

دانشکده علوم ریاضی
رشته ریاضی محض گرایش هندسه

پایان نامه کارشناسی ارشد

طبقه بندی ژئودزیکهای سیاهچاله کر-نیومن

نگارنده: سون عباسور

استاد راهنما:

سید رضا حجازی

استاد مشاور:

کاظم بی تقصیر فدافن

تیر ۹۵

حمد و سپاس خدایی را سزااست که تیر حتمی قضایش را هیچ سپری نمی شکند و لطف و
محبت و هدایتش را هیچ مانعی باز نمی دارد و هیچ آفریده ای به پای شباهت
مخلوقات او نمی رسد. چهل و نادانی من و عصیان و کساحی من، تو را باز نداشت
از اینکه راهنمایی ام کنی به سوی صراط قربت و موفقم کردانی به آنچه رضا و
خشنودی توست. پس هرگاه که تو را خواندم، پاسخم گفتی. هرچه از تو خواستم،
عنایتم فرمودی. هرگاه اطاعت کردم، قدردانی و تشکر کردی و هر زمان که
شکرت را بر جا آوردم، بر نعمتایم افزودی. و اینها همه چیست؟ جز نعمت تمام و
کمال و احسان بی پایان تو! من کدام یک از نعمت هایت را می توانم بشمارم یا
حتی به یاد آورم و به خاطر بسپارم...

سپاس گزاری...

ضمن سپاس به درگاه ایزد یکتا، بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر حجازی که در تمامی مراحل این تحقیق با راهنمایی های ارزشمندشان، دلسوزانه یار و یاورم بودند و با صبر و حوصله از هیچ کمکی نسبت به اینجانب دریغ نکردند صمیمانه سپاس گزاری کنم. از جناب آقای دکتر بی تقصیر استاد مشاور ارجمندم سپاس ویژه دارم که با رهنمود های ارزنده شان، راهگشای من بوده اند. همچنین بجاست که از اساتید گرامی و فرهیخته جناب آقای دکتر بخشنده و آقای دکتر هاشم زاده که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند، تقدیر و تشکر خالصانه داشته باشم. و در نهایت از آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام بوده است از خانواده ام به خاطر تمامی کمک ها و دلگرمی هایشان در همه لحظات زندگی ام تشکر می نمایم. و در پایان از همگی دوستان خوبم که در این مدت با حضور گرم شان همراهم بوده اند کمال تشکر را دارم.

تعمدنامه

اینجانب نگارنده: سوسن عباسپور دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان طبقه بندی ژئودزیکهای سیاهچاله کر-نیومن، تحت راهنمایی سید رضا حجازی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نگارنده: سوسن عباسپور
سیر ۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، کاربرد هندسه دیفرانسیل با روش گروه لی در فیزیک نظری مورد بررسی قرار می گیرد. با قرار دادن ساختار هندسی ریمانی روی سیاهچاله کر-نیومن، ژئودزیک آن را که یک دستگاه معادله دیفرانسیل ODE^۱ است به دست می آوریم. سپس به کمک تقارن نقطه ای همه جوابهای این دستگاه را به دست آورده و در پایان به تحلیل جوابها می پردازیم. در این پایان نامه گروه های لی نقش اساسی در حل دستگاه معادله دیفرانسیل را دارند.

کلمات کلیدی: هندسه ریمانی، گروه های لی، تقارن نقطه ای، معادلات ژئودزیک، مختصات فضا-زمان، متریک کر-نیومن

^۱Ordinary diffrrantial equation

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Hejazi, S. Reza, Abbaspour Sousan, *Classification of Kerr-Newman's Geodesics*, General Mathematics Notes, Vol. 33, No. 2, (2016) 17-23.
2. Hejazi, S. Reza, Abbaspour Sousan, and Bazghandi Mustafa, *Electromagnetic Field Tensor in Kerr-Newman Geometry*, The 46th Annual Iranian Mathematics Conference Yazd university, (2015) 395-398.
3. Hejazi, S. Reza, Bazghandi Mustafa, and Abbaspour Sousan, *Integrating of Ordinary Differential Equations via a One-Parameter Symmetry Group*, The 46 th Annual Iranian Mathematics Conference Yazd university, (2015) 402-405.

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار
۳	۱ مفاهیم مقدماتی منیفلد و ساختارهای وابسته به آن
۳	۱.۱ منیفلد
۶	۲.۱ میدان برداری
۱۶	۳.۱ تانسور
۱۹	۴.۱ فرم دیفرانسیلی
۲۱	۵.۱ دیفرانسیل خارجی
۲۳	۶.۱ مشتق لی
۲۴	۷.۱ گروه لی
۲۵	۸.۱ زیرگروه لی
۲۷	۹.۱ جبر لی
۲۹	۲ هندسه ریمانی
۲۹	۱.۲ متریک ریمانی
۳۳	۲.۲ اتصال‌ها
۳۶	۳.۲ ژئودزیک‌ها
۳۸	۴.۲ تاب
۴۲	۵.۲ خمیدگی
۴۵	۶.۲ نگاشت نمایی
۴۶	۷.۲ مختصات فضا-زمان
۴۹	۳ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل
۴۹	۱.۳ عمل گروه بی‌نهایت کوچک
۵۰	۲.۳ ناوردایی بینهایت کوچک
۵۱	۳.۳ منحنی انتگرال
۵۴	۴.۳ گروه تبدیلات یک-پارامتری

۵۶	تبدیلات و توابع	۵.۳
۵۷	امتداد دهی	۶.۳
۵۸	دستگاه معادلات دیفرانسیل	۷.۳
۵۹	امتداد دهی عمل گروه	۸.۳
۵۹	امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌ها	۹.۳
۶۵	ناوردای دیفرانسیلی	۱۰.۳
۶۷	حل معادلات دیفرانسیل به روش تقارن نقطه ای گروه لی	۱۱.۳
۷۹	طبقه بندی ژئودزیک های سیاهچاله کر-نیومن	۴
۷۹	متریک کر-نیومن	۱.۴
۸۰	ژئودزیک های هندسه کر-نیومن	۲.۴
۸۴	تحلیل جوابهای دستگاه معادلات ژئودزیک	۳.۴
۸۵	محاسبه میدان الکترومغناطیسی سیاهچاله کر-نیومن	۴.۴
۸۷	مراجع	
۸۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۹۷	نمایه	
۹۷	نمایه	

پیشگفتار

تحلیل برخی از پدیده‌های فیزیکی که به‌طور شهودی قابل مشاهده نیستند نیاز به ابزار ریاضی دارند. یکی از این شاخه‌های ریاضی که به مطالعه بعضی رخداد‌های غیر قابل مشاهده که فقط اثر آن‌ها قابل لمس است می‌پردازد هندسه دیفرانسیل است. با توجه به اینکه سیاهچاله‌ها یکی از پدیده‌های نجومی هستند که بحث پیرامون آن‌ها بسیار زیاد است، آنالیز ژئودزیک‌های آن می‌تواند به تحلیل ما در مورد هندسه‌ی آن فضا کمک بسیاری کند و به وسیله‌ی گروه‌های تقارن همه‌ی جواب‌های دستگاه معادلات ژئودزیک را بدست می‌آوریم و بنابراین می‌توان آنالیز کامل تری در مورد ژئودزیک‌ها انجام دهیم.

ابتدا در سال ۱۹۱۵ آلبرت اینشتین^۲ که پیش تر نشان داده بود که گرانش، نور را تحت تاثیر قرار می‌دهد، نظریه گرانش خود به نام نسبیت عام را مطرح کرد. چند ماه بعد کارل شوارتزشیلد^۳ جوابی برای معادلات میدانی اینشتین ارائه نمود که میدان گرانشی ذرات نقطه ای کروی را توصیف می‌کرد. در سال ۱۹۵۸، دیوید فینکلشتین^۴ سطح شوارتزشیلد را به عنوان یک افق رویداد معرفی نمود، این نتایج مقارن بود با آغاز عصر طلایی نسبیت عام که در آن تحقیقات درباره نسبیت عام و سیاهچاله‌ها رونق فراوان یافت. در این دوره جواب‌های کلی تری نیز برای معادله سیاهچاله پیدا شد. روی کر^۵ جواب دقیقی برای سیاهچاله‌های چرخان به دست آورد. دو سال بعد در سال ۱۹۶۵ ازرا نیومن^۶ یک جواب متقارن محوری از معادله میدانی اینشتین برای سیاهچاله‌های چرخان و با بار الکتریکی کشف نمود که متریک کر-نیومن نامیده شد. حداکثر گسترش تحلیلی از هندسه کر-نیومن توسط بویر^۷ و لیندکویست^۸ در سال ۱۹۶۷ و توسط کارتر^۹ در سال ۱۹۶۸ مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. برای توضیحات بیشتر به مراجع [۳، ۸، ۱۳، ۲۷، ۲۶] مراجعه کنید.

این تحقیق به طبقه‌بندی ژئودزیک‌های هندسه کر-نیومن می‌پردازد. یکی از کاربردهای شاخه هندسه دیفرانسیل در فیزیک نظری است که با قرار دادن یک ساختار هندسی منیفلد هموار روی پدیده‌های فیزیکی مثل سیاهچاله‌ها، دستگاه مختصات روی آن تعریف می‌کند. طبق قضیه‌ای در هندسه ریمانی، روی هر منیفلد، یک متریک ریمانی تعریف می‌شود. ساختار هندسی یک سیاهچاله چرخان با بار

^۲Albert Einstein

^۳Karl Schwarzschild

^۴David Finkelstein

^۵Roy Kerr

^۶Ezra T. Newman

^۷Boyer

^۸Lindquist

^۹Brandon Carter

الکتریکی از هندسه کر-نیومن تبعیت می کند. این الگوی هندسی مبتنی بر دستگاه مختصات بویلر و لیندکویست، که نوعی مختصات فضا-زمان مانند (t, r, θ, ϕ) است که بر اساس یک متریک ریمانی به نام متریک کر-نیومن توصیف می شود است [۲، ۱۴، ۳].

اساس تعاریف و اصول موضوعه در هر هندسه، در تعریف خط راست در هندسه نهفته است. از آنجا که این خطوط، مسیرهای بهینه هستند، بیشترین کاربرد در هندسه و سایر علوم در یافتن این مسیرهاست که ژئودزیک می نامیم. با داشتن متریک، می توان معادلات ژئودزیک آن هندسه را تشکیل داد [۱۵، ۱۷، ۱]. در هندسه دیفرانسیل، معادله ژئودزیک برای مختصات فضا-زمان را بدست می آوریم، جوابهای دستگاه معادلات ژئودزیک در ریاضیات به خصوص در هندسه ریمانی و در فیزیک به ویژه نسبیت عام اهمیت فراوان دارد. برای حل این دستگاه معادلات، ابتدا گروههای تقارن دستگاه را مشخص می کنیم سپس به کمک گروههای تقارن همه ی جوابهای دستگاه را می توان طبقه بندی کرد. کاربرد گروههای لی در معادلات دیفرانسیل نخستین بار توسط سوفوس لی^{۱۰} و نوتر^{۱۱} بنیانگذاری شد و کارتان^{۱۲} آن را به سبک امروزی خود در هندسه دیفرانسیل معنا بخشید. حل معادلات دیفرانسیل به کمک گروههای تقارنی و ناورداهای وابسته به آن توسط لی مورد بررسی قرار گرفت که این روش مبتنی بر انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل است. و بطور مختصر می توان گفت گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل تبدیلاتی هستند که جوابهای دستگاه را به هم تبدیل می کنند، از دیدگاه لی تقارنها تبدیلات هندسی هستند که روی فضاهای شامل متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل کرده و روی جوابهای دستگاه با تبدیلاتی که روی گراف آنها اعمال کرده، عمل می کنند. یکی از مهمترین کاربردهای گروههای لی این است که میتوان شرایط غیر خطی پیچیده حاکم بر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را به بوسیله ناوردایی بینهایت کوچک آن دستگاه تحت مولد های گروه تقارنش موضعا به شرایطی خطی مبدل کرد که در فیزیک از اهمیت بسزایی برخوردار است. داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیت های بسیاری دارد که از جمله آن می توان به طبقه بندی جوابهای دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد [۵، ۶، ۱۰، ۲۲، ۲۴].

در این پایان نامه در فصل اول سعی بر آوردن مفاهیم اساسی هندسه از قبیل منیفلدها، گروههای لی و نحوه ی عمل آنها، جبرهای لی و ... شده است. در فصل دوم به معرفی هندسه ریمانی و تعاریف مربوط به آن می پردازیم [۱۵، ۱۷، ۱۶]. در فصل سوم مفهوم فضای جت و دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان شده و همچنین نحوه ی چگونگی یافتن تقارن ها به همراه چند مثال آورده شده است. و در پایان هندسه کر-نیومن معرفی می شود و ژئودزیکهای آن را به دست می آوریم و به کمک گروههای تقارن همه جوابهای دستگاه معادلات ژئودزیک ها را به دست می آوریم و در آخر به تحلیل جوابها می پردازیم. استفاده از ابزارهای کامپیوتری برای محاسبات ریاضی مزایای زیادی از جمله صرف جویی در زمان و دقت بالا دارد. در این پایان نامه برای انجام محاسبات از نرم افزار میپل^{۱۳} استفاده کرده ایم.

^{۱۰}Marius Sophus Lie

^{۱۱}Amalie Emmy Noether

^{۱۲}Elie Cartan

^{۱۳}Maple

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی منیفلد و ساختارهای وابسته به آن

مطالعه‌ی این نگارش مستلزم آشنایی با منیفلد و ساختارهای وابسته به آن است. منیفلد به زبان ساده فضایی است که موضعا شبیه فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است، اهمیت فضاها‌ی اقلیدسی بیشتر از این جهت است که دارای مختصات استاندارد فراگیر هستند بنابراین می‌توان تمام ساختارهای لازم بر $\mathbb{R}^n$ را با استفاده از مختصات استاندارد موجود بر آن تعریف کرد و آنگاه محاسبات لازم را به شکل صریح انجام نمود. به همین دلیل، هرگونه اطلاعاتی در خصوص $\mathbb{R}^n$ می‌تواند در محاسبات دیفرانسیلی و یا انتگرالی بر منیفلدها مفید باشد. منیفلد ها در علوم مختلف کاربرد های متنوعی دارند به عنوان مثال در برخی از شاخه های فیزیک مانند نظریه نسبیت عام و یا نظریه کوانتوم، هندسه منیفلد ها نقش زیر بنایی دارد البته کاربرد هندسه منیفلد به همین موارد ختم نمی شود بلکه می توان از آن به عنوان پل ارتباطی بزرگی بین ریاضیات محض و کاربرد ریاضی در علوم مختلف نام برد [۳]. در تئوری معادلات دیفرانسیل، استفاده از منیفلد ها از اهمیت خاصی برخوردارند و یا به زبان ساده تر هرگاه بخواهیم مقدار یک انتگرال را روی یک فضای پیچیده یا نامتناهی محاسبه کنیم نیاز به استفاده از مفهوم انتگرال روی منیفلد ها داریم [۲۰، ۲۱]. در این فصل به معرفی منیفلد و ساختار های وابسته به آن می پردازیم، همان طور که بیان شد منیفلد شیئی شبیه یک زیر مجموعه باز فضای اقلیدسی است اما در حالت توپولوژی فراگیر کاملا متفاوت است، هرچند اغلب منیفلدها یک زیر مجموعه از فضای اقلیدسی نمودار می شوند اما لازم می دانیم یک تعریف عمومی از آن ارائه دهیم.

۱.۱ منیفلد

تعریف ۱.۱.۱. منظور از منیفلد توپولوژیکی n -بعدی M فضای توپولوژیکی M است که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$ به ترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز

$U, V \subset M$ باشند، به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

(ب) M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ای شمارا داشته باشد.

(پ) M به طور موضعی اقلیدسی از بعد n باشد،

یعنی هر نقطه M دارای یک همسایگی باز مانند U و همئومورفیسمی مانند φ از U به روی زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. همئومورفیسم معادل آن است که تصویر هر باز، باز باشد.

به M یک منیفلد (خمینه-چندگونا) توپولوژیکی n -بعدی می‌گوییم. به زوج (U, φ) یک چارت یا دستگاه مختصات می‌گوییم و به مرکز $p \in M$ است هرگاه $\varphi(p) = 0$. برای هر $p \in M$ که $p \in U$ است اگر $U \subseteq M$ باز باشد، آنگاه نگاشت $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ همئومورفیسم است. همچنین

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)), \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad x^i : x \rightarrow \mathbb{R},$$

پوشش باز از M گردایه ای مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از مجموعه باز در M است.

لم ۲.۱.۱. هر زیر مجموعه باز از یک منیفلد توپولوژیکی n -بعدی، خودش هم یک منیفلد توپولوژیکی n -بعدی است.

مثال ۳.۱.۱. یک مثال بدیهی از منیفلد توپولوژیکی n ، فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است. هاسدورف است زیرا یک فضای متریک است و شمارای نوع دوم است زیرا مجموعه همه گوی‌های باز به مرکز گویا و شعاع گویا، یک پایه شمارا برای توپولوژی $\mathbb{R}^n$ است. یادآوری می‌کنیم که خواص هاسدورفی و شمارای دوم "خواص ارثی" هستند. بنابراین هر زیر فضا از $\mathbb{R}^n$ هاسدورف و شمارای نوع دوم است.

مثال ۴.۱.۱. نمودار $y = x^{\frac{1}{3}}$ در $\mathbb{R}^2$ یک منیفلد توپولوژیکی است. بدلیل آنکه زیر فضایی از $\mathbb{R}^2$ است، پس هاسدورف و شمارای دوم می‌باشد چون نمودار آن با ضابطه $(x, x^{\frac{1}{3}}) \mapsto x$ همئومورفیسم با $\mathbb{R}$ است پس موضعا اقلیدسی است.

تعریف ۵.۱.۱. نگاشت $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ را هموار (C^∞ یا دیفرانسیل‌پذیر) می‌گوییم، هرگاه مشتقات جزئی F از هر مرتبه موجود و پیوسته باشد. اگر $F^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ نیز هموار باشند، آنگاه F دیفئومورفیسم است.

تعریف ۶.۱.۱. اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت مختصاتی همپوش روی منیفلد M باشد، آنگاه نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

را نگاشت گذر از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به طور هموار سازگار می‌نامیم هرگاه، $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد.

لم ۷.۱.۱. اگر M و N دو منیفلد توپولوژیکی به ترتیب m بعدی و n بعدی باشند، $M \times N$ یک منیفلد توپولوژیکی $m + n$ بعدی است.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه‌ی $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ متشکل از چارت‌های منیفلد توپولوژیکی n -بعدی M را یک اطلس برای منیفلد M می‌گوییم هرگاه، اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو بطور هموار سازگار باشند و دامنه اعضای $\mathcal{A}$ ، M را بپوشانند.

تعریف ۹.۱.۱. اطلس $\mathcal{A}$ ماکسیمال است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد. به این معنا که هر چارت دیگری که با اعضای $\mathcal{A}$ به طور هموار سازگار باشند مشمول در $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱. یک ساختار هموار روی منیفلد n -بعدی توپولوژیکی M ، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی n -بعدی مجهز به یک ساختار هموار، یک منیفلد هموار نام دارد و با $(M, \mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۱.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار با تک چارت $(\mathbb{R}^n, r^1, \dots, r^n)$ از بعد n است. به ساختار هموار روی $\mathbb{R}^n$ مختصات استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ می‌گوییم.

مثال ۱۲.۱.۱ (گراف توابع پیوسته). فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد و تابع $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ پیوسته باشد. گراف f را با نماد $\Gamma(f)$ نشان می‌دهند که زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | x \in U\} \subset U \times \mathbb{R}^k,$$

نگاشت تصویری $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ که یک نگاشت پیوسته و پوشا است را در نظر بگیرید و $\varphi : \Gamma(f) \rightarrow U$ تحدید نگاشت π_1 نسبت به $\Gamma(f)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(x, y) = x, \quad (x, y) \in \Gamma(f),$$

φ پیوسته است، چون تحدید یک تابع پیوسته است. همچنین همومورفیسیم است چون $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$ پیوسته است. بنابراین $\Gamma(f)$ یک منیفلد توپولوژیکی از بعد n است و $(\Gamma(f), \varphi)$ چارت مختصاتی آن می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. نگاشت $F : M \rightarrow N$ بین دو منیفلد هموار M و N را هموار گوییم هرگاه هر نقطه از M مانند p درون یک چارت مثل (U, φ) ، و تصویر آن یعنی $F(p)$ درون یک چارت مثل (V, ψ) باشد به طوری که نگاشت زیر

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V),$$

هموار باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض می‌کنیم $F : M \rightarrow N$ نگاشتی هموار از منیفلد m -بعدی M به منیفلد n -بعدی N باشد. رتبه F در نقطه $x = (x^1, \dots, x^m)$ برابر با رتبه‌ی ماتریس ژاکوبین $n \times m$ است،

$$J_F = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

در نقطه x که $y = F(x)$ در هر مختصات موضعی مناسب در همسایگی x بیان می‌شود. نگاشت F روی زیرمجموعه باز $S \subset M$ دارای رتبه ماکسیمال است اگر برای هر $x \in S$ بعد F برابر بزرگترین مقدار ممکن (حداکثر n یا m) باشد.

مثال ۱۵.۱.۱. هر فضای برداری n -بعدی مانند V یک منیفلد هموار n -بعدی است. بنابر این اگر $V = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}_{i=1}^n$ و ایزومورفیسم $e : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ با ضابطه $x \mapsto e_i x^i$ تعریف کنیم که، $e(x) = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ پس $e^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ و (V, e^{-1}) به عنوان چارت روی منیفلد در نظر می‌گیریم. واضح است که چون V یک فضای برداری و یک زیر فضا از فضای اقلیدسی است پس خواص هاسدورف و شمارایی نوع دوم را به ارث می‌برد و موضعا اقلیدسی است چون (V, e^{-1}) هموار است. حال اطلس این فضا را بررسی می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ یک پایه دیگر برای V باشد که نگاشت آن به صورت زیر است،

$$\tilde{e}_j : \mathbb{R}^n \rightarrow V_j,$$

با ضابطه $x \mapsto \tilde{e}_j x^j$ که یک ایزومورفیسم است و $\tilde{e}$ را تعریف می‌کنیم، $\tilde{e}(x) = \sum_{j=1}^n x^j \tilde{e}_j$ و ماتریس (A_i^j) یک ماتریس وارون پذیر است که برای هر $e_i = \sum_j A_i^j \tilde{e}_j$ داریم،

$$\tilde{e}^{-1} \circ e(x) = \tilde{x}, \quad (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n),$$

و همچنین،

$$\sum_{j=1}^n \tilde{x}^j \tilde{e}_j = \sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i,j=1}^n x^j A_i^j \tilde{e}_j,$$

و این نشان می‌دهد که $\tilde{x}^j = \sum_j A_i^j x^i$ ، بنابراین این نگاشت دیفئومورفیسم است. لذا V یک منیفلد هموار n -بعدی است.

۲.۱ میدان برداری

تعریف ۱.۲.۱. نگاشت خطی $\mathbf{v} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $a \in \mathbb{R}^n$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{v}(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot \mathbf{v}f(a) + f(a) \cdot \mathbf{v}g(a),$$

قرار می‌دهیم:

$$T_a \mathbb{R}^n = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ یک عملگر مشتق در } \mathbb{R}^n \text{ است}\},$$

به فضای مماسی $\mathbb{R}^n$ گفته می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. عملگر خطی $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ را به شکل

$$D_v|_a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv), \quad (۱.۱)$$

تعریف می‌کنیم. به رابطه (۱.۱) مشتق جهتی در نقطه a و در راستای v گفته می‌شود.

گزاره ۳.۲.۱. نگاشت $\mathbb{R}^n \rightarrow T_a\mathbb{R}^n$ با ضابطه $v_a \mapsto D_v|_a$ یک ایزومورفیسم است.

برهان. [۴]. $\square$

نتیجه ۴.۲.۱. فرض می‌کنیم $(x^1, \dots, x^n)$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشد و a نقطه‌ای در $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت بردارهای مماس $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_a\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ می‌باشند.

برهان. [۴]. $\square$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و $p \in M$ باشد. عملگر خطی $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه p می‌گوییم هرگاه در شرط زیر صدق کند،

$$v(f \cdot g)(p) = g(p) \cdot v(f)(p) + f(p) \cdot v(g)(p).$$

قرار می‌دهیم

$$T_p M = \{v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{است } p \in M \text{ مشتق در نقطه } p \in M\},$$

در این صورت به $T_p M$ فضای مماسی منیفلد M در نقطه $p \in M$ گفته می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱. فرض می‌کنیم M و N منیفلدهای هموار و $F : M \rightarrow N$ نگاشتی هموار بین آن‌ها باشد. به ازای هر $p \in M$ نگاشت

$$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

را نگاشت دیفرانسیل F در نقطه p می‌نامیم که به ازای هر $v|_p \in T_p M$ ، $f \in C^\infty(N)$ با ضابطه

$$dF(v|_p)f(y) = v(f \circ F)(p), \quad y = F(p),$$

تعریف می‌شود. نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نمایش می‌دهند و آن را نگاشت پیش‌برنده می‌نامند.

گزاره ۷.۲.۱. اگر $F : N \rightarrow M$ و $G : M \rightarrow P$ نگاشت‌های هموار بین منیفلدها و $p \in N$ ، آن‌گاه:

(الف) $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} M$ خطی است.

(ب) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P$

پ) دیفرانسیل نگاشت همانی $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ در هر نقطه $p \in M$ ای، نگاشت همانی $d(\text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$ است.

ت) اگر F دیفئومورفیسم باشد، بنابراین $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ایزومورفیسم است و

$$d(F^{-1})_{F(p)} = (dF_p)^{-1}.$$

□

برهان. [۴].

تعریف ۸.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد و U یک زیرمجموعه باز آن باشد. به U یک زیرمنیفلد باز M گوئیم، هرگاه U با ساختار همواری M یک منیفلد باشد.

قضیه ۹.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار، U یک زیرمجموعه باز M و $i : U \rightarrow M$ نگاشت شمول باشد. آنگاه برای هر $p \in M$ نگاشت $di : T_p U \rightarrow T_p M$ ایزومورفیسم است.

□

برهان. [۴].

گزاره ۱۰.۲.۱. اگر M یک منیفلد m -بعدی باشد آنگاه فضای مماسی $T_p M$ نیز m -بعدی است.

□

برهان. [۴].

تعریف ۱۱.۲.۱. اجتماع مجزای $T_p M$ یعنی،

$$\bigsqcup_{p \in M} T_p M = TM,$$

را کلاف مماسی منیفلد M می‌گوئیم.

قضیه ۱۲.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار m -بعدی باشد آنگاه TM یک منیفلد هموار $2m$ -بعدی است به‌طوری که نگاشت $\pi : TM \rightarrow M$ با ضابطه $(p, x) \mapsto p$ هموار است.

