دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

خاصیت IFP نسبت به ایده‌آل‌های ماکسیمال

یترا رحمتی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل‌هوز

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به :

آنان که در تعریف نمی گنجند
رفتنی اند و به اثر ماندگار
امروز ، دیروزی اند
و همیشه فردایی اند

سپاس گزاری...

اکنون که به لطف و عنایت پروردگار یکتا و مساعدت اساتید ارجمند موفق به گردآوري، تدوین و تنظیم این رساله گشته‌ام، وظیفه خود می‌دانم که نهایت سپاسگزاري را از آنان به عمل آورم. هر چند که براي رسالت پیامبرگونه آنان نمی‌توان در قالب واژگانی در خور شأن و مقام آنان، مراتب احترام و سپاسگزاري را بیان نمود.این کلمات تنها گوشه‌اي از سپاس قلبی اینجانب از آنان می‌باشد.

در اینجا لازم می دانم از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی که همواره و در تمامی مراحل مرا یاری و راهنمایی نمودند و جناب آقای دکتر آل هوز عزیز برای مشاوره های ارزشمندشان تشکر و قدردانی نمایم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری و جناب آقای دکتر مهدی‌رضا خورسندی که زحمت داوري این پایان‌نامه را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم. از خداي متعال براي همه عزیزان سلامتی و موفقیت روز افزون آرزومندم.

و در پایان بی‌نهایت‌ترین سپاس را به پربهاترین گنج گیتی پدر و مادرم ابراز می‌نمایم هرچند این سپاسگزاري در مقایسه با انبوه مهربانی و فداکاري‌هایشان بسیار ناچیز است.

میترا رحمتی

شهریور ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **میترا رحمتی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **خاصیت** IFP **نسبت به ایده‌آل‌های ماکسیمال** ، تحت راهنمایی **دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

میترا رحمتی
شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه باشد. گوییم R دارای خاصیت IFP است هرگاه $a, b, r \in R$ و $ab = 0$ ، آن‌گاه $arb = 0$. خاصیت IFP نقش مهمی در مطالعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابجایی و مدول‌ها دارد. در این پایان نامه به بررسی رابطه‌ی این خاصیت با حلقه‌های آرمنداریز، حلقه‌های برگشت‌پذیر و ایده‌آل‌های ماکسیمال می‌پردازیم. نشان می‌دهیم حلقه‌ی R وجود دارد به‌طوری‌که دارای خاصیت IFP است اما $R[x]$ خاصیت IFP ندارد، و در دو مثال خواهیم دید که مفاهیم IFP و آرمنداریز مستقل از یکدیگر می‌باشند. همچنین ثابت می‌کنیم که حلقه‌های برگشت‌پذیر دارای خاصیت IFP هستند. محور اصلی این پایان نامه پیرامون ایده‌آل‌های ماکسیمال می‌باشد، که آن را خاصیت $IMIP$ می‌نامیم. گوییم حلقه‌ی R دارای خاصیت $IMIP$ است هرگاه $a, b \in R$ و $ab = 0$، آن‌گاه $aMb = 0$، که M ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R است. همچنین نشان می‌دهیم توسیع دورو A توسط K دارای خاصیت $IMIP$ است اگر و تنها اگر A یک حلقه‌ی IFP فاقد یک باشد، جایی که A یک جبر پوچ روی میدان K درنظر گرفته می‌شود. در انتها رفتار توسیع‌های مختلف یک حلقه‌ی $IMIP$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: حلقه‌ی IFP، حلقه‌ی $IMIP$، ایده‌آل ماکسیمال، توسیع دورو، حلقه‌ی آرمنداریز، حلقه‌ی برگشت‌پذیر

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

فهرست مطالب

پیشگفتار

خاصیت IFP که نخستین بار در سال ۱۹۷۰ توسط بل [۱] در مقاله‌ی [۵] معرفی شده است، در مطالعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه‌های ناجابجایی نقش مهمی دارد. به بیان بل حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است هرگاه برای دو عنصر a و b از R، $ab = 0$ نتیجه دهد $aRb = 0$. در سال‌های ۱۹۷۳ و ۱۹۸۲، ناربونه [۲] [۸] و شین [۳] [۲۴] به‌جای اصطلاح IFP به‌ترتیب از SI و حلقه‌ی نیم‌جابجایی استفاده کردند. خاصیت IFP نقش مهمی در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابجایی و مدول‌ها دارد.
در فصل اول پایان نامه تعاریف و مفاهیم مقدماتی را که در فصول بعدی به‌کار گرفته شده‌اند، بیان می‌کنیم.
در فصل دوم نشان می‌دهیم حلقه‌ی R وجود دارد به‌طوری‌که دارای خاصیت IFP است اما $R[x]$ خاصیت IFP ندارد. همچنین آرمنداریز در مقاله‌ی [۴] ، نشان داد که اگر R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد و $f(x)$ و $g(x)$ دو عضو از $R[x]$ باشند و $fg = 0$، آن‌گاه برای هر $a \in C_f$ و $b \in C_g$ ، $ab = 0$. چاچاریا [۴] و رگه [۵] [۲۳] ، حلقه‌ای که در خاصیت فوق صدق کند را حلقه‌ی آرمنداریز نامیدند. ثابت می‌کنیم هر حلقه‌ی تقلیل‌یافته آرمنداریز است و هر حلقه‌ی آرمنداریز، آبلی است. همچنین خاصیت موریتاپایا را تعریف می‌کنیم و خواهیم دید که خاصیت آرمنداریز یک خاصیت موریتاپایا نیست. در انتهای این فصل دو مثال وجود دارد که نشان می‌دهند مفاهیم IFP و آرمنداریز مستقل از یکدیگر می‌باشند.
حلقه‌ی R را برگشت‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای $a, b \in R$، $ab = 0$ نتیجه دهد $ba = 0$.
در فصل سوم بررسی‌هایی که توسط کن [۶] [۷] در رابطه با حلقه‌های برگشت‌پذیر انجام شده است را بیان می‌کنیم. ابتدا خواص و توسیع‌های مربوط به حلقه‌های برگشت‌پذیر به‌انضمام مثال‌های مورد نیاز را در نظر می‌گیریم و سپس نشان می‌دهیم که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر نیازی نیست برگشت‌پذیر باشند و علاوه بر

[۱] Bell
[۲] Narbonne
[۳] Shin
[۴] Chhawchharia
[۵] Rege
[۶] Cohn

این نشان می‌دهیم اگر R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد سپس $R[x]/\langle x^n\rangle$ برگشت‌پذیر است، که $\langle x^n\rangle$ ایده‌آل تولیدشده توسط x^n و n یک عدد صحیح مثبت است. به‌سبب لمبک [۷] [۲۰] ، ایده‌آل A از حلقه‌ی R متقارن است اگر برای $r,s,t\in R$، $rst\in A$ نتیجه دهد $rts\in A$ ، بنابراین حلقه‌ی R متقارن است اگر برای $r,s,t\in R$، $rst=0$ نتیجه دهد $rts=0$. بوضوح طبق [۳ ، قضیه ۳] ، حلقه‌های متقارن برگشت‌پذیر هستند و حلقه‌های برگشت‌پذیر دارای خاصیت IFP می‌باشند. همچنین در این فصل خواص مربوط به حلقه‌های برگشت‌پذیر و حلقه‌های IFP را مشاهده می‌کنیم و برخی از توسیع‌های مربوط به آن‌ها را مطالعه خواهیم کرد.
در فصل چهارم و پنجم تعمیمی از حلقه‌های IFP را که خاصیت $IMIP$ می‌نامیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

حلقه‌ی R دارای خاصیت $IMIP$ است هرگاه برای $a,b\in R$ و $ab=0$، آن‌گاه $aMb=0$، که M ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R است. بوضوح حلقه‌های ساده دارای خاصیت $IMIP$ می‌باشند و حلقه‌های IFP نیز $IMIP$ می‌باشند. همچنین نشان می‌دهیم توسیع دورو [۸] A توسط K دارای خاصیت $IMIP$ است اگر و تنها اگر A یک حلقه‌ی IFP فاقد یک باشد، جایی که A یک جبر پوچ روی میدان K درنظر گرفته می‌شود. ثابت می‌کنیم اگر R یک حلقه‌ی $IMIP$ باشد آن‌گاه برای تمام $0\neq e^2=e\in R$ ، eRe دارای خاصیت $IMIP$ است. و در ادامه رابطه‌ی بین خاصیت $IMIP$ و حلقه‌ی آرمندا‌ریز را بررسی خواهیم کرد. در انتهای فصل پنجم دو مثال وجود دارد که نشان می‌دهند مفاهیم $IMIP$ و آرمندا‌ریز مستقل از یکدیگر می‌باشند.

[۷] Lambek
[۸] Dorroh extension

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم مقدماتی موردنظر پایان‌نامه را بیان‌کرده و تقریباً تمامی تعاریف و قضایای مهمی که پیش نیاز فصل‌های بعد می‌باشند را ذکر می‌نماییم. در سراسر این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یکدار هستند مگر آنکه خلاف آن ذکر شده‌باشد.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فرض‌کنیم R مجموعه‌ای است که بر آن دو عمل دوتایی موسوم به جمع و ضرب تعریف‌شده و آنها بترتیب با $+$ و $\circ$ نمایانده‌شوند. در این صورت R یک حلقه نسبت به این اعمال نامیده‌می‌شود هرگاه ویژگی‌های زیر برقرارباشند.

۱. $(R,+)$ یک گروه آبلی باشد:

$$\begin{cases} \forall\, a,b\in R \;\; ; \;\; a+b=b+a \\ \forall\, a,b,c\in R \;\; ; \;\; a+(b+c)=(a+b)+c \\ \exists\, \circ\in R\,,\forall\, a\in R \;\; ; \;\; a+\circ=a \\ \forall\, a\in R\,,\exists -a\in R \;\; ; \;\; a+(-a)=\circ \end{cases}$$

۲. $(R,\circ)$ یک نیم‌گروه باشد، یعنی عمل $\circ$ شرکت‌پذیر باشد:

$$\forall\, a,b,c\in R \quad ; \quad a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$$

۳. عمل $\circ$ نسبت به عمل $+$ توزیع‌پذیر باشد:

$$\forall\, a,b,c\in R \quad ; \quad a\circ(b+c)=a\circ b+a\circ c$$

$$(a+b)\circ c=a\circ c+b\circ c$$

تعریف ۲.۱.۱. حلقه‌ی R را در نظر می‌گیریم در این صورت:

۱. R جابجایی است هرگاه:

$$\forall\, a,b\in R \quad ; \quad ab=ba$$

۲. R یکدار است هرگاه:

$$\exists\, ۱\in R\,,\ \forall\, a\in R \quad ; \quad a\cdot ۱=۱\cdot a=a$$

۳. حلقه‌ی یکدار R دامنه است هرگاه $ab=۰$ نتیجه دهد $a=۰$ یا $b=۰$.

۴. R ساده است هرگاه $\{۰\}$ و R تنها ایده‌آل‌های آن باشند.

نکته ۳.۱.۱. ایده‌آل $\{۰\}$، تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی ساده‌ی R است.

۵. عنصر a از حلقه‌ی R پوچ‌توان [۱] است هرگاه:

$$\exists\, n\in \mathbb{N} \quad ; \quad a^n=۰$$

۶. R تقلیل‌یافته است هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نداشته‌باشد. به عبارت معادل:

$$\forall\, a\in R \quad ; \quad a^۲=۰\longrightarrow a=۰$$

.

۷. R برگشت‌پذیر است هرگاه:

$$\forall\, a,b\in R \quad ; \quad ab=۰\longrightarrow ba=۰$$

.

۸. عنصر e از حلقه‌ی R را خودتوان [۲] می‌نامیم هرگاه: $e^۲=e$.

۹. خودتوان e از حلقه‌ی R را مرکزی [۳] می‌نامیم هرگاه:

$$\forall\, r\in R \quad ; \quad er=re.$$

---

[۱] Nilpotent element

[۲] Idempotent

[۳] Centeral idempotent

۱۰. R آبلی [۴] است هرگاه هر خودتوان آن مرکزی باشد.

۱۱. R حلقه‌ی تقسیم است هرگاه هر عنصر ناصفر در R، وارون‌پذیر باشد.

۱۲. R دامنه‌ی صحیح است هرگاه R جابجایی باشد و $a \cdot b = ۰$ ایجاب نماید $a = ۰$ یا $b = ۰$ برای هر $a, b \in R$.

۱۳. R میدان است هرگاه R دامنه‌ی صحیحی باشد که در آن برای هر عضو ناصفر $a \in R$ وجود داشته باشد عضوی چون $a^{-۱} \in R$ به قسمی که $a \cdot a^{-۱} = ۱$.

۱۴. R فون نیومن [۱۰] منظم [۵] (یا به‌طور خلاصه منظم) نامیده می‌شود هرگاه برای هر عنصر $a \in R$، $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که، $a = aba$.

۱۵. R ددکیند-متناهی [۶] است هرگاه برای هر $a, b \in R$ ، $ab = ۱$ نتیجه دهد $ba = ۱$.
حلقه‌های آبلی ددکیند-متناهی هستند.

۱۶. R متقارن [۷] است هرگاه برای هر $r, s, t \in R$، $rst = ۰$ نتیجه دهد $rts = ۰$.

تعریف ۴.۱.۰۱. فرض‌کنیم R یک حلقه و $a \in R$، در این صورت:

۱. اگر $ab = ۰$ برای عنصر ناصفری چون $b \in R$، آنگاه a یک مقسوم علیه صفر چپ نامیده می‌شود. اگر $ba = ۰$ برای عنصر ناصفری چون $b \in R$، آنگاه a یک مقسوم علیه صفر راست نامیده می‌شود. عنصر a یک مقسوم علیه صفر است اگر هم مقسوم علیه صفر چپ و هم مقسوم علیه صفر راست باشد.

۲. a را یک عنصر منظم می‌نامیم هرگاه نه یک مقسوم علیه صفر چپ و نه یک مقسوم علیه صفر راست باشد.

۳. a را عنصر وارون‌پذیر می‌نامیم هرگاه عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد بطوریکه $ab = ۱$ و $ba = ۱$. وارون آن معمولاً با $a^{-۱}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۰۱. فرض‌کنیم R یک حلقه باشد و $\varnothing \neq I \subseteq R$. گوییم I یک ایده‌آل چپ (راست) حلقه‌ی R است هرگاه

۱. $\forall\, a, b \in I \quad ; \quad a - b \in I$

۲. $\forall\, a \in I \,,\, \forall\, r \in R \quad ; \quad ra \in I \;\; (ar \in I)$

I یک ایده‌آل است هرگاه هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست باشد.

[۴] Abelian Ring
[۵] von Neumann regular
[۶] Dedkind-finite
[۷] Symmetric Ring

تعریف ۶.۱.۱. فرض‌کنیم R یک حلقه‌ی ناجابجایی باشد، ایده‌آل سره P از R را اول می‌نامیم هرگاه، A و B ایده‌آل‌هایی از R باشند و $AB \subseteq P$ ، آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۷.۱.۱. ایده‌آل سره $\underline{m}$ از حلقه‌ی R را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه هیچ ایده‌آل سره‌ای از R به‌طور اکید شامل m نباشد.

گزاره ۸.۱.۱. *هر ایده‌آل ماکسیمال، اول است.*

تعریف ۹.۱.۱. ایده‌آل Q از حلقه‌ی R را نیم‌اول می‌نامیم هرگاه برای هر ایده‌آل A از حلقه‌ی R، $A^۲ \subseteq Q$ نتیجه دهد $A \subseteq Q$.

گزاره ۱۰.۱.۱. *هر ایده‌آل اول حلقه‌ی R ، یک ایده‌آل نیم‌اول است.*

تعریف ۱۱.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه عدد طبیعی n وجودداشته‌باشد بطوریکه $I^n = ۰$.

تعریف ۱۲.۱.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را پوچ می‌نامیم هرگاه تمام عناصر I پوچ‌توان باشند.

ملاحظه ۱۳.۱.۱. *هر ایده‌آل پوچ‌توان از حلقه‌ی R ، یک ایده‌آل پوچ است اما عکس این مطلب همیشه برقرار نیست.*

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $X \subseteq R$، آنگاه ایده‌آل تولیدشده توسط X را با $\langle X\rangle$ نشان می‌دهیم و اگر $X = \{x\}$ ، آنگاه به‌جای $\langle X\rangle$ از $\langle x\rangle$ یا RxR نیز استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. اگر I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد، R/I را حلقه‌ی خارج‌قسمتی R بر I می‌نامیم و داریم:

$$R/I := \left\{x + I \,\middle|\, x \in R\right\}.$$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض‌کنیم K حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد، $K-$ جبر A حلقه‌ای است که:

۱. $(A,+)$ یک $K-$ مدول یکانی باشد.

۲. برای هر $k \in K$ و $a,b \in A$ ،

$$k(ab) = (ka)b = a(kb)$$

تعریف ۱۷.۱.۱. برای هر R-مدول چپ M، پوچساز [۸] M به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ann(M) = \left\{r \in R \,\middle|\, rM = ۰\right\}.$$

[۸] Annihilator

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم X یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از حلقه‌ی R باشد. پوچساز چپ و پوچساز راست X در R را به‌ترتیب با $l_R(X)$ و $r_R(X)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$l_R(X) = \left\{ a \in R \middle| \, aX = 0 \right\}$$

و

$$r_R(X) = \left\{ b \in R \middle| \, Xb = 0 \right\}.$$

اگر $X = \{x\}$ ، به‌جای $l_R(X)$ و $r_R(X)$ به‌ترتیب از $l_R(x)$ و $r_R(x)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۱.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی X از حلقه‌ی R را بسته ضربی می‌نامیم هرگاه:

۱. $1 \in X$

۲. اگر $x, y \in X$ ، آن‌گاه $xy \in X$.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$. عمل جمع روی $\mathbb{H}$ به‌صورت طبیعی تعریف می‌شود، یعنی:

$$(r_0+r_1i+r_2j+r_3k)+(s_0+s_1i+s_2j+s_3k) = (r_0+s_0)+(r_1+s_1)i+(r_2+s_2)j+(r_3+s_3)k.$$

ضرب روی $\mathbb{H}$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شود به‌قسمی که:

$$i^2 = -1 \ , \ j^2 = -1 \ , \ k^2 = -1 \ , \ jk = i \ , \ kj = -i \ , \ ik = -j \ , \ ki = j \ , \ ij = k \ , \ ji = -k$$

بنابراین،

$$(r_0+r_1i+r_2j+r_3k)(s_0+s_1i+s_2j+s_3k) = (r_0s_0-r_1s_1-r_2s_2-r_3s_3)+(r_0s_1+r_1s_0+r_2s_3-r_3s_2)i$$
$$+(r_0s_2 + r_2s_0 + r_1s_3 + r_3s_1)j + (r_3s_0 - r_2s_1 + r_3s_0 + r_1s_2)k.$$

$\mathbb{H}$ با دو عمل تعریف‌شده یک حلقه است. از آن‌جا که $ij \neq ji$ ، پس $\mathbb{H}$ جابجایی نیست. اگر $\alpha = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ ، آن‌گاه مزدوج α را با $\bar{\alpha}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$$

بوضوح $\alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. اگر $\alpha \neq 0$، آن‌گاه $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$ و لذا $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\bar{\alpha}$ عنصری از $\mathbb{H}$ است. بوضوح $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\bar{\alpha} \cdot \alpha = 1$ ، پس $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\bar{\alpha}$ وارون α است. بنابراین $\mathbb{H}$ یک حلقه‌ی تقسیم است اما میدان نیست.

