بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی گرایش ریاضی مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تنظیم پرتفوی نامعین با استفاده از مدل انحراف نیمه مطلق

نگارنده: زهره جامعی

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

مهر ۱۳۹۵

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

همسر مهربانم

سپاس گزاری

محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه ی تلاشهای محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند و بامهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند.
به همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است.
به استادان فرزانه و فرهیخته ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند.
به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند.
به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه ی راهم بود.

الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته ی آنان جامه ی عمل بپوشانم.
پروردگارا حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.
خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

نگارنده: زهره جامعی
مهر ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **نگارنده: زهره جامعی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی مالی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تنظیم پرتفوی نامعین با استفاده از مدل انحراف نیمه مطلق** ، تحت راهنمایی **دکتر علیرضا ناظمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نگارنده: زهره جامعی
مهر ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

از آنجایی که بازارهای مالی پیچیده هستند، بعضی اوقات بازده اوراق بهادار در آینده بر اساس قضاوت خبرگان نشان داده می‌شود. این پایان نامه به بررسی تنظیم مساله یک پرتفوی با دارایی‌های پر ریسک می‌پردازد، که در آن بازده اوراق بهادار به برآورد کارشناسان داده شده است. در اینجا، پیشنهاد ما تنظیم مدل‌های انحراف نیمه مطلق میانگین نامعین برای مشکل بهینه سازی پرتفوی در معاوضه بین ریسک و بازده سرمایه‌گذاری است. توزیع‌های مختلف نامعین از بازده اوراق بهادار بر اساس ارزیابی کارشناسان، برای تبدیل مدل‌های ارائه شده به معادل قطعی آن‌ها استفاده می‌شوند.

کلمات کلیدی: تنظیم پرتفوی، انحراف نیمه مطلق، مدل نامعین، برنامه نویسی نامعین

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف مورد نیاز در فصل‌های بعدی به‌طور مختصر آورده شده است. ابتدا مفهوم بهینه پارتو و بعد ازآن مفاهیم اقتصادی که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرد آورده شده است.

۲.۱ بهینه پارتو

کارایی پارتو [۱] یا بهینگی پارتو یک مفهوم در علم اقتصاد است با کاربردهایی در مهندسی و علوم اجتماعی. این مفهوم حالتی از تخصیص منابع است که در آن امکان بهتر نمودن وضعیت یک فرد بدون بدتر کردن وضعیت فردی دیگر وجود ندارد[۶]. این اصطلاح پس از ویلفردو پارتو [۲] به این نام نامیده شد. او که یک مهندس و اقتصاددان ایتالیایی بود از این مفهوم در مطالعاتش در زمینه کارایی اقتصادی [۳] و توزیع درآمد [۴] استفاده کرد.
در زندگی ناچار به تصمیم‌گیری، انتخاب و جستجو برای سازش و توافق هستیم. مشکلی که در این‌جا وجود دارد (حداقل به صورت جزیی) ناسازگاری اهداف موجود با هدف‌های مختلف ما هستند. مسئله بهینه سازی چند هدفه معمولی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \textbf{Min} & f(x) \\ \textbf{s.t.} & \\ & x \in X. \end{cases}$$

[۱] Pareto efficiency

[۲] Pareto Vylfr

[۳] Economic performance

[۴] Distribution of income

و در آن $X \subseteq \mathbb{R}^n$ و $X \neq \emptyset$ و همچنین $f(x) = (f_۱, f_۲, \dots, f_k)^T(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ یک تابع برداری است، که الزاما بردارها با یکدیگر سازگار نیستند. همچنین $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_k)$ بردار متغییرهای تصمیم است و $f_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, i = ۱, ۲, \dots, k$ نشان دهنده تابع هدف i ام است. منظور از مینیم‌سازی در بالا این است که تمام توابع هدف به طور هم‌زمان کمینه شوند.

کارا (بهینه پارتو)

در مسئله چند هدفه به جواب شدنی $x^* \in X$ کارا یا بهینه پارتو گویند هرگاه:

$$\nexists x \in X, \text{s.t} \ \ f(x) \leq f(x^*).$$

اگر $x^* \in X$ کارا باشد، آن‌گاه$f(x^*) \in f(X)$ را غیر غالب گویند.

منظور از غیرغالب بودن این است که هیچ چیز نمی‌تواند بر آن غلبه کند، که در این‌جا به این معنی است که هیچ مقداری کمتر از آن وجود ندارد.

مجموعه تمام جواب‌های کارای $x^* \in X$ را با X_E نشان می‌دهند و مجموعه کارایی گویند. همچنین مجموعه تمام نقاط غیرغالب $y^* = f(x^*)$ را با Y_N نشان داده و آن را مجموعه غیرغالب گویند. مفهوم بهینه پارتو بیان می‌کند اگرچه نمی‌توان یک نقطه بهینه را همزمان برای تمامی توابع هدف به دست آورد(یعنی تمامی توابع مطلوبیت را کمینه یا بیشینه نماید) اما می‌توان یک مجموعه از پاسخ‌ها را طوری پیدا کرد که در فضای جستجو از پاسخ‌های دیگر بهتر باشد. به این مجموعه پاسخ‌ها مجموعه پاسخ‌های بهینه پارتو و نقاط دیگر فضای جستجو را مجموعه پاسخ‌های مغلوب می‌نامند. انتخاب پاسخ بهینه نهایی از میان پاسخ‌های بهینه پارتو به میزان آگاهی ما از مساله و شرایط مرزی و محیطی آن بستگی دارد. در این جا تصمیم‌گیرنده که همان طراح شبکه در مساله می‌باشد نقش اساسی را ایفا می‌نماید[۶].

۳.۱ مفاهیم اقتصادی

۱.۳.۱ مفهوم سرمایه و سرمایه گذاری

سرمایه از مهم‌ترین عوامل تجارت بوده و بزرگ ترین وسیله جلب منفعت است. هر شرکت باید دارای سرمایه باشد، تا بتواند نتیجه ای از عملیات خود را که تجارت است برده و منتفع شود. به طوریکه اهمیت شرکت های تجاری را از سرمایه آنها می توان درک کرد.

سرمایه گذاری [۵] به معنای تغییر در حجم سرمایه در طی یک دوره بوده و به بیان دیگر سرمایه گذاری مشتق سرمایه است نسبت به زمان و سرمایه انتگرال سرمایه گذاری است. سرمایه گذاری در حقیقت تشکیل سرمایه است.

"پرتفوی" در بحث "سهام" چیست و چه مزایایی دارد؟

[5] Investment

پرتفوی[۶] یک واژه فرانسوی است که به معنی کیف چرمی بزرگ آمده است. اگر چه در ظاهر خیلی پیچیده است اما مفهوم کاملا واضحی در بورس دارد، که در عالم بورس بازی به معنی کیف یا سبد سهام می‌باشد. بدین معنی که وقتی شخصی از پرتفوی خود صحبت می‌کند، منظورش انواع سهام موجود در سبد سهامش است.
به طور کلی سرمایه گذاری در مجموعه ای از اوراق بهادار یا پرتفوی، بسیار کارآمدتر از سرمایه گذاری در یک سهم می باشد. چون با افزایش تعداد سهام در سبد سرمایه گذاری، ریسک مجموعه کاهش می یابد. علت کاهش ریسک تاثیرات مختلفی است که شرکت های سرمایه پذیر از شرایط متفاوت اقتصادی سیاسی و اجتماعی می پذیرند. در سال ۱۹۵۰هري ماركوويتز [۷] مدل اساسي پرتفوليو را ارائه كرد كه مبنايي براي تئوري مدرن پرتفوليو قرار گرفت. ماركوويتز اولين كسي بود كه مفهوم پرتفوليو و ايجاد تنوع را به صورت علمي بيان كرد. او معتقد بود، سرمايه‌گذاران نسبت به آينده مطمئن نيستند و بايد براي كاهش ريسک دست به ايجاد تنوع در سرمايه گذاري بزنند. به عبارت ديگر تشكيل يک پرتفوليو متنوع، ميزان ريسک را تا حد زيادي كاهش مي دهد. ماركوويتز همچنين مفهوم پرتفوليو كارا را مطرح كرد.
پرتفوليو كارا به معناي تركيب مطلوب اوراق بهادار به نحوي است كه ريسک آن پرتفوليو در ازاي نرخ بازده معين به حداقل رسيده باشد.
سرمايه گذاران منطقي به دنبال پرتفوليوهاي كارا هستند زيرا اين گونه پرتفوليوها باعث حداكثر شدن بازده مورد انتظار براي سطح معيني از ريسک، يا حداقل ريسک براي بازده مورد انتظار معيني مي شود. براي تعيين يک پرتفوليو كارا لازم است بازده مورد انتظار وانحراف معيار بازده براي هر پرتفوليو را مشخص كنيم. به همين منظور از مدل ماركوويتز استفاده مي كنيم.

تعریف ۱.۳.۱. گوییم یک پرتفوی خود تامین [۸]است اگر هیچ تزریق و یا خروج پولی وجود نداشته باشد. خرید یک دارایی جدید با فروش یکی از دارایی‌های همان پرتفوی انجام می‌گیرد.

ارزش پرتفوی

به ارزش مالی و نقدی پرتفوی هر شخص حقیقی یا حقوقی، ارزش پرتفوی گویند. برای قیمت گذاری شرکت‌های سرمایه گذاری پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار، مهم ترین عامل ارزش پرتفوی این شرکت هاست.

مدیریت پرتفوی

پرتفوی به منظور کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می‌شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارائیها (شامل سهام‌های خریداری شده) نزدیک به صفر باشد.
در مسئله انتخاب پرتفوی هدف این است که چگونه سرمایه یک فرد به بازار سرمایه اوراق بهادار وارد شود و حداکثر سود را با حداقل ریسک بدست آورد.

[۶] Portolio

[۷] Markowitz

[۸] Self-financing

۲.۳.۱ سبد سرمایه گذاری کارا

تئوری سبد سرمایه گذاری نوین در سال ۱۹۵۰ توسط هری مارکوویتز مطرح شد[۱۷]. او فرض کرد که هر سرمایه گذار در هر سطح ریسکی خواهان بیشترین بازده است. در این جا معیار اندازه‌گیری ریسک، انحراف معیار بازده مورد انتظار است. در سبدهای کارا برای به دست آوردن بازده بیشتر باید ریسک بیشتری تحمل کرد، بنابراین سرمایه گذاران با یک رابطهٔ جایگزینی بین ریسک و بازده مواجه می‌شوند. رابطهٔ بین ریسک و بازده با یک منحنی به نام مرز کارا [۹] نشان داده می‌شود. هر سبد کارا که به خوبی متنوع شده باشد، یک نقطه از این منحنی است.

۳.۳.۱ بازده

بهره ناشی از سرمایه گذاری بازده گفته می‌شود. بازده یک شرکت از نظر کمی، سود حسابداری و از نظر کیفی، اعتبار شرکت تلقی گشته و نیروی محرکی است که ایجاد انگیزه کرده و به‌عبارت بهتر پاداش سرمایه گذاران محسوب می‌شود، چرا که تمام هدف سرمایه گذاری کسب بازده مطلوب است. از طرف دیگر تعیین تفاوت میان بازده تحقق یافته [۱۰] و بازده مورد انتظار [۱۱] از اهمیت بالایی برخوردار است. بازده تحقق یافته، بازده‌ای است که واقع شده است، یا بازده‌ای است که کسب شده است. حال آنکه بازده مورد انتظار، بازده تخمینی برای یک دارایی [۱۲] در دوره‌ای از آینده است که این بازده با عدم‌قطعیت همراه بوده و احتمال برآورده نشدن آن نیز وجود دارد. در مورد دارایی‌ها و مخصوصا سهام، بازده از دو جزء تشکیل شده است:

۱. بازده ناشی از تغییر قیمت [۱۳]، این جزء از اختلاف بین قیمت خرید دارایی و فروش دارایی حاصل می‌شود.

۲. بازده ناشی از دریافت سود [۱۴]، این بازده ناشی از صورت جریانات نقدی دریافتی به دلیل تملک دارایی در طول سرمایه گذاری است (همانند سود تقسیمی).

بازده مورد انتظار هر سهم

عبارت است از بازده تخمینی یک دارایی که سرمایه گذاران انتظار دارند در یک دوره آینده به دست آورند. بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است و ممکن است برآورده نشود. سرمایه‌گذاری بر روی اوراق بهادار ریسک‌دار بلندمدت می تواند باعث برآورده شدن بازده مورد انتظار سرمایه گذاران شود درحالی که در کوتاه مدت این اتفاق نمی افتد.

تفاوت‌های میان بازده تحقق یافته و بازده مورد انتظار:

---

[۹] Efficient frontier

[۱۰] Realized return

[۱۱] Expected return

[۱۲] Asset

[۱۳] Capital gain

[۱۴] Yeild

۱- مبلغ بازده تحقق یافته، واقعی و قابل اتکا می‌باشد.
۲- مبلغ بازده مورد انتظار، برآوردی و قابلیت اتکا چندانی ندارد.
۳- بازده تحقق یافته با عدم اطمینان همراه نیست.
۴- بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است.

