بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

**پایان‌نامه کارشناسی ارشد**

# رویکرد تحلیل پوششی داده ها در حل مسائل واگذاری، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر

*فاطمه داداشی تنکابنی*

استادان راهنما

**دکتر جعفر فتحعلی  و دکتر سید هادی ناصری**

استاد مشاور

**دکتر علی ابراهیم نژاد**

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به پدری به استواری کوه و مادری به زلالی چشمه که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان همواره بدرقه راهم است.

تقدیم به خانواده ای به صمیمیت و مهربانی باران که تکیه گاهی همیشگی برای تک تک لحظه های آسان و دشوار زندگی ام است.

تقدیم به دوستی که بودنش معنای واقعی لطف الهی در زندگانی من است و همدلی و همراهی اش دلیل استواری گام هایم شد.

# سپاس گزاری...

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است
و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر
ما گشود
و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.
سپاس پدری را که در سایه‌سار حمایت بی‌دریغش خواستن را آزمودم، تلاش را آموختم و هدف را یافتم.
سپاس مادری را که با تکیه بر مهر پاکش خواسته‌ها را خواستم، زندگی را زیستم و امیدها را یافتم.
از استادان گرانقدر جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی و جناب آقای دکتر هادی ناصری که زحمت راهنمایی
این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.
و از استاد عالیقدر جناب آقای دکتر علی ابراهیم نژاد که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را متحمل شدند،
صمیمانه تشکر می‌کنم.
در پایان از اساتید ارزشمند جناب آقای دکتر مجتبی غیاثی و جناب آقای دکتر مهرداد غزنوی که زحمت
داوری این پایان‌نامه را پذیرفته‌اند، کمال سپاس‌گذاری را دارم.

فاطمه داداشی تنکابنی
شهریور ۱۳۹۵

# تعهدنامه

اینجانب **فاطمه داداشی تنکابنی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **رویکرد تحلیل پوششی داده ها در حل مسائل واگذاری، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر** ، تحت راهنمایی **دکتر جعفر فتحعلی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه داداشی تنکابنی
شهریور ۱۳۹۵

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

مسائل واگذاري، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر از مهمترین و موفق‌ترین موضوعات در زمینه تحقیق و از مسائل برنامه‌ریزي خطي با ساختار شبکه هستند که در بسیاري از موقعیت‌ها کاربرد دارند و در ادبیات مورد توجه بسیاري قرار گرفته‌اند. در مسائل واگذاري، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر استاندارد، یک واحد هزینه انتقال براي هر کمان در نظر گرفته مي‌شود. در بسیاري از موقعیت‌هاي حقیقي، ویژگي‌هاي مختلفي ( هزینه‌ها و سودهاي مختلف ) براي این مسائل در نظر گرفته مي‌شود. به دلیل وقوع مکرر این‌گونه مسائل با ساختار شبکه، نیاز به دست‌کاري براي توسعه کارآمد آن‌ها داریم.

در این پایان‌نامه، تحلیل پوششي داده‌ها (DEA) را براي محاسبه کارایي نسبي هر واحد تصمیم‌گیرنده در این مسائل به‌کار مي‌گیریم. سپس، یک مدل برنامه‌ریزي ریاضي براي توسعه مسأله ارائه شده است، که به‌عنوان یک مدل برنامه‌ریزي خطي عدد صحیح استاندارد براي تعیین یک مسأله با حداکثر کارایي بیان مي‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها؛ کارایی؛ مسأله واگذاری؛ مسأله حمل و نقل؛ مسأله کوتاهترین مسیر؛ ورودی و خروجی؛ رتبه‌بندی.

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# مقدمه اي بر تحليل پوششي داده ها

## ۱.۱ مقدمه

اطلاع از عملکرد واحدهاي نحت نظارت مدير، مهمترين وظيفه مدير در رابطه با تصميم‌گيري‌هاي مناسب به منظور هدايت آن است. پيچيدگي اطلاعات، حجم زياد داده‌ها، اثرات عوامل بيروني، اثرات واحدهاي رقيب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصميم‌گيري‌هاي مناسب ( مثلاً به‌دليل دولتي بودن واحدها ) تغييرات ناگهاني خط مشي به دليل برخوردهاي انفعالي با مشکلات حاد ( مانند تورم، بيکاري و... ) از عواملي است که مدير بدون برخورد علمي نمي‌تواند ازکارکرد واحدها مطلع شود. لذا مدير بايد تصميمات مناسبي را در راستاي بهبود کارايي و اثر بخشي اتخاذ نمايد.

کارايي يا خوب کارکردن يک واحد تابعي از عوامل و شاخص‌هاي درون سازماني است و اثر بخشي يا کارايي خوب يک واحد، تابعي از عوامل و شاخص‌هاي برون سازماني است. اما هدف اصلي مديران، حداکثر استفاده از منابع موجود است تا بتوانند بهترين نتيجه را اتخاذ نمايند. حصول نتيجه خوب با حداکثر استفاده از منابع موجود را بهره‌وري گويند.

## ۲.۱ واحدهاي تصميم‌گيرنده

منظور از واحد تصميم‌گيرنده ( DMUs[1] ) واحدي است که با دريافت بردار ورودي $(x_1, \dots, x_m)$ بردار خروجي $(y_1, \dots, y_s)$ را توليد کند. منظور از واحدهاي تصميم‌گيرنده متجانس اين است که واحدها عمل مشابه دارند و با دريافت ورودي‌هاي مشابه، خروجي‌هاي مشابه توليد مي‌کنند. مانند شعبات يک شرکت خاص يا ادارات يک سازمان دولتي.

فرض کنيم $n$ واحد تصميم گيرنده $DMU_j = (x_j, y_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ داريم و $x_j \neq 0$، $x_j \geq 0, x_j \in R^m$ معرف بردار ورودي و $y_j \neq 0, y_j \geq 0, y_j \in R^s$ معرف بردار خروجي باشد. به اين معنا که ورودی ها و خروجی هایهر واحد تصمیم گیرنده نا منفی بوده و حداقل یک مولفه مثبت دارند.

[1] Decision Making Units

$DMU_o$ $(o \in \{1, \ldots, n\})$ معرف واحد تحت ارزيابي بوده و نماد $(*)$ نشان دهنده بهينه بودن متغير است. ماتريس ورودي $X$، ماتريسي است که ستون‌هاي آن را بردارهاي ورودي $DMU_j$ تشکيل داده است. يعني $X = [x_1, \ldots, x_n]$ و به طور مشابه ماتريس خروجي $Y$ به صورت $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ در نظر گرفته مي‌شود.

## ۳.۱ کارايي

کارايي به معناي خوب کار کردن، تحت تأثير شاخص‌هاي درون سازماني مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از اين قبيل قرار دارد که به‌صورت نسبت خروجي به ورودي بيان مي‌شود:

$$\text{کارایی} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}}$$

کارايي مطلق يک DMU، مقايسه عملکرد آن با استانداردهاي کلي و کارايي نسبي سنجش عملکرد يک واحد نسبت به واحدهاي ديگر آن مجموعه است. چون استانداردهاي کلي معمولاً تعريف نشده و در صورت تعريف شدن، رسيدن به آن مشکل است، لذا کاربرد کارايي نسبي گسترده‌تر از کاربرد کارايي مطلق است.

اگر واحد تصميم‌گيرنده مورد نظر داراي يک ورودي و يک خروجي باشد، با استفاده از رابطه فوق کارايي آن قابل محاسبه بوده و اندازه حاصل، کارايي مطلق آن به شمار مي‌آيد. در صورت وجود چند ورودي و چند خروجي براي واحد تصميم‌گيرنده مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجي به مجموع وزن‌دار شده ورودي به‌صورت

$$E_o = \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_1 y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}}. \qquad (۱.۱)$$

کارايي آن واحد را اندازه‌گيري مي‌کند، که در آن $u_r$ قيمت خروجي $r$ام يعني $y_r (r = 1, \ldots, s)$ و $v_i$ هزينه ورودي $i$ام يعني $x_i (i = 1, \ldots, m)$ است. کارايي فوق به کارايي اقتصادي معروف است.

قابل ذکر است که تخصيص وزن‌هاي مناسب به ورودي‌ها و خروجي‌ها، نقش تعيين کننده‌اي در اندازه کارايي دارد. کارايي نسبي، از تقسيم اندازه کارايي هر واحد به بزرگترين آن‌ها حاصل مي‌شود. بنابراين اندازه کارايي هر واحد، همواره کوچکتر يا مساوي يک بوده و حداقل يک واحد کارايي نسبي برابر يک دارد. به‌طور مثال کارايي نسبي واحد تصميم‌گيرنده $o$ به‌صورت زير حاصل مي‌شود:

$$\mathrm{RE_o} = \frac{\mathrm{E_o}}{\mathrm{max_j}\{E_j\}} \qquad (۲.۱)$$

## ۴.۱ تحليل پوششي داده‌ها

تحليل پوششي داده‌ها [۲] (DEA)، شامل تکنيک‌ها و روش‌هايي براي ارزيابي کارايي و يا سنجش بهره‌وري واحدهاي تصميم‌گيرنده است. در واقع DEA تعميم کار فارل[۳] در ابداع روش غير پارامتري است. فارل

[۲] Data Envelopment Analysis

[۳] Farell

با استفاده از ورودي‌ها و خروجي‌هاي واحدهاي تصميم‌گيرنده و اصول حاکم بر آن‌ها، مجموعه‌اي با عنوان مجموعه امکان توليد ارائه و قسمتي از مرز آن را به عنوان تابع توليد معرفي نمود. اين مرز را مرز کارا نيز مي‌نامند و واحدهاي تصميم‌گيرنده‌اي که روي اين مرز قرار مي‌گيرند کارا ارزيابي مي‌شوند.

از آنجائي‌که DEA تکنيک ارزيابي کارايي نسبي واحدهاي تصميم‌گيرنده است، حداقل يکي از واحدها روي مرز و بقيه واحدها در زير آن قرار دارند. نام تحليل پوششي داده‌ها از ويژگي پوششي بودن منشأ گرفته است. اين روش در مقايسه با روش هاي قبلي داراي مزيت هايي است که در ادامه به آن اشاره ميکنيم.

در روش‌هاي DEA بر خلاف برخي روش‌هاي عددي، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصيص آن‌ها به ورودي‌ها و خروجي‌ها لازم نيست. همچنين اين روش‌ها نيازي به اشکال تابعي از قبل تعيين شده ( مانند رگرسيونهاي آماري ) و يا شکل صريح تابع توليد ( مانند برخي روش‌هاي پارامتري ) ندارند.

تحليل پوششي داده‌ها امکاناتي را براي مطالعه واحدهايي با چندين ورودي و خروجي فراهم مي‌کند. روش تحليل پوششي داده‌ها بر پايه جبرخطي بنا نهاده شده است و توانايي آن بيشتر به دليل استفاده از برنامه‌ريزي خطي است. برنامه‌ريزي خطي، تحليل پوششي داده‌ها را قادر مي‌سازد تا از روش‌هاي حل مسأله برنامه‌ريزي خطي و قضاياي دوگاني استفاده کند و به اين ترتيب منبع و مقدار ناکارايي را براي هر ورودي و خروجي مشخص کند.

DEA همچنين فرصت‌هاي زيادي را براي همکاري ميان تحليل‌گر و تصميم‌گيرنده ايجاد مي‌کند. اين همکاري مي‌تواند در راستاي انتخاب ورودي و خروجي واحدهاي تحت ارزيابي و چگونگي عملکرد و الگويابي نسبت به مرز کارا باشد.

## ۵.۱ تابع توليد

رابطه عملکرد با عوامل تأثير گذار بر آن، تابعي است که به تابع توليد [۴] معروف است و به صورت $y = F(x)$ تعريف مي‌شود. با داشتن اين تابع مي‌توان در مورد کارا بودن يا نبودن واحدهاي تصميم گيرنده نظر داد. اما به دليل چند مقداره بودن تابع توليد، پيچيدگي فرآيند توليد و ... تابع توليد در دست نمي‌باشد.

اگر فقط يک عملکرد مد نظر باشد، تابع فوق، تابع يک مقداري است. در حالتي که $F$تابع يک مقداري نباشد، تابع فوق به صورت زير خواهد بود:

$$(y_1, \ldots, y_s) = (F_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, F_s(x_1, \ldots, x_m))$$

که بردار $(x_1, \ldots, x_m)$ بردار $(y_1, \ldots, y_s)$ را توليد مي‌کند. بردار $(x_1, \ldots, x_m)$ بردار ورودي و بردار $(y_1, \ldots, y_s)$ بردار خروجي هستند.

تابع توليد تابعي است که براي هر ترکيب از ورودي‌ها، بيشترين خروجي ممکن را توليد مي‌نمايد. واضح است که به‌دست آوردن صورت دقيق و رياضي تابع توليد کار دشواري است. دو روش براي يافتن تقريبي از تابع توليد مورد استفاده قرار مي‌گيرد:

[۴] Production Function

۱. روش هاي پارامتري : مانند مينيمم نمودن ماكزيمم انحرافات، كمترين مجموع مربعات و مينيمم نمودن مجموع قدر مطلق انحرافات.

۲. روش هاي غير پارامتري : مانند روش فارل.

آن‌چه كه در تحليل پوششي داده‌ها مورد بررسي قرار مي‌گيرد، روش غير پارامتري است.

## ۶.۱ برخي اصول حاكم بر DEA

فرض كنيد $n$ واحد تصميم گيرنده با بردارهاي ورودي $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ و بردارهاي خروجي $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$، $j = 1, \dots, n$ موجود است. تمامي ورودي‌ها و خروجي‌ها نامنفي‌اند و حداقل يک مؤلفه مثبت دارند. ورودي و خروجي واحدها بايستي در اصول زير نيز صدق كنند:

۱. داده‌هاي ثابت.

۲. ورودي‌ها و خروجي‌هاي واحدها بايستي نظير به نظير هم جنس باشند.

۳. خروجي‌ها فقط وابسته به همين ورودي‌ها تعريف شده باشد.

۴. $n >> 3(m+s)$ ، يعني $n$ خيلي خيلي بزرگتر از $3(m+s)$ باشد.

لازم به ذکر است که مورد چهارم به‌صورت تجربي به‌دست آمده است و به اين معنا است که اگر تعداد DMU ها در مقایسه با تعداد ورودی ها و خروجی ها اختلاف چندانی نداشته باشد، پس از حل مشاهده می‌شود که بیشتر DMU ها کارا خواهند بود.

## ۷.۱ مجموعه امكان توليد ( PPS[۵] ) و مدل CCR[۶]

در ابتدا برخي از تعاريف مقدماتي را بيان مي‌كنيم.

**تعريف ۱.۷.۱.** فرض كنيد $n$ واحد تصميم‌گيرنده با بردارهاي ورودي $x_j=(x_{1j}, \dots, x_{mj})$ و بردارهاي خروجي $Y_j=(y_{1j}, \dots, y_{sj}), j = 1, \dots, n$ موجود است و $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ برداري نامنفي باشد.

در اين صورت ورودي‌ها و خروجي‌هاي مجازي به‌صورت زير تعريف ميشود:

$$\text{ورودی مجازی} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

$$\text{خروجی مجازی} = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$$

يک واحد مجازي، واحدي است كه ورودي يا خروجي آن مجازي باشد.

[۵] Production Possibility Set

[۶] Chanes, Cooper, Rodes

**تعریف ۲.۷.۱.** $DMU_k$ بر $DMU_h$ غالب است اگر و فقط اگر

$$x_k \leq x_{\mathrm{h}} \quad , \quad y_{\mathrm{k}} \geq y_{\mathrm{h}}$$

و نامساوي فوق لااقل در یک مؤلفه اکید باشد.

**تعریف ۳.۷.۱.** مجموعه واحدهاي مجازي به صورت زیر تعریف میشود:

$$\{\ (x, y)|\ x = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j \quad , \quad y = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j \ \ , \ \ \lambda_j \geq ۰ \ \ , \ \ j = ۱, \ldots, n\ \}$$

**تعریف ۴.۷.۱.** $DMU_j$ $(j = ۱, \ldots, n)$ را کاراي نسبي گویند اگر و فقط اگر هیچ واحد مجازي یافت نشود که غالب بر $DMU_j$ باشد.