□

برهان. [۴].

لم ۱۳.۲.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ هموار باشد، آنگاه $dF : TM \rightarrow TN$ هموار است.

برهان. طبق قضیه ۱۲.۲.۱ مختصات موضعی برای dF تعریف می‌کنیم که مختصات TM و TN به این صورت بیان می‌شود:

$$dF(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n) = (F^1(x), \dots, F^n(x), \frac{\partial F^1}{\partial x^i}(x)X^i, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial x^i}(x)X^i),$$

این رابطه هموار است چون F هموار است.

□

تعریف ۱۴.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد. یک خم (منحنی) هموار در M نگاشتی مانند $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ است به طوری که α تابعی هموار است. اگر

$$\alpha'(t_0) = d\alpha\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right) \in T_{\alpha(t_0)}M$$

$$\alpha'(t_0) = \left(d\alpha\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right).f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(f \circ \alpha) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t_0)$$

به بردار $\alpha'(t_0)$ مشتق یا سرعت خم α در نقطه t_0 می گوئیم که خود بردار مماس در منیفلد در نقطه $\alpha(t_0)$ است.

لم ۱۵.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار و $p \in M$ باشد. اگر $v \in T_p M$ ، آنگاه v مماس بر یک خم هموار در M مانند

$$\alpha : [-a, a] \rightarrow M,$$

است به طوری که در شرط زیر صدق کند.

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v.$$

□

برهان. [۱۶].

قضیه ۱۶.۲.۱. تابع هموار $F : M \rightarrow N$ و خم هموار $\alpha : I \rightarrow M$ مفروضند، برای هر $t_0 \in I$ بردار مماسی در نقطه t_0 در خم $F \circ \alpha : I \rightarrow N$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$(F \circ \alpha)'(t_0) = dF(\alpha'(t_0)).$$

برهان.

$$\begin{aligned} (F \circ \alpha)'(t_0) &= dF \circ \alpha \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} = dF_*\left(d\alpha \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) \\ &= dF(\alpha'(t_0)). \end{aligned}$$

□

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض می کنیم $\pi : M \rightarrow N$ یک نگاشت پیوسته باشد. یک برش از نگاشت π ، یک وارون راست پیوسته آن مانند $\delta : N \rightarrow M$ است به طوری که:

$$\pi \circ \delta = \text{Id}_N.$$

یک برش موضعی، یک نگاشت پیوسته موضعی مانند $\delta : U \subset N \rightarrow M$ است بطوری که

$$\pi \circ \delta = \text{Id}_U.$$

تعریف ۱۸.۲.۱. منظور از میدان برداری v بر منیفلد M ، نگاشتی است که به هر نقطه $p \in M$ یک بردار مماس $v_p \in T_p M$ متناظر می‌سازد. یا به عبارت دیگر، میدان برداری بر M ، یک برش از کلاف مماس TM است. مجموعه همه میدان های برداری روی منیفلد هموار M را با نماد $\mathfrak{X}(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۹.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار m -بعدی و p نقطه‌ای در آن باشد برای هر چارت هموار (U, φ) شامل نقطه p که $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ می‌باشد، $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$ یک پایه برای $T_p M$ تشکیل می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right).$$

□

برهان. [۲۱].

مثال ۲۰.۲.۱. فرض کنید $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی هموار و p نقطه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشند و بردارهای مماس $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_p \mathbb{R}^n$ و $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_{F(p)} \right\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ باشد. در این صورت نگاشت خطی

$$dF : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m,$$

نسبت به این دو پایه با ماتریس $[a_j^i] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ نشان داده می‌شود، که در آن

$$dF \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{k=1}^m a_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)}. \quad (2.1)$$

گیریم $F^i := y^i \circ F$ مقدار i -ام نگاشت F باشد یعنی $F = (F^1, \dots, F^m)$ ، در این صورت، با تاثیر دادن هر دو طرف فرمول (۲.۱) بر توابع مختصاتی y^i می‌توانیم a_j^i را محاسبه کنیم. سمت راست فرمول (۲.۱) برابر است با:

$$\sum_{k=1}^m a_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)} y^i = \sum_{k=1}^m a_j^k \partial_k^i = a_j^i.$$

و سمت چپ فرمول (۲.۱) برابر است با:

$$dF \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) y^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (y^i \circ F) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} (p).$$

بنابراین، ماتریس نمایش نگاشت خطی dF نسبت به پایه‌های استاندارد $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ و $\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}$ عبارت است از ماتریس ژاکوبی نگاشت F در نقطه p .

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید $F : N \rightarrow M$ هموار، $w \in \mathfrak{X}(N)$ و $v \in \mathfrak{X}(M)$ در این صورت w و v را F -مرتبط گوئیم هرگاه برای هر $p \in M$ داشته باشیم:

$$dF_p(w) = v_{F(p)}.$$

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و f یک تابع هموار باشد. عملگر کروسه لی را روی مجموعه میدان‌های برداری M به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$[v, w] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$$[v, w]f = vw f - wv f, \quad v, w \in \mathfrak{X}(M),$$

بنابراین کروسه لی میدان‌های برداری v و w در نقطه $p \in M$ ، مشتق در نقطه p است که به این صورت بدست می‌آید:

$$[w, v]_p f = w_p(vf) - v_p(wf).$$

لم ۲۳.۲.۱. اگر v و w دو میدان برداری روی M باشند، آنگاه $[v, w]$ میدان برداری است. برهان. برای توابع هموار و دلخواه $f, g \in C^\infty(M)$ داریم:

$$\begin{aligned} [v, w](af + bg) &= vw(af + bg) - wv(af + bg) \\ &= v(awf + bwg) - w(avf + bvg) \\ &= avwf + bwvg - awvf - bwvg \\ &= a(vw - wv)f + b(vw - wv)g \\ &= a[v, w]f + b[v, w]g, \end{aligned} \quad (3.1)$$

از رابطه (۳.۱) نتیجه می‌گیریم که کروسه لی خطی است.

$$\begin{aligned} [v, w](f \cdot g) &= vw(f \cdot g) - wv(f \cdot g) \\ &= v(g \cdot w \cdot f + f \cdot w \cdot g) - w(g \cdot v \cdot f + f \cdot v \cdot g) \\ &= v(g \cdot w \cdot f) + v(f \cdot w \cdot g) - w(g \cdot v \cdot f) - w(f \cdot v \cdot g) \\ &= wfvg + gvwf + wgvf + fvwg - vfwg - gvwf - vgw f - fvwg \\ &= f(vw - wv)g + g(vw - wv)f \\ &= f[v, w]g + g[v, w]f, \end{aligned} \quad (4.1)$$

و همچنین از (۴.۱) نتیجه می‌گیریم که کروسه لی در قاعده لایب نیتس صدق می‌کند. بنابراین کروسه لی یک عملگر مشتق و میدان برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

$$(v, w) \longmapsto [v, w] = vw - wv.$$

□

گزاره ۲۴.۲.۱. هرگاه v و w دو میدان برداری روی منیفلد هموار M باشند، $w = w^i \frac{\partial}{\partial w^i}$ و $v = v^i \frac{\partial}{\partial w^i}$ نمایش مختصاتی v و w در دستگاه مختصات w^i برای M باشد. بنابراین کروسه لی v و w نمایش مختصاتی زیر را دارد:

$$[w, v] = (w^i \frac{\partial v^i}{\partial w^i} - v^i \frac{\partial w^i}{\partial w^i}) \frac{\partial}{\partial w^i}$$

و به اختصار نوشته می شود:

$$[\mathbf{w}, \mathbf{v}] = (\mathbf{w}\mathbf{v}^j - \mathbf{v}\mathbf{w}^j) \frac{\partial}{\partial w^j}$$

برهان.

$$\begin{aligned} [\mathbf{w}, \mathbf{v}]f &= \mathbf{w}^i \frac{\partial}{\partial w^i} (\mathbf{v}^j \frac{\partial f}{\partial w^j}) - \mathbf{v}^i \frac{\partial}{\partial w^i} (\mathbf{w}^j \frac{\partial f}{\partial w^j}) \\ &= \mathbf{w}^i \frac{\partial \mathbf{v}^j}{\partial w^i} \frac{\partial f}{\partial w^j} + \mathbf{w}^i \mathbf{v}^j \frac{\partial^2 f}{\partial w^i \partial w^j} - \mathbf{v}^j \frac{\partial \mathbf{w}^i}{\partial w^j} \frac{\partial f}{\partial w^i} - \mathbf{v}^j \mathbf{w}^i \frac{\partial^2 f}{\partial w^j \partial w^i} \\ &= \mathbf{w}^i \frac{\partial \mathbf{v}^j}{\partial w^i} \frac{\partial f}{\partial w^j} - \mathbf{v}^j \frac{\partial \mathbf{w}^i}{\partial w^j} \frac{\partial f}{\partial w^i} \end{aligned}$$

□

قضیه ۲۵.۲.۱. هرگاه $F : M \rightarrow N$ هموار و $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathfrak{X}(M)$ و $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{X}(M)$ اگر $\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i$ مرتبط F - مرتبط باشند آنگاه $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$ و $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ مرتبط F - مرتبط هستند.

□

برهان. [۲۱].

قضیه ۲۶.۲.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ دیفیئومورفیسم باشد و $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathfrak{X}(M)$ بنابراین

$$[dF_p \mathbf{w}_1, dF_p \mathbf{w}_2] = dF_p [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2].$$

برهان. چون F دیفیئومورفیسم است، پس $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ به ترتیب میدان های برداری $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ ، F - مرتبط هستند و $dF_p \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$ و $dF_p \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$ ، $f \in C^\infty(N)$

$$[dF_p \mathbf{w}_1, dF_p \mathbf{w}_2]f = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]f = dF_p [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]f.$$

□

تعریف ۲۷.۲.۱. دو میدان برداری $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ جابجا می شوند هرگاه:

$$[\mathbf{w}, \mathbf{v}]f = 0, \quad \mathbf{w}\mathbf{v}f = \mathbf{v}\mathbf{w}f, \quad f \in C^\infty(M),$$

مثال ۲۸.۲.۱. دو میدان برداری $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial v} + \mathbf{w}(\mathbf{v} + 1) \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial w} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial z},$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} [\mathbf{w}, \mathbf{v}] &= \mathbf{w}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial w} + \mathbf{w}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial z} - \mathbf{v}(\mathbf{w}) \frac{\partial}{\partial w} \\ &\quad - \mathbf{v}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v} - \mathbf{v}(\mathbf{w}(\mathbf{v} + 1)) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= 0 \frac{\partial}{\partial w} + 1 \frac{\partial}{\partial z} - 1 \frac{\partial}{\partial w} - 0 \frac{\partial}{\partial v} - (\mathbf{v} + 1) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial w} - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

گزاره ۲۹.۲.۱. برای میدان های برداری $v, w, z \in \mathfrak{X}(M)$ گروه لی در خواص زیر صدق می کند:
الف) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ خطی است:

$$[aw + bv, z] = a[w, z] + b[v, z], \quad [z, aw + bv] = a[z, w] + b[z, v].$$

ب) پاد متقارن است:

$$[w, v] = -[v, w].$$

پ) در اتحاد ژاکوبی صدق می کند:

$$[w[v, z]] + [v, [z, w]] + [z[w, v]] = 0.$$

ت) برای هر $f, g \in C^\infty(M)$

$$[fw, gv] = fg[w, v] + (fwg)v - (gvf)w.$$

برهان. با توجه به تعریف گروه لی ثابت می شود [۴]. $\square$

تعریف ۳۰.۲.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد بنابراین رتبه نگاشت F در نقطه $p \in M$ برابر است با رتبه نگاشت، $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ یعنی $\text{rank} F = \dim I_m dF_p \subset T_{F(p)} N$ بنابراین،

$$\text{rank} F \leq \min\{\dim M, \dim N\}.$$

تعریف ۳۱.۲.۱. نگاشت $F : M \rightarrow N$ یک سابمرژن نام دارد هرگاه $\text{rank} F = \dim N$. به این معنا که به ازای هر $p \in M$ ، $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ پوشا باشد.

تعریف ۳۲.۲.۱. نگاشت $F : M \rightarrow N$ یک ایمرژن نام دارد هرگاه $\text{rank} F = \dim M$. به این معنا که به ازای هر $p \in M$ ، $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ یک به یک باشد.

مثال ۳۳.۲.۱. رتبه نگاشت $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ در تمام نقاط ثابت، برابر بعد دامنه یعنی ۱ و یک نگاشت ایمرژن است. همچنین ژاکوبین آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_F = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

مثال ۳۴.۲.۱. رتبه نگاشت $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $F(x, y, z) = x^2 - y + z^3$ در تمام نقاط ثابت، برابر بعد برد یعنی ۱ و یک نگاشت سابمرژن است. همچنین ژاکوبین آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_F = (2x \quad -1 \quad 3z^2).$$

مثال ۳۵.۲.۱ (نگاشت تصویری). نگاشت $\pi^i : M^1 \times \dots \times M^k \rightarrow M^i$ با ضابطه $(p^1, \dots, p^k) \mapsto p^i$ مفروض است. رتبه این تابع در تمامی نقاط برابر بعد برد است بنابراین این نگاشت سابمرژن است.

قضیه ۳۶.۲.۱ (قضیه تابع معکوس در منیفلدها). فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد همبعد M و N باشند. هرگاه به ازای هر $p \in M$ $dF_p : T_p M \leftarrow T_{F(p)} N$ ایزومورفیزم باشند، آنگاه یک همسایگی از p مانند U و یک همسایگی از $F(p)$ مانند V موجود است که $F|_U : U \rightarrow V$ دیفیئومورفیزم است.

برهان. [۴]. $\square$

قضیه ۳۷.۲.۱ (قضیه رتبه در منیفلدها). فرض کنید M و N به ترتیب دو منیفلد هموار m -بعدی و n -بعدی و $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد، به ازای هر $p \in M$ یک چارت مختصاتی مانند $(x^1, \dots, x^m)$ به مرکز p و یک چارت مختصاتی مانند $(y^1, \dots, y^n)$ به مرکز $F(p)$ موجود است به طوری که :

$$F(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, \circ, \dots, \circ),$$

به ویژه اگر F سابمرژن باشد، آنگاه :

$$F(x^1, \dots, x^k, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n),$$

و اگر F ایمرژن باشد، آنگاه :

$$F(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, \circ, \dots, \circ).$$

برهان. [۴]. $\square$

تعریف ۳۸.۲.۱ نگاره $f(N)$ یک ایمرژن یک به یک $f : N \rightarrow M$ را اصطلاحاً زیر منیفلد ایمرژن M گویند. از این پس فرض بر این است که توپولوژی بر $f(N)$ توسط f فراهم می شود. یعنی، $U \subseteq f(N)$ باز است اگر و تنها اگر $f^{-1}(U) \subseteq N$ باز باشد.

تعریف ۳۹.۲.۱ نگاشت $\pi : TM \rightarrow M$ که به صورت $\pi(p, X) = p$ تعریف می گردد، نگاشت تصویر طبیعی TM نامیده می شود. با این تعریف ساختار جدیدی بر کلاف مماس ظاهر می شود که در زیر به تعریف آن می پردازیم:

تعریف ۴۰.۲.۱ فرض کنید $\pi : E \rightarrow M$ نگاشتی دلخواه باشد. در این صورت تصویر معکوس $\pi^{-1}(\{p\}) := \pi^{-1}(p)$ هر نقطه $p \in M$ را تار در p می نامیم. اغلب تار در p را با نماد E_p نشان می دهیم. به ازای هر دو نگاشت مفروض $\pi' : E' \rightarrow M$ و $\pi : E \rightarrow M$ ، نگاشت $\phi : E \rightarrow E'$ را در صورتی حافظ تار گوئیم که به ازای هر $p \in M$ داریم:

$$\phi(E_p) \subseteq E'_p.$$

تعریف ۴۱.۲.۱. نگاشت هموار و پوشای $\pi: E \rightarrow M$ را در صورتی موضعا بدیهی گوییم هرگاه:

- هر تار $\pi^{-1}(p)$ دارای ساختار فضای برداری با بعد r است.
- به ازای هر $p \in M$ همسایگی باز U از p ، دیفیئومورفیسم حافظ تار $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $q \in U$ ، تحدید $\phi|_{\pi^{-1}(q)}: \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$ ایزومورفیسمی بین فضاهای برداری است. چنین مجموعه بازی را مجموعه باز بدیهی ساز برای E و ϕ را بدیهی سازی برای E روی U می نامند.

منظور از کلاف برداری هموار از رتبه r ، یک سه تایی (E, M, π) متشکل از منیفدهای هموار M, E و نگاشت هموار پوشای $\pi: E \rightarrow M$ است که موضعا بدیهی از رتبه r می باشد. منیفلد E را فضای کلی و M را فضای پایه برای کلاف مماس می نامند.

تعریف ۴۲.۲.۱. فرض کنیم E یک کلاف برداری روی M ، $U \subset M$ باز باشد. به ازای هر $p \in U$ مجموعه ی برش های $\{\delta^1(p), \dots, \delta^k(p)\}$ مستقل خطی هستند، هرگاه به عنوان اعضایی از تار E_p استقلال خطی داشته باشند.

یک کنج موضعی برای M یک k تایی از برش های هموار مانند $\{\delta^1, \dots, \delta^k\}$ که $\delta^i: U \rightarrow E$ است، به طوری که یک پایه برای E_p بسازد. کنج را در صورتی هموار گوییم که برش های معرف آن هموار باشند. اگر U کل M باشد به این کنج، کنج فراگیر می گویند.

مثال ۴۳.۲.۱. کلاف مماسی یک کلاف برداری است. چون که نگاشت $\pi: TM \rightarrow M$ با ضابطه $p \mapsto v_p$ هموار و پوشاست و $\pi^{-1}(p) = T_p M \simeq \{p\} \times \mathbb{R}^k$.

مثال ۴۴.۲.۱. مجموعه میدان های برداری $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ یک کنج موضعی برای TM و یک پایه برای تار $T_p M$ است.

تعریف ۴۵.۲.۱. منیفلد هموار M توازی پذیر نام دارد، هرگاه یک کنج فراگیر بپذیرد.

تعریف ۴۶.۲.۱. فرض کنید M یک زیر منیفلد k -بعدی از $\mathbb{R}^n$ با دستگاه مختصات $x = (x^1, \dots, x^n)$ باشد. در این صورت یک چارت برای M به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$\{(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) \mid x^{k+1} = c_{n+1}, \dots, x^n = c_n\},$$

اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، یک k -برش U در M زیر مجموعه ای از M مانند S به شکل زیر است:

$$S = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \mid x^{k+1} = c_{n+1}, \dots, x^n = c_n\} \stackrel{\text{همئومورف}}{\simeq} \mathbb{R}^k.$$

تعریف ۴۷.۲.۱. زیر منیفلد S از M را یک زیر منیفلد k -بعدی ایمبد شده از M است هرگاه هر نقطه آن مانند $p \in S$ درون یک چارت از M مانند (U, φ) باشد به طوری که $U \cap S$ یک k -برش از U باشد

و

$$\dim M - \dim S = k.$$

تعریف ۴۸.۲.۱. فرض کنیم $F : N \rightarrow M$ هموار است و c نقطه‌ای در M باشد. مجموعه

$$F^{-1}(c) = \{p \in N | F(p) = c\},$$

یک مجموعه تراز نگاشت F است.

قضیه ۴۹.۲.۱. فرض کنیم $F : N \rightarrow M$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد. در این صورت هر مجموعه تراز F یک زیرمینفلد بسته ایمبد شده N از بعد نقصان k است، یعنی:

$$\dim F^{-1}(c) = \dim M - k.$$

برهان. مجموعه تراز $F^{-1}(c)$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $F^{-1}(c)$ در M بسته است. حال فرض می‌کنیم $p \in F^{-1}(c)$ باشد. طبق قضیه ۳۷.۲.۱، اگر (U, φ) چارت شامل p و (V, ψ) چارت شامل $F(p)$ باشد، آنگاه داریم:

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, \circ, \dots, \circ),$$

بنابراین $F^{-1}(c)$ را می‌توان به صورت اجتماع $F^{-1}(c) \cap U$ به ازای U های مختلف نوشت:

$$F^{-1}(c) \cap U = \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^1 = \circ, \dots, x^m = \circ\},$$

بنابراین داریم:

$$\dim F^{-1}(c) = m - k.$$

□

۳.۱ تانسور

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $V_1, \dots, V_k, W$ فضاهاى برداری باشند. در این صورت نگاشت $F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ را یک نگاشت k -خطی می‌گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, a\mathbf{v}_i + b\mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k) = aF(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) + bF(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k).$$

تعریف ۲.۳.۱. نگاشت k -خطی $F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$ یک k -تانسور کواریان روی فضای برداری V نام دارد.

تعریف ۳.۳.۱. اگر V یک فضای برداری و $T \in T^k(V), S \in T^l(V)$ آنگاه ضرب تانسوری T, S به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T \otimes S : V \times \dots \times V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(T \otimes S)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \cdot S(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{k+l}).$$

تعریف ۴.۳.۱. مجموعه تمام k -تانسورهای کواریان روی فضای برداری V را با $T^k(V)$ نشان می‌دهیم و به‌طور نمادین $T^k(V)$ را به شکل

$$T^k(V) = V^* \otimes \cdots \otimes V^*,$$

نشان می‌دهند.

قضیه ۵.۳.۱. $T^k(V)$ یک فضای برداری است.

برهان. فرض کنید $T_1, T_2 \in T^k(V)$ لذا $T_1 + T_2 \in T^k(V)$ پس

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k) &= T_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &\quad + T_2(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &= T_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) + T_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &\quad + T_2(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) + T_2(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &= (T_1 + T_2)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &\quad + (T_1 + T_2)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k), \end{aligned}$$

و

$$(aT_1)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) = aT_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k),$$

بنابراین $aT_1 \in T^k(V)$ پس k تانسور کواریان خطی است. $\square$

تعریف ۶.۳.۱. اگر $V = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}_{i=1}^n$ یک فضای برداری باشد، دوگان این فضا یک فضای برداری به شکل $V^* = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ است که پایه‌های آن با یکدیگر به‌صورت $\varphi^i(e_j) = \delta_{ij}$ در رابطه هستند.

لم ۷.۳.۱. اگر $V_1, \dots, V_k$ فضای برداری حقیقی از بعد $n_1, \dots, n_k$ برای هر $j \in \{1, \dots, k\}$ یک پایه برای V_j و $(E_1^{(j)}, \dots, E_{n_j}^{(j)})$ پایه فضای دوگان V_j^* باشند، آنگاه

$$\mathcal{B} = \{\varepsilon^{(i_1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{(i_k)} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k\},$$

یک پایه برای $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ است که بعد آن n^k است.

برهان. [۲۹]. $\square$

لم ۸.۳.۱. اگر $V_1, \dots, V_k$ فضای برداری حقیقی با بعد $n_1, \dots, n_k$ باشند و برای هر $j \in \{1, \dots, k\}$ یک پایه برای V_j باشند، بنابراین مجموعه

$$\varphi = \{E_{(i_1)} \otimes \cdots \otimes E_{(i_k)} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k\},$$

یک پایه برای $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ است که بعد آن n^k است.

برهان. [۲۹].

□

تعریف ۹.۳.۱. اگر V یک فضای برداری n -بعدی باشد، به نگاشت k -خطی

$$T : V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

یک k -تانسور کنتراواریان روی فضای برداری V می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۳.۱. مجموعه تمام k -تانسورهای کنتراواریان را با $T_k(V)$ نشان می‌دهیم و $T_k(V)$ را به شکل

$$T_k(V) := V \otimes \cdots \otimes V,$$

نشان می‌دهند.

تعریف ۱۱.۳.۱. نگاشت $(k+l)$ -خطی $T : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تانسور آمیخته از نوع $\binom{k}{l}$ می‌گوییم و آن را با $T_l^k(V)$ نمایش می‌دهیم که یک فضای برداری n^{k+l} -بعدی است و پایه نمایش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L} = \{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \otimes E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} : 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n\},$$

لذا،

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \otimes E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l},$$

تعریف ۱۲.۳.۱. k -تانسور کواریان $T : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری V متقارن است هرگاه برای هر $1 \leq i < j \leq k$

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k).$$

فضای تمام k -تانسورهای متقارن روی فضای برداری V را با $\Sigma^k(V^*)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۳.۱. برای همه بردارهای $V_1, \dots, V_k$ هر جفت اندیس مجزای i, j ، k -تانسور کواریان $T : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری V متناوب است هرگاه :

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_k) = -T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k).$$

تعریف ۱۴.۳.۱. فضای تمام k -تانسورهای متناوب روی فضای برداری V را با $\Lambda^k(V^*)$ نمایش می‌دهیم که $\Lambda^k(V^*) \subset T^k(V^*)$ و همچنین بعد آن برابر $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ و همچنین بعد آن برابر } \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ است.}$$

تعریف ۱۵.۳.۱. هرگاه M یک منیفلد هموار باشد. مجموعه تمام k -تانسورهای کواریان روی M در نقطه p را با $T^k(T_p^*M)$ نشان می‌دهیم.

۴.۱ فرم دیفرانسیلی

تعریف ۱.۴.۱. هرگاه M یک منیفلد هموار باشد، کلاف k -تانسوری کواریان روی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T^k TM = \bigsqcup_{p \in M} T^k(T_p M).$$

تعریف ۲.۴.۱. هرگاه M یک منیفلد هموار باشد، کلاف l -تانسوری کنتراریان روی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_l TM = \bigsqcup_{p \in M} T_l(T_p M).$$

تعریف ۳.۴.۱. هرگاه M یک منیفلد هموار باشد، کلاف (k, l) -تانسوری آمیخته روی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T^{k,l} TM = \bigsqcup_{p \in M} T_l^k(T_p M).$$

(الف) مجموعه میدان‌های تانسوری کواریان، $\{T^k M \text{ هموار برشهای } T^k M\}$.

(ب) مجموعه میدان‌های تانسوری کنتراریان، $\{T_l M \text{ هموار برشهای } T_l M\}$.

(پ) مجموعه میدان‌های تانسوری آمیخته، $\{T_l^k M \text{ هموار برشهای } T_l^k M\}$.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنیم x^i یک دستگاه مختصات روی منیفلد هموار M باشد. اگر $E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k}$ و $\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}$ به ترتیب پایه‌های تانسور کنتراریان و کواریان باشد، آنگاه میدان‌های تانسوری A را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A = \begin{cases} A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}, & A \in \mathcal{J}^k M \\ A^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, & A \in \mathcal{J}_k M \\ A^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}, & A \in \mathcal{J}_l^k M. \end{cases}$$

تعریف ۵.۴.۱. اگر $\pi : T^k(TM) \rightarrow M$ کلاف k -تانسورها کواریان روی M باشد. آنگاه نگاشت $\delta : M \rightarrow T^k(T^*M)$ یک برش از $T^k(T^*M)$ می‌گوییم هرگاه، $\pi \circ \delta = \text{Id}_M$.

