌های $y_1, y_2, \dots, y_s$ تقسیم کنید (قانون تقسیم کردن).

مرحله ۳- اگر بازه y_i کنار گذاشته نشد (قانون رد کردن) آنگاه برو به مرحله ۴

مرحله ۴- اگر $w(y_i) < \varepsilon$ (قانون آخر) آنگاه y_i را در φ_ϕ قرار دهید، در غیر این صورت y_i را در

φ_w قرار دهید.

خروجی: φ_ϕ

حال قوانین الگوریتم را به طور مختصر شرح می‌دهیم:

قانون انتخاب: حجره Y را با شرط $\bar{P}_f(Y) = \max\{\bar{P}_f(Z) : Z \in \varphi_w\}$ انتخاب می‌کنیم

قانون تقسیم: تقسیم Y به تعداد زیر بازه‌های دلخواه.

قانون رد کردن: در این مرحله از آزمون نقطه میانی^۱ استفاده می‌کنیم. که یک حجره Y را رد می‌کند

اگر $\bar{P}_f(Y) < \tilde{P}_f$ که $\tilde{P}_f$ بهترین مقدار شناخته شده بوسیله الگوریتم است. هر زمان که یک حجره از

لیست انتخاب می‌شود، نقطه وسط آن، c محاسبه می‌شود و اگر $\underline{P}_f(Y) > \tilde{P}_f$ ، آنگاه $\tilde{P}_f$ با $\underline{P}_f(c)$

جایگزین می‌شود. هم چنین می‌توان از آزمون یکنواختی نیز استفاده کرد و حجره‌هایی که تابع هدف در

آنها یکنوا است رد می‌شوند.

قانون آخر: اگر $wid(Y) < \varepsilon$ آنگاه حجره Y به φ_ϕ فرستاده می‌شود.

قبل از بیان دو آزمون یکنواختی و نقطه میانی، هدف از انجام این دو آزمون را بازگو می‌کنیم. هدف پیدا

کردن x^* به عنوان جواب مسئله زیر است

^۱Cut-off test

$$\min_{x \in X} f(x) \quad (10-4)$$

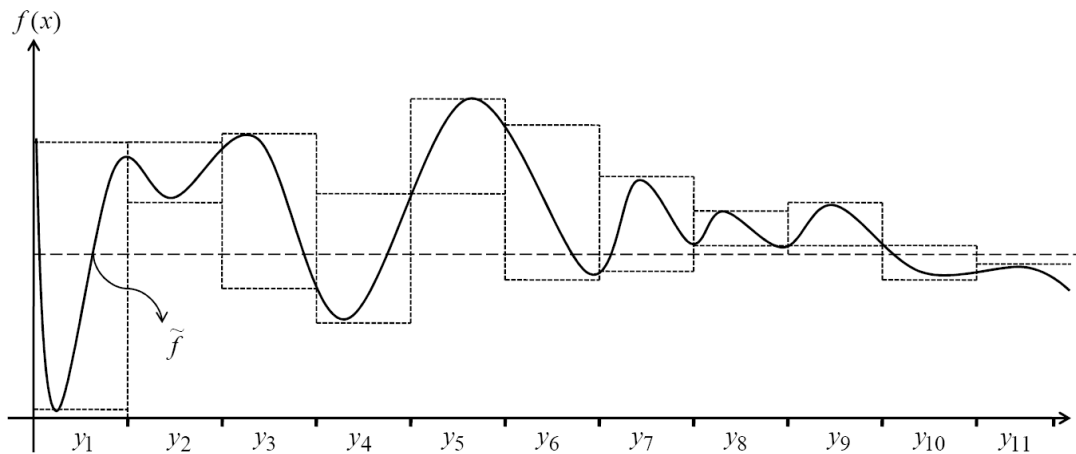
که $f: R \rightarrow R$ تابعی دو بار مشتق پذیر و $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ بازه‌ای در R است. می‌خواهیم مجموعه نقاط مینیمم x^* ، و مقادیر مینیمم یعنی $f^* = f(x^*)$ را بیابیم. چون f یک تابع پیوسته روی یک مجموعه فشرده است پس نقطه مینیمم وجود دارد. اما لازم نیست یکتا باشد. با یک بازه‌ی آغازی X شروع می‌کنیم. این الگوریتم بازه X را به چندین زیربازه تقسیم می‌کند و بازه‌های $Y \subset X$ را در یک لیست L ذخیره می‌کند.