محاسبه بازده مورد انتظار :

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده بالقوه سهام، بازده مورد انتظار برای سهام iام با $E(R_i)$ نشان داده شده و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=۱}^{m} (p_k) PR_k.$$

$E(R_i)$ = بازده مورد انتظار هر سهم　　PR_k= kامین بازده بالقوه سهم i ام
m = تعداد بازده‌های ممکن　　p_k= احتمال وقوع k امین بازده بالقوه

مثال ۲.۳.۱. نرخ‌های بازده ممکن حاصل از ۵ میلیون ریال سرمایه گذاری در سهام شرکت A عبارت است از :

احتمال PR_k	احتمال p_k
۰٫۲	−۰٫۰۵
۰٫۶	۰٫۲
۰٫۲	۰٫۴

با توجه به اطلاعات فوق، نرخ بازده مورد انتظار سهم A به صورت زیر محاسبه می شود :

$$E(R_i) = ۰٫۲ * (-۰٫۰۵) + ۰٫۶ * (۰٫۲) + ۰٫۲ * (۰٫۴) = ۰٫۱۹$$

بازده مورد انتظار سبد سهام

در صورتی که سبد سرمایه با N دارایی داشته باشیم که وزن دارایی i ام در آن x_i باشد، بازده مورد انتظار سبد سهام با $E(R_p)$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_p) = \sum_{i=۱}^{N} x_i E(R_i). \quad (۱.۱)$$

۴.۳.۱ ریسک و مفهوم آن

مفهوم ریسک در فرهنگ لغت به معنی احتمال آسیب و به‌طور ساده می‌توان ریسک را عدم اطمینان به نتایج آتی تعریف کرد. به عبارت دیگر ریسک پدیده‌ای مربوط به آینده است که نمی‌توان آن را به طور دقیق پیش بینی نمود، زیرا با عدم اطمینان همراه است. هرچه این عدم اطمینان بیشتر باشد ریسک هم بیشتر است. در بازارهای مالی به‌همراه هر فرصتی، ریسک هم وجود دارد و اصولا نمی‌توان کلیه ریسک‌ها را از بین برد زیرا کلیه فرصت‌ها هم از بین خواهند رفت. لازم به توضیح است که در ادبیات بازار سرمایه و جهت شناخت بیشتر، مفهوم ریسک را به طور کلی به دو بخش اجتناب‌پذیر و اجتناب‌ناپذیر تقسیم‌بندی می‌کنند. آن بخش از ریسک که در اثر بروز عوامل برونزای موثر بر نوسانات بازار مالی بوجود آمده و نهایتا بر روی قیمت اوراق بهادار تاثیر می‌گذارد به‌عنوان ریسک‌های اجتناب‌ناپذیر شناخته شده و قابل کاهش با اقدام به عمل تنوع سازی نمی‌باشد. از آنجایی‌که این نمونه از ریسک بدلیل بروز تغییرات ناشی از وضعیت کلی بازار، بصورت نظام‌یافته عمل کرده و موجب تغییرات کلی بر روی مجموعه اوراق بهادار می‌شود، به عنوان ریسک بازار یا ریسک سیستماتیک نیز شناخته می‌شوند. در حالیکه به آن بخش از ریسک اوراق بهادار را که ناشی از وضعیت خاص هر واحد از اوراق بهادار بوده و مستقل از عواملی عمل می‌کند که به طور کلی بازار اوراق بهادار را تحت تاثیر قرار می‌دهد، تحت عنوان ریسک اجتناب‌پذیر شناخته می‌شود. بدیهی است که از طریق تنوع بخشی به عملیات سرمایه گذاری، این نوع ریسک غیر سیستماتیک یا کاهش‌پذیر را می‌توان تحت کنترل قرار داد.
میزان ریسک‌پذیری سرمایه گذار، یکی از مهمترین عوامل تعیین کننده در انتخاب گزینه‌های سرمایه گذاری است. سرمایه گذار موفق کسی است که سطح قابل قبولی از ریسک را بپذیرد. سرمایه گذاران الگوهای ریسک پذیری متفاوتی دارند به طور کلی می‌توان آن‌ها را به دو دسته ریسک پذیر [۱۵] و ریسک گریز [۱۶] تقسیم کرد. افراد ریسک پذیر در مقایسه با افراد ریسک گریز، بازدهی کمتری برای پذیرش ریسک مطالبه می‌کنند.

روش‌های اندازه‌گیری ریسک

مهمترین مسئله در ریسک، محاسبه آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک معرفی شده، معیارهای اندازه‌گیری ریسک اولین بار از طریق مطالعات شاخص‌های پراکندگی آماری و از آن به بعد توسط معیارهای جدیدتری از جمله حساسیت و ریسک نامطلوب محاسبه شدند، که همگی از روش‌های آماری استفاده می‌کنند.
بسیاری از متون در بهینه سازی پرتفوی برای اندازه‌گیری ریسک از واریانس استفاده می‌کنند. مارکوویتز [۱۷] برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه گذار در بازارهای مالی از مدل نیم واریانس استفاده کرد. سپرانزا [۲۳] انحراف نیمه مطلق را برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه گذاری استخراج کرد. کونو و یاماکازکی [۷] برای اندازه‌گیری ریسک از انحراف نیمه مطلق به جای واریانس در مدل مارکوویتز استفاده کردند و یک مدل برنامه‌ریزی خطی را ارائه دادند. سیمان [۲۴] یک مقایسه دقیق از مدل‌های میانگین– واریانس

[۱۵] Risk taker

[۱۶] Risk averse

و انحراف مطلق میانگین برای اندازه‌گیری ریسک ارائه داد. سپرانزا [۲۳] برای اولین بار برای انتخاب ریسک پرتفوی از مدل انحراف نیمه مطلق در محیط تصادفی استفاده کرد.
ریسک عبارت است از احتمال نوسانات آتی نرخ‌بازدهی. شاخص‌های مختلفی برای تبیین نوسانات مورد استفاده قرار می‌گیرد که بعضی از مهم‌ترین آنها بدین صورت هستند:

۱. دامنه تغییرات
۲. متوسط انحراف خطی (متوسط قدر مطلق انحرافات)
۳. واریانس (متوسط مجذور انحرافات)
۴. انحراف معیار
۵. نیم‌واریانس
۶. نیم انحراف معیار
۷. شاخص بتا
۸. دارایی‌درخطر(Var)
۹. انحراف نیمه مطلق میانگین

ریسک گریز

ریسک‌گریزی، اصطلاحی در علم اقتصاد و علوم مالی است، که به معنای ترجیح پذیرش ریسک کم‌تر می‌باشد. تمایل فردی و درونی انسان‌ها (سرمایه گذاران و معامله‌گران) در مواقع عدم قطعیت، جلوگیری از ریسک غیر ضروری است. این نوع ریسک، فردی و درونی است، چرا که سرمایه گذاران متفاوت، تعریف متفاوتی از ریسک غیرضروری دارند. سرمایه گذاری که به دنبال بازده بیشتری است، ریسک‌های ضروری بیشتری را می‌پذیرد، ولی سرمایه گذاری که به دنبال بازده کم تری است، استراتژی سرمایه گذاری خود را بی‌پروا و بدون دقت زیاد انتخاب می‌کند؛ بنابراین یک سرمایه گذار منطقی که ریسک گریز نیز می‌باشد، اگر دو سرمایه گذاری با بازده یکسان و ریسک متفاوت برای انتخاب داشته باشد، سرمایه گذاری با ریسک کم‌تر را انتخاب خواهد کرد.
به بیان ساده ریسک گریزی به معنای عدم تمایل به معامله‌ای پرسود ولی با ریسک بالا و ترجیح دادن معامله‌ای با سود کم‌تر، ولی امنیت بیشتر می‌باشد. از دیدگاه روانشناسی معمول، ریسک پذیری یک نفر به عوامل متعدد درونی و بیرونی بستگی خواهد داشت، ولی همه این عوامل به احساس امنیت شخص باز می‌گردد.

ریسک پذیر

افرادی که در این الگو قرار دارند توانای تحمل بالا در شرایط عدم اطمینان را داشته و به همان میزان نیز خواهان دریافت بازده بیشتر می باشند. هر سازمان با توجه به ماهیت کار خود، ریسک های گوناگون را تجربه می کند و در شرایط متحول امروز، اساساً موفقیت هر بنگاه به تسلط آن بر ریسک‌ها و نوع مدیریتی است که بر انواع ریسک‌ها اعمال می‌شود، بستگی دارد.
در مجموع ریسک پذیری همان سنجش یا ارزیابی ریسک و به دنبال آن طراحی استراتژی هایی برای

اداره ریسک است.
به این ترتیب در شرایط پر تحول امروز، توفیق بنگاه‌ها به تسلط آنها بر ریسک‌ها وابسته است. همان‌طور که معروف است« نه قویترین و نه با هوشترین بلکه منعطف ترین موجودات بقا دارند.»

ریسک سبد سهام

ریسک سبد سهام، تابعی از سهام منفرد و کوواریانس بین بازده‌های سهام منفرد است که بصورت زیر بیان می‌شود:

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i Var(R_i) + \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j Cov(R_i, R_j).$$

در فرمول بالا $Cov(R_i, R_j)$ برابر است با:

$$Cov(R_i, R_j) = E(R_i R_j) - E(R_i)E(R_j).$$

۵.۳.۱ فروش استقراضی

در علم مالی، فروش استقراضی عمل فروختن دارایی و معمولاً اوراق بهاداری است که از شخص ثالثی (معمولاً یک کارگزار) و با هدف خریدن مشابه همان دارایی در آینده جهت پس دادن آن به قرض دهنده، قرض گرفته می‌شوند. فروشندگان استقراضی امیدوارند که از کاهش قیمت آن دارایی پس از فروش و تا قبل از خرید مجدد آن سود کنند. از آنجایی که پس از کاهش قیمت بایستی بهای کمتری را هنگام خرید مجدد آن دارایی بپردازند. همچنین درصورتی که قیمت افزایش یابد، فروشنده استقراضی متحمل ضرر می‌شود (چرا که مجبور است آن دارایی را در قیمتی بالاتر از آنچه که فروخته خریداری کند). این ضرر محدود به کل بهای دارایی فروخته شده است. دیگر هزینه‌های فروش استقراضی، هزینه قرض گیری دارایی و غیره است. از دید ریاضی، فروش استقراضی برابر با خرید دارایی با حجم منفی است.
فروش استقراضی همواره محدود به دارایی‌هایی است که در بازارهای اوراق بهادار، کالا و ارز مبادله می‌شوند و حجم ورود خروج این دارایی‌ها در آن بازار، هر زمان قابل کنترل باشد، تا خرید مجدد دارایی قرض گرفته شده در هر زمان لازم امکان پذیر باشد. چون این نوع دارایی‌ها مثلی هستند، هر دارایی از همان نوع که خریداری شود می‌تواند به قرض دهنده به عنوان عوض قرض داده شود[۲۲].

۶.۳.۱ مطلوبیت

مطلوبیت [۱۷] احساس خشنودی و یا رضایت خاطری است که از مصرف کالاها و خدمات هر فرد بدست می‌آورد، مطلوبیت به دو صورت عددی و یا ترتیبی اندازه‌گیری می‌شود.

[۱۷] Utility

منحنی بی‌تفاوتی

منحنی بی‌تفاوتی مکان هندسی ترکیبات مختلف کالاها است که مطلوبیت کل یکسانی را برای شخص ایجاد می‌کند، بنابراین شخص در انتخاب آن نقاط بی‌تفاوت است.

فصل ۲

تئوری عدم‌قطعیت

۱.۲ مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایایی از تئوری عدم‌قطعیت و متغیرهای نامعین (نامطمئن) بیان می‌شود.

۲.۲ اندازه نامعین و فضای عدم‌قطعیت

لیو [1]در سال ۲۰۰۷ [۹] مفهومی از اندازه نامعین و قضیه عدم‌قطعیت را ارائه داد.

تعریف ۱.۲.۲. اگر $\Gamma \neq \phi$و Γ و ℓ یک σ- جبر روی Γ و $\mathcal{M}$ یک اندازه نامعین [2](نامطمئن) باشد، سه تایی $(\Gamma, \ell, \mathcal{M})$ یک فضای عدم‌قطعیت نامیده می‌شود وهر عضو $\Lambda \in \ell$ یک پیشامد روی $(\Gamma, \ell, \mathcal{M})$ نامیده می‌شود.

لازم است که برای هر پیشامد Λ یک عدد مانند $\mathcal{M}$ تعریف کنیم که احتمال رخ دادن Λ را نشان می‌دهد. لیو [۹] اصول موضوع زیر را برای این تابع ارائه داده است:

اصل ۱:(نرمال بودن) $\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱$.

اصل ۲:(یکنواختی) $\forall \Lambda \in \ell \quad \Lambda_۱ \subset \Lambda_۲ \quad \mathcal{M}\{\Lambda_۱\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda_۲\}$.

اصل ۳:(خوددوگانگی) $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = ۱$.

اصل ۴:(زیر جمعی شمارا)برای هر دنباله شمارا از پیشامد $\{\Lambda_j\}$ داریم:

$$\mathcal{M}(\bigcup_{i=۱}^{\infty} \Lambda_i) \leq \sum_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}(\Lambda_i).$$

که سه‌تایی$(\Gamma, \ell, \mathcal{M})$ یک فضای عدم‌قطعیت نامیده می‌شود [۹].

اصل ۵:(اصل حاصل‌ضرب [۹])فرض کنید $(\Gamma_k, \Lambda_k, \mathcal{M}_K)$ برای $K = ۱, ۲, \ldots, n$ فضاهای

[1] Liu

[2] Uncertain

عدم‌قطعیت باشند. که $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_n,$ $\ell = \ell_1 \times \ell_2 \times \ldots \times \ell_n.$ اندازه نامعین ضربی روی Γ برابر است با:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup\limits_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \ldots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min\limits_{1 \le k \le n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, & \\ \quad if \sup\limits_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \ldots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min\limits_{1 \le k \le n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > 0/5 & \\ 1 - \sup\limits_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \ldots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min\limits_{1 \le k \le n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, & \\ \quad if \sup\limits_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \ldots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min\limits_{1 \le k \le n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > 0/5 & \\ 0/5 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \tag{۱.۲}$$

برای هر $\Lambda \in \ell$.

می‌توان رابطه فوق را بصورت زیر نیز نوشت:

$$M\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\}$$

قضیه ۲.۲.۲. *[۲۰] اندازه حاصل‌ضربی که به‌وسیله معادله (۱.۲) تعریف می‌شود. یک اندازه نامعین است.*

متغیر نامعین

تعریف ۳.۲.۲. هر متغیر نامعین، یک تابع اندازه‌پذیر ξ از فضای عدم‌قطعیت $(\Gamma, \ell, \mathcal{M})$ است. بطوری که برای هر مجموعه بورل[۳] B از اعداد حقیقی مجموعه $\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma | \xi(\gamma) \in B\}$ یک پیشامد است.

[۳] Borel

۳.۲ توزیع عدم‌قطعیت

تعریف ۱.۳.۲. توزیع عدم‌قطعیت $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [۰, ۱]$ از یک متغیر نامعین ξ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(r) = \mathcal{M}\{\xi \leq r\}.$$

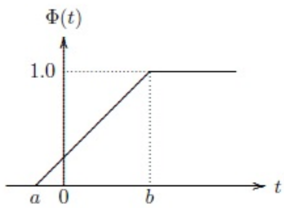
مثال ۲.۳.۲. اگر ξ یک متغیر نامعین با توزیع عدم‌قطعیت Φ باشد. برای هر عدد $k > ۰$، توزیع عدم‌قطعیت $k\xi$ برابر است با:

$$\Psi(r) = \Phi(\frac{r}{k}) \quad , \quad \Psi^{-۱}(\alpha) = k\Phi^{-۱}(\alpha). \tag{۲.۲}$$

تعریف ۳.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ یک متغیر نامعین خطی[۴] نامیده می‌شود، اگر یک تابع توزیع نامعین خطی بصورت زیر داشته باشد:

$$\Phi(r) = \begin{cases} ۰ & r \leq a, \\ \dfrac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b, \\ ۱ & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

در آن صورت متغیر نامعین خطی را بصورت $\ell(a, b)$ نشان می‌دهیم که a و b اعداد حقیقی و $a < b$ است. توزیع عدم‌قطعیت از یک متغیر نامعین خطی در شکل (۱.۲) نشان داده شده است.