تعریف ۶.۴.۱. هر برش از کلاف تانسوری را یک میدان تانسوری می‌گوییم. این میدان تانسوری هموار است هرگاه برش‌های آن هموار باشد.

تعریف ۷.۴.۱. اجتماع مجزای $T^k(T_p^*M)$ را کلاف k -تانسورهای متناوب روی M می‌نامند که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

تعریف ۸.۴.۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی و $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ باشد ضرب وج به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

گزاره ۹.۴.۱. (ویژگی های ضرب گوه ای^۱). فرض کنید ω , ω' , η , η' و ξ چند فرم دیفرانسیلی روی فضای برداری با بعد متناهی V و $a, a' \in \mathbb{R}$ باشند، آنگاه:

• دو خطی است:

$$\begin{aligned} (a\omega + a'\omega') \wedge \eta &= a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta), \\ \eta \wedge (a\omega + a'\omega') &= a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega'). \end{aligned}$$

• شرکت پذیر است:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

• تعویض ناپذیر است: یعنی اگر $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ و $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ آنگاه:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

برهان. [۲۰]. $\square$

تعریف ۱۰.۴.۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، نگاشت $\text{Alt} : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$ را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\delta} (\text{sgn} \delta) T(\mathbf{v}_{\delta(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\delta(k)}).$$

که δ تمام جایگشت های ممکن روی $-k$ تایی $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ است.

تعریف ۱۱.۴.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد، یک برش هموار از $\Lambda^k(TM)$ را یک k -فرم دیفرانسیلی گوئیم، بطوریکه $\pi \circ \sigma = \text{Id}_M$ و به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(TM)).$$

هرگاه M یک منیفلد هموار n -بعدی باشد، لذا $\Omega^k(M)$ یک فضای برداری $\binom{n}{k}$ -بعدی است و

اگر x^i یک دستگاه مختصات روی منیفلد هموار M باشد، آنگاه در این دستگاه مختصات، یک k -فرم دیفرانسیلی به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_k=1}^n \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

و $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(M)$.

^۱Wedge product

مثال ۱۲.۴.۱. اگر $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $\zeta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ تعریف می‌کنیم:

$$\omega = xydx + \sin z dz, \quad \zeta = (x^2 - z^2) dx \wedge dy + \frac{1}{x^2 + y^2} dy \wedge dz$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \omega \wedge \zeta &= \frac{xy}{x^2 + y^2} dx \wedge dy \wedge dz + (x^2 - z^2) \sin z dz \wedge dy \wedge dx \\ &= \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} + (x^2 - z^2) \sin z \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

تعریف ۱۳.۴.۱. فرض کنید $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد، دوگان نگاشت $F_* : T_p M \rightarrow T_p N$ را با $F^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ به صورت $F^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ و نگاشت پس‌کشنده نامیده می‌شود. بنابراین برای هر $V \in T_p M$ و $\omega \in T_{F(p)}^* N$ ، پس‌کشنده به شکل زیر روی ω اثر می‌گذارد،

$$F^*(\omega)V = \omega(dFV).$$

تعریف ۱۴.۴.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد، به ازای هر $p \in M$ نگاشت پس‌کشنده برای $\omega \in \Omega^k(N)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} F^* : \Omega^k(N) &\rightarrow \Omega^k(M) \\ (F^*(\omega))(v_1 \cdots v_k) &= \omega(F_*(v_1) \cdots F_*(v_k)), \quad (\forall v_i \in T_p M). \end{aligned}$$

گزاره ۱۵.۴.۱ (ویژگی‌ها). فرض می‌کنیم $F : M \rightarrow N$ هموار باشد، آنگاه:

$$۱. \quad F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M) \text{ خطی است.}$$

$$۲. \quad F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta).$$

□

برهان. [۲۰].

۵.۱ دیفرانسیل خارجی

تعریف ۱.۵.۱. هرگاه $\omega \in \Omega^k(M)$ ، عملگر دیفرانسیل (دیفرانسیل خارجی) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

که اگر

$$\omega = \sum_{i_1 \cdots i_k=1}^n \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k},$$

بنابراین

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n d\omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k},$$

یک $(k+1)$ -فرم است.

مثال ۲.۵.۱. اگر $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\omega = (z - x^2) dx \wedge dy + (y^2 - xz) dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\begin{aligned} d\omega &= d(z - x^2) \wedge dx \wedge dy + d(y^2 - xz) \wedge dy \wedge dz \\ &= dz \wedge dx \wedge dy - z dx \wedge dy \wedge dz = (1 - z) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

گزاره ۳.۵.۱. اگر $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ عملگر دیفراسیل روی منیفلد هموار M باشد، خواص زیر برقرار است:

الف) اگر f یک تابع هموار و X یک میدان برداری روی M باشد، $df(X) = Xf$.

ب) اگر $\omega \in \Omega^k(M)$ ، $\zeta \in \Omega^l(M)$ ، آنگاه $d(\omega \wedge \zeta) = d\omega \wedge \zeta + (-1)^k \omega \wedge d\zeta$.

پ) اگر $\omega \in \Omega^k(M)$ ، آنگاه $d^2\omega = 0$.

ت) اگر $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$ ، آنگاه $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

برهان. [۲۱]. $\square$

قضیه ۴.۵.۱. اگر $F: M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار و $\omega \in \Omega^k(M)$ ، آنگاه $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.

برهان. [۲۱]. $\square$

قضیه ۵.۵.۱. اگر $\omega \in \Omega^1(M)$ و $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ، بنابراین:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega[X, Y].$$

برهان. فرض کنید $\omega = u dv$ و $u, v \in C^\infty(M)$

$$d(u dv)(X, Y) = du \wedge dv(X, Y) = du(X) dv(Y) - dv(X) du(Y),$$

و

$$\begin{aligned} X(u dv(Y)) - Y(u dv(X)) - u dv[X, Y] &= X(uYv) - Y(uXv) - u[X, Y]v \\ &= (XuYv + uXYv) - (YuXv + uYXv) \\ &\quad - u(XYv - YXv) = Xu.Yv - Yu.Xv. \end{aligned}$$

$\square$

۶.۱ مشتق لی

تعریف ۱.۶.۱. مشتق لی میدان تانسوری σ روی منیفلد هموار M نسبت به میدان برداری X و شار θ_t به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\mathcal{L}\sigma)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\theta_t^*\sigma)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_t^*(\sigma_{\theta_t}(p)) - \sigma_p}{t},$$

مشتق میدان $-k$ تانسوری کواریان نسبت به یک میدان برداری، خود میدان $-k$ تانسوری کواریان است.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید ω یک $-k$ فرم دیفرانسیلی و X یک میدان برداری روی M باشد. ضرب داخلی ω در میدان برداری X ، یک $(k-1)$ فرم دیفرانسیلی روی M است که به شکل زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \lrcorner : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ X \lrcorner \omega (V_1 \cdots V_{k-1}) &= \omega(X)(V_1 \cdots V_{k-1}), \end{aligned}$$

که ضرب هوک نام دارد.

مثال ۳.۶.۱. به عنوان مثال اگر، $X = x \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ در اینصورت، $\omega = xydx + xzdy \in \Omega^1(M)$ ،

$$\begin{aligned} X \lrcorner \omega &= x \frac{\partial}{\partial x} \lrcorner xydx + x \frac{\partial}{\partial x} \lrcorner xzdy - z \frac{\partial}{\partial y} \lrcorner xydx - z \frac{\partial}{\partial y} \lrcorner xzdy \\ &= xydx \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + xzdy \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) - xydx \left(z \frac{\partial}{\partial y} \right) - xzdy \left(z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= x^2y - xz^2. \end{aligned}$$

گزاره ۴.۶.۱. اگر $f \in C^\infty(M)$ ، $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ و α, β دو میدان تانسوری کواریان و ζ, ω دو فرم دیفرانسیلی روی M باشند آنگاه،

$$\text{الف) } \mathcal{L}_X f = Xf$$

$$\text{ب) } \mathcal{L}_X(f\alpha) = Xf \cdot \alpha + f \mathcal{L}_X \alpha$$

$$\text{پ) } \mathcal{L}_X(\alpha \circ \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \otimes \beta + \alpha \otimes \mathcal{L}_X \beta$$

$$\text{ت) } \mathcal{L}_X(\omega \wedge \zeta) = \mathcal{L}_X \omega \wedge \zeta + \omega \wedge \mathcal{L}_X \zeta$$

$$\text{ث) } \mathcal{L}_X(Y \lrcorner \omega) = (\mathcal{L}_X Y) \lrcorner \omega + Y \lrcorner \mathcal{L}_X \omega$$

□

برهان. [۱۶].

قضیه ۵.۶.۱. هرگاه X یک میدان برداری و ω یک k -فرم دیفرانسیلی روی M باشد، آنگاه فرمول کارتان به این صورت تعریف می شود:

$$\mathcal{L}_X \omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega).$$

□

برهان. [۱۶].

قضیه ۶.۶.۱. اگر $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ دو میدان برداری باشند آنگاه:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

□

برهان. [۱۶].

۷.۱ گروه لی

تعریف ۱.۷.۱. اگر G یک گروه جبری با یک ساختار همواری باشد (G یک منیفلد هموار باشد) به طوری که نگاشت های زیر

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G & i : G &\longrightarrow G \\ m(a, b) &= a \cdot b, & i(a) &= a^{-1}, \end{aligned}$$

هموار باشند آنگاه G یک گروه لی نام دارد.

برای $a \in G$ عمل ضرب از طرف چپ و از طرف راست توسط a را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\begin{aligned} L_a : G &\longrightarrow G & R_a : G &\longrightarrow G \\ L_a(x) &= m(a, x), & R_a(x) &= m(x, a), \end{aligned}$$

تعریف ۲.۷.۱. یک نگاشت $F : H \longrightarrow G$ بین گروه های لی H و G یک همومورفیسم گروه های لی می نامیم، هرگاه این نگاشت، یک همومورفیسم گروهی و هموار باشد. شرط همومورفیسم گروهی بدان معنی است که:

$$F(h \cdot x) = F(h) \cdot F(x), \quad \forall h, x \in H.$$

مثال ۳.۷.۱. ۱. $G = \mathbb{R}^r$ که دارای ساختار منیفلدی است را در نظر بگیرید. عمل گروه آن را جمع برداری $(x, y) \mapsto x + y$ و نگاشت وارون آن را، وارون معمولی نسبت به عمل جمعی $(-x)$ در نظر می گیریم. این دو عمل گروه به وضوح هموارند، بنابراین $\mathbb{R}^r$ گروه لی آبدی r -بعدی می باشد.

۲. $GL(1, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ که یک منیفلد هموار است و با عمل ضرب نیز گروه است که نگاشت ضرب و وارون آن به صورت زیر تعریف می کنیم که هموار بودن آن ها بدیهی است.

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* & i : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y, & x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

۳. کره S^1 یک گروه لی یک-بعدی است. به وضوح کره S^1 یک کره هموار یک-بعدی است، از طرفی $(S^1, +)$ یک گروه است. عمل جمع و ضرب به صورت زیر تعریف می‌کنیم که هموار هستند.

$$\begin{aligned} m : S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 & i : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}, & \theta &\mapsto -\theta \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

۴. $GL(n, \mathbb{R}) = \{X \mid \det X \neq 0\}$ ماتریس‌های حقیقی وارون‌پذیر از مرتبه n یک گروه لی n^2 -بعدی است.

۵. $SL(n, \mathbb{R}) = \{X \mid \det X = 1\}$ مجموعه ماتریس‌های حقیقی وارون‌پذیر خاص از مرتبه n یک گروه لی $(n^2 - 1)$ -بعدی است.

۶. $O(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n) \mid X \cdot X^T = I_n\}$ مجموعه ماتریس‌های متقارن از مرتبه n یک گروه لی $\frac{1}{2}n(n-1)$ -بعدی است.

۸.۱ زیرگروه لی

تعریف ۱.۸.۱. یک زیرگروه لی از یک گروه لی G ، یک زیرگروه جبری مانند H است که یک زیرمنیفلد ایمرژن بوده به طوری که عمل‌های گروه بر H ، نیز هموار باشند.

قضیه ۲.۸.۱. اگر H یک زیرگروه جبری و یک زیرمنیفلد منظم (ایمبدشده) از گروه لی G باشد، آنگاه H یک زیرگروه لی بسته G است.

برهان. [۲۰]. $\square$

قضیه ۳.۸.۱. یک زیرگروه بسته از یک گروه لی، یک زیرگروه لی ایمبدشده است.

برهان. [۲۰]. $\square$

مثال ۴.۸.۱. گروه خطی خاص $SL(n, \mathbb{R})$ و گروه متعامد $O(n, \mathbb{R})$ زیرگروه‌های بسته‌ی $GL(n, \mathbb{R})$ هستند که ایمبدشده هستند، بنابراین یک زیرگروه لی می‌باشد.

تعریف ۵.۸.۱. یک گروه تبدیل مثل G که روی یک منیفلد هموار مانند M عمل می‌کند، یک گروه لی می‌باشد. با این شرط که نگاشت $\phi : G \times M \longrightarrow M$ با ضابطه $(g, p) \longmapsto g \cdot p$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p) \quad ۱.$$

$$e \cdot p = p \quad ۲.$$

• در این حالت می‌گوییم G از چپ روی M عمل می‌کند. به همین شکل می‌توان عمل از سمت راست را تعریف کرد.

هرگاه G یک گروه تبدیل روی M و $g \in G$ باشد آنگاه g را یک تبدیل گویند. به طوری که $\phi_g : M \rightarrow M$ یک دیفیئومورفیسم است، زیرا $\phi_{g^{-1}} = (\phi_g)^{-1}$. فرض کنیم $p \in M$ باشد در این صورت مجموعه تمام تبدیلات p تحت گروه تبدیل G یعنی

$$G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\},$$

را مدار p تحت تبدیل G می‌نامند.

• آن دسته از اعضای G که به صورت عضو همانی عمل می‌کند را به ازای $p \in M$ به صورت

$$G_p = \{g \mid g \cdot p = p\},$$

نمایش می‌دهیم. G_p یک زیرگروه G می‌باشد که به آن زیرگروه پایدارساز p می‌گویند. زیرا

۱.

$$G_p \neq \emptyset, \quad e \in G_p, \quad e \cdot p = p \implies e \in G_p.$$

۲.

$$g, h \in G_p, \quad (g \cdot h)x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x \implies g \cdot h \in G_p.$$

۳.

$$g \in G_p, \quad g^{-1}(g \cdot p) = (g^{-1} \cdot g) \cdot p = e \cdot p = p \implies g^{-1} \in G_p.$$

• گروه تبدیلات G به طور آزاد روی M عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر $p \in M$ ، $G_p = \{e\}$ ، و به طور موضعا آزاد عمل می‌کند، اگر زیرگروه‌های ایزوتروپیک در یک همسایگی هر عضو $e \neq g$ بدیهی شوند. قرار می‌دهیم:

$$G_M = \bigcap_{p \in M} G_p,$$

آنگاه G_M را زیرگروه پایدارساز فراگیر G می‌گویند. هرگاه $G_M = \{e\}$ باشد، آنگاه می‌گوییم G به طور موثر عمل می‌کند، اگر ساختار G_M گسسته باشد، می‌گوییم G به طور موضعا موثر عمل می‌کند.

• هرگاه عمل G تنها یک مدار تولید کند، عمل را متعدی گوئیم در نهایت، عمل G را نیم منظم گوئیم هرگاه کلیه مدارات G هم بعد باشند و منظم نامیم اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی به دلخواه کوچک باشد به طوری که اشتراک آن با مدار p همبند باشد.

۹.۱ جبر لی

اگر G یک گروه لی باشد، میدان‌های برداری خاصی روی آن وجود دارند که تحت عمل گروه ناوردای هستند. این میدان‌های برداری ناوردای یک فضای برداری با بعد نامتناهی می‌سازند که از آن به جبر لی G با مجموعه مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه G یاد می‌شود.

تعریف ۱.۹.۱. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد، میدان برداری $\mathfrak{v}$ روی M را G -ناوردای گوییم هرگاه:

$$d\phi_g(\mathbf{v}_p) = \mathbf{v}_{g \cdot p}, \quad \forall g \in G, \quad p \in M,$$

تعریف ۲.۹.۱. جبر لی راست $\mathcal{G}$ از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد. به‌طور کلی، جبر لی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دو خطی $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ است که کروشه‌لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه‌لی صدق می‌کند.

تعریف ۳.۹.۱. فرض کنیم G روی خودش از چپ (راست) عمل کند. مجموعه تمام میدان‌های برداری ناوردای چپ (راست) را جبر لی چپ (راست) G گویند. ثابت می‌شود جبر لی چپ و جبر لی راست با هم یکی هستند. در همه جا جبر لی گروه لی G را با $\mathcal{G}$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴.۹.۱. اگر G یک گروه لی باشد، آن‌گاه $\mathcal{G}_L \simeq \mathcal{G}_R$

□

برهان. [۲۰].

قضیه ۵.۹.۱. هرگاه G یک گروه لی باشد در این صورت $\mathcal{G} \simeq T_e G$.

برهان. ثابت می‌کنیم نگاشت $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow T_e G$ ایزومورفیسم است. فرض کنیم $X \in T_e G$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{X}_g = dL_g X,$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\tilde{X}$ هموار است. برای این کار ثابت می‌کنیم اگر $U \subseteq G$ باز و $f \in C^\infty(U)$ باشد. آن‌گاه $\tilde{X}f$ هموار است. خم هموار $\alpha : (-a, a) \rightarrow G$ به‌گونه‌ای موجود است که $\alpha(0) = e$ و $\alpha'(0) = X$ باشد.

$$\begin{aligned} (\tilde{X}f)_g &= \tilde{X}_g f = (dL_g X)f = X(f \circ L_g) = \alpha'(\circ)(f \circ L_g) \\ &= \left(d\alpha \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) (f \circ L_g) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ L_g \circ \alpha)(t), \end{aligned}$$

تابع $\psi : (-a, a) \times G \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $\psi(t, g) = f \circ L_g \circ \alpha(t)$ تعریف می‌کنیم. که

$$(\tilde{X}f)_g = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\circ, g),$$

چون ψ ترکیب سه نگاشت هموار است بنابراین خود و مشتقاتش از جمله $\frac{\partial \psi}{\partial t}(\circ, g)$ هموار است و این همواری، هموار بودن $(\tilde{X}f)_g$ را نتیجه می‌دهد.

$$(dL_{g'}) (\tilde{X}_g) = (dL_{g'}) (dL_g X) = (dL_{g'} \circ dL_g) X = (dL_{gg'}) X = \tilde{X}_{gg'},$$

بنابراین $\tilde{X}$ یک میدان برداری ناوردای چپ است. پس $\tilde{X} \in \mathcal{G}$. حال نگاشت $\eta : T_e G \rightarrow \mathcal{G}$ با ضابطه $\eta(X) = \tilde{X}$ را تعریف می‌کنیم که η وارون راست φ است چون که

$$\varphi(\eta(X)) = \varphi(\tilde{X}) = (dL_e) X = X_e = X,$$

و η وارون چپ φ است، چون که

$$\eta(\varphi(X))_g = \eta(X_e)_g = \tilde{X}_e|_g = (dL_g) X_e = X_{eg} = X_g,$$

بنابراین φ ایزومورفیسم است. □

مثال ۶.۹.۱. در این مثال بدون محاسبه تنها به ارائه چند جبر لی می‌پردازیم.

۱. جبر لی گروه لی خطی عام $GL(n, \mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های مربعی $n \times n$ می‌باشد. به عبارت دیگر

$$T_{I_n} GL(n, \mathbb{R}) = M(n \times n, \mathbb{R}).$$

۲. جبر لی گروه لی خطی خاص $SL(n, \mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با اثر صفر می‌باشد یعنی:

$$T_I SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \text{tr} A = 0\}.$$

۳. جبر لی دایره S^1 اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۴. جبر لی فضاها ی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ خود $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

فصل ۲

هندسه ریمانی

۱.۲ متریک ریمانی

هندسه ریمانی، هندسه ای است که ریمان آن را مطرح نمود و در حقیقت تعمیم هندسه دیفرانسیل رویه هاست که توسط گاوس^۱ مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس بر رویه تعریف می شود که توسط این ضرب می توان طول بردارهای مماس بر رویه را در $\mathbb{R}^3$ بدست آورد. از جمله خواص ارزشمند این ضرب این است که می توان همه خواص رویه از جمله طول قوس منحنی، مساحت رویه، زاویه بین دو منحنی، انحنای رویه و غیره را بدست آورد. طول قوس یک خم و روش محاسبه آن اساس تعریف خواص هندسی فضا است. همچنین یکی دیگر از مفاهیم مهم در هندسه ریمانی، مفهوم ژئودزیک به عنوان کوتاه ترین منحنی و اصل بین دو نقطه است که توسط ضرب داخلی برخواسته از متریک ریمان تعریف می شود [۱۷، ۷، ۱۵، ۲۸].

تعریف ۱.۱.۲. یک متریک ریمانی روی منیفلد هموار M یک میدان ۲-تانسوری $g \in \mathcal{T}^2 M$ است به طوری که برای هر $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ خواص زیر برقرار باشد:

(الف) متقارن مثبت باشد یعنی، $g(X, Y) = g(Y, X)$.

(ب) غیر تباهیده باشد یعنی اگر داشته باشیم $X \neq 0$ آنگاه، $g(X, X) > 0$.

همچنین برای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ و $r \in \mathbb{R}$ متریک ریمانی دو-خطی است یعنی:

$$\begin{aligned}g(X + Y, Z) &= g(X, Z) + g(Y, Z), \\g(X, Y + Z) &= g(X, Y) + g(X, Z), \\g(rX, Y) &= rg(X, Y) = g(X, rY).\end{aligned}$$

به راحتی می توان نشان داد که این تانسور در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی $T_p M$ تعریف می کند، این ضرب داخلی را توسط $\langle X, Y \rangle_g$ یا تانسور $g(X, Y)$ نمایش می دهیم.

^۱Gauss

متریک ریمانی g یک متریک دیگری روی T^*M تولید می کند که آن را با $\langle \cdot, \cdot \rangle_{g^*}$ نشان می دهیم،

$$g^* : T_p^*M \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g^* = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j},$$

با استفاده از خواص ضرب داخلی در فضای دوگان میتوان دید که ماتریس $g^{ij}(p)$ در هر نقطه وارون ماتریس $g_{ij}(p)$ است یعنی:

$$\sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij},$$

اگر $(E_1, \dots, E_n)$ یک کنج موضعی برای TM باشد، متریک ریمانی g به صورت زیر است

$$g = g_{ij} dx^i dx^j,$$

که ضرایب ماتریس با $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ تعریف می شوند.

تعریف ۲.۱.۲. یک میدان ۲-تانسوری متقارن غیرتباهیده روی منیفلد هموار M متریک شبه ریمانی است که یک ۲-تانسور کواریان مانند $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) متقارن باشد یعنی، $g(X, Y) = g(Y, X)$.

(ب) غیر تباهیده باشد یعنی، $g(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \forall Y \in T_p M$.

هر متریک ریمانی یک متریک شبه ریمانی است. اگر $\{E_1, \dots, E_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای $T_p M$ باشد، در این صورت اگر $\langle E_i, E_i \rangle = g_{ii} = 1$ آنگاه مطابق روش گرام-اشمیت ماتریس متناظر با آن قابل تبدیل به

$$\begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

است. هرگاه $n \in \mathbb{N}$ و $r \in \mathbb{R}$ باشد بنابراین متریک شبه ریمانی به صورت زیر نوشته می شود:

$$g = -(\varphi^1)^2 - \dots - (\varphi^r)^2 + (\varphi^{r+1})^2 + \dots (\varphi^n)^2,$$

که در آن $\{\varphi^i\}$ دوگان $\{E_i\}$ هستند.

همانطور که گفته شد متریک های شبه ریمانی، تعمیمی از متریک ریمانی هستند که از حذف شرط مثبت بودن در تعریف متریک های ریمانی پدید می آیند.

تعریف ۳.۱.۲. در یک دستگاه مختصات مانند (U, x) روی M می توان یک متریک شبه ریمان را به صورت موضعی زیر نوشت:

$$g = -(dx^1)^2 - \dots - (dx^r)^2 + (dx^{r+1})^2 + \dots + (dx^n)^2,$$

که در آن عدد صحیح r اندیس متریک شبه ریمانی را نشان می دهد.

تعریف ۴.۱.۲. یک منیفلد به همراه متریک ریمانی داده شده g را یک منیفلد ریمانی می نامیم و آن را به صورت (M, g) نمایش می دهیم.

مثال ۵.۱.۲. یک مثال واضح، منیفلد ریمانی $\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی $\bar{g}$ است، که در مختصات استاندارد، به صورت زیر نوشته می شود.

$$\bar{g} = \sum_i dx^i dx^i = \sum_i (dx^i)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.2)$$

که ماتریس $\bar{g}$ در این مختصات $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$ است.

مثال ۶.۱.۲. نمونه ای از متریک شبه ریمانی، متریک لورنتس است که در فضا-زمان از آن استفاده می شود و به صورت زیر نشان داده می شود و ماتریس ضرایب متریک به صورت زیر است، $g = \eta_{ij} dx^i dx^j$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تعریف ۷.۱.۲. یکی از ویژگی های متریک ریمانی آن است که توانایی تبدیل یک بردار به هم بردار و برعکس را دارد. فرض کنید g یک متریک ریمانی روی منیفلد M باشد. نگاشت فلت^۲ یا اندیس بالا برنده، به صورت زیر تعریف می شود:

$$X^h : TM \longrightarrow T^*M$$

$$Y \mapsto X^h(Y) := g(X, Y)$$

فرض کنید $x = (x^1, \dots, x^n)$ یک دستگاه مختصات روی M باشد و $X = X^i \partial_{x^i}$

$$X^h = g(X^i \partial_{x^i}, \dots) = g_{ij} X^i dx^j,$$

اگر قرار دهیم $g_{ij} X^i = X_j$ آنگاه:

$$X^h = X_j dx^j.$$

^۲Flat

تعریف ۸.۱.۲. وارون نگاشت فلت را شارپ یا اندیس بالا برنده می گویند که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}\# &:= (X^h)^{-1} : T^*M \rightarrow TM \\ \omega &\mapsto \omega^\#\end{aligned}$$

بنابراین

$$\omega^\# = g^{-1}(\omega_i \partial_{x^i}, \dots) = g^{ij} \omega_i \partial_{x^j} = \omega^j \partial_{x^j}.$$

مثال ۹.۱.۲. به عنوان مثال به هر میدان ۱-فرم $\omega = \omega_i dx^i$ یک میدان برداری دوگان $X = X^i \partial_{x^i}$ وابسته می گردد که ارتباط آن توسط $\omega_i = g_{ij} X^j$ معرفی می شود.