$\mathbb{H}$ را حلقه‌ی چهارگانهای حقیقی همیلتونی می‌نامیم. متناظراً می‌توانیم حلقه‌ی چهارگانهای گویای همیلتونی را به‌صورت زیر تعریف کنیم، که یک حلقه‌ی تقسیم است.

$$R_1 = \left\{ a + bi + cj + dk \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}.$$

بوضوح R_1 زیرحلقه‌ای از $\mathbb{H}$ است.

تعریف ۲۱.۱.۰. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند و M یک $(R,S)-$ دو مدول باشد. یعنی، M یک $R-$ مدول چپ و $S-$ مدول راست است که برای هر $r \in R$ و $s \in S$ و $m \in M$ ، $(rm)s = r(ms)$. قرار می‌دهیم: $A = \begin{pmatrix} R & M \\ \circ & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ \circ & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in M, s \in S \right\}$.
می‌توان نشان داد که A با دو عمل جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها یک حلقه تشکیل می‌دهد. گاهی A را با علامت $R \oplus M \oplus S$ نیز نشان می‌دهیم. اگر $R = S$ و M یک $(R,R)-$ دو مدول باشد، آن‌گاه $\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ \circ & r \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in M \right\}$ را توسیع بدیهی [۹] R به وسیله‌ی M می‌نامیم و با $T(R,M)$ نشان می‌دهیم. می‌توان هر عنصر از $T(R,M)$ را به (r,m) نیز نشان داد. بنابراین عمل ضرب با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$(r_۱, m_۱)(r_۲, m_۲) = (r_۱ r_۲, r_۱ m_۲ + m_۱ r_۲)$$

برای هر $(r_۱, m_۱), (r_۲, m_۲) \in T(R,M)$.

تعریف ۲۲.۱.۰. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq ۲$. تعریف می‌کنیم:

$$D_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ \circ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ \circ & \circ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & a \end{pmatrix} \in U_n(R) \middle| a, a_{ij} \in R \right\}$$

واضح است که $D_n(R)$ زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی ماتریس‌های بالامثلثی $UD_n(R)$ است.
توجه داریم که $D_۲(R) = T(R,R)$.

[۹] trivial extension

۱.۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۲۳.۱.۱. برای حلقه‌ی R تعریف می‌کنیم:

۱. رادیکال جیکبسون [۱۰] $J(R)$: اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ (یا راست) ماکسیمال در حلقه‌ی R.

۲. رادیکال اول [۱۱] یا رادیکال پوچ پایینی $P(R)$: اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول در حلقه‌ی R.

۳. رادیکال پوچ بالایی [۱۲] $N^*(R)$: مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ در حلقه‌ی R .

۴. رادیکال پوچ $N(R)$: مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان در حلقه‌ی R.

۵. رادیکال ودربورن [۱۳] $N_\circ(R)$: مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ‌توان در حلقه‌ی R .

۶. رادیکال براون مک‌کوی [۱۴] $BR(R)$: اشتراک ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال و راست ماکسیمال در حلقه‌ی R.

ملاحظه ۲۴.۱.۱. *نامساوی‌های زیر همواره در حلقه‌ی R برقرار هستند.*

$$N_\circ(R) \subseteq P(R) \subseteq N^*(R) \subseteq N(R)$$

$$N^*(R) \subseteq J(R) \subseteq BR(R)$$

تعریف ۲۵.۱.۱. برای حلقه‌ی R و متغیر آزاد x روی R تعریف می‌کنیم:

۱. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها [۱۵] $R[x]$:

$$R[x] = \left\{ a_\circ + a_1 x + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; a_i \in R \;\; , \;\; n \geqslant \circ \right\}$$

۲. حلقه‌ی سری‌های توانی [۱۶] $R[[x]]$:

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=\circ}^{\infty} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in R \right\}$$

[۱۰] Jacobson radical
[۱۱] prime radical
[۱۲] upper nilradical
[۱۳] Weddeburn radical
[۱۴] Brown-McCoy radical
[۱۵] Polynomial Ring
[۱۶] Power Series Ring

۲.۱.۱ نمادها

۱. $Mat_n(R)$: نمایانگر حلقه‌ی ماتریسی $n \times n$ روی حلقه‌ی R.

۲. $U_n(R)$: نمایانگر حلقه‌ی ماتریسی بالا مثلثی روی حلقه‌ی R.

۳. E_{ij} : نمایانگر ماتریس‌های واحد روی حلقه‌ی R که درایه‌ِی ij ام آن یک و سایر درایه‌ها صفر می‌باشند.

۴. $\mathbb{Z}$: نمایانگر حلقه‌ی اعداد صحیح.

۵. $\mathbb{Z}_n$: نمایانگر حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی n.

۶. $C_{f(x)}$: نمایانگر مجموعه‌ی ضرایب چندجمله‌ای $f(x) \in R[x]$.

فصل ۲

حلقه‌های IFP و آرمنداریز

۱.۲ حلقه‌ی IFP (نیم‌جابجایی) و خواص آن

در این فصل ابتدا به معرفی حلقه‌های IFP و آرمنداریز می‌پردازیم و خواص مربوط به هریک از آن‌ها را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.
حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است اگر برای $a, b \in R$، $ab = ۰$ نتیجه دهد $aRb = ۰$. ناربونه [۱] [۸] و شین [۲] [۲۴] به‌جای اصطلاح IFP به‌ترتیب از SI و حلقه‌ی نیم‌جابجایی استفاده کردند. خاصیت IFP نقش مهمی در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابجایی و مدول‌ها دارد. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که حلقه های IFP، آبلی هستند، و از آن‌جا که حلقه‌های آبلی ددکیند-متناهی هستند لذا حلقه‌های IFP نیز ددکیند-متناهی می‌باشند.
کلاس حلقه‌های IFP هم شامل حلقه‌های جابجایی و هم شامل حلقه‌های تقلیل‌یافته است. اما باید توجه کنیم که تعداد زیادی حلقه‌ی جابجایی که تقلیل‌یافته نیست (مانند $\mathbb{Z}_{n^l}$ برای $n, l \geq ۲$) و تعداد زیادی حلقه‌ی تقلیل‌یافته ناجابجایی (مانند حاصلضرب مستقیم دامنه‌های صحیح) وجود دارد.

تعریف ۱.۱.۲. گوییم حلقه‌ی R خاصیت IFP دارد (یا حلقه‌ی R، IFP است) هرگاه ایده‌آل $\{۰\}$ خاصیت IFP داشته‌باشد. یعنی هرگاه $a, b, r \in R$ و $ab = ۰$ ، آن‌گاه $arb = ۰$.

مثال زیر نشان می‌دهد حلقه‌ی R وجود دارد به‌طوری که خاصیت IFP دارد اما $R[x]$ خاصیت IFP ندارد.

مثال ۲.۱.۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}_۲$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۲ باشد و $A = \mathbb{Z}_۲ \langle a_۰, a_۱, a_۲, b_۰, b_۱, b_۲, c \rangle$ $\mathbb{Z}_۲-$ جبر آزاد تولید شده به وسیله‌های متغیرهای تعویض ناپذیر $a_۰, a_۱, a_۲, b_۰, b_۱, b_۲, c$ باشد که جمله‌ی ثابت آنها صفر است. A یکدار نیست. ایده‌آلی از $A + \mathbb{Z}_۲$ را که به وسیله‌ی عناصر

$$a_۰b_۰, a_۱b_۲ + a_۲b_۱, a_۰b_۱ + a_۱b_۰, a_۰b_۲ + a_۱b_۱ + a_۲b_۰, a_۲b_۲, a_۰rb_۰,$$

---
[۱] Narbonne
[۲] Shin

$$a_2rb_2, (a_0+a_1+a_2)r(b_0+b_1+b_2) \text{و} r_1r_2r_3r_4$$

تولید می‌شود را با I نمایش می‌دهیم که $r, r_1, r_2, r_3, r_4 \in A$. واضح است که $A^4 \subseteq I$. قرار می‌دهیم: $R = \frac{\mathbb{Z}_2+A}{I}$. چون $(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2) \in I[x]$ ، اما $(a_0+a_1x+a_2x^2)c(b_0+b_1x+b_2x^2) \notin I[x]$ ، پس $R[x]$ خاصیت IFP ندارد. حال نشان می‌دهیم R خاصیت IFP دارد. هر حاصلضرب از عناصر مجموعه‌ی $\{c, b_2, b_1, b_0, a_2, a_1, a_0\}$ را یک تک جمله‌ای می‌نامیم و اگر تک جمله‌ای α دقیقاً با حاصلضرب n تا از متغیرهای فوق برابر باشد، می‌گوییم α از درجه‌ی n است. مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی تک جمله‌ای‌های از درجه‌ی n با ضرایب از $\mathbb{Z}_2$ را با H_n نشان می‌دهیم.بوضوح H_n متناهی و I ایده‌آلی همگن است (یعنی اگر $\sum_{i=1}^{s} r_i \in I$ و $r_i \in H_i$ ، آنگاه: $r_i \in I$).

ادعای ۱: هرگاه $f_1, g_1 \in H_1$ و $f_1g_1 \in I$ و $r \in \mathbb{Z}_2+A$ ، آنگاه: $f_1rg_1 \in I$.

اثبات ادعای ۱: بنابر تعریف ایده‌آل I ، حالت‌های زیر اتفاق می‌افتند:

$(f_1 = a_0, g_1 = b_0)$ یا $(f_1 = a_2, g_1 = b_2)$ یا $(f_1 = a_0+a_1+a_2, g_1 = b_0+b_1+b_2)$.

در هر حالت با استفاده از تعریف I، نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

ادعای ۲: هرگاه $f, g \in A$ و $fg \in I$ و $r \in A$، آنگاه: $frg \in I$.

اثبات ادعای ۲: چون $f, g \in A$، پس عناصر $f_1, g_1, r_1 \in H_1$ و $f_2, g_2, r_2 \in H_2$ و $f_3, g_3, r_3 \in H_3$ و $f_4, g_4, r_4 \in I$ وجود دارند به‌طوری که $f = f_1+f_2+f_3+f_4$ و $g = g_1+g_2+g_3+g_4$ و $r = r_1+r_2+r_3+r_4$. چون برای هر $i \geq 4$، $H_i \subseteq I$ ، پس $h \in I$ وجود دارد که $frg = f_1r_1g_1+h$. از این‌که I همگن است و $fg \in I$، نتیجه می‌گیریم $f_1g_1 \in I$. بنابر ادعای (۱)، $f_1r_1g_1 \in I$ و لذا $frg \in I$.

برای هر $r \in \mathbb{Z}_2+A$ و $y, z \in \mathbb{Z}_2+A$ اگر $yz \in I$ نتیجه دهد $yrz \in I$ ، آنگاه R خاصیت IFP دارد. قرار می‌دهیم: $y = \alpha+y'$ و $z = \beta+z'$ ، که $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ و $y', z' \in A$. چون $\alpha\beta+\alpha z'+y'\beta+y'z' = yz \in I$ ، پس $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$. اگر $\alpha = 0$، آنگاه $y'\beta+y'z' \in I$. اگر $\beta \neq 0$ ، از این‌که $\beta \in \mathbb{Z}_2$ و I همگن است نتیجه می‌گیریم $y' \in I$ و لذا برای هر $r \in \mathbb{Z}_2+A$ ، $yrz = y'rz \in I$. اگر $\beta = 0$ ، آنگاه $y'z' \in I$ و لذا برای هر $r \in \mathbb{Z}_2+A$ ، $yrz = y'rz' \in I$. به این ترتیب ثابت شد R خاصیت IFP دارد.

ملاحظه ۳.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *$R[x]$ دارای خاصیت IFP است.*

۲. *حلقه‌ی $x^nR[x]$ برای تمام $n \geq 1$ دارای خاصیت IFP است.*

۳. *حلقه‌ی $M + x^nR[x]$ برای تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال M از R و هر $n \geq 1$ دارای خاصیت IFP است.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۳): قرار می‌دهیم: $R' = M + x^nR[x]$. حال دو عنصر a' و b' را از R' در نظر می گیریم به‌طوری‌که $a'b' = 0$. باید نشان دهیم برای هر $r' \in R'$ داریم: $a'r'b' = 0$. از آن‌جا که $R[x]$

دارای خاصیت IFP است و $a'b' = ۰ \in R[x]$ لذا، $a'R[x]b' = ۰$. بنابراین $a'R'b' = ۰$ در نتیجه برای هر $r' \in R'$، $a'r'b' = ۰$. از این‌رو $R' = M + x^n R[x]$ دارای خاصیت IFP است.
(۳) $\Leftarrow$ (۲): مشابه حالت قبل اثبات می‌شود.
(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم شرط ذکر شده در (۲) برقرار باشد. برای $f(x), g(x) \in R[x]$ ، فرض کنیم $f(x)g(x) = ۰$. پس $(x^n f(x))(x^n g(x)) = ۰$. از آنجایی که $x^n R[x]$ دارای خاصیت IFP است، برای تمام $h(x) \in R[x]$ ، داریم: $(x^n f(x))(x^n h(x))(x^n g(x)) = ۰$. نتیجه می‌گیریم که $f(x)h(x)g(x) = ۰$. از این رو $R[x]$ دارای خاصیت IFP است. $\square$

یک سوال طبیعی این است که اگر برای هر ایده‌آل سره و ناصفر I از حلقه‌ی R، حلقه‌های I و R/I خاصیت IFP داشته باشند، آیا R خاصیت IFP دارد؟ (I حلقه‌ی فاقد یک درنظر گرفته شده است). مثال زیر به این سوال پاسخ منفی می‌دهد.

مثال ۴.۱.۲. فرض کنیم F یک حلقه‌ی تقسیم باشد و $R = \begin{pmatrix} F & F \\ ۰ & F \end{pmatrix}$. در این صورت R خاصیت IFP ندارد. واضح است که $\begin{pmatrix} F & F \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۰ & F \\ ۰ & F \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۰ & F \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ تنها ایده‌آل‌های سره ناصفر R هستند. اگر $I = \begin{pmatrix} F & F \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ ، آنگاه $R/I \cong F$ و لذا R/I خاصیت IFP دارد. فرض کنیم $\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = ۰$. در نتیجه $ac = ۰ = ad$. اگر $a = ۰$، آنگاه برای هر $e, f \in F$، $\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = ۰$. اگر $a \neq ۰$، آنگاه $c = d = ۰$ و لذا برای هر $e, f \in F$، $\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = ۰$. بنابراین I خاصیت IFP دارد. اگر $J = \begin{pmatrix} ۰ & F \\ ۰ & F \end{pmatrix}$ ، با چنین استدلالی می‌توان نشان داد حلقه‌های J و R/J خاصیت IFP دارند. حال فرض کنیم $K = \begin{pmatrix} ۰ & F \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$. در نتیجه $R/K \cong F \oplus F$ و لذا R/K خاصیت IFP دارد. از $K^۲ = ۰$ نتیجه می‌گیریم K نیز خاصیت IFP دارد.

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد اگر R/I خاصیت IFP داشته باشد و I حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد، آنگاه R خاصیت IFP دارد.*

برهان. فرض کنیم $a, b \in R$ و $ab = ۰$. در نتیجه $aRb \subseteq I$ و چون I تقلیل‌یافته است، پس $(bIa) \subseteq I$ و $(bIa)^۲ = ۰$. بنابراین $bIa = ۰$. در نتیجه، $((aRb)I)^۲ = aRbIaRbI = aR(bIa)RbI = ۰$ و لذا $aRbI = ۰$. از این‌که $(aRb)^۲ \subseteq aRbI$ ، نتیجه می‌گیریم $(aRb)^۲ = ۰$ و چون $aRb \subseteq I$ ، ازاین‌رو $aRb = ۰$. به این ترتیب ثابت شد که R خاصیت IFP دارد. $\square$

فرض کنیم R یک حلقه‌ی منظم باشد. طبق [۱۰ ، قضیه ۳,۲] R تقلیل‌یافته است اگر وتنها اگر R دارای خاصیت IFP باشد، اگر و تنها اگر R آبلی باشد.

۲.۲ حلقه‌های آرمنداریز

فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد و $f(x)$ و $g(x)$ دو عضو از $R[x]$ باشند. آرمنداریز [۴، لم۱] ، نشان داد که اگر $fg=0$، آن‌گاه برای هر $a\in C_f$ و هر $b\in C_g$ ، $ab=0$. چاچاریا [3] و رگه [4] [۲۳] ، حلقه‌ای که در خاصیت فوق صدق کند را حلقه‌ی آرمنداریز نامیدند.

تعریف ۱.۲.۲. حلقه‌ی R را آرمنداریز می‌نامیم هرگاه $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ و $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$ ، آن‌گاه برای هر j,i، $a_ib_j=0$.

لم ۲.۲.۲. *هر حلقه‌ی تقلیل یافته، آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. با استفاده از استقرا روی $m+n$ لم را ثابت می‌کنیم. اگر $m+n=1$ ، آن‌گاه نتیجه حاصل است. فرض کنیم $m+n>1$ و $a_m\neq 0\neq b_n$. چون $f(x)g(x)=0$ و R تقلیل یافته است، پس $b_na_m=a_mb_n=0$. در نتیجه $0=(\sum_{i=0}^{m-1}b_na_ix^i)(\sum_{j=0}^{n}b_jx^j)=b_nf(x)g(x)$ و با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $0\leq i\leq m-1$ و $0\leq j\leq n$ ، $b_na_ib_j=0$ و چون R تقلیل یافته است، از این رو برای هر $0\leq i\leq m-1$ ، $a_ib_n=0=b_na_i$. پس $(\sum_{i=0}^{m}a_ix^i)(\sum_{j=0}^{n-1}b_jx^j)=0$ و با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n-1$ ، $a_ib_j=0$. □

گزاره ۳.۲.۲. *اگر حلقه‌ی R آرمنداریز و خاصیت IFP داشته باشد، آن‌گاه $R[x]$ خاصیت IFP دارد.*

برهان. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از حلقه‌ِی $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x)=0$. چون R آرمنداریز است، برای هر j,i، $a_ib_j=0$. فرض کنیم $h(x)=\sum_{k=0}^{t}c_kx^k$ عضو دلخواهی از $R[x]$ باشد. چون R خاصیت IFP دارد و $a_ib_j=0$ ، پس برای هر k,j,i، $a_ic_kb_j=0$. بنابراین $f(x)h(x)g(x)=0$. □

لم ۴.۲.۲. *هرگاه R یک حلقه باشد و $u,v\in R$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $u^2=0=v^2$ و $uv=vu\neq 0$ ، آن‌گاه R آرمنداریز نیست.*

برهان. چون $(u+vx)(u-vx)=0$ ، اما $uv\neq 0$، پس R آمنداریز نیست. □

[3] Chhawchharia

[4] Rege

قضیه ۵.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر توسیع بدیهی $T(R,R)$ آرمندا ریز باشد آن‌گاه، R تقلیل‌یافته است.*

برهان. فرض کنیم R تقلیل‌یافته نباشد. عنصر ناصفر $u \in R$ وجود دارد که $u^{۲} = \circ$. چون $T(R,R) \cong \left\{ rI + xe_{۱۲} \in M_{۲}(R) \middle| r, x \in R \right\}$ ، لذا کافی است نشان دهیم حلقه‌ی S آرمندا ریز نیست.

$$S = \left\{ rI + xe_{۱۲} \in M_{۲}(R) \middle| r, x \in R \right\}$$

(هر E_{ij} نمایانگر ماتریس واحد و I ماتریس همانی است). اگر $v = e_{۱۲}$ ، آن‌گاه: $u^{۲} = \circ = v^{۲}$ و $uv = vu \neq \circ$. در نتیجه بنابر لم ۴.۲.۲، S آرمندا ریز نیست. □

مثال ۶.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq ۲$. در این صورت حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R آرمندا ریز نیست.