شکل ۱.۲: توزیع عدم‌قطعیت از یک متغیر نامعین خطی

تعریف ۴.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ یک متغیر نامعین نرمال نامیده می‌شود اگر یک تابع توزیع نامعین نرمال بصورت زیر داشته باشد:

$$\Phi(r) = (۱ + exp(\frac{\pi(e-r)}{\sqrt{۳}\sigma}))^{-۱}, r \in \mathbb{R}, \sigma > ۰.$$

[۴] Linear uncertain variable

در آن صورت متغیر نامعین نرمال را با $\xi \sim N(e,\sigma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۵. یک متغیر نامعین ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ [5] نامیده می‌شود اگر تابع توزیع زیر را داشته باشد:

$$\Phi(r)=\begin{cases} 0 & r\le a,\\ \dfrac{r-a}{2(b-a)} & a\le r\le b,\\ \dfrac{(r+c-2b)}{2(c-b)} & b\le r\le c,\\ 1 & r\ge c.\end{cases}$$

۲.۴ استقلال

تعریف ۲.۴.۱. متغیرهای نامعین $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ برای هر مجموعه‌های بورل $B_1,B_2,\dots,B_n$ از اعداد حقیقی مستقل گفته می‌شوند، اگر

$$\mathcal{M}\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i\in B_i\}\}=\min_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\in B_i\}. \tag{۲.۳}$$

قضیه ۲.۴.۲. *[10] متغیرهای نامعین $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ مستقل هستند اگر وفقط اگر*

$$\mathcal{M}\{\bigcup_{i=1}^{n}\{\xi_i\in B_i\}\}=\max_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\in B_i\}. \tag{۲.۴}$$

برهان. طبق شرط (۳) متغیرهای نامعین خوددوگانه هستند و همچنین $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ نیز مستقل هستند بنابراین داریم:

$$\mathcal{M}\{\bigcup_{i=1}^{n}\{\xi_i\in B_i\}\}=1-\mathcal{M}\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i\in B_i^c\}\}=1-\min_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\in B_i^c\}=\max_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\in B_i\}.$$

اثبات قضیه تمام است. □

۲.۵ قانون عملیاتی

قضیه ۲.۵.۱. *[10] اگر $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد. آنگاه $\xi=f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ یک متغیر نامعین است به‌طوریکه*

[5] Zigzag

$$\mathcal{M}\{\xi \in B\} = \begin{cases} \sup\limits_{f(B_1,B_2,\ldots,B_n)\subset B} \min\limits_{1\le k\le n} \mathcal{M}\{\xi_K \in B_k\}, \\ \quad \text{if} \sup\limits_{f(B_1,B_2,\ldots,B_n)\subset B} \min\limits_{1\le k\le n} \mathcal{M}\{\xi_K \in B_k\} > 0/5 \\ 1 - \sup\limits_{f(B_1,B_2,\ldots,B_n)\subset B^c} \min\limits_{1\le k\le n} \mathcal{M}\{\xi_K \in B_k\}, \\ \quad \text{if} \sup\limits_{f(B_1,B_2,\ldots,B_n)\subset B} \min\limits_{1\le k\le n} \mathcal{M}\{\xi_K \in B_k\} > 0/5 \\ 0/5 \qquad \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases} \tag{۵.۲}$$

که در آن $B_1, B_2, \ldots, B_n, B$ مجموعه‌های بورل از اعداد حقیقی هستند، و $f(B_1, B_2, \ldots, B_n) \subset B$ به این معنی است که $f(r_1, r_2, \ldots, r_n) \subset B$ برای هر $r_1 \in B_1, r_2 \in B_2, \ldots, r_n \in B_n$.

برهان. می‌توان به صورت مستقیم از اصل اندازه حاصل‌ضرب اثبات کرد. $\square$

قضیه ۲.۵.۲. *[۱۹] اگر ξ یک متغیر نامعین با توزیع عدم‌قطعیت Φ و اگر f یک تابع اکیدا صعودی باشد. در آن صورت توزیع عدم‌قطعیت از $f(\xi)$ می‌توان از طریق زیر بدست آورد:*

$$\Psi(r) = \Phi(f^{-1}(r)). \tag{۶.۲}$$

و همچنین می‌تواند بوسیله زیر بیان شود:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi^{-1}(\alpha)), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{۷.۲}$$

برهان. برای هر عدد حقیقی r از آن‌جایی که f یک تابع اکیدا صعودی است. داریم :

$$f((-\infty, f^{-1}(r)]) = (-\infty, r].$$

توزیع عدم‌قطعیت $f(\xi)$ بصورت زیر می‌باشد:

$$\Psi(r) = \mathcal{M}\{f(\xi) \in (-\infty, r]\} = \mathcal{M}\{\xi \in (-\infty, f^{-1}(r)]\} = \Phi(f^{-1}(r)).$$

$\square$

قضیه ۳.۵.۲. *[۱۹] اگر $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل با توزیع‌های مستقل $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ باشد، و Ψ توزیع عدم‌قطعیت $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ باشد. و $\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(\alpha)$ برای هر $\alpha \in (0, 1)$ منحصر بفرد باشد. در اینصورت رابطه زیر برقرار است:*

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \ldots + \Phi_n^{-1}(\alpha), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{۸.۲}$$

برهان. با توجه به خاصیت یکنواختی اندازه‌گیری نامعین برای هر $\alpha \in (0, 1)$ داریم:

$$\mathcal{M}\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{-1}(\alpha)\} \geq \mathcal{M}\{\bigcap_{i=1}^{n} (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha))\}.$$

چون $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل[۶] هستند، طبق معادله (۳.۲) رابطه زیر برقرار است:

$$\mathcal{M}\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{-1}(\alpha)\} \geq \mathcal{M}\{\bigcap_{i=1}^{n} (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha))\}$$
$$= \min_{1 \leq i \leq n} \ \mathcal{M}\{\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha)\} = \min_{1 \leq i \leq n} \ \alpha = \alpha.$$

از طرف دیگر برای هر عدد $\epsilon > 0$ داریم:

$$\mathcal{M}\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{-1}(\alpha) - \epsilon\} \leq \mathcal{M}\{\bigcup_{i=1}^{n} (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha) - \frac{\epsilon}{n})\},$$

زیرا اندازه نامعین یکنواخت است. از آن‌جایی که $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل هستند. طبق معادله (۴.۲) داریم:

$$\mathcal{M}\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{-1}(\alpha) - \epsilon\} \leq \mathcal{M}\{\bigcup_{i=1}^{n} (\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha) - \frac{\epsilon}{n})\}$$
$$= \max_{i \leq i \leq n} \ \mathcal{M}\{\xi_i \leq \Phi_i^{-1}(\alpha) - \frac{\epsilon}{n}\} < \max_{1 \leq i \leq n} \ \alpha = \alpha.$$

آن از پیوستگی توزیع عدم‌قطعیت پیروی می‌کند:

$$\mathcal{M}\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leq \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \ldots + \Phi_n^{-1}(\alpha)\} = \alpha,$$

که نشان می‌دهد:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \ldots + \Phi_n^{-1}(\alpha).$$

اثبات قضیه تمام است. □

[۶] Independent

۶.۲ ارزش مورد انتظار در فضای نامعین

تعریف ۱.۶.۲. اگر ξ یک متغیر نامعین باشد در اینصورت امید ریاضی [۷] ξ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[\xi] = \int_{\circ}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^{\circ} \mathcal{M}\{\xi \leq r\}dr,$$

بشرطی که حداقل یکی از دو انتگرال متناهی باشد.

قضیه ۲.۶.۲. *[۹] اگر ξ یک متغیر نامعین با توزیع عدم‌قطعیت Φ باشد، در اینصورت امید ریاضی ξ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:*

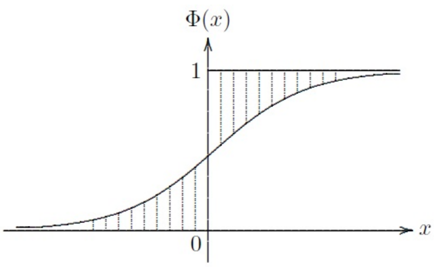
$$E[\xi] = \int_{\circ}^{+\infty} (۱ - \Phi(r))dr - \int_{-\infty}^{\circ} \Phi(r)dr. \tag{۹.۲}$$

برهان. با توجه به تعریف توزیع عدم‌قطعیت می‌دانیم که $\mathcal{M}\{\xi \leq r\} = \Phi(r)$.
پس $\mathcal{M}\{\xi \geq r\} = ۱ - \Phi(r)$ با استفاده از تعریف امید ریاضی رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E[\xi] = \int_{\circ}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^{\circ} \mathcal{M}\{\xi \leq r\}dr = \int_{\circ}^{+\infty} (۱ - \Phi(r))dr - \int_{-\infty}^{\circ} \Phi(r)dr.$$

□

معادله (۹.۲) *در شکل* (۲.۲) *ترسیم شده است.*



شکل ۲.۲: $E[\xi] = \int_{\circ}^{+\infty}(۱ - \Phi(x))dx - \int_{-\infty}^{\circ} \Phi(x)dx$

مثال ۳.۶.۲. همان‌طور که گفته شد اگر ξ یک متغیر خطی نامعین باشد، در اینصورت توزیع عدم‌قطعیت آن برابر است با:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \circ & r \leq a, \\ \dfrac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b, \\ ۱ & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

[۷] Expected value

اگر $a \geq 0$، با استفادده از معادله (۹.۲) امید ریاضی ξ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E[\xi] = (\int_{0}^{a} 1 dr + \int_{a}^{b} (1 - \frac{r-a}{b-a}) dr + \int_{b}^{+\infty} 0 dr) - \int_{-\infty}^{0} 0 dr = \frac{a+b}{2}.$$

اگر $b \leq 0$، امید ریاضیξ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E[\xi] = \int_{0}^{+\infty} 0 dr - (\int_{-\infty}^{a} 0 dr + \int_{a}^{b} \frac{r-a}{b-a} dr + \int_{b}^{0} 1 dr) = \frac{a+b}{2}.$$

اگر $a < 0 < b$، امید ریاضی ξ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E[\xi] = \int_{0}^{b} (1 - \frac{r-a}{b-a}) dr + \int_{a}^{0} \frac{r-a}{b-a} dr = \frac{a+b}{2}.$$

بنابراین امید ریاضی یک متغیر خطی نامعین همیشه برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+b}{2}.$$

مثال ۴.۶.۲. امید ریاضی یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim Z(a,b,c)$ با استفاده از معادله (۹.۲)برابر است با :

$$E[\xi] = \frac{(a+2b+c)}{4}.$$

با توجه به این که توزیع عدم‌قطعیت یک متغیر زیگزاگ برابر است با:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a, \\ \dfrac{r-a}{2(b-a)} & a \leq r \leq b, \\ \dfrac{(r+c-2b)}{2(c-b)} & b \leq r \leq c, \\ 1 & r \geq c. \end{cases}$$

اگر $a \geq 0$:

$$E[\xi] = (\int_{0}^{a} 1 dr + \int_{a}^{b} \frac{2b-r-a}{2(b-a)} dr + \int_{b}^{c} \frac{(c-r)}{2(c-b)} dr + \int_{c}^{+\infty} 0 dr) - \int_{-\infty}^{0} 0 dr = \frac{a+2b+c}{4}.$$

اگر $b \leq 0 \leq a$:

$$E[\xi] = \int_0^b \frac{2b-a-r}{2(b-a)}dr + \int_b^c \frac{(c-r)}{2(c-b)}dr + \int_c^{+\infty} 0\, dr - \int_{-\infty}^a 0\, dr - \int_a^0 \frac{(r-a)}{2(b-a)} = \frac{a+2b+c}{4}.$$

اگر $c \leq 0 \leq b$:

$$E[\xi] = \int_0^c \frac{(c-r)}{2(c-b)}dr + \int_c^{+\infty} 0\, dr - \int_{-\infty}^a 0\, dr - \int_a^b \frac{r-a}{2(b-a)}dr - \int_b^0 \frac{r+c-2b}{2(c-b)}dr = \frac{a+2b+c}{4}.$$

اگر $c \leq 0$:

$$E[\xi] = \int_{+\infty}^0 0\, dr - \int_{-\infty}^a 0\, dr - \int_a^b \frac{r-a}{2(b-a)}dr - \int_b^c \frac{r+c-2b}{2(c-b)}dr - \int_c^0 1\, dr = \frac{a+2b+c}{4}.$$

مثال ۵.۶.۲. و برای یک متغیر نامعین نرمال $\xi \sim N(e,\sigma)$ امید ریاضی برابر است با:

$$E[\xi] = e.$$

قضیه ۶.۶.۲. *[۱۹] اگر ξ یک متغیر نامعین با توزیع عدم‌قطعیت Φ باشد. در اینصورت ارزش مورد انتظار ξ برابر است با:*

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)d\alpha. \qquad (۱۰.۲)$$

برهان. با توجه به تعریف ارزش مورد انتظار و توزیع عدم‌قطعیت داریم:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq r\}dr \\ &= \int_0^{+\infty}(1-\Phi(r))dr - \int_{-\infty}^0 \Phi(r)dr, \end{aligned}$$

ابتدا با انتگرال جز به جز حاصل $\int_0^{+\infty}(1-\Phi(r))dr$ را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = 1-\phi(r) & du = -d\phi(r) \\ dv = dr & v = r \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}(1-\Phi(r))dr = r(1-\phi(r))|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} r\,d\phi(r),$$

که در فرمول بالا $\phi(+\infty) = 1$ بنابراین انتگرال بالا برابر است با:

$$\int_0^{+\infty}(1-\Phi(r))dr = \int_0^{+\infty} r\,d\phi(r),$$

مشابه حالت قبل با استفاده از انتگرال جز به جز حاصل $-\int_{-\infty}^0 \Phi(r)dr$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = \phi(r) & du = d\phi(r) \\ dv = dr & v = r \end{cases}$$

$$-\int_{-\infty}^{0} \Phi(r)dr = -r(\phi(r))|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} r d\phi(r),$$