مجموعه همه فعالیت‌هاي شدني، مجموعه امکان تولید نامیده مي‌شود و به‌صورت زیر تعریف مي‌شود:

$T = \{(X, Y)$ : نامنفی بتواند Y نامنفی را تولید کند X$\}$

براي ساخت این مجموعه، اصول حاکم بر تکنولوژي تولید را مي‌پذیریم که اساس مدل‌هاي مختلف DEA مي‌باشد. مجموعه $T_{\mathrm{c}}$ در اصول زیر صدق مي‌کند:

**اصل ۱ (شمول مشاهدات):** همه فعالیت‌هاي مشاهده شده، یعني به ازاي هر $j = ۱, ..., n$ $DMU_j$ها به T تعلق دارند. این بدیهي ترین اصلي است که روي T تحمیل شده است و همه مدل‌هاي DEA این اصل را دارا هستند.

**اصل ۲ (بیکراني اشعه یا بازده به‌مقیاس ثابت):** به‌ازاي هر $(x, y) \in T$ و هر $\lambda \geq ۰$ داریم $(\lambda x, \lambda y) \in T$ یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\, (x, y) \in T\ ,\ \forall\ \lambda \geq ۰\ ; (\lambda x, \lambda y) \in T.$$

یعنی هر مضربی از ورودی ها همان مضرب از خروجی ها را تولید می‌کند. **اصل ۳ (امکان پذیري [۷]):**

$$\forall\, (\overline{x}, \overline{y}) \in T, \begin{cases} \forall x; \ \ x \geq \overline{x} \implies (x, \overline{y}) \in T \\ \forall y; \ \ y \leq \overline{y} \implies (\overline{x}, y) \in T \end{cases}.$$

این اصل بیان مي‌کند که اگر خروجي $\overline{y}$ توسط $\overline{x}$ تولید شود، آنگاه همین خروجي توسط هر ورودي بزرگتر از $\overline{x}$ نیز مي‌تواند تولید شود و همچنین هر خروجي کمتر از $\overline{y}$ نیز مي‌تواند توسط ورودي $\overline{x}$ تولید شود.

**اصل ۴ ( تحدب [۸]):**

$$\forall\, (x, y)\, , (\overline{x}, \overline{y}) \in T,\ \forall \lambda \in [۰, ۱]; \quad (\lambda x + (۱ - \lambda)\, \overline{x}\, ,\ \lambda y + (۱ - \lambda)\, \overline{y}) \in T.$$

به عبارت دیگر T یک مجموعه محدب است.

**اصل ۵ (کمینه برون‌یابي):** $T_{\mathrm{c}}$ را کوچکترین مجموعه در نظر مي‌گیریم که در اصول اول تا چهارم صدق کند. حال با توجه به اصول فوق مجموعه $T_{\mathrm{c}}$ ، به‌عنوان مجموعه امکان تولید معرفي مي‌شود.

$$\mathrm{T_c}{=}\{(x, y) \mid x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j, \quad y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j, \quad \lambda_j \geq ۰ \quad \forall j\}$$

[۷] Plausibility

[۸] Convexity

مرز مجموعه $T_c$ يک سطح قطعه‌اي خطي است و مرز کارا [۹] ناميده مي‌شود.

هر واحدي که روي اين مرز قرار داشته باشد، کاراي نسبي است و در غير اين صورت ناکارا مي‌باشد. حال با داشتن مجموعه $T_c$ مي‌خواهيم بدانيم $DMU_o$ روي مرز قرار دارد يا خير. اگر $DMU_o$ روي مرز قرار نداشته باشد؛ به روش‌هاي مختلف مي‌توان آن را به سوي مرز سوق داد که مهمترين اين روش‌ها عبارتند از:

۱. کاهش ورودي‌ها.

۲. افزايش خروجي‌ها.

۳. کاهش ورودي‌ها و افزايش خروجي‌ها به طور همزمان.

براي حالت اول، امکان توليدي مانند $(\theta x_\circ, y_\circ)$ را در نظر بگيريد به طوري که $\theta \geq \circ$ مقداري است که $(\theta x_\circ, y_\circ)$ روي مرز $T_c$ قرار گرفته، در اين صورت $(\theta x_\circ, y_\circ)$ غالب بر $(x_\circ, y_\circ)$ خواهد بود، ازطرفي اين امکان توليد متعلق به $T_c$ باشد به دنبال يافتن حداقل $\theta$ هستيم که در خواص فوق صدق مي‌کند؛ پس براي اين منظور مدل زير را حل مي‌کنيم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ s.t \quad & (\theta x_\circ, y_\circ) \in T_c, \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

که در اين حالت،صورت پوششي [۱۰] مدل CCR در ماهيت ورودي[۱۱] به‌صورت زير به‌دست خواهد آمد

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ s.t \quad & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_\circ, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_\circ, \\ & \lambda_j \geq \circ, \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

در جواب بهينه مدل فوق اگر $\theta^* < 1$ در اين صورت $DMU_o$ ناکارا است و اگر $\theta^* = 1$ يعني $DMU_o$ روي مرز قرار دارد و کارا مي‌باشد. مدل (۴.۱) همواره شدني است، زيرا؛ $\theta = 1$ و $\lambda_\circ = 1$ و $\lambda_j = \circ$، $j = 1, ..., n$ $j \neq o$ يک جواب شدني است و مي‌توان نتيجه گرفت $\theta^* \leq 1$. همچنين هر جواب شدني $\theta$ همواره مثبت است.

دوگان مدل (۴.۱)، که صورت مضربي[۱۲]مدل CCR در ماهيت ورودي نام دارد، به صورت زير

[۹] Efficient Frontier

[۱۰] Envelopment Form

[۱۱] Input Orientation

[۱۲] Multiplier Form

است:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \\ s.t. & \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & v_i, u_r \geq 0, \qquad \forall i, r. \end{array} \tag{۵.۱}$$

چون صورت پوششي، شدني است و جواب متناهي دارد، پس صورت مضربي نيز شدني است و جواب متناهي دارد. از طرفي طبق قضيه ضعيف دوگاني $u^* y_0 \leq 1$ .

**قضيه ۵.۷.۱** (۲۴،۱۳.۹.۴). *$DMU_0$ کاراي غالب ( پاراتو [۱۳]) است اگر و فقط اگر مدل (۵.۱) جواب بهينه اي مانند $(u^*, v^*)$ داشته باشد به طوري‌که $u^*>0$ و $v^*>0$ و $u^* y_0 = 1$ .*

حال واحدي را در نظر مي‌گيريم که با ورودي $x_0$ خروجي $\varphi y_0$ را توليد مي‌کند واضح است که $(x_0, \varphi y_0)$ ، به ازاي $\varphi > 1$ واحد تصميم‌گيرنده $(x_0, y_0)$ را مغلوب مي‌نمايد. براي به دست آوردن که به ازاي آن $(x_0, \varphi y_0)$ روي مرز قرار داشته باشد مدل زير را حل مي‌کنيم:

$$\begin{array}{ll} \max & \varphi, \\ s.t. & (x_0, \varphi y_o) \in T_c. \end{array} \tag{۶.۱}$$

که در اين حالت ، صورت پوششي مدل CCR در ماهيت خروجي [۱۴] به‌دست خواهد آمد که به‌صورت زير است:

$$\begin{array}{ll} \max & \varphi, \\ s.t. & \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq x_0, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq \varphi y_0, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{۷.۱}$$

$\varphi = 1$ و $\lambda_0 = 1$ و $\lambda_j = 0$ ، $j = 1, \ldots, n$ ، $j \neq 0$ يک جواب شدني براي اين مدل است. پس در بهينگي $\varphi^* \geq 1$ . اگر $\varphi^* = 1$ آن گاه $DMU_0$ کارا است و اگر $\varphi^* > 1$ يعني $DMU_0$ ناکارا است.

دوگان مدل (۷.۱) که به صورت مضربي مدل CCR در ماهيت خروجي معروف است، به صورت

[۱۳] Pareto
[۱۴] Output Orientation

زير است:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& v_i, u_r \ge 0, \qquad \forall i, r.
\end{aligned} \tag{۸.۱}$$

**تعريف ۶.۷.۱.** $DMU_o$ به مفهوم پاراتو كارا است، اگر و فقط اگر امكان بهبود در هيچ يک از وروديها و خروجيها بدون بدتر شدن ساير وروديها و يا خروجيها وجود نداشته باشد. به عبارتي؛ هر واحد كاراي غالب است اگر و فقط اگر پاراتو كارا باشد.

براي حالت سوم، $DMU_o$ را در راستاي برداري مانند $d$ با كاهش ورودي ها و افزايش خروجي ها ميتوان روي مرز كارا آورد، يعني با حداكثر كاهش در وروديها و حداكثر افزايش در خروجيها در راستاي بردار $d$ ، $DMU_o$ ميتواند روي مرز قرار گيرد. مسأله متناظر بهصورت زير خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta \\
s.t. \quad & (x_o - \theta d_1, y_o + \theta d_2) \in T_c.
\end{aligned} \tag{۹.۱}$$

كه در آن $0 \le d = (d_1, d_2)$ . با در نظر گرفتن شرايط عضويت در $T_c$ مدل زير را داريم:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le x_o - \theta d_1, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge y_o + \theta d_2 \\
& \lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

در حالتي كه $d = (x_o, y_o)$ باشد، مسأله به صورت زير تبديل ميشود ( كه به مدل تركيبي معروف است ).

$$\begin{aligned}
\max \quad & \theta \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le x_o (1 - \theta), \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge y_o (1 + \theta), \\
& \lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

$\theta^*$ نميتواند بزرگتر مساوی يک باشد، زيرا در اين صورت $x_o \le 0$ ميشود و اين با فرضيات اوليه در تناقض است. ازطرفي طبق شرايط حالت سوم بايد $\theta^* \ge 0$ . بديهي است كه اگر $0 < \theta^* < 1$ ؛ آن گاه $DMU_o$ ناكارا است و در حالتي كارا خواهد بود كه $\theta^* = 0$.

در صورت مضربي CCR مجهولات عبارتند از $u=(u_1,\dots,u_s)$ و $v=(v_1,\dots,v_m)$ ، تعداد متغيرها $m+s$ و تعداد قيود $n+1$ مي‌باشد. به تجربه ثابت شده است كه بايستي $n \geq 3(m+s)$ باشد. همچنين با توجه به اينكه عامل بحراني در مسائل برنامه‌ريزي خطي، تعداد قيدهاي مستقل است، از اين رو حل مدل پوششي كه داراي قيدهاي كمتري است بيشتر مورد توجه قرار مي‌گيرد.

مدل CCR (صورت پوششي) را با اضافه كردن متغيرهاي كمكي به صورت زير نشان مي‌دهيم:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + s^- = \theta x_o, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - s^+ = y_o, \\
& s^- \geq 0,\ s^+ \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۲.۱}
$$

در مدل فوق اگر $\theta^*<1$ آن گاه $DMU_o$ ناكارا مي‌باشد، اما اگر $\theta^*=1$ دو حالت اتفاق مي‌افتد كه بر مبناي آن دو تعريف ارائه مي‌كنيم.

**تعريف ۷.۷.۱.** اگر در مدل پوششي CCR در ماهيت ورودي $\theta^*=1$ و در تمامي جواب‌هاي بهينه مقادير متغيرهاي كمكي برابر صفر باشد، آنگاه $DMU_o$ كاراي قوي يا كاراي پاراتو مي‌باشد، ولي اگر در بعضي از جواب‌هاي بهينه حداقل يكي از متغيرهاي كمكي مخالف صفر باشد، آنگاه $DMU_o$ كاراي ضعيف مي‌باشد.

**تعريف ۸.۷.۱.** در مدل‌هاي ذكر شده هرگاه $\theta^*=1$ گويند واحد تحت ارزيابي به مفهوم شعاعي كارا است كه ممكن است اين كارايي قوي يا ضعيف باشد. در كارايي شعاعي براي رسيدن به واحد مجازي روي مرز، ورودي‌ها در امتداد يک شعاع منقبض و يا خروجي‌ها در امتداد يک شعاع منبسط مي‌شوند.

**قضيه ۹.۷.۱** (۲۴،۵.۱۳.۴). *در جواب بهين مدل (۱۲.۱) ، $\theta^*=1$ و $\mathrm{s}^{-*}=s^{+*}=0$ اگر و فقط اگر واحد تحت ارزيابي پاراتو كارا باشد.*

**تعريف ۱۰.۷.۱.** مقدار $\theta^*$ در صورت پوششي CCR در ارزيابي $DMU_o$ را كارايي تكنيكي آن واحد تصميم گيرنده و $1-\theta^*$ را ناكارايي تكنيكي آن گويند.

بر اين مبنا $(1-\theta^*)x_o$ مقدار ناكارايي ورودي واحد تحت ارزيابي است. بنابراين واحد تحت ارزيابي با كاهش $(1-\theta^*)x_o$ از مقدار ورودي‌هايش، مي‌تواند به لحاظ مصرف ورودي داراي عملكردي كارا باشد.

صورت پوششي CCR در ماهيت ورودي به صورت ماتريسي چنين است:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. \quad & \\
& X\lambda + s^- = \theta x_o, \\
& Y\lambda - s^+ = y_o, \\
& \lambda \geq 0,\ s^- \geq 0,\ s^+ \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۳.۱}
$$

همان‌طور که گفته شد، در حالتي که $\theta^* = ۱$ اگر $s^{+*} \neq ۰$ (معادل با کمبود توليد به اندازه $s^{+*}$ ) و يا $s^{-*} \neq ۰$ ( معادل با هدر رفتن ورودي به اندازه $s^{-*}$ ) $DMU_o$ کاراي ضعيف است. براي مشخص نمودن بردار ورودي هدر رفته و يا بردار خروجي کم توليد شده مدل را در دو فاز حل مي‌کنيم.
فاز اول:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ s.t. \quad & \\ & X\lambda \leq \theta x_۰, \\ & Y\lambda \geq y_۰, \\ & \lambda \geq ۰, \quad s^- \geq ۰, \quad s^+ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

با به کار بردن $\theta^*$ به دست آمده از فاز اول مدل ذيل را حل مي‌کنيم:
فاز دوم:

$$\begin{aligned} \max \quad & ۱s^+ + ۱s^- + \theta \\ s.t. \quad & \\ & X\lambda - s^+ = \theta x_۰, \\ & Y\lambda + s^- = y_۰, \\ & \lambda \geq ۰, \quad s^+ \geq ۰, \quad s^- \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

## ۸.۱ مدل BCC[۱۵]

مدل BCC توسط بنکر و همکارانش [۸] در سال ۱۹۸۴ ارائه گرديد. مجموعه امکان توليد در اين مدل که با حذف اصل بيکراني اشعه از مجموعه اصول موضوعه به دست مي‌آيد به‌صورت زير است:

$$\mathrm{T}_v = \{(x,y)| \ x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j, \ y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j, \ \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \ \lambda_j \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n\}$$

بنابراين صورت پوششي مدل BCC در ماهيت ورودي براي ارزيابي $DMU_o$ به‌صورت زير است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ s.t. \quad & \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_۰, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j \geq y_۰, \\ & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \\ & \lambda_j \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n. \end{aligned} \tag{۱۶.۱}$$

در واقع مدل BCC همه خواص مدل CCR را دارد، تنها اصل بی کرانی اشعه از آن حذف شده که به همين دليل مرز کارايی مدل BCC به وسيله پوسته محدب DMU های مشاهده شده گسترده می‌شود.

[۱۵] Banker, Charnes, Cooper

مدل BCC قید تحدب را نسبت به مدل CCR اضافه دارد. دوگان این مسأله به‌صورت زیر نمایش داده مي‌شود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_o, \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + u_o \leq 0, \\
& v_i, u_r \geq 0, \quad \forall i, r.
\end{aligned} \tag{۱۷.۱}$$

تعاریف و همچنین قضایاي عنوان شده را مي‌توان براي مدل BCC نیز بیان کرد.

مجموعه‌هاي امکان تولید مدل‌هاي CCR و BCC، تکنولوژي‌هایي را به عملکرد واحدها نسبت مي‌دهند که در مقالات DEA از آن‌ها به‌ترتیب با عنوان تکنولوژي با بازده به مقیاس ثابت [۱۶] یعنی هر مضربی از ورودی ها همان مضرب از خروجی ها را تولید می‌کند و تکنولوژي با بازده به مقیاس متغیر [۱۷] یعنی هر مضرب از ورودی ها همان مضرب یا کتر و یا بیشتر از خروجی ها را تولید می‌کند، نام مي‌برند. علت این امر این است که واحدهاي کارا در مدل CCR همگي داراي بازده به مقیاس ثابت مي‌باشند، در حالي که واحدهاي کارا در مدل *BCC* ممکن است داراي بازده به مقیاس افزایشي، کاهشي و یا ثابت باشند. براي سادگي در نوشتن از این به بعد تکنولوژي با بازده به مقیاس ثابت را با تکنولوژي CRS و تکنولوژي با بازده به مقیاس متغیر را با تکنولوژي VRS نشان مي‌دهیم.