حل: چون هر زیرحلقه‌ای از حلقه‌های آرمندا ریز، آرمندا ریز است، لذا کافی است نشان دهیم حلقه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ بالا مثلثی روی R آرمندا ریز نیست. فرض کنیم $S = UD_{۲}(R)$. دو عنصر

$$f(x) = \begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} x$$

و

$$g(x) = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} x$$

را از $S[x]$ را در نظر می‌گیریم. چون $f(x)g(x) = \circ$ ، اما $\begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} \neq \circ$ ، پس S آرمندا ریز نیست. بنابراین $UD_n(R)$ آرمندا ریز نیست.

گزاره‌ی بعد نشان می‌دهد که ممکن است بتوان زیرحلقه‌هایی آرمندا ریز از حلقه‌ی ماتریس‌های ۳×۳ بالا مثلثی پیدا نمود.

گزاره ۷.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد. در این صورت حلقه‌ی زیر آرمندا ریز است.*

$$D_{۳}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \circ & a & d \\ \circ & \circ & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$$

برهان. توجه داریم که هر عنصر از $D_{۳}(R)$ را می‌توان به فرم (a,b,c,d) نیز نشان داد. پس برای هر $(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱), (a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) \in D_{۳}(R)$ می‌توان جمع و ضرب را چنین تعریف نمود:

$$(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱) + (a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) = (a_۱ + a_۲, b_۱ + b_۲, c_۱ + c_۲, d_۱ + d_۲)$$

و

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2, a_1d_2 + d_1a_2).$$

در نتیجه هر چندجمله‌ای از $D_3(R)[x]$ را می‌توان به شکل $(p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ نشان داد که برای هر i، $p_i(x) \in R[x]$. فرض کنیم

$$f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x))$$

و

$$g(x) = (g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x))$$

دو عضو از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = 0$. در نتیجه:

$$f(x)g(x) = (f_0(x)g_0(x), f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x), f_0(x)g_2(x) + f_(x)g_2(x) +$$
$$f_2(x)g_0(x), f_0(x)g_3(x) + f_3(x)g_0(x)) = 0$$

پس:

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \tag{1}$$

$$f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) = 0 \tag{2}$$

$$f_0(x)g_2(x) + f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_0(x) = 0 \tag{3}$$

$$f_0(x)g_3(x) + f_3(x)g_0(x) = 0 \tag{4}$$

از این‌که $R[x]$ تقلیل‌یافته است استفاده می‌کنیم، بدون این‌که آن را ذکر کنیم. از (۱) نتیجه می‌گیریم: $g_0(x)f_0(x) = 0$. اگر $f_0(x)$ را از راست در (۲) ضرب کنیم، آن‌گاه: $f_0(x)g_1(x) = 0$ و لذا $f_1(x)g_0(x) = 0$. همچنین اگر $f_0(x)$ را از راست در (۴) ضرب کنیم، نتیجه می‌گیریم: $f_0(x)g_3(x) = 0$ و لذا $f_3(x)g_0(x) = 0$. حال اگر $f_0(x)$ را از راست در (۳) ضرب کنیم، آن‌گاه: $f_0(x)g_2(x) = 0$ و از این‌رو:

$$f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_0(x) = 0 \tag{5}$$

اگر $f_1(x)$ را از راست در (۵) ضرب کنیم آن‌گاه: $f_1(x)g_2(x) = 0$ و لذا $f_2(x)g_0(x) = 0$. قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} x^i$$

و

$$g(x)=\sum_{j=\circ}^{m}\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j\\ \circ & a'_j & d'_j\\ \circ & \circ & a'_j\end{pmatrix}x^j$$

، به‌طوری‌که

$$f_\circ(x)=\sum_{i=\circ}^{n}a_ix^i\ ،\ f_۱(x)=\sum_{i=\circ}^{n}b_ix^i\ ،\ f_۲(x)=\sum_{i=\circ}^{n}c_ix^i\quad f_۳(x)=\sum_{i=\circ}^{n}d_ix^i$$

$$g_\circ(x)=\sum_{j=\circ}^{m}a'_jx^j\ ،\ g_۱(x)=\sum_{j=\circ}^{m}b'_jx^j\ ،\ g_۲(x)=\sum_{j=\circ}^{m}c'_jx^j\ ،\ g_۳(x)=\sum_{j=\circ}^{m}d'_jx^j.$$

پس برای هر j, i،

$a_ia'_j=\circ$ ، $a_ib'_j=\circ$ ، $b_ia'_j=\circ$ $a_ic'_j=\circ$ ، $b_id'_j=\circ$ ، $c_ia'_j=\circ$ ، $a_id'_j=\circ$ ، $d_ia'_j=\circ$.

بنابراین برای هر j, i، $\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i\\ \circ & a_i & d_i\\ \circ & \circ & a_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j\\ \circ & a'_j & d'_j\\ \circ & \circ & a'_j\end{pmatrix}=\circ$ و لذا S آرمنداریز است. □

فرض کنیم R حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد. با توجه به گزاره‌ی ۷.۲.۲، ممکن است حدس بزنیم برای هر $n\geq ۴$، $D_n(R)$، آرمنداریز نیست. مثال زیر نشان می‌دهد که این حدس درست نیست.

مثال ۸.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $D_۴(R)$ آرمنداریز نیست.

حل: چندجمله‌ای‌های

$$f(x)=\begin{pmatrix} \circ & ۱ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \circ & ۱ & -۱ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{pmatrix}x$$

و

$$g(x)=\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & ۱\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \circ & ۱ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{pmatrix}x$$

از حلقه‌ی $D_۴(R)[x]$ را در نظر می‌گیریم. چون $f(x)g(x)=\circ$. اما

$$\begin{pmatrix} \circ & ۱ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \circ & ۱ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{pmatrix}\neq\circ,$$

پس $D_۴(R)$ آرمنداریز نیست. بنابراین برای هر $n\geq ۵$، $D_n(R)$ آرمنداریز نیست.

مثال ۹.۲.۲. فرض کنیم R تقلیل‌یافته باشد. در این صورت $D_2(D_2(R))$ آرمندا ریز نیست.

حل: چندجمله‌ای‌های

$$f(x)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}x$$

و

$$g(x)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}x$$

از حلقه‌ی $D_2(D_2(R))[x]$ را در نظر می‌گیریم. چون $f(x)g(x)=0$ ، اما

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\neq 0,$$

پس $D_2(D_2(R))$ آرمندا ریز نیست.

فرض کنیم حلقه‌ی R تقلیل‌یافته باشد. بنابر [۲۳، قضیه ۲,۳] توسیع بدیهی $T=T(R,R)$ آرمندا ریز است. توجه کنیم که $P(T)=\left\{\begin{pmatrix}0&r\\0&0\end{pmatrix}\middle| r\in R\right\}$ رادیکال اول حلقه‌ی T است. اگر $P(T)$ را حلقه‌ی فاقد یک در نظر بگیریم، آنگاه $P(T)$ نیز آرمندا ریز است و همچنین $R\cong\frac{T}{P(T)}$ تقلیل‌یافته لذا آرمندا ریز است.
بنابراین ممکن است حدس بزنیم که اگر حلقه‌ی R آبلی باشد و حلقه‌های $\frac{R}{P(R)}$ و $P(R)$ آرمندا ریز باشند، آنگاه R نیز آرمندا ریز است. اما مثال بعد نشان می‌دهد که این حدس درست نیست.

مثال ۱۰.۲.۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح باشد و

$$R=\left\{\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{Z}\ ,\ a-b\equiv c\equiv 0\ (mod 2)\right\}.$$

در این صورت حلقه‌های $\frac{R}{P(R)}$ و $P(R)$ آرمندا ریز هستند، اما R آرمندا ریز نیست.

حل: به‌وضوح $P(R)=\left\{\begin{pmatrix}0 & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big| c\in\mathbb{Z}\ ,\ c\equiv 0\ (mod 2)\right\}$ آرمنداریز است. چون $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ تنها خودتوان‌های R هستند، لذا R آبلی است. چون

$$\frac{R}{P(R)}=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\Big| a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ a-b\equiv 0\ (mod 2)\right\}\cong\left\{(a,b)\Big| a-b\equiv 0\ (mod 2)\right\}$$

و اگر $(a,b)^2=(a^2,b^2)=(0,0)$ ، آن‌گاه $a=0=b$ ، پس $\frac{R}{P(R)}$ تقلیل‌یافته است، بنابراین $\frac{R}{P(R)}$ آرمنداریز است.
حال نشان می‌دهیم R آرمنداریز نیست. چندجمله‌ای‌های

$$f(x)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}x$$

و

$$g(x)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}x$$

از حلقه‌ی $R[x]$ را در نظر می‌گیریم. چون $f(x)g(x)=0$ ، اما $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0$ ، پس R آرمنداریز نیست.

اگر برای هر ایده‌آل ناصفر I حلقه‌ی R/I آرمنداریز باشد، آیا R آرمنداریز است؟ مثال بعد به این سوال پاسخ منفی می‌دهد.

مثال ۱۱.۲.۲. فرض کنیم F یک میدان باشد و $R=\begin{pmatrix}F & F\\ 0 & F\end{pmatrix}$ ، هرگاه I ایده‌آلی ناصفر از R باشد آن‌گاه، R/I آرمنداریز است، اما R آرمنداریز نیست.

حل: بنابر مثال ۶.۲.۲، R آرمنداریز نیست. نشان می‌دهیم اگر I ایده‌آلی سره و ناصفر از R باشد آن‌گاه، R/I آرمنداریز است. توجه کنیم که $\begin{pmatrix}F & F\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}0 & F\\ 0 & F\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0 & F\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ تنها ایده‌آل‌های سره ناصفر R هستند. اگر $I=\begin{pmatrix}F & F\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ، آن‌گاه $R/I\cong F$ و لذا R/I آرمنداریز است. حال نشان می‌دهیم I آرمنداریز است. فرض کنیم $f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$ و $g(x)=\beta_0+\beta_1x+\cdots+\beta_mx^m$ دو عضو از $I[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. برای هر j,i، قرار می‌دهیم $\alpha_i=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و $\beta_j=\begin{pmatrix}c_j & d_j\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. فرض کنیم $\alpha_0\neq 0$ و $\beta_0\neq 0$. در نتیجه $a_0c_0=0=a_0d_0$. اگر $a_0\neq 0$

آن‌گاه $c_0 = d_0 = 0$ ، که یک تناقض است. بنابراین $a_0 = 0$ و لذا $b_0 \neq 0$. پس برای هر j، $\alpha_0\beta_j = 0$. در نتیجه $\alpha_1\beta_0$ ضریب x در $f(x)g(x)$ است و لذا $a_1c_0 = 0 = a_1d_0$. اگر $a_1 \neq 0$، آن‌گاه $d_0 = 0 = c_0$، که یک تناقض است. در نتیجه برای هر j، $\alpha_1\beta_j = 0$. با ادامه‌ی این روند می‌توان نشان داد برای هر j, i، $\alpha_i\beta_j = 0$. بنابراین I آرمنداریز است.

اگر $J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ، آن‌گاه $R/J \cong F$ و لذا R/J آرمنداریز است. با استدلالی مشابه پاراگراف قبل می‌توان نشان داد j نیز آرمنداریز است.

اگر $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، آن‌گاه $R/K \cong F \oplus F$ و لذا R/K نیز آرمنداریز است. چون $K^2 = 0$، پس K نیز آرمنداریز است.

فرض کنیم A یک خاصیت از حلقه‌ی R باشد. می‌گوییم A یک خاصیت موریتا پایااست هرگاه برای هر خودتوان $e \in R$، حلقه‌های eRe و $M_n(R)$ خاصیت A را داشته‌باشند.بنابر مثال ۶.۲.۲، حلقه‌ی ماتریسی $n \times n$ روی R آرمنداریز نیست. بنابراین خاصیت آرمنداریز یک خاصیت موریتا پایا نیست. ممکن است حدس بزنیم که اگر برای هر خودتوان غیربدیهی e، حلقه‌ی eRe آرمنداریز باشد، آنگاه R آرمنداریز است. اما مثال بعد نشان می‌دهد که این حدس درست نیست.

مثال ۱۲.۲.۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}_۲$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۲ باشد و $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_۲ & \mathbb{Z}_۲ \\ ۰ & \mathbb{Z}_۲ \end{pmatrix}$. بنابر مثال ۶.۲.۲، R آرمنداریز نیست. توجه داریم که $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ تمام خودتوان‌های غیربدیهی R هستند و اگر e هرکدام از این خودتوان‌ها باشد، آنگاه $eRe \cong \mathbb{Z}_۲$ آرمنداریز است.

لم ۱۳.۲.۲. *فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $a, b, c \in R$.*

۱. *هرگاه n عدد صحیح و مثبت باشد و $ac^nb = ۰$ ، آن‌گاه $acb = ۰$.*

۲. *هرگاه $ab = ۰$ و برای هر عدد صحیح و مثبت n، c^n مرکزی باشد، آن‌گاه $acb = ۰$.*

برهان. (۱) چند جمله‌ای‌های $f(x) = a(۱ - cx)$ و $g(x) = (۱ + cx + ... + c_{n-۱}x^{n-۱})b$ را در نظر می گیریم. چون R آرمنداریز است و $f(x)g(x) = ۰$ ، پس $acb = ۰$.
(۲) چون $ac^nb = ۰$، لذا با استفاده از (۱) نتیجه حاصل است. □

نتیجه ۱۴.۲.۲. *هر حلقه‌ی آرمنداریز، آبلی است.*

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $e = e^۲ \in R$ و $r \in R$. قرار می‌دهیم: $a = e$، $b = ۱ - e$ و $c = er(۱ - e)$. در نتیجه $ab = ۰$ و $c^۲ = ۰$ و لذا بنابر لم ۱۳.۲.۲، $ac^۲b = ۰$ ، بنابراین

$$acb = ۰ \to e(er(۱ - e))(۱ - e) = ۰ \to er(۱ - e) = ۰ \to er - ere = ۰ \to er = ere$$

به همین نحو، اگر $a_۱ = ۱ - e$ ، $b_۱ = e$ و $c_۱ = (۱ - e)re$ ، آنگاه به طور مشابه $a_۱c_۱b_۱ = ۰$ و لذا $re = ere$ ، بنابراین e مرکزی است. □

در مثال ۱۱.۲.۲، نشان‌داده‌شد که حلقه‌ی R وجود دارد به‌طوری‌که برای هر ایده‌آل سره I، حلقه‌های R/I و I آرمنداریز هستند، اما R آرمنداریز نیست.(I حلقه‌ی فاقد یک در نظر گرفته شده است.)

قضیه ۱۵.۲.۲. *فرض کنیم I ایده‌آلی سره از حلقه‌ی I باشد. اگر حلقه‌ی R تقلیل‌یافته و R/I آرمنداریز باشد، آن‌گاه، R آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم $a,b\in R$ و $ab=0$. چون I تقلیل‌یافته است و $bIa\subseteq I$ و $(bIa)^2=0$ ، پس $bIa=0$. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. چون R/I آرمنداریز است، پس برای هر j,i، $a_ib_j\in I$. از استقرا روی m استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم برای هر j,i، $a_ib_j=0$. برای $m=0$ نتیجه بوضوح حاصل است. فرض کنیم $m>0$. ادعا می‌کنیم برای هر $j\in\{0,1,\cdots,n\}$ ، $a_0b_j=0$. فرض کنیم $1\leq k<m$ و برای هر $j\in\{0,\cdots,k-1\}$ ، $a_0b_j=0$. در نتیجه: $b_jIa_0=0$ و از این‌رو:

$$(a_{k-j}b_j)(a_0b_k)^2=a_{k-j}b_j(a_0b_k)a_0b_k\in a_{k-j}b_jIa_0b_k=a_{k-j}(b_jIa_0)b_k=0.$$

عنصر $\sum_{j=0}^{k-1}a_{k-j}b_j$ a_0b_k+ $=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0=0$ ضریب x^k در چندجمله‌ای $f(x)g(x)=0$ است. اگر $(a_0b_k)^2$ را از راست در ضریب x^k ضرب کنیم آن‌گاه،

$$0=(a_0b_k+\sum_{j=0}^{k-1}a_{k-j}b_j)(a_0b_k)^2=(a_0b_k)^3.$$

چون I تقلیل‌یافته است و $a_0b_k\in I$ ، از این‌رو $a_0b_k=0$. در نتیجه برای هر $j\in\{0,1,\cdots,n\}$ ، $a_0b_j=0$ و لذا $f_1(x)g(x)=0$ ، که $f_1(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_mx^{m-1}$. چون $deg(f_1(x))<m$، با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $1\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n$ ، $a_ib_j=0$. بنابراین برای هر j,i، $a_ib_j=0$. □

با توجه به دو مثال ذکر شده در زیر می‌توان مشاهده کرد که مفاهیم IFP و آرمنداریز، مستقل از یکدیگر می‌باشند.

مثال ۱۶.۲.۲. حلقه‌ی جابجایی $\frac{Z}{8Z}\oplus\frac{Z}{8Z}$ آرمنداریز نیست.

حل: برای حل این مثال ابتدا باید نکته‌ی زیر را بیان کنیم.

نکته: فرض کنیم α درونریختی از حلقه‌ی جابجایی R باشد و M یک $R-$ مدول باشد. روی $R\oplus M$ عمل ضرب را چنین تعریف می‌کنیم: برای هر $(a,m),(b,n)\in R\oplus M$،

$$(a,m)(b,n)=(ab,\alpha(a)n+bm).$$

که $R\oplus M$ یک حلقه است و آن را با علامت $R\oplus_\alpha M$ نشان می‌دهیم.

می‌دانیم $\frac{Z}{8Z}=Z_8=\{\bar{0},\bar{1},...,\bar{7}\}$ و عناصر حلقه‌ی $\frac{Z}{8Z}\oplus\frac{Z}{8Z}$ به صورت زوج مرتب می‌باشند. چندجمله‌ای $f(x)=(\bar{4},\bar{0})+(\bar{4},\bar{1})x=g(x)$ از حلقه‌ی $(\frac{Z}{8Z}\oplus\frac{Z}{8Z})[x]$ را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف حلقه‌ی آرمنداریز داریم:

$$f(x)g(x)=\Big((\bar{4},\bar{0})+(\bar{4},\bar{1})x\Big)\Big((\bar{4},\bar{0})+(\bar{4},\bar{1})x\Big)=0$$

اما $(\bar{4},\bar{0})(\bar{4},\bar{1})=(\bar{16},\bar{4})=(\bar{0},\bar{4})\neq 0$ ، که نشان می‌دهد حلقه‌ی فوق آرمنداریز نیست.

بنابر مثال ۱۶.۲.۲ ، حلقه‌ی جابجایی (لذا IFP) وجود دارد که آرمنداریز نیست. حال نشان می‌دهیم حلقه‌ای آرمنداریز وجو دارد که خاصیت IFP ندارد.