که در فرمول بالا $\phi(-\infty) = 0$ بنابراین انتگرال بالا برابر است با:

$$-\int_{-\infty}^{0} \Phi(r)dr = \int_{-\infty}^{0} r d\phi(r),$$

با استفاده از حاصل دو انتگرال بالا

$$\int_{0}^{+\infty}(1 - \Phi(r))dr - \int_{-\infty}^{0} \Phi(r)dr = \int_{0}^{+\infty} r d\phi(r) + \int_{-\infty}^{0} r d\phi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} r d\phi(r),$$

اکنون $\phi(r) = \alpha$، $d\alpha = d\phi(r)$ بنابراین $r = \phi^{-1}(\alpha)$

$$\begin{cases} r = +\infty & \alpha = 1 \\ r = -\infty & \alpha = \phi(-\infty) = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r d\phi(r) = \int_{0}^{1} \Phi^{-1}(\alpha)d\alpha.$$

□

لم ۲.۶.۷. *[۱۹] اگر a و b دو عدد حقیقی و ξ و η دو متغیر نامعین باشند. در اینصورت داریم:*

$$E[a\xi + b] = aE[\xi] + b.$$

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta].$$

فصل ۳

مدل میانگین - انحراف نیمه مطلق برای مسئله بهینه سازی پرتفوی نامعین

۱.۳ مقدمه

مسئله بهینه‌سازی پرتفوی بصورت منحصر بفرد به یک فرد، که در تلاش برای تخصیص یکی از سرمایه‌هایش برای انتخاب تعدادی از اوراق بهادار به منظور دستیابی به هدف سرمایه‌گذاری است مربوط می‌شود. اولین مدل ریاضی بوسیله مارکوویتز ارائه شد[۱۵]. در این مدل ارزش مورد انتظار (امید ریاضی) به عنوان بازده و واریانس بعنوان اندازه‌گیری ریسک استفاده شده است. یک مدل خطی برای بهینه‌سازی پرتفوی توسط کونو [۱] و یامازاکی [۲] [۷] ارائه شد که در آن انحراف مطلق برای اندازه‌گیری ریسک پرتفوی مورد استفاده قرار گرفت. انحراف نیمه مطلق به‌طور معمول در اندازه‌گیری ریسک نزولی در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فصل با استفاده از تعریف انحراف نیمه مطلق برای متغیر نامعین و ایجاد مدل‌های مربوطه انحراف نیمه مطلق در محیط عدم‌قطعیت مسئله بهینه سازی پرتفوی را حل می‌کنیم.

۲.۳ مسئله انتخاب پرتفوی

با توجه به نظریه نوین پرتفوی ، سرمایه‌گذار پرتفوی خود را بر اساس دو معیار بازده مورد انتظار و انحراف معیار بازده انتخاب می‌کند. اگر اوراق بهادار ریسک‌دار باشند مسئله اصلی هر سرمایه گذار تعیین مجموعه اوراق بهاداری است که مطلوبیت آن حداکثر است. این مسئله معادل انتخاب پرتفوی بهینه از مجموع پرتفوی‌های ممکن است، که تحت عنوان مسئله انتخاب پرتفوی نامیده می‌شود. مدل این مسئله در سال ۱۹۵۲ توسط مارکوویتز ارائه گردید.

---

[۱] Konno

[۲] Yamazaki

مارکوویتز بیان می‌کند که سرمایه گذاران بایستی تصمیمات مربوط به پرتفویشان را صرفاً بر مبنای بازده مورد انتظار و انحراف معیار انتخاب نمایند. بدین معنی که سرمایه گذار بایستی بازده مورد انتظار و انحراف معیار هر پرتفوی را تخمین بزند، و سپس بهترین آنها را بر مبنای این پارامتر انتخاب کنند.

۳.۳ مدل مارکوویتز (بهینه سازی پرتفوی)

مارکوویتز نخستین کسی بود که یک معیار خاص برای ریسک سبد سهام ارائه کرد و بازده مورد انتظار و ریسک یک سبد سهام را استخراج نمود. مدل او بر پایه مشخصه های بازده مورد انتظار و ریسک اوراق بهادار بنا شده و در اصل، یک چارچوب نظری برای تحلیل گزینه های ریسک و بازده است. مدل میانگین واریانس مارکوویتز مشهورترین و متداول ترین رویکرد در مسئله انتخاب سرمایه‌گذار است. از برجسته ترین نکات مورد توجه در مدل مارکوویتز، توجه به ریسک سرمایه گذاری، نه تنها براساس انحراف معیار یک سهم، بلکه براساس ریسک مجموعه سرمایه گذاری است.

۱- سرمایه گذاران ریسک گریزند، و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی هستند و منحنی مطلوبیت نهایی ثروت آنها کاهنده است.

۲- سرمایه گذاران پرتفوی خود را بر مبنای میانگین و واریانس مورد انتظار بازدهی انتخاب می‌کنند. بنابراین منحنی‌های بی تفاوتی آنها تابعی از نرخ بازده و و اریانس مورد انتظار است.

۳- هر گزینه سرمایه گذاری، تا بی‌نهایت قابل تقسیم است.

۴- سرمایه گذاران افق زمانی « یک دوره‌ای » داشته و این برای همه سرمایه گذاران مشابه است.

۵- سرمایه گذاران در یک سطح معینی از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای یک سطح معینی از بازدهی، خواهان کمترین ریسک هستند.

۶- سبد سرمایه گذاری کالا سبدی است که در یک سطح معین ریسک، دارای بیشترین بازده است؛ یا دارای کمترین ریسک به ازای یک سطح معین بازده.

اگر سرمایه گذار ، مقداری پول برای سرمایه گذاری بین n سهم داشته باشد، سؤال این است که « مبلغ سرمایه گذاری چگونه بین n ورقه، تخصیص یابد تا پرتفوی حاصله، حداکثر مطلوبیت مورد انتظار را داشته باشد؟ » مارکویتز پیشنهاد میکند که پاسخ سؤال فوق بایستی در دو مرحله انجام پذیرد:

۱- تعیین مجموعه پرتفوی کارا

۲- انتخاب از مجموعه کارا؛ یعنی انتخاب پرتفویی که مناسب‌ترین ترکیب ریسک و بازده را برای سرمایه گذار فراهم نماید.

برای تعیین یک مجموعه سبد سهام کارا، ضروری است که بازده مورد انتظار و انحراف معیار بازده برای هر سبد سهام را تعیین کنیم.

مدل میانگین- واریانس مارکوویتز با ماکزیمم بازده در یک سطح خاصی از ریسک بصورت مدل (۱.۳) می‌شود.

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad E[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad V[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \leq \gamma, \\ \quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\ \quad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۱.۳}$$

که E، ارزش مورد انتظار، ξ_i بازده اوراق بهادار iام که به عنوان متغیر نامعین در نظر گرفته شده است، و V، واریانس و x_i سهمی از مقدار کل وجوه سرمایه‌گذاری اوراق بهادار i ام و γ بیشترین ریسک سرمایه‌گذاری است.

محدودیت $\sum x_i = ۱$ نشان دهنده این است که تمام بودجه فرد، سرمایه‌گذاری می‌شود.

محدودیت$x_i \geq ۰$ بیانگر وزن‌های مثبت هر دارایی در سبد دارایی بوده که حاکی از عدم وجود فروش استقراضی [۳] می‌باشد.

سرمایه گذارانی که طبق مدل (۱.۳) عمل می‌کنند، ریسک‌گریز هستند، مدیران ریسک‌گریز با افزایش سطح ریسک خواهان نرخ بازده بیشتری هستند، از آنجا که این افراد ذاتا برخورد محتاطانه‌ای نسبت به ریسک دارند و از آن می‌ترسند بنابراین برای پذیرش ریسک بیشتر، بازده مورد انتظار بالاتر نیز طلب می‌کنند.

و مدل میانگین - واریانس [۴] مارکوویتز با مینیم کردن واریانس در یک سطح بازده مورد انتظار قابل قبول مانند α بصورت مدل (۲.۳) می‌باشد.

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad V[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad E[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \ldots + x_n\xi_n] \geq \alpha, \\ \quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\ \quad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۲.۳}$$

و سرمایه‌گذارانی که از مدل (۲.۳) پیروی می‌کنند. ریسک پذیر هستند، آنها با افزایش سطح ریسک خواهان نرخ بازده کمتری هستند، چون از ریسک لذت می‌برند حاضرن مقداری از بازده خود را از دست داده و در مقابل ریسک بیشتری تحمل کنند.

و مدل میانگین - واریانس مارکوویتز با داشتن دو تابع هدف بصورت مدل (۳.۳) می‌باشد.

---

[۳] Short sale

[۴] Variance

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n] \\ \textbf{\textit{Min}} \quad V[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n] \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{۳.۳}$$

و سرمایه‌گذارانی که از مدل (۳.۳) پیروی می‌کنند. افراد متعادلی هستند. که سطح توقعاتشان بین ریسک‌پذیری و ریسک‌گریزی هستند.

۴.۳ انحراف نیمه مطلق از متغیر نامعین

در این بخش ما انحراف نیمه مطلق از متغیرهای نامعین را تعریف می‌کنیم و بعضی از گزاره‌های ریاضی را برای آن اثبات می‌کنیم.
اگر ξ یک متغیر نامعین و e یک عدد حقیقی باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم:
$(\xi - e)^- = \mathit{min}(\xi - e, 0)$ و $(\xi - e)^+ = \mathit{max}(\xi - e, 0)$

تعریف ۱.۴.۳. اگر ξ یک متغیر نامعین با ارزش مورد انتظار e باشد. آنگاه انحراف نیمه مطلق از ξ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$sa[\xi] = E[|(\xi - e)^-|]. \tag{۴.۳}$$

ملاحظه ۲.۴.۳. *با توجه به تعریف (۱.۴.۳) و از آن‌جایی که $|(\xi - e)^-|$ یک متغیر نامعین نامنفی است می‌توانیم رابطه زیر را داشته باشیم:*

$$\begin{aligned} sa[\xi] &= E[|(\xi - e)^-|] \\ &= \int_0^\infty \mathcal{M}\{|(\xi - e)^-| \geq r\}dr \\ &= \int_0^\infty \mathcal{M}\{e - \xi \geq r\}dr \\ &= \int_{-\infty}^e \mathcal{M}\{\xi \leq r\}dr \\ &= \int_{-\infty}^e \Phi(r)dr. \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

با گرفتن تغییر متغیر انتگرال بالا به راحتی حل می‌شود. در رابطه بالا $\Phi(.)$ توزیع عدم‌قطعیت از ξ است. این فرمول محاسبه انحراف نیمه مطلق را در بیشتر موارد آسان می‌کند.

مثال ۳.۴.۳. فرض کنید $\xi \sim \ell(a, b)$ یک متغیر خطی نامعین باشد. انحراف نیمه مطلق برابر است با:

$$sa[\xi]=\int_{-\infty}^{E[\xi]}\Phi(r)dr=\int_{a}^{\frac{(a+b)}{۲}}\frac{r-a}{b-a}dr=\frac{۱}{b-a}\int_{a}^{\frac{(a+b)}{۲}}(r-a)dr=\frac{(b-a)}{۸}.$$

مثال ۴.۴.۳. اگر $\xi\sim Z(a,b,c)$ یک متغیر نامعین زیگزاگ باشد. در آن صورت انحراف نیمه مطلق از ξ برابر است با:

$$sa[\xi]=\int_{-\infty}^{\frac{(a+۲b+c)}{۴}}\Phi(r)dr=\begin{cases}\dfrac{(۳(b-a)+(c-b))^{۲}}{۶۴(b-a)}, & b-a\geq c-b,\\ \dfrac{((b-a)+۳(c-b))^{۲}}{۶۴(c-b)}, & b-a\leq c-b.\end{cases}$$

به بیان دیگر

$$sa[\xi]=\frac{(۲c-۲a+|۲b-a-c|)^{۲}}{۳۲(c-a+|۲b-a-c|)}.$$

مثال ۵.۴.۳. اگر $\xi\sim N(e,\sigma)$ یک متغیر نرمال نامعین باشد. انحراف نیمه مطلق ξ برابر است با:

$$sa[\xi]=\int_{-\infty}^{e}\Phi(r)dr=\int_{۰}^{e}(۱+exp(\frac{\pi(e-r)}{\sqrt{۳}\sigma}))^{-۱}dr=\frac{\sqrt{۳}\sigma ln۲}{\pi}.$$

برای حل انتگرال بالا به روش زیر عمل می‌کنیم برای راحتی ابتدا

$$u=exp(\frac{\pi(e-r)}{\sqrt{۳}\sigma}),$$

$$\int_{۰}^{e}(۱+exp(\frac{\pi(e-r)}{\sqrt{۳}\sigma}))^{-۱}dr=\int_{۰}^{e}\frac{۱}{۱+u}dr,$$

حال با اضافه کردن $+u$ و $-u$ در صورت کسر بالا داریم:

$$\int_{۰}^{e}(۱+exp(\frac{\pi(e-r)}{\sqrt{۳}\sigma})^{-۱}dr=\int_{۰}^{e}\frac{۱+u-u}{۱+u}dr$$

$$=r|_{۰}^{e}+\frac{\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln(۱+exp(\frac{\pi(e-r)}{۳\sigma}))|_{۰}^{e}$$

$$=e+\frac{\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln۲-۰-\frac{\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln(۱+exp(\frac{\pi e}{۳\sigma}))=\frac{\sqrt{۳}\sigma ln۲}{\pi}.$$

قضیه ۶.۴.۳. *[۱۳] اگر ξ یک متغیر نامعیین با امید ریاضی متناهی باشد، آنگاه برای اعداد حقیقی a و b داریم:*

$$sa[a\xi+b]=|a|.sa[\xi].$$

برهان. با استفاده از تعریف انحراف نیمه مطلق می‌توان نوشت:

$$sa[a\xi + b] = E[|(a\xi + b - aE[\xi] - b)^-|] = E[|a(\xi - E[\xi])^-|] = |a|.sa[\xi].$$

اثبات قضیه تمام است. □

قضیه ۳.۴.۷. *[۱۳] اگر ξ یک متغیر نامعین با امید ریاضی متناهی e و اگر $sa[\xi]$ انحراف نیمه مطلق ξ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است:*

$$\circ \leq sa[\xi] \leq E[|\xi - e|].$$

برهان. از آن‌جایی که $sa[\xi]$ نامنفی است، برای هر عدد حقیقی r داریم:

$$\{\gamma|\ |\xi(\gamma) - e| \geq r\} \supset \{\gamma|\ |(\xi(\gamma) - e)^-| \geq r\}.$$