زیربازه‌هایی که شامل یک مینیمم کلی از f نیستند از لیست حذف می‌شوند. و بقیه زیربازه‌ها دوباره تقسیم می‌شوند تا زمانی که هدف مورد نظر در مورد بازه‌های موجود در لیست اتفاق بیافتد. حال برای سرعت بخشیدن به این روش می‌توان از چندین آزمون جهت رد کردن زیربازه‌هایی که شامل نقطه یا نقاط مینیمم کلی نیستند استفاده کرد. که در اینجا به بیان دو آزمون نقطه میانی و آزمون یکنواختی بسنده می‌کنیم. در قسمت‌های بعدی $\underline{f}_Y$ را استفاده خواهیم کرد که در واقع کمترین مقدار f روی تمام نقاط بازه‌ی Y است.

آزمون نقطه میانی

اگر بتوانیم به یک کران بالای $\tilde{f}$ برای مقدار مینیمم کلی f^* دست پیدا کنیم، آنگاه می‌توان همه زیربازه‌های Y که در رابطه‌ی $\underline{f}_Y > \tilde{f} \geq f^*$ صدق می‌کنند را رد (حذف) کرد. در آغاز قرار می‌دهیم $\tilde{f} = \infty$. و یک زیر بازه دلخواه مانند y_i از لیست L انتخاب می‌کنیم. قرار می‌دهیم $c = mid(y_i)$ (یا هر نقطه دیگری در بازه‌ی (y_i) ، و $\tilde{f}$ را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{f} = \min \{f(c), \tilde{f}\} \quad (11-4)$$



شکل ۱-۴

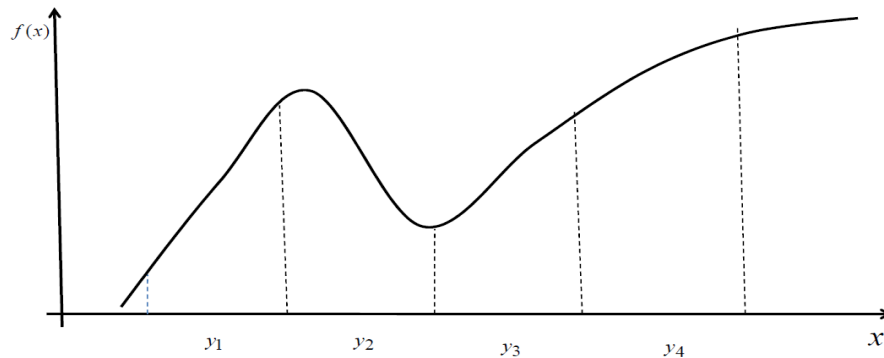
و بدین طریق با اصلاح $\tilde{f}$ ، می‌توانیم همه بازه‌های z از لیست L را که $\tilde{f}_z > \tilde{f}$ است را حذف کنیم. روند تکراری (۱۱-۴) را انجام می‌دهیم تا در نهایت یک زیر بازه باقی بماند. و در نهایت در آن زیر بازه نقطه مینیمم کلی را می‌یابیم. آزمون نقطه میانی ساده است و اغلب با حذف کردن زیر بازه‌های بازه‌ی اولیه X ، از انبوه و حجم کار می‌کاهد. در شکل ۱-۴ این فرایند نشان داده شده است.

ابتدا بازه y_1 را انتخاب می‌کنیم و مقدار f در $c = m(y_1)$ حساب کرده و آن را $\tilde{f}$ می‌نامیم. با توجه به شکل ۱-۴ زیر بازه‌های y_2, y_3, y_8, y_9 حذف می‌شوند. و بدین طریق این روند تکراری را برای زیر بازه‌های باقی مانده انجام می‌دهیم.