مثال ۱۷.۲.۲. فرض کنیم F یک میدان و $A = F\langle a, b, c\rangle$ ، $F-$ جبر آزاد تولید شده به وسیله‌ی متغیرهای تعویض ناپذیر c, b, a باشد که جمله‌ی ثابت تمام عناصر آن صفر است. A یکدار نیست. ایده‌آلی از $F + A$ را که به وسیله‌ی عناصر cc, ac و crc تولید می‌شود با I نشان می‌دهیم $(r \in A)$. قرار می‌دهیم $R = F + A/I$. چون $ac \in I$، اما $abc \notin I$، پس R خاصیت IFP ندارد. $F-$ فضای برداری تولید شده به وسیله‌ی تمام تک جمله‌ای‌هایی از A که دقیقاً شامل یک نسخه از c هستند را با I_1 نشان می‌دهیم. همچنین $F-$ جبر آزاد تولید شده به وسیله‌ی متغیرهای تعویض ناپذیر b, a روی F که جمله‌ی ثابت صفر دارند را با $I_2 = F\langle a, b\rangle$ نشان می‌دهیم. واضح است که $A = I + I_1 + I_2$. نشان می‌دهیم R آرمنداریز است. در ادامه $A[x]$ ، $I[x]$، $I_1[x]$ و $I_2[x]$ نمایانگر حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها به ترتیب روی A, I, I_1 و I_2 هستند.

ادعا: فرض کنیم $f(x), g(x) \in A[x]$ و $f(x)g(x) \in I[x]$. در این صورت:

۱. اگر $f(x) \notin I[x]$ ، آنگاه $f(x) \in I_1[x] + I[x]$ و $g(x) \in I_2[x] + I[x]$.

۲. اگر $g(x) \notin I[x]$ ، آنگاه $f(x) \in I_1[x] + I[x] + I_2[x]$ و $g(x) \in cI_2[x] + I[x]$

اثبات ادعا: عناصر $f_1, g_1 \in I_1[x]$ و $f_2, g_2 \in I_2[x]$ و $f_3, g_3 \in I_3[x]$ وجود دارند به طوری که $f(x) = f_1 + f_2 + f_3$ و $g(x) = g_1 + g_2 + g_3$. پس، $(f_1 + f_2)(g_1 + g_2) \in I[x]$ و لذا $(f_1 + f_2)(g_1 + g_2) \in I[x] + I_1[x]$. چون $f_1g_1 + f_1g_2 + f_2g_1 \in I[x] + I_1[x]$ ، پس $f_2g_2 \in I_2[x]$. از این که $f_2g_2 \in I_2[x]$ ، نتیجه می‌گیریم $f_2g_2 = 0$ و لذا $f_2 = 0$ یا $g_2 = 0$. اگر $f_2 = 0$، آنگاه از $f_1g_1, f_1(g_1 + g_2) \in I[x]$ نتیجه میگیریم $f_1g_2 \in I[x]$. در نتیجه $f_1g_2 = 0$ و از این رو $f_1 = 0$ یا $g_2 = 0$. به این ترتیب نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید.
حال فرض کنیم $g_2 = 0$. چون $f_2g_1, (f_1 + f_2)g_1 \in I[x]$ ، پس $f_1g_1 \in I[x]$. تابع یک به یکی از مجموعه‌ی تمام تک جمله‌ای‌های حلقه‌ی I_2 به مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت وجود دارد به طوری که a را به ۱ و b را به ۲ تصویر می‌کند و لذا این تابع مجموعه‌ی تمام تک جمله‌ای‌های حلقه‌ی I_2 را به یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب تبدیل می‌کند. برای مثال، $b < aa < ab$ ، زیرا ۱۲ > ۱۱ > ۲.
همچین تابعی یک به یک از مجموعه‌ی تمام تک جمله‌ای‌های $F-$ فضای برداری I_1 به میدان اعداد گویا وجود دارد به طوری که c, b, a را به ترتیب ۱، ۲ و ۰/۰ تصویر می‌کند و لذا این تابع مجموعه‌ی تمام تک جمله‌ای‌های $F-$ فضای برداری I_1 را به یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب تبدیل می‌کند. برای مثال، $cbbbbbb < acab < bc$. زیرا، ۲۰/۰ > ۱۰/۰۱۲ > ۰/۰۲۲۲۲۲۲. تک جمله‌ای‌های h_i و t_j و عناصر l_j و k_i از $F[x]$ وجود دارند به طوری که $f_2 = \sum_{i=1}^{M} h_ik_i$ و $g_1 = \sum_{j=1}^{N} t_jl_j$. می‌توان فرض نمود اگر $i_\alpha \neq i_\beta$ ، آنگاه $h_{i_\alpha} \neq h_{i_\beta}$ و اگر $j_\delta \neq j_\gamma$ ، آنگاه $t_{j_\delta} \neq t_{j_\gamma}$. فرض کنیم $h_{i.}$ بزرگتر از سایر h_i ها و $t_{j.}$ بزرگتر از سایر t_j ها باشد. چون $f_2g_1 = (\sum_{i=1}^{M} h_ik_i)(\sum_{j=1}^{N} t_jl_j) = \sum_{i=1,\dots,M, j=1,\dots,N} h_it_jk_il_j$

و $f_2g_1 \in I[x]$ و $h_{i.}t_{j.}$ بزرگتر از سایر h_it_j هاست، بنابر خواص I باید $h_{i.}t_{j.}k_{i.}l_{j.} \in I[x]$ و در نتیجه $h_{i.}t_{j.} \in I$. چون $ac \in I$ و $h_{i.} \in I$ ، پس $t_{j.}$ با c شروع می‌شود و از این که $t_{j.}$ بزرگترین است، پس سایر t_i ها نیز باید با c شروع شوندو در نتیجه $g' \in I_2[x]$ وجود دارد که $g_1 = cg'$. چون $f_2 = f'a + f''b$ ، که $f', f'' \in I_2[x]$ ، پس از $f_2g_1 \in I[x]$ نتیجه می‌گیریم $f''bcg' \in I[x]$ و از این رو $f''bcg' = 0$. بنابراین $f'' = 0$ یا $g' = 0$، و به این ترتیب اثبات ادعا کامل می‌شود.

حال فرض کنیم $y(x), z(x) \in (F+A)[x]$ و $y(x)z(x) \in I[x]$. فرض کنیم $y(x) = y_1 + y_2$ و $z(x) = z_1 + z_2$ ، که $y_1, z_1 \in F[x]$ و $y_2, z_2 \in A[x]$. در نتیجه:

$y(x)z(x) = (y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2 \in I[x]$ و با استفاده از خواص I نتیجه می‌گیریم $y_1z_1 = 0$ و $y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2 \in I[x]$. پس $y_1 = 0$ یا $z_1 = 0$. فرض کنیم $y_1 = 0$. از این که $y_2z_1 + y_2z_2 \in I[x]$ و $z_1 \in F[x]$ ، نتیجه می‌گیریم $y_2z_1, y_2z_2 \in I[x]$. اگر $z_2 \neq 0$ ، آن‌گاه با استفاده از خواص I نتیجه می‌گیریم $y_2 \in I[x]$ و لذا حاصلضرب ضرایب $y(x)$ و $z(x)$ نیز در I قرار دارند. اگر $z_1 = 0$ ، آن‌گاه $y_2z_2 \in I[x]$ و با استفاده از ادعای ثابت شده، همان نتایج حاصل می‌شوند.

برای حالت $z_1 = 0$ به همین نحو می‌توان نتیجه‌ی مورد نظر را به دست آورد.بنابراین R آرمنداریز است.

فصل ۳

حلقه‌های برگشت‌پذیر و توسیع‌هایی از آن‌ها

۱.۳ حلقه‌های برگشت‌پذیر و توسیع‌هایی از آن‌ها

حلقه‌ی R را برگشت‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای $a, b \in R$، $ab = 0$ نتیجه دهد $ba = 0$. ما در این فصل بررسی‌هایی که توسط کن [۱] [۷] در رابطه با حلقه‌های برگشت‌پذیر انجام شده است را بیان می‌کنیم. ابتدا خواص و توسیع‌های مربوط به حلقه‌های برگشت‌پذیر به‌انضمام مثال‌های مورد نیاز را در نظر می‌گیریم و سپس نشان می‌دهیم که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر نیازی نیست برگشت‌پذیر باشند و علاوه بر این نشان می‌دهیم اگر R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد سپس $R[x]/\langle x^n \rangle$ برگشت‌پذیر است، که $\langle x^n \rangle$ ایده‌آل تولیدشده توسط x^n و n یک عدد صحیح مثبت است.
به‌سبب لمبک [۲] [۲۰] ، ایده‌آل A از حلقه‌ی R متقارن است اگر برای $r, s, t \in R$، $rst \in A$ نتیجه دهد $rts \in A$ ، بنابراین حلقه‌ی R متقارن است اگر برای $r, s, t \in R$، $rst = 0$ نتیجه دهد $rts = 0$.
بوضوح طبق [۳ ، قضیه ۳] ، حلقه‌های متقارن برگشت‌پذیر هستند و حلقه‌های برگشت‌پذیر دارای خاصیت IFP می‌باشند. حال در این قسمت ما خواص مربوط به حلقه‌های برگشت‌پذیر و حلقه‌های IFP را مشاهده می‌کنیم و برخی از توسیع‌های مربوط به آن‌ها را مطالعه خواهیم کرد.

لم ۱.۱.۳. *گزاره‌های زیر روی حلقه‌ی R معادلند:*

۱. *هر پوچساز راست روی R یک ایده‌آل از R است.*

۲. *هر پوچساز چپ روی R یک ایده‌آل از R است.*

۳. *برای هر $a, b \in R$، $ab = 0$ نتیجه دهد $aRb = 0$. (R دارای خاصیت IFP است.)*

---
[۱] Cohn
[۲] Lambek

گزاره ۲.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد، در این صورت حلقه‌ی زیر دارای خاصیت IFP است.*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$$

برهان. ابتدا باید توجه کنیم که برای دو عنصر

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

از S جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

و

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2, a_1d_2 + d_1a_2).$$

فرض کنیم $(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = 0$. در نتیجه:

$$a_1a_2 = 0 \tag{1}$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \tag{2}$$

$$a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0 \tag{3}$$

$$a_1d_2 + d_1a_2 = 0 \tag{4}$$

از شرط تقلیل‌یافته بودن R و این‌که حلقه‌های تقلیل‌یافته دارای خاصیت IFP هستند استفاده می‌کنیم. محاسبات زیر بر اساس لم ۱.۱.۳، به دست می‌آیند. از معادله‌ی (۱) داریم: $a_1Ra_2 = 0$. با ضرب a_2 از سمت راست در معادله‌ی (۲) داریم: $b_1a_2a_2 = a_1b_2a_2 + b_1a_2a_2 = 0$ و لذا $b_1a_2 = 0$، از این‌رو $b_1Ra_2 = 0$ و سپس $a_1b_2 = 0$ نتیجه می‌دهد، $a_1Rb_2 = 0$. به‌طور مشابه از معادله‌ی (۴) داریم: $d_1Ra_2 = 0$ و $a_1Rd_2 = 0$. حال با ضرب a_2 از سمت راست در معادله‌ی (۳) داریم: $c_1a_2a_2 = a_1c_2a_2 + b_1d_2a_2 + c_1a_2a_2 = 0$ و لذا $c_1a_2 = 0$. از این‌رو $c_1Ra_2 = 0$ و لذا معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$a_1c_2 + b_1d_2 = 0 \tag{5}$$

با ضرب a_1 از سمت راست در (۵) داریم: $a_1c_2a_1 = a_1c_2a_1 + b_1d_2a_1 = 0$ زیرا $a_1d_2 = 0$ نتیجه می‌دهد $d_2a_1 = 0$. از این‌رو $a_1Rc_2 = 0$ و در نتیجه $b_1d_2 = 0$ نتیجه می‌دهد $b_1Rd_2 = 0$. حال طبق نتایج قبل برای عناصر $u, t, s, r \in R$ داریم:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(r, s, t, u)(a_2, b_2, c_2, d_2)$$

$$= (a_1ra_2, a_1rb_2 + a_1sa_2 + b_1ra_2, a_1rc_2 + a_1sd_2 + b_1rd_2 + a_1ta_2 + b_1ua_2$$
$$+c_1ra_2, a_1rd_2 + a_1ua_2 + d_1ra_2) = 0.$$

به تبع آن، برای هر $\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in S$ داریم:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

از این‌رو S دارای خاصیت IFP(نیم‌جابجایی) است. □

فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد حلقه‌ی جدید R_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in S \right\},$$

که در آن $n \geq 2$. براساس گزاره‌ی ۲.۱.۳، ممکن است حدس بزنیم که برای $n \geq 4$ حلقه‌ی R_n دارای خاصیت IFP است، اما مثال زیر نشان می‌دهد که این حدس درست نمی‌باشد.

مثال ۳.۱.۳. فرض کنیم S یک حلقه باشد و

$$R_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in S \right\}.$$

توجه داریم که،

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

اما داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

بنابراین طبق لم ۱.۱.۳، $R_۴$ دارای خاصیت IFP نمی‌باشد، و به‌طور مشابه برای $n \geq ۵$، R_n دارای خاصیت IFP نیست.

لم زیر توسط لمبک اثبات شده است که در ادامه آن را ذکر می‌کنیم.

لم ۴.۱.۳. *حلقه‌های برگشت‌پذیر دارای خاصیت IFP هستند.*

برهان. فرض کنیم برای $a, b \in R$، $ab = ۰$ در نتیجه $ba = ۰$. برای تمام $r \in R$ داریم $bar = ۰$، بنابراین طبق لم ۱.۱.۳، $arb = ۰$. از این رو R دارای خاصیت IFP است. □

طبق گزاره ۲.۱.۳، عکس لم ۴.۱.۳، در حالت کلی صحیح نمی‌باشد. مثال زیر این موضوع را برای ما روشن می‌سازد.

مثال ۵.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد. در نتیجه حلقه‌ی زیر طبق گزاره‌ی ۲.۱.۳، یک حلقه‌ی IFP است.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ ۰ & a & d \\ ۰ & ۰ & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}.$$

چون

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \neq ۰$$

اما

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = ۰.$$

پس S برگشت‌پذیر نیست.

گزاره ۶.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد. در این صورت $T(R, R)$ یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر است.*

برهان. فرض کنیم
$\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} \in T(R, R)$ به‌طوری‌که $\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} = ۰$. در نتیجه $ac = ۰ = ad + bc$. از آن‌جا که R تقلیل‌یافته است داریم:

$$(ca)^۲ = caca = c(۰)a = ۰$$

$$(ca)^۲ = ۰ \xrightarrow{\text{R، تقلیل‌یافته}} ca = ۰$$

و بنابراین

$$ac = ۰ \longrightarrow ca = ۰$$

$$c(ad+bc) = c(۰) \longrightarrow cad + cbc = ۰ \longrightarrow ۰ + cbc = ۰ \longrightarrow cbc = ۰$$

$$\xrightarrow{\times b} b(cbc) = b(۰) \longrightarrow bcbc = ۰ \longrightarrow (bc)^۲ = ۰ \xrightarrow{\text{R، تقلیل‌یافته}} bc = ۰$$

سپس $ad = ۰$. از این رو $cb = ۰ = ad$، در نتیجه: $\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix} = ۰$ $\square$

با در نظر گرفتن گزاره‌ی ۶.۱.۳، ممکن است حدس بزنیم که اگر حلقه‌ی R برگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه $T(R,R)$ برگشت‌پذیر است یا دارای خاصیت IFP می‌باشد. اما با توجه به مثال زیر این حدس درست نیست.

مثال ۷.۱.۳. فرض کنیم $\mathbb{H}$ حلقه‌ی چهارگان‌های همیلتنی روی میدان اعداد حقیقی و R توسیع بدیهی $\mathbb{H}$ توسط $\mathbb{H}$ باشد. طبق گزاره‌ی ۶.۱.۳، R برگشت‌پذیر است. حال فرض کنیم S توسیع بدیهی R توسط R باشد. توجه داریم که

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & i \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & ۰ \\ ۰ & j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & i \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} = ۰.$$

اما:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & i \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & ۰ \\ ۰ & j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & i \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} j & ۰ \\ ۰ & j \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & ۰ \\ ۰ & j \end{pmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

از این‌رو طبق لم ۱.۱.۳، $S = T(R,R)$ دارای خاصیت IFP نیست و طبق لم ۴.۱.۳، برگشت‌پذیر نمی‌باشد.

معادله‌های اساسی زیر را برای حلقه‌های برگشت‌پذیر خواهیم داشت.

لم ۸.۱.۳. *برای حلقه‌ی R گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. R *برگشت‌پذیر است.*

۲. *برای هر* $S \subseteq R$، $r_R(S) = l_R(S)$.

۳. *برای هر* $a \in R$، $l_R(a) = r_R(a)$.

۴. *برای هر دو زیرمجموعه‌ی ناتهی* B, A *از* R، $AB = \circ$ *نتیجه دهد* $BA = \circ$.

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲): برای $a \in R$ و $S \subseteq R$، $aS = \circ$ نتیجه می‌دهد $Sa = \circ$ ، و برعکس.
(۲) $\Leftarrow$ (۳) و (۴) $\Leftarrow$ (۱): واضح هستند.
(۳) $\Leftarrow$ (۴): فرض کنیم B, A دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از R باشند به‌طوری‌که، $AB = \circ$. در نتیجه برای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم: $ab = \circ$، بنابراین طبق شرط $ba = \circ$. از این‌رو $BA = \sum_{a\in A, b\in B} ba = \circ$. $\square$

در لم ۸.۱.۳ قسمت (۲)، به آسانی می‌توانیم از پوچسازها در حلقه‌های برگشت‌پذیر صحبت کنیم. در ادامه نتایج مستقیم از لم ۸.۱.۳ را مشاهده خواهیم کرد.

لم ۹.۱.۳. *کلاس حلقه‌های برگشت‌پذیر تحت زیرحلقه‌هایشان و حاصلضرب مستقیم بسته هستند.*

حلقه‌ی R را در نظر می‌گیریم و $P(R)$ را رادیکال اول حلقه‌ی R تعریف می‌کنیم. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد، سپس $T(R,R)$ طبق گزاره‌ی ۶.۱.۳، برگشت‌پذیر است. اما طبق مثال ۷.۱.۳، $T(R,R)$ زمانی که R برگشت‌پذیر است در حالت کلی برگشت‌پذیر نمی‌باشد. این وضعیت شرط ساده‌ای را برای حلقه‌های برگشت‌پذیر مانند زیر بیان می‌کند.

ملاحظه ۱۰.۱.۳. *فرض کنیم* R *یک حلقه باشد به‌طوری‌که* $P(R)^۲ = \circ$ *، و همچنین فرض کنیم برای هر زیرمجموعه‌ی* $\{a,b\}$ *از* R *به‌طوری‌که* $\{a,b\} \nsubseteq P(R)$*،* $ab = \circ$ *نتیجه دهد* $ba = \circ$*. برای* $a,b \in R$ *قرار می‌دهیم:* $ab = \circ$*. اگر* $\{a,b\} \nsubseteq P(R)$*، آن‌گاه طبق شرط داریم:* $ba = \circ$*. حال اگر* $\{a,b\} \subseteq P(R)$ *، آن‌گاه از آن‌جا که* $P(R)^۲ = \circ$ *نتیجه می‌گیریم* $ba = \circ$*. بنابراین* R *برگشت‌پذیر است.*

با توجه به مثال زیر، شرایط ذکر شده در ملاحظهِ‌ی ۱۰.۱.۳ ، زائد نمی‌باشند.

مثال ۱۱.۱.۳. (۱): شرط $P(R)^۲ = \circ$ ، شرط زائدی نیست. ممکن است که این نتیجه برای حالات دیگری از $P(R)^n$ ، زمانی که $n \geq ۳$، بسط داده نشود. فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقسیم باشد و

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \circ & a & d \\ \circ & \circ & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in S \right\}.$$

در نتیجه طبق گزاره‌ی ۲.۱.۳، حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است اما طبق مثال ۵.۱.۳، برگشت‌پذیر نمی‌باشد. توجه داریم،

$$P(R) = \begin{pmatrix} \circ & S & S \\ \circ & \circ & S \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix},$$

بنابراین $P(R)^{3} = 0$ اما $P(R)^{2} \neq 0$. حال $x, y \in R$ داده شده است. اگر $\{x,y\} \nsubseteq P(R)$ و $x \notin P(R)$ ، آن‌گاه $xy = 0$ نتیجه می‌دهد $y = 0$ (از این‌رو $yx = 0$).