با استفاده از خاصیت یکنواختی اندازه نامعین رابطه زیر برقرار است:

$$\mathcal{M}\{|\xi - e| \geq r\} \geq \mathcal{M}\{|(\xi - e)^-| \geq R, \forall R.$$

و انحراف نیمه مطلق از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$sa[\xi] = \int_\circ^{+\infty} \mathcal{M}\{|(\xi - E)^-| \geq r\}dr \leq \int_\circ^{+\infty} \mathcal{M}\{|\xi - e| \geq r\}dr = E[|\xi - e|].$$

اثبات قضیه تمام است. □

قضیه ۳.۴.۸. *[۱۳] اگر ξ یک متغیر نامعین با امید ریاضی e باشد، آنگاه $sa[\xi] = \circ$ اگر و فقط اگر $\mathcal{M}\{\xi = e\} = ۱$.*

برهان. اگر $sa[\xi] = \circ$ سپس $E[|(\xi - e)^-|] = \circ$. با استفاده از تعریف امید ریاضی داریم:

$$E[|(\xi - e)^-|] = \int_\circ^{+\infty} \mathcal{M}\{|(\xi - e)^-| \geq r\}dr,$$

و از آن‌جایی که $\mathcal{M}\{|(\xi - e)^-| \geq r\}$ اندازه نامعین است، و همیشه مثبت و برابر با، یک عدد حقیقی است، و بازه انتگرال مثبت است هیچ وقت مقدار انتگرال برابر صفر نمی‌شود به جز زمانی که برای هر $r > \circ$، $\mathcal{M}\{|(\xi - e)^-| \geq r\} = \circ$. با توجه به ویژگی خوددوگانگی واضح است که

$$\mathcal{M}\{|(\xi - e)^-| = \circ\} = ۱ \tag{۳.۶}$$

که نشان می‌دهد $\xi - e = (\xi - e)^+ + (\xi - e)^- = (\xi - e)^+$. بنابراین

$$\int_\circ^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^+ \geq r\}dr = E[(\xi - e)^+] = E[\xi - e] = \circ.$$

رابطه بالا به این مفهوم است که $\mathcal{M}(\xi - e)^+ \geq r = ۰$ برای هر $r > ۰$ از آن‌جایی که اندازه نامعین خوددوگانه است معادله زیر برقرار است:

$$\mathcal{M}\{(\xi - e)^+ = ۰\} = ۱ \qquad (۷.۳)$$

از معادلات (۶.۳) و (۷.۳) نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{\xi - e = ۰\} = ۱$ و $\mathcal{M}\{\xi - e\} = ۱$.
در مقابل اگر $\mathcal{M}\{\xi - e\} = ۱$ در آن صورت $\mathcal{M}\{|\xi - e| = ۰\} = ۱$ و $\mathcal{M}\{|\xi - e| \geq r\} = ۰$ برای هر عدد حقیقی $r > ۰$ ، که نتیجه می‌دهد $E[|\xi - e|] = ۰$ با توجه به قضیه (۷.۴.۳) $sa[\xi] = ۰$ اثبات قضیه تمام است. □

۵.۳ مدل میانگین - انحراف نیمه مطلق

در این بخش پرتفوی جدید را در فضای عدم قطعیت با استفاده از مدل انحراف نیمه مطلق به‌عنوان اندازه‌گیری ریسک پرتفوی بهینه‌سازی می‌کنیم. فرض کنید $\xi_i(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ بازده نامعین اوراق بهادار i ام باشد و x_i سهمی از مقدار کل وجوه سرمایه‌گذاری اوراق بهادار i ام باشد. با استفاده از محاسبات عدم‌قطعیت بازده کل پرتفوی برابر است با:

$$\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots + \xi_n x_n.$$

که یک متغیر نامعین است.
اگر یک سرمایه‌گذار بازده مورد انتظار را در سطح معینی از ریسک ماکزیمم کند، آنگاه می‌توان مدل میانگین - انحراف نیمه مطلق بصورت مدل برنامه‌ریزی غیرخطی با یک تابع هدف بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad E[\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots + \xi_n x_n] \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \qquad sa[\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots + \xi_n x_n] \leq d, \\ \qquad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\ \qquad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \qquad (۸.۳)$$

d بیشترین ریسک سرمایه‌گذاری که سرمایه‌گذار می‌تواند تحمل کند. بنابراین اطمینان حاصل می‌شود که تمام وجوه به n اوراق بهادار سرمایه‌گذاری می‌شوند.
وقتی که یک سرمایه‌گذار بخواهد ریسک سرمایه‌گذاری را با یک سطح بازده مورد انتظار قابل قبول مینیمم کند فرمول ریاضی آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \textbf{Min} \quad sa[\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots + \xi_n x_n] \\ \textbf{s.t.} \quad E[\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots + \xi_n x_n] \geq r, \\ \quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\ \quad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۹.۳}$$

r کمترین سطح بازده مورد انتظار قابل قبول توسط سرمایه‌گذار است.

یک سرمایه‌گذار ریسک گریز همیشه به‌دنبال حداکثرکردن بازده و مینیمم‌کردن ریسک پرتفوی است. با این حال این دو هدف با هم متناقض هستند. برای تعیین پرتفوی بهینه با درجه ارائه شده از ریسک‌گریزی، ما مدل بهینه زیر را قرارداد می‌کنیم:

$$\begin{cases} \textbf{Max} \quad E[\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots + \xi_n x_n] - \phi . sa[\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots , \xi_n x_n] \\ \textbf{s.t.} \\ \quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱, \\ \quad x_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۱۰.۳}$$

که $\phi \in [۰, +\infty]$ نشان دهنده درجه ریسک‌گریزی مطلق است. در این‌جا ارزش ϕ بیشتر است، زیرا بیشتر سرمایه‌گذاران ریسک گریزند.

اگر $\phi = ۰$ باشد یعنی سرمایه‌گذار ریسک را در نظر نمی‌گیرد.

اگر $\phi = +\infty$ یعنی سرمایه‌گذار باید همه پول را به اوراق بهادار با ریسک کمتر اختصاص دهد.

برای متغیرهای نامعین کلی $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ در محیط عدم‌قطعیت

$$E[\xi_۱ x_۱ + \xi_۲ x_۲ + \ldots + \xi_n x_n] \neq x_۱ E[\xi_۱] + X_۲ E[\xi_۲] + \ldots + X_n E[\xi_n].$$

برقرار است. اگرچه تساوی برقرار می‌شود وقتی‌که $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ مستقل باشند.

۶.۳ معادل قطعی

۱.۶.۳ معادل قطعی برای متغیر نامعین زیگزاگ

فرض کنید که بازده‌های اوراق بهادار همه متغیرهای زیگزاگ باشند، بازده اوراق بهادار i ام را بصورت $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ نشان می‌دهند. و بازده پرتفوی را بصورت زیر نشان می‌دهند:

$$\sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i = (\sum_{i=۱}^{n} x_i a_i, \sum_{i=۱}^{n} x_i b_i, \sum_{i=۱}^{n} x_i c_i).$$

در آن صورت بازده پرتفوی نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ است. بنابراین مدل (۸.۳) تبدیل به مدل قطعی زیر می‌شود:

$$\begin{cases} \textit{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(\dfrac{a_i+2b_i+c_i}{4}) \\ \textit{s.t.} \\ \quad \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} 2x_i(c_i-a_i)+|\sum_{i=1}^{n} x_i(2b_i-a_i-c_i)|)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i(c_i-a_i)+|\sum_{i=1}^{n} x_i(2b_i-a_i-c_i)|} \le d, \\ \quad x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \\ \quad x_i \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{۱۱.۳}$$

معادل قطعی مدل (۹.۳) وقتی $\xi_i \sim (a_i, b_i, c_i)$ یک متغیر نامعین زیگزاگ باشد برابر است با:

$$\begin{cases} \textit{Min} \quad \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} 2x_i(c_i-a_i)+|\sum_{i=1}^{n} x_i(2b_i-a_i-c_i)|)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i(c_i-a_i)+|\sum_{i=1}^{n} x_i(2b_i-a_i-c_i)|} \\ \textit{s.t.} \\ \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(a_i+2b_i+c_i) \ge 4r, \\ \quad x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \\ \quad x_i \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{۱۲.۳}$$

که در رابطه بالا $\alpha_i = c_i - a_i$ و $\beta_i = 2b_i - a_i - c_i$ و $\mu_i = \dfrac{(a_i+2b_i+c_i)}{4}$ است.
همچنین معادل قطعی مدل (۱۰.۳) وقتی $\xi_i \sim (a_i, b_i, c_i)$ یک متغیر نامعین زیگزاگ باشد برابر است با:

$$\begin{cases} \textit{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(\dfrac{a_i+2b_i+c_i}{4}) - \phi.\dfrac{(\sum_{i=1}^{n} 2x_i(c_i-a_i)+|\sum_{i=1}^{n} x_i(2b_i-a_i-c_i)|)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i(c_i-a_i)+|\sum_{i=1}^{n} x_i(2b_i-a_i-c_i)|} \\ \textit{s.t.} \\ \quad x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \\ \quad x_i \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{۱۳.۳}$$

۲.۶.۳ معادل قطعی برای متغیر نامعین خطی

اگر بازده‌های اوراق بهادار متغیرهای نامعین خطی باشند. آن‌گاه بازده اوراق بهادار i ام بصورت $\xi_i = (a_i, b_i)$ نشان داده می‌شود. در این صورت بازده پرتفوی برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = (\sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \sum_{i=1}^{n} x_i b_i).$$

که یک متغیر خطی نامعین است. براین اساس مدل (۸.۳) را می‌توان به مدل برنامه‌ریزی درجه دوم بصورت زیر تبدیل کرد:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(\frac{b_i + a_i}{2}) \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i(b_i - a_i))^2 \leq d, \\ \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{14.3}$$

اگر $\xi_i \sim (a_i, b_i)$ یک متغیر نامعین خطی باشد، آنگاه معادل قطعی مدل (۹.۳) برابر است با:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad (\sum_{i=1}^{n} x_i(b_i - a_i))^2 \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(a_i + b_i) \geq 2r, \\ \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{15.3}$$

اگر $\xi_i \sim (a_i, b_i)$ یک متغیر نامعین خطی باشد آنگاه معادل قطعی مدل (۱۰.۳) بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(\frac{b_i + a_i}{2}) - \phi.(\sum_{i=1}^{n} x_i(b_i - a_i))^2 \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{16.3}$$

۳.۶.۳ معادل قطعی برای متغیر نامعین نرمال

اگر $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, b_i)$ یک متغیر نامعین نرمال باشد، آنگاه معادل قطعی مدل (۸.۳) برابر است با:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\sqrt{3}\sigma_i ln2}{\pi} \leq d, \\ \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{17.3}$$

اگر $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, b_i)$ یک متغیر نامعین نرمال باشد، آنگاه معادل قطعی مدل (۹.۳) بصورت زیر است :

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\sqrt{3}\sigma_i ln2}{\pi} \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \geq r, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{۱۸.۳}$$

اگر $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, b_i)$ یک متغیر نامعین نرمال باشد، آنگاه معادل قطعی مدل (۱۰.۳) بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad \sum_{i=1}^{n} e_i x_i - \phi . \sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\sqrt{3}\sigma_i ln2}{\pi} \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{۱۹.۳}$$

مسائل قطعی بدست آمده در حالت‌های مختلف بوسیله یکی از روش‌های بهینه‌سازی قابل حل است [۳].

۷.۳ مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی در مورد مسئله انتخاب سبد نامعین، برای نشان دادن ایده مدل جدیدی که در این فصل به آن اشاره شد ارائه می‌دهیم، که مثال ارائه شده به‌وسیله روش‌های مختلف مانند روش Fmincon در نرم افزار متلب و نرم افزار Games حل شده است. در انتها جواب‌های به دست آمده با این دو روش با هم مقایسه می‌شوند.
یک سرمایه گذار قصد دارد در میان بیست اوراق بهادار سرمایه گذاری کند. همه‌ی بازده‌های آتی اوراق بهادار متغیرهای نامعین زیگزاگ هستند که بوسیله $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ به ازای $i = 1, 2, \ldots, 20$ نشان داده می‌شود. برای حل مشکل سرمایه گذاری، مهم این است که با تخمین دقیق مقادیر پارامترهای a_i ، b_i و c_i برای $i = 1, 2, \ldots, 20$ را برآورد کنیم. هنگامی که این پارامترها بدست آمد ما می‌توانیم مدل ارائه شده را برای یک پرتفوی بهینه با توجه به نیاز سرمایه گذاران بسازیم. فرض کنید بازده‌های اوراق بهادار در جدول (۱.۳) نشان داده شده است.

از آن‌جایی که بازده‌های اوراق بهادار همگی متغیرهای نامعین زیگزاگ هستند، مدل انحراف نیمه مطلق میانگین ارائه شده را می‌توان به معادل قطعی آن تبدیل کرد. در این مثال ما از معادل قطعی مدل (۹.۳) برای انتخاب پرتفوی بهینه استفاده می‌کنیم. مدل قطعی تبدیل شده بصورت زیر است.

جدول ۱.۳: بازده‌های اوراق بهادار نامعین زیگزاگ

اوراق بهادار	بازده نامعین	اوراق بهادار	بازده نامعیین
۱	(−/۱۲,/۰۵,/۲۱)	۱۱	(−/۱۶, −/۰۱,/۱۴)
۲	(−/۱۹,/۰۲,/۲۲)	۱۲	(−/۱۳,/۰۱,/۱۹)
۳	(−/۱۱, −/۰۱, ۰/۱۳)	۱۳	(−۰/۱۴, ۰/۰۳, ۰/۲۱)
۴	(−/۱۷,/۰۲,/۱)	۱۴	(−/۱۸,/۰۲,/۱۶)
۵	(−۰/۱۹,/۰۳,/۱۹)	۱۵	(−/۱۴,/۰۰, ۰/۱۸)
۶	(−/۱۳,/۰۱,/۲۰)	۱۶	(−/۱۷,/۰۰,/۳۳)
۷	(−/۱۸,/۰۱,/۲۵)	۱۷	(−/۲۴,/۰۲,/۴۵)
۸	(−/۱۵,/۰۵,/۱۸)	۱۸	(−/۱۴,/۰۳,/۲۱)
۹	(−/۲۱, −/۰۱,/۱۸)	۱۹	(−/۱۲,/۰۲,/۱۴)
۱۰	(−/۰۹,/۰۲,/۱۳)	۲۰	(−/۲۰,/۰۱,/۲۴)

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad \dfrac{(\sum_{i=۱}^{۲۰} ۲x_i\alpha_i + |\sum_{i=۱}^{۲۰} x_i\beta_i|)^{۲}}{\sum_{i=۱}^{۲۰} x_i\alpha_i + |\sum_{i=۱}^{۲۰} x_i\beta_i|} \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad x_۱\mu_۱ + x_۲\mu_۲ + \ldots + x_{۲۰}\mu_{۲۰} \geq r, \\ \quad x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۲۰} = ۱, \\ \quad ۰ \leq x_i \leq ۰/۵, \quad i = ۱, ۲, \ldots, ۲۰. \end{cases} \tag{۲۰.۳}$$

که $\alpha_i = c_i - a_i$، $\beta_i = ۲b_i - a_i - c_i$ و $\mu_i = \dfrac{(a_i + ۲b_i + c_i)}{۴}$.