اگر در مدل BCC به جاي قید $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ از قیود $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1$ یا $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq 1$ استفاده شود. به‌ترتیب مدل‌هاي بازده به مقیاس ناکاهشي (CCR–BCC) و بازده به مقیاس ناافزایشی (BCC–CCR) حاصل مي‌شود.

## ۹.۱ مدل T.D.T [۱۸]

تا به اینجا مسأله ارزیابي واحدهاي تصمیم‌گیرنده را از طریق ساخت یک مجموعه امکان تولید با پذیرش اصولي به صورتي که درقبل ذکر شد، مطرح کردیم. اکنون روش ساده‌تر و قابل درک‌تري ارائه خواهیم کرد . فرض کنید $n$ واحد تصمیم‌گیرنده متجانس موجود است که هر کدام از $m$ ورودي براي تولید $s$ خروجي استفاده مي‌نمایند، کارایي مطلق واحد تصمیم‌گیرنده‌ي $o$ام برابر است با:

$$E_o = \frac{u^t y_o}{v^t x_o}$$

و کارایي نسبي واحد تصمیم‌گیرنده $o$ام برابر است با

$$RE_o = max \quad \frac{\frac{u^t y_o}{v^t x_o}}{\max\{\frac{u^t y_j}{v^t x_j}: \quad j=1,\dots,n\}}$$

[۱۶] Constant Return To Scale

[۱۷] Variable Return To Scale

[۱۸] Thampson, Dharmapala,Thrall

مدل فوق به مدل T.D.T معروف است که در آن $u \geq 0$ و $v \geq 0$ بردار وزن خروجي‌ها و بردار وزن ورودي‌هاي واحد تحت ارزيابي هستند.

كارايي نسبي واحد تصميم‌گيرنده $o$ام را مي‌توان به‌صورت زير نيز نوشت:

$$
\begin{aligned}
RE_o = \ & \max \min_{1 \leq j \leq n} \frac{\frac{u^t y_o}{v^t x_o}}{\frac{u^t y_j}{v^t x_j}} \\
& u \geq 0, v \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۸.۱}
$$

با تغيير مدل فوق به مدل کسري زير تبديل مي‌شود:

$$
\begin{aligned}
RE_\circ = \ & \max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r\circ}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i\circ}} \\
& s.t. \\
& \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\
& \quad v_i, u_r \geq 0, \qquad \forall i, r.
\end{aligned}
\tag{۱۹.۱}
$$

**قضيه ۱.۹.۱** (۴،۱۷.۱۵.۲۴). *در جواب بهين مدل فوق همواره يکي از قيود نامساوي به‌صورت تساوي برقرار است.*

توجه داريم که هم كارايي مطلق و هم كارايي نسبي تابعي از وزن‌هاي $u$ و $v$ مي‌باشند. هدف اوليه، محاسبه ي كارايي نسبي واحدها است. مدل کسري صريحاً كارايي مطلق $DMU_\circ$ را ماکزيمم مي‌نمايد اما به‌هر حال مجموعه وزن‌هاي بهينه $(u^*, v^*)$ كارايي نسبي واحد تحت ارزيابي را نيز ماکزيمم مي‌کند، که قضيه فوق بيانگر اين مطلب است.

به‌عبارت ديگر؛ كارايي مطلق هيچ واحدي از يک بيشتر نمي‌شود، در نتيجه كارايي مطلق يکي از واحدها برابر يک است ميبينيم كارايي مطلق واحدها همان كارايي نسبي آن‌ها است.

با اعمال تغيير متغير ديگري مي‌توان مدل کسري CCR را به‌صورت زير نوشت:

$$
\begin{aligned}
RE_\circ = \ & \max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r\circ} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i\circ} = 1, \\
& \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\
& \quad v_i, u_r \geq 0, \qquad \forall i, r.
\end{aligned}
\tag{۲۰.۱}
$$

## ۱۰.۱ واحد الگو و مجموعه هاي مرجع در مدل هاي DEA

يکي از نقاط قوت مدل‌هاي DEA نسبت به روش‌هايي که تا قبل از سال ۱۹۸۷ براي تعيين كارايي مورد استفاده قرار مي‌گرفتند، آن است که اين مدل‌ها علاوه بر تعيين كارايي يا عدم كارايي و رتبه كارايي

هر واحد، براي واحدهاي ناكارا يک الگوي كارا نيز معرفي مي‌كنند كه واحد تحت ارزيابي در صورت رسيدن به آن-از نظر مصرف ورودي و توليد خروجي- داراي عملكردي كارا مي‌شود.

در ادبيات DEA از اين الگو معمولاً با عنوان نقطه تصوير نام مي‌برند. براي هر واحد، مجموعه ي مرجع $E_o$ به‌صورت زير تعريف مي‌شود:

$$E_\circ = \{j | \lambda_j^* \text{در يکی از جواب های بهينه در ارزيابی } DMU_o \text{ در فاز دوم مثبت باشد}\}$$

**قضيه ۱.۱۰.۱** (۵،۲۴.۴). *به ازاي هر $DMU_j, j \in E_\circ$ كاراي قوي* [۱۹] *است.*

تصويرها در مدل DEA از صورت پوششي آن‌ها استخراج مي‌گردد و داراي يک فرم كلي به‌صورت زير است:

$$(x_o, y_o) = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_j \quad , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_j)$$

براي $DMU_\circ$ با بردار ورودي $x_o$ و بردار خروجي $y_o$ امكان توليد

$$(\hat{x}_\circ, \hat{y}_\circ) = (\theta^* x_\circ - s^{-*}, y_o + s^{+*})$$

را فعاليت بهبود يافته گويند كه در حقيقت تصوير $(x_o, y_o)$ روي مرز كاراي قوي مي‌باشد.

**قضيه ۲.۱۰.۱** (۱۵،۲۴.۴). *واحد بهبود يافته، پاراتو كاراست.*

**تعريف ۳.۱۰.۱.** $DMU_\circ$ كاراي رأسي است اگر و فقط اگر مجموعه مرجع آن فقط خودش باشد.

به‌عبارت ديگر، در صورت پوششي مدل CCR داراي جواب بهين منحصر بفرد $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1, e_\circ, 0, 0)$ باشد كه در آن $e_\circ$ يک بردار $n$ تايي با $n-1$ مولفه صفر و يک مولفه ۱ در موقعيت $o$ام مي‌باشد.

**قضيه ۴.۱۰.۱** (۲۵،۱.۹.۴). *$DMU_\circ$ كاراي غير رأسي است اگر و فقط اگر داراي مرجع ديگر غير از خودش باشد به‌عبارت ديگر، جواب بهينه‌اي داشته باشيم كه در آن $\theta^* = 1$ و $\lambda_o^* = 0$.*

## ۱۱.۱ مدل $CCR_\varepsilon$

كوپر و همكارانش در بررسي صورت مضربي مدل CCR دريافتند كه اگر در جواب بهين برخي از مؤلفه‌هاي بردارهاي $u$ و $v$ صفر باشند در اين صورت براي محاسبه كارايي واحد تحت ارزيابي، ورودي‌ها و خروجي‌هاي متناظر با مؤلفه‌هاي صفر $u$ و $v$ ناديده گرفته مي‌شوند. بنابراين ارزيابي صحيحي به‌دست نخواهد آمد. آن‌ها در سال ۱۹۷۹ پيشنهاد كردند كه در مدل مضربي به‌جاي محدوديت‌هاي $u \geq 0$ و $v \geq 0$ از محدوديت هاي $u > 0$ و $v > 0$ استفاده شود. ولي در اين صورت ممكن است مسأله حاصل از محدوديت‌هاي جديد، جواب بهين خود را در ناحيه شدني اختيار نكند و به‌دست آوردن سوپريمم نيز دشوار مي‌شود. براي رفع اين مشكل آن‌ها پيشنهاد كردند كه از محدوديت‌هاي $v \geq 1\varepsilon$ و $u \geq 1\varepsilon$ استفاده شود كه در آن $\varepsilon$ يک عدد غير ارشميدسي و ۱ يک بردار با مؤلفه‌هاي يک است.

---

[۱۹] Strong Efficient

در بسياري از مدل هاي DEA از جمله مدل CCR و BCC براي رفع مشکل صفر بودن وزن‌ها از عدد غير ارشميدسي $\varepsilon$ استفاده مي‌شود. عدد غير ارشميدسي $\varepsilon$ یک عدد مثبت به اندازه كافي كوچک است که از هر عدد مثبت حقيقي کوچک‌تر است. در واقع اين عدد به‌عنوان یک کران پايين براي وزن‌هاي ورودي و خروجي مانع از صفر شدن آن‌ها مي‌گردد،چون ممکن است متغير ها مقادير صفر بگيرند واهميت ورودی ها و خروجی های ذکر شده در تعیین کارایی مورد توجه قرار نگیرد.

بنابراين مدل مضربي CCR در ماهيت ورودي به‌صورت زير بازنويسي مي‌شود:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0, \quad && j = 1, \dots, n, \\
& u_r \geq \varepsilon, && r = 1, \dots, s, \\
& v_i \geq \varepsilon, && i = 1, \dots, m.
\end{aligned}
\tag{۲۱.۱}
$$

دوگان مسأله فوق به‌صورت زير نمايش داده مي‌شود:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta - \varepsilon(\sum_{r=1}^{s} s_r^+ + \sum_{i=1}^{m} s_i^-) \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{i0}, \quad && i = 1, \dots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, && r = 1, \dots, s, \\
& \lambda_j \geq 0, && j = 1, \dots, n, \\
& s_i^-, s_r^+ \geq 0, && \forall i, r.
\end{aligned}
\tag{۲۲.۱}
$$

که مسأله فوق به مدل $CCR_\varepsilon$ مشهور است.

## ۱۲.۱ ويژگي‌هاي مدل تحليل پوششي داده‌ها

روش تحليل پوششي داده‌ها مدل رياضي بسيار قوي براي محاسبه كارايي است. اين مدل داراي ويژگي‌هاي منحصر به‌فردي است که به‌طور خلاصه مي‌توان به موارد زير اشاره کرد:

۱. **ارزيابي واقع بينانه نسبت به روش‌هاي ديگر:** اين روش از مجموعه واحدهاي تصميم گيرنده تعدادي را به‌عنوان كارآ معرفي مي‌كند و به کمک آن‌ها مرز كارآيي را تشكيل مي‌دهد. آن‌گاه اين مرز را ملاک ارزيابي واحدهاي ديگر قرار مي‌دهد. بنابراين ملاک ارزيابي واحدهاي تصميم گيرنده‌اي هستند که در شرايط يکساني فعاليت مي‌کنند.

۲. **ارزيابي توأم مجموعه‌اي از عوامل:** در حالتي که واحد مربوطه داراي چندين ورودي و خروجي

باشد، روش برنامه‌ریزي خطي مي‌تواند ترکیب بهینه‌اي از عوامل ورودي و خروجي را براي یک واحد کارا تعیین کند.

۳. **جبراني بودن مدل‌هاي آن:** این ویژگي به هر واحد تصمیم گیرنده اجازه مي‌دهد کمبود یا ضعف خود را در هر ورودي یا خروجي به کمک سایر ورودي‌ها و خروجي‌ها جبران کند.

۴. **قابلیت تعمیم پذیري و گسترش:** این روش بیش از سایر روش‌ها قابلیت تعمیم و گسترش داشته و به‌کارگیري آن در یک واحد براي یک موضوع، مي‌تواند زمینه را براي کارهاي بعدي فراهم کند.

۵. **به واحد اندازه‌گیري حساس نیست:** با توجه به این‌که مدل‌هاي تحلیل پوششي داده‌ها توسط برنامه‌ریزي خطي حل مي‌شوند، روش برنامه‌ریزي خطي به واحد اندازه‌گیري حساس نیست و بنابراین ورودي‌ها و خروجي‌ها مي‌توانند از واحدهاي اندازه‌گیري مختلفي استفاده کنند [۲۶].

## ۱۳.۱ معایب روش تحلیل پوششي داده‌ها

۱. جهت اندازه‌گیري کارآیي نسبي به کار گرفته شده و کارآیي مطلق را نمي سنجد.

۲. چون تکنیکي غیر پارامتري است، انجام آزمون‌هاي آماري براي آن مشکل است.

۳. اضافه کردن یک واحد جدید به مجموعه واحدهاي قبلي بررسي شده موجب تغییر در امتیاز کارآیي تمامي واحدها مي‌شود.

۴. تعداد مدل‌هاي مورد نیاز و حل آن‌ها به تعداد واحدهاي تحت بررسي است که تا حدودي حجم محاسبات را افزایش مي‌دهد[۲۳].

# فصل ۲

# رویکرد تحلیل پوششي داده‌ها در حل مسأله واگذاري

## ۱.۲ مقدمه

مسائل حمل و نقل، واگذاري و کوتاهترین مسیر از مهمترین مسائل برنامه‌ریزي خطي با ساختار شبکه هستند که در بسیاري از رویدادها مي‌توان آن‌ها را به‌کار گرفت [۱۱]. مسائل حمل و نقل، واگذاري و کوتاهترین مسیر استاندارد تنها یک هزینه یا سود را براي هر انتقال ممکن در نظر مي‌گیرند، در حالي‌که در بسیاري از رویدادهاي واقعي اطراف ما، یک مسأله ممکن است با چندین هزینه و سود همراه باشد.

در فصل‌هاي ۲، ۳ و ۴ مسائل واگذاري، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر استاندارد و روش‌هاي حل آن را به‌طور خلاصه بیان کرده و سپس با در نظر گرفتن چندین هزینه و سود برای هر مسأله آن را تعمیم مي‌دهیم و روشي مبتني بر رویکرد تحلیل پوششي داده‌ها (DEA) براي حل این مسائل با حداکثر کارآیي پیشنهاد مي‌کنیم. این روش را براي متغیرهاي تصمیم با چندین هدف متفاوت به‌کار مي‌بریم به‌گونه‌اي که ممکن است این اهداف در تضاد با یکدیگر نیز باشند. در پایان مسائل حمل و نقل، واگذاري و کوتاهترین مسیر را به‌عنوان یک مسأله برنامه‌ریزي خطي عدد صحیح استاندارد مدل‌بندي خواهیم کرد.

## ۲.۲ مسأله واگذاري[۱]

مسأله واگذاري یکي از موضوعات رایج در مسائل برنامه‌ریزي خطي و مسائل جریان در شبکه است. مسأله واگذاري استاندارد عبارت است از تخصیص بهینه $n$ شغل به $n$ نفر به طوري که با کمترین هزینه یا بیشترین سود همراه باشد. روش‌هاي مختلفي از جمله برنامه‌ریزي خطي استاندارد [۲۱، ۱۹، ۱۰، ۷]،

[۱] Assignment problem

الگوریتم مجارستاني[۲] [۲۰]، شبکههاي عصبي[۳] [۱۸] و الگوریتم ژنتیک[۴] [۶] براي یافتن حل کارآمد تعمیم یافتند.

در مسأله واگذاري استاندارد تنها یک هزینه یا سود براي هر انتقال ممکن در نظر گرفته ميشود در حاليکه، در بسیاري از موقعیتها چندین ورودي و خروجی متفاوت را ميتوان براي هر انتقال ممکن در نظر گرفت. بهعنوان مثال، براي حل مسأله کارگران آموزش دیده در محیطهاي سخت، کمبل[۵] و دیابي[۶] [۱۲] سطح تقاضا در بخشهاي مختلف و قابلیتهاي کارگران موجود را بهعنوان وروديها و در نتیجه کیفیت خدمات و رضایت کارگران را بهعنوان خروجيهاي این مسأله ارائه کردند. آنها تأکید داشتند که استفاده بهینه از نیروي انساني، عملي مهم در حرفههاي خاص همانند پرستاري است. همچنین سوئر [۷] و برا [۸] [۲۲] نیز چندین فاکتور را بر تأمین نیروي انساني در کارخانه تولید باتري مدنظر قرار دادند.

با توجه به آنچه گفته شد، در این نوع مسائل وروديها و خروجيها معمولاً نامتناسب هستند و اندازهگیري کل کارایي، مسألهاي سخت و پیچیده است. در این فصل روش تحلیل پوششی داده ها را براي حل این مشکل ارائه کرده و مسأله واگذاري را با در نظر گرفتن چندین شاخص ورودي و خروجي براي هر تخصیص شدني تعمیم داده و آن را مجدداً به صورت مسأله برنامه ریزی خطی استاندارد فرمولبندي ميکنیم.