آزمون یکنواختی

آزمون یکنواختی برای تابع f که روی تمام زیر بازه‌های $y \subset X$ یکنوای اکید هستند به کار می‌رود. اگر f روی بازه‌ی y یکنوای اکید باشد، آنگاه y نمی‌تواند شامل یک نقطه مینیمم کلی در داخل بازه باشد و این نقطه مینیمم کلی شاید روی کران بالا یا کران پایین بازه y قرار بگیرد اگر این نقطه یک کران از بازه X نیز باشد. بنابراین اگر برای تابع f روی بازه‌ی y داشته باشیم $0 \notin f'(y)$ آنگاه زیر بازه

y می‌تواند حذف شود. (به جز کران بالا و پایین X یعنی $\bar{x}, \underline{x}$). در شکل ۲-۴ آزمون یکنواختی برای چهار زیر بازه X نشان داده شده است.



شکل ۲-۴

ابتدا بازه‌ی y_1 می‌تواند به x کاهش پیدا کند. y_2 بدون تغییر باقی می‌ماند. y_3 می‌تواند حذف شود. چون f روی y_4 صعودی یکنواخت است تمام بازه‌ی y_4 حتی $\bar{x}$ نیز می‌تواند حذف شود زیرا ما به دنبال نقطه مینیمم هستیم. در این مثال، آزمون یکنواختی لیست L را از چهار عضو y_1, y_2, y_3, y_4 به دو عضو $y_2, \bar{x}$ کاهش داد. به نظر می‌رسد با بکار بردن آزمون نقطه میانی با استفاده از $\bar{x}$ بازه y_2 حذف می‌شود. بنابراین جواب یکتای $x^* = \bar{x}$ فقط با محاسبه f' روی چهار بازه و مقدار f روی دو بازه به دست آمد.

لازم به ذکر است که در این دو آزمون هدف مینیمم سازی است و در الگوریتم (۴-۱) هدف ماکسیمم سازی است.

۴-۵- تحلیل مساله (R_α)

یک جستجوی دودوئی در یک حوزه از مقادیر f می‌تواند برای بدست آوردن یک مقدار بهینه نزدیک از مسئله (R_α) ، برای هر مقدار α ثابت، بکار برده شود. اگر همه وزن‌های w_i ، مقادیری را در بازه $[a_i, b_i]$ که $a_i \geq 0$ است، بگیرند برد آغازی می‌تواند بازه $[f_a^*, f_b^*]$ باشد. در کل هر بازه $[\underline{f}, \bar{f}]$ که

$v(C_{\underline{f}}) < \alpha < v(C_{\bar{f}})$ باشد، می‌تواند به عنوان بازه اولیه انتخاب شود. در هر تکرار، مساله (C_f) باید به منظور کاهش برد نامشخص از جواب بهینه، حل شود سپس یک بازه جدید $[\underline{f}, \bar{f}]$ تولید شود. انتهای جستجو هنگامی است که یا مقدار بهینه f_{α}^* پیدا شود یا برد، کوچکتر از دقت از قبل تعیین شده l باشد. همانطور که در قسمت‌های قبلی گفته شد، مجموعه مکان‌های بهینه را مجموعه $X(C_{f_{\alpha}^*})$ معرفی کردیم. ولی یک تقریب دیگر از مجموعه جواب‌های بهینه، مجموعه $X(C_{\bar{f}})$ است.

الگوریتم ۴-۲: جستجوی دودویی

ورودی: بازه‌ی اولیه $[\underline{f}, \bar{f}]$ و l : طول قابل قبول ولی نامعین.

مرحله ۱- تا زمانی که $|\bar{f} - \underline{f}| > l$ ، مسئله (C_f) را برای $\bar{f} = \frac{\bar{f} + \underline{f}}{2}$ حل می‌کنیم.

a. اگر $v(C_f) > \alpha$ آنگاه قرار می‌دهیم $\bar{f} = f$ و به مرحله ۱ می‌رویم.

b. اگر $v(C_f) = \alpha$ آنگاه $X(R_{\alpha}) = X(C_{\bar{f}})$ و $f^* = f$ جواب بهینه است و به مرحله پایانی می‌رویم.

در غیر این صورت قرار می‌دهیم $\underline{f} = f$ و به مرحله ۱ می‌رویم.

مرحله ۲- $\bar{f}$ به عنوان نزدیک‌ترین جواب بهینه و $X(C_{\bar{f}})$ به عنوان تقریبی از مجموعه‌ی جواب-های بهینه می‌باشد.