لم ۱۰.۱.۲. فرض کنیم (M, g) و $(\tilde{M}, \tilde{g})$ دو منیفلد ریمانی باشند، نگاشت دیفیئومورفیسم φ از M به $\tilde{M}$ را یک ایزومتري می نامیم هرگاه،

$$\varphi^* \tilde{g} = g. \quad (2.2)$$

ترکیب و معکوس ایزومتريها نیز یک ایزومتري هستند، بنابراین مجموعه ایزومتريهای M یک گروه هستند، که آن را گروه ایزومتري M می نامیم. می توان نشان داد گروه ایزومتري همیشه یک گروه لی با بعد متناهی است که به طور هموار روی M عمل می کند [۱۵]. دو منیفلد ریمانی (M, g) و $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ایزومتريک هستند، هرگاه یک ایزومتري بین آنها برقرار باشد.

تعریف ۱۱.۱.۲. هر زیر منیفلد ایمرژن یک منیفلد ریمانی، خود یک منیفلد ریمانی است و متريک القا شده به روی این زیر منیفلد را متريک القایی گویند. اگر (M, g) یک منیفلد ریمانی و N زیر منیفلد ایمرژن آن باشد در این صورت، این متريک القایی را که با $g|_N$ نشان می دهیم توسط نگاشت شمول به صورت زیر القا می شود،

$$i : N \rightarrow M, \quad g|_N = i^*(g). \quad (3.2)$$

مثال ۱۲.۱.۲. به عنوان مثال برای محاسبه متريک القایی کره S^2 توسط متريک اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ به روش زیر عمل میکنیم. اگر $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک نگاشت ایمرژن بین کره و فضای اقلیدسی و $g = dx^1 + dx^2 + dx^3$ متريک اقلیدسی باشد و $(\varphi, \theta) \mapsto (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ مختصات کروی باشد، با توجه به تعریف ۱۱.۱.۲ متريک کروی به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
g|_{S^2} = i^*g &= d(x \circ i)^2 + d(y \circ i)^2 + d(z \circ i)^2 \\
&= d(\sin \varphi \cos \theta)^2 + d(\sin \varphi \sin \theta)^2 + d(\cos \varphi)^2 \\
&= (\cos \varphi \cos \theta d\varphi - \sin \varphi \sin \theta d\theta)^2 + (\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta)^2 \\
&\quad + (-\sin \varphi d\varphi)^2 \\
&= \cos^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta d\theta^2 - 2 \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \cos \theta d\varphi d\theta \\
&\quad + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta d\theta^2 + 2 \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \cos \theta d\varphi d\theta \\
&\quad + \sin^2 \varphi d\varphi^2 \\
&= \sin^2 \varphi d\theta^2 + \cos^2 \varphi d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\varphi^2 \\
&= \sin^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2.
\end{aligned}$$

لم ۱۳.۱.۲. هر منیفلد هموار یک متریک ریمانی می پذیرد.

□

برهان. [۱۵].

اگر (M_1, g_1) و (M_2, g_2) دو منیفلد ریمانی باشند، بنابراین متریک روی $M_1 \times M_2$ را به صورت $g = g_1 \oplus g_2$ و با ضابطه، $g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g(X_1, Y_1) + g(X_2, Y_2)$ تعریف می کنیم، $M_1 \times M_2$ در نتیجه یک منیفلد ریمانی است.

لم ۱۴.۱.۲. دو متریک ریمانی g_1 و g_2 روی منیفلد M را همدیس می گوئیم، هرگاه تابع مثبتی مانند f وجود داشته باشد که، $g_2 = f g_1$.

لم ۱۵.۱.۲. دو منیفلد ریمانی (M, g) و $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ را به طور همدیس هم ارز می گوئیم هرگاه دیفئومورفیسمی مانند $\varphi: M \rightarrow \widetilde{M}$ به گونه ای موجود باشد که $\varphi^* \widetilde{g}$ با g هم ارز باشد.

تعریف ۱۶.۱.۲. کره با شعاع R در فضای اقلیدسی R^{n+1} یک منیفلد ریمانی است که با S_R^n نشان می دهیم. نگاشت شمول i به صورت $i: S_R^n \hookrightarrow R^{n+1}$ تعریف می شود بنابراین متریک g_R^n القا شده توسط متریک اقلیدسی R^{n+1} متریک فضای کروی R^{n+1} است که متریک دورانی از شعاع R نامیده می شود.

قضیه ۱۷.۱.۲. $S_R^n \subset R^{n+1}$ با $\mathbb{R}^n$ به طور همدیس، هم ارز هستند.

□

برهان. [۱۵].

۲.۲ اتصال‌ها

برای آنکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی منیفلد را تعریف کنیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به میدان های برداری در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم. به بیان ساده تر باید بتوانیم

مقادیر دو بردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت را با یکدیگر مقایسه نماییم یا به عبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "الصاق" نماییم. در اینجا است که کلمه "اتصال" مفهوم پیدا کرده است. در حقیقت برای ساخت هر هندسه ای از تعریف اتصال شروع می کنیم [۱۷].

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم $\pi : E \rightarrow M$ یک کلاف برداری روی منیفلد M باشد و همچنین $\varepsilon(M)$ فضای برش های هموار از E را نمایش دهد. یک اتصال^۳ در E نگاشت:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \varepsilon(M) \rightarrow \varepsilon(M) \quad (۴.۲)$$

است که به صورت $(X, \sigma) \rightarrow \nabla_X \sigma$ نوشته می شود و در ویژگی های زیر صدق می کند:

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} \sigma = f \nabla_{X_1} \sigma + g \nabla_{X_2} \sigma \quad f, g \in C^\infty(M) \quad (\text{الف})$$

$$\nabla_X (a\sigma_1 + b\sigma_2) = a \nabla_X \sigma_1 + b \nabla_X \sigma_2 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{ب})$$

$$\nabla_X (f\sigma) = f \nabla_X \sigma + (Xf)\sigma \quad f \in C^\infty(M) \quad (\text{پ})$$

نماد ∇ "نابلا"^۴ خوانده شده و $\nabla_X \sigma$ مشتق کواریان σ در جهت X نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۲. یک اتصال خطی روی منیفلد هموار M یک اتصال در کلاف مماس TM است که نگاشت

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

در تعریف ۱.۲.۲ صدق کند. برای راحتی، یک اتصال خطی روی M را یک اتصال روی M می گوئیم. برای هر $f, g \in C^\infty(M)$ و $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ آنگاه اتصال در ویژگی های زیر صدق می کند:

$$\nabla_{fX + gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z \quad (\text{الف})$$

$$\nabla_X (fY + gZ) = \nabla_X (fY) + \nabla_X (gZ) = XfY + f \nabla_X Y + XgZ + g \nabla_X Z \quad (\text{ب})$$

بنابراین اتصال یک میدان تانسوری از نوع $(1, 0)$ است.

فرض کنیم $\{E_i\}$ یک کنج موضعی برای TM روی یک زیر مجموعه باز $U \subset M$ باشد. معمولاً با یک کنج مختصاتی $E_i = \partial_i$ کار می کنیم. می توانیم $\nabla_{E_i} E_i$ را به صورت زیر بنویسیم،

$$\nabla_{E_i} E_i = \Gamma_{ij}^k E_k, \quad (۵.۲)$$

که n^3 تابع Γ_{ij}^k روی U تعریف می کند. Γ_{ij}^k را نماد کریستوفل ∇ نسبت به کنج $\{E_i\}$ می نامیم. عمل اتصال ∇ روی U کاملاً توسط نماد کریستوفل مشخص می شود. کریستوفل ها بر حسب مشتق ضرایب متریک ریمانی نوشته می شود، به عنوان مثال کریستوفل متریک اقلیدسی صفر است.

^۳Connection

^۴Nabla

لم ۳.۲.۲. اگر ∇ یک اتصال خطی روی M و U یک زیر مجموعه باز از M و $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ و $\{E_i\}$ یک کنج موضعی روی TM نسبت به U باشد، آنگاه:

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k \in \mathfrak{X}(M). \quad (۶.۲)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) = (XY^j) E_j + Y^j \nabla_X E_j \\ &= (XY^j) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\ &= XY^j E_j + X^i Y^j \nabla_{E_j}^{E_j} \\ &= XY^j E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k \\ &= XY^k E_k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k \\ &= (XY^k E_k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k, \end{aligned}$$

حال اگر به جای E_i ، نماد ∂_i را قرار دهیم آنگاه:

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k.$$

□

لم ۴.۲.۲. اگر $\omega \in \Omega^1(M)$ و $X \in \mathfrak{X}(M)$ باشد آنگاه:

$$\nabla_X \omega = (X^i \partial_i \omega_k - X^j \omega_j \Gamma_{ij}^k) dx^k.$$

برهان. اگر $\omega = \omega_j dx^j$ و $X = X^i \partial_i$ باشد بنابراین،

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega &= \nabla_{X^i \partial_i} \omega \\ &= X^i \nabla_{\partial_i} \omega \\ &= X^i \nabla_{\partial_i} \omega_j dx^j + X^i \omega_j \nabla_{\partial_i} dx^j \\ &= (X^i \partial_i \omega_k - X^j \omega_j \Gamma_{ij}^k) dx^k. \end{aligned}$$

□

تعریف ۵.۲.۲. اگر ∇ یک اتصال خطی روی M و F یک میدان تانسوری از نوع $\binom{k}{l}$ باشد آنگاه نگاشت،

$$\begin{aligned} \nabla F : \mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ \nabla F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k, X) &= \nabla_X F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l), \end{aligned}$$

یک میدان تانسوری از نوع $(k+l)$ است. به این میدان تانسوری مشتق کواریان کامل F می‌گوییم. به عنوان مثال اگر $Y \in \mathfrak{X}(M)$ باشد، $Y = Y^i \partial_i$ یک (1) -تانسور است و ∇Y یک (1) -تانسور است:

$$\nabla Y = Y_j^i \partial_i \otimes dx^j.$$

۳.۲ ژئودزیک‌ها

تعریف ۱.۳.۲. اگر $\gamma : I \rightarrow M$ یک خم هموار روی منیفلد هموار M باشد سرعت این عبارتند از،

$$\begin{aligned} \gamma &: I \rightarrow M \\ d\gamma_{t_0} &: T_{t_0} I \rightarrow T_{\gamma(t_0)} M \\ d\gamma_{t_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} f &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \gamma) = \dot{\gamma}(t_0) f, \end{aligned}$$

بنابراین اگر $x = (x^1, \dots, x^n)$ یک چارت روی منیفلد هموار M و $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ نمایش خم γ در این چارت باشد، آنگاه $\dot{\gamma}_i \partial_i$ سرعت این خم است.

تعریف ۲.۳.۲. یک میدان برداری در راستای خم هموار $\gamma : I \rightarrow M$ ، نگاشتی هموار به صورت $X : I \rightarrow TM$ است بطوریکه $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$. بنابراین نتیجه می‌شود که میدان برداری سرعت خم γ ، یک میدان برداری در راستای خم γ است. به عنوان مثال هر میدان برداری، سرعت یک خم انتگرال است.

مجموعه همه میدان‌های برداری در راستای خم γ را با $\mathfrak{X}(\gamma)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳.۳.۲. فرض کنیم ∇ یک اتصال خطی روی M باشد. برای هر خم $\gamma : I \rightarrow M$ ، نابلا یک عملگر یکتا مانند $D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ القا می‌کند که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

(الف) روی $\mathbb{R}$ خطی است،

$$D_t(aX + bW) = aD_tX + bD_tW \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(ب) در قانون ضرب صدق می‌کند،

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV \quad f \in C^\infty(I)$$

(پ) اگر V تعمیم پذیر باشد، آنگاه برای هر تعمیم $\tilde{V}$ از V داریم،

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}$$

برای هر $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ، مشتق کواریان D_tV در امتداد γ نامیده می‌شود. برای درک بهتر مشتق کواریان، می‌توان تعبیر هندسی آن را به زبان ساده به این صورت بیان نمود که اگر $\gamma(t)$ را یک منحنی روی منیفلد M تعریف کنیم و V_p بردار مماس در نقطه $p = \gamma(t_0)$ باشد،

ممکن است بردار شتاب یعنی $\dot{V}_p$ به $T_p M$ تعلق نداشته باشد و نتوان آن را بر اساس پایه های فضای مماس $T_p M$ نوشت، لذا برای رفع این مشکل بردار $\dot{V}_p$ را به دو مولفه شتاب قائم و شتاب مماسی طوری تجزیه می کنیم که بردار شتاب مماسی روی $T_p M$ قرار داشته باشد. حال بردار شتاب مماسی را با $D_t V$ نمایش داده و به عنوان بردار شتاب منحنی γ در نظر می گیریم [۱۵].

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنیم M یک منیفلد با یک اتصال ∇ باشد و γ یک خم در M باشد. در این صورت خم γ یک ژئودزیک نسبت به ∇ نامیده می شود هرگاه $D_t \dot{\gamma} \equiv 0$ باشد.

قضیه ۵.۳.۲. خم $\gamma : I \rightarrow U$ یک خم ژئودزیک است اگر و فقط اگر تابع های مولفه ای آن یعنی، $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ در معادله ژئودزیک زیر صدق کنند.

$$\ddot{x}^k(s) + \dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s)\Gamma_{ij}^k(x(s)) = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (۷.۲)$$

برهان. فرض کنید X یک میدان برداری در راستای خم γ باشد و $X(t) = X^j(t)\partial_j$ بنابراین،

$$\begin{aligned} D_t X(t_0) &= D_t (X^j(t_0)\partial_j) \\ &= D_t X^j(t_0)\partial_j + X^j(t_0)D_t \partial_j \\ &= \dot{X}^j(t_0)\partial_j + X^j \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \partial_j \\ &= \left[\dot{X}^j(t_0)\partial_k + X^j(t_0)(\dot{\gamma}^i(t_0)\partial_i + \dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k \gamma(t_0)\partial_k) \right] \\ &= \left[\dot{X}^k(t_0) + X^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k \gamma(t_0) \right] \partial_k, \end{aligned}$$

حال اگر $x = (x^1, \dots, x^n)$ چارتی روی M ، $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ یک خم در چارت X و x یک میدان برداری در راستای خم γ باشد آنگاه، γ ژئودزیک است اگر و تنها اگر در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} D_t \dot{\gamma}(t) = 0 &\iff \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0, \\ &\iff \ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k x(t) = 0, \\ &\iff \ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0. \end{aligned}$$

□

قضیه ۶.۳.۲ (وجود و یکتایی ژئودزیک). فرض کنید M یک منیفلد هموار مجهز به یک اتصال خطی باشد، به ازای هر $X \in T_p M$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ و بازه بازی مانند $I \subseteq \mathbb{R}$ شامل t_0 ، ژئودزیکی مثل $\gamma : I \rightarrow M$ موجود است به طوری که، $\gamma(t_0) = p$ ، $\dot{\gamma}(t_0) = X$ ، هر دو ژئودزیک روی دامنه اشتراکشان با هم برابرند.

برهان. چارت (u, x^i) را روی M در نظر می گیریم، اگر α یک خم ژئودزیک باشد باید در دستگاه ODE زیر صدق کند:

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

قرار می دهیم $v^i = \dot{x}^i$ ، آنگاه دستگاه معادلات ژئودزیک که یک دستگاه مرتبه دوم است به یک دستگاه مرتبه اول به شکل زیر تحویل می یابد،

$$\begin{aligned} \dot{x}^k(t) &= v^i(t), \\ \dot{v}^k(t) &= -v^i v^j(t) \Gamma_{ij}^k x(t). \end{aligned}$$

آنگاه قضیه وجود و یکتای جواب معادلات ODE مرتبه اول برای هر $(p, X) \in U \times \mathbb{R}^n$ و $\varepsilon \geq 0$ و جواب یکتایی مانند $\eta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ با شرط اولیه $\eta(t_0) = (p, X)$ وجود دارد. اگر جواب η را در در چارت (U, x^i) به صورت $\eta(t) = (x^i(t), v^i(t))$ بنویسیم می توان دید که خم $\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ در U یک جواب برای معادلات فوق است. حال اگر β ژئودزیک دیگری باشد، به طوری که $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ و $\dot{\alpha}(t_0) = \dot{\beta}(t_0)$. آنگاه قضیه وجود و یکتای جواب معادلات ODE مرتبه اول دو خم روی بازه شامل t_0 با هم برابرند. فرض کنید $\bar{b}$ سوپریمم اعدادی باشد که α و β روی بازه $[t_0, b]$ با هم برابرند. اگر $\bar{b} \in I$ باشد چون α و β توابعی پیوسته اند بنابراین، $\alpha(\bar{b}) = \beta(\bar{b})$ و $\dot{\alpha}(\bar{b}) = \dot{\beta}(\bar{b})$ مجدداً با هم کار بردن شرایط یکتایی جواب در یک همسایگی $\bar{b}$ دو خم α و β در یک همسایگی بزرگتری با هم برابرند که چنین چیزی ممکن نیست. همین امر برای اعداد سمت چپ t_0 برقرار است، بنابراین دو خم فقط روی باز I برابرند. $\square$

۴.۲ تاب

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید M یک منیفلد هموار مجهز به اتصال خطی ∇ باشد، میدان برداری X در راستای خم γ را موازی در راستای خم γ نسبت به اتصال ∇ می نامیم هرگاه، $D_t X = 0$. طبق تعریف فوق، خم های ژئودزیک خم هایی هستند که سرعت آنها در راستای خم γ همواره موازی هستند یعنی،

$$D_t \dot{\gamma}(t) = 0.$$

تعریف ۲.۴.۲. میدان برداری X روی منیفلد M را موازی می گوئیم هرگاه در راستای هر خمی موازی باشد.

تعریف ۳.۴.۲. اتصال خطی ∇ را سازگار با متریک ریمانی (شبه ریمانی) g روی M می گوئیم هرگاه به ازای میدان های برداری $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ داشته باشیم:

$$Xg(Y, Z) = X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y + Z \rangle + \langle Y + \nabla_X Z \rangle.$$

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی باشد. تانسور تاب به صورت زیر تعریف می شود:

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

لم ۵.۴.۲. اگر $a \in \mathbb{R}$ ، $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ، آنگاه تاب در ویژگی های زیر صدق می کند:
(الف)

$$\begin{aligned}\tau(X+Y, Z) &= \nabla_{X+Y}Z - \nabla_Z(X+Y) - [X+Y, Z] \\ &= \tau(X, Y) + \tau(X, Z),\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\tau(aX, Y) &= \nabla_{aX}Y - \nabla_Y aX - [aX, Y] \\ &= \tau(X, aY),\end{aligned}$$

بنابراین تاب یک میدان تانسوری از نوع (1) است.

تعریف ۶.۴.۲. اتصال خطی ∇ روی M متقارن است هرگاه تاب آن صفر باشد یعنی:

$$\tau(X, Y) = 0 \iff \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

لم ۷.۴.۲. اتصال خطی ∇ روی منیفلد هموار M متقارن است اگر و تنها اگر، $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ باشد.

برهان. فرض میکنیم ∇ متقارن باشد، آنگاه طبق ۶.۴.۲، تاب آن صفر است یعنی برای هر $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ داریم $\tau(X, Y) = 0$. بنابراین قرار می دهیم، $X = \partial_i$ و $Y = \partial_j$ پس،

$$\begin{aligned}0 = \tau(X, Y) &= \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] \\ &= \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k - \Gamma_{ji}^k \partial_k \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k = 0,\end{aligned}$$

در نتیجه $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

برای اثبات عکس قضیه فرض می کنیم $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ و همچنین برای هر $X, Y \in \mathfrak{X}$ و $X = \partial_i$ و $Y = \partial_j$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\tau(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_{X^i \partial_i} Y^j \partial_j - \nabla_{Y^j \partial_j} X^i \partial_i - [X^i \partial_i, Y^j \partial_j] \\ &= X^i \nabla_{\partial_i} Y^j \partial_j - Y^j \nabla_{\partial_j} X^i \partial_i - (X^i \partial_i (Y^j \partial_j), Y^j \partial_j (X^i \partial_i)) \\ &= X^i (\partial_i Y^j \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j) - Y^j (\partial_j X^i \partial_i + X^i \nabla_{\partial_j} \partial_i) - (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j \\ &= X^i (\partial_i Y^j \partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k) - Y^j (\partial_j X^i \partial_i + X^i \Gamma_{ji}^k \partial_k) - (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j \\ &= X^i \partial_i Y^j \partial_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k - Y^j \partial_j X^i \partial_i - Y^j X^i \Gamma_{ji}^k \partial_k - X^i \partial_i Y^j \partial_j + Y^j \partial_j X^i \partial_j \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X^i Y^j \partial_k = 0.\end{aligned}$$

□

قضیه ۸.۴.۲ (قضیه اساسی هندسه ریمانی). فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی (شبه ریمانی) باشد، اتصال خطی متقارن یکتایی مانند ∇ روی M سازگار با متریک g وجود دارد. این اتصال، اتصال ریمانی یا اتصال لوی-چویتا روی g نامیده می شود.

برهان. ابتدا یکتایی را اثبات می کنیم،
فرض کنید ∇ چنین اتصالی باشد. میدانهای برداری $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ را در نظر می گیریم، طبق خاصیت سازگاری این اتصال با متریک g داریم،

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle,$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle,$$

شرط متقارن بودن اتصال را اعمال می کنیم بنابراین،

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle - \langle Y, \nabla_Z X \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle - \langle Z, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, \nabla_Y X - \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, \nabla_Z Y - \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

بنابراین قرار می دهیم ۳-(۱+۲) پس،

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle &= \\ &= 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle, \end{aligned}$$

با مرتب کردن جملات داریم،

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle) \\ &\quad - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

اگر ∇^1 و ∇^2 دو اتصال متقارن و سازگار با متریک g باشند، چون سمت راست رابطه (۴) به نوع اتصال بستگی ندارد، بنابراین میتوان نوشت،

$$\langle \nabla_X^1 Y, Z \rangle - \langle \nabla_X^2 Y, Z \rangle = \langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z \rangle = 0,$$

میتوان نتیجه گرفت $\nabla_X^1 - \nabla_X^2 = 0$ پس $\nabla_X^1 = \nabla_X^2$ بنابراین:

$$\nabla^1 = \nabla^2.$$

حال ثابت می کنیم چنین اتصالی وجود دارد،
فرض کنید (u, x^i) یک چارت روی M باشد و همچنین قرار می دهیم $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_l$ و رابطه (۴) را برای این چارت می نویسیم،

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \frac{1}{\varphi} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle), \quad (5)$$

طبق تعریف ضرایب تانسور متریک به صورت $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ و همچنین $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ است بنابراین رابطه (۵) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم،

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle &= \langle \Gamma_{ij}^k \partial_k, \partial_l \rangle = \Gamma_{ij}^k \langle \partial_k, \partial_l \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl} \\ &= \frac{1}{\varphi} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \end{aligned}$$

فرمول به دست آمده زیر را فرمول کریستوفل می نامیم،

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{\varphi} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right), \quad (8.2)$$

چون متریک ریمانی متقارن است لذا $g_{ij} = g_{ji}$ بنابراین $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ در نتیجه طبق ۶.۴.۲، تاب اتصال صفر است پس اتصال متقارن است. برای اثبات سازگاری، نشان می دهیم $\nabla g = 0$ است،

$$\nabla_{\partial_k} g = \partial_k g_{ij} - g_{il} \Gamma_{kj}^l - g_{lj} \Gamma_{ki}^l,$$

در فرمول کریستوفل دو طرف را در g_{lj} ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} &= \frac{1}{\varphi} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{\varphi} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \\ &= \partial_k g_{ij} \Gamma_{ki}^l, \end{aligned} \quad (9.2)$$

پس،

$$\nabla_{\partial_k} g = \partial_k g_{ij} - \partial_k g_{ij} = 0,$$

چون ∂_k دلخواه بود لذا $\nabla g = 0$ ، بنابراین ∇ با g سازگار است.
قضیه اساسی هندسه شبه ریمانی نیز به همین صورت اثبات می شود.

□

تعریف ۹.۴.۲. از برهان قضیه اساسی هندسه ریمانی فرمول کریستوفل به صورت زیر بدست می آید:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{\varphi} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (10.2)$$

مثال ۱۰.۴.۲. فرض کنید $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ یک متریک روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ باشد برای بدست آوردن معادلات ژئودزیک آن، با توجه به متریک ریمانی، g_{ij} را که ضرایب متریک است مشخص میکنیم،

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} &= \frac{1}{y^2}, & g_{12} = g_{21} &= 0, \\ g^{11} = g^{22} &= y^2, & g^{12} = g^{21} &= 0, \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تعریف معادلات ژئودزیک، $\ddot{x} + \Gamma_{ij}^k x^i x^j = 0$ و همچنین طبق فرمول کریستوفل $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$ که از اثبات قضیه اساسی هندسه ریمانی به دست می آید، ژئودزیک متریک داده شده را به دست می آوریم:

$$k=1 \quad \ddot{x} + \Gamma_{11}^1 \dot{x}\dot{x} + \Gamma_{12}^1 \dot{x}\dot{y} + \Gamma_{21}^1 y\dot{x} + \Gamma_{22}^1 y\dot{y} = 0,$$

$$k=2 \quad \ddot{y} + \Gamma_{11}^2 x\dot{x} + \Gamma_{12}^2 \dot{x}\dot{y} + \Gamma_{21}^2 y\dot{x} + \Gamma_{22}^2 y\dot{y} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g^{11} + \partial_1 g^{11} - \partial_1 g^{11}) + \frac{1}{2} g^{12} (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{11}) = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y},$$

$$\Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y},$$

بنابراین با جایگذاری معادلات ژئودزیک به صورت زیر به دست می آید:

$$\gamma = \begin{cases} \ddot{x} - \frac{1}{y} \dot{x}\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} + \frac{1}{y} \dot{x}^2 - \frac{1}{y} \dot{y}^2 = 0. \end{cases}$$

مثال ۱۱.۴.۲. معادلات ژئودزیک کره S^2 با متریک $g = d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2$ عبارتند از،

$$\gamma = \begin{cases} \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta}^2 = 0, \\ \ddot{\theta} + 2 \cot \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

۵.۲ خمیدگی

خمیدگی یک منیفلد ریمانی را می توان به روش های گوناگون توصیف کرد. متعارف ترین روش برای توصیف خمیدگی یک منیفلد ریمانی تانسور خمیدگی آن است.

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی باشد. تانسور خمیدگی ریمان به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z.$$

تانسور خمیدگی در $\mathbb{R}^n$ صفر است [۱۵].

هر منیفلد ریمانی که موضعا با $\mathbb{R}^n$ ایزومتريک باشد، را مقیاس تخت می‌نامیم. به بیان رسمی، یک منیفلد تخت است اگر و فقط اگر موضعا با فضای اقلیدسی ایزومتريک باشد.