## ۳.۲ مدل برنامهریزي خطي مسأله واگذاري

مسأله واگذاري حالت خاصي از مسأله حمل و نقل است که کارگران نمایانگر مبدأها و شغلها نمایانگر مقصدها هستند. همچنین در آن $m = n$ یعنی تعداد مبدأ ها با تعداد مقصدها برابر است و براي هر $i$ و $j$، $s_i = ۱$ و $d_j = ۱$ است، یعني تمام عرضهها و تقاضاها برابر ۱ هستند. فرض کنیم $n$ فرد و $n$ شغل براي واگذاري داریم و تصمیم گیرنده قصد دارد $n$ شغل موجود را به این $n$ نفر به صورت یک به یک واگذار نماید به طوری که بهترین فرد براي هر شغل انتخاب شود. در واقع هیچ فردی بیش از یک کار را انجام ندهد و هیچ کاری نیز به بیش از یک نفر اختصاص نیابد و حداقل مجموع هزینهها یا حداکثر مجموع سودها حاصل شود.

متغیر تصمیم $x_{ij}$ را به این صورت تعریف ميکنیم که $x_{ij} = ۱$، اگر فرد $i$ام به شغل $j$ام اختصاص داده شود $x_{ij} = ۱$ و در غیر اینصورت اگر فرد $i$ به شغل $j$ اختصاص داده نشود $x_{ij} = ۰$ خواهد بود.

---

[۲] Hungarian algorithm

[۳] Neural network

[۴] Genetic algorithm

[۵] Campbell

[۶] Diaby

[۷] Suer

[۸] Bera

مدل برنامه‌ريزي خطي عدد صحيح استاندارد مسأله واگذاري به‌صورت زير است.

$$\begin{aligned} \min(or\max) \quad &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ s.t. \quad & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,\dots,n, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\dots,n, \\ & x_{ij} = 0\ or\ 1. \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

از جمله روش‌هاي حل مسأله واگذاري مي‌توان الگوريتم مجارستاني را نام برد.

## ۴.۲ مسأله واگذاري تعميم يافته

با اصلاح مدل DEA چارنز [۹] و همکارانش [۱۴]، بنکر[۱۰] و همکارانش [۸] مدل‌هايي از DEA (مدل BCC ) بر اساس بازده به‌مقیاس متغیر پیشنهاد شد. یکی از این مدل ها، مدلی است که توسط چن و لو[۱۱] برای مسأله واگذاری ارائه شده است، اما از آنجا که مدل ارائه شده توسط چن و لو یک تابع هدف نمایی و سپس یک تابع هدف لگاریتمی را بدست می‌دهد [۱۶] و حل اینگونه توابع دشوار است، ما در این بخش برای تعمیم مسأله واگذاری با در نظر گرفتن چندین شاخص ورودی و خروجی برای هر انتقال ممکن مدلی بر اساس CCR ارائه می‌کنیم.

فرض کنیم $n$ فرد (مبدأ) برای واگذاری به $n$ شغل (مقصد) وجود دارد و می‌خواهیم به هر نفر تنها یک شغل و هر شغل نیز تنها به یک نفر واگذار گردد. برای هر انتقال ممکن $(i,j)$ ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌ترتیب به‌صورت $X_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}, \dots, x_{ij}^{(k)})$ و $Y_{ij} = (y_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(2)}, \dots, y_{ij}^{(s)})$ نمایش داده می‌شوند. بنابراين، براي هر انتقال ممکن $(i,j)$ ، $s+k$ مقدار وجود دارد، $k$ ورودي $x_{ij}^{(t)},\ t=1,\dots,k$ و $s$ خروجي $y_{ij}^{(r)}, r=1,\dots,s$. براي هر مبدأ $i$ همه مقصدهاي $l$ ،$l=1,\dots,n$ را در نظر مي‌گيريم و هر انتقال $(i,j)$را به‌عنوان یک DMU فرض مي‌کنيم. با فرض مبدأ به‌عنوان يک هدف و با به‌کارگيري رويکرد DEA ، کارايي نسبي واگذاري فرد $i$ به شغل $j$، $j=1,\dots,n$ محاسبه مي‌شود. در ادامه مسأله برنامه‌ريزي کسري زير را حل مي‌کنيم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{e}_{ij} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{k} v_t x_{ij}^{(t)}} \\ s.t. \quad & \\ & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{il}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{k} v_t x_{il}^{(r)}} \le 1, \qquad l = 1,\dots,n, \\ & u_r, v_t \ge \varepsilon, \qquad \forall t, r. \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

[۹] Charnes

[۱۰] Banker

[۱۱] Chen and Lu

که $\varepsilon \geq ۰$ یک عدد غیر ارشمیدسي است. با استفاده از مدل بالا کارايي نسبي واگذاری یک فرد (مبدأ) $i$ به هر شغل (مقصد) $j$ با تغییر $j$ در مدل به‌صورت $\overline{e}_{i۱}, \overline{e}_{i۲}, \ldots, \overline{e}_{in}$ محاسبه مي‌شود. در واقع تابع هدف این مدل، کارایی نسبی تمامی کمان‌های خروجی از یک مبدأ را به همه مقصدها برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده محاسبه می‌کند. از آنجا که حل مدل کسری فوق بسیار دشوار است، می‌توان آن را به کمک تغییر متغیر چارنز و کوپر [۱۳] با اعمال محدودیت $\sum_{t=۱}^{k} v_t x_{ij}^{(t)} = ۱$ به مسأله برنامه‌ریزي خطي معادل زیر تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \overline{e}_{ij} = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ij}^{(r)} \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{t=۱}^{k} v_t x_{ij}^{(t)} = ۱, \\
&\qquad \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{il}^{(r)} - \sum_{t=۱}^{k} v_t x_{il}^{(r)} \leq ۰, \quad l = ۱, \ldots, n, \\
&\qquad u_r, v_t \geq \varepsilon, \qquad\qquad t = ۱, \ldots, k, \ r = ۱, \ldots, s.
\end{aligned} \tag{۳.۲}
$$

به‌طور مشابه براي هر مقصد $j$ به‌عنوان هدف، کارايي نسبی تمامی کمان‌های ورودی به یک مقصد از تمامی مبدأها برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده به کمک مدل زیر محاسبه مي‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ij}^{(r)}}{\sum_{t=۱}^{k} v_t x_{ij}^{(t)}} \\
&s.t. \\
&\qquad \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{lj}^{(r)}}{\sum_{t=۱}^{k} v_t x_{lj}^{(r)}} \leq ۱, \quad l = ۱, \ldots, n, \\
&\qquad u_r, v_t \geq \varepsilon, \qquad \forall t, r.
\end{aligned} \tag{۴.۲}
$$

با حل عددي مدل فوق نیز کارايي نسبي واگذاری هر مبدأ $i$ (هر نفر) به یک مقصد $j$ (یک شغل) با تغییر $i$ در مدل به‌صورت $\tilde{e}_{۱j}, \tilde{e}_{۲j}, \ldots, \tilde{e}_{nj}$ به‌دست خواهد آمد. به‌طور مشابه با تغییر متغیر چارنز و کوپر مدل فوق را نیز مي‌توان به مدل برنامه‌ریزي خطي معادل زیر تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \tilde{e}_{ij} = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ij}^{(r)} \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{t=۱}^{k} v_t x_{ij}^{(t)} = ۱, \\
&\qquad \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{lj}^{(r)} - \sum_{t=۱}^{k} v_t x_{lj}^{(r)} \leq ۰, \quad l = ۱, \ldots, n, \\
&\qquad u_r, v_t \geq \varepsilon, \qquad\qquad \forall t, r.
\end{aligned} \tag{۵.۲}
$$

بنابراین، با توجه به دو مدل (۳.۲) و (۵.۲) براي هر انتقال $(i, j)$ دو اندیس کارايي نسبي $\overline{e}_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ محاسبه مي‌شوند و از میانگین آن‌ها، اندیس جدید $e_{ij}$ به‌صورت زیر به‌دست مي‌آید:

$$
e_{ij} = \frac{\overline{e}_{ij} + \tilde{e}_{ij}}{۲}, \ i = ۱, ۲, \ldots, n, \ j = ۱, ۲, \ldots, n. \tag{۶.۲}
$$

در واقع برای هر انتقال ممکن $(i,j)$ دو اندازه کارایی ( یک اندازه کارایی برای واگذاری نفر $i$ به شغل $j$ و اندازه کارایی دوم برای واگذاری شغل $j$ به نفر $i$ ) با در نظر گرفتن چندین شاخص ورودی و خروجی محاسبه می‌شوند و به کمک میانگین به یک اندیس کارایی تبدیل می‌شوند. در پایان، مدل برنامه ریزی خطی زیر را حل خواهیم کرد:

$$\begin{aligned} e_T = \quad & \min \quad \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(۱-e_{ij})x_{ij} \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱, \qquad\qquad i = ۱,\ldots,n, \\ & \qquad \sum_{i=۱}^{n} x_{ij} = ۱, \qquad\qquad j = ۱,\ldots,n, \\ & \qquad x_{ij} = ۰ \, or \, ۱., \qquad\qquad \forall i,j. \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

تابع هدف مدل فوق اندازه ناکارایی هر واحد را مینیمم می‌کند و حل بهینه این مسأله با ضرایب هزینه $e_{ij}-۱$ با حل بهینه مسأله با ضرایب هزینه $e_{ij}$ با تابع هدف به صورت $\max\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} e_{ij}x_{ij}$ که اندازه کارایی هر واحد را ماکسیمم میکند ، یکسان است. در واقع مدل فوق همان مدل برنامه ریزی خطی مسأله واگذاری استاندارد با ضرایب هزینه جدید $e_{ij}-۱$ است و با الگوریتم سیمپلکس معمولی قابل حل است و از حل عددی آن، جواب بهینه مسأله واگذاری با حداکثر کارایی محاسبه میشود. و با الگوریتم سیمپلکس معمولي مي‌توان آن را حل کرد و از حل عددي آن، کارايي مسأله حمل و نقل محاسبه مي‌شود.

## ۵.۲ نمونه کاربردي

مدير پروژه يک کمپاني بزرگ در نظر دارد در سال آينده ۳ پروژه $R\&D$ را به ۳ تيم $R\&D$ متخصص واگذار کند. هر تيم از لحاظ فني قادر به انجام هر پروژه است. نتيجه هر پروژه بستگي به هر انتصاب دارد. مدير، يک ورودي (نياز مالي) و دو خروجي ( سود ممکن و شاخص به روز رساني ) را به‌عنوان عامل اندازه‌گيري کارآيي واگذاري در نظر دارد. ورودي و خروجي براي هر واگذاري ممکن در جدول ۱.۲ ارائه شده است.

جدول ۱.۲: داده‌هاي ورودي و خروجي

| | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| ۱ | (۴۸/۶, ۷۴/۸, ۳۶/۵) | (۶۷/۵, ۹۶/۲, ۷۸/۰) | (۷۵/۶, ۵۸/۱, ۶۹/۰) |
| ۲ | (۸۶/۱, ۷۵/۵, ۸۰/۷) | (۸۴/۲, ۶۰/۰, ۲۴/۰) | (۹۵/۵, ۹۷/۲, ۸۷/۳) |
| ۳ | (۵۶/۶, ۹۷/۳, ۲۳/۵) | (۸۸/۵, ۷۹/۳, ۲۱/۱) | (۳۳/۹, ۷۴/۷, ۶۹/۹) |

با حل مدل‌هاي (۳.۲) و (۵.۲) مقادير بهينه $\tilde{e}_{ij}$ و $\overline{e}_{ij}$ به دست مي‌آيند. مقادير $e_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ و $\overline{e}_{ij}$ در جدول ۲.۲ آورده شده‌اند.

جدول ۲.۲: نتایج مثال

| | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| ۱ | $\bar{e}_{۱۱} = ۱/۰۰۰۰$ | $\bar{e}_{۱۲} = ۱/۰۰۰۰$ | $\bar{e}_{۱۳} = ۰/۷۸۹۹$ |
| | $\tilde{e}_{۱۱} = ۱/۰۰۰۰$ | $\tilde{e}_{۱۲} = ۱/۰۰۰۰$ | $\tilde{e}_{۱۳} = ۰/۴۴۲۶$ |
| | $e_{۱۱} = ۱/۰۰۰۰$ | $e_{۱۲} = ۱/۰۰۰۰$ | $e_{۱۳} = ۰/۶۱۶۳$ |
| ۲ | $\bar{e}_{۲۱} = ۱/۰۰۰۰$ | $\bar{e}_{۲۲} = ۰/۷۰۰۱$ | $\bar{e}_{۲۳} = ۱/۰۰۰۰$ |
| | $\tilde{e}_{۲۱} = ۱/۰۰۰۰$ | $\tilde{e}_{۲۲} = ۰/۵۰۰۰$ | $\tilde{e}_{۲۳} = ۰/۴۶۱۹$ |
| | $e_{۲۱} = ۱/۰۰۰۰$ | $e_{۲۲} = ۰/۶۰۰۱$ | $e_{۲۳} = ۰/۷۳۱۰$ |
| ۳ | $\bar{e}_{۳۱} = ۰/۷۸۰۱$ | $\bar{e}_{۳۲} = ۰/۴۰۶۷$ | $\bar{e}_{۳۳} = ۱/۰۰۰۰$ |
| | $\tilde{e}_{۳۱} = ۱/۰۰۰۰$ | $\tilde{e}_{۳۲} = ۰/۶۲۸۷$ | $\tilde{e}_{۳۳} = ۱/۰۰۰۰$ |
| | $e_{۳۱} = ۰/۸۹۰۱$ | $e_{۳۲} = ۰/۵۱۷۷$ | $e_{۳۳} = ۱/۰۰۰۰$ |

براي تعيين يک واگذاری با بيشترين کارايي، مسأله واگذاری را حل مي‌کنيم که نتايج آن در جدول ۳.۲ آورده شده است و هر خانه از جدول ميزان $e_{ij}-۱$ را بيان مي‌کند که همان ارزش ناکارآمدي کمان مربوط به آن است. از حل مدل سیمپلکس مسأله جواب بهینه به صورت زیر حاصل می‌شود:

جدول ۳.۲: نتایج مثال

| | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰/۳۸۳۷ |
| ۲ | ۰ | ۰/۳۹۹۹ | ۰/۲۶۹۰ |
| ۳ | ۰/۱۰۹۹ | ۰/۴۸۲۳ | ۰ |

$$x_{۱۲} = ۱,\ x_{۲۱} = ۱,\ x_{۳۳} = ۱$$

که نشان از آن دارد که فرد ۱ به شغل دوم و فرد ۲ به شغل اول و فرد ۳ به شغل سوم واگذار خواهد شد تا حداقل ناکارایی یا حداکثر کارایی حاصل شود. مقدار حداکثر کارایی مسأله برابر ۳ خواهد بود.

# فصل ۳

# رویکرد تحلیل پوششي داده‌ها در حل مسأله حمل و نقل

## ۱.۳ مقدمه

مسأله حمل و نقل يکي از مهمترین مسایل برنامه‌ریزي خطي است. به‌طور کلي هدف یک مسأله حمل و نقل حداقل ساختن هزینه انتقال مناسب از یک مکان به مکان دیگر است به‌طوري که نیازهاي هر منطقه داراي ظرفیت بررسي و برآورده شود. همانند آنچه در فصل قبل گفته شد، براي هر مسأله حمل و نقل استاندارد تنها یک شاخص هزینه یا سود برای هر انتقال ممکن در نظر گرفته مي‌شود در حالي‌که، در واقعیت مي‌توان براي هر انتقال ممکن چندین شاخص (ورودي‌ها و خروجي‌ها) را در نظر گرفت. علاوه بر این، تصمیم‌گیرنده‌ها مي‌توانند چندین هدف مختلف که گاهي در تضاد با یکدیگر نیز هستند را داشته باشند.

در فصل ۲ مسأله واگذاري را با در نظر گرفتن چندین شاخص ورودي و خروجي تعمیم داده‌ایم. در این فصل نیز مسأله حمل و نقل را با در نظر گرفتن چندین شاخص ورودي و خروجي تعمیم داده و آن را مجدداً مدل‌بندی مي‌کنیم و یک مسأله حمل و نقل استاندارد با حداکثر کارایي نسبي ارائه مي‌کنیم.