مرحله ۳- پایان

خروجی: f و $X(C_f)$

نتیجه گیری و پیشنهادات

تعیین محل مناسب برای استقرار تجهیزات یا مراکز خدماتی با استفاده از روش‌های مکانیابی می‌تواند اطلاعات مفیدی را در اختیار مدیران قرار دهد تا تصمیماتشان بر مبنای علمی و کارشناسی استوار گردد. همانطور که مشاهده کردید در این تحقیق، مساله مکانیابی روی صفحه و شبکه بصورت احتمالی مورد بحث قرار گرفت و بعضی از پارامترها بصورت تصادفی در نظر گرفته شد. مثلاً در شبکه سرعت روی یال‌ها را تصادفی ولی نه لزوماً مستقل و در صفحه نیز وزن نقاط تقاضا را تصادفی و مستقل فرض کردیم. از آنجایی که در واقعیت بیشتر پارامترها ثابت نبوده و بصورت تصادفی تغییر می‌کنند پس می‌توان این موضوع را بطور گسترده و کاربردی مورد بحث و بررسی قرار داد. مثلاً در شبکه می‌توان وزن‌ها و یال‌ها را فازی در نظر گرفت و در صفحه نیز حالت‌هایی را بررسی کرد که وزن نقاط تقاضا به هم وابسته بوده یا زمان سفر بین سرویس دهنده و نقاط تقاضا و یا سرعت حرکت تصادفی باشند. در این تحقیق همه وزن‌ها متغیرهای تصادفی گسسته و یا پیوسته هستند و ترکیبی از توزیع‌های احتمال گسسته و پیوسته برای حالتی که وزن رئوس متغیر تصادفی است در نظر گرفته نشده است و می‌توان این حالت را نیز مورد بررسی قرار داد.

مراجع

- [1] Aneja Y. T, Chandrasekaran R, Nir KPK. (1988) "A note on the m -center problem with rectilinear distances". *European Journal of Operational Research*; 35:118–23.
- [2] Berman O, Drezner Z. (2003) "A probabilistic one-center location problem on a network." *Journal of the Operational Research Society*. 54:871–7.
- [3] Berman O, Krass D. (2002) "Facility location problems with stochastic demands and congestion" In: Drezner Z, Hamacher H, editors. *Facility location: applications and theory*. Berlin: Springer; 329–371.
- [4] Berman O, Wang J, Drezner Z, Wesolowsky G. (2003) "The minimax and maximin location problems on a network with uniform distributed weights". *IIE Transactions*; 35: 1017–25.
- [5] Berman O, Wang J, Drezner Z, Wesolowsky G. (2003) "A probabilistic minimax location problem on the plane" *Annals of Operations Research*; 122: 59–70.
- [6] Cappanera P. (1999) "A survey on obnoxious facility location problems" Technical Report: Tr-99-11, Dipartimento di informatica, Universita dipisa.
- [7] Charalambous C. (1982) "Extension of the Elzinga and Hearn algorithm to the weighted case". *Operations Research*; 30: 591–4.
- [8] Church R. L. and ReVelle C. S. (1974) "The maximal covering location problem" *Papers of the Regional Science Association*, 32, pp 101-118.
- [9] Current J. and Daskin M. and schilling D. (1929) "Discrete networks location models" Chapter 3 in: *Facility Location Theory and Methods*.
- [10] Drezner. Zvi, (1995) "*Facility location: A survey of applications and methods*", Springer.
- [11] Drezner. Z, (1992) "On the computation of the multivariate normal integral." *ACM Trans Math Software* 18: 470-480.
- [12] Drezner. Z, (1993) "Algoriyhm 725: computation of the multivariate normal integral." *ACM Trans Math Software* 19: 546
- [13] Drezner. Zvi, Suzuki. A. (2004) "The Big Triangle Small Triangle Method for the Solution of Nonconvex Facility Location Problems", *Operations Research* 52(1): 128-135.