تعریف ۲.۵.۲. تانسور خمیدگی ریمان نوع دوم را با توجه به تعریف اندومورفیسم خمیدگی، به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow R$$

$$Rm(x, y, z, w) = g \langle R(x, y)z, w \rangle.$$

قضیه ۳.۵.۲ (اتحاد بیانچی). اگر ∇ یک اتصال خطی و $x, y, z, v, w \in \mathfrak{X}(M)$ باشد آنگاه مشتق کواریان تانسور خمیدگی در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$\nabla Rm(x, y, z, v, w) + \nabla Rm(x, y, v, w, z) + \nabla Rm(x, y, w, z, v) = 0.$$

برهان. فرض می‌کنیم $p \in M$ و (x^i) یک دستگاه مختصات حول نقطه p و x, y, z, v, w به ترتیب میدان‌های برداری ∂_i در این دستگاه مختصات باشد. اتحاد بیانچی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\nabla Rm(z, v, x, y, w) + \nabla Rm(v, w, x, y, z) + \nabla Rm(w, z, x, y, v) = 0.$$

بنابراین اتحاد فوق را ثابت می‌کنیم:

$$\nabla Rm(z, v, x, y, w) = \nabla_w Rm(z, v, x, y) = \nabla_w \langle R(z, v)x, y \rangle$$

$$= \nabla_w \langle \nabla_z \nabla_v x - \nabla_v \nabla_z x - \nabla_{[z, v]} x, y \rangle$$

$$= \langle \nabla_w \nabla_z \nabla_v x - \nabla_w \nabla_v \nabla_z x - \nabla_w \nabla_{[z, v]} x, y \rangle, \quad (۱)$$

$$\nabla Rm(v, w, x, y, z) = \nabla Rm(v, w, x, y) = \nabla_z R \langle v, w \rangle x, y$$

$$= \langle \nabla_z \nabla_v \nabla_w x - \nabla_z \nabla_w \nabla_v x, y \rangle, \quad (۲)$$

$$\nabla Rm(w, z, x, y, v) = \nabla_v Rm(w, z, x, y)$$

$$= \nabla_v \langle R(w, z)x, y \rangle = \langle \nabla_v \nabla_w \nabla_z x - \nabla_v \nabla_z \nabla_w x, y \rangle, \quad (۳)$$

$$\begin{aligned}
& ۱ + ۲ + ۳ \\
&= \langle \nabla_w \nabla_z \nabla_v X - \nabla_w \nabla_v \nabla_z X, Y \rangle \\
&+ \langle \nabla_z \nabla_v \nabla_w X - \nabla_z \nabla_w \nabla_v X, Y \rangle + \langle \nabla_v \nabla_w \nabla_z X - \nabla_v \nabla_z \nabla_w X, Y \rangle \\
&= \langle \nabla_w \nabla_z \nabla_v X - \nabla_w \nabla_v \nabla_z X + \nabla_z \nabla_w \nabla_v X - \nabla_z \nabla_v \nabla_w X \\
&+ \nabla_v \nabla_w \nabla_z X - \nabla_v \nabla_z \nabla_w X, Y \rangle, \quad (۴) \\
&\nabla_w \nabla_z \nabla_v X - \nabla_z \nabla_w \nabla_v X - \nabla[w, z] \nabla_v X = R(w, z) \nabla_v X \\
&(۴) = \langle R(w, z) \nabla_v X + R(v, w) \nabla_z X + R(z, v) \nabla_w X, Y \rangle = 0, \\
&\nabla_v X = \nabla_z X = \nabla_w X = 0.
\end{aligned}$$

□

تعریف ۴.۵.۲. یک ۲-تانسور کواریان به نام تانسور (خمیدگی) ریچی^۵ روی منیفلد ریمانی M به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_{ij} = R_{kij}^k = g^{km} R_{kijm}.$$

تعریف ۵.۵.۲. خمیدگی اسکالر (عددی)، یک 0 - تانسور است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = R_i^i = g^{ij} R_{ij}.$$

قضیه ۶.۵.۲. تانسور خمیدگی ریچی، یک ۲-تانسور کواریان متقارن است و به صورت زیر نشان داده می‌شود،

$$R_{ij} = R_{kij}^k = R_{ikj}^k = -R_{kij}^k = -R_{ikj}^k.$$

برهان. طبق تعریف ۴.۵.۲ میتوان نوشت:

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= g^{km} R_{kijm} = g^{km} R_{kjim} = R_{ji}, \\
R_{ij} &= g^{km} R_{kijm} = -g^{km} R_{ikjm} = -R_{ikj}^k, \\
R_{ij} &= g^{km} R_{kijm} = -g^{km} R_{kimj} = -R_{kij}^k, \\
R_{ij} &= g^{km} R_{kijm} = -g^{km} R_{kimj} = -(-g^{km} R_{ikmj}) = g^{km} R_{ikj} = R_{ikj}^k.
\end{aligned}$$

□

^۵Ricci

۶.۲ نگاشت نمایی

برای مطالعه بهتر ژئودزیک ها باید رفتار جمعی آنها مورد مطالعه قرار گیرد. به عنوان مثال چنین سوالی مطرح شود که اگر نقطه شروع یا جهت ژئودزیک تغییر کند، چه تغییراتی در آن ژئودزیک روی می دهد. جواب این سوال با مطالعه نگاشت نمایی قابل بررسی است این نگاشت ها از اهمیت خاصی در تعیین رفتار ژئودزیک ها و در نتیجه خواص منیفلد ریمانی برخوردارند.

تعریف ۱.۶.۲. با استفاده از قضیه وجود و یکتایی ژئودزیک ها می توان نگاشت نمایی را به این صورت تعریف کرد، اگر (M, g) منیفلد ریمانی و $p \in M$ و $\varepsilon \in TM$ بنابراین نگاشت $\exp_p : \varepsilon \rightarrow M$ با ضابطه $X \rightarrow \exp x = \gamma_x(1)$ تعریف می شود بطوریکه،

$$\varepsilon_p = \{x \in T_p M \mid \gamma_x \in [0, 1]\}.$$

دامنه نگاشت نمایی در یک همسایگی $\circ \in T_p M$ است [۱۵].

مثال ۲.۶.۲. اگر $M = S^2$ نگاشت نمایی در نقطه p را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\exp : TS^2 \rightarrow S^2$$

$$x \mapsto \exp x,$$

نگاشت نمایی هر بردار x از صفحه مماس بر کره را روی نقطه ای از ژئودزیک کره یا دایره عظیمه ای که از نقطه p شروع و در راستای x به اندازه طول بردار $\|x\|$ پیش رفته است، تصویر می کند.

قضیه ۳.۶.۲. ویژگی های نگاشت نمایی به صورت زیر است:

الف) ε یک زیر مجموعه باز TM شامل برش صفر است.

ب) اگر $x \in TM$ ، آنگاه ژئودزیک $\gamma_x(t) = \exp(tx)$ تعریف می شود.

پ) نگاشت $\exp$ هموار است.

□

برهان. [۱۵].

قضیه ۴.۶.۲. به ازای هر $p \in M$ یک همسایگی حول مبدا $T_p M$ مانند O و یک همسایگی حول p مانند U وجود دارد که $\exp_p : O \rightarrow U$ دیفیئومورفیسم است.

برهان. ثابت می کنیم $d(\exp_p)_o$ ایزومورفیسم است و بنابراین طبق قضیه تابع معکوس $\exp_p$ دیفیئومورفیسم

است. نشان می دهیم $d(\exp_p)_o : T_o(T_p M) \rightarrow T_p M$ همانی است. خم $\gamma : I \rightarrow T_p M$ شامل نقطه o را طوری در نظر می گیریم که $\gamma(o) = x$ این خم را می توان به شکل $\gamma(t) = tx$ انتخاب کرد،

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_o x &= \frac{dt}{dt} \Big|_{t=0} ((\exp_p)_* \gamma)(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tx) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_x(t) \\ &= x. \end{aligned}$$



۷.۲ مختصات فضا-زمان

همانطور که گفته شد متریک شبه ریمانی، تعمیمی از متریک ریمانی هستند که از حذف شرط مثبت بودن در تعریف متریک های ریمانی پدید می آیند. تقریباً همه تعاریفی که برای متریک های ریمانی آورده شده است، برای یک متریک شبه ریمانی نیز کاربرد دارند، به جز تعاریفی که نیاز به معین مثبت بودن متریک $\langle , \rangle$ دارند.

تعریف ۱.۷.۲. در یک دستگاه مختصات مانند (U, x) روی M می توان یک متریک شبه ریمان را به صورت موضعی زیر نوشت:

$$g = -d(x^1)^2 - \dots - d(x^r)^2 + d(x^{r+1})^2 + \dots + d(x^n)^2,$$

که در آن عدد صحیح r اندیس متریک شبه ریمانی را نشان می دهد.

تعریف ۲.۷.۲. می توان متریک شبه ریمانی را به یک زوج (r, q) به نام علامت آن متریک معرفی کرد. در این صورت r و q به ترتیب تعداد جملات منفی و تعداد جملات مثبت آن فرم دو خطی است.

منظور از طرح مساله متریک های شبه ریمانی، پیدا کردن ریشه تعریف متریک های اینشتین در هندسه دیفرانسیل است. اما نام متریک اینشتین که در نظریه نسبیت عام در فیزیک از آن یاد می شود مربوط به فضای ۴-بعدی موسوم به فضا-زمان است که در یک منیفلد چهار بعدی با یک متریک شبه ریمانی به نام متریک لورنتس تعریف می شود. متریک لورنتس یک متریک شبه ریمانی است که اندیس آن برابر یک است. این متریک مهمترین متریک شبه ریمانی است که در فیزیک کاربرد فراوانی دارد و عبارتند از،

$$g = d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - \dots - d(x^n)^2.$$

متریک شبه ریمانی لورنتس را یک متریک اینشتین گوئیم اگر تانسور ریچی مربوط به آن که از اثر تانسور ریمان بدست می آید در رابطه زیر موسوم به معادلات میدان اینشتین صدق کند،

$$Ric - \frac{1}{2}Sg = T, \quad (11.2)$$

در این رابطه T یک ۲-تانسور کواریان است که معرف چگالی، نیروی حرکت لحظه ای، ماده و انرژی در هر نقطه از فضا-زمان است. اگر در معادله میدان اینشتین $T = 0$ باشد، آنگاه به آن معادله میدان اینشتین در خلاء گفته میشود که عبارتند از،

$$Ric = \frac{1}{2}Sg. \quad (12.2)$$

اگر (t, r, θ, φ) مختصات فضا-زمان باشد بنابراین متریک اینشتین در دستگاه کروی فاقد بار الکتریکی عبارتند از،

$$g = e^{2\varphi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (۱۳.۲)$$

بطوریکه $\varphi = \varphi(r, t)$ و $\Lambda = \Lambda(r, t)$.

فصل ۳

تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

اگر بخواهیم به طور مختصر در مورد گروه‌های تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل صحبت کنیم، باید گفت این گروه‌ها شامل تبدیلاتی هستند که جوابهای دستگاه را به هم تبدیل می‌کنند. از دیدگاه لی، تقارن‌ها تبدیلاتی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل کرده و روی جوابهای دستگاه با تبدیلاتی که روی گراف آنها اعمال کرده، عمل می‌کنند. در این فصل روش تقارن‌های لی و گروه‌های تبدیلات برای به دست آوردن جوابهای معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌گیرد که ابزار اصلی لی در مطالعه نظریه معادلات دیفرانسیل، مولد بینهایت کوچک یک گروه لی است که امروزه از آن به عنوان جبر لی یاد می‌شود [۵، ۶، ۱۰، ۱۱، ۲۴].

۱.۳ عمل گروه بی‌نهایت کوچک

تعریف ۱.۱.۳. هرگاه G یک گروه لی باشد که روی M عمل می‌کند آن‌گاه به ازای هر $v \in G$ مولد بی‌نهایت کوچک $\hat{v}$ متناظر با v در نقطه $p \in M$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{v}_p = d\phi_p(v_e),$$

نگاشت ϕ به صورت $\phi_p : G \rightarrow M$ تعریف می‌شود به طوری که $g \mapsto g \cdot p$ ، تعداد این مولدهای بینهایت کوچک برابر با بعد گروه است.

مثال ۲.۱.۳. عمل گروه $SL(2)$ روی $\mathbb{RP}^1$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم،

$$p \mapsto \frac{ap+b}{cp+d} \quad p \in \mathbb{RP}^1, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2),$$

جبر لی 2×2 ماتریس‌های $SL(2)$ با اثر صفر است. بنابراین این جبر با ماتریسهای زیر تولید می‌شود،

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

بنابراین اگر v_1, v_2, v_3 مولد های بینهایت کوچک متناظر با هر یک از ماتریسهای A_1 و A_2 و A_3 باشند آنگاه،

$$v_1 = \partial_p, \quad v_2 = 2p\partial_p, \quad v_3 = -p^2\partial_p. \quad (1.3)$$

۲.۳ ناوردایی بینهایت کوچک

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات همبند باشد که روی M عمل کند. تابع حقیقی $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G -ناورد است اگر و تنها اگر برای هر $p \in M, v \in \mathcal{G}$

$$v_p(I) = 0, \quad (2.3)$$

هرگاه $u = I(x)$ یک تابع یک-پارامتری و $v = \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک باشد. برای آن‌که I یک ناوردا تحت G باشد، باید $v(I) = 0$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial I}{\partial x^i} = 0,$$

حال برای یافتن I دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)}.$$

تعریف ۲.۲.۳. مجموعه $\{f_1, \dots, f_k\}$ از توابع هموار حقیقی مقدار روی منیفلد M وابسته تابعی نامیده می‌شوند، اگر برای هر نقطه $x_0 \in M$ همسایگی U و تابع هموار $H(x_1, \dots, x_k)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای همه $x \in U$ داشته باشیم:

$$H(f_1(x), \dots, f_k(x)) = 0,$$

این توابع مستقل تابعی نامیده می‌شوند اگر این شرط برقرار نباشد.

گزاره ۳.۲.۳. اگر $f_1, \dots, f_k$ در شرط $df_1 \wedge \dots \wedge df_k = 0$ صدق کنند آنگاه وابسته تابعی هستند در غیر این صورت مستقل تابعی می‌باشند.

□

برهان. [۹].

قضیه ۴.۲.۳ (مختصات اصلاح شده). فرض کنیم G یک گروه لی باشد که روی منیفلد n -بعدی M عمل کرده، $\mathcal{G}$ جبر لی و v یک مولد بی‌نهایت کوچک از آن باشد به‌طوری که در نقطه $x_0 \in M$ غیرصفر باشد. آنگاه یک دستگاه مختصات مانند $y = (y^1, \dots, y^n)$ در x_0 موجود است به‌طوری که در این مختصات $v = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

□

برهان. [۱۶].

مثال ۵.۲.۳. عمل گروه $SO(2)$ را روی فضای سه متغیره به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$SO(2) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto \left(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, \frac{\sin t + z \cos t}{\cos t - z \sin t} \right),$$

مولد بی‌نهایت کوچک حاصل از این عمل به فرم

$$\mathbf{v} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z},$$

می‌باشد. دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1 + z^2},$$

با حل دستگاه بالا به ناورداها می‌رسیم. معادله اول $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$ یک معادله دیفرانسیل جداشدنی است که جواب عمومی آن $x^2 + y^2 = c_1$ است که c_1 ثابت انتگرال است. بنابراین $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ناورداست.

برای حل معادله دوم به جای x قرار می‌دهیم $\sqrt{r^2 - y^2}$. جواب به صورت $\tan^{-1} z - \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1} z - \sin^{-1}(\frac{y}{r}) = \tan^{-1} z - \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = c_2$ ناورداست. دوم است در نتیجه برای $yz + x \neq 0$ تابع $w = (xz - y)/(yz + x)$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ مجموعه کاملی از ناورداست مستقل تابعی را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنیم که G یک گروه لی موضعا همبند از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. فرض کنید $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ، $l \leq m$ ، یک دستگاه معادلات جبری است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$F_\nu(x) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l,$$

و در شرایط رتبه ماکسیمال صدق می‌کند (به این معنی که ژاکوبین ماتریس $\left(\frac{\partial F_\nu}{\partial x^k}\right)$ در تمامی نقاط این تابع برابر l باشد). بنابراین به G گروه تقارن دستگاه می‌گویند اگر و تنها اگر

$$\mathbf{v}(F_\nu(x)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad \text{هرگاه} \quad F(x) = 0. \quad (3.3)$$

□

برهان. [۹].

۳.۳ منحنی انتگرال

تعریف ۱.۳.۳. گروه لی G با جبر لی $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت نگاشت $\exp : \mathcal{G} \longrightarrow G$ با ضابطه $\exp(\mathbf{v}) = F(1)$ را نگاشت نمایی گوئیم که F یک زیرگروه یک-پارامتری نظیر میدان برداری $\mathbf{v}$ است. اگر $\mathbf{V}$ یک همسایگی $\mathcal{G}$ ، $0 \in \mathcal{G}$ ، U یک همسایگی G باشد، آنگاه $\exp$ یک دیفیئومورفیسم بین U ، $\mathbf{V}$ برقرار می‌کند.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathcal{G}$ باشد. در این صورت برای هر $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{G}$ هر عضو G مانند g قابل بیان به صورت ترکیب نگاشت‌های نمایی می‌باشد، بدین معنا که:

$$g = \exp(v_1) \circ \dots \circ \exp(v_k).$$

تعبیر قضیه فوق آن است که با داشتن اعضای یک جبر لی می‌توان با محاسبه نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ضرب آن‌ها در هم ضابطه تبدیل گروه را به دست آورد. اثبات این قضیه در [۲۰] آمده است.

تعریف ۳.۳.۳. منحنی یا خم انتگرال از یک میدان برداری v منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به طوری که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار v در آن نقطه برابر باشد یعنی:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = v|_{\phi(\varepsilon)}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی، بایستی $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

باشد که $\xi^i(x)$ ‌ها ضرایب v در x می‌باشند.

تعریف ۴.۳.۳. اگر v میدان برداری باشد، منحنی انتگرال ماکسیمال، پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را فلوئ تولیدشده به وسیله v می‌نامیم، بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل $\circ$ ، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. فلوئ میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \quad \forall x \in M. \quad ۱.$$

$$\Psi(\circ, x) = x. \quad ۲.$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, x) = v|_{\Psi(\varepsilon, x)}. \quad ۳.$$

با مقایسه دو خاصیت ۱، ۲ و خاصیت گروه تبدیلات موضعی می‌بینیم که فلوئ تولیدشده به وسیله میدان برداری با عمل گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است و اغلب گروه یک-پارامتری از تبدیلات و میدان برداری v ، مولد بی‌نهایت کوچک عمل نامیده می‌شود. از این رو به وسیله قضیه تیلور در مختصات موضعی داریم:

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon \xi(x) + O(\varepsilon^2),$$

که $\xi = (\xi^1(x), \dots, \xi^m(x))$ ضرایب $\mathbf{v}$ هستند. اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشند که روی M عمل می‌کند، سپس مولد بی‌نهایت کوچک آن به وسیله ویژگی سوم تعریف ۴.۳.۳ با قراردادن $\varepsilon = 0$ به دست می‌آید.

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x),$$

تناظری یک به یک بین گروه یک-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بی‌نهایت کوچک وجود دارد. اغلب محاسبه فلو یا گروه یک-پارامتری تولیدشده به وسیله میدان برداری $\mathbf{v}$ به عنوان نگاشت نمایی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})x \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

را برای زیرگروه یک-پارامتری یا فلو تولید شده به وسیله میدان برداری $\mathbf{v}$ به کار می‌بریم.

مثال ۵.۳.۳. فرض کنید $\mathbf{v} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم انتگرال باشد که به صورت استاندارد شده $\psi(t) = (x(t), y(t))$ نوشته شده باشد. طبق تعریف $\psi'(t) = \mathbf{v}_{\psi(t)}$ داریم:

$$x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\psi(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\psi(t)} = x(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\psi(t)} - y(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\psi(t)},$$

با مساوی قرار دادن مولفه‌ها نظیر به نظیر داریم:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t), \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

با حل معادلات ۴.۳ داریم:

$$x(t) = a \cos t - b \sin t, \quad y(t) = a \sin t + b \cos t,$$

که $\psi(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$ خم انتگرال میدان برداری $\mathbf{v}$ است.

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ دو میدان برداری هموار روی منیفلد M باشند. برای هر $x \in M$ ، خم انتگرال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Psi(\varepsilon, x) = \exp(-\sqrt{\varepsilon} \mathbf{w}) \exp(-\sqrt{\varepsilon} \mathbf{v}) \exp(\sqrt{\varepsilon} \mathbf{w}) \exp(\sqrt{\varepsilon} \mathbf{v})(x),$$

کروشه‌لی $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x$ میدان برداری مماس بر خم انتگرال در نقطه $x = \Psi(0, x)$ یعنی:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \tag{۵.۳}$$

□

برهان. [۲۱].

۴.۳ گروه تبدیلات یک-پارامتری

تعریف ۱.۴.۳. در صفحه (x, y) تبدیلات

$$x_1 = f(x, y, \varepsilon), \quad y_1 = f(x, y, \varepsilon),$$

را تبدیلات یک-پارامتری می‌نامیم هرگاه در خاصیت‌های زیر صدق کند:

(۱) (همانی): مقدار $\varepsilon = 0$ تبدیل همانی را به‌دست می‌دهد.

$$x = f(x_1, y_1, 0), \quad y = f(x_1, y_1, 0),$$

(۲) (وارون): پارامتر $-\varepsilon$ تبدیل وارون را به‌دست می‌دهد.

$$x = f(x_1, y_1, -\varepsilon), \quad y = f(x_1, y_1, -\varepsilon),$$

(۳) (بسته بودن): اگر $x_2 = f(x_1, y_1, \delta)$ و $y_2 = g(x_1, y_1, \delta)$ ، آنگاه آن نیز دوباره عضوی از گروه باشد و علاوه بر آن بتوان نتیجه گرفت که پارامتر $\varepsilon + \delta$ آن را به‌دست می‌دهد. یعنی،

$$x_2 = f(x, y, \varepsilon + \delta), \quad y_2 = g(x, y, \varepsilon + \delta),$$

دوباره یادآور می‌شویم که خاصیت شرکت‌پذیری معمولی را می‌توان از خاصیت بسته بودن گروه نتیجه گرفت. مثال‌های ساده‌ای از گروه‌های یک-پارامتری بدین قرارند:

(الف) گروه انتقال:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + \varepsilon,$$

(ب) گروه امتدادی:

$$x_1 = e^\varepsilon x, \quad y_1 = e^\varepsilon y,$$

(ج) گروه دوران :

$$x_1 = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, \quad y_1 = x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon,$$

مثال ۲.۴.۳. نشان می‌دهیم که گروه دورانی تعریف‌شده در قسمت (ج) یک گروه یک-پارامتری است. اگر $\varepsilon = 0$ آنگاه $x_1 = x$ و $y_1 = y$ ، در نتیجه آن در خاصیت اول صدق می‌کند. حال برای وارون آن

$$x = x_1 \cos \varepsilon + y_1 \sin \varepsilon, \quad y = -x_1 \sin \varepsilon + y_1 \cos \varepsilon,$$

را به دست می آوریم، بنابراین $-\varepsilon$ وارون آن را مشخص می کند و از آن جا نتیجه می شود که (ج) در خاصیت دوم نیز صدق می کند. برای قسمت سوم می بینیم که اگر $x_2 = x_1 \cos \delta - y_1 \sin \delta$ و $y_2 = x_1 \sin \delta + y_1 \cos \delta$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} x_2 &= (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) \cos \delta - (x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) \sin \delta \\ &= x \cos(\varepsilon + \delta) - y \sin(\varepsilon + \delta), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} y_2 &= (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) \sin \delta - (x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) \cos \delta \\ &= x \sin(\varepsilon + \delta) - y \cos(\varepsilon + \delta), \end{aligned}$$

و بنابراین آن در خاصیت سوم نیز صدق می کند.

مثال ۳.۴.۳. عمل گروه تبدیلات $GL(n, \mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید که با ضابطه زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} GL(n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, a) &\longmapsto Aa, \end{aligned}$$

این عمل دو مدار تولید می کند، یکی مبدا و دیگری $\mathbb{R}^n - \{0\}$ بنابراین عمل فوق متعدی نمی باشد، همچنین عمل آزاد هم نیست. حال اگر $GL(n)$ روی $\mathbb{R}^n - \{0\}$ عمل کنند. آنگاه عمل متعدی و آزاد خواهد بود زیرا تنها مدار تولیدشده خود $\mathbb{R}^n - \{0\}$ است.

تعریف ۴.۴.۳. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می کند. یک تابع G -ناوردا تابعی حقیقی مانند $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ است به قسمی که برای هر $g \in G$ ، $p \in M$

$$I(g \cdot p) = I(p).$$

مثال ۵.۴.۳. فرض می کنیم $M = \mathbb{R}^2$ باشد:

۱. اگر G_c یک گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشد به طوری که:

$$(x, y) \longmapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

که c یک ثابت است. بنابراین تابع

$$\zeta(x, y) = x - cy,$$

یک تابع ناورد است. چون که

$$\zeta(x + c\varepsilon, y + \varepsilon) = \zeta(x, y).$$

برای تمامی ε برقرار است.

۲. اگر G^1 یک گروه تجانس باشد به‌طوری‌که:

$$G^1 : (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda > 0,$$

بنابراین تابع

$$\zeta(x, y) = \frac{x}{y},$$

یک تابع ناوردا روی تمام $\mathbb{R}$ بجز در نقطه $y = 0$ است.

۵.۳ تبدیلات و توابع

تعریف ۱.۵.۳. یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل مانند $\Delta = 0$ با p - متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و $-q$ - متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ را در نظر می‌گیریم. جواب چنین دستگاهی تابعی به فرم $u = f(x)$ می‌باشد که در آن

$$u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^p), \quad \alpha = 1, \dots, q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ است. حال فرض می‌کنیم یک دستگاه مختصات روی $X \simeq \mathbb{R}^p$ و u یک دستگاه مختصات روی $U \simeq \mathbb{R}^q$ باشد.

تعریف ۲.۵.۳. فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ متشکل از متغیرهای مستقل و وابسته X, U فضای کامل برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۵.۳. یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ ، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G است که روی یک زیرمجموعه باز از E مانند $\mathcal{O}$ عمل کرده، به‌طوری‌که هر جواب از دستگاه $\Delta = 0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌کند. در ادامه‌ی مطلب به بیان نحوه‌ی عمل یک تبدیل مانند $g \in G$ روی یک تابع می‌پردازیم، از این پس گروه تبدیلات G یک گروه لی فرض می‌شود. تابع $u = f(x)$ را با گراف

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\},$$

تعریف می‌کنیم که البته لزومی ندارد $g \cdot \Gamma_f$ خود، گراف تابعی جدید باشد. اما هرگاه G به‌طور هموار عمل کرده و عنصر همانی G ، گراف f را ثابت نگه دارد، با انتخاب مناسب دامنه‌ی Ω می‌توان دید که تبدیل g موضعاً حول عنصر همانی G گراف تابع f را ناوردا نگه می‌دارد، به این معنا که

$$g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\bar{f}}, \quad (۶.۳)$$

البته باید توجه داشت که منظور از $\bar{f}$ در (۶.۳) همان تبدیل‌یافته گراف تابع f تحت تبدیل g است.