## ۲.۳ مدل برنامه‌ریزي خطي مسأله حمل و نقل [۱]

فرض کنیم $m$ مبدأ ( انبار ) با یک میزان کالا براي انتقال به $n$ مقصد ( فروشگاه ) در اختیار داریم. مبدأ $i$ ظرفیت ارسال $s_i$ واحد کالا و مقصد $j$ ظرفیت دریافت $d_j$ واحد کالا را دارد. فرض کنیم مجموع عرضه با مجموع تقاضا برابر است. به عبارتي، $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ و براي هر انتقال از مبدأ به مقصد هزینه‌اي را در نظر مي‌گیریم.

هدف، تعیین یک انتقال کالا از مبدأها به مقصدها است به‌طوري که تمامی نیاز های مقاصد بر آورده

[۱] Transportation Problem

شود و مجموع هزينه‌هاي انتقال به کمترين ميزان برسد. $x_{ij}$ را برابر با تعداد کالاهايي در نظر مي‌گيريم که از مبدأ $i$ به مقصد $j$ ارسال مي‌شوند. مدل برنامه‌ريزي خطي مسأله حمل و نقل به‌صورت زير مي‌باشد.

$$\begin{aligned}
&\min \quad z=\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij}\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{j=۱}^{n} x_{ij}= s_i, \qquad i=۱,۲,\ \ldots,\ m,\\
&\qquad \sum_{i=۱}^{m} x_{ij}= d_j, \qquad j=۱,\ldots,n,\\
&\qquad x_{ij}\geq ۰, \qquad i=۱,\ \ldots,\ m,\ j=۱,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۱.۳}$$

## ۳.۳ الگوريتم مسأله حمل و نقل

الگوريتم حمل و نقل دقيقاً مشابه الگوريتم سيمپلکس است. اين الگوريتم به‌صورت زير است:

**مرحله ۱:** يک جواب پايه‌اي شدني آغازين تعيين کنيد و به مرحله ۲ برويد.

**مرحله ۲:** از شرط بهينگي روش سيمپلکس براي تعيين متغير وارد شونده از ميان تمام متغيرهاي غير پايه اي استفاده کنيد. اگر شرط بهينگي برقرار است، توقف کنيد. در غير اين‌صورت، به مرحله ۳ برويد.

**مرحله ۳:** از شرط شدني بودن روش سيمپلکس براي تعيين متغير وارد شونده از ميان متغيرهاي پايه‌اي جاري استفاده و جواب پايه‌اي جديد را پيدا کنيد. به مرحله ۲ برويد.

### ۱.۳.۳ تعيين جواب آغازين:

يک مدل حمل و نقل کلي با $m$ مبدأ و $n$ مقصد، $m+n$ قيد به‌صورت معادله دارد. يعني هر کدام از مبدأها و مقصدها يک قيد دارند. در عين حال، به خاطر متعادل بودن مدل حمل و نقل ( مجموع عرضه = مجموع تقاضا )، يکي از معادلات بايد زائد باشد. از اين رو مدل $m+n+۱$ قيد مستقل دارد، يعني جواب پايه‌اي آغازين حاوي $m+n-۱$ متغير پايه‌اي است.

ساختار خاص مسأله حمل و نقل، امکان تأمين يک جواب پايه‌اي آغازين غير تصنعي را با استفاده از يکي از سه روش زير فراهم مي‌کند:

روش ۱ : روش گوشه شمال غربي

روش ۲ : روش کمترين هزينه

روش ۳ : روش تقريب فوگل

### ۲.۳.۳ محاسبات تكراري الگوريتم

پس از تعيين جواب آغازين با استفاده از يكي از سه روش ذكر شده، براي تعيين جواب بهينه الگوريتم زير را به‌كار مي‌بريم:

**مرحله ۱:** از شرط بهينگي سيمپلكس براي تعيين متغير وارد شونده به‌عنوان متغير غير پايه‌اي جاري كه مي‌تواند جواب را بهبود بخشد، استفاده كنيد. اگر شرط بهينگي برقرار شده است، توقف كنيد. در غير اين‌صورت، به مرحله ۲ برويد.

**مرحله ۲:** با استفاده از شرط شدني بودن سيمپلكس متغير خارج شونده را تعيين كنيد. پايه را تغيير دهيد و به مرحله ۱ برگرديد.

تغيير در محاسبات اساسي سبب مي‌شود درگير عمليات سطري كه در روش سيمپلكس انجام مي‌شد، نشويم. در واقع، ساختار خاص مدل حمل و نقل، امكان محاسبات ساده‌تر را ميسر مي‌سازد.

## ۴.۳ مسأله حمل و نقل تعميم يافته:

در اين بخش مسأله حمل و نقل را با در نظر گرفتن چندين شاخص ورودي و خروجي [۲] براي هر انتقال ممكن تعميم خواهيم داد [۳]. فرض كنيد $m$ مبدأ (انبار) و $n$ مقصد (فروشگاه) وجود دارند كه مبدأ $i$ام ظرفيت ارسال $s_i$ واحد از كالايي خاص و مقصد $j$ام تقاضاي $d_j$ واحد از آن كالا را دارد. براي هر انتقال ممكن $(i,j)$ ورودي‌ها و خروجي‌ها به‌ترتيب به‌صورت $X_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}, \ldots, x_{ij}^{(k)})$ و $Y_{ij} = (y_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(2)}, \ldots, y_{ij}^{(s)})$ نمايش داده مي‌شوند.

بنابراين، براي هر انتقال ممكن $(i,j)$، $k+s$ مقدار وجود دارد، $k$ ورودي $x_{ij}^{(t)},\ t = 1, \ldots, k$ و $s$ خروجي $y_{ij}^{(r)}, r = 1, \ldots, s$. براي هر مبدأ $i$ همه مقصد هاي $l = 1, ..., n$، $l$ را در نظر مي‌گيريم و هر انتقال $(i,j)$را به‌عنوان يک DMU فرض مي‌كنيم. با فرض مبدأ به‌عنوان يک هدف و با به‌كارگيري رويكرد DEA ، كارايي هزينه حمل و نقل از $i$ به $j$، $j = 1, ..., n$ محاسبه مي‌شود. در ادامه مسأله برنامه‌ريزي كسري زير را حل مي‌كنيم:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \overline{e}_{ij} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{k} v_t x_{ij}^{(t)}} \\
&s.t. \\
&\qquad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{il}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{k} v_t x_{il}^{(r)}} \leq 1, \quad l = 1, \ldots, n, \\
&\qquad u_r, v_t \geq \varepsilon, \quad \forall t, r.
\end{aligned}
\tag{۲.۳}
$$

كه $\varepsilon \geq 0$ يک عدد غير ارشميدسي است. با استفاده از مدل بالا كارايي نسبي هزينه حمل و نقل واحد براي انتقال از مبدأ $i$ به هر مقصد $j$ با تغيير $j$ در مدل به‌صورت $\overline{e}_{i1}, \overline{e}_{i2}, \ldots, \overline{e}_{in}$ محاسبه مي‌شود. در

[۲] Input , output

واقع این مدل کارایی نسبی تمامی کمان های خروجی از یک مبدأ را به همه مقصد ها برای تمامی واحد های تصمیم گیرنده محاسبه میکند. از آنجا که حل مدل کسری فوق بسیار دشوار است، میتوان آن را به کمک تغییر متغیر چارنز و کوپر [۱۳] با اعمال محدودیت $\sum_{t=1}^{k} v_t x_{ij}^{(t)} = 1$ به مسأله برنامهریزي خطي معادل زیر تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \overline{e}_{ij} = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{(r)} \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{t=1}^{k} v_t x_{ij}^{(t)} = 1, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{il}^{(r)} - \sum_{t=1}^{k} v_t x_{il}^{(r)} \leq 0, \quad l = 1, \ldots, n, \\
&\qquad u_r, v_t \geq \varepsilon, \qquad\qquad t = 1, \ldots, k, \ r = 1, \ldots, s.
\end{aligned}
\tag{۳.۳}
$$

بهطور مشابه براي هر مقصد $j$ بهعنوان هدف، کارايي نسبی تمامی کمان های ورودی به یک مقصد از تمامی مبدأ ها برای همه واحد های تصمیم گیرنده به کمک مدل زیر محاسبه ميشود:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{k} v_t x_{ij}^{(t)}} \\
&s.t. \\
&\qquad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{lj}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{k} v_t x_{lj}^{(r)}} \leq 1, \quad l = 1, \ldots, m, \\
&\qquad u_r, v_t \geq \varepsilon, \qquad \forall t, r.
\end{aligned}
\tag{۴.۳}
$$

با حل عددي مدل فوق نیز کارايي نسبي هزینه حمل و نقل واحد براي انتقال از هر مبدأ $i$ به مقصد $j$ با تغییر $i$در مدل بهصورت $\tilde{e}_{1j}, \tilde{e}_{2j}, \ldots, \tilde{e}_{mj}$ بهدست خواهد آمد. به طور مشابه با تغییر متغیر چارنس و کوپر مدل فوق را نیز ميتوان به مدل برنامهریزي خطي معادل زیر تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \tilde{e}_{ij} = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{(r)} \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{t=1}^{k} v_t x_{ij}^{(t)} = 1, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{lj}^{(r)} - \sum_{t=1}^{k} v_t x_{lj}^{(r)} \leq 0, \quad l = 1, \ldots, m, \\
&\qquad u_r, v_t \geq \varepsilon, \qquad\qquad \forall t, r.
\end{aligned}
\tag{۵.۳}
$$

بنابراین، با توجه به دو مدل (۳.۳) و (۵.۳) براي هر انتقال $(i,j)$ دو اندیس کارايي نسبي $\overline{e}_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ محاسبه ميشوند و از میانگین آنها، اندیس جدید $e_{ij}$ بهصورت زیر بهدست ميآید:

$$
e_{ij} = \frac{\overline{e}_{ij} + \tilde{e}_{ij}}{2}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{۶.۳}
$$

در واقع برای هر انتقال ممکن $(i,j)$ دو اندازه کارایی $\overline{e}_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ به ترتیب برای کمان خروجی از مبدأ $i$ به مقصد $j$ و کمان ورودی به مقصد $j$ از مبدأ $i$ ) با در نظر گرفتن چندین شاخص ورودی و

خروجی محاسبه می‌شوند و به کمک میانگین به یک اندازه کارایی $e_{ij}$ تبدیل می‌شوند، و از آن اندازه ناکارایی $\text{۱} - e_{ij}$ برای هر $(i, j)$ بدست خواهد آمد. در پایان، مدل برنامه ریزی خطی زیر را حل خواهیم کرد:

$$\begin{aligned} e_T = \quad & \min \quad \sum_{i=\text{۱}}^{m}\sum_{j=\text{۱}}^{n}(\text{۱} - e_{ij})x_{ij} \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=\text{۱}}^{n} x_{ij} = s_i, \qquad i = \text{۱}, \ldots, m, \\ & \qquad \sum_{i=\text{۱}}^{m} x_{ij} = d_j, \qquad j = \text{۱}, \ldots, n, \\ & \qquad x_{ij} \geq \text{۰}, \qquad \forall i, j. \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

که یک مسأله حمل و نقل استاندارد با ضرایب هزینه جدید $\text{۱} - e_{ij}$ است. همانند آنچه در فصل قبل برای مسأله واگذاری گفته شد، تابع هدف مدل فوق اندازه ناکارایی هر واحد را مینیمم می‌کند و حل بهینه آن با حل بهینه مسأله با تابع هدف $\max \sum_{i=\text{۱}}^{m}\sum_{j=\text{۱}}^{n} e_{ij}x_{ij}$ یکسان است. مسأله برنامه ریزی خطی مسأله حمل و نقل استاندارد فوق با الگوریتم سیمپلکس معمولي قابل حل بوده و از حل عددي آن، مسأله حمل و نقل با حداکثر کارایی محاسبه مي‌شود.

## ۵.۳ نمونه کاربردي

یک کارخانه‌دار اتومبیل‌سازي در نظر دارد در هشت شهر مبدأ $A$ و $B$، $C$، $D$، $E$، $F$، $G$، $H$ نمایشگاه برقرار کند. خودروها مونتاژ و به فروشگاه‌هاي بزرگ در سه شهر مقصد $I$، $J$ و $K$ منتقل مي‌شوند. کارخانه‌دار یک ورودي (هزینه انتقال) و دو خروجي (ارزش کالاي منتقل شده و سود) براي هر انتقال را در نظر دارد. سه‌تایي $(x_\text{۱}, y_\text{۱}, y_\text{۲})$ به‌ترتیب از چپ به راست هزینه انتقال، ارزش انتقال و سود را نشان مي‌دهد. ورودي‌ها و خروجي‌هاي اختصاص داده شده، میزان موجودي در دسترس $(s_i)$ و میزان تقاضا $(d_j)$ در جدول ۱.۳ نشان داده شده‌اند. با حل مدل‌هاي (۳.۳) و (۵.۳) مقادیر بهینه $\tilde{e}_{ij}$ و $\bar{e}_{ij}$ به دست مي‌آید. مقادیر $e_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ و $\bar{e}_{ij}$ در جدول ۲.۳ آورده شده‌اند. برطبق داده‌هاي جدول هفت کمان $(B, J)$، $(C, K)$، $(D, I)$، $(E, I)$، $(F, I)$، $(G, K)$ و $(H, J)$ کارآمد هستند و کمان $(F, J)$ کمترین میزان را داراست.

جدول ۱.۳: داده‌هاي مثال

| | $I$ | $J$ | $K$ | $S_i$ |
|---|---|---|---|---|
| A | (۵۳۱،۳۵۰۰،۵۰۰) | (۴۳۱،۳۸۰،۶۰۰) | (۳۹۵،۳۹۵۰،۴۰۰) | ۱۰ |
| B | (۳۹۴،۲۸۵۰،۶۰۰) | (۴۱۸،۲۳۹۵،۷۰۰) | (۵۱۲،۲۵۹۰،۴۸۵) | ۱۳ |
| C | (۴۰۵،۳۱۰،۸۰۰) | (۵۱۲،۴۰۹،۱۰۰۰) | (۴۱۲،۳۹۰،۱۱۰۰) | ۱۱ |
| D | (۳۵۵،۲۹۰،۷۰۵) | (۴۹۳،۳۸۵،۶۱۷) | (۵۷۰،۴۱۹،۵۱۸) | ۷ |
| E | (۲۹۹،۴۱۵،۵۸۵) | (۳۹۸،۵۱۲،۴۹۰) | (۳۱۵،۲۵۵،۳۸۰) | ۹ |
| F | (۳۱۹،۵۱۲،۴۸۸) | (۴۶۴،۲۱۵،۳۰۵) | (۴۳۵،۳۵۵،۵۱۲) | ۹ |
| G | (۶۱۹،۶۱۲،۶۱۹) | (۴۹۰،۵۱۰،۵۰۵) | (۳۵۴،۵۵۰،۴۹۰) | ۴ |
| H | (۴۵۶،۲۹۹،۶۰۱) | (۳۹۴،۵۱۲،۴۳۲) | (۴۳۹،۴۹۹،۵۱۹) | ۶ |
| $d_j$ | ۳۰ | ۲۵ | ۱۴ | |

براي تعيين حمل و نقلي با بيشترين كارايي، مسأله حمل و نقل را حل مي‌كنيم كه نتايج آن در جدول ۳.۳ آورده شده است و هر خانه از جدول ميزان $۱-e_{ij}$ را بيان مي‌كند كه همان ارزش ناكارآمدي كمان مربوط به آن است.