(۲): شرایط دیگر هم زائد نیستند. فرض کنیم R، حلقه‌ی ماتریس‌های 2×2 بالامثلثی روی حلقه‌ی نیم‌اول S باشد. در نتیجه

$$P(R) = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

بنابراین $P(R)^{2} = 0$. اما داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

و

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

بنابراین R برگشت‌پذیر نیست.

(۳): یک حلقه‌ی نیم‌جابجایی(IFP) وجود دارد به‌طوری‌که برگشت‌پذیر نیست و در هیچ‌یک از شرایط صدق نمی‌کند. فرض کنیم D یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته و $S = D \oplus D$، با ضرب مولفه به مولفه باشد. حال فرض کنیم R حلقه‌ی ذکر شده در قسمت (۱) روی S باشد. سپس از آن‌جا که S تقلیل‌یافته است، R طبق گزاره‌ی ۲.۱.۳، دارای خاصیت IFP است، اما طبق مثال ۵.۱.۳، R برگشت‌پذیر نیست. توجه داریم که،

$$P(R) = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

بنابراین $P(R)^{3} = 0$ اما $P(R)^{2} \neq 0$. حال دو عنصر y, x را به صورت زیر در حلقه‌ی R در نظر می‌گیریم:

$$x = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & 0 \\ 0 & (1,0) & 0 \\ 0 & 0 & (1,0) \end{pmatrix} \text{ و } y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0,1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه $x \notin P(R)$ و $yx = 0$، اما

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (0,1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(۴): برای مواردی که حلقه جابجایی است، ما شرایط مختلفی داریم. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_{2^n}$ که n یک عدد صحیح مثبت است. بوضوح R برگشت‌پذیر است اما $P(R)^{n} = 0$ و برای $i \leq n-1$ ، $P(R)^{i} \neq 0$ جایی که $P(R) = \{0, 2, \cdots, 2^{n-1}\}$.

با مشاهده برگشت‌پذیر بودن $T(R,R)$ در گزاره‌ی ۶.۱.۳، که در آن حلقه‌ی R تقلیل‌یافته بود، ممکن است حدس بزنیم که R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر است اگر برای هر ایده‌آل سره ناصفر برگشت‌پذیر I از R، R/I برگشت‌پذیر باشد، که I به‌عنوان حلقه‌ای که یکدار نیست در نظر گرفته می‌شود. با این حال مثال زیر تا حدامکان این ذهنیت را پاکسازی می‌کند.

مثال ۱۲.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی ذکر شده در مثال ۱۱.۱.۳ قسمت (۱) باشد. R برگشت‌پذیر نیست. ابتدا توجه داریم تنها ایده‌آل‌های سره ناصفر حلقه‌ی R به‌فرم زیر هستند:

$$I_1=\begin{pmatrix}0&S&S\\0&0&S\\0&0&0\end{pmatrix}\ ,\ I_2=\begin{pmatrix}0&S&S\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$I_3=\begin{pmatrix}0&0&S\\0&0&S\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{و}\ I_4=\begin{pmatrix}0&0&S\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

از آن‌جا که هر عنصر از $\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{pmatrix}$ که $a\neq 0$، وارون‌پذیر است. I_1 با عناصر

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{و}\ \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

برگشت‌پذیر نمی‌باشد، اما از آن‌جا که I_jها با $j=2,3,4$ از اندیس ۲ پوچ‌توان هستند، لذا برگشت‌پذیر می‌باشند. بنابراین ما مواردی برای I_j با $j=2,3,4$ در نظر می‌گیریم. حال فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقسیم باشد. قرار می‌دهیم:

$$\alpha=\begin{pmatrix}x_1&0&0\\0&x_1&y_1\\0&0&x_1\end{pmatrix}\ ,\ \beta=\begin{pmatrix}x_2&0&0\\0&x_2&y_2\\0&0&x_2\end{pmatrix}\in R/I_2$$

به‌طوری‌که

$$\alpha\beta=\begin{pmatrix}x_1x_2&0&0\\0&x_1x_2&x_1y_2+y_1x_2\\0&0&x_1x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

در نتیجه $x_1x_2=x_1y_2+y_1x_2=0$ ، بنابراین $0=x_1y_2x_2+y_1x_2x_2=y_1x_2x_2$ نتیجه می‌دهد $y_1x_2=0=x_1y_2$ ، از این‌رو داریم: $x_2x_1=x_2y_1=y_2x_1=0$ ، بنابراین $\beta\alpha=0$.

برای R/I_3 محاسبات مطابق قبل انجام می‌شود.
حال قرار می‌دهیم:

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & x_1 & z_1 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} , \ \beta = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & x_2 & z_2 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \in R/I_4$$

به‌طوری که:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 + y_1x_2 & 0 \\ 0 & x_1x_2 & x_1z_2 + z_1x_2 \\ 0 & 0 & x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه $x_1x_2 = x_1y_2 + y_1x_2 = x_1z_2 + z_1x_2 = 0$ ، بنابراین $x_1x_2 = x_1y_2 + y_1x_2 = 0$ نتیجه می‌دهد $x_1y_2 = y_1x_2 = 0$ و $x_1x_2 = x_1z_2 + z_1x_2 = 0$ در نتیجه $x_1z_2 = z_1x_2 = 0$ ، از این‌رو داریم: $x_2x_1 = x_2y_1 = y_2x_1 = z_2x_1 = x_2z_1 = 0$ ، و لذا $\beta\alpha = 0$. در نتیجه برای هر ایده‌آل سره ناصفر برگشت‌پذیر I از R، R/I برگشت‌پذیر است.

اما اگر شرط قوی‌تری مانند زیر را در نظر بگیریم، جواب مثبتی را برای این مطلب خواهیم داشت.

گزاره ۱۳.۱.۳. *فرض کنیم برای ایده‌آل I از حلقه‌ی R، R/I یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد. اگر I تقلیل‌یافته باشد آن‌گاه R برگشت‌پذیر است.*

برهان. فرض کنیم برای $a, b \in R$، $ab = 0$. از آن‌جایی که R/I برگشت‌پذیر است داریم $ba \in I$، و چون I تقلیل یافته است لذا $(ba)^2 = 0$ که نتیجه می‌دهد $ba = 0$. بنابراین R برگشت‌پذیر است. □

به‌عنوان یک بحث دوگانه، ممکن است حدس بزنیم که اگر حلقه‌ی R برگشت‌پذیر باشد آن‌گاه برای هر ایده‌آل I در R، R/I برگشت‌پذیر است. با این حال ممکن است مثال نقضی وجود داشته‌باشد که ما بعداً آن را در مثال ۱.۲.۳، مشاهده خواهیم‌کرد.

گزاره ۱۴.۱.۳. ۱. *فرض‌کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت برای برخی از خودتوان‌های مرکزی e از R، eR و $(1-e)R$ برگشت‌پذیر هستند اگر وتنها اگر R برگشت‌پذیر باشد.*

۲. *فرض‌کنیم R یک حلقه باشد و Δ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R شامل عناصر منظم مرکزی باشد. در این صورت R برگشت‌پذیر است اگر وتنها اگر $\Delta^{-1}R$ برگشت‌پذیر باشد.*

برهان. اثبات این گزاره ضرورت لم ۹.۱.۳، را نشان می‌دهد.

۱. فرض کنیم برای $a, b \in R$، $ab = 0$. در نتیجه $eab = 0$ و $(1-e)ab = 0$ بنابراین طبق فرض داریم: $eba = 0$ و $(1-e)ba = 0$. از این‌رو، $ba = eba + (1-e)ba = 0$ و در نتیجه R برگشت‌پذیر است.

۲. فرض کنیم $\alpha\beta = 0$ به‌طوری که $\alpha = u^{-1}a$ ، $\beta = v^{-1}b$ ، $u, v \in \Delta$ و $a, b \in R$. از آن‌جایی که Δ موجود در مرکز R است، داریم: $0 = \alpha\beta = u^{-1}av^{-1}b = (u^{-1}v^{-1})ab = (uv)^{-1}ab$ و $ab = 0$. اما طبق فرض R برگشت‌پذیر است، بنابراین $ba = 0$ و داریم: $\beta\alpha = v^{-1}bu^{-1}a = (vu)^{-1}ba = 0$. از این‌رو $\Delta^{-1}R$ برگشت‌پذیر است.

□

۲.۳ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌های برگشت پذیر

در این قسمت برگشت‌پذیری دو نوع توسیع مهم از حلقه‌های برگشت‌پذیر و مثال‌های مربوط را مشاهده خواهیم کرد. ابتدا حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها برای ما حائز اهمیت است. طبق ۲.۲.۲، حلقه‌های تقلیل‌یافته آرمندار‌یز هستند و طبق ۱۴.۲.۲، حلقه‌های آرمندار‌یز آبلی می‌باشند. از این‌رو ممکن است رابطه‌ای بین حلقه‌های آرمندار‌یز و حلقه‌های برگشت‌پذیر وجود داشته باشد. نتایج زیر درباره‌ی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها ثابت شده‌اند.

۱. حلقه‌ی R جابجایی است اگر و تنها اگر $R[x]$ جابجایی باشد.

۲. حلقه‌ی R تقلیل‌یافته است اگر و تنها اگر $R[x]$ تقلیل‌یافته باشد.

۳. حلقه‌ی R آرمندار‌یز است اگر و تنها اگر $R[x]$ آرمندار‌یز باشد [۲، قضیه‌ی ۲].

۴. حلقه‌ی R آبلی است اگر و تنها اگر $R[x]$ آبلی باشد [۱۷، قضیه‌ی ۸].

براساس نتایج بالا و لم ۹.۱.۳، ممکن است گمان کنیم که حلقه‌ی R برگشت‌پذیر است اگر و تنها اگر $R[x]$ برگشت‌پذیر باشد. با این حال مثال زیر تا حد امکان این مطلب را پاکسازی می‌کند.

مثال ۱.۲.۳. فرض کنیم $\mathbb{Z}_2$ میدان اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۲ و $A = \mathbb{Z}_2\left[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c\right]$ جبر آزاد از چندجمله‌ای‌ها با جمله‌های ثابت صفر در متغیرهای تعویض‌ناپذیر $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ روی $\mathbb{Z}_2$ باشند. توجه داریم که A یک حلقه‌ی بدون یک است و I را ایده‌آلی از حلقه‌ی $\mathbb{Z}_2 + A$ تولیدشده توسط عناصر زیر در نظر می‌گیریم.

$$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2,$$

$$b_0a_1 + b_1a_0, b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0, b_1a_2 + b_2a_1, b_2a_2, b_0ra_0, b_2ra_2,$$

$$(a_0 + a_1 + a_2)r(b_0 + b_1 + b_2), (b_0 + b_1 + b_2)r(a_0 + a_1 + a_2), \text{ و } r_1r_2r_3r_4,$$

به‌طوری‌که $A \ni r, r_1, r_2, r_3, r_4$. بوضوح $A^4 \in I$. حال قرار می دهیم: $R = (\mathbb{Z}_2 + A)/I$ و بدیهی است که $R[x] \cong (\mathbb{Z}_2 + A)[x]/I[x]$. توجه داریم که،

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \in I[x]$$

اما

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)c(b_0 + b_1x + b_2x^2) \notin I[x]$$

زیرا $a_0cb_1 + a_1cb_0 \notin I$. از این‌رو $R[x]$ دارای خاصیت IFP نیست بنابراین برگشت‌پذیر نمی‌باشد. حال نشان می‌دهیم که R برگشت‌پذیر است. هر حاصلضرب از عناصر $c, b_2, b_1, b_0, a_2, a_1, a_0$ یک تک‌جمله‌ای می‌نامیم و گوییم α یک تک‌جمله‌ای از درجه‌ی n است اگر α حاصلضربی از nتا متغیرهای فوق باشد. فرض کنیم H_n مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی از تک‌جمله‌ای‌های از درجه‌ی n روی $\mathbb{Z}_2$ باشد. توجه داریم که H_n برای هر n متناهی است و I ایده‌آلی همگن است (یعنی اگر $\sum_{i=1}^{s} r_i \in I$ و $r_i \in H_i$ ، آنگاه: $r_i \in I$).

ادعای ۱: هرگاه $f_1, g_1 \in H_1$ و $f_1g_1 \in I$ ، آن‌گاه: $g_1f_1 \in I$.

اثبات ادعای ۱: بنابر تعریف ایده‌آل I ، حالت‌های زیر اتفاق می‌افتند:

$$(f_1 = a_0, g_1 = b_0)\ ,\ (f_1 = a_2, g_1 = b_2)\ ,\ (f_1 = a_0 + a_1 + a_2, g_1 = b_0 + b_1 + b_2),$$

$$(f_1 = b_0, g_1 = a_0)\ ,\ (f_1 = b_2, g_1 = a_2) \text{ و } (f_1 = b_0 + b_1 + b_2, g_1 = a_0 + a_1 + a_2).$$

در هر حالت با استفاده از تعریف I، نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

ادعای ۲: هرگاه $f, g \in A$ و $fg \in I$، آن‌گاه: $gf \in I$.

اثبات ادعای ۲: عناصر $f_1, g_1 \in H_1$ ، $f_2, g_2 \in H_2$ ، $f_3, g_3 \in H_3$ و $f_4, g_4 \in I$ وجود دارند به‌طوری‌که $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ و $g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$. چون برای هر $i \geq 4$ ، $i \subseteq H_i$ ، پس $h \in I$ وجود دارد که $fg = f_1g_1 + f_1g_2 + f_2g_1 + h$. بنابراین $fg \in I$ نتیجه می‌دهد: $f_1g_1 + f_1g_2 + f_2g_1 \in I$. اما از آن‌جا که I همگن است، $f_1g_1 \in I$ و $f_1g_2 + f_2g_1 \in I$. طبق ادعای ۱ با مشاهده‌ی $g_1f_1 \in I$، نشان می‌دهیم: $g_1f_2 + g_2f_1 \in I$. از این‌که $f_1g_2 + f_2g_1 \in I$ ، موارد زیر را داریم:

$$f_1 = a_0, g_1 = b_0 \tag{1}$$

$$f_1 = a_2, g_1 = b_2 \tag{2}$$

$$f_1 = a_0 + a_1 + a_2, g_1 = b_0 + b_1 + b_2 \tag{3}$$

$$f_1 = b_0, g_1 = a_0 \tag{4}$$

$$f_1 = b_2, g_1 = a_2 \tag{5}$$

$$f_1 = b_0 + b_1 + b_2, g_1 = a_0 + a_1 + a_2. \tag{6}$$

اگر $f_2, g_2 \in I$ سپس نتیجه حاصل است، بنابراین موارد دیگری برای f_2 و g_2 در نظر می‌گیریم. برای فرض (۱)، موارد زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(f_2 \in I, g_2 = b_0t)\ ,\ (f_2 \in I, g_2 = tb_0)\ ,\ (f_2 = a_0s, g_2 = b_0t)\ ,\ (f_2 = a_0s, g_2 = fb_0),$$

$$(f_2 = sa_0, g_2 = b_0 t)\ ,\ (f_2 = sa_0, g_1 = tb_0)\ ,\ (f_2 = a_0 s, g_2 \in I) \text{ و } (f_2 = sa_0, g_2 \in I),$$

که t, s تک‌جمله‌ای‌های دلخواه از درجه‌ی ۱ هستند. سپس داریم: $g_1 f_2 + g_2 f_1 \in I$. اثبات موارد (۲) و (۳) به‌طور مشابه و موارد (۴)، (۵) و (۶) به‌صورت متقارن انجام می‌شوند. به تبع آن $g_1 f_2 + g_2 f_1 \in I$ و بنابراین $gf = g_1 f_1 + g_1 f_2 + g_2 f_1 + k$ که $k \in I$، همچنین موجود در I است.
حال برای این‌که نشان دهیم R برگشت‌پذیر است، قرار می‌دهیم $gh \in I$ که $g, h \in \mathbb{Z}_2 + A$. برای برخی از $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ و برخی $g', h' \in A$ ، قرار می‌دهیم، $g = \alpha + g'$ و $h = \beta + h'$. بنابراین

$$\alpha\beta + \alpha h' + g'\beta + g'h' = gh \in I.$$

از این‌رو $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$. فرض کنیم $\alpha = 0$. سپس $g'\beta + g'h' \in I$ ، بنابراین $g' \in I$ و $g'h' \in I$ ، زیرا I همگن است و $\beta \in \mathbb{Z}_2$. از این‌رو طبق ادعای ۲، $h'g' \in I$ و بنابراین $hg = \beta g' + h'g' \in I$. برای مورد $\beta = 0$، به‌طور مشابه به دست می‌آوریم: $hg = h'\alpha + h'g' \in I$. در نتیجه حلقه‌ی R برگشت‌پذیر است.

این مثال همچنین مثال نقضی را برای حدسی که قبلاً بیان شد که اگر R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد برای هر ایده‌آل I از R، R/I نیز برگشت‌پذیر است، فراهم می‌سازد. در مثال ۱.۲.۳، $(\mathbb{Z}_2 + A)[x]$ یک دامنه است (بنابراین برگشت‌پذیر است)، اما حلقه‌ی خارج قسمتی $(\mathbb{Z}_2 + A)[x]/I[x] \cong R[x]$ برگشت‌پذیر نیست. در ادامه شرایطی که تحت آن ممکن است به سوال قبل پاسخ مثبتی دهیم را مشاهده خواهیم‌کرد. فرض کنیم R یک حلقه باشد و مرکز حلقه‌ی R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(R) = \left\{ s \in R | sr = rs\ ,\ r \in R \text{ برای تمام} \right\}.$$

حلقه‌ی چندجمله‌ای لوران [3] روی R را با $R[x, x^{-1}]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن به‌فرم $\sum_{i=k}^{n} m_i x^i$ که $m_i \in R$ و k, n دو عدد صحیح هستند. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x, x^{-1}]$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شود.

لم ۲.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد در این صورت $R[x]$ برگشت‌پذیر است اگر و تنها اگر $R[x, x^{-1}]$ برگشت‌پذیر باشد.*

برهان. ما دو اثبات را ارائه می‌دهیم.
فرض کنیم $\Delta = \{1, x, x^2, \cdots\}$ ، در نتیجه بوضوح Δ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از $R[x]$ است. از آن‌جایی که $R[x, x^{-1}] = \Delta^{-1} R[x]$ ، طبق گزاره‌ی ۱۴.۱.۳ قسمت (۲)، نتیجه می‌گیریم $R[x, x^{-1}]$ برگشت‌پذیر است. حال اثبات مستقیم:
فرض کنیم $f(x), g(x) \in R[x, x^{-1}]$ به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$. در نتیجه عدد صحیح مثبت n وجود

[3] Laurent

دارد به‌طوری‌که $f_{۱}(x) = f(x)x^n$ و $g_{۱}(x) = g(x)x^n$ عضو $R[x]$ باشند. در نتیجه $f_{۱}(x)g_{۱}(x) = ۰$. از آن‌جا که $R[x]$ برگشت‌پذیر است نتیجه می‌گیریم، $g_{۱}(x)f_{۱}(x) = ۰$. بنابراین داریم:

$$g(x)f(x) = x^{-۲n}g_{۱}(x)f_{۱}(x) = ۰$$

و لذا $R[x, x^{-۱}]$ برگشت‌پذیر است. □

گزاره ۳.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرمندا ریز باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R برگشت‌پذیر است.*

۲. *$R[x]$ برگشت‌پذیر است.*

۳. *$R[x, x^{-۱}]$ برگشت‌پذیر است.*

برهان. طبق لم‌های ۹.۱.۳ و ۲.۲.۳، کافی است (۱) ⇐ (۲) را ثابت کنیم. فرض کنیم $f = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=۰}^{n} a_j x^j$ دو چندجمله‌ای از $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $fg = ۰$. از آن‌جایی که R آرمنداریز است هر a_ib_j صفر می‌باشد. اما R برگشت‌پذیر است بنابراین برای تمام j, i $b_ja_i = ۰$. به تبع آن داریم: $gf = ۰$، لذا $R[x]$ برگشت‌پذیر است. □

قضیه‌ی زیر گسترش کلاس حلقه‌های برگشت‌پذیر می‌باشد.