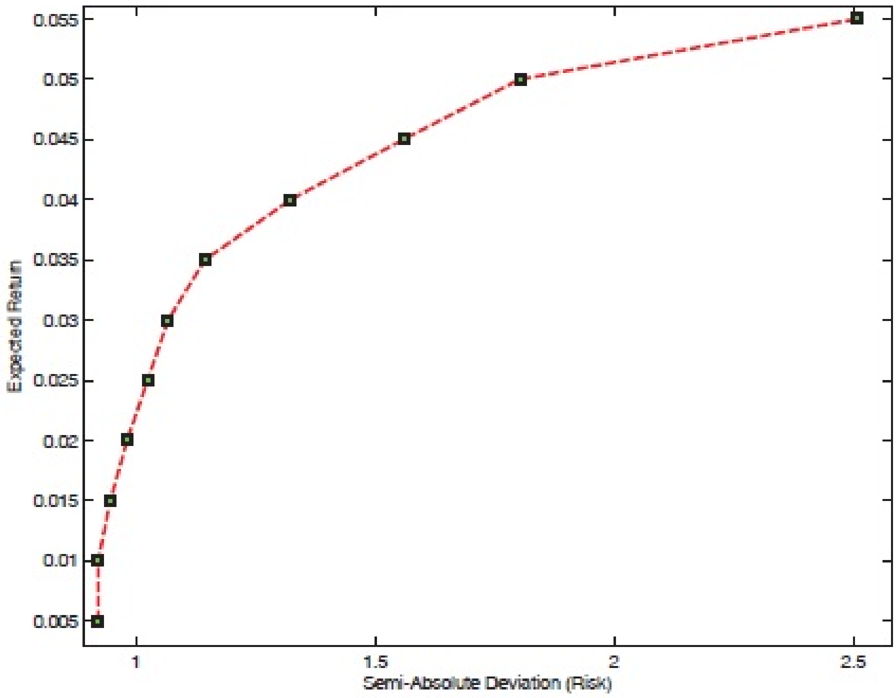
برای حل مدل بالا ابتدا از تابع Fmincon در متلب استفاده می‌کنیم. برای رسیدن به سطح بازده حداقل داده‌ها، ما یک سری از استراتژی‌های سرمایه گذاری مطلوب را بدست می‌آوریم. نتایج محاسباتی در جدول (۲.۳) نشان داده شده است. که در ستون اول حداقل سطح بازدهی و در ستون دوم انحراف نیمه مطلق پرتفوی بهینه را نشان می‌دهد. علاوه بر این مدل مرزکارا در شکل (۱.۳) نشان داده شده است. و بعد از آن جواب را به‌وسیله نرم افزار Games بدست می‌آوریم و آن را با جواب به دست آمده از تابع Fmincon مقایسه می‌کنیم. نتایج جواب بدست آمده با استفاده از نرم افزار Games در جدول (۳.۳) آورده شده است. که با جواب بدست آمده از تابع Fmincon برابر است.

جدول ۲.۳: نسبت درصد سرمایه گذاری اوراق بهادار با بازده نامعین زیگزاگ

حداقل سطح بازده	انحراف نیمه مطلق	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
۰/۰۰۵	/۹۲۲	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۱	/۹۲۲	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۱۵	/۹۴۷	۰/۰	۰/۰	/۱۶۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۳۳۳	۰/۰
۰/۰۲۰	/۹۸۲	۰/۰۷۷	۰/۰	/۱۶۶۷	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۴۲۳	۰/۰
۰/۰۲۵	۱/۰۲۵	/۲۳۱	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۲۷۰	۰/۰
۰/۰۳۰	۱/۰۶۸	/۳۸۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱۱۵	۰/۰
۰/۰۳۵	۱/۱۴۵	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱	۰/۰	۰/۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۴۰	۱/۳۲۴	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۴۵	۱/۵۶۰	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۳۳۳	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱۶۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۵	۱/۸۰۳	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱۶۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۳۳۳	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۵۵	۲/۰۵۱	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰

جدول ۳.۳: نتایج بدست آمده با استفاده از نرم افزار Games

حداقل سطح بازده	انحراف نیمه مطلق	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
۰/۰۰۵	/۹۲۲	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۱	/۹۲۲	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۱۵	/۹۴۱	۰/۰	۰/۰	/۱۶۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۳۳۵	۰/۰
۰/۰۲۰	/۹۸۲	۰/۰۷۷	۰/۰	/۱۶۶۷	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۴۲۳	۰/۰
۰/۰۲۵	۱/۰۲۵	/۲۳۱	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۲۷۰	۰/۰
۰/۰۳۰	۱/۰۶۸	/۳۸۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱۱۵	۰/۰
۰/۰۳۵	۱/۱۴۵	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱	۰/۰	۰/۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۴۰	۱/۳۲۴	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۴۵	۱/۵۶۰	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۳۳۳	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱۶۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۵	۱/۸۰۳	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱۶۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۳۳۳	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۵۵	۲/۰۵۱	/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰



شکل ۱.۳: مرز کارا انحراف نیمه مطلق میانگین مدل (۲۰.۳)

حل مدل بالا با استفاده از تابع Fmincon و نرم‌افزار Games با هم برابر شد، و جواب بهینه از بین ۲۰ اوراق بهادار با توجه به حل بالا به ازای بازده‌های متفاوت سهام ۱، ۳، ۸، ۱۰، ۱۷، ۱۹ می‌باشد.

فصل ۴

تنظیم مدل پرتفوی نامعین

۱.۴ مقدمه

در این فصل چند مدل برای مسئله بهینه سازی پرتفوی در صورتی که بازده اوراق بهادار در شرایط عدم‌قطعیت صدق می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه این مسائل به روش‌های معمول قابل حل نیستند ایده اصلی، جایگزینی این مدل‌ها با مدل‌های دقیق و قطعی آنها در حالتی خاص از متغیرهای نامعین (مانند متغیر نامعین زیگزاگ، خطی و نرمال) و سپس حل آن است.

۲.۴ تنظیم مدل میانگین - انحراف نیمه مطلق نامعین

در این بخش ما مسئله‌ای برای پیدا کردن پرتفوی مطلوب با ایجاد توازن در پرتفوی موجود را بررسی می‌کنیم. فرض کنید که یک سرمایه‌گذار پرتفویی مانند $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ داشته باشد که در آن x_i° سهمی از مقدار کل وجوه سرمایه‌گذاری اوراق بهادار i ام از پرتفوی جاری به ازای $(i = 1, 2, \ldots, n)$ باشد. به علت تغییرات وضعیت در بازارهای مالی، سرمایه‌گذار تصمیم می‌گیرد که یک پرتفوی با ماکزیمم بازده و مینیمم ریسک تنظیم کند. فرض کنید $x^- = (x_1^-, x_2^-, \ldots, x_n^-)$ و $x^+ = (x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+)$ که به ترتیب اوراق بهادار خریداری شده و فروخته شده i ام بوسیله سرمایه‌گذار باشد. بدیهی است که x_i^+ و x_i^- هر دو نامنفی هستند. پس از آن اوراق بهادار i ام از پرتفوی جدید را تنظیم می‌کنیم که می‌تواند با رابطه زیر بیان شود :

$$x_i = x_i^\circ + x_i^+ - x_i^-, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

در مدل بالا i تعداد دارایی‌ها در پرتفوی است.

اگر b_i و s_i به‌ترتیب هزینه فروش و هزینه خرید هر واحد از ریسک اوراق بهادار i ام باشند، بدون از

دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که $i = ۱, ۲, \dots, n$ $\quad s_i, b_i > ۰$.
آنگاه هزینه کل معامله احتمالی که بوسیله پرتفوی موجود تنظیم می‌شود برابر است با:

$$\textstyle\sum_{i=۱}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-).$$

اگر ξ_i بازده اوراق بهادار i ام به ازای $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ در آینده باشد، آنگاه بازده خالص (ویژه) از پرتفوی $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ بعد از توازن (بعد از خرید و فروش اوراق بهادار) بصورت زیر است:

$$r(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i - \sum_{i=۱}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-). \tag{۱.۴}$$

امید ریاضی $r(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ بازده سرمایه‌گذاری مطرح شده است.
اگر سرمایه‌گذار انحراف درجه دوم را به عنوان ریسک بپذیرد. آنگاه ریسک سرمایه‌گذاری از پرتفوی $(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ با $sa[r(x_۱, x_۲, \dots, x_n)]$ اندازه‌گیری می‌شود. با معاوضه بازده و ریسک، مدل انحراف نیمه مطلق - میانگین را بصورت زیر تنظیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad sa[r(x_۱, x_۲, \dots, x_n)] \\ \textbf{\textit{Max}} \quad E[r(x_۱, x_۲, \dots, x_n)] \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad x_i = x_i^۰ + x_i^+ - x_i^-, \qquad i = ۱, ۲, \dots, n, \\ \quad x_i, x_i^+, x_i^- \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, \dots, n. \end{cases} \tag{۲.۴}$$

تعریف ۱.۲.۴. $(\hat{x}{}_۱^+, \dots, \hat{x}{}_n^+, \hat{x}{}_۱^-, \dots, \hat{x}{}_n^-)$ یک جواب شدنی، حل بهینه پارتو معادله (۲.۴) گفته می‌شود اگر وجود داشته باشد یک جواب نشدنی $(x_۱^+, \dots, x_n^+, x_۱^-, \dots, x_n^-)$ بطوریکه

$$E[r(\hat{x}{}_۱^+, \dots, \hat{x}{}_n^+, \hat{x}{}_۱^-, \dots, \hat{x}{}_n^-)] \leq E[r(x_۱^+, \dots, x_n^+, x_۱^-, \dots, x_n^-),$$

$$sa[r(\hat{x}{}_۱^+, \dots, \hat{x}{}_n^+, \hat{x}{}_۱^-, \dots, \hat{x}{}_n^-)] \geq sa[r(x_۱^+, \dots, x_n^+, x_۱^-, \dots, x_n^-)].$$

قضیه ۲.۲.۴. *[۲۱] معادل مدل (۲.۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت:*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad sa[\sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i] \\ \textbf{\textit{Max}} \quad E[\sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i] - \sum_{i=۱}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad x_i = x_i^۰ + x_i^+ - x_i^-, \qquad i = ۱, ۲, \dots, n, \\ \quad x_i, x_i^+, x_i^- \geq ۰, \qquad i = ۱, ۲, \dots, n. \end{cases} \tag{۳.۴}$$

برهان. با استفاده از لم (۷.۶.۲) و قضیه (۶.۴.۳) معادله (۳.۴) بصورت زیر اثبات می‌شود:

$$E[\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i-\sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^{+}+s_i x_i^{-})]=E[\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i]-\sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^{+}+s_i x_i^{-}),$$

$$sa[\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i-\sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^{+}+s_i x_i^{-})]=sa[\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i]-0=sa[\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i].$$

بدین صورت معادل مدل (۲.۴) بدست می‌آید. □

قضیه ۳.۲.۴. *[۲۱] اگر $(\hat{x}_1^{+},\dots,\hat{x}_n^{+},\hat{x}_1^{-},\dots,\hat{x}_n^{-})$ یک حل بهینه مدل (۳.۴)با استفاده از روش پارتو باشد آنگاه داریم $\hat{x}_i^{+}.\hat{x}_i^{-}=0$ به ازای $i=1,2,\dots,n$.*

برهان. برهان خلف: فرض کنید $k\in\{1,2,\dots,n\}$ به طوری که $\hat{x}_k^{+}>0$ و $\hat{x}_k^{-}>0$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که $\hat{x}_k^{+}>\hat{x}_k^{-}$. مقدار دارایی بهینه از اوراق بهادار i ام بعد از تنظیم برابر است با $\hat{x}_k=x_k^{\circ}+\hat{x}_k^{+}-\hat{x}_k^{-}$.
فرض کنید $\tilde{x}_k^{+}=\hat{x}_k^{+}-\hat{x}_k^{-}$ و $\tilde{x}_k^{-}=0$. واضح است که $\tilde{x}_k^{+}.\tilde{x}_k^{-}=0$ و $\tilde{x}_k^{+},\tilde{x}_k^{-}\geq 0$ و $\tilde{x}_k=x_k^{\circ}+\tilde{x}_k^{+}-\tilde{x}_k^{-}=\hat{x}_k=x_k^{\circ}+\hat{x}_k^{+}-\hat{x}_k^{-}$.
با جایگذاری روابط بالا در $(\hat{x}_1^{+},\dots,\hat{x}_n^{+},\hat{x}_1^{-},\dots,\hat{x}_n^{-})$. حل بهینه مدل (۳.۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(\hat{x}_1^{+},\dots,\hat{x}_{k-1}^{+},\tilde{x}_k^{+},\hat{x}_{k+1}^{+},\dots,\hat{x}_n^{+},\hat{x}_1^{-},\dots,\hat{x}_{k-1}^{-},\tilde{x}_k^{-},\hat{x}_{k+1}^{-},\dots,\hat{x}_n^{-})$$

که می‌توان نوشت:

$$r(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-1},\tilde{x}_k,\hat{x}_{k+1},\dots,\hat{x}_n)-r(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1},\dots,\hat{x}_n)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k-\sum_{k=1}^{n}b_k\tilde{x}_k^{+}-\sum_{k=1}^{n}s_k\tilde{x}_k^{-}-\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\hat{x}_k^{+}+\sum_{k=1}^{n}s_k\hat{x}_k^{-}\overset{\tilde{x}_k^{-}=0}{\underset{\tilde{x}_k^{+}=\hat{x}_k^{+}-\hat{x}_k^{-}}{=}}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}b_k(\hat{x}_k^{+}-\hat{x}_k^{-})+\sum_{k=1}^{n}b_k\hat{x}_k^{+}+\sum_{k=1}^{n}s_k\hat{x}_k^{-}=$$

$$-\sum_{k=1}^{n}b_k\hat{x}_k^{+}+\sum_{k=1}^{n}b_k\hat{x}_k^{-}+\sum_{k=1}^{n}b_k\hat{x}_k^{+}+\sum_{k=1}^{n}s_k\hat{x}_k^{-}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(s_k+b_k)\hat{x}_k^{-}>0$$