مثال ۴.۵.۳. فرض کنیم $p = q = ۱$ و بنابراین $X \simeq U \simeq \mathbb{R}$. اگر $G = \text{SO}(۲)$ گروه دوران‌های روی $\mathbb{R}^۲ \simeq E$ باشد، آنگاه اگر θ عضوی از G باشد داریم:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \cdot (x, u) = (x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta). \quad (۷.۳)$$

بنابراین طبق تعریف (۳.۵.۳) تبدیل g از گروه لی G یک تقارن برای دستگاه معادلات $\Delta = \circ$ است، هرگاه اگر $u = f(x)$ یک جواب برای دستگاه باشد آنگاه $g \cdot u$ خود یک جواب است. حال معادله دیفرانسیل $u_{xx} = \circ$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که کلیه خطوط در $\mathbb{R}^۲$ یعنی توابع به شکل $ax + b = \circ$ یک جواب برای این معادله می‌باشند. بنابراین به راحتی می‌توان دید که چون دوران هر خط راست در $\mathbb{R}^۲$ خود یک خط راست است، لذا گروه دوران‌های $\text{SO}(۲)$ یک گروه تقارن برای این معادله است.

۶.۳ امتداد دهی

قبل از اینکه بخواهیم روند پیدا کردن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل را توضیح دهیم، ابتدا لازم است که یک تعریف هندسی برای معادلات دیفرانسیل را بیان کنیم. بنابراین لازم است که فضای کامل را به فضای مشتقات جزئی متغیرها گسترش دهیم. این ساختار یک تئوری در ساختار فضای جت است در حقیقت فضای جت، فضای هندسی جوابهای معادلات دیفرانسیل است. یک تابع حقیقی هموار مانند $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه $f(x) = f(x^۱, \dots, x^p)$ تعریف می‌شود، دارای تعداد

$$P_k = \binom{p+k-1}{k},$$

مشتق جزئی متمایز از مرتبه k نسبت به متغیرهایش می‌باشد. هرگاه $J = (j_۱, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد، آنگاه مشتق جزئی تابع f نسبت به J به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_۱} \dots \partial x^{j_k}},$$

توجه نمایید که مرتبه اندیس چندگانه J که با نماد $\#J = k$ نمایش داده می‌شود، نشان‌دهنده مراتب مشتق‌گیری از تابع فوق است. اکنون بحث را کمی گسترده‌تر می‌نماییم. فرض کنید که $f : X \rightarrow U$ یک تابع p متغیره، q مقداری با ضابطه $u = f(x) = (f^۱(x), \dots, f^q(x))$ باشد. در این صورت، فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه n -ام را با

$$U^{(n)} := U \times U_۱ \times \dots \times U_n, \quad (۸.۳)$$

نمایش می‌دهیم، به طوری که U_i ها به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ نماینده فضای مشتقات جزئی از مرتبه i -ام می‌باشند. می‌توان مشاهده نمود که بعد فضای (۸.۳) برابر است با

$$q + qp_1 + qp_2 + \dots + qp_k = q \binom{p+n}{n} := qp^{(n)},$$

توجه نمایید که از این به بعد هر نقطه در $U^{(n)}$ را به صورت $u^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. در نتیجه، $u^{(n)}$ دارای $qp^{(n)}$ متغیر متمایز به شکل $u_J^\alpha, \alpha = 1, \dots, q$ می‌باشد و $J = (j_1, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه با شرایط $0 \leq k \leq p, 1 \leq j^k \leq p$ می‌باشد.

تعریف ۱۰.۶.۳. با اضافه نمودن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$ ، به فضای

$$J^{(n)} = X \times U^{(n)}, \quad (9.3)$$

دست می‌یابیم که به آن فضای جت مرتبه n -ام تابع $u = f(x)$ گفته و آن را با نماد $J^{(n)}f$ نشان می‌دهیم. واضح است که بعد فضای (۹.۳) برابر با $p + qp^{(n)}$ می‌باشد.

با بررسی ساده‌ای می‌توان ملاحظه نمود که $J^{(n)}$ دارای ساختار هندسی می‌باشد و این ساختار چیزی نیست جز یک کلاف برداری روی منیفلد X که بعد تارهای آن برابر با $qp^{(n)}$ می‌باشد. در حقیقت، این فضا دقیقاً فضای لازم برای نشان دادن بسط تیلور تابع f به همراه متغیرهایش می‌باشد.

مثال ۲.۶.۳. تابع $u = f(x, y)$ را که شامل سه متغیر مستقل و یک متغیر وابسته می‌باشد را در نظر بگیرید. به منظور یافتن $J^{(2)}$ کافی است که مشتقات جزئی تابع فوق را تا مرتبه دوم بنویسیم، در این صورت داریم:

$$J^{(2)} = \{(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{yy}, u_{xy})\} \simeq \mathbb{R}^8.$$

تعریف ۳.۶.۳. به فضای جت مرتبه n -ام یک تابع به غیر از متغیرهای مستقل آن، امتداد مرتبه n -ام آن تابع گفته می‌شود و آن را با نماد $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ معرفی می‌نماییم. بنابراین، با توجه به تعریف فوق امتداد مرتبه دوم تابع $u = f(x, y)$ عبارت است از:

$$f^{(2)}(x, y) = (f; f_x, f_y; f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}).$$

۷.۳ دستگاه معادلات دیفرانسیل

اکنون، با توجه به تعریف که برای فضای جت ارائه نمودیم، قادر خواهیم بود که به بیان دقیق‌تر مفهوم یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل بپردازیم.

تعریف ۱۰.۷.۳. منظور از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مانند Δ که شامل m معادله مرتبه n -ام با فضای کلی E می‌باشد، تابعی به صورت $\Delta: J^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (10.3)$$

شایان ذکر است که با بازنویسی (۱۰.۳) به صورت $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \dots, \Delta_m(x, u^{(n)}))$ به ازای هرتابع هموار $\Delta_i(x, u^{(n)})$ ، به این نتیجه می‌رسیم که (۱۰.۳) یک دستگاه شامل m -معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) با p -متغیر مستقل و q -متغیر وابسته خواهد بود. بدیهی است که به ازای $p = 1$ دستگاه (۱۰.۳) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد.

تعریف ۲.۷.۳. منظور از یک جواب هموار از دستگاه معادلات (۱۰.۳) تابعی هموار مانند $u = f(x)$ است، به‌طوری‌که:

$$\Delta_\nu(x, f^{(n)}(x)) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, m.$$

۸.۳ امتداد دهی عمل گروه

تعریف ۱.۸.۳. (امتداددهی عمل گروه). فرض کنید که G یک گروه از تبدیلات باشد که روی یک زیرمجموعه باز فضای کامل E مانند $\mathcal{O}$ عمل می‌کند. این عمل را می‌توان به فضای جت مرتبه n -ام $\mathcal{O}$ یعنی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ ترفیع داد، که به آن امتداد مرتبه n -ام عمل گروه G روی $\mathcal{O}$ گفته و آن را با $G^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. به عبارتی دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه n -ام تابع $u = f(x)$ می‌باشد. قابل ذکر است که این فرآیند بدین گونه است که هرگاه g یک تبدیل از گروه G باشد، آنگاه با در نظر گرفتن g به‌عنوان یک تابع به‌صورت $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ ، امتداد آن روی $\mathcal{O}$ به‌صورت:

$$g^{(n)} : J^{(n)}(\mathcal{O}) \rightarrow J^{(n)}(\mathcal{O}),$$

با ضابطه‌ی $g^{(n)} \cdot (x_\circ, u_\circ^{(n)}) = (\tilde{x}_\circ, \tilde{u}_\circ^{(n)}) \in J^{(n)}(\mathcal{O})$ به ازای نقطه دلخواه $(x_\circ, u_\circ^{(n)}) \in J^{(n)}(\mathcal{O})$ تعریف می‌شود.

قضیه ۲.۸.۳. فرض کنید که M یک زیرمجموعه باز $X \times U$ باشد و $\Delta(x, u^{(n)})$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از رتبه m روی M به‌طوری‌که $\varphi(\Delta) \subset M^{(n)}$ است. در این صورت G گروه موضعی از تبدیلات روی M است که امتداد میدان برداری آن روی $\varphi(\Delta)$ ناوردا باشد. به این معنی که به ازای هر $(x, u^{(n)}) \in \varphi(\Delta)$ و تمام $g \in G$ ، $g^{(n)}(x, u^{(n)}) \in \varphi(\Delta)$ باشد، آنگاه G یک گروه تقارن دستگاه معادلات فوق است.

□

برهان. [۹].

۹.۳ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌ها

همان‌طور که در بخش گذشته اشاره شد، عمل یک گروه قابل امتداد به روی فضای جت می‌باشد. در این بخش، نشان می‌دهیم که میدان‌های برداری را نیز می‌توان امتداد داد که از آن‌ها به‌عنوان مولدهای

بی‌نهایت کوچک یاد می‌گردد. قابل ذکر است که این فرآیند نخستین گام در راستای یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود.

تعریف ۱.۹.۳. فرض کنید که $\mathcal{O} \subset E$ مجموعه‌ای باز بوده و $F(x, u^{(n)})$ تابعی هموار روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ باشد. منظور از مشتق کامل F نسبت به x^i که آن را با $D_i F(x, u^{(n+1)})$ نمایش می‌دهیم، تابعی هموار است که روی $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ تعریف شده و دارای این ویژگی مهم می‌باشد که هرگاه $u = f(x)$ تابعی هموار باشد، آن‌گاه:

$$D_i F(x, f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} [F(x, u^{(n)})],$$

شایان ذکر است که لم زیر که به‌طور متوسط از قاعده مشتق زنجیری حاصل می‌گردد، فرمول صریحی به منظور محاسبه مشتق کامل در قالب یک عملگر مشتق ارائه می‌نماید [۲۰].

لم ۲.۹.۳. تابع $F(x, u^{(n)})$ را روی فضای جت $J^{(n)}(\mathcal{O})$ در نظر بگیرید. هرگاه $J = (j_1, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه بوده و $u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}$ باشد. آن‌گاه:

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial F}{\partial u_J^\alpha}, \quad (11.3)$$

به‌عنوان مثال، هرگاه $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, y, u) باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} D_x F &= \frac{\partial F}{\partial x} + u_x \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots, \\ D_y F &= \frac{\partial F}{\partial y} + u_y \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xyy} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots, \end{aligned}$$

به ترتیب مشتق کامل F نسبت به x, y می‌باشند. به همین ترتیب، مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه $J = (j_1, \dots, j_k)$ به‌صورت

$$D_J = D_{j_1} \cdot D_{j_2} \cdots D_{j_k},$$

بیان نمود.

اکنون شرایط مهیا می‌باشد تا به ارائه قضیه‌ای بپردازیم که نحوه‌ی محاسبه امتداد میدان‌های برداری را به‌دست می‌دهد.

تعریف ۳.۹.۳. گیریم $\mathcal{O}$ یک زیرمجموعه باز از $E = X \times U$ و $\mathbf{v}$ یک میدان برداری روی $\mathcal{O}$ با گروه یک-پارامتری $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$ باشد. امتداد مرتبه n -ام $\mathbf{v}$ را با $\mathbf{v}^{(n)}$ نشان می‌دهیم، یک میدان برداری روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ بوده که به آن مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک-پارامتری $[\exp(\varepsilon \mathbf{v})]^{(n)}$ می‌گویند. بدین معنا که:

$$\mathbf{v}^{(n)} \Big|_{(x, u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\exp(\varepsilon \mathbf{v})]^{(n)}(x, u^{(n)}), \quad (x, u^{(n)}) \in J^{(n)}(\mathcal{O}), \quad (12.3)$$

مثال ۴.۹.۳. عمل گروه $SO(2)$ روی $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u},$$

نظیر عمل گروه یک-پارامتری

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})(x, u) = (x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon),$$

می‌باشد. مطابق رابطه (۱۲.۳) داریم :

$$[\exp(\varepsilon \mathbf{v})]^{(n)}(x, u, u_x) = \left(x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon, \frac{\sin \varepsilon + u_x \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon - u_x \sin \varepsilon} \right),$$

به کمک فرمول (۱۲.۳) می‌توان دید که تبدیل برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(1)} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x}. \quad (13.3)$$

تعریف ۵.۹.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل $J^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: Δ از رتبه‌ی ماکسیمال است هرگاه ماتریس ژاکوبین آن

$$J_{\Delta}(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_{\nu}}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_{\nu}}{\partial u_j^{\alpha}} \right)_{m \times (p+qp^n)},$$

از رتبه m باشد.

قضیه ۶.۹.۳. فرض کنیم $\Delta = \circ$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبه‌ی ماکسیمال تعریف شده در یک زیرمجموعه باز از E مانند $\mathcal{O}$ باشد، اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و $\mathbf{v}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، آنگاه $\Delta = \circ$ ، G را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد. اگر:

$$\mathbf{v}^{(n)}(\Delta) = \circ, \quad \Delta = \circ. \quad (14.3)$$

□

برهان. با استفاده از قضایای ۲.۸.۳ و ۶.۲.۳ ثابت می‌شود.

روش به کارگیری قضیه فوق مستلزم ارائه فرمول صریحی برای محاسبه امتداد یک میدان برداری است. در مباحث آینده این موضوع را جست و جو می‌کنیم. قضیه ۶.۹.۳ نحوه ارتباط بین گروه‌های تقارن و ناوردایی یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تحت مولدهای بی‌نهایت کوچک را بیان می‌دارد. محاسبه امتداد یک میدان برداری برخلاف امتداد عمل گروه نظیر آن سراسر است. برای روشن شدن این موضوع از حالت‌های ساده‌تر آغاز می‌کنیم. ابتدا به امتداد عمل گروه یک-پارامتری که تنها روی متغیرهای مستقل عمل می‌کند، می‌پردازیم. به بیان دیگر میدان برداری

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

را روی مجموعه $\mathcal{O} \subset E = X \times U$ در نظر می‌گیریم. گروه تبدیل نظیر این میدان برداری به صورت

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon(x, u) = (\chi_\varepsilon(x), u), \quad g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v}),$$

می‌باشد به طوری که χ یک دیفئومورفیسم روی X است. اگر قرار دهیم $\tilde{x} = \chi_\varepsilon^i(x)$ در این صورت داریم:

$$\left. \frac{d\chi_\varepsilon^i(x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \xi^i(x), \quad (15.3)$$

در ادامه فرض می‌کنیم $U \simeq \mathbb{R}$ ، سپس محاسبات را به حالت کلی $U \simeq \mathbb{R}^q$ تعمیم می‌دهیم. طبق تعریف فضای جت،

$$J^1(\mathcal{O}) = \{(x, u^{(1)}) = (x, u, u_j) | x \in X, u \in U\},$$

به طوری که $u_j = \frac{\partial u}{\partial x^j}$. حال اگر $(x, u^{(1)})$ نقطه‌ای دلخواه از $J^1(\mathcal{O})$ بوده و $u = f(x)$ تابعی هموار روی X باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^{(1)} \cdot (x, u^{(1)}) &= (\tilde{x}, \tilde{u}^{(1)}) \\ &= (\tilde{x}, \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})) \\ &= (\tilde{x}, f(\chi_\varepsilon^{-1}(\tilde{x}))) \\ &= (\tilde{x}, f(\chi_{-\varepsilon}(\tilde{x}))), \quad \tilde{f}_\varepsilon = g_\varepsilon \cdot f, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k}(\chi_{-\varepsilon}(\tilde{x})) \cdot \frac{\partial \chi_\varepsilon^k}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}), \quad (16.3)$$

اما بنابر وارون‌پذیر بودن χ ، $\chi_{-\varepsilon}(\tilde{x}) = x$ ، پس

$$\bar{u}_j = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \chi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\chi_\varepsilon(x)) u_k,$$

فرمولی صریح برای محاسبه‌ی عمل امتدادیافته روی مشتقات مرتبه اول به دست می‌دهد. برای یافتن مولد بی‌نهایت کوچک نظیر عمل $g^{(1)}$ ، با مشتق‌گیری از فرمول‌های امتداد نسبت به ε در نقطه $\varepsilon = 0$ مولد بی‌نهایت کوچک ساخته شده به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^q \phi^j(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad (17.3)$$

به دست می‌آید، به طوری که:

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^p \frac{\partial \chi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\chi_\varepsilon(x)) u_k,$$

به جهت هموار بودن توابع با تغییر مراتب مشتق‌گیری دو نوع ضریب برای u_k به دست می‌آید: یکی آن‌هایی که با استفاده از رابطه‌ی (۱۵.۳) و فرض $\chi_\varepsilon(x) = x$ به شکل

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \left[\frac{d\chi_{-\varepsilon}^k}{d\varepsilon} \right] (\chi_\varepsilon(x)) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{d\chi_{-\varepsilon}^k}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right] (x) = -\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x),$$

می‌باشد و دومی که با دو بار مشتق‌گیری نسبت به مولفه‌های x به فرم

$$\sum_l \frac{\partial^2 \chi_{-\varepsilon}^k}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^{-l}} (\chi_{-\varepsilon}(x)) \frac{d\chi_\varepsilon^l}{d\varepsilon}(x) \Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

بیان می‌شود. پس

$$\phi^j = - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \cdot u_k, \quad (18.3)$$

ضرایب فرمول امتداد در (۱۷.۳) را مشخص می‌کند.

قضیه ۷.۹.۳. فرض کنیم،

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $\mathcal{O} \subset E$ باشد. امتداد مرتبه n -ام میدان برداری $\mathbf{v}$ یک میدان برداری به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (19.3)$$

روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ می‌باشد که ضرایب ϕ_α^J در (۱۹.۳) با فرمول

$$\phi_\alpha^j(x, u^{(n)}) = D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha; \quad (20.3)$$

ساخته می‌شوند. شایان ذکر است عبارت

$$Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha, \quad (21.3)$$

را مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$ می‌نامیم.

برهان. قضیه را به ازای $n = 1$ ثابت می‌کنیم. گیریم $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ گروه یک-پارامتری نظیر میدان برداری $\mathbf{v}$ باشد که تبدیل آن با فرمول زیر است:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\phi_\varepsilon(x, u), \psi_\varepsilon(x, u)),$$

و

$$\begin{aligned}\xi^i(x, u) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \phi_\varepsilon^i(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ \phi_\alpha(x, u) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \psi_\varepsilon^\alpha(x, u), \quad \alpha = 1, 2, \dots, q,\end{aligned}$$

به‌طور کلی $\phi_\varepsilon^i, \psi_\varepsilon^\alpha$ مولفه‌های $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ هستند. به ازای $(x, u) \in E$ و $(x, u^{(1)}) \in J^1(\mathcal{O})$ تابع $u = f(x)$ با امتداد مرتبه $u^{(1)} = f^{(1)}(x)$ و مولفه‌های

$$u^\alpha = f^\alpha(x), \quad u_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^i}.$$

مفروض است. با انتخاب ε به اندازه کافی کوچک تبدیل f تحت g_ε خوش‌تعریف است و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\bar{u} = \bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\bar{x}) = [\psi_\varepsilon \circ (Id \times f)] \circ [\phi_\varepsilon \circ (Id \times f)^{-1}(\bar{x})],$$

با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیری ماتریس ژاکوبین

$$J\bar{f}_\varepsilon(x) = \left(\frac{\partial \bar{f}_\varepsilon}{\partial \bar{x}^i} \right),$$

با فرض $x = [\phi_\varepsilon \circ (Id \times f)]^{-1}(\bar{x})$ به شکل

$$J\bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) = J[\psi_\varepsilon \circ (Id \times f)](x) \cdot \{J[\phi_\varepsilon \circ (Id \times f)](x)\}, \quad (22.3)$$

نوشته می‌شود. بسط فرمول (۲۲.۳) امتداد مرتبه اول $g_\varepsilon^{(1)}$ را به‌دست می‌دهد. برای یافتن مولد بی‌نهایت کوچک $v^{(1)}$ ، باید از (۲۲.۳) نسبت به ε مشتق بگیریم و در نهایت قرار دهیم $\varepsilon = 0$ و اگر $\Xi(\varepsilon)$ یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع وابسته به ε باشد، آن‌گاه

$$\frac{d}{d\varepsilon} [\Xi(\varepsilon)^{-1}] = -\Xi(\varepsilon)^{-1} \frac{d\Xi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Xi(\varepsilon)^{-1},$$

هرگاه $\varepsilon = 0$ باشد داریم:

$$\phi_*(x, f(x)) = x, \quad \psi_*(x, f(x)) = f(x), \quad (23.3)$$

بنابراین اگر I ماتریس همانی $p \times p$ باشد، آن‌گاه:

$$J[\phi_* \circ (Id \times f)](x) = Id, \quad J[\psi_* \circ (Id \times f)](x) = Jf(x),$$

حال با مشتق‌گیری از (۲۲.۳) در نقطه $\varepsilon = 0$ ، و استفاده از قاعده لایپ‌نیتس روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J\bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J[\psi_\varepsilon \circ (Id \times f)](x) - Jf(x) \cdot \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J[\phi_\varepsilon \circ (Id \times f)](x) \\ &= J[\psi_* \circ (Id \times f)](x) - Jf(x) \cdot J[\xi_* \circ (Id \times f)](x),\end{aligned} \quad (24.3)$$

توجه شود که در تساوی دوم عبارت بالا $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^p)^T$ و $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_q)^T$ دو بردار ستونی هستند. درایه‌های ماتریس رابطه (۲۴.۳) ضرایب ϕ_α^k عبارت $\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}$ را در $v^{(1)}$ مشخص می‌کند، به‌عنوان مثال درایه (a, k) -ام برابر است با:

$$\phi_\alpha^k(x, u^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial x^k} [\phi_\alpha(x, f(x))] - \sum_{i=1}^p \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} [\xi^i(x, f(x))],$$

لذا اگر قرار دهیم $u_{k,i}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^k \partial x^i}$ ، با به‌کارگیری مشتق کامل رابطه بالا به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^k(x, u^{(1)}) &= D_k[\phi_\alpha(x, u)] - \sum_{i=1}^p D_k[\xi^i(x, u)] u_i^k \\ &= D_k[\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha] + \sum \xi^i u_{ki}^\alpha, \end{aligned} \quad (25.3)$$

حال قضیه را در حالت عمومی اثبات می‌کنیم. ابتدا باید توجه کنیم که $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ را می‌توان به‌عنوان زیرفضایی از $J^1(J^n(\mathcal{O}))$ در نظر گرفت (زیرا مشتق مرتبه $(n+1)$ -ام u_J^α را می‌توان به‌عنوان مشتق مرتبه اول مشتقات مرتبه اول n -ام در نظر گرفت). پس به کمک استقرا می‌توان $v^{(n)}$ را از روی $v^{(n-1)}$ بدین صورت ساخت. فرض کنیم $v^{(n-1)}$ یک میدان برداری روی $J^{(n-1)}(\mathcal{O})$ باشد، بنابراین با یک بار امتداد دادن آن یک میدان برداری در $J^1(J^{(n-1)}(\mathcal{O}))$ می‌رسیم، که ضرایب آن به ازای اندیس چندگانه $u_{J,k}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^k}$ برابر با $\alpha = 1, \dots, q$ ، $J = (j^1, \dots, j^k)$ ، $1 \leq k \leq p$ حال با توجه به (۲۵.۳) ضرایب $\frac{\partial}{\partial u_{j,k}^\alpha}$ در امتداد مرتبه اول $v^{(n-1)}$ برابر خواهند بود با:

$$\phi_\alpha^{J,k} = D_k \phi_\alpha^J - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha, \quad (26.3)$$

حال کافی است نشان دهیم فرمول (۲۰.۳) در (۲۶.۳) صدق کند. این امر در محاسبات زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^{J,k} &= D_k \{ D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha \} - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha \\ &= D_k D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p (D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha + \xi^i u_{J,i,k}^\alpha) - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha \\ &= D_k D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i,k}^\alpha. \end{aligned}$$

□

۱۰.۳ ناوردای دیفرانسیلی

تعریف ۱۰.۱۰.۳. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات نقطه‌ای یا برخوردی باشد. یک ناوردای دیفرانسیلی تابعی دیفرانسیلی مانند $I : J^{(n)}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوری‌که:

$$I(g^{(n)} \cdot (x, u^{(n)})) = I(x, u^{(n)}).$$

مثال ۳.۱۰.۲. گروه دوران‌های $G = SO(2)$ که روی $X \times U$ با مولد $v = -u\partial_x + x\partial_u$ عمل می‌کنند را در نظر می‌گیریم:

ناوردای دیفرانسیلی مرتبه اول در واقع ناوردای معمولی از امتداد اول $SO(2)^{(n)}$ با مولد بی‌نهایت کوچک

$$v^{(1)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

می‌باشد. اگر متغیرهای (x, u, u_x) را با (x, y, z) نشان دهیم، داریم:

$$w = v^{(1)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

توجه کنید که میدان برداری w روی $\mathbb{R}^3$ هرگز صفر نمی‌شود بنابراین در همسایگی‌ای از هر نقطه در $\mathbb{R}^3$ دو ناوردای مشتق تابعی از گزوه یک-پارامتری تولیدشده به وسیله w وجود دارد. سیستم مشخصه در این مورد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1 + z^2},$$

با انتگرال گرفتن از تساوی اول ناوردای $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد. برای پیدا کردن ناوردای دیگر x را با $\sqrt{r^2 - y^2}$ جایگزین می‌کنیم، داریم:

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{dz}{1 + z^2},$$

جواب آن $\arcsin \frac{y}{r} = \arctan z + k$ برای ثابت دلخواه k می‌باشد. بنابراین

$$\arctan z - \arcsin \frac{y}{r} = \arctan z - \arctan \frac{y}{x},$$

ناوردای دیفرانسیلی دوم برای w می‌باشد. بیان ساده‌تری از این ناوردها با گرفتن تانژانت به دست می‌آید. بنابراین با توجه به تغییر متغیر اولیه $\frac{xz-y}{yz+x}$ ،

$$\frac{xu_x - u}{x + uu_x}, \quad \sqrt{x^2 + u^2}.$$

مجموعه کاملی از ناوردهای دیفرانسیلی مرتبه اول برای $SO(2)$ تشکیل می‌دهند.

قضیه ۳.۱۰.۳. فرض کنیم v, w میدان‌های برداری روی $M \subset X \times U$ باشند. بنابراین امتداد آن‌ها شرایط زیر را دارد:

$$(cv + c'w)^{(n)} = cv^{(n)} + c'w^{(n)}, \quad ۱.$$

$$[v, w]^{(n)} = [v^{(n)}, w^{(n)}], \quad ۲.$$

□

برهان. [۱۶].