قضیه ۴.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه و n هر عدد صحیح مثبت باشد. اگر R تقلیل‌یافته باشد، آن‌گاه $R[x]/\langle x^n\rangle$ یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر است که $\langle x^n\rangle$ ایده‌آل تولید شده توسط x^n است.*

برهان. فرض کنیم $S = R[x]/\langle x^n\rangle$. اگر $n = ۱$ آن‌گاه $S \cong R$. اگر $n = ۲$ آن‌گاه S متقارن است از این‌رو برای $n = ۱, ۲$، S برگشت‌پذیر است. فرض کنیم $n \geq ۳$. قرار می‌دهیم:

$$A = a_{۰} + a_{۱}u + \cdots + a_{n-۱}u^{n-۱}$$

و

$$B = b_{۰} + b_{۱}u + \cdots + b_{n-۱}u^{n-۱}$$

به‌طوری‌که $AB = ۰$ و $u = x + (x^n)$. توجه داریم که برای تمام j, iها که $i + j \geq n$ داریم: $a_ib_ju^{i+j} = ۰$، بنابراین کافی است برای $i + j < n$ بررسی کنیم. از $AB = ۰$ معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$a_{۰}b_{۰} = ۰ \quad (۱)$$

$$a_{۰}b_{۱} + a_{۱}b_{۰} = ۰ \quad (۲)$$

$$a_{۰}b_{۲} + a_{۱}b_{۱} + a_{۲}b_{۰} = ۰ \quad (۳)$$

$\vdots$

$$a_\circ b_{n-۲}+a_۱b_{n-۳}+\cdots+a_{n-۳}b_۱+a_{n-۲}b_\circ=\circ \tag{n-۱}$$

$$a_\circ b_{n-۱}+a_۱b_{n-۲}+\cdots+a_{n-۲}b_۱+a_{n-۱}b_\circ=\circ. \tag{n}$$

با استقرا روی $i+j$ و با استفاده از شرط تقلیل‌یافته بودن R ، حالت‌ها را بررسی می‌کنیم. ضرب (۱) و (۲) در $b_\circ$ نتیجه می‌دهد:

$$\circ=a_\circ b_۱b_\circ+a_۱b_\circ b_\circ=a_۱b_\circ b_\circ=a_۱b_\circ a_۱b_\circ$$

بنابراین داریم:

$$a_۱b_\circ=\circ \text{ یا } a_\circ b_۱=\circ. \tag{۲'}$$

از ضرب (۱)، (۲′)، (۳) در $b_\circ$ و ضرب (۳) در $b_۱$ به دست می‌آوریم:

$$\circ=a_\circ b_۲=a_۱b_۱=a_۲b_\circ.$$

به‌طور استقرایی ممکن است برای $i+j=\circ,۱,\cdots,n-۲$ فرض کنیم $a_ib_j=\circ$. محاسبات بعدی بر اساس فرض می‌باشند. از ضرب (n) در $b_\circ$ داریم:

$$\circ=a_\circ b_{n-۱}b_\circ+a_۱b_{n-۲}+\cdots+a_{n-۲}b_۱b_\circ+a_{n-۱}b_\circ b_\circ=a_{n-۱}b_\circ b_\circ=a_{n-۱}b_\circ a_{n-۱}b_\circ,$$

از آن‌جا که $a_ib_\circ=\circ$ برای $i=\circ,۱,\cdots,n-۲$. از این‌رو $a_{n-۱}b_\circ=\circ$. سپس داریم:

$$a_\circ b_{n-۱}+a_۱b_{n-۲}+\cdots+a_{n-۲}b_۱=\circ. \tag{n'}$$

با ضرب (n') در $b_۱$ داریم:

$$\circ=a_\circ b_{n-۱}b_۱+a_۱b_{n-۲}b_۱+\cdots+a_{n-۳}b_۲b_۱+a_{n-۲}b_۱b_۱=a_{n-۲}b_۱b_۱=a_{n-۲}b_۱a_{n-۲}b_۱.$$

از این‌رو $a_{n-۲}b_۱=\circ$ و به دست می‌آوریم:

$$a_\circ b_{n-۱}+a_۱b_{n-۲}+\cdots+a_{n-۳}b_۲=\circ.$$

با ادامه‌ی این روند درنهایت خواهیم داشت:

$$\circ=a_\circ b_{n-۱}=a_۱b_{n-۲}=\cdots=a_{n-۲}b_۱=a_{n-۱}b_\circ,$$

و به تبع آن برای تمام j,iها که $i+j=\circ,۱,\cdots,n-۱$ به دست می‌آوریم: $a_ib_j=\circ$. از آن‌جا که R تقلیل‌یافته است پس از آن برمی‌آید که $b_ja_i=\circ$، برای تمام j,iها که $i+j<n$. اما داریم: $b_ja_iu^{i+j}=\circ$، برای تمام j,iها که $i+j\geq n$، بنابراین،

$$BA=\sum_{i=\circ}^{n-۱}\sum_{j=\circ}^{n-۱}b_ja_iu^{i+j}=\circ.$$

در نتیجه S یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر است. $\square$

فصل ۴

حلقه‌های $IMIP$ و خواص آن

۱.۴ حلقه‌های $IMIP$

در فصل دوم در ملاحظه ۳.۱.۲، مشاهده کردیم که برای هر دو عضو a و b از حلقه‌ی R، $ab = 0$ نتیجه می‌دهد $aMb = 0$ به‌طوری‌که M ایده‌آل ماکسیمالی از R است.
بنابراین حلقه‌های $IMIP$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۴. گوییم حلقه‌ی R خاصیت $IMIP$ دارد (یا حلقه‌ی R، $IMIP$ است) هرگاه برای $a, b \in R$ و $ab = 0$، ایده‌آل ماکسیمال (دو طرفه) M از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $aMb = 0$.

بوضوح حلقه‌های ساده دارای خاصیت $IMIP$ است، همچنین حلقه‌های IFP نیز $IMIP$ می‌باشند.

گزاره ۲.۱.۴. ۱. *اگر R یک حلقه‌ی $IMIP$ باشد، آن‌گاه:*
$N_0(R) = P(R) = N^*(R)$.

۲. *اگر R یک حلقه‌ی $IMIP$ و $J(R)$ پوچ باشد، آن‌گاه:*
$$N_0(R) = P(R) = N^*(R) = J(R)$$

۳. *اگر R یک حلقه‌ی $IMIP$ باشد بطوریکه هر ایده‌آل اول آن ماکسیمال باشد، آن‌گاه:*
$$N_0(R) = P(R) = N^*(R) = J(R) = BR(R)$$

۴. *اگر R یک حلقه‌ی IFP باشد، آن‌گاه:*
$$N_0(R) = P(R) = N^*(R) = N(R)$$

۵. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و M_1 و M_2 ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز از R باشند به‌طوری‌که $M_1 \cap M_2 = 0$ ، در این صورت هر M_i خاصیت IFP (که یکدار نیست) دارد اگر و تنها اگر R خاصیت IFP داشته باشد.*

برهان. (۱). می‌دانیم، $N^*(R) \subseteq BR(R)$. فرض کنیم R دارای خاصیت $IMIP$ باشد و $a \in N^*(R)$ در نتیجه برای برخی $n \geq ۱$، $a^n = ۰$ و لذا $a.a^{n-۱} = ۰$. از آن‌جا که R دارای خاصیت $IMIP$ است و هر ایده‌آل ماکسیمال از R شامل a می‌باشد بنابراین ایده‌آل ماکسیمال M شامل a از R وجود دارد به‌طوری‌که $a.M.a^{n-۱} = ۰$. از طرفی $RaR \subseteq M$ ، پس: $a(RaR)a^{n-۱} = ۰$. بنابراین برای هر $b_۱ \in RaR$ ، داریم: $ab_۱a(RaR)a^{n-۲} = ۰$. با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت: $ab_۱ab_۲a \cdots ab_{n-۱}a = ۰$ ، که $b_i \in RaR$ برای $i = ۱, ۲, \cdots , n-۱$. در نتیجه: $(RaR)^{۲n-۱} = ۰$ و لذا $a \in N_۰(R)$.

برهان (۲) و (۳) با توجه به (۱) به دست می‌آید.

(۴). چون حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است، بنابراین $P(R) = N(R)$. از آن‌جاکه حلقه‌های IFP دارای خاصیت $IMIP$ نیز می‌باشند، لذا نتیجه حاصل است. ، نتیجه حاصل است.

(۵). فرض کنیم برای $a, b \in R$، $ab = ۰$. از آن‌جا که $M_۱ + M_۲ = R$ ، برای برخی $a_۱, b_۱ \in M_۱$ و $a_۲, b_۲ \in M_۲$ ، داریم: $a = a_۱ + a_۲$ و $b = b_۱ + b_۲$. از این‌که $M_۱ \cap M_۲ = ۰$ خواهیم داشت:

$$۰ = ab = (a_۱ + a_۲)(b_۱ + b_۲) = a_۱b_۱ + a_۱b_۲ + a_۲b_۱ + a_۲b_۲ = a_۱b_۱ + a_۲b_۲.$$

در نتیجه: $a_۱b_۱ = -a_۲b_۲ \in M_۱ \cap M_۲ = ۰$ ، لذا $a_۱b_۱ = ۰$ و $a_۲b_۲ = ۰$. اما از آن‌جا که هر کدام از M_iها دارای خاصیت IFP هستند، بنابراین: $a_۱M_۱b_۱ = ۰$ و $a_۲M_۲b_۲ = ۰$. توجه داریم که هم $a_۱M_۲b_۱$ و هم $a_۲M_۱b_۲$ مشمول $M_۱ \cap M_۲$ می‌باشند، بنابراین هر کدام از آن‌ها باید صفر باشند. به تبع آن، داریم:

$$a_۱Rb_۱ = a_۱(M_۱ + M_۲)b_۱ = ۰$$

و

$$a_۲Rb_۲ = a_۲(M_۱ + M_۲)b_۲ = ۰.$$

بنابراین، برای هر $r \in R$،

$$arb = (a_۱ + a_۲)r(b_۱ + b_۲) = a_۱rb_۱ + a_۱rb_۲ + a_۲rb_۱ + a_۲rb_۲ = a_۱rb_۱ + a_۲rb_۲ = ۰,$$

که $a_۱rb_۲, a_۲rb_۱ \in M_۱ \cap M_۲$. از این‌رو R دارای خاصیت IFP است. □

با توجه به گزاره‌ی ۲.۱.۴ قسمت (۱) و (۲) ممکن است حدس بزنیم که حلقه‌های منظم و دارای خاصیت $IMIP$، تقلیل‌یافته هستند. با این حال باید توجه داشته‌باشیم که $Mat_۲(\mathbb{Z}_۲)$ یک حلقه‌ی منظم دارای خاصیت $IMIP$ است به‌طوری‌که تقلیل‌یافته نمی‌باشد.

ممکن است حدس بزنیم که حلقه‌های $IMIP$ ددکیند-متناهی هستند. با این حال طبق [۱۱ ، قضیه ۱,۳] ، حلقه‌ی ساده‌ای وجود دارد به‌طوری‌که ددکیند-متناهی نیست. در ادامه حلقه‌ای را که در قسمت (۲) و (۳) گزاره ۴.۱.۲ صدق می‌کند را مشاهده کنیم.

فرض کنیم A یک جبر (یکدار یا فاقد یک) روی حلقه‌ی جابجایی S باشد. به‌سبب دورو [۹] [۱]

[1]Dorroh extensions

(سال۱۹۳۲) توسیع دورو A توسط S، گروه آبلی $D = A \oplus S$، به همراه ضرب زیر است به‌طوری‌که $r_i \in A$ و $s_i \in S$ می‌باشند.

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$$

عضو خنثی توسیع دورو $(0, 1)$ می‌باشد. یعنی: $(r, s)(0, 1) = (0 + 0 + r, s) = (r, s)$

مثال ۳.۱.۴. فرض کنیم K یک میدان و A یک جبر ناصفر روی میدان K باشد، به‌طوری‌که $A^2 = 0$. (به عنوان مثال، $\left(A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset U_2(K) \right)$. R را توسیع دورو A توسط K قرار دهید.(یعنی، $R = A \oplus K$). فرض کنیم $(s, t) \in R$ به‌طوری‌که $t \neq 0$. ($s \in A$ و $t \in K$). (s, t) در R وارون‌پذیر است به‌طوری‌که $(s, t)^{-1} = (-t^{-2}s, t^{-1})$. (باید توجه داشت که اگر $t = 0$، آنگاه (s, t) وارون‌پذیر نیست.) بنابراین $A \oplus \{0\}$ ، مجموعه‌ی تمام عناصر وارون‌ناپذیر است. بنابراین $A \oplus \{0\}$ تنها ایده‌آل پوچ است و لذا
$N^*(R) = A \oplus \{0\}$. بنابراین $A \oplus \{0\}$ ، تنها ایده‌آل ماکسیمال منحصربه‌فرد R می‌باشد و آن را M می‌نامیم. بنابراین R یک حلقه‌ی جابجایی است به‌طوری‌که،

$$N_0(R) = P(R) = N^*(R) = J(R) = BR(R) = M.$$

در ادامه‌ی این مبحث رابطه‌ی بین خاصیت $IMIP$ و IFP را مشاهده خواهیم کرد.

گزاره ۴.۱.۴. *فرض کنیم A یک جبر پوچ روی میدان K، و R توسیع دورو A توسط K باشد. در این صورت R دارای خاصیت $IMIP$ است اگروتنها اگر A یک حلقه‌ی IFP باشد که یکدار نیست.*

برهان. طبق فرض گزاره داریم: $R = A \oplus K$. حال فرض کنیم $(x, y) \in R$ که $x \in A$ و $y \in K$. ابتدا ادعا می‌کنیم هر $(x, y) \in R$ وارون‌پذیر است اگر $y \neq 0$. از آن‌جا که A یک جبر پوچ است، برای برخی اعداد صحیح $n \geq 2$، $x^n = 0$. در نتیجه $(xy^{-1})^n = 0$ و این نتیجه می‌دهد که

$$(xy^{-1}, 1)((0, 1) - (xy^{-1}, 0) + \cdots + (-1)^{n-1}(xy^{-1}, 0)^{n-1})$$

$$\begin{aligned}
&= ((0, 1) + (xy^{-1}, 0))((0, 1) - (xy^{-1}, 0) + \cdots + (-1)^{n-1}(xy^{-1}, 0)^{n-1}) \\
&= ((0, 1) + (xy^{-1}, 0))((0, 1) - (xy^{-1}, 0) + \cdots + (-1)^{n-1}((xy^{-1})^{n-1}, 0)) \\
&= (0, 1)
\end{aligned}$$

به‌طور مشابه

$$((0, 1) - (xy^{-1}, 0) + \cdots + (-1)^{n-1}(xy^{-1}, 0)^{n-1})((0, 1) + (xy^{-1}, 0) = (0, 1)$$

از این رو داریم

$$(x, y)^{-1} = (0, y^{-1})((0, 1) - (xy^{-1}, 0) + \cdots + (-1)^{n-1}(xy^{-1}, 0)^{n-1}$$

باید توجه داشته‌باشیم که $(x,y)(\circ,y^{-1}) = (xy^{-1},1)$. ادعای بالا نشان می‌دهد که $A \oplus \{\circ\}$ ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد R است و آن را M می‌نامیم. فرض کنیم برای $a,b \in A$، $ab = \circ$. در نتیجه برای هر $(a,\circ),(b,\circ) \in R$ داریم: $(a,\circ)(b,\circ) = \circ$. اگر R خاصیت $IMIP$ داشته باشد در این صورت $(a,\circ)M(b,\circ) = (a,\circ)(A \oplus \{\circ\})(b,\circ) = (aAb,\circ) = \circ$ ، که نشان می‌دهد M ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد R است. بنابراین داریم $aAb = \circ$، که این یعنی A دارای خاصیت IFP است.

برعکس: فرض کنیم A خاصیت IFP دارد و برای $(a,c),(b,d) \in R$ داریم $(a,c)(b,d) = \circ$. در نتیجه با توجه به ادعای بالا $c = d = \circ$. از آن‌جا که A دارای خاصیت IFP است داریم $aAb = \circ$. این نتیجه می‌دهد که $(a,c)M(b,d) = (aAb,\circ) = \circ$ ، که این یعنی R خاصیت $IMIP$ دارد. □

با توجه به گزاره ۴.۱.۴، می‌توان دید که خاصیت $IMIP$ را نمی‌توان جایگزین خاصیت IFP کرد و این دو خاصیت قابل تعویض با یکدیگر نیستند. یا ممکن است این سوال پیش آید که خاصیت $IMIP$ با توجه به گزاره ۴.۱.۴ ، به توسیع دورو منتقل می‌شود؟ با توجه به استدلال زیر پاسخ به این سوال منفی است.

جبر پوچ ساده $\bar{A}$ روی میدان K تولید شده توسط اسموکتونویچ [۲] را درنظر می‌گیریم. $\bar{A}$ یک حلقه‌ی $IMIP$ می‌باشد به‌طوری‌که یکدار نیست. توجه کنید که $\bar{A}$ شامل عنصر پوچ‌توان a است، به‌طوری‌که $a^{2} = \circ$ و برای $b \in \bar{A}$ ، $aba \neq \circ$. در این قسمت فرض می‌کنیم توسیع دورو R از $\bar{A}$ توسط K خاصیت $IMIP$ دارد. با توجه به این‌که $\bar{A} \oplus \{\circ\}$ ، ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد R است و برای $a^{2} = \circ$ برای $(a,\circ) \in R$ داریم: $(a,\circ)(a,\circ) = \circ$. سپس $(a,\circ)(\bar{A} \oplus \{\circ\})(a,\circ) = \circ$ در نتیجه: $(a\bar{A}a,\circ) = \circ$ و لذا $a\bar{A}a = \circ$ و برای $b \in \bar{A}$، $aba = \circ$. که یک تناقض است و بنابراین R نمی‌تواند خاصیت $IMIP$ داشته باشد.

در ادامه‌ی مبحث رابطه‌ی بین ساده بودن و خاصیت $IMIP$ را از طریق حلقه‌های ماتریسی بررسی خواهیم کرد.

قضیه ۵.۱.۴. *حلقه‌ی R ساده است اگروتنها اگر $Mat_n(R)$ ، برای تمام $n \geq 2$ یک حلقه‌ی $IMIP$ باشد.*

برهان. اگر R یک حلقه‌ی ساده باشد، در این صورت $Mat_n(R)$ یک حلقه‌ی ساده است و چون هر حلقه‌ی ساده دارای خاصیت $IMIP$ است لذا برای تمام $n \geq 2$ ، $Mat_n(R)$ دارای خاصیت $IMIP$ می‌باشد.