از حل سيمپلكس مسأله، مقادير بهينه مسأله به‌صورت زير حاصل مي‌شوند:

$$x_{AJ} = ۱۰, \quad x_{BI} = ۴, \quad x_{BJ} = ۹, \quad x_{CI} = ۱, \quad x_{CK} = ۱۰,$$

$$x_{DI} = ۷, \quad x_{EI} = ۹, \quad x_{FI} = ۹, \quad x_{GK} = ۴, \quad x_{HJ} = ۶.$$

جدول ۲.۳: نتایج مثال ۳-۵

| | I | J | K |
|---|---|---|---|
| A | $\bar{e}_{AI} =$ ۰/۷۱۸۰ | $\bar{e}_{AJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{AK} =$ ۰/۷۴۹۰ |
| | $\tilde{e}_{AI} =$ ۰/۴۸۱۰ | $\tilde{e}_{AJ} =$ ۰/۸۸۰۹ | $\tilde{e}_{AK} =$ ۰/۶۹۲۴ |
| | $e_{AI} =$ ۰/۵۹۹۵ | $e_{AJ} =$ ۰/۹۴۰۵ | $e_{AK} =$ ۰/۷۲۰۷ |
| B | $\bar{e}_{BI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{BJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{BK} =$ ۰/۵۶۴۷ |
| | $\tilde{e}_{BI} =$ ۰/۷۶۹۳ | $\tilde{e}_{BJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\tilde{e}_{BK} =$ ۰/۵۴۹۶ |
| | $e_{BI} =$ ۰/۸۸۴۷ | $e_{BJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $e_{BK} =$ ۰/۵۵۷۲ |
| C | $\bar{e}_{CI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{CJ} =$ ۰/۸۴۱۶ | $\bar{e}_{CK} =$ ۱/۰۰۰۰ |
| | $\tilde{e}_{CI} =$ ۰/۹۹۴۵ | $\tilde{e}_{CJ} =$ ۰/۷۰۳۲ | $\tilde{e}_{CK} =$ ۱/۰۰۰۰ |
| | $e_{CI} =$ ۰/۹۹۷۳ | $e_{CJ} =$ ۰/۷۷۲۴ | $e_{CK} =$ ۱/۰۰۰۰ |
| D | $\bar{e}_{DI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{DJ} =$ ۰/۹۵۲۸ | $\bar{e}_{DK} =$ ۰/۸۹۴۸ |
| | $\tilde{e}_{DI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\tilde{e}_{DJ} =$ ۰/۷۸۰۲ | $\tilde{e}_{DK} =$ ۰/۵۸۵۹ |
| | $e_{DI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $e_{DJ} =$ ۰/۸۶۶۵ | $e_{DK} =$ ۰/۷۴۰۴ |
| E | $\bar{e}_{EI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{EJ} =$ ۰/۹۲۴۵ | $\bar{e}_{EK} =$ ۰/۶۱۶۴ |
| | $\tilde{e}_{EI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\tilde{e}_{EJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\tilde{e}_{EK} =$ ۰/۷۳۶۵ |
| | $e_{EI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $e_{EJ} =$ ۰/۹۶۲۳ | $e_{EK} =$ ۰/۶۹۱۵ |
| F | $\bar{e}_{FI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{FJ} =$ ۰/۴۱۰۹ | $\bar{e}_{FK} =$ ۰/۷۶۷۶ |
| | $\tilde{e}_{FI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\tilde{e}_{FJ} =$ ۰/۴۱۵۷ | $\tilde{e}_{FK} =$ ۰/۷۲۵۱ |
| | $e_{FI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $e_{FJ} =$ ۰/۴۱۳۳ | $e_{FK} =$ ۰/۷۴۶۴ |
| G | $\bar{e}_{GI} =$ ۰/۸۶۰۸ | $\bar{e}_{GJ} =$ ۰/۷۴۴۰ | $\bar{e}_{GK} =$ ۱/۰۰۰۰ |
| | $\tilde{e}_{GI} =$ ۰/۷۴۹۴ | $\tilde{e}_{GJ} =$ ۰/۸۲۰۹ | $\tilde{e}_{GK} =$ ۱/۰۰۰۰ |
| | $e_{GI} =$ ۰/۸۰۵۱ | $e_{GJ} =$ ۰/۷۸۲۵ | $e_{GK} =$ ۱/۰۰۰۰ |
| H | $\bar{e}_{HI} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{HJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\bar{e}_{HK} =$ ۰/۹۶۷۳ |
| | $\tilde{e}_{HI} =$ ۰/۶۶۸۰ | $\tilde{e}_{HJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $\tilde{e}_{HK} =$ ۰/۷۵۰۴ |
| | $e_{HI} =$ ۰/۸۳۴۰ | $e_{HJ} =$ ۱/۰۰۰۰ | $e_{HK} =$ ۰/۸۵۸۹ |

جدول ۳.۳: نتایج مثال۵-۳

| | $I$ | $J$ | $K$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | ۰/۴۰۰۵ | ۰/۰۵۹۵ | ۰/۲۷۹۳ |
| $B$ | ۰/۱۱۵۳ | ۰ | ۰/۴۵۲۸ |
| $C$ | ۰/۰۰۲۷ | ۰/۲۲۷۶ | ۰ |
| $D$ | ۰ | ۰/۱۳۳۵ | ۰/۲۵۹۶ |
| $E$ | ۰ | ۰/۰۳۷۷ | ۰/۳۰۸۵ |
| $F$ | ۰ | ۰/۵۸۶۷ | ۰/۲۵۳۶ |
| $G$ | ۰/۱۹۴۹ | ۰/۲۱۷۵ | ۰ |
| $H$ | ۰/۱۶۶۰ | ۰ | ۰/۱۴۱۱ |

مقدار بهینه تابع هدف برابر است با $e_T = ۱/۰۵۸۹$ و حداکثر کارایي مسأله برابر ۶۷/۹۴۱۱ است.

در این مثال همه متغیرهاي ورودي و خروجي بر مبناي پول هستند. اما اگر ارزش هر کمان ممکن را نیز در نظر بگیریم، با استفاده از الگوریتم مسأله حمل و نقل کلاسیک مقادیر بهینه مسأله جدید به صورت زیر خواهند بود:

$$x_{AK} = ۱۰,\ x_{BI} = ۱۳,\ x_{CJ} = ۷,\ x_{DI} = ۷,\ x_{EI} = ۱, x_{EJ} = ۸, x_{FI} = ۹, x_{GJ} = ۴, x_{HJ} = ۶$$

که حداکثر کارایي آن برابر ۵۷/۹۴۳۳ است. واضح است که این حمل و نقل کارآمد نخواهد بود.

# فصل ۴

# رویکرد تحلیل پوششي داده‌ها در حل مسأله کوتاهترین مسیر

## ۱.۴ مقدمه

یکي از مهم‌ترین و موفق‌ترین موضوعات در حوزه تحقیق در عملیات، مسأله کوتاهترین مسیر است که یک مسأله برنامه‌ریزي خطي با ساختار شبکه است. در مسأله کوتاهترین مسیر، یک شبکه با چندین رأس با تنها یک شاخص ورودي (هزینه) براي هر دو رأس مرتبط آن (کمان ها) مورد مطالعه قرار مي‌گیرد. در حالي‌که در رویدادهاي واقعي پیرامون ما مي‌توان چندین شاخص ورودي (هزینه یا سود) را براي هر کمان ممکن در نظر گرفت.

تحلیل پوششي داده‌ها (DEA) روشي غیر پارامتري است که چندین ورودي و چندین خروجي را براي محاسبه کارایي نسبي واحدهای تصمیم گیرنده به کار مي‌گیرد. در این فصل نیز ابتدا با بیان مسأله کوتاهترین مسیر کلاسیک، روش‌هاي حل آن را بیان مي‌کنیم و سپس با به‌کارگیري رویکرد تحلیل پوششي داده‌ها این مسأله را تعمیم داده و آن را مجدداً به‌صورت مسأله کوتاهترین مسیر استاندارد مدل‌بندي خواهیم کرد.

## ۲.۴ مدل برنامه‌ریزي خطي مسأله کوتاهترین مسیر[۱]

شبکه $G$ با $m$ گره، $n$ کمان که $V$ به عنوان مجموعه همه رأس ها، $E$ به عنوان مجموعه همه کمان ها و هزینه $C_{ij}$ مربوط به هر کمان $(i,j)$ مفروض است. مسأله کوتاهترین مسیر عبارت است از پیدا کردن کوتاهترین مسیر از یک گره مبدأ به یک گره مقصد به طوري که مجموع هزینه‌هاي مسیر حداقل مقدار

[۱] Shortest path Problem

باشد. به‌طور کلي، مسأله پیدا کردن کوتاهترین مسیر به‌صورت مسأله LP زیر فرمول‌بندي مي‌شود:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \tag{۴.۱.a}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = ۱\ , \quad i = ۱, \tag{۴.۱.b}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = ۰ \qquad \forall i \neq ۱, m \in V, \tag{۴.۱.c}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = -۱,\ i = m, \tag{۴.۱.d}$$

$$x_{ij} = ۰\ or\ ۱\ , \quad \forall (i,j) \in E. \tag{۴.۱.e}$$

نمادهای $x_{ij}$ و $c_{ij}$ به‌ترتیب متغیر تصمیم‌گیري و هزینه مربوط به هر کمان $(i,j)$ هستند. $x_{ij}$ برابر ۱ است اگر کمان $(i,j)$ در مسیر مورد نظر باشد و برابر ۰ است اگر کمان $(i,j)$ در مسیر مورد نظر نباشد. معادله (۴.۱.a) تابع هدف است که هزینه مسیر از گره ۱ (گره مبدأ) به گره $m$ (گره مقصد) را مینیمم مي‌کند. معادله‌هاي (۴.۱.b) تا (۴.۱.d) قیدها هستند که شرط‌هاي پایستگي جریان را بیان مي‌کنند. معادله (۴.۱.b) از جریان‌ها درگره مبدأ، گره ۱، پشتیباني مي‌کند. در این معادله، اختلاف میان حجم ترافیکي وارد شونده و حجم ترافیکي خارج شونده، $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji}$ برابر ۱ است و به این معنی است که حجم ترافیکي خارج شونده از گره ۱ برابر ۱ است. معادله (۴.۱.c) جریان‌ها را در گره میاني، $i$ که $i \neq ۱, m$ ، پشتیباني مي‌کند. حجم ترافیکي خارج شونده در گره $i$، $\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij}$ ، برابر حجم ترافیکي وارد شونده درگره میاني $i$، $\sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji}$، است. بنابراین اختلاف آن ها برابر صفر خواهد بود و این تضمین می‌کند تا در هر گره میانی، اگر جریانی به گره وارد شود، جریانی نیز از آن خارج شود. معادله (۴.۱.d) از جریان در گره مقصد، گره $m$ پشتیبانی می‌کند. معادله (۴.۱.e) دامنه تغییرات $x_{ij}$ است که تنهادو مقدار ۰ و ۱ را مي‌پذیرد.

از جمله روش‌هاي حل مسأله کوتاهترین مسیر مي‌توان الگوریتم دایجسترا[۲] ، الگوریتم بلمان-فورد[۳] را نام برد.

## ۳.۴ مسأله کوتاهترین مسیر تعمیم یافته

در این بخش مسأله کوتاهترین مسیر کلاسیک را با در نظر گرفتن وزن‌هاي چندگانه براي هر کمان شدني تعمیم مي‌دهیم [۲]. فرض کنید $G$ یک شبکه با $m$ گره و $n$ کمان باشد، و همچنین $V = \{۱, ۲, \dots, m\}$

[۲] Dijkstra

[۳] Bellman-Ford

مجموعه گره‌ها و $E=\{(i,j):\}$ یک پیوند در G باشد $(i,j)$ مجموعه کمان ها در $G$ باشد. فرض کنیم یک تعداد کالا در گره ۱ وجود دارد که مي‌توانيم آن را از چندين مسير مختلف به گره $m$ ارسال کنیم.

بر خلاف مسأله کوتاهترین مسیر استاندارد، در مسأله کوتاهترین مسیر توسعه یافته چندين شاخص ( چندين ورودي و چندين خروجي) براي هر پيوند در نظر گرفته مي‌شود. بنابراين، براي هر پيوند $(i,j)$ ورودي‌ها و خروجي‌ها را به‌صورت $X_{ij}=(x_{ij}^{(1)},x_{ij}^{(2)},\dots,x_{ij}^{(k)})$ و $Y_{ij}=(y_{ij}^{(1)},y_{ij}^{(2)},\dots,y_{ij}^{(s)})$ نشان مي‌دهيم.

بنابراين براي هر کمان $(i,j)$ ممکن، $k+s$ حالت وجود دارد، $k$ ورودي $x_{ij}^{(t)}\ ,\ t=1,2,\dots,k$ و $s$ خروجي $y_{ij}^{(r)},\ \ r=1,2,\dots,s$ . هدف يافتن مسيري کارآمد با کمترين هزينه از گره ۱ به گره $m$ است که در آن هر گره تنها يک‌بار مي‌تواند انتخاب شود.

با اين توضيحات، اندازه کارايي هر کمان $(i,j)$ را در شبکه مورد نظر محاسبه مي‌کنيم. براي هر گره $i$ به عنوان هدف، اندازه کارایی همه کمان های خروجی از گره $i$ (گره مبدأ) به تمامی گره های $l$، $l,\ =1,2,\dots,d_i$ که $(i,l)$ یک کمان باشد، برای هر کمان $(i,l)$ به عنوان یک واحد تصمیم گیرنده DMU به صورت مقدار بهينه تابع هدف مسأله برنامه‌ريزي کسري زير نشان مى‌دهيم:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{k} v_i x_{ij}^{(t)}}\\
s.t.\quad & \\
& \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{il}^{(r)}}{\sum_{t=1}^{t} v_t x_{il}^{(t)}} \le 1,\quad l=1,\dots,d_i,\\
& u_r, v_t \ge \varepsilon,\qquad \forall r,t.
\end{aligned}
\tag{۱.۴}
$$

که $\varepsilon \geq 0$ یک عدد غیر ارشمیدسي است.

مسأله برنامه‌ريزي کسري فوق را نيز مي‌توان با تغيير متغير چارنز و کوپر [۱۳] به مسأله برنامه‌ريزي خطي معادل زير تبديل کرد:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{(r)}\\
s.t.\quad & \\
& \sum_{t=1}^{k} v_i x_{ij}^{(t)} = 1,\\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{il}^{(r)} - \sum_{t=1}^{k} v_t x_{il}^{(t)} \le 0,\quad l=1,\dots,d_i,\\
& u_r, v_t \ge \varepsilon,\qquad \forall r,t.
\end{aligned}
\tag{۲.۴}
$$

از آنجا که هر کمان $(i,j)$ دو گره $i$ و $j$ را به هم متصل می‌کند، برای هر کمان $(i,j)$ دو اندازه کارايي $\overline{e}_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ به ترتيب برای کارایی نسبی کمان خروجی از $i$ به $j$ و کارایی نسبی کمان ورودی به $j$ از $i$ تعریف میکنیم که از میانگین آن‌ها یک اندازه کارايي $e_{ij}$ به صورت زير حاصل مي‌شود:

$$
e_{ij}=\frac{\overline{e}_{ij}+\tilde{e}_{ij}}{2},
\tag{۳.۴}
$$

و در پايان براي حل يک مسأله کوتاهترين مسير از گره مبدأ (گره ۱) به گره مقصد (گره $m$) با حداکثر

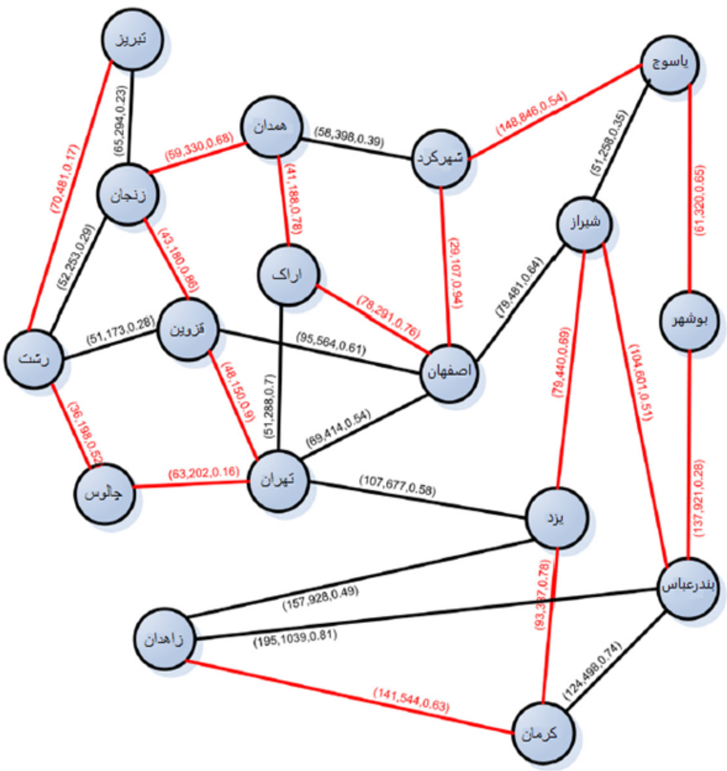
کارايي، مسأله برنامه‌ريزي خطي زير را حل مي‌کنيم:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{m} e_{ij} x_{ij} \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=۱}^{m} x_{ij} - \sum_{l=۱}^{m} x_{li} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad i = ۱, \\ ۰ & \text{اگر} \quad i \neq ۱ \ \text{یا} \ i \neq m, \\ -۱ & \text{اگر} \quad i = m, \end{cases} \qquad (۴.۴) \\
& x_{ij} \in \{۰, ۱\} \qquad \forall i, j.
\end{aligned}
$$

مسأله فوق که همان مسأله کوتاهترين مسير استاندارد با هزينه‌هاي نامنفي است را با الگوريتم دايجسترا و الگوريتم برچسب گذاري[۴] مي‌توان حل کرد.