۱۱.۳ حل معادلات دیفرانسیل به روش تقارن نقطه ای گروه لی

مثال ۱۱.۳.۱. ما ابتدا با یک مثال ساده شروع می کنیم که معادله ای است خطی که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ تعریف شده [۲۱]،

$$u_{xx} = 0, \quad (27.3)$$

(البته می شود حدس زد ، گروه تقارن این معادله بر اساس جوابهای عمومی تابع خطی $u = ax + b$ بنا شده بنابراین هر تقارن از (۲۷.۳) نگاشت خطی به نگاشت خطی است.) چون معادله مرتبه دو است، بنابراین لازم است که امتداد مرتبه دوم میدان برداری

$$\mathbf{v} = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

را که روی E تعریف می شود تا مرحله دوم امتداد داده و با استفاده از قضیه ۷.۹.۳ تقارن ها را بیابیم. امتداد مرتبه دوم $\mathbf{v}$ برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

و با استفاده از (۲۰.۳) و این که مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$ ، $Q = \phi - \xi u_x$ است، ضرایب $\mathbf{v}^{(2)}$ یعنی ϕ^x, ϕ^{xx} را در زیر به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x Q + \xi u_{xx} \\ &= \phi_x + (\phi_u - \xi_x) u_x - \xi_u u_x^2, \\ \phi^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx} \\ &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \xi_{uu} u_x^2 + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 3\xi_u u_x u_{xx}, \end{aligned}$$

حال با اثر $\mathbf{v}^{(2)}$ بر معادله (۲۷.۳) داریم:

$$\phi^{xx} = 0, \quad (28.3)$$

با جایگذاری ضرایب امتداد در (۲۷.۳) به دستگاه PDE خطی زیر می رسم:

$$\phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \xi_{uu} u_x^2 + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} = 0,$$

با جایگذاری $u_{xx} = 0$ در بالا داریم:

$$\phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \xi_{uu} u_x^2 + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 = 0,$$

حال با مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات تابع u در طرف تساوی بالا به جدول زیر می رسم:

ضرایب تک جمله‌ایها

$$(۱) \quad \phi_{xx} = 0$$

$$(۲) \quad \phi_{xu} = \xi_{xx}$$

$$(۳) \quad \phi_{uu} = 2\xi_{xu}$$

$$(۴) \quad \xi_{uu} = 0$$

از معادله‌ی (۱) مشخص می‌شود که $\phi_{xx} = a(u)x + b(u)$ ، هم‌چنین از معادله‌ی (۲) مشخص می‌شود که $\phi_x = a$ و از (۳) نتیجه می‌شود $\phi_{xx} = 0$ ، از معادله‌ی (۴) نتیجه می‌شود $\xi = c(x)u + d(x)$. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\xi = c_1 x^2 + c_2 xu + c_3 x + c_4 u + c_5,$$

$$\phi = c_1 xu + c_2 u^2 + c_3 x + c_4 u + c_5.$$

که $c_1, \dots, c_5$ ثابت‌هایی دلخواه هستند بنابراین فضای جبر لی تقارن‌ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$v_1 = \partial_x,$$

$$v_2 = \partial_u,$$

$$v_3 = x\partial_x,$$

$$v_4 = x\partial_u,$$

$$v_5 = u\partial_x,$$

$$v_6 = u\partial_u,$$

$$v_7 = x^2\partial_x + xu\partial_u,$$

$$v_8 = xu\partial_x + u^2\partial_u.$$

مثال ۲.۱۱.۳ (معادله انتشار غیر خطی امواج صوت). معادله زیر یک انتشار غیر خطی امواج صوت در رسانه با حبابهای گازی با مختصات (t, x, u, w) را شرح می‌دهد [۱۲]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = p\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (۲۹.۳)$$

در اینجا p شار است، $\omega = \frac{v'}{v}$ نسبت آشوب بر پایداری درجه صدا $v_* = \frac{4}{3}\pi R_*^3$ یک حباب است بطوریکه R_* شعاع حباب در پایداری، V' نوسان درجه صدا است. ν غلظت هوای همگن با بلندی صدای یک حباب است، V_* مدت تعداد حباب توسط درجه صدای رسانه است و x مختصات شمارش در امتداد پخش موج است. ارتعاشات یک حباب توسط دستگاه زیر نشان داده میشود،

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \omega_*^2 \omega (1 + \varepsilon_a \omega) = -\frac{\omega_*^2}{c_a^2 \rho_a} p, \quad \varepsilon_a = \text{ثابت},$$

بطوریکه c_a و ρ_a به ترتیب سرعت صدا و تراکم هوا است، ω_* فرکانس تشدید حباب است. برای حالت تنوع کم حجم حباب میتوان در معادله دوم مدت را حذف کرد،

$$\alpha = \rho\nu, \quad \beta = \omega_*^2, \quad \delta = \frac{\omega_*^2}{c_a^2 \rho_a},$$

بنابراین،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \beta \omega (1 - \gamma \omega) + \delta u = 0.$$

قرار می‌دهیم،

$$x^1 = t, \quad x^2 = x, \quad u^1 = u, \quad u^2 = w,$$

بنابراین دستگاه (۲۹.۳) را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv u_{xx} - c^{-2}u_{tt} + \alpha\omega_{tt} = 0, \\ F_2 &\equiv \beta\omega(1 - \gamma\omega) + \delta u = 0. \end{aligned} \quad (30.3)$$

این دستگاه روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ قرار دارد و با توجه به دستگاه مختصات، میدان برداری این دستگاه معادله دیفرانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \xi(t, x, u, w) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, x, u, w) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + \phi(t, x, u, w) \frac{\partial}{\partial u} + \psi(t, x, u, w) \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

چون دستگاه معادله دیفرانسیل (۳۰.۳) از مرتبه دو است بنابراین میدان برداری را تا مرتبه دوم امتداد می‌دهیم،

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{v} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \psi^t \frac{\partial}{\partial w_x} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{tx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \psi^{tt} \frac{\partial}{\partial w_{tt}} \\ &\quad + \psi^{xx} \frac{\partial}{\partial w_{xx}} + \psi^{tx} \frac{\partial}{\partial w_{tx}}, \end{aligned}$$

پس میدان برداری $\mathbf{v}$ یک تقارن برای دستگاه معادله دیفرانسیل (۳۰.۳) است هرگاه،

$$\mathbf{v}^{(2)}(\Delta) = 0, \quad \text{بطوریکه} \quad \Delta = 0.$$

مشتق کامل D_t و D_x که به ترتیب نسبت به متغیرهای t و x است نیز به این صورت تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + w_t \frac{\partial}{\partial w} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + w_{tt} \frac{\partial}{\partial w_t} + \dots, \\ D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + w_{tx} \frac{\partial}{\partial w_t} + \dots, \end{aligned}$$

و همچنین مشخصه های میدان برداری نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$Q_u = \phi - \xi u_t - \eta u_x,$$

$$Q_w = \phi - \xi w_t - \eta w_x,$$

پس بنابراین ضرایب میدان برداری به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned}
\phi_t &= D_t(Q_u) + \xi u_{tt} + \eta u_{tx} \\
&= \phi_t + u_t \phi_u - u_t \xi_t - u_t^2 \xi_u - u_t w_t \xi_w - u_x \eta_t - u_x u_t \eta_u - u_x w_t \eta_w, \\
\phi_x &= D_x(Q_u) + \xi u_{tx} + \eta u_{xx} \\
&= \phi_x + u_x \phi_u - u_t \xi_x - u_t u_x \xi_u - u_t w_x \xi_w - u_x \eta_x - u_x^2 \eta_u - u_x w_x \eta_w, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

به همین شکل بقیه ضرایب یعنی $\psi_t, \psi_s, \dots, \psi_{ss}$ را به دست می‌آوریم. بنابراین جبر مولدهای لی گروه تقارن‌های معادله (۲۹.۳) عبارتند از:

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad v_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}.$$

مثال ۳.۱۱.۳ (معادلات ژئودزیک سیاهچاله ریزنر-نوردشتروم). در هندسه دیفرانسیل برای مختصات فضا-زمان، مختصاتی مانند $X = (x^1(s), \dots, x^n(s))$ در نظر می‌گیریم. که معادلات ژئودزیک بر اساس این مختصات، یک دستگاه n -معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی مرتبه ۲ است. ریزنر-نوردشتروم^۱ یک سیاهچاله باردار ساکن است [۱۹]، دستگاه معادلات ژئودزیک آن به صورت یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی مرتبه دو است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \begin{cases} R_1 = \ddot{t} - \frac{2(-3mr + 3Q^2 + \lambda r^4)}{r(3r^2 - 6mr + 3Q^2 - \lambda r^4)} \dot{t} \dot{r} = 0, \\ R_2 = \ddot{r} + \frac{(-3r^2 + 6mr - 3Q^2 + \lambda r^4)(-3mr + 3Q^2 + \lambda r^4)}{9r^5} \dot{t}^2 \\ + \frac{(-3mr + 3Q^2 + \lambda r^4)}{r(3r^2 - 6mr + 3Q^2 - \lambda r^4)} \dot{r}^2 + \\ (3r^2 - 6mr + 3Q^2 - \lambda r^4)(-1 + 4\pi\eta^2) [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] = 0, \\ R_3 = \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \\ R_4 = \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0, \end{cases} \quad (31.3)$$

مختصات فضا-زمان این سیاهچاله به صورت $(s, t, r, \theta, \varphi)$ است که یک متغیر مستقل s و هم‌چنین چهار متغیر وابسته t, r, θ, φ دارد و t مختصات زمان است. برای به دست آوردن جوابهای این دستگاه به روش تقارن‌های نقطه‌ای گروه لی، ابتدا باید میدان برداری آن را تعریف کنیم بنابراین با توجه به مختصات، جبر لی دستگاه معادلات ژئودزیک توسط میدان برداری زیر تولید می‌شود،

$$v = \xi \partial_s + \tau \partial_t + \phi \partial_r + \psi \partial_\theta + \chi \partial_\varphi,$$

که $(\xi, \tau, \dots, \chi)$ توابعی از s, t, r, θ, φ هستند، با توجه به اینکه دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه دو است پس میدان برداری را تا مرتبه دو امتداد می دهیم،

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \tau^s \frac{\partial}{\partial t^s} + \phi^s \frac{\partial}{\partial r^s} + \psi^s \frac{\partial}{\partial \theta^s} + \chi^s \frac{\partial}{\partial \varphi^s} \\ + \tau^{ss} \frac{\partial}{\partial t^{ss}} + \phi^{ss} \frac{\partial}{\partial r^{ss}} + \psi^{ss} \frac{\partial}{\partial \theta^{ss}} + \chi^{ss} \frac{\partial}{\partial \varphi^{ss}},$$

بنابراین $\mathbf{v}$ یک تقارن برای دستگاه (۳۱.۳) است هرگاه،

$$\mathbf{v}^{(2)}(\Delta) = 0, \quad \Delta = 0, \quad \text{بطوریکه} \quad (32.3)$$

در این جا $\tau^{ss}, \phi^{ss}, \dots$ ضرایب مشتقات مرتبه دوم $\frac{\partial}{\partial t^{ss}}, \frac{\partial}{\partial r^{ss}}, \dots$ که در امتداد مرتبه دوم میدان برداری $\mathbf{v}$ ظاهر می شود. با توجه به (۱۱.۳)، مشتق کامل برای این میدان برداری به صورت زیر تعریف می شود،

$$D_s = \frac{\partial}{\partial s} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ + \ddot{t} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + \ddot{r} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} + \ddot{\theta} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} + \ddot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}},$$

و همچنین طبق فرمول (۲۱.۳)، دستگاه های مشخصه نیز به صورت زیر به دست می آید،

$$Q^t = \tau - \xi t_s, \quad Q^r = \phi - \xi r_s, \\ Q^\theta = \psi - \xi \theta_s, \quad Q^\varphi = \chi - \xi \varphi_s,$$

طبق معادله (۲۰.۳) داریم:

$$\tau^s = D_s (\tau - \xi t) + \xi \ddot{t} \\ = \tau_s + \dot{t} \tau_t + \dot{r} \tau_r + \dot{\theta} \tau_\theta + \dot{\varphi} \tau_\varphi - \dot{t} \xi_s - \ddot{t} \xi_t - \dot{t} \dot{\xi}_r - \dot{t} \dot{\xi}_\theta - \dot{t} \dot{\xi}_\varphi, \\ \tau^{ss} = D_s^2 (\tau - \xi t) + \xi \ddot{\ddot{t}} \\ = \tau_{ss} + \dot{t} \tau_{st} + \dot{r} \tau_{sr} + \dot{\theta} \tau_{s\theta} + \dot{\varphi} \tau_{s\varphi} + \dot{t} \tau_{st} + \ddot{t} \tau_{tt} + \dot{t} \dot{\tau}_{tr} + \dot{t} \dot{\tau}_{t\varphi} \\ + \ddot{t} \dot{\tau}_{t\theta} + \dot{r} \tau_{sr} + \dot{t} \dot{\tau}_{rt} + \dot{r} \dot{\tau}_{rr} + \dot{r} \dot{\tau}_{r\theta} + \dot{r} \dot{\tau}_{r\varphi} + \dot{\theta} \tau_{s\theta} + \dot{\theta} \tau_{\theta\theta} \\ + \dot{\theta} \dot{\tau}_{\theta\theta} + \dot{\theta} \dot{\tau}_{\theta\varphi} + \dot{\varphi} \tau_{s\varphi} + \dot{t} \dot{\tau}_{\varphi} + \dot{r} \dot{\tau}_{r\varphi} + \dot{\varphi} \dot{\tau}_{\varphi\theta} + \dot{\varphi} \dot{\tau}_{\varphi\varphi} \\ - \dot{t} \xi_{ss} - \ddot{t} \xi_{st} - \dot{t} \dot{\xi}_{sr} - \dot{t} \dot{\xi}_{s\theta} - \dot{t} \dot{\xi}_{s\varphi} - \ddot{t} \xi_{ts} - \ddot{t} \xi_{tt} - \dot{t} \dot{\xi}_{tr} \\ - \ddot{t} \dot{\xi}_{t\theta} - \ddot{t} \dot{\xi}_{t\varphi} - \dot{r} \dot{\xi}_{rs} - \dot{r} \dot{\xi}_{rt} - \dot{r} \dot{\xi}_{rr} - \dot{r} \dot{\xi}_{r\theta} - \dot{r} \dot{\xi}_{r\varphi} \\ - \dot{\theta} \dot{\xi}_{\theta s} - \ddot{\theta} \dot{\xi}_{\theta t} - \dot{\theta} \dot{\xi}_{\theta r} - \ddot{\theta} \dot{\xi}_{\theta\theta} - \dot{\theta} \dot{\xi}_{\theta\varphi} - \dot{\varphi} \dot{\xi}_{\varphi s} - \ddot{\varphi} \dot{\xi}_{\varphi t} \\ - \dot{\varphi} \dot{\xi}_{\varphi r} - \ddot{\varphi} \dot{\xi}_{\varphi\theta} - \dot{\varphi} \dot{\xi}_{\varphi\varphi} - \ddot{t} \xi_s - \ddot{t} \dot{\xi}_t - \ddot{t} \dot{\xi}_r - \ddot{t} \dot{\xi}_\theta \\ - \ddot{t} \dot{\xi}_\varphi \tau_s + \ddot{t} \tau_t + \ddot{r} \tau_r + \ddot{\theta} \tau_\theta + \ddot{\varphi} \tau_\varphi - \ddot{t} \xi_s - \ddot{t} \dot{\xi}_t - \ddot{r} \dot{\xi}_r - \ddot{t} \dot{\xi}_\theta \\ - \ddot{t} \dot{\xi}_\varphi - \ddot{t} \dot{\xi}_\theta - \ddot{t} \dot{\xi}_\varphi - \ddot{t} \dot{\xi}_\varphi,$$

و به همین نحو $\phi^s, \phi^{ss}, \psi^s, \dots$ را به دست می‌آوریم. بنابراین با توجه به (۳۲.۳)، به دستگاه PDE زیر می‌رسیم،

$$\begin{aligned} \xi_t &= 0, & \xi_r &= 0, & \xi_\theta &= 0, \\ \xi_\varphi &= 0, & \xi_{ss} &= 0, & \tau_s &= 0, \\ \tau_t &= 0, & \tau_r &= 0, & \tau_\theta &= 0, \\ \chi_t &= 0, & \chi_r &= 0, & \chi_s &= 0, \\ \tau_\varphi &= 0, & \chi_{\varphi\varphi} &= \sin \theta \cos \theta \chi_\theta, \\ \chi_{\varphi\theta} &= -\sec \theta \csc \theta \chi_\theta, & \chi_{\theta\theta} &= -2\chi_\theta \cot \theta, \\ \phi(s, t, r, \theta, \varphi) &= 0, & \psi(s, t, r, \theta, \varphi) &= -\tan \theta \chi_\varphi, \end{aligned}$$

با حل این دستگاه، ضرایب امتداد را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \xi(s, t, r, \theta, \varphi) &= c_4 s + c_5, \\ \tau(s, t, r, \theta, \varphi) &= c_6, \\ \phi(s, t, r, \theta, \varphi) &= 0, \\ \psi(s, t, r, \theta, \varphi) &= -c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi, \\ \chi(s, t, r, \theta, \varphi) &= c_1 \cos \theta \sin \varphi + c_2 \cos \varphi \cot \theta + c_3, \end{aligned}$$

که $c_1, c_2, \dots, c_6$ ثابت‌های ساختاری هستند، بنابراین مولد‌های بینهایت کوچک تقارن‌های نقطه‌ای هر گروه لی یک پارامتری به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial s}, & \mathbf{v}_2 &= s \frac{\partial}{\partial s}, \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_4 &= \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \mathbf{v}_5 &= -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \mathbf{v}_6 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

جدول گروه لی میدان‌های برداری را به صورت زیر نمایش می‌دهیم که،

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j \mathbf{v}_i, \quad i, j = 1, \dots, 6:$$

[,]	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_1$	0	$\mathbf{v}_1$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_4$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_6$	$-\mathbf{v}_5$
$\mathbf{v}_5$	0	0	0	$-\mathbf{v}_6$	0	$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_6$	0	0	0	$\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_4$	0

مثال ۴.۱۱.۳. در مکانیک سیالات جریان یک مایع نیوتنی تراکم ناپذیر به درون لایه های مرزی یک سطح متخلخل توسط دستگاه معادلات زیر توصیف می شود [۹].

$$\Delta = \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial u'v'}{\partial y}, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (33.3)$$

به طوریکه در این معادله ρ چگالی، $\bar{p}$ فشار، ν چسپندگی جنبشی مایع در یک نقطه، $\bar{u}$ و $\bar{v}$ مولفه های میانگین سرعت، u' و v' سرعت تغییرات و نوسان مایع هستند. چون دستگاه (۳۳.۳) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با فضای کامل $E \simeq R^2 \times R^3$ است پس لازم است برای یافتن تقارنهای، یک میدان برداری به صورت زیر انتخاب شود،

$$\mathbf{v} = \xi^1(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial y} + \phi_1(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \phi_2(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial \bar{v}} + \phi_3(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial \bar{p}},$$

چون دستگاه مرتبه دو است پس میدان برداری فوق را تا مرتبه دوم امتداد می دهیم:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \phi_1^x \partial_{\bar{u}x} + \phi_1^y \partial_{\bar{u}y} + \phi_1^x \partial_{\bar{v}x} + \phi_1^y \partial_{\bar{v}y} + \phi_2^x \partial_{\bar{p}x} + \phi_2^y \partial_{\bar{p}y} + \phi_1^{xx} \partial_{\bar{u}xx} + \phi_1^{xy} \partial_{\bar{u}xy} + \phi_1^{yx} \partial_{\bar{v}yx} + \phi_1^{yy} \partial_{\bar{v}yy} + \phi_2^{xx} \partial_{\bar{p}xx} + \phi_2^{xy} \partial_{\bar{p}xy} + \phi_2^{yx} \partial_{\bar{p}yx} + \phi_2^{yy} \partial_{\bar{p}yy},$$

حال با توجه به اینکه دستگاه (۳۳.۳) دارای سه مشخصه تقارن به صورت

$$Q_1 = \phi_1 - \xi^1 \bar{u}_x - \xi^2 \bar{u}_y, \quad Q_2 = \phi_2 - \xi^1 \bar{v}_x - \xi^2 \bar{v}_y, \quad Q_3 = \phi_3 - \xi^1 \bar{p}_x - \xi^2 \bar{p}_y,$$

است، ضرایب امتداد را با استفاده از روابط زیر بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} \phi_1^x &= D_x Q_1 + \xi^1 \bar{u}_{xx} + \xi^2 \bar{u}_{xy}, & \phi_2^x &= D_x Q_2 + \xi^1 \bar{v}_{xx} + \xi^2 \bar{v}_{xy}, \\ \phi_1^y &= D_y Q_1 + \xi^1 \bar{u}_{xy} + \xi^2 \bar{u}_{yy}, & \phi_2^y &= D_y Q_2 + \xi^1 \bar{v}_{xy} + \xi^2 \bar{v}_{yy}, \\ \phi_1^{xx} &= D_x^2 Q_1 + \xi^1 \bar{u}_{xxx} + \xi^2 \bar{u}_{xxy}, & \phi_2^{xx} &= D_x^2 Q_2 + \xi^1 \bar{v}_{xxx} + \xi^2 \bar{v}_{xxy}, \\ \phi_1^{xy} &= D_x D_y Q_1 + \xi^1 \bar{u}_{xxy} + \xi^2 \bar{u}_{xyy}, & \phi_2^{xy} &= D_x D_y Q_2 + \xi^1 \bar{v}_{xxy} + \xi^2 \bar{v}_{xyy}, \\ \phi_1^{yy} &= D_y^2 Q_1 + \xi^1 \bar{u}_{xyy} + \xi^2 \bar{u}_{yyy}, & \phi_2^{yy} &= D_y^2 Q_2 + \xi^1 \bar{v}_{xyy} + \xi^2 \bar{v}_{yyy}, \\ \phi_1^{yx} &= D_x D_y Q_1 + \xi^1 \bar{u}_{xyy} + \xi^2 \bar{u}_{yyy}, & \phi_2^{yx} &= D_x D_y Q_2 + \xi^1 \bar{v}_{xyy} + \xi^2 \bar{v}_{yyy}, \\ \phi_1^{xx} &= D_x D_y Q_1 + \xi^1 \bar{u}_{xxy} + \xi^2 \bar{u}_{xyy}, & \phi_2^{xx} &= D_x D_y Q_2 + \xi^1 \bar{v}_{xxy} + \xi^2 \bar{v}_{xyy}, \end{aligned}$$

اکنون با جایگذاری این ضرایب در $\mathbf{v}^{(2)}$ و اثر آن روی دستگاه معادلات (۳۳.۳)

به دستگاه تعیین کننده زیر می‌رسیم،

$$\begin{aligned}\xi_y^1 &= 0, & \xi_{\bar{u}}^1 &= 0, & \xi_{\bar{v}}^1 &= 0, & \xi_{xx}^1 &= 0, & \xi_x^2 &= 0, \\ \xi_{\bar{u}}^2 &= 0, & \xi_{\bar{p}}^2 &= 0, & \xi_{\bar{v}}^2 &= 0, & \xi_{yy}^2 &= 0, & \phi_{1x} &= 0, \\ \phi_{1y} &= 0, & \phi_{1\bar{u}} &= 0, & \phi_{1\bar{v}} &= 0, & \phi_{1\bar{p}} &= 2, & \xi_x^1 &= 4\xi_y^2, \\ \xi_y^2 &= -\phi_3, & \phi_2 &= \bar{u}(\xi_x^1 - 2\xi_y^2).\end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق ضرایب v عبارتند از:

$$\begin{aligned}\xi^1 &= c_1 + c_4 x, & \xi^2 &= c_2 + c_5 y, & \phi_1 &= c_4 \bar{u} - 2c_5 \bar{u}, \\ \phi_2 &= -c_5 \bar{v}, & \phi_3 &= c_3 + 2c_4 \bar{p} - 4c_5 \bar{p}.\end{aligned}$$

بنابراین دستگاه (۳۳.۳)

یک جبرلی پنج-بعدی از تقارن‌ها با مولد زیر می‌پذیرد،

$$\begin{aligned}v_1 &= \partial_x, & v_2 &= \partial_y, & v_3 &= \partial_{\bar{p}}, \\ v_4 &= x\partial_x + \bar{u}\partial_{\bar{u}} + 2\bar{p}\partial_{\bar{p}}, & v_5 &= y\partial_y - 2\bar{u}\partial_{\bar{u}} - \bar{v}\partial_{\bar{v}} - \bar{p}\partial_{\bar{p}}.\end{aligned}$$

جدول لی زیر جبرلی ساختن تقارن‌های فوق را اثبات می‌کند.