برعکس: فرض کنیم $M = Mat_n(R)$ برای تمام $n \geq 2$، دارای خاصیت $IMIP$ باشد. به برهان خلف فرض می‌کنیم که R ساده نباشد. برای $j,s \in \{1,2,\cdots,n\}$، قرار می‌دهیم $j \neq s$. در نتیجه برای تمام $i,t \in \{1,2,\cdots,n\}$ داریم: $E_{ij}E_{st} = \circ$. از آن‌جا که M دارای خاصیت $IMIP$ است و ساده نیست (چون حلقه‌ی R ساده نیست)، یک ایده‌آل ماکسیمال ناصفر I از M وجود دارد به‌طوری‌که $E_{ij}IE_{st} = \circ$. این نتیجه می‌دهد که $ME_{ij}MIME_{st}M = \circ$. قرار می‌دهیم $\circ \neq (\alpha_{xy}) \in I$

[۲] Smoktunowicz

به‌طوری‌که $\alpha_{uv} \neq 0$ $(u \neq v)$. در نتیجه $0 \neq \alpha_{uv}E_{11} = E_{1i}E_{ij}E_{j1}E_{1u}(\alpha_{xy})E_{v1}E_{1s}E_{st}E_{t1}$ و لذا $0 \neq E_{1u}\alpha E_{v1} \in ME_{ij}MIME_{st}M = 0$ ، که یک تناقض است. بنابراین ایده‌آل ماکسیمال ناصفر I در M نمی‌تواند وجود ندارد و لذا R ساده است. □

با استفاده از این قضیه می‌توان ملاحظه زیر را بیان نمود.

ملاحظه ۶.۱.۴. *فرض کنیم $M = Mat_n(R)$ روی حلقه‌ی ساده R باشد، در این صورت:*

۱. *M خاصیت $IMIP$ دارد.*

۲. *$0 = P(M) \subsetneq N(M)$ ، در مقایسه با این خاصیت که $P(A) = N(A)$ ، برای هر حلقه‌ی A که خاصیت IFP دارد.*

۳. *M نیم‌اول است اما تقلیل‌یافته نیست، در مقایسه با این حقیقت که یک حلقه تقلیل‌یافته است اگروتنها اگر IFP و نیم‌اول باشد.*

برهان. (۱). با توجه به قضیه ۵.۱.۴، اثبات می‌شود.
(۲). R یک حلقه‌ی ساده است پس تنها ایده‌آل‌های آن 0 و R می‌باشند. در حلقه‌های ساده ایده‌آل 0، تنها ایده‌آل ماکسیمال است و هر ماکسیمالی نیز ایده‌آل اول می‌باشد ازاین‌رو 0، ایده‌آل اول است. و از طرفی $Mat_n(R)$ ساده است و تنها ایده‌آل‌هایش 0 و $Mat_n(R)$ می‌باشند. چون 0 در ایده‌آل اول M قرار دارد، بنابراین طبق تعریف، $P(M) = 0$. اما با در نظرگرفتن $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ می‌توان مشاهده کرد که $M_1^2 = 0$ در حالی‌که $M_1 \neq 0$، ازاین‌رو $N(M) \neq 0$ و لذا نتیجه حاصل است.
(۳). حلقه‌ی M نیم‌اول است هرگاه ایده‌آل صفر نیم‌اول باشد. با توجه به این‌که $N(M) \neq 0$ ، طبق تعریف، M تقلیل‌یافته نیست. □

مثال زیر نشان می‌دهد که $U_n(R)$، برای هر حلقه‌ی R و $n \geq 2$، نمی‌تواند خاصیت $IMIP$ داشته باشد.

مثال ۷.۱.۴. فرض کنیم $R = U_n(R)$ که $n \geq 2$ روی هر حلقه‌ی R باشد. توجه داریم که هر ایده‌آل ماکسیمال از $U_n(R)$ به یکی از فرم‌های زیر است:

$$\begin{pmatrix} M & R & \cdots & R \\ 0 & R & \cdots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & R & \cdots & R \\ 0 & M & \cdots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} R & R & \cdots & R \\ 0 & R & \cdots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{pmatrix}$$

که M نمایانگر ایده‌ال ماکسیمال از R است. حال این سوال پیش می‌آید که چرا ماتریس‌های فوق ماکسیمال هستند. ما پاسخ را برای $U_2(R)$ بررسی می‌کنیم.

$$U_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\} = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

طبق بالا $I = \begin{pmatrix} M & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$ ایده‌آلی ماکسیمال از $U_2(R)$ است. طبق تعریف ایده‌آل ماکسیمال داریم: $I \subsetneqq J \trianglelefteq U_2(R)$. باید نشان دهیم $J = U_2(R)$. حال $M \subsetneqq M_1 \trianglelefteq R$ در نظر می‌گیریم که M ایده‌آلی ماکسیمال از R است و لذا $M_1 = R$. از این رو $U_2(R) = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & R \\ 0 & R \end{pmatrix} = J$.
برای هر $E_{11}, E_{22} \in U_n(R)$ داریم: $E_{11}E_{22} = 0$. اما هر ایده‌آل ماکسیمال از $U_n(R)$، شامل E_{12} می‌باشد و $E_{11}E_{12}E_{22} = E_{12} \neq 0$. این نشان می‌دهد که $U_n(R)$ نمی‌تواند خاصیت $IMIP$ داشته باشد.

مثال ۷.۱.۴، بیانگر این است که کلاس حلقه‌های $IMIP$ تحت زیرحلقه‌هایشان بسته نیستند. توجه داشته باشید که $Mat_n(R)$ روی هر حلقه‌ی ساده R برای $n \geq 2$ طبق قضیه ۵.۱.۴، دارای خاصیت $IMIP$ است.

گزاره ۸.۱.۴. *اگر R یک حلقه‌ی $IMIP$ باشد آن‌گاه eRe، برای تمام $R \ni e = e^2 \neq 0$ دارای خاصیت $IMIP$ است.*

برهان. فرض کنیم R یک حلقه $IMIP$ باشد و $0 \neq e^2 = e \in R$. برای دو عضو a و b از eRe، فرض کنیم $ab = 0$. سپس $ae = a$ و $eb = b$. از آن‌جا که R دارای خاصیت $IMIP$ است بنابراین برای برخی ایده‌آل ماکسیمال M از R داریم: $aMb = 0$. توجه کنید که $aMb = aeMeb$. اگر $eMe = eRe$، برای تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال N از eRe داریم: $aNb = 0$. بنابراین فرض کنیم $eMe \subsetneq eRe$.
بنابراین $(eRe)R(eRe) = eR(eRe)Re = eR(eMe)Re = (eRe)M(eRe) \supseteq eMe$ لذا $eMe \subseteq (eRe)M(eRe)$. از آن‌جا M ایده‌آلی ماکسیمال از R است، لذا $M = RMR$. بنابراین خواهیم داشت: $eMe \subseteq eRe(RMR)eRe$. حال با توجه به این‌که $eMe \subsetneq eRe$ و این‌که M ایده‌آل ماکسیمال دوطرفه است داریم: $eRe(RMR)eRe \subseteq eMe$ ، بنابراین خواهیم داشت: $eMe = eRe(RMR)eRe$. حال باید نشان دهیم eMe یک ایده‌آل ماکسیمال از eRe می‌باشد. یک راه اثبات استفاده از [۱۲، قضیه ۳] می‌باشد. حال ما راه دیگر اثبات را بیان می‌کنیم. برای این منظور برای برخی ایده‌آل N_1 از eRe فرض کنیم $eMe \subsetneq N_1$. سپس از آن‌جا که $eN_1e = N_1$ (چون N_1 ایده‌آلی از eRe می‌باشد) داریم:

$$N_1 = eReN_1eRe = eRN_1Re$$

اگر $RN_1R = RMR$ ، سپس:

$$eMe = eRe(RMR)eRe = eRe(RN_1R)eRe = eR(eRN_1Re)Re = eRN_1Re = eN_1e = N_1$$

یک تناقض است. از آن‌جا که M ایده‌آلی ماکسیمال از R است لذا بالاجبار $M = RMR \subsetneq RN_1R = R$. در نتیجه:

$$N_1 = eReN_1eRe = eRN_1Re = eRe.$$

پس eMe ایده‌آلی ماکسیمال از eRe است. علاوه بر این $0 = aMb = aeMeb = a(eMe)b$ از آن‌جا که

$a=ae$ و $b=eb$ ، ثابت می‌شود که eRe خاصیت $IMIP$ دارد. $\square$

عکس گزاره ۸.۱.۴، در حالت کلی برقرار نیست. یعنی، اگر برای تمام $R \ni e = e^{۲} \neq ۰$، eRe دارای خاصیت $IMIP$ باشد، لزوماً حلقه‌ی R دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد. یادآوری می‌کنیم که در مثال ۷.۱.۴، حلقه‌ی $R=U_{۲}(\mathbb{Z})$ برای خودتوان $e=E_{۱۱}\in R$ ، $eRe\cong\mathbb{Z}$ بوضوح دارای خاصیت $IMIP$ است.

فصل ۵

خواص حلقه‌های $IMIP$ مربوط به توسیع‌های حلقه‌ای

در این فصل ما خاصیت $IMIP$ چند نوع توسیع حلقه‌ها را بررسی می‌کنیم.
با توجه به گزاره ۶.۱.۳، ممکن است این ذهنیت پیش‌آید که $T(R,R)$ خاصیت $IMIP$ دارد، اما مثال بعد جواب منفی به این ذهنیت می‌دهد.

مثال ۹.۰.۵. فرض کنیم $R = Mat_2(\mathbb{Z}_2)$. سپس R طبق قضیه ۵.۱.۴، خاصیت $IMIP$ دارد. توسیع بدیهی $T(R,R)$ را در نظر بگیرید، سپس از آن‌جایی که R ساده است، تنها ایده‌آل ماکسیمال از $T(R,R)$، $M = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ می‌باشد. ایده‌آل‌های $T(R,R)$ نیز 0، $T(R,R)$ و $M = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ می‌باشند لذا $T(R,R)$ ساده نیست. حال $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ عضوی از $T(R,R)$ به ازای $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in R$ در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که $a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$ سپس $A^2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0$. برای $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ جایی که $m_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ داریم:

$$A\alpha A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

پس:

$$A\alpha A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0$$

که موجب می‌شود $AMA \neq 0$ و بنابراین $T(R,R)$ خاصیت $IMIP$ ندارد.

۱.۵ رابطه‌ی بین حلقه‌های آرمنداریز و خاصیت $IMIP$

در این قسمت ما برخی از خواص معادل با خاصیت حلقه‌های $IMIP$ را از طریق ساختار $D_3(R)$ اثبات خواهیم کرد.

گزاره ۱.۱.۵. *برای حلقه‌ی R گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. R ، *یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته است.*

۲. $D_3(R)$ ، *آرمنداریز است.*

۳. $D_3(R)$ ، *دارای خاصیت IFP است.*

۴. $D_3(R)$ ، *دارای خاصیت $IMIP$ است.*

برهان. (۴) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $D_3(R)$ دارای خاصیت $IMIP$ باشد و به برهان خلف فرض کنیم $0 \neq a \in R$، به‌طوری‌که $a^2 = 0$. دو عضو $A = \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ را از $D_3(R)$ در نظر می‌گیریم. سپس $AB = 0$. اما هر ایده‌آل ماکسیمال از $D_3(R)$ شامل یک ماتریس ناصفر $\begin{pmatrix} 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

که متناقض با $IMIP$ بودن $D_3(R)$ است، از این رو R تقلیل‌یافته است.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $D_3(R)$ دارای خاصیت IFP باشدو به برهان خلف فرض کنیم $0 \neq a \in R$،

به‌طوری‌که $a^{2} = 0$. دو عضو $A = \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ را از $D_3(R)$ در نظر می‌گیریم. سپس $AB = 0$. اما

$$\begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

که متناقض با IFP بودن $D_3(R)$ است،از این رو R تقلیل‌یافته است.

(۱) ⇐ (۳): فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد و برای هر $a, b \in R$، $ab = 0$. پس، $(ba)^2 = baba = b(0)a = 0$ از آن‌جا که R تقلیل‌یافته است در نتیجه: $ba = 0$. لذا برای هر $r \in R$ داریم، $bar = 0$ در نتیجه: $arb = 0$. و لذا حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است.

(۱) ⇐ (۲): بنابر لم ۲.۲.۲، قابل اثبات است.

(۳) ⇐ (۴): از آن‌جا که هر حلقه‌ی IFP، دارای خاصیت $IMIP$ می‌باشد لذا واضح است. □

طبق گزاره ۱.۱.۵، ممکن است این سوال پیش آید که برای $n \geq 4$، زمانی که R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته است، $D_n(R)$، دارای خاصیت $IMIP$ است. با این حال در ادامه تا حد امکان این مطلب پاکسازی می‌شود.

گزاره ۲.۱.۵. *برای حلقه‌ی R، نتایج زیر برقرار است:*

1. *$D_n(R)$ برای هر حلقه‌ی R زمانی‌که $n \geq 4$ ، دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد.*
2. *اگر $D_2(R)$ دارای خاصیت $IMIP$ باشد، آن‌گاه R دارای خاصیت IFP است.*

برهان. (۱): فرض کنیم R هر حلقه‌ای باشد و $n \geq 4$. حال عناصر E_{12} و E_{34} را از $D_n(R)$ در نظر می‌گیریم. در حالی‌که می‌دانیم هر ایده‌آل ماکسیمال از $D_n(R)$ باید شامل E_{23} باشد. (چون حلقه‌ی R، یکدار است بنابراین $1 \in R$ اما $1 \notin M$ و M ماکسیمال است و چون $M \neq R$ سره است بنابراین شامل E_{23} است.) بنابراین داریم: $E_{12}E_{23}E_{34} \neq 0$. اما در $D_n(R)$، $E_{12}E_{34} = 0$. از این رو برای $n \geq 4$، $D_n(R)$ دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد.

(۲): توجه کنیم که هر ایده‌آل ماکسیمال از $D_2(R)$ به فرم زیر است:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & r \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in M, r \in R \right\}$$

که M نمایانگر یک ایده‌آل ماکسیمال از R است. فرض کنیم $D_2(R)$ دارای خاصیت $IMIP$ باشد و برای هر $a, b \in R$، قرار می‌دهیم $ab = 0$. سپس در $D_2(R)$، $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0$. حال قرار

می‌دهیم:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} m & r \\ ۰ & m \end{pmatrix} \middle| m \in M, r \in R \right\}$$

از آن‌جا که $D_{۲}(R)$ دارای خاصیت $IMIP$ است برای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R داریم:

$$\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & a \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} b & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix} = ۰$$

$$\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & r \\ ۰ & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix} = ۰$$

$$\begin{pmatrix} am & ar \\ ۰ & am \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mb & rb \\ ۰ & mb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abm^{۲} & ۲arbm \\ ۰ & abm^{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

در نتیجه $۲arbm = ۰$ ، لذا برای هر $r \in R$، $arb = ۰$ ، پس $aRb = ۰$. که نشان می‌دهد R دارای خاصیت IFP است. □

باید توجه کنیم درگزاره ۲.۱.۵ قسمت (۲)، شرط "R **دارای خاصیت IFP است**" نمی‌تواند جایگزین شرط "R **یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته است**" در مثال زیر شود.

مثال ۳.۱.۵. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_{۴} = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}, \bar{۳}\}$ و $a = \bar{۲}$. در این صورت $a^{۲} = \bar{۲} \cdot \bar{۲} = \bar{۴} = ۰$ اما $\bar{۲} \neq ۰$ ، در نتیجه R تقلیل‌یافته نیست. حال $a = b = \bar{۲}$ از R در نظر می‌گیریم، داریم $ab = \bar{۲} \cdot \bar{۲} = ۰$، پس برای هر $r \in R$ داریم: $arb = ۰$. در نتیجه حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است. حال $M = \{۰, ۲\}$ ایده‌آل ماکسیمال R است. با توجه به تعریف ایده‌آل ماکسیمال ، ایده‌آل $I = \{۰, ۱, ۲\}$ را طوری در نظر می‌گیریم که $M \subseteq I$. حال با بررسی شرایط ایده‌آل بودن، خواهیم دید که این شرایط برای I برقرار است. مجدداً با در نظر گرفتن $M \subseteq I = \{۰, ۲, ۳\}$ خواهیم دید که شرایط ایده‌آل بودن برای I برقرار نمی‌باشد. پس $I = \{۰, ۱, ۲\}$ شرط ایده‌آل بودن را داراست و از طرفی به دلیل وجود عنصر ۱ در I، $I = R$ و لذا $M = \{۰, ۲\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R می‌باشد و $M \neq I$. حال دو عنصر ناصفر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}$ از $D_{۲}(R)$ را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که $AB = ۰$. آن‌گاه AB یکی از اشکال زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \text{ یا } \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ & b \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ & d \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

که $b, d \in R$. حال تعریف می‌کنیم:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} m & r \\ ۰ & m \end{pmatrix} | m \in M, r \in R \right\}.$$

از آن‌جایی که $۴M = ۰$، برای تنها ایده‌آل ماکسیمال X از $D_{۲}(R)$ داریم: $AXB = ۰$. این نشان می‌دهد که $D_{۲}(R)$ خاصیت $IMIP$ دارد اما R تقلیل‌یافته نیست.

مشاهدات حاصل از گزاره ۲.۱.۵ قسمت (۲)، طبق مثال زیر نیازی نیست برقرار باشد.

مثال ۴.۱.۵. حلقه‌ی R و برهان ذکر شده در مثال ۲.۱.۲، را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$A = \mathbb{Z}_2 \langle a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c\rangle$$

جبر آزاد تولیدشده به‌وسیله‌ی متغیرهای تعویض‌ناپذیر $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ روی $\mathbb{Z}_2$ باشند. حال I را ایده‌آلی از A تولیدشده توسط

$$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2,$$

$$b_0a_1 + b_1a_0, b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0, b_1a_2 + b_2a_1, b_2a_2, b_0ra_0, b_2ra_2,$$

$$(a_0 + a_1 + a_2)r(b_0 + b_1 + b_2), (b_0 + b_1 + b_2)r(a_0 + a_1 + a_2), \text{ و } r_1r_2r_3r_4$$

که جملات ثابت $r, r_1, r_2, r_3, r_4 \in A$ ، صفر هستند. قرار می‌دهیم $R = \frac{A}{I}$. سپس R بنابر برهان ذکر شده در مثال ۲.۱.۲، یک حلقه‌ی IFP است.

برای سادگی کار عناصر $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ با تصویرشان در R یکسان در نظر می‌گیریم. $D_2(R)$ را توسیع حلقه‌ای از R در نظر می‌گیریم. حال $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix}$ دو عضو از $D_2(R)$ قرار می‌دهیم به‌طوری‌که $AB = 0$. اما هر ایده‌آل ماکسیمال از $D_2(R)$ شامل $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ که $0 \neq r \in R$، بنابراین

$$A\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}B = \begin{pmatrix} 0 & a_0a_1b_1 + a_1a_1b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

از آن‌جا که $a_0a_1b_1 + a_1a_1b_0 \neq 0$، با توجه به ساختار I، این نتیجه می‌دهد که $D_2(R)$ دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد.

مثاال زیر نشان می‌دهد که کلاس حللقه‌های $IMIP$ تحت تصاویر همریخت بسته نیستند.