## ۴.۴ نمونه کاربردي

محموله‌اي مربوط به يک شرکت داروسازي موجود است که مي‌خواهيم آن را از تبريز در استان آذربايجان به زاهدان در استان سيستان و بلوچستان انتقال دهيم. چندين مسير مختلف از تبريز به زاهدان وجود دارد که در شکل نشان داده شده است.




شکل ۱.۴: شبکه شهرها و جاده‌هاي مثال

[۴] Labeling algorithm

با توجه به شکل ۱.۴، ۱۷ شهر ( هر شهر به‌صورت یک گره فرض مي‌شود ) و ۲۹ *جاده بین دو شهر ( هر جاده به‌صورت یک کمان فرض میشود ) در این مسیر وجود دارد. براي هر جاده، سه متغیر ( دو ورودي و یک خروجي ) معرفي مي‌کنیم. هزینه حمل و نقل* $(x_1)$ *را به‌عنوان اولین ورودي، مسافت بین هر دو شهر* $(x_2)$ *را به‌عنوان دومین ورودي و ایمني مسیر* $(y_1)$ *را متغیري خاص به‌عنوان خروجي در نظر مي‌گیریم. بهاي بیمه تصادف در هر جاده ایمني آن جاده را نشان مي‌دهد. به‌عبارتي دیگر، بیشترین بهاي بیمه تصادف به معناي پایین‌ترین ایمني در جاده و کمترین بهاي بیمه به معناي بالاترین ایمني در جاده است. بنابراین، از عکس سطح بهاي بیمه به‌عنوان یک خروجي خاص استفاده مي‌کنیم. هزینه مربوط به هر جاده (کمان) در جدول داده شده است. از حل مسأله (۲.۴) مقادیر بهینه* $\bar{e}_{ij}$ *و* $\tilde{e}_{ij}$ *براي هرکمان* $(i,j)$ *حاصل مي‌شود. این مقادیر به همراه مقادیر* $e_{ij}$ *به‌صورت ستون‌هاي جدول ۱.۴ نمایش داده شده‌اند. براي تعیین مسیر بهینه با حداکثر کارایي از تبریز تا زاهدان، مسأله (۴.۴) را با داده‌هاي جدول ۱.۴ حل مي‌کنیم.*

الگوریتم دایجسترا را براي حل مسأله کوتاهترین مسیر با داده‌هاي ستون آخر جدول ۱.۴ به کار مي‌گیریم. مسیر کارآمد به‌صورت زیر تعیین مي‌شود:

اصفهان ← اراک ← همدان ← زنجان ← قزوین ← تهران ← چالوس ← رشت ← تبریز

شهرکرد ← یاسوج ← بوشهر ← بندرعباس ← شیراز ← یزد ← کرمان ← زاهدان

مسیر کارآمد در شکل نشان داده شده است. حداکثر کارایي مسیر بهینه برابر ۱۱٫۶۷۵۵ تعیین مي‌شود.

جدول ۱.۴: داده‌های مثال

| $J$ | جاده | $x_1$ | $x_2$ | $y_j$ | $\overline{e}_{ij}$ | $\tilde{e}_{ij}$ | $e_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | تبریز-رشت | ۷۰ | ۴۸۱ | ۰/۱۷ | ۰/۶۸۶۳ | ۰/۱۶۸۱ | ۰/۴۲۷۲ |
| ۲ | تبریز-زنجان | ۶۵ | ۲۹۴ | ۰/۲۳ | ۱ | ۰/۱۷۶۹ | ۰/۵۸۸۵ |
| ۳ | زنجان-رشت | ۵۲ | ۲۵۳ | ۰/۲۹ | ۰/۴۳۶۵ | ۰/۲۷۸۸ | ۰/۳۵۷۷ |
| ۴ | زنجان-همدان | ۵۹ | ۳۳۰ | ۰/۶۸ | ۰/۵۷۶۳ | ۰/۶۰۵۸ | ۰/۵۹۱۱ |
| ۵ | زنجان-قزوین | ۴۳ | ۱۸۰ | ۰/۸۶ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۶ | قزوین-رشت | ۵۱ | ۱۷۳ | ۰/۲۸ | ۰/۶۱۶۳ | ۰/۲۸۸ | ۰/۴۵۲۲ |
| ۷ | قزوین-اصفهان | ۹۵ | ۵۶۴ | ۰/۶۱ | ۰/۳۲۱ | ۰/۱۹۸۱ | ۰/۲۵۹۶ |
| ۸ | قزوین-تهران | ۴۸ | ۱۵۰ | ۰/۹۵ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۹ | یزد-تهران | ۱۰۷ | ۶۷۷ | ۰/۵۸ | ۰/۲۸۹۱ | ۰/۶۲۰۶ | ۰/۴۵۴۹ |
| ۱۰ | رشت-چالوس | ۳۶ | ۱۹۸ | ۰/۵۲ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱۱ | چالوس-تهران | ۶۳ | ۲۰۲ | ۰/۱۶ | ۰/۱۳۵۴ | ۰/۳۰۱۶ | ۰/۲۱۸۵ |
| ۱۲ | تهران-اراک | ۵۱ | ۲۸۸ | ۰/۷۱ | ۰/۷۳۲ | ۰/۷۲۱۵ | ۰/۷۲۶۸ |
| ۱۳ | تهران-اصفهان | ۶۹ | ۴۱۴ | ۰/۵۴ | ۰/۴۱۷۴ | ۰/۲۴۱۴ | ۰/۳۲۹۴ |
| ۱۴ | همدان-اراک | ۴۱ | ۱۸۸ | ۰/۷۸ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱۵ | همدان-شهرکرد | ۵۸ | ۳۹۸ | ۰/۳۹ | ۰/۲۰۷۴ | ۰/۳۵۳۴ | ۰/۲۸۰۴ |
| ۱۶ | ارک-اصفهان | ۷۸ | ۲۹۱ | ۰/۷۶ | ۰/۳۰۰۶ | ۰/۶۲۹۵ | ۰/۴۶۵۱ |
| ۱۷ | اصفهان-شیراز | ۷۹ | ۴۸۱ | ۰/۶۴ | ۰/۹۲۷۵ | ۰/۲۴۹۹ | ۰/۵۸۸۷ |
| ۱۸ | شیراز-یاسوج | ۵۱ | ۲۵۸ | ۰/۳۵ | ۰/۸۶۵۱ | ۰/۶۶۷۹ | ۰/۷۶۶۵ |
| ۱۹ | شیراز-بندرعباس | ۱۰۴ | ۶۰۱ | ۰/۵۱ | ۰/۵۶۱۵ | ۰/۸۲۱۷ | ۰/۶۹۱۶ |
| ۲۰ | شیراز-یزد | ۷۹ | ۴۴۰ | ۰/۶۹ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۲۱ | یزد-زاهدان | ۱۵۷ | ۹۲۸ | ۰/۴۹ | ۰/۶۹۸۵ | ۰/۳۵۷۳ | ۰/۵۲۷۹ |
| ۲۲ | یزد-کرمان | ۹۳ | ۳۸۷ | ۰/۷۸ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۲۳ | کرمان-زاهدان | ۱۴۱ | ۵۴۴ | ۰/۶۳ | ۰/۵۷۴۶ | ۱ | ۰/۷۸۷۳ |
| ۲۴ | کرمان-بندرعباس | ۱۲۴ | ۴۹۸ | ۰/۷۴ | ۰/۷۳۷۳ | ۱ | ۰/۸۶۸۷ |
| ۲۵ | بندرعباس-بوشهر | ۱۳۷ | ۹۲۱ | ۰/۲۸ | ۰/۱۹۱۸ | ۰/۳۴۲۵ | ۰/۲۶۷۲ |
| ۲۶ | بوشهر-یاسوج | ۶۱ | ۳۲۰ | ۰/۶۵ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۲۷ | یاسوج-شهرکرد | ۱۴۸ | ۸۴۶ | ۰/۵۴ | ۰/۳۴۲۴ | ۰/۱۱۲۶ | ۰/۲۲۷۵ |
| ۲۸ | اصفهان-شهرکرد | ۲۹ | ۱۰۷ | ۰/۹۴ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۲۹ | بندرعباس-زاهدان | ۱۹۵ | ۱۰۹۳ | ۰/۸۱ | ۰/۹۲۹۶ | ۰/۶۹۶ | ۰/۸۱۲۸ |

# فصل ۵

# نتیجه‌گیری

## ۱.۵ مقدمه

امروزه با توجه به گسترش روز افزون جمعیت و نیاز به اتخاذ سیاست‌های مناسب مسئولین برای استفاده درست از منابع موجود برای پیشرفت های اقتصادی و صنعتی هر کشور مسائل حمل و نقل ، واگذاری و کوتاهترین مسیر جایگاهی خاص در این زمینه پیدا کرده اند. مسأله حمل و نقل در شاخه‌های گوناگون حمل و نقل جاده‌ای ، ریلی، هوایی و دریایی و مسأله واگذاری برای واگذاری لایق‌ترین و متخصص‌ترین افراد به مشاغل خاص و بهینه‌سازی بخش‌های مختلف کارخانه‌های بزرگ و مسأله کوتاهترین مسیر برای انتخاب سریع‌ترین و مطمئن‌ترین مسیر ممکن به منظور حصول اهداف مورد نظر، از مهمترین و پر طرفدارترین موضوعات مطرح شده در زمینه علمی و اقتصادی هستند.

تاکنون مطالعات زیادی در زمینه حل بهینه این مسائل صورت گرفته است و روش‌های زیادی برای دستیابی به بهترین جواب پیشنهاد شده است اما، با وجود تلاش‌های انجام شده در بسیاری از روش‌های ارائه شده تنها یک شاخص هزینه را می‌توان مد نظر قرار داد. در حالی‌که، در مسائل گسترده‌تر شاخص‌های مهمی از قبیل کیفیت جاده‌ها، ایمنی جاده‌ها، کیفیت وسایل حمل و نقل، ظرفیت تعداد مسافران، رضایت مشتری، کیفیت کار، رضایت کارکنان، فاصله زمانی و بسیاری از شاخص‌های مهم دیگر نیز بر این مسائل تأثیرگذار هستند و نیاز است در یک مسأله به‌طور همزمان آن‌ها را مورد ارزیابی قرار داد.

تحلیل پوششی داده‌ها ،(DEA) یک روش برنامه‌ریزی ریاضی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) است که چندین ورودی و چندین خروجی دارند. اندازه‌گیری کارایی به دلیل اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک واحد همواره مورد توجه قرار داشته است. در سال ۱۹۷۵ فارل با استفاده از روشی همانند اندازه‌گیری کارایی در مباحث مهندسی، به اندازه‌گیری کارایی برای واحدی تولیدی اقدام کرد. موردی که فارل برای اندازه‌گیری کارایی مد نظر قرار داد شامل یک ورودی و یک خروجی بود. چارنز، کوپر و رودز دیدگاه فارل را توسعه دادند و الگویی ارائه کردند که توانایی اندازه‌گیری کارایی با چندین ورودی و خروجی را داشت. این الگو تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها نام گرفت.

بنابراین ما در این پایان‌نامه رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) را برای تعمیم مسائل واگذاری،

حمل و نقل و کوتاهترین مسیر با در نظر گرفتن شاخص‌های چندگانه ( ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه) به‌کار گرفته‌ایم و مدلی برای مسأله تعمیم یافته ارائه کرده‌ایم.

## ۲.۵ نتیجه گیری

تحلیل پوششی داده ها مفهومی از محاسبه ارزیابی سطوح کارایی در داخل یک گروه از سازمان ها را نشان می‌دهد که کارایی هر واحد در مقایسه با تعدادی از واحد ها که دارای بیشترین عملکرد هستند، محاسبه می‌شود. این تکنیک مبتنی بر رویکرد برنامه ریزی خطی است که هدف اصلی آن مقایسه و سنجش کارایی تعدادی از واحد های تصمیم گیرنده مشابه است که تعداد ورودی های مصرفی و خروجی های تولیدی متفاوتی دارند. این واحد ها میتوانند شعب یک بانک، مدارس، بیمارستان ها، پالایشگاه ها، نیروگاه های برق، ادارات تحت پوشش یک وزارتخانه و یا کارخانه های مشابه باشند. منظور از مقایسه و سنجش کارایی نیز این است که یک واحد تصمیم گیرنده، در مقایسه با سایر واحد های تصمیم گیرنده چقدر خوب از منابع خود در راستای تولید استفاده می‌کند.

در سال های اخیر صنعت حمل و نقل پیشرفت و توسعه مناسبی داشته و در عین حال هزینه های عملیاتی کلان و فزاینده ای را به خود اختصاص داده است. این مسأله موجب تأکید بیشتر بر مدیریت علمی و اصولی سیستم های حمل و نقل عمومی و بهره گیری بهینه از تجهیزات موجود گردیده و اهمیت ارزیابی دقیق این سیستم ها را هر چه بیشتر آشکار می‌سازد. در مسأله حمل و نقل استاندارد، فرمول بندی مسأله بر اساس حداقل نمودن هزینه یا حداکثر نمودن سود در حمل کالا از هر مبدأ به هر مقصد است به نحوی که ارسال کالا نیز مطابق میزان موجودی و تقاضای هر یک از مبدأ ها و مقصد ها باشد.

مسأله واگذاری نیز به عنوان حالت خاصی از مسأله حمل و نقل با مبدأ ها و مقصد های برابر در نظر دارد با یک توزیع یک به یک بین مبدأ ها و مقصد ها به هدف مورد نظر دست پیدا کند. پارامتر های مسأله حمل و نقل استاندارد مقادیر هزینه، عرضه و تقاضا هستند و در مسأله واگذاری استاندارد، هزینه های واگذاری پارامتر های آن هستند. مسأله واگذاری در تولید و سیستم های سرویس دهی کاربرد فراوان دارد.

مسأله کوتاهترین مسیر برای یافتن مسیر های میان مکان های واقعی از قبیل راه های عبور و مرور در نقشه های اینترنتی مانند گوگل نقشه ها استفاده می‌شود. از الگوریتم کوتاهترین مسیر می‌توان به عنوان ابزاری برای یافتن دنباله ای از انتخاب ها به منظور رسیدن به یک حالت ویژه استفاده کرد. همچنین می‌توان این الگوریتم را به منظور دستیابی به یک کران پایین از زمان مورد نیاز برای رسیدن به یک حالت مشخص به کار برد. برای مثال اگر رأس ها بیانگر حالت های یک پازل مانند مکعب روبیک و هر یک از کمان های جهت دار بیانگر یک حرکت یا چرخش باشند، می‌توان از این الگوریتم به گونه ای بهره برد که به راه حلی با کمترین تعداد حرکت منجر شود. این الگوریتم همچنین در ساختار شبکه های ارتباطی و یا شبکه های مخابراتی، در رباتیک و طراحی مدار های VLSI کاربرد فراوان و گسترده ای دارد.

در بسیاری از کاربرد های مدل مسائل واگذاری، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر معمولاً چندین

شاخص مطرح می‌شود که تعدادی از شاخص ها باید مینیمم و تعدادی باید ماکسیمم شوند. این شاخص ها را می‌توان به عنوان معیار های ورودی و خروجی مدل در نظر گرفت. علاوه بر این ممکن است تصمیم گیرنده اهداف مختلفی برای هر ارسال داشته باشد که ممکن است این اهداف در تضاد با یکدیگر نیز باشند. بنابر این مدل های استاندارد این مسائل به تنهایی نمی‌توانند جوابگوی این اهداف باشند و نیاز است تا هر مسأله با بررسی ورودی ها و خروجی های چندگانه تعمیم داده شود. از میان روش های ارزیابی عملکرد، روش تحلیل پوششی داده ها (DEA) به دلیل قابلیت انعطاف، توسعه و سازگاری با ماهیت مسأله مورد توجه ما برای تعمیم این مسائل در این پایان نامه قرار گرفت.