- [14] Francis R. and McGinnis Jr. L. F. and White J. A. (1992) "*Facility Layout and Location An Analytical Approach.*" Prentice Hall
- [15] Frank H. (1966) "Optimum locations on a graph with probabilistic demands" *Operations Research*, 14: 409-421
- [16] Hakimi S. (1964) "Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph" *Operations Research*, 12: 450 -459.
- [17] Hakimi S. (1965) "Optimum location of switching centers in a communications network and some related graph theoretic problems" *Operations Research*, 13: 462-475.
- [18] Hamacher H. W. and Nickel s. (1998) "Classification of location models" *Location Science*, 6, pp 229-242.
- [19] Handler G. Y. (1973) " Minimax location of a facility in an undirected tree graph" *Transport Sci* 7: 287-293.
- [20] Handler G. Y. and Mirchandani P. B. (1979) "*Location on networks: theory and algorithms*" MIT- press, Cambridge.
- [21] Hansen E. (1992) "*Global optimization using interval analysis.*" New York: Marcel Dekker.
- [22] Hansen P. and labbe M. and peters D. (1987) "Single facility location on networks" *Annals of Discrete Math*, 3: 113-146.
- [23] Hearn, D. W. and J. Vijay. (1982). "Efficient Algorithms for the (Weighted) Minimum Circle problem." *Operation Research*, 30, 552-557.
- [24] Kariv O. Hakimi S. L. (1979) "An algorithmic approach to network location problems. Part I: The p-center" *SIAM J. Appl. Math*, 37: 513-537
- [25] Krarup J. and Pruzan P. M. (1983) "The simple plant location problem: survey and synthesis" *European Journal of Operational Research*, 12: 36-81.
- [26] Mirchandani P. B. Francis R. L. (eds) (1990) "*Discrete location theory*", Wiley: New York.
- [27] Newman W. and McGill A. (1987) "The process of Management" *prentice Hall*.
- [28] Owen S. H. and Daskin M. S. (1998) "Strategic facility location: a review" *European Journal of Operational Research*, 111, pp 423-477.

- [29] Pelegrín B. Fernandez J. Toth B. (2008) The 1-center problem in the plane with independent random weights" *computers & Operations Research* 35: 737-749
- [30] Pelegrin B, Canovas L. (1998) "The minimum *lpb*-hypersphere problem." *Computational Optimization and Applications*; 9: 85–97.
- [31] Ratschek H, Rokne J. (1988) "New computer methods for global optimization." *Chichester, UK: Ellis Horwood*.
- [32] ReVelle C. S. (1997) "A perspective on location science" *Location Science*, 5: 3-13.
- [33] Scaparra M. P. and Scutella M. G. (2001) "*Facilities, locations, customers: building blocks of location models: A survey*" Thechnical Report: tr-01-18, University of pizza, Italy.
- [34] Sylvester, J. J. (1987). "A question in the Geometry of situation." *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. 1, 79.
- [35] Tansel B. C. and Francis R. L. and Lowe T. J. (1983) "Location on networks a survey" *Management Science*, 29, pp482-511.
- [36] Vijay J. (1985) "An algorithm for the *p*-center problem in the plane." *Transportation Science*; 19:235–45.
- [37] Weber A. (1929) "*Über den standort-der industrient. Tübingen*" English Trans Theory of Location of Industries, Chicago University press, Chicago, Illinois.
- [38] Wesolowsky, G. O. (1977). "Probabilistic Weights in the One-Dimensional Facility Location Problem." *Management Science* 24: 224-229.

[۳۹] فروند ج، (۱۳۷۸)، "آمار ریاضی" عمیدی ع، وحیدی اصل م ق، چاپ سوم، مرکز نشر دانشگاهی.

[۴۰] عیوض پور ج، (۱۳۸۵)، پایان نامه کارشناسی ارشد: "مسیریابی وسائل نقلیه با استفاده از الگوریتم فوق

ابتکاری Tabu Search " دانشگاه تربیت مدرس.

Abstract

Location problems have gained importance in operation research since early 1990s. In these problems, one deals with the placement of a set of facilities for optimization of a purposed function associated with a number of limitations. Facility location problems are used in a wide range of application. There are different types of facility location problems which some of their important classes are: random, network, continuous, and discontinuous location. It is possible that in the long run many location problem parameters such as equipments, demand, time of passing a distance, cost of equipments, and even distances and speed may change and not be fixed, and these change are often random. In this case each one of these variables has probability distribution and should be analyzed on probability basis.

Therefore, there must be a target function proportionate to a probability distribution for any probability distribution associated to the relevant random variable. In this research, after specifying a problem on the network and another on the page with specific probability distribution, we introduce two target function and two algorithms for solving location problems with probability parameters, probability distribution function, and arbitrary smooth function.

***Keywords:* Location; Single object location; Probability distribution function**