این بدین معنی است که:

$$E[r(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-1},\tilde{x}_k,\hat{x}_{k+1},\ldots,\hat{x}_n)] > E[r(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1},\ldots,\hat{x}_n)].$$

از آنجایی که $\hat{x}_k=\tilde{x}_k$ با استفاده از تعریف (۱.۲.۴) $(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-1},\tilde{x}_k,\hat{x}_{k+1},\ldots,\hat{x}_n)$ یک جواب نشدنی است از آنجایی که $\tilde{x}_k=\hat{x}_k$ است بنابراین $(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1},\ldots,\hat{x}_n)$ یک جواب نشدنی است. یعنی $(\hat{x}^+_1,\ldots,\hat{x}^+_n,\hat{x}^-_1,\ldots,\hat{x}^-_n)$ جواب بهینه پارتو نیست. پس با فرض مسئله در تناقض است بنابراین $\hat{x}^+_i.\hat{x}^-_i=0$ و برهان قضیه کامل می‌شود. □

اگر سرمایه‌گذار خودتامین باشد یعنی هیچ پولی وارد نشود و هیچ پولی هم از پرتفوی خارج نشود، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\circ - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

اگر l_i و u_i به ترتیب کران پایین و کران بالا سهمی از مقدار کل وجوه سرمایه‌گذاری اوراق بهادار i ام بعد از تنظیم پرتفوی برای $i=1,2,\ldots,n$ باشد، آنگاه مساله جدید از مدل انحراف نیمه مطلق میانگین بصورت زیر تنظیم می‌شود:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \quad sa[\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i] \\ \textbf{\textit{Max}} \quad E[\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i] - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^\circ - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \qquad x_i = x_i^\circ + x_i^+ - x_i^-, & i=1,2,\ldots,n, \\ \qquad x_i^+.x_i^- = 0, & i=1,2,\ldots,n, \\ \qquad x_i^+, x_i^- \geq 0, & i=1,2,\ldots,n, \\ \qquad l_i \leq x_i \leq u_i, & i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (۴.۴)$$

فرض کنید ϕ یک عامل ریسک‌گریز برای تبدیل مدل (۴.۴) به یک مدل برنامه نویسی با یک تابع هدف بصورت زیر باشد:

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad E[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-)] - \phi sa[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^\circ - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \qquad x_i = x_i^\circ + x_i^+ - x_i^-, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \qquad x_i^+ . x_i^- = 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \qquad x_i^+, x_i^- \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \qquad l_i \leq x_i \leq u_i, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{۵.۴}$$

تولید عامل ϕ باعث می‌شود که سرمایه‌گذاران محافظه‌کارتر شوند.

۳.۴ معادل قطعی

۱.۳.۴ معادل مدل انحراف نیمه مطلق میانگین (مدل (۴.۴))

در این بخش به چندین وضعیت خاص که مدل (۴.۴) را برای بدست آوردن معادل قطعی آسانتر می‌کند می‌پردازیم.
ابتدا فرض کنید که بازده‌های نامعین بصورت $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ نشان داده شده است، که این بازده‌ها مستقل هستند یعنی $E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n] = x_1 E[\xi_1] + \ldots + x_n E[\xi_n]$.

قضیه ۱.۳.۴. *[۲۱] فرض کنید بازده‌های اوراق بهادار $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ همه متغیرهای نامعین خطی باشند، که بوسیله $\xi_i = (c_i, d_i)$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$ نشان داده می‌شوند. آنگاه مدل (۴.۴) در مفهوم اندازه عدم قطعیت تبدیل به مدل قطعی زیر می‌شود:*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} & \sum_{i=1}^{n} x_i(d_i - c_i) \\ \textbf{\textit{Max}} & \sum_{i=1}^{n} x_i(d_i + c_i) - 2\sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) \\ \textbf{\textit{s.t.}} & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^0 - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=1}^{n} x_i, & \\ \quad x_i = x_i^0 + x_i^+ - x_i^-, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad x_i^+ . x_i^- = 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad x_i^+, x_i^- \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad l_i \leq x_i \leq u_i, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{۶.۴}$$

که یک مدل برنامه‌ریزی خطی دو هدفه است.

برهان. بازده پرتفوی متغیرهای نامعین خطی برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = (\sum_{i=1}^{n} x_i c_i, \sum_{i=1}^{n} x_i d_i),$$

در فصل دوم مثال (۳.۶.۲) امید ریاضی متغیر نامعین خطی را بصورت زیر بدست آوردیم:

$$E[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{(d_i + c_i)}{2},$$

$$E[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} x_i(d_i + c_i) - 2\sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-)).$$

بنابراین هدف ما ماکزیمم کردن عبارت $(\sum_{i=1}^{n} x_i(d_i + c_i) - 2\sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-))$ است پس با حذف $\frac{1}{2}$ هیچ خللی در ماکزیمم کردن به وجود نمی‌آید. بنابراین معادل با تابع هدف دوم از معادله (۴.۴) است.

همانگونه که در مثال (۳.۴.۳) گفته شد انحراف نیمه مطلق یک متغیر خطی نامعین برابر است با:

$$sa[\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{(d_i - c_i)}{8}.$$

از آن‌جایی که $x_i \geq 0$ و $d_i > c_i$ به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم $\sum_{i=1}^{n} x_i(d_i - c_i) \geq 0$ معادل با تابع هدف اول از معادله (۴.۴) است. □

قضیه ۲.۳.۴. *[۲۱] فرض کنید که بازده‌های اوراق بهادار $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ بصورت متغیرهای نامعین زیگزاگ باشند. که بوسیله $\xi_i = (a_i - \alpha_i, a_i, a_i + \beta_i)$ به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ نشان داده می‌شود. آنگاه مدل (۴.۴) تبدیل به مدل قطعی زیر می‌شود.*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} & \dfrac{(\sum_{i=1}^n 2x_i(\alpha_i+\beta_i) + |\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i-\beta_i)|)^2}{\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i+\beta_i) + |\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i-\beta_i)|} \\ \textbf{\textit{Max}} & \sum_{i=1}^n x_i(4a_i+\beta_i-\alpha_i) - 4\sum_{i=1}^n(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) \\ \textbf{\textit{s.t.}} & \\ \multicolumn{2}{l}{\sum_{i=1}^n x_i^0 - \sum_{i=1}^n(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=1}^n x_i,} \\ \quad x_i = x_i^0 + x_i^+ - x_i^-, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \quad x_i^+ . x_i^- = 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \quad x_i^+, x_i^- \ge 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \quad l_i \le x_i \le u_i, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{۷.۴}$$

برهان. بازده پرتفوی متغیر نامعین زیگزاگ برابر است با:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i x_i = (\sum_{i=1}^n x_i(a_i-\alpha_i), \sum_{i=1}^n x_i a_i, \sum_{i=1}^n x_i(a_i+\alpha_i)).$$

برطبق مثال (۴.۶.۲) امید ریاضی متغیر نامعین زیگزاگ بصورت زیر محاسبه شد:

$$E[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] = \sum_{i=1}^n x_i \frac{(4a_i+\beta_i-\alpha_i)}{4}.$$

تابع هدف دوم با ماکزیمم معادله $\sum_{i=1}^n x_i(4a_i+\beta_i-\alpha_i) - 4\sum_{i=1}^n(b_i x_i^+ + s_i x_i^-)$. برابر می‌شود.
با توجه به تعریف انحراف نیمه مطلق برای یک متغیر نامعین زیگزاگ که در فصل سوم ذکر شد داریم:

$$sa[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] = \frac{[\sum_{i=1}^n 2x_i(\alpha_i+\beta_i) + |\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i-\beta_i)|]^2}{\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i+\beta_i) + |\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i-\beta_i)|}.$$

□

ملاحظه ۳.۳.۴. *اگر $\alpha_i < \beta_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ آنگاه داریم:*

$$sa[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] = \frac{[\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i+3\beta_i)]^2}{2\sum_{i=1}^n \beta_i x_i}.$$

اگر $\alpha_i = \beta_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ درآنگاه داریم:

$$sa[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] = 4\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i+\beta_i).$$

اگر $\alpha_i > \beta_i$ برای $i = ۱, ۲, \dots, n$ آنگاه داریم:

$$sa[\sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i] = \frac{[\sum_{i=۱}^{n} x_i(۳\alpha_i + \beta_i)]^۲}{۲\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i}.$$

قضیه ۴.۳.۴. *[۲۱] فرض کنید که بازده‌های اوراق بهادار $\xi_۱, \xi_۲, \dots, \xi_n$ بصورت متغیرهای نامعین نرمال باشند. که بوسیله $\xi_i = (e_i, \sigma_i)$ به ازای $i = ۱, ۲, \dots, n$ نشان داده می‌شود. آنگاه مدل (۴.۴) تبدیل به مدل قطعی زیر می‌شود.*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Min}} \ \ \sum_{i=۱}^{n} x_i\sigma_i \\ \textbf{\textit{Max}} \ \ \sum_{i=۱}^{n} e_i x_i - \sum_{i=۱}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \sum_{i=۱}^{n} x_i^\circ - \sum_{i=۱}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=۱}^{n} x_i, \\ \qquad x_i = x_i^\circ + x_i^+ - x_i^-, & i = ۱, ۲, \dots, n, \\ \qquad x_i^+ . x_i^- = \circ, & i = ۱, ۲, \dots, n, \\ \qquad x_i^+, x_i^- \geq \circ, & i = ۱, ۲, \dots, n, \\ \qquad l_i \leq x_i \leq u_i, & i = ۱, ۲, \dots, n. \end{cases} \tag{۸.۴}$$

که یک برنامه نویسی خطی دو هدفه است.

برهان. بازده پرتفوی متغیرهای نامعین نرمال برابر است با:

$$E[\sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i] = \sum_{i=۱}^{n} e_i x_i \geq \circ, sa[\sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i] = \frac{\sqrt{۳} ln ۲}{\pi} \sum_{i=۱}^{n} \sigma_i x_i \geq \circ.$$

با توجه به تعریف امید ریاضی و انحراف نیمه مطلق از متغیرهای نامعین مقادیر امید ریاضی و انحراف نیمه مطلق هر دو نامنفی هستند بدلیل غیرمنفی بودن x_i ، e_i و σ_i به ازای $i = ۱, ۲, \dots, n$. بنابراین می‌توان آنها را جایگزین دو تابع مدل (۴.۴) کرد. اثبات قضیه تمام است. □

قضیه ۵.۳.۴. *[۲۱] فرض کنید بازده‌های اوراق بهادار $\xi_۱, \xi_۲, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین با توزیع‌های عدم‌قطعیت $\Phi_۱, \Phi_۲, \dots, \Phi_n$ باشند. توزیع‌های عدم‌قطعیت معکوس $\Phi_۱, \Phi_۲, \dots, \Phi_n$ بصورت $\Phi_۱^{-۱}, \Phi_۲^{-۱}, \dots, \Phi_n^{-۱}$ نشان داده می‌شوند. در این صورت مدل (۴.۴) تبدیل به مدل قطعی زیر می‌شود.*

$$\begin{cases} \boldsymbol{Min} \ \int_{-\infty}^{\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha)d\alpha} \alpha(r)dr \\ \boldsymbol{Max} \ \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha)d\alpha - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) \\ \boldsymbol{s.t.} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^\circ - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \quad x_i = x_i^\circ + x_i^+ - x_i^-, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad x_i^+ . x_i^- = 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad x_i^+, x_i^- \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad l_i \leq x_i \leq u_i, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{۹.۴}$$

در اینجا $\alpha(r)$ فقط ریشه معادله $r = x_1\Phi_1^{-1} + \ldots + x_n\Phi_n^{-1}$ است.

برهان. با توجه به قضیه (۶.۶.۲) داریم:

$$E[\xi_i] = \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha)d\alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

با استفاده از لم (۷.۶.۲) تابع هدف دوم بدست می‌آید.
طبق تعریف انحراف نیمه مطلق متغیر نامعین داریم:

$$\begin{aligned} sa[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i] &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{min\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha)d\alpha, 0\} \geq r\}dr \\ &= \int_{-\infty}^{\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha)d\alpha} \mathcal{M}\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \leq r\}dr. \end{aligned}$$

از آنجایی که $x_i \geq 0$ به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، بنابراین با توجه به قضیه (۳.۵.۲) و مثال (۲.۳.۲)، $\xi_1 x_1, \xi_2 x_2, \ldots, \xi_n x_n$ یک توزیع نامعین معکوس دارد. که رابطه زیر برقرار است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = x_1\Phi_1^{-1}(\alpha) + x_2\Phi_2^{-1}(\alpha) + \ldots + x_n\Phi_n^{-1}(\alpha),$$

به ازای هر r، $\Psi(r) = \mathcal{M}\{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n \leq r\} = \Phi(\frac{r}{x_i}) = \alpha$
که یک ریشه برای معادله $\Psi^{-1}(\alpha) = r$ است، که با استفاده از مثال (۲.۳.۲)، معادله زیر برقرار است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = x_i\Phi^{-1}(\alpha), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

بنابر صورت قضیه:

$$x_1\Phi_1^{-1}(\alpha) + x_2\Phi_2^{-1}(\alpha) + \ldots + x_n\Phi_n^{-1}(\alpha) = r.$$

که در این صورت

$$\mathcal{M}\{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n \leq r\} = \alpha.$$

با تعویض $sa[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n]$ با رابطه $\int_{-\infty}^{\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha)d\alpha} \alpha(r)dr$ تابع هدف اول بدست می‌آید. اثبات قضیه تمام است. □

۲.۳.۴ معادل مدل انحراف نیمه مطلق میانگین (مدل (۵.۴))

قضیه ۶.۳.۴. *[۲۱] فرض کنید که بازده‌های اوراق بهادار $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ بصورت متغیرهای نامعین زیگزاگ باشند. که بوسیله $\xi_i = (a_i - \alpha_i, a_i, a_i + \beta_i)$ به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ نشان داده می‌شود. آنگاه مدل (۵.۴) تبدیل به مدل قطعی زیر می‌شود.*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Max}} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(4a_i + \beta_i - \alpha_i) - 4\sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) \\ \qquad\qquad -\phi \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} 2x_i(\alpha_i + \beta_i) + |\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i - \beta_i)|)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i + \beta_i) + |\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i - \beta_i)|} \\ \textbf{\textit{s.t.}} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^0 - \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i^+ + s_i x_i^-) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \quad x_i = x_i^0 + x_i^+ - x_i^-, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad x_i^+ . x_i^- = 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad x_i^+, x_i^- \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \quad l_i \leq x_i \leq u_i, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{۱۰.۴}$$

برهان. اثبات همانند قضیه (۲.۳.۴) است. □

۴.۴ مثال عددی

بازده ۱۰ اوراق بهادار که بصورت متغیر نامعین زیگزاگ هستند، در جدول (۱.۴) آمده است.