ما در این پایان نامه، پس از معرفی و ارائه مسأله استاندارد برای هر یک از مسائل واگذاری، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر، با استفاده از تحلیل پوششی داده ها به ارائه راهکار هایی برای حل هر مسأله پرداخته‌ایم و به کمک مدل CCR، مدلی برای ارزیابی کارایی نسبی هر یک از واحد های تصمیم گیرنده ارائه کردیم. در واقع برای هر انتقال ممکن $(i, j)$ به عنوان یک واحد تصمیم گیرنده (DMU) با ارائه دو مدل به صورت $\overline{e}_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ ، میزان کارایی هر یک از انتقال ها را با سایر کارایی ها مقایسه کرده و در نهایت یک شاخص کارایی $e_{ij}$ از میانگین دو دسته کارایی موجود تشکیل داده و با در نظر گرفتن این شاخص کارایی به عنوان ضرایب هزینه تابع هدف هر یک از مسائل واگذاری، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر، آن ها را به صورت مسأله برنامه ریزی خطی استاندارد هر مسأله تبدیل کردیم که هر یک از مسائل را با حداکثر کارایی حل می‌کند. به طور کلی در این پایان نامه با معرفی مسأله برنامه ریزی خطی استاندارد برای هر یک از مسائل، دو مدل با رویکرد تحلیل پوششی داده ها ارائه کردیم و سپس با تبدیل این دو مدل به یک مدل DEA، مسأله را به صورت استاندارد آن با یک شاخص هزینه که همان کارایی است تبدیل کرده‌ایم.

در ادامه یک پیشنهاد برای اهداف بعدی تحقیقات ارائه می‌کنیم:

از آنجا که مسائل واگذاری، حمل و نقل و کوتاهترین مسیر چند هدفه و تعمیم یافته در این پایان نامه را میتوان با پارامتر های غیر قطعی نیز در نظر گرفت، می توان با تبدیل پارامتر های مسأله به پارامتر های فازی و سپس با ارائه دو اندازه کارایی تعریف شده $\overline{e}_{ij}$ و $\tilde{e}_{ij}$ با پارامتر های فازی، دو مسأله تحلیل پوششی داد ها با پارامتر های فازی خواهیم داشت که مجدداً به کمک میانگین این دو اندازه کارایی به یک اندازه کارایی $e_{ij}$ با پارامتر های فازی تبدیل شده و مسأله ای جدید با یک هزینه کارایی فازی خواهیم داشت که به صورت مدل برنامه ریزی خطی استاندارد آن مسأله مدل بندی می‌شود.

# مراجع

[1] N.Adler, L.Friedman, Z.Sinuany-Stern, Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. European Journal of Operational Research. 140 (1) (2002) 249-265.

[2] A.Amirteimoori, An extended shortest path problem: A data envelopment analysis approach, Appl Math Letters. 25 (2012) 1839-1843.

[3] A.Amirteimoori, An extended transportation problem: a DEA-based approach, Central European Journal of Operations Research 19 (4) (2011) 513-521.

[4] T.R.Anderson, K.Hollingsworth, L.B.Inman, The fixed weighting nature of a cross-evaluation model. Journal of Productivity Analysis. 18 (1) (2002) 249-255.

[5] P.Anderson, N.C.Peterson, A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, Management Science. 39 (10) (1993) 1261-1294.

[6] D.Avis, L.Devroye, An analysis of a decomposition heuristic for the assignment problem, Oper. Res. Lett. 3 (6) (1985) 279-283.

[7] M.L.Balinski, A competitive (dual) simplex method for the assignment problem, Math . Problem. 34 (2) (1986) 125-141.

[8] R.D.Banker, A.Charnes, W.W.Cooper, Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Manag. Sci. 30 (9) (1984) 1078-1092.

[9] C.P.Bao, T.H.Chen, S.Y.Chang, Slack-based ranking method: An interpretation to the cross-efficiency method in DEA. Journal of the Operational Research Society. 59 (6) (2008) 860-862.

[10] R.S.Barr, F.Glover, D.Klingman, the alternating basis algorithm for assignment problems, Math. Problem. 13 (1) (1977) 1-13.

[11] M.S.Bazara, J.J.Jarvis, H.D.Shetty, Linear Programming and Network Flows, seconded,Wiley, New York, 1990.

[12] G.M.Campbell, M.Diaby, Development and evaluation of an assignment heuristic for allocating cross-trained workers, Eur. J. Oper. Res. 138 (2002) 9-12.

[13] A.Charnes, W.W.Cooper, Programming with linear fractional functional. Naval Research Logistics Quarterly. 9 (1962) 181-185.

[14] A.Charnes, W.W.Cooper, E.Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, Eur. J. Oper. Res. 2 (6) (1978) 429-444.

[15] A.Charnes, W.W.Cooper, Z.M.Huang, D.B.Sun, Polyhedral con-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks, Jornal of Econometrics. 46 (1-2) (1990) 73-91.

[16] L.H.Chen, H.W.Lu, An extended assignment problem considering multiple inputs and outputs, Applied Mathematical Modeling 31 (2007) 2239-2248.

[17] W.W.Cooper, N.Ramòn, J.L.Ruiz, I.Sirvent, Ranking basketball players with a cross-efficiency evaluation. Working Paper. Centro de Investigaciòn Operativa, Universidad Miguel Hernàndez. (CIO-2010-4). 2010.

[18] S.P.Eberhardt, T.Duad, A.Kerns, T.X.Brown, A.P.Thakoor, Competitive neuralarchitecture for hardware solution to the assignment problem, Neural Networks 4 (4) (1991) 431-422.

[19] M.S.Hung, W.O.Rom, Solving the assignment problem by relaxation, Oper. Res. 28 (4) (1980) 969-982.

[20] H.W.Kuth, The Hungarian method for the assignment problem, Nav. Res. Log. 2 (1955) 83-97.

[21] L.F.McGinnis, Implementation and testing of a primal-dual algorithm for the assignment problem. Oper. Res. 31 (2) (1983) 277-291.

[22] G.A.Süer, I.S.Bera, Optimal operator assignment and cell loading when lot-spliting is allowed, Comput. Ind. Eng. 35 (3-4) (1998) 431-434.

[۲۳] آذر،عادل، عندلیب،داوود و شاه طهماسبی،اسماعیل. " ارزیابی کارایی استان ها در بخش بهداشت و درمان روستایی در برنامه سوم توسعه و سالهای ابتدایی برنامه چهارم توسعه"، مجله مدیریت سلامت، دوره ۱۳، شماره ۹، بهار ۱۳۸۹. (۱۳۸۹).

[۲۴] جهانشاهلو، غلامرضا و حسین زاده لطفی، فرهاد. " تحلیل پوششی داده ها و کاربردهای آن ". انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات. (۱۳۸۷).

[۲۵] جهانشاهلو، غلامرضا و حسین زاده لطفی، فرهاد. " رتبه بندی در تحلیل پوششی داده ها ". انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات. (۱۳۸۷).

[۲۶] مهرگان،محمدرضا. " مدل های کمی در ارزیابی عملکرد سازمان ها (تحلیل پوششی داده ها) "، انتشارات دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، چاپ اول. (۱۳۸۳).

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| اختصاص دادن | Allocate |
| ارزش ناکارامدی | Value of efficienc |
| ارزیابی کردن | Evaluate |
| الگوریتم برچسب گذاری | Label-correcting algorithm |
| الگوریتم بلمان–فورد | Bellman-Ford algorithm |
| الگوریتم دایجسترا | Dijkstra's algorithm |
| الگوریتم ژنتیک | Genetic algorithm |
| الگوریتم سیمپلکس | Simplex algorithm |
| الگوریتم مجارستانی | Hungarian algorithm |
| انبار | Warehouse |
| انتقال | Shipment |
| اندیس کارایی مرکب یا میانگین | Composite efficiency index |
| اندیس کارایی نسبی | Relative efficiency index |
| بازده به مقیاس ثابت | Constant returns to scale |
| بازده به مقیاس متغیر | Variable returns to scale |
| برنامه ریزی خطی | Linear programing |
| بیشینه سازی | Maximize |
| تابع هدف | Objective function |
| تحقیق در عملیات | Operation Research |
| تحلیل پوششی داده ها | Data Envelopment Analysis |
| تصمیم گیرنده ها | Decision makers |
| تعداد | Quantity |
| تعیین کردن، محاسبه کردن | Determine |
| تغییر دادن | Transform |
| تقاضا | Demand |

تعمیم دادن، گسترش دادن ........ Extend
چندگانه ........ Multiple
حداکثر ........ Maximum
حداقل ........ Minimum
خروجی ........ Output
در تناقض بودن با ........ Conflict with
دریافت کردن ........ Receive
رضایت کارکنان ........ Employee satisfaction
رویکرد تحلیل پوششی داده ها ........ DEA approach
ساختار شبکه ........ Network structure
سنجیدن، ارزیابی کردن، اندازه گیری کردن ........ Measure
سود ........ Profit
شبکه های عصبی ........ Neural network
شدنی ........ Feasible
شدنی، ممکن ........ Possible
صفت، ویژگی ........ Attribute
ضرب ........ Product
ظرفیت ........ Capacity
عدد غیر ارشمیدسی ........ Non-archimedean number
عددی ........ Numerically
عرضه ........ Supply
غیر کسری ........ Non-ratio
فرستادن، ارسال کردن ........ Send
قابلیت ........ Capability
کارامد ........ Efficient
کارایی نسبی ........ Relative efficiency
کمان، یال ........ Arc
کمینه سازی ........ Minimize
کیفیت خدمات ........ Quality of service
گره ابتدایی، رأس ابتدایی ........ Initial node
گره پایانی، رأس پایانی ........ Final node
لگاریتم ........ Logarithm

مبدأ ........ Origin

متغیر ........ Variable

متغیر های تصمیم ........ Decision variables

مثبت ........ Positive

مجموعه وزن ها ........ Set of weights

مجهول ........ Unknown

مدل برنامه ریزی ریاضی ........ Mathematical programming model

مسأله استاندارد ........ Standard problem

مسأله برنامه ریزی خطی عدد صحیح ........ Integer linear programming problem

مسأله برنامه ریزی کسری ........ Fractional programming problem

مسأله حمل و نقل ........ Transportation problem

مسأله کلاسیک ........ Classical problem

مسأله کوتاهترین مسیر ........ Shortest path problem

مسأله واگذاری ........ Assignment problem

مسیر کارا ........ Efficient path

مفهوم ........ Concept

مقایسه ........ Comparison

مقدار بهینه ........ Optimal value

مقصد ........ Destination

مکان، موقعیت ........ Location

منابع ........ Resource

منفی ........ Negative

میانگین، معدل ........ Average

میزان، مقدار ........ Amount

نا کارامد ........ Inefficient

نا متناسب ........ In commensurate

نا مثبت ........ Non-positive

نا منفی ........ Non-negative

نماد ها ........ Notations

نمایی، توانی ........ Exponential

نیاز داشتن ........ Require

واحد های تصمیم گیرنده ........ Decision Making Units

واحد هدف ........ Target unit
ورودی ........ Input
وزن ........ Weight
هدف ........ Goal
هدف ........ Target
هزینه انتقال ........ Shipping cost
هزینه های دلخواه ........ Arbitrary costs
هم ارز بودن ........ Equivalent
یکه سازی ........ Unification

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| Allocate | اختصاص دادن |
| Amount | میزان، مقدار |
| Arbitrary costs | هزینه های دلخواه |
| Arc | کمان، یال |
| Assignment problem | مسأله واگذاری |
| Attribute | صفت، ویژگی |
| Average | میانگین، معدل |
| Bellman-Ford algorithm | الگوریتم بلمان–فورد |
| Capability | قابلیت |
| Capacity | ظرفیت |
| Classical problem | مسأله کلاسیک |
| Comparison | مقایسه |
| Composite efficiency index | اندیس کارایی مرکب یا میانگین |
| Concept | مفهوم |
| Conflict with | در تناقض بودن با |
| Constant returns to scale | بازده به مقیاس ثابت |
| Data Envelopment Analysis | تحلیل پوششی داده ها |
| DEA approach | رویکرد تحلیل پوششی داده ها |
| Decision makers | تصمیم گیرنده ها |
| Decision Making Units | واحد های تصمیم گیرنده |
| Decision variables | متغیر های تصمیم |
| Demand | تقاضا |
| Destination | مقصد |
| Determine | تعیین کردن، محاسبه کردن |
| Dijkstra's algorithm | الگوریتم دایجسترا |

Efficient ........ کارامد

Efficient path ........ مسیر کارا

Employee satisfaction ........ رضایت کارکنان

Equivalent ........ هم ارز بودن

Evaluate ........ ارزیابی کردن

Exponential ........ نمایی، توانی

Extend ........ تعمیم دادن، گسترش دادن

Feasible ........ شدنی

Final node ........ گره پایانی، رأس پایانی

Fractional programming problem ........ مسأله برنامه ریزی کسری

Genetic algorithm ........ الگوریتم ژنتیک

Goal ........ هدف

Hungarian algorithm ........ الگوریتم مجارستانی

Inefficient ........ نا کارامد

In commensurate ........ نا متناسب

Initial node ........ گره ابتدایی، رأس ابتدایی

Input ........ ورودی

Integer linear programming problem ........ مسأله برنامه ریزی خطی عدد صحیح

Label-correcting algorithm ........ الگوریتم برچسب گذاری

Linear programing ........ برنامه ریزی خطی

Location ........ مکان، موقعیت

Logarithm ........ لگاریتم

Mathematical programming model ........ مدل برنامه ریزی ریاضی

Maximize ........ بیشینه سازی

Maximum ........ حداکثر

Measure ........ سنجیدن، ارزیابی کردن، اندازه گیری کردن

Minimize ........ کمینه سازی

Minimum ........ حداقل

Multiple ........ چندگانه

Negative ........ منفی

Network structure ........ ساختار شبکه

Neural network ........ شبکه های عصبی

Non-archimedean number ........ عدد غیر ارشمیدسی
Non-negative ........ نا منفی
Non-positive ........ نا مثبت
Non-ratio ........ غیر کسری
Notations ........ نماد ها
Numerically ........ عددی
Objective function ........ تابع هدف
Operation Research ........ تحقیق در عملیات
Optimal value ........ مقدار بهینه
Origin ........ مبدأ
Output ........ خروجی
Positive ........ مثبت
Possible ........ شدنی، ممکن
Product ........ ضرب
Profit ........ سود
Quality of service ........ کیفیت خدمات
Quantity ........ تعداد
Receive ........ دریافت
Relative efficiency ........ کارایی نسبی
Relative efficiency index ........ اندیس کارایی نسبی
Require ........ نیاز داشتن
Resource ........ منابع
Send ........ فرستادن، ارسال کردن
Set of weights ........ مجموعه وزن ها
Shipment ........ انتقال
Shipping cost ........ هزینه انتقال
Simplex algorithm ........ الگوریتم سیمپلکس
Shortest path problem ........ مسأله کوتاهترین مسیر
Standard problem ........ مسأله استاندارد
Supply ........ عرضه
Target ........ هدف
Target unit ........ واحد هدف

تغییر دادن ........ Transform

مسأله حمل و نقل ........ Transportation problem

یکه سازی ........ Unification

مجهول ........ Unknown

ارزش ناکارامدی ........ Value of efficiency

متغیر ........ Variable

بازده به مقیاس متغیر ........ Variable returns to scale

انبار ........ Warehouse

وزن ........ Weight

**Aabstract**

Assignment, transportation and shortest path problems are the most important and successful topics in the field related to operations research. These problems are network structured LP problems that arise in several contexts and have deservedly a great deal of attention in the literature. Classical assignment, transportation and shortest path problems, assume that there are unit of cost or profit along an arc. In many occasions, various attributes (various costs and profits) for inputs and outputs are usually considered in these problems. Because of the frequent occurrence of such network structured problems, there is a need to extend an efficient procedure for these problems.

Data Envelopment Analysis (DEA) is in this thesis to extend assignment, transportation and shortest path problems and then each extended problem with various attributes transform to equivalent classical linear programing problem with one efficiency index. Therefore, final problem present as an integer linear programing model for determine of a problem with maximum efficiency.

**Keywords:** Data Envelopment Analysis (DEA); Efficiency; Assignment problem; Transportation problem; Shortest path problem; Input-output.

**University of Shahrood**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

# Data Envelopment Analysis approach for solving transportation problem, assignment problem and shortest path problem.

**Fatemeh Dadashi Tonekaboni**

**Supervisors**

**Dr. Jafar Fathali and Dr. Seyed Hadi Nasseri**

**Advisor**

**Dr. Ali Ebrahimnejad**

**August 2016**