مثال ۵.۱.۵. حلقه‌ی R را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$R = D_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

با توجه به گزاره ۱.۱.۵، از آن‌جا که $\mathbb{Z}$ تقلیل‌یافته است، حلقه‌ی R دارای خاصیت $IMIP$ می‌باشد. حال $I = D_3(4\mathbb{Z})$ قرار می‌دهیم. با بررسی خواص ایده‌آل بودن مشاهده می‌کنیم که I ایده‌آلی از R است به‌طوری‌که $\frac{R}{I} \cong D_3(\mathbb{Z}_4)$ بنابر گزاره ۲.۱.۵، $D_3(\mathbb{Z}_4)$ نمی‌تواند خاصیت $IMIP$ داشته باشد زیرا $\mathbb{Z}_4$ تقلیل‌یافته نیست.(به علت وجود عنصر ۲ در $\mathbb{Z}_4$)

با در نظر گرفتن این مثال طبیعی است که این ذهنیت پیش آید که R یک حلقه‌ی $IMIP$ است اگر برای هر ایده‌آل سره ناصفر I از R، $\frac{R}{I}$ و I، $IMIP$ هستند، جایی که I به‌عنوان یک حلقه‌ی $IMIP$ فاقد یک در نظر گرفته می‌شود. در حالی‌که مثال زیر پاسخ منفی به این ذهنیت خواهد داد.

مثال ۶.۱.۵. حلقه‌ی $R = U_2(D)$ روی حلقه‌ی تقسیم D که دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد را همانند مثال ۷.۱.۴ در نظر می‌گیریم. تنها ایده‌آل‌های سره ناصفر R به‌صورت زیر هستند:

$$I_1 = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , I_2 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ و } I_3 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

طبق مثال ۴.۱.۲، I_1 ، I_2 و I_3 دارای خاصیت IFP هستند، لذا دارای خاصیت $IMIP$ می‌باشند. باید توجه کنیم که R/I_1 و R/I_2 با D یکریخت هستند و $R/I_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I_3 \middle| a, c \in D \right\}$ یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته است. لذا دارای خاصیت IFP است و هر حلقه‌ی IFP دارای خاصیت $IMIP$ است ازاین‌رو هر R/I_i (برای $i = 1, 2, 3$) دارای خاصیت $IMIP$ می‌باشد.

گزاره ۷.۱.۵. *اگر R یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد به‌طوری‌که به‌عنوان زیرحلقه‌ای از R تقلیل‌یافته باشد، سپس R خاصیت $IMIP$ دارد.*

برهان. فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد و به‌عنوان زیر حلقه‌ای از R تقلیل‌یافته باشد. برای دو عضو a و b از R، قرا می‌دهیم $ab = 0$. سپس $(bMa)^2 = bMabMa = bM(0)Ma = 0$ و چون M یک ایده‌آل است لذا $bMa \subseteq M$. از آن‌جا که M تقلیل‌یافته است این نتیجه می‌دهد که $bMa = 0$. مطابقاً.

$$((aMb)M)^2 = (aMb)M(aMb)M = aM(bMa)MbM = 0$$

و از آن‌جا که M یک ایدهال است لذا $aMbM \subseteq M$. از آن‌جا که M تقلیل‌یافته است بنابراین $aMbM = 0$. این نتیجه می‌دهد که، $(aMb)^2 = aMb\underbrace{aMb}_{\subseteq M} \subseteq aMbM = 0$ اما $aMb \subseteq M$، بنابراین از آن‌جا که M تقلیل‌یافته است داریم $aMb = 0$. ازاین‌رو R خاصیت $IMIP$ دارد. $\square$

درگزاره ۷.۱.۵ شرط "یک ایدهال ماکسیمال به‌طوری‌که تقلیل‌یافته است" طبق مثال ۶.۱.۵، قابل حذف نیست. در حقیقت I_1 و I_2 بوضوح ایده‌آل‌های ماکسیمال هستند اما تقلیل‌یافته نیستند.

حال طبیعی است که این سوال پیش آید، که آیا کلاس حلقه‌های $IMIP$ نسبت به مجموع مستقیم بسته هستند؟ اما مثال زیر پاسخ منفی به این سوال می‌دهد.

مثال ۸.۱.۵. حلقه‌ی $R = Mat_2(\mathbb{Z}_2)$ که دارای خاصیت $IMIP$ است، همانند مثال ۹.۰.۵ قرار می‌دهیم. $R \oplus R$ را در نظر می‌گیریم. تنها ایده‌آل‌های ماکسیمال $R \oplus \{0\}$ و $\{0\} \oplus R$ هستند. حال فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in R \oplus R$$

توجه کنیم که $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ $A^۲ =$. سپس $(A, A)(A, A) = ۰$ در $R \oplus R$. برای

$$\alpha = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \in R,$$

$(\alpha, ۰) \in R \oplus \{۰\}$ و $(۰, \alpha) \in \{۰\} \oplus R$. سپس

$$(A, A)(\alpha, ۰)(A, A) = (A, ۰)$$

و

$$(A, A)(۰, \alpha)(A, A) = (۰, A)$$

به‌ترتیب نشان دهنده‌ی این هستند که،

$$(A, A)(R \oplus \{۰\})(A, A) \neq ۰$$

و

$$(A, A)(\{۰\} \oplus R)(A, A) \neq ۰.$$

ازاین رو $R \oplus R$ دارای خاصیت $IMIP$ نیست.
با روندی مشابه استدلال فوق، می‌توان نشان داد که جمع مستقیم $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ از حلقه‌های $IMIP$، برای یک مجموعه‌ی شاخص Γ، R_γ خاصیت $IMIP$ ندارد.

گزاره ۹.۱.۵. *اگر $R[x]$ روی R یک حلقه‌ی $IMIP$ باشد، آن‌گاه R نیز چنین است.*

برهان. فرض کنیم $R[x]$ دارای خاصیت $IMIP$ باشد و M یک ایده‌آل ماکسیمال از $R[x]$ باشد. قرار می‌دهیم

$$M_۰ = \left\{ a \in R \,\middle|\, \text{زمانی که } a \text{ جمله‌ی ثابت } f(x) \text{ است}\text{، } f(x) \in M \right\}$$

از آن‌جا که M یک ایده‌آل ماکسیمال از $R[x]$ است، $M_۰$ هم ایده‌آل ماکسیمالی از R است یا $M_۰ = R$.
حال فرض کنیم برای دو عضو a و b از R، $ab = ۰$. طبق فرض گزاره $R[x]$ دارای خاصیت $IMIP$ است و M ایده‌آل ماکسیمالی از $R[x]$ است و لذا $aMb = ۰$ و بنابراین $aM_۰b = ۰$ یا $aRb = ۰$. که هر کدام از این‌ها نتیجه می‌دهد که R دارای خاصیت $IMIP$ است. □

اما مثال زیر نشان می‌دهد که خاصیت حلقه‌های $IMIP$ به حلقه‌های چند جمله‌ای و حلقه‌های سری‌های توانی ادامه پیدا نمی‌کند.

مثال ۱۰.۱.۵. ۱. حلقه‌ی ذکر شده در مثال ۴.۱.۵، که دارای خاصیت IFP است و همچنین استدلال به‌کار گرفته شده در مثال ۲.۱.۲، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم M مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌ها در R با جمله‌ی ثابت صفر باشند. از آن‌جا که $M^۴ = ۰$ و هر $r \in R \setminus M$ یکه

است، سپس M تنها ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد R است. توجه کنیم که $R/M \cong \mathbb{Z}_2$. حال اگر $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ و $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ دو عضو از $R[x]$ در نظر بگیریم، سپس همانند محاسبات مثال ۴.۱.۵، خواهیم داشت: $f(x)g(x) = 0$. از آن‌جا که $M[x]$ یک ایده‌آل از $R[x]$ است به‌طوری‌که $M[x]^4 = 0$، هر ایده‌آل ماکسیمال P از $R[x]$ شامل $M[x]$ است، به‌خصوص c. یادآوری می‌کنیم که $f(x)cg(x) \neq 0$. در نتیجه $f(x)Pg(x) \neq 0$ ، بیانگر این است که $R[x]$ دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد.

۲. سری توانی $R[[x]]$ روی حلقه‌ی R در قسمت (۱) که دارای خاصیت $IMIP$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که هر ایده‌آل ماکسیمال N از $R[[x]]$ به شکل $M + xR[[x]]$ می‌باشد، که M ایده‌آلی از R است. طبق (۱)، دو عضو $f(x)$ و $g(x)$ از $R[[x]]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$ و $f(x)cg(x) \neq 0$. سپس $f(x)Ng(x) \ni f(x)cxg(x) \neq 0$ که نتیجه می‌دهد $R[[x]]$ دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد.

با توجه به مطالب ذکر شده در فصل‌های قبل مشاهده کردیم که حلقه‌ی R وجود دارد که خاصیت IFP دارد اما $R[X]$ خاصیت IFP ندارد. اما اگر R آرمنداریز و دارای خاصیت IFP باشد در این صورت $R[x]$ نیز دارای خاصیت IFP است.

سوال: حال سوالی که در این قسمت مطرح می‌شود این است که اگر R یک حلقه‌ی آرمنداریز و دارای خاصیت $IMIP$ باشد، آیا $R[x]$ نیز دارای خاصیت $IMIP$ است؟

اماهمچنان پاسخی برای این سوال ذکر نشده است.

مفاهیم حلقه‌ی آرمنداریز و حلقه‌ی $IMIP$ طبق مثال زیر مستقل از یکدیگر می‌باشند.

مثال ۱۱.۱.۵. ۱. برای یک حلقه‌ی ساده‌ی A ، $R = Mat_n(A)$ و $n \geq 2$، طبق قضیه ۵.۱.۴، دارای خاصیت $IMIP$ است، اما طبق [۲۳ ، ملاحظه ۳,۱] یا مثال ۲.۱.۲، آرمنداریز نمی‌باشد.

۲. حلقه‌ی $R = U_2(A)$ روی حلقه‌ی تقلیل‌یافته‌ی A، طبق گزاره‌ی ۷.۲.۲، آرمنداریز است اما طبق مثال ۷.۱.۴، دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد.

باید توجه کنیم که حلقه‌های آبلی تعمیمی از حلقه‌های IFP هستند. اما مفهوم حلقه‌ی $IMIP$ و حلقه‌ی آبلی طبق مثال زیر و ملاحظه ۶.۱.۴ قسمت (۱) مستقل از یکدیگر هستند.

مثال ۱۲.۱.۵. زیر حلقه‌ی

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a - b \equiv c \equiv 0 \ (mod 2) \right\}$$

از حلقه‌ی $Mat_2(\mathbb{Z}_2)$ در مثال ۱۰.۲.۲، در نظر می‌گیریم. آن‌گاه R طبق برهان در مثال ۱۰.۲.۲، آبلی است. حال فرض کنیم M ایده‌آل ماکسیمال دلخواهی از R باشد. پس M باید شامل ماتریس

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ باشد که $\beta \neq 0$. بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

در نتیجه:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

اما

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

از این‌رو R دارای خاصیت $IMIP$ نمی‌باشد.

مراجع

[1] Annin, S., Associated primes over skew polynomial rings, *Comm. Algebra*, **30**, 5, 2511–2528, 2002.

[2] D.D. Anderson and V. Camillo, Armendariz rings and Gaussian rings, *Comm. Algebra*, **26**, 7, 2265-2272, 1998.

[3] D.D. Anderson, V. Camillo, Semigroups and rings whose zero products commute, *Comm. Algebra*, **27**, 2847-2852, 1999.

[4] E.P. Armendariz, A note on extensions of Baer and P.P.-rings, *J. Austral. Math. Soc.* **18**, 470-473, 1974.

[5] H.E. Bell, Near-rings in which each element is a power of itself, *Bull. Austral. Math. Soc.* **2**, 363-368, 1970.

[6] G.F. Birkenmeier, H.E. Heatherly, E.K. Lee, Completely prime ideals and associated radicals, *Proc. Biennial Ohio State-Denison Conference (1992), edited by S.K. Jain and S.T. Rizvi. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong (1993)*, 102-129.

[7] P.M. Cohn, Reversible rings, *Bull. London Math. Soc.* **31**, 641-648, 1999.

[8] L. Motais de Narbonne, Anneaux semi-commutatifs et unis riels anneaux dont les id aux principaux sont idempotents, *Proceedings of the 106th National Congress of Learned Societies (Perpignan, 1981)*, 71-73, 1982.

[9] J.L. Dorroh, Concerning adjunctions to algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**, 85-88, 1932.

[10] K.R. Goodearl, Von Neumann Regular Rings, *Pitman, London*, 1979.

[11] J. Hannah and K.C. O'meara, Maximal quotient rings of prime group algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **65**, 1, 1-7, 1977.

[12] C. Huh, S.H. Jang, C.O. Kim and Y. Lee, Rings whose maximal one-sided ideals are two sided, *Bull. Korean Math. Soc.* **39**, 3, 411-422, 2002.

[13] C. Huh, Y. Lee, and A. Smoktunowicz, Armendariz rings and semicommutative rings, *Comm. Algebra*, **30** no. 2, 751-761, 2002.

[14] S.U. Hwang, Y.C Jeon, and Y. Lee, Structure and topological conditions of NI rings, *J. Algebra*, **302**, no. 1, 186-199, 2006.

[15] Y.C. Jeon, H.K. Kim, Y. Lee, and J.S. Yoon, On weak Armendariz rings, *Bull. Korean Math. Soc.* **46**, 1, 135-146, 2009.

[16] M. Kheradmand, H.K. Kim, T.K. Kwak, and Y. Lee, Reflexive property on nil ideals.

[17] N.K. Kim, and Y. Lee, Armendariz rings and reduced rings, *J. Algebra*, **223**, 2, 477-488, 2000.

[18] N.K. Kim, Y. Lee, Extensions of reversible rings, *J. Pure App. Algebra*, **185**, 1-3, 207-223, 2003.

[19] J. Krempa, D. Niewieczerzal, Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings, *Bull. Acad. polon. Sci. Ser. Sci., Math. Astronom, Phys.* **25**, 851-856, 1977.

[20] J. Lambek, On the representation of modules by sheaves of factor modules, *Canad. Math. Bull.* **14**, 3, 359-368. 1971.

[21] J.C. McConnell, J.C Robson, Noncommutative Noetherian rings, *Wiley, New York*, 1987.

[22] M. Nagata, Local rings, *Interscience, New York*, 1962.

[23] S. Chhawchharia, and M.B. Rege, Armendariz rings, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **73**, 1, 14-17, 1977.

[24] G. Shin, Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* **184**, 43-60, 1973.

[25] A. Smoktunowicz, A simple nil ring exists, *Comm. Algebra*, **30**, 1, 27-59, 2002.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اسموکتونوویچ .... Smoktinowicz
ایده‌آل اول .... prime ideal
ایده‌آل چپ .... left ideal
ایده‌آل راست .... right ideal
ایده‌آل ماکسیمال .... maximal ideal
پوچساز .... annihilator
پوچساز چپ .... left annihilator
پوچساز راست .... right annihilator
توسیع بدیهی .... trivial extension
توسیع دورو .... Dorroh extension
حلقه .... ring
حلقه‌ی آبلی .... abelian ring
حلقه‌ی آرمنداریز .... Armendariz ring
حلقه‌ی اول .... prime ring
حلقه‌ی برگشت‌پذیر .... reversible ring
حلقه‌ی تقسیم .... division ring
حلقه‌ی تقلیل‌یافته .... reduced ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران .... Laurent polynomials ring
حلقه‌ی چهارگان‌های همیلتونی .... Hamilton quaternions ring
حلقه‌ی ددکیند متناهی .... Dedkind-finite ring
حلقه‌ی ساده .... simple ring
حلقه‌ی فون نیومن منظم .... von Neumann regular
حلقه‌ی متقارن .... Symmetric Ring
حلقه‌ی نیم‌اول .... semiprime ring
خاصیت IFP .... insertion of factors property

خودتوان مرکزی	central idempotent
دامنه	domain
رادیکال اول	prime radical
رادیکال براون–مک‌کوی	Brown-McCoy radical
رادیکال پوچ بالایی	upper nilradical
رادیکال پوچ پایینی	lower nilradical
رادیکال جیکبسون	Jacobson radical
عنصر پوچ‌توان	nilpotent element
عنصر خودتوان	idempotent element
عنصر منظم	regular element
عنصر وارون‌پذیر	invertible element
مجموعه‌ی بسته ضربی	multiplicatively closed set
موریتا پایا	morita invariant

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

abelian ring	حلقه‌ی آبلی
annihilator	پوچساز
Armendariz ring	حلقه‌ی آرمنداریز
Brown-McCoy radical	رادیکال براون –مک‌کوی
central idempotent	خودتوان مرکزی
Dedkind-finite ring	حلقه‌ی ددکیند–متناهی
dividion ring	حلقه‌ی تقسیم
domain	دامنه
Dorroh extension	توسیع دورو
Hamilton quaternions ring	حلقه‌ی چهارگان‌های همیلتونی
idempotent element	عنصر خودتوان
insertion of factors property	خاصیت IFP
invertible element	عنصر وارون‌پذیر
Jacobson radical	رادیکال جیکبسون
Laurent polynomials ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران
left annihilator	پوچساز چپ
lower nilradical	رادیکال پوچ پایینی
maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
morita invariant	موریتا پایا
multiplicatively closed set	مجموعه‌ی بسته ضربی
nilpotent element	عنصر پوچ‌توان
prime ideal	ایده‌آل اول
prime radical	رادیکال اول
prime ring	حلقه‌ی اول
reduced ring	حلقه‌ی تقلیل‌یافته

عنصر منظم .... regular element
حلقه‌ی برگشت‌پذیر .... reversible ring
حلقه .... ring
پوچساز راست .... right annihilator
ایده‌آل راست .... right ideal
حلقه‌ی نیم‌اول .... semiprime ring
حلقه‌ی ساده .... simple ring
اسموکتونوویچ .... Smoktunowicz
حلقه‌ی متقارن .... Symmetric Ring
توسیع بدیهی .... trivial extension
رادیکال پوچ بالایی .... upper nilradical
حلقه‌ی فون نیومن منظم .... von Neumann regular
رادیکال ودربورن .... Wedderburn radical

نمایه

Aabstract

Insertion-of-factors-property, which was introduced by Bell, has a role in the study of various sorts of zero-divisors in noncommutative rings.
After the preliminary definitions, in chapter 2,we concern the structures of Armendariz rings and semicommutative rings which are generalizations of reduced rings, the polynomial rings over semicommutative rings, and the relationships between Armendariz rings and semicommutative rings.
In chapter 3, we continue the study of reversible rings by Cohn. We first consider properties and basic extensions of reversible rings and related concepts to reversible rings, including some kinds of examples needed in the process. We next show that polynomial rings over reversible rings need not to be reversible, and sequentially argue about the riversibility of some kinds of polynomial rings. Moreover we prove that if R is reduced ring then $R[x]/\langle x^n\rangle$ is a reversible ring, where $\langle x^n\rangle$ is the ideal generated by x^n and n is a positive integer.
In chapter 4 and 5, We in this note consider this property in the case that factors are restricted to maximal ideals. A ring is called $IMIP$ when it satisfies such property. It is shown that the Dorroh extension of A by K is an $IMIP$ ring if and only if A is an IFP ring without identity, where A is a nil algebra over a field K. The structure of an $IMIP$ ring is studied in relation to varsioun kinds of rings which have roles in noncommutative ring theory.

Keywords IFP ring, IMIP ring, maximal ideal, Dorroh extension, Armendariz ring, reversible ring.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

INSERTION-OF-FACTORS-PROPERTY WITH FACTORS MAXIMAL IDEALS

Mitra Rahmati

Supervisor

Dr.E.Hashemi

Advisor

Dr.A.Alhevaz

Sep 2016