جدول ۱.۴: بازده‌های اوراق بهادار نامعین زیگزاگ

اوراق بهادار	a_i	α_i	β_i	اوراق بهادار	a_i	α_i	β_i
۱	۰/۱	۰/۵	۰/۴	۶	−۰/۱	۰/۳	۰/۵
۲	−۰/۲	۰/۶	۰/۴	۷	۰/۱	۰/۹	۰/۸
۳	−۰/۱	۰/۴	۰/۴	۸	۰/۳	۰/۸	۰/۴
۴	۰/۱	۰/۸	۰/۵	۹	۰/۲	۰/۹	۰/۴
۵	۰/۳	۰/۹	۰/۶	۱۰	۰/۰	۰/۶	۰/۸

فرض‌کنید هزینه خرید هر واحد $b_i = 0/01$ و هزینه فروش هر واحد $s_i = 0/02$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$. مجددا فرض‌کنید مبلغ سهام بعد از تنظیم بیشتر از ۰/۳ نباشد. بنابراین $l_i = 0$ و $u_i = 0/3$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$. مدل قطعی معادله (۵.۴) را وقتی بازده‌های اوراق بهادار متغیر نامعین زیگزاگ

باشد. برای بهینه سازی پرتفوی انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Max} \ \ \frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{۱۰}[x_i(۴a_i+\beta_i-\alpha_i)-۴\sum_{i=۱}^{۱۰}(b_ix_i^{+}+s_ix_i^{-})] \\ \qquad\qquad -\phi\frac{(\sum_{i=۱}^{۱۰}۲x_i(\alpha_i+\beta_i)+|\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i(\alpha_i-\beta_i)|)^۲}{\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i(\alpha_i+\beta_i)+|\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i(\alpha_i-\beta_i)|} \\ \boldsymbol{s.t.} \\ \sum_{i=۱}^{n}x_i^{\circ}-\sum_{i=۱}^{۱۰}(b_ix_i^{+}+s_ix_i^{-})=\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i \\ \qquad x_i=x_i^{\circ}+x_i^{+}-x_i^{-}, & i=۱,۲,\dots,۱۰, \\ \qquad x_i^{+}.x_i^{-}=\circ, & i=۱,۲,\dots,۱۰, \\ \qquad x_i^{+},x_i^{-}\geq\circ, & i=۱,۲,\dots,۱۰, \\ \qquad \circ\leq x_i\leq \circ/۳, & i=۱,۲,\dots,۱۰. \end{cases} \tag{۱۱.۴}$$

پرتفوی اولیه قبل از تنظیم برابر است با:

$$(x_۱^{\circ},x_۲^{\circ},x_۳^{\circ},x_۴^{\circ},x_۵^{\circ},x_۶^{\circ},x_۷^{\circ},x_۸^{\circ},x_۹^{\circ},x_{۱۰}^{\circ})$$
$$=(\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ,\circ/۱\circ)$$

مسئله را به ازای ϕهای مختلف با تابع Fmincon و نرم افزار Games حل می‌کنیم، و جواب‌های بدست آمده را باهم مقایسه می‌کنیم.

جدول ۲.۴: نتایج حاصل از تابع Fmincon

اوراق بهادار	$\phi =$ ۰/۲			$\phi =$ ۱/۰			$\phi =$ ۳/۰		
	x_i^+	x_i^-	x_i	x_i^+	x_i^-	x_i	x_i^+	x_i^-	x_i
۱	۰/۱۵	۰	۰/۲۵	۰/۲	۰	۰/۳	۰/۲	۰	۰/۳
۲	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰
۳	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰
۴	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰
۵	۰/۲	۰	۰/۳	۰/۲	۰	۰/۳	۰/۰۹۹	۰	۰/۱۹۹
۶	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰	۰/۰۸۴	۰	۰/۱۸۴
۷	۰	۰/۰۶۷	۰/۰۳۳	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰
۸	۰/۲	۰	۰/۳	۰/۲	۰	۰/۳	۰/۲	۰	۰/۳
۹	۰	۰	۰/۱	۰	۰/۰۱۸	۰/۰۷۲	۰	۰/۱	۰
۱۰	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰	۰	۰/۱	۰

جدول ۴.۳: نتایج حاصل از تابع Games

	$\phi=$ ۰٫۲			$\phi=$ ۱٫۰			$\phi=$ ۳٫۰		
اوراق بهادار	x_i^+	x_i^-	x_i	x_i^+	x_i^-	x_i	x_i^+	x_i^-	x_i
۱	۰٫۲	۰	۰٫۳	۰٫۲	۰	۰٫۳	۰٫۲	۰	۰٫۳
۲	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۰۱۸	۰٫۰۸۲	۰	۰٫۰۱۸	۰٫۰۸۲
۳	۰٫۱۸۲	۰	۰٫۲۸۲	۰٫۲	۰	۰٫۳	۰٫۲	۰	۰٫۳
۴	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰
۵	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰
۶	۰٫۲	۰	۰٫۳	۰٫۲	۰	۰٫۳	۰٫۲	۰	۰٫۳
۷	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰
۸	۰	۰	۰٫۱	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰
۹	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰
۱۰	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰	۰	۰٫۱	۰

که نتایج بدست آمده از الگوریتم Fmincon بهتر است، بدلیل اینکه مدل ماکزیمم سازی است مقدار تابع هدف جدول اول بیشتر می‌شود.

۵.۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱.۵.۴ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه مروری بر تئوری عدم‌قطعیت و مروری بر مدل میانگین - واریانس مارکوویتز که در بازارهای مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد داشتیم. در مدل میانگین - واریانس برای اندازه‌گیری ریسک از واریانس استفاده می‌شود. در این‌جا هدف اصلی ما معرفی مدل میانگین - انحراف نیمه مطلق برای اندازه‌گیری ریسک اوراق بهادار است. که بوسیله کارشناسان ارزیابی شده که به‌عنوان متغیرهای نامعین است. با توجه به این‌که اوراق بهادار ریسکی متغیرهای نامعین خطی، زیگزاگ و نرمال هستند، ما آنها را تبدیل به مدل قطعی برنامه نویسی ریاضی کردیم.

از مزیت‌های این پژوهش:

۱- از این مدل به ندرت استفاده شده است.

۲- خرید و فروش اوراق بهادار را بر روی پرتفوی اولیه می‌توان انجام داد. که با تنظیم پرتفوی اولیه به یک پرتفوی جدید دست می‌یابیم.

۳- به‌دلیل خود تامین بودن پرتفوی اولیه برای خرید و فروش اوراق بهادار هیچ پولی به پرتفوی تزریق و از آن خارج نمی‌شود.

۴- با استفاده از مدل میانگین - انحراف نیمه مطلق جواب مسائل بهینه سازی سبد سهام را بدست می‌آوریم.

۲.۵.۴ پیشنهادات برای تحقیقات آتی

از جمله تحقیقات دیگری که در ادامه می‌توان انجام داد:

۱- می‌توان معادل قطعی مدل (۵.۴) را نیز به دست آورد.

۲- تنظیم پرتفوی تصادفی با استفاده از مدل انحراف نیمه مطلق میانگین است.

۳- تنظیم پرتفوی فازی با استفاده از مدل انحراف نیمه مطلق میانگین می‌باشد.

۴- و همچنین می‌توان پرتفوی نامعین را با استفاده از مدل‌های دیگر از جمله میانگین - متوسط قدر مطلق انحرافات، میانگین - نیم انحراف معیار و ...تنظیم کرد.

۵- حل مدل‌های ارائه شده با استفاده از الگوریتم اجتماع ذرات، ژنتیک و دیگر الگوریتم‌های فراابتکاری.

مراجع

[1] K. J. Arrow, The Theory of Risk Aversion. Essays in the Theory of Risk-Bearing, Chicago, (1971).

[2] J. Benchimol, Risk aversion in the eurozone. Research in Economics, 68, 39-56, (2014).

[3] D. P. Bertsekas, Nonlinear programming. Belmont: Athena Scientific, America, (1999).

[4] P. Christoffersen, S. Gonçalves. Estimation risk in financial risk management. The Journal of Risk, 7, 1, (2005).

[5] C. D.Feinstein, M. N.Thapa. A reformulation of a mean-absolute deviation portfolio optimization model. Management Science, 39, 1552-1553, (1993).

[6] J. Horn, N. Nafpliotis. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. In Evolutionary Computation, 1, 82-87, (1994).

[7] H. Konno, H.Yamazaki. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management Science, 37, 519-531, (1991).

[8] B. Liu, Theory and Practice of Uncertain Programming, Physica-Verlag, Heidelberg, China, (2002).

[9] B. Liu, Uncertainty Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, (2007).

[10] B. Liu, Some research problems in uncertainty theory, Journal of Uncertain Systems 3, 3-10, (2009).

[11] B. Liu, Uncertainty Theory, 3rd ed.,http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf.

[12] X. Li, Z.Qin, Interval portfolio selection models within the framework of uncertainty theory. Economic Modelling, 41, 338-344, (2014).

[13] Y. Liu, Z.Qin, Mean semi-absolute deviation model for uncertain portfolio optimization problem. Journal of Uncertain Systems, 6, 299-307, (2012).

[14] M. Mares, Portfolio Analysis. From Probabilistic to Credibilistic and Uncertain Approaches, China, (2011).

[15] H. Markowitz, Portfolio selection, Journal of Finance 7, 77-91, (1952).

[16] H. Markowitz, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,Wiley, New York, (1959).

[17] H. Markowitz, Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm, Annals of Operational Research 45, 307-317, (1993).

[18] A. J. Morton, S. R. Pliska. Optimal portfolio management with fixed transaction costs. Mathematical Finance, 5, 337-356, (1995).

[19] Z.X. Peng, Uncertainty Distribution of Functions of Uncertain ,Tsinghua University, China, (2010)

[20] Z.X. Peng, Some Properties of Product Uncertain Measure, Josai University, china, (2012)

[21] Z. Qin, x. Kar, H. x. Zheng, Uncertain portfolio adjusting model using semiabsolute deviation. Soft Computing, 20, 717-725, (1995).

[22] R. Sloan, Don't Blame the Shorts Why Short Sellers Are Always Blamed for Market Crashes And how History is Repeating Itself. Mc Graw Hill Professional, China, (2009).

[23] M. G. Speranza, Linear programming models for portfolio optimization. Finance, 14, 107-123, (1993).

[24] Y. Simaan, Estimation risk in portfolio selection: the mean variance model versus the mean absolute deviation model. Management Science, 43, 1437-1446, (1997).

[25] W. G. Zhang, X. Zhang, Y. Chen, Portfolio adjusting optimization with added assets and transaction costs based on credibility measures. Insurance Mathematics and Economics, 49, 353-360, (2011).

[26] Y. Zhu, Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model. Cybernetics and Systems An International Journal, 41, 535-547, (2010).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ارزش پرتفوی	Portfolio value
ارزش مورد انتظار	Expected value
استقلال	Independent
اصل حاصل‌ضربی	Product measure axiom
انحراف نیمه‌مطلق	Semi-absolute deviation
اوراق بهادار	Security
بازده	Return
بازده تحقق یافته	Realized return
بازده مورد انتظار	Expected return
بورل	Borel
بهینه سازی	Optimization
پرتفوی	Portfolio
تغییر قیمت	Capital gain
تنظیم کردن	Adjusting
توزیع درآمد	Distribution of incom
خود تامین	Self financing
دارایی	Asset
دریافت سود	Yeild
ریسک‌پذیر	Risk taker
ریسک‌گریز	Risk averse
زیگزاگ	Zigzag
سرمایه‌گذاری	Investment
فروش استقراضی	Short sale
قانون عملیاتی	Operational law
کارایی اقتصادی	Economic perpormance

کارایی پارتو .... Pareto efficiency

مطلوبیت .... Utility

مرز کارا .... Efficient frontier

نامعین .... Uncertain

واریانس .... Variance

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjusting .... تنظیم کردن
Asset .... دارایی
Borel .... بورل
Capital gain .... تغییر قیمت
Distribution of incom .... توزیع در آمد
Economic perpormance .... کارایی اقتصادی
Efficient frontier .... مرز کارا
Expected return .... بازده مورد انتظار
Expected value .... ارزش مورد انتظار
Independent .... استقلال
Investment .... سرمایه‌گذاری
Operational law .... قانون عملیاتی
Optimization .... بهینه‌سازی
Pareto efficiency .... کارایی اقتصادی
Product measure axiom .... اصل حاصل ضربی
Portfolio .... پرتفوی
Portfolio value .... ارزش پرتفوی
Realized return .... بازده تحقق یافته
Return .... بازده
Risk averse .... ریسک‌گریز
Risk taker .... ریسک‌پذیر
Security .... اوراق بهادار
Self financing .... خود تامین
Semi-absolute deviation .... انحراف نیمه مطلق
Short sale .... فروش استقراضی

نامعین .... Uncertain

مطلوبیت .... Utility

واریانس .... Variance

دریافت سود .... Yeild

زیگزاگ .... Zigzag

Aabstract

Since financial markets are complex. Sometimes shows are presented yielding securities in the future based on the judgment of experts. This paper examines the issue of setting a property portfolio with risky deals. Experts estimate that shifted as securities in which efficiency. Here, we offer customizable models mean deviation Semi-absolute uncertain to the problem of optimizing the tradeoff between risk and return on the investment portfolio. Different distributions of securities uncertain returns based on expert evaluation, to convert to equivalent deterministic models are used.
keywords: Portfolio adjusting, Semiabsolute deviation, Uncertainty modeling, Uncertain programming

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences
MSc Thesis in Mathematical - Finance Mathematical

Uncertain portfolio adjusting model using semiabsolute deviation

By: Zohreh Jamei

Supervisor

Dr Alireza Nazemi

September 2016