[,]	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	۰	۰	۰	v_1	$-v_3$
v_2	۰	۰	۰	۰	v_2
v_3	۰	۰	۰	$2v_3$	$-4v_3$
v_4	$-v_1$	۰	$-2v_3$	۰	۰
v_5	v_3	$-v_2$	$4v_3$	۰	۰

مثال ۵.۱۱.۳ (معادله بورن-اینفلد). در فیزیک، نظریه BI^۲ یک تعمیم عمومی غیرخطی از الکترومغناطیس است. این مدل به افتخار دو فیزیکدان بورن و اینفلد نامگذاری شده است. در فیزیک، این یک مثال ویژه از الکترودینامیک غیرخطی است. الکترودینامیک بورن-اینفلد دارای یک سری از ویژگی‌های فیزیکی مهم است، اول اینکه انرژی کامل میدان الکترومغناطیس متناهی است و میدان الکتریکی در هرجایی منظم است. دوم، ویژگی‌های فیزیکی ای مربوط به انتشار موج را نشان می‌دهد. یک نظریه میدان که این ویژگی‌ها را داشته باشد معمولاً کاملاً نمایی یا بورن-ایفلد نامیده می‌شود. روش تبدیلات غیرخطی یک ابزار قوی برای پیدا کردن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی است [۱۱]. بسیاری از معادلات PDE مهم در فیزیک غیرخطی هستند. تقارن‌های کلاسیک لی که معادلات PDE غیرخطی می‌پذیرند، برای به‌دست آوردن جواب‌های مشابه بسیار مفید است. برای به‌دست آوردن

^۲Born-Infeld

جوابهای معادله بورن-اینفلد، ابتدا باید میدانهای برداری متناظر با عمل گروه را به دست آوریم. می دانیم که معادله بورن-اینفلد به صورت زیر است:

$$\Delta_{BI}(u) := (1 - u_t^2)u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} - (1 + u_x^2)u_{tt} = 0, \quad (34.3)$$

که یک دستگاه PDE از مرتبه دوم است که u توابعی هموار از (x, t) است. این معادله از دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته تشکیل شده است. میدان برداری متناظر با معادله (34.3) به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$v = \xi_1(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (35.3)$$

که امتداد مرتبه دوم آن به صورت زیر است:

$$v^2 = v + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \quad (36.3)$$

و ضرایب به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x(\phi - \xi_1 u_x - \xi_2 u_t) + \xi_1 u_{xx} + \xi_2 u_{xt}, \\ \phi^t &= D_t(\phi - \xi_1 u_x - \xi_2 u_t) + \xi_1 u_{tx} + \xi_2 u_{tt}, \\ \phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi_1 u_x - \xi_2 u_t) + \xi_1 u_{xxx} + \xi_2 u_{xtx}, \\ \phi^{xt} &= D_x D_t(\phi - \xi_1 u_x - \xi_2 u_t) + \xi_1 u_{xxt} + \xi_2 u_{xtt}, \\ \phi^{tt} &= D_t^2(\phi - \xi_1 u_x - \xi_2 u_t) + \xi_1 u_{xtt} + \xi_2 u_{ttt}, \end{aligned} \quad (37.3)$$

و D_x و D_t عملگرهای مشتق کامل هستند که به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \dots, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots. \end{aligned} \quad (38.3)$$

با اثر دادن امتداد دوم میدان برداری v روی معادله (34.3) به معادله زیر می رسم:

$$\begin{aligned} &\phi^x(2u_t u_{xt} - 2u_x u_{tt}) + \phi^t(2u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt}) + \phi^{xx}(1 - u_t^2) \\ &+ \phi^{xt}(2u_x u_t) + \phi^{tt}(-1 - u_x^2) = 0, \end{aligned} \quad (39.3)$$

با جایگذاری ضرایب $\phi^x, \phi^t, \dots$ در معادله (39.3) و ساده کردن معادله و مساوی قرار دادن ضرایب تک جمله ای های $u, u_x, u_t, \dots$ به دستگاه های زیر می رسم:

$$\begin{aligned} \xi_{xx}^2 &= 0, \quad \xi_{xu}^2 = 0, \quad \xi_{tt}^2 = 0, \quad \xi_{uu}^2 = 0, \quad \xi_x^1 = \xi_t^2, \\ \xi_t^1 &= \xi_x^2, \quad \xi_u^1 = -\phi_x, \quad \xi_t^2 = \phi_u, \quad \xi_u^2 = \phi_t, \quad \xi_{tu}^2 = -\phi_{xx}. \end{aligned} \quad (40.3)$$

با حل دستگاه معادلات (40.3)، ضرایب میدان برداری v به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 + c_4 t - c_5 u + c_7 x, \\ \xi_2 &= c_2 + c_4 x + c_6 u + c_7 t, \\ \phi &= c_3 + c_5 x + c_6 t + c_7 t, \end{aligned} \quad (41.3)$$

که $c_1, c_2, \dots, c_7$ ثابت‌های دلخواهی هستند. بنابراین جبرلی G معادله (۳۴.۳) توسط میدان‌های برداری زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_x, & v_2 &= \partial_t, & v_3 &= \partial_u, \\ v_4 &= t\partial_x + x\partial_t, & v_5 &= -u\partial_x + x\partial_u, & v_6 &= u\partial_t + t\partial_u, \\ v_7 &= x\partial_x + t\partial_t + u\partial_u, \end{aligned} \quad (42.3)$$

که v_1, v_2, v_3 انتقال روی x, t, u هستند، همچنین میدان برداری v_5 دوران روی x و u است و میدان برداری v_7 تجانس روی x و t است. رابطه بین این میدان‌های برداری در جدول زیر آمده است، که درایه‌ی در ردیف i و ستون j را با $[v_i, v_j]$ نمایش می‌دهیم.

$[,]$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	۰	۰	۰	v_3	v_3	۰	v_1
v_2	۰	۰	۰	v_1	۰	v_3	v_2
v_3	۰	۰	۰	۰	$-v_1$	v_2	v_3
v_4	$-v_2$	$-v_1$	۰	۰	v_6	v_5	۰
v_5	$-v_3$	۰	v_1	$-v_6$	۰	v_4	۰
v_6	۰	$-v_3$	$-v_2$	$-v_5$	$-v_4$	۰	۰
v_7	$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	۰	۰	۰	۰

که ε یک عدد حقیقی است. برای مثال اگر $u = c$ به جواب ثابت معادله (۳۴.۳) باشد آن‌گاه جواب‌های نابديهی مانند

$$\begin{aligned} u &= \cos \varepsilon + (t \sin \varepsilon + x \cos \varepsilon) \sin \varepsilon, \\ u &= \cosh \varepsilon + (t \cosh \varepsilon - x \sinh \varepsilon) \sinh \varepsilon. \end{aligned}$$

دارند. در اینجا ما می‌توانیم گروه تقارن عمومی با ترکیب خطی میدان‌های برداری را به صورت $c_1 v_1, \dots, c_7 v_7$ به دست آورد. همچنین در حالت خاص اگر g عضوی از گروه تقارن در همسایگی عضو همانی باشد آن‌گاه آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g = \exp(\varepsilon_7 v_7) \circ \dots \circ \exp(\varepsilon_1 v_1).$$

مثال ۶.۱۱.۳. معادله دسته-ویتهم^۳ مدلی است برای بیان انحرافات امواج کوتاه در الاستیک‌های فشرده در [۲۳] آمده است که عبارت است از:

$$u_{xt} = \gamma u u_{xx} + u_x^2, \quad (43.3)$$

^۳Whitham-type

برای یافتن تقارن‌های این معادله، میدان برداری v متناظر با معادله (۴۳.۳) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (44.3)$$

که امتداد مرتبه دوم آن به صورت زیر است:

$$v^2 = v + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \quad (45.3)$$

که ضرایب $\phi^x, \dots, \phi^{xt}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xx} + \eta u_{xt}, \\ \phi^t &= D_t(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{tx} + \eta u_{tt}, \\ \phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xxx} + \eta u_{xtx}, \\ \phi^{xt} &= D_x D_t(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xxt} + \eta u_{xtt}, \\ \phi^{tt} &= D_t^2(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xtt} + \eta u_{ttt}, \end{aligned} \quad (46.3)$$

که D_x و D_t عملگرهای مشتق کامل هستند. با تاثیر دادن امتداد مرتبه دوم روی معادله (۴۳.۳) داریم:

$$\phi^{xt} - 2\phi u_{xx} - 2u\phi^{xx} - 2u_x\phi^x = 0, \quad (47.3)$$

با جایگذاری ضرایب $\phi^x, \phi^t, \dots$ در معادله (۴۷.۳) و ساده کردن معادله و مساوی قرار دادن ضرایب تک جمله‌ای‌های $u, u_x, u_t, \dots$ به دستگاه‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \xi_t &= -2\varphi + 2u\varphi_u, & \xi_u &= 0, & \xi_x &= \varphi_u + \eta_t, & \xi_{tu} &= 0, \\ \eta_x &= 0, & \eta_u &= 0, & \eta_{tt} &= -2\varphi_x, & \varphi_{uu} &= 0, \\ \varphi_{tx} &= 0, & \varphi_{xu} &= 0, & \varphi_{xx} &= 0, \end{aligned} \quad (48.3)$$

دستگاه فوق دارای جواب زیر با ضرایب ثابت و دلخواه $c_1, \dots, c_5$ و تابع مشتق‌پذیر $f(t)$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \xi &= (c_1 t + c_2 + c_4)x - 2f(t) + c_5, \\ \eta &= \frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3, \\ \varphi &= -\frac{1}{2}c_1 x + c_4 u + f'(t), \end{aligned} \quad (49.3)$$

بنابراین تقارن‌های معادله (۴۳.۳) عبارت است از:

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_x, & v_2 &= \partial_t, \\ v_3 &= x\partial_x + t\partial_t, & v_4 &= x\partial_x + u\partial_u, \\ v_5 &= tx\partial_x + \frac{t^2}{2}\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_u, & v_6 &= f'(t)\partial_u - 2f(t)\partial_x, \end{aligned} \quad (50.3)$$

گروه‌های یک-پارامتری G_i تولید شده توسط v_i به صورت زیر خواهد بود:

$$G_1 : (x, t, u) \mapsto (x + \varepsilon, t, u),$$

$$G_2 : (x, t, u) \mapsto (x, t + \varepsilon, u),$$

$$G_3 : (x, t, u) \mapsto (e^\varepsilon x, e^\varepsilon t, u),$$

$$G_4 : (x, t, u) \mapsto (e^\varepsilon x, t, e^\varepsilon u),$$

$$G_5 : (x, t, u) \mapsto \left(\frac{2x}{(t\varepsilon - 2)^2}, \frac{2t}{2 - t\varepsilon}, \frac{x\varepsilon + tu\varepsilon - 2u}{t\varepsilon - 2} \right),$$

$$G_6 : (x, t, u) \mapsto (x - 2f(t)\varepsilon, t, f'(t)\varepsilon + u).$$

فصل ۴

طبقه بندی ژئودزیک های سیاهچاله کر-نیومن

در این فصل ما به مطالعه یکی از کاربرد های هندسه دیفرانسیل در فیزیک نظری می پردازیم در ابتدا هندسه فضا-زمان^۱ کر-نیومن^۲ به عنوان یک ساختار هندسی از سیاهچاله باردار و چرخان، برای تحلیل خمیدگی ژئودزیک این سیاهچاله بررسی می کنیم. در پایان برای بدست آوردن جوابهای دستگاه معادلات ژئودزیک از روش تقارن نقطه ای گروه های لی پیروی می کنیم [۲، ۳، ۱۳، ۲۷].

۱.۴ متریک کر-نیومن

برای بررسی هندسه هر فضایی ابتدا باید متریک آن فضا را تعریف کنیم. فرض کنید یک جسم متقارن کروی چرخان و باردار داشته باشیم، هندسه فضا-زمان در مجاورت این جسم را توسط متریک توصیف می کنیم که فرمول این متریک وابسته به انتخاب مختصات آن است.

تعریف ۱.۱.۴. مختصات مورد استفاده برای هندسه کر-نیومن، مختصات بویلر و لیندکوئیست^۳ است که با مختصات (t, r, θ, ϕ) نوشته می شود [۲]. مختصات r, θ, ϕ بویلر و لیندکوئیست در دستگاه مختصات دکارتی (x, y, z) به صورت زیر است،

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, \\y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \theta, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

تعریف ۲.۱.۴. متریک کر-نیومن یک متریک ریمانی و با مختصات بویلر و لیندکوئیست است که هندسه فضا-زمان سیاهچاله کر-نیومن را شرح میدهد و به صورت زیر تعریف می شود [۱۴، ۲۶]،

^۱space-time

^۲Kerr-Newman

^۳Boyer and Lindquist coordinates

$$g = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (۱.۴)$$

بطوریکه $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$ ، $a \equiv S/M$ حرکت زاویه ای نسبت به واحد جرم است و همچنین M و Q به ترتیب جرم و بار الکترومغناطیسی مربوط به آن است. با توجه به اینکه سیاهچاله کر-نیومن افق رویداد دارد بنابراین این سیاهچاله توصیف می شود اگر و تنها اگر $M^2 \geq Q^2 + a^2$.

با توجه به فرمول متریک کر-نیومن، ضرایب متریک به صورت زیر به دست می آیند،

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \rho^{-2} [a^2 \sin^2 \theta - \Delta], \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta}, \\ g_{\phi\phi} &= \rho^{-2} (\sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \cos^2 \theta), \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2, \\ g_{\phi t} &= \rho^{-2} [2a(r^2 + a^2 + \Delta) \sin^2 \theta], \end{aligned}$$

بنابراین تانسور ضرایب متریک ریمانی g به شکل زیر است،

$$\begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\phi} \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{\phi t} & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}.$$

۲.۴ ژئودزیک های هندسه کر-نیومن

در فیزیک، کوتاه ترین مسیری که یک ذره آزاد طی می کند ژئودزیک نام دارد، در فضا-زمان تخت ژئودزیکها خط مستقیم هستند ولی در فضا-زمان خمیده باید ژئودزیکها را با استفاده از روشهای شناخته شده بدست بیاوریم [۲۷] که بتوانیم به مطالعه آنها بپردازیم زیرا برای بررسی های مختلف در زمینه کیهان شناسی مانند حرکت نور در اطراف جسم بسیار سنگین، نیازمند مطالعه ژئودزیک آن هستیم. و یا به عنوان یک مثال مشخص، سیاهچاله ای به جرم M و بار Q که ممکن است چرخش هم داشته باشد را در نظر می گیریم و ژئودزیکهای ممکن را دسته بندی می کنیم، به این ترتیب اطلاعات مهمی در مورد مسیر حرکت ذره در این گونه موارد را به ما می دهد [۲۶، ۳، ۱۳].

با توجه به متریک کر-نیومن و ضرایب متریک، کریستوفل ها را بدست می آوریم،

$$\begin{aligned}\Gamma_{t\phi}^r &= -\frac{\Delta}{r\rho} \left(\frac{(\gamma a c r^2 + a^2 + \Delta) \sin^2 \theta}{\rho^2} \right), \\ \Gamma_{t\phi}^\theta &= -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{(\gamma a (r^2 + a^2 + \Delta) \sin^2 \theta)}{\rho^2} \right), \\ \Gamma_{t\phi}^t &= 0, \\ \Gamma_{t\phi}^\phi &= 0, \\ &\vdots\end{aligned}\quad (2.4)$$

با استفاده از فرمول ژئودزیک، ژئودزیک های متریک کر-نیومن عبارتند از،

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \ddot{r}(s) - \frac{\Delta r(\gamma \alpha^2 + 1) \sin^2 \theta(s) \dot{\phi}(s)}{\rho^2} = 0, \\ \mathbf{R}_2 &= \ddot{\phi}(s) - \gamma[\Delta(-\alpha^2 - \rho^2 + \Delta) \alpha c \cos \theta(s) \rho^2 \dot{t}(s) \dot{\theta}(s)] \\ &\quad [-\lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 - \lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \alpha^2 + r^2 \alpha^2 - \Delta r^2 \\ &\quad + \Delta^2 \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \gamma \Delta \alpha^2 - \gamma \alpha^2 \rho^4 - \lambda \alpha^2 \rho^2 - \gamma \alpha^2 \rho^2 + \gamma \alpha^2 r^2 - \Delta \alpha^2 \cos^2 \theta(s) \\ &\quad - \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^4 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^2 - \gamma \Delta^2 \alpha^2 \rho^4 - \gamma \Delta \alpha^2 r^2 \\ &\quad + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \lambda \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 - \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 \\ &\quad + \gamma \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2] \cdot \sin \theta(s)]^{-1} - \gamma[r(\gamma \alpha^2 + 1)(\alpha^2 \cos^2 \theta(s) - \alpha^2 + \Delta \dot{r}(s) \dot{\phi}(s))] \\ &\quad [-\lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 - \lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \alpha^2 + r^2 \alpha^2 - \Delta r^2 + \Delta^2 \alpha^2 \\ &\quad - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \gamma \Delta \alpha^2 - \gamma \alpha^2 \rho^4 - \lambda \alpha^2 \rho^2 - \gamma \alpha^2 \rho^2 + \gamma \alpha^2 r^2 - \Delta \alpha^2 \cos^2 \theta(s) - \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \\ &\quad - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^4 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^2 - \gamma \Delta^2 \alpha^2 \rho^4 - \gamma \Delta \alpha^2 r^2 + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 \\ &\quad + \lambda \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 - \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \gamma \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2]^{-1} \\ &\quad + \gamma[\cos \theta(s)(-\lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 - \lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 \\ &\quad + \alpha^2 + r^2 \alpha^2 - \Delta r^2 + \gamma \Delta^2 \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \gamma \Delta \alpha^2 - \gamma \alpha^2 \rho^4 - \lambda \alpha^2 \rho^2 \\ &\quad - \gamma \alpha^2 \rho^2 + \gamma \alpha^2 r^2 - \gamma \Delta \alpha^2 \cos^2 \theta(s) - \gamma \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^4 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^2 \\ &\quad - \gamma \Delta^2 \alpha^2 \rho^4 - \gamma \Delta \alpha^2 r^2 + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \lambda \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 \\ &\quad + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 - \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \gamma \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \dot{\theta}(s) \dot{\phi}(s)] \\ &\quad [(-\lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 - \lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \alpha^2 \\ &\quad + r^2 \alpha^2 - \Delta r^2 + \gamma \Delta^2 \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \gamma \Delta \alpha^2 - \gamma \alpha^2 \rho^4 - \lambda \alpha^2 \rho^2 - \gamma \alpha^2 \rho^2 + \gamma \alpha^2 r^2 \\ &\quad - \Delta \alpha^2 \cos^2 \theta(s) - \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^4 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^2 - \gamma \Delta^2 \alpha^2 \rho^4 - \gamma \Delta \alpha^2 r^2 \\ &\quad + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \lambda \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2] \\ &\quad + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 - \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \gamma \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \sin \theta(s)]^{-1} = 0, \\ \mathbf{R}_3 &= \ddot{t}(s) - \gamma[\alpha^2 \sin \theta(s) \cos \theta(s)(\gamma \alpha^2 \rho^4 + \lambda \alpha^2 \rho^2 + \gamma \rho^2 - \lambda \Delta \alpha^2 \rho^4 - \lambda \Delta \rho^2 \\ &\quad + \gamma \Delta^2 \rho^4 - \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \alpha^2 - \gamma r^2 \alpha^2 + \Delta \alpha^2 - r^2) \dot{t}(s) \dot{\theta}(s)] [-\lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 \\ &\quad - \lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \alpha^2 + r^2 \alpha^2 - \Delta r^2 + \gamma \Delta^2 \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \gamma \Delta \alpha^2 \\ &\quad - \gamma \alpha^2 \rho^4 - \lambda \alpha^2 \rho^2 - \gamma \alpha^2 \rho^2 + \gamma \alpha^2 r^2 - \Delta \alpha^2 \cos^2 \theta(s) - \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 \\ &\quad + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^4 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^2 - \gamma \Delta^2 \alpha^2 \rho^4 - \gamma \Delta \alpha^2 r^2 + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \lambda \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 \\ &\quad + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 - \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \gamma \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2]^{-1} \\ &\quad - \gamma[(-\alpha^2 - \rho^2 + \Delta) \alpha \rho^2 r(\gamma \alpha^2 + 1) \sin^2 \theta(s) \dot{r}(s) \dot{\phi}(s)] \\ &\quad [c(-\lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 - \lambda \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \gamma \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4 + \alpha^2 + r^2 \alpha^2 - \Delta r^2 + \gamma \Delta^2 \alpha^2 \\ &\quad - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \gamma \Delta \alpha^2 - \gamma \alpha^2 \rho^4 - \lambda \alpha^2 \rho^2 - \gamma \alpha^2 \rho^2 + \gamma \alpha^2 r^2 - \Delta \alpha^2 \cos^2 \theta(s) - \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \\ &\quad - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^4 + \lambda \Delta \alpha^2 \rho^2 - \gamma \Delta^2 \alpha^2 \rho^4 - \gamma \Delta \alpha^2 r^2 + \gamma \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^{1^{\circ}} + \Upsilon \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^{1^2} - \Upsilon \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \Upsilon \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2]^{-1} + \Upsilon [\sin^2 \theta(s) \\
 & \cos \theta(s) \Delta \alpha^2 (-\alpha^2 - \rho^2 + \Delta) \rho^2 \dot{\theta}(s) \dot{\phi}(s)] [c(-\Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 - \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^{1^{\circ}} \\
 & + \Upsilon \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \alpha^2 + r^2 \alpha^2 - \Delta r^2 + \Delta^2 \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \Upsilon \Delta \alpha^2 - \Upsilon \alpha^2 \rho^2 - \Delta \alpha^2 \rho^{1^{\circ}} \\
 & - \Upsilon \alpha^2 \rho^{1^2} + \Upsilon \alpha^2 r^2 - \Delta \alpha^2 \cos^2 \theta(s) - \Delta^2 \cos^2 \theta(s) \alpha^2 - \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \Delta \alpha^2 \rho^2 + \Delta \Delta \alpha^2 \rho^{1^{\circ}} \\
 & - \Upsilon \Delta^2 \alpha^2 \rho^2 - \Upsilon \Delta \alpha^2 r^2 + \Upsilon \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^2 + \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^{1^{\circ}} \\
 & + \Upsilon \cos^2 \theta(s) \alpha^2 \rho^{1^2} - \Upsilon \cos^2 \theta(s) \alpha^2 r^2 + \Upsilon \Delta \cos^2 \theta(s) \alpha^2]^{-1} = 0, \\
 R_{\Upsilon} = & \ddot{\theta}(s) - \frac{c^2 \alpha^2 \sin \theta(s) \cos \theta(s) \dot{t}(s)^2}{\rho^2} - \Upsilon c(-\alpha^2 - \rho^2 + \Delta) \alpha \sin \theta(s) \cos \theta(s) \dot{t}(s) \dot{\phi}(s) \\
 & - [\sin \theta(s) \cos \theta(s) (\Upsilon \Delta \cos^2 \theta \alpha^2 + \alpha^2 + \Upsilon r^2 \alpha^2 - \Upsilon \Delta \alpha^2 + r^2 \dot{\phi}(s)^2) [\rho^2]^{-1}] = 0.
 \end{aligned}$$

دستگاه معادلات ژئودزیک هندسه کر-نیومن، یک دستگاه ۴-معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه دو است که روی فضای کامل $E \simeq R \times R^4$ و با مختصات جت $J^2(E) = (s, t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \ddot{t}, \ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi})$ با مختصات جت (s, t, r, θ, ϕ) وابسته است. بنابراین برای بدست آوردن جوابهای دستگاه به روش تقارن های نقطه ای گروه های لی، ابتدا میدان برداری مختصات فضا-زمان (s, t, r, θ, ϕ) را تعریف می کنیم،

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} = & \xi(s, t, r, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial s} + \eta_1(s, t, r, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial t} + \eta_2(s, t, r, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} \\
 & + \eta_3(s, t, r, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta_4(s, t, r, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi},
 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه دستگاه معادلات ژئودزیک از مرتبه دو است بنابراین میدان برداری را تا مرتبه دو امتداد می دهیم،

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^{(2)} = & \mathbf{v} + \eta_1^s \frac{\partial}{\partial t_s} + \eta_2^s \frac{\partial}{\partial r_s} + \eta_3^s \frac{\partial}{\partial \theta_s} + \eta_4^s \frac{\partial}{\partial \phi_s} \\
 & + \eta_1^{ss} \frac{\partial}{\partial t_{ss}} + \eta_2^{ss} \frac{\partial}{\partial r_{ss}} + \eta_3^{ss} \frac{\partial}{\partial \theta_{ss}} + \eta_4^{ss} \frac{\partial}{\partial \phi_{ss}},
 \end{aligned}$$

شرط ناوردایی دستگاه معادلات دیفرانسیل را برای دستگاه معادلات ژئودزیک کر-نیومن بیان می کنیم بنابراین $\mathbf{v}$ یک تقارن برای دستگاه (۳.۴) است هرگاه،

$$\mathbf{v}^{(2)}(\Delta) = 0, \quad \text{هرگاه} \quad \Delta = 0.$$

مشتق کامل نسبت به متغیر مستقل s را تعریف می کنیم،

$$\begin{aligned}
 D_s = & \frac{\partial}{\partial s} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \\
 & + \ddot{t} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + \ddot{r} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} + \ddot{\theta} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} + \ddot{\phi} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}},
 \end{aligned}$$

و همچنین مشخصه های میدان را نسبت به متغیر های وابسته را بدست می آوریم،

$$Q_t = \eta_{\lambda} - \xi t_s, \quad Q_r = \eta_{\gamma} - \xi r_s, \quad Q_{\theta} = \eta_{\gamma} - \xi \theta_s, \quad Q_{\phi} = \eta_{\gamma} - \xi \phi_s,$$

بنابراین ضرایب امتداد به این شکل تعریف می شوند،

$$\begin{aligned} \eta_{\lambda}^s &= D_s Q_t + \xi t_{ss}, & \eta_{\lambda}^{ss} &= D_s^{\gamma} Q_t + \xi t_{sss}, \\ \eta_{\gamma}^s &= D_s Q_r + \xi r_{ss}, & \eta_{\gamma}^{ss} &= D_s^{\gamma} Q_r + \xi r_{sss}, \\ \eta_{\gamma}^s &= D_s Q_{\theta} + \xi \theta_{ss}, & \eta_{\gamma}^{ss} &= D_s^{\gamma} Q_{\theta} + \xi \theta_{sss}, \\ \eta_{\gamma}^s &= D_s Q_{\phi} + \xi \phi_{ss}, & \eta_{\gamma}^{ss} &= D_s^{\gamma} Q_{\phi} + \xi \phi_{sss}, \end{aligned}$$

پس ضرایب امتداد میدان برداری برای $\eta_{\lambda}^s, \eta_{\gamma}^s, \dots, \eta_{\gamma}^{ss}$ بدست می آوریم،

$$\begin{aligned} \eta_{\lambda}^s &= \eta_{\lambda s} + t_s \eta_{\lambda t} + r_s \eta_{\lambda r} + \theta_s \eta_{\lambda \theta} + \phi_s \eta_{\lambda \phi} \\ &\quad - t_s \xi_s - t_s t_s \xi_t - r_s t_s \xi_r - \theta_s t_s \xi_{\theta} - \phi_s t_s \xi_{\phi}, \\ &\vdots \\ \eta_{\gamma}^{ss} &= \eta_{\lambda ss} + t_s \eta_{\lambda st} + r_s \eta_{\lambda sr} + \theta_s \eta_{\lambda s\theta} + \phi_s \eta_{\lambda s\phi} \\ &\quad + t_s \eta_{\lambda st} + t_s t_s \eta_{\lambda tt} + t_s r_s \eta_{\lambda tr} + t_s \theta_s \eta_{\lambda t\theta} + t_s \phi_s \eta_{\lambda t\phi} + t_{ss} \eta_{\lambda t} \\ &\quad + r_s \eta_{\lambda sr} + r_s t_s \eta_{\lambda rt} + r_s r_s \eta_{\lambda rr} + r_s \theta_s \eta_{\lambda r\theta} + r_s \phi_s \eta_{\lambda r\phi} + r_{ss} \eta_{\lambda r} \\ &\quad + \theta_s \eta_{\lambda s\theta} + \theta_s t_s \eta_{\lambda \theta t} + \theta_s r_s \eta_{\lambda \theta r} + \theta_s \theta_s \eta_{\lambda \theta \theta} + \theta_s \phi_s \eta_{\lambda \theta \phi} + \theta_{ss} \eta_{\lambda \theta} \\ &\quad + \phi_s \eta_{\lambda s\phi} + \phi_s t_s \eta_{\lambda \phi t} + \phi_s r_s \eta_{\lambda \phi r} + \phi_s \theta_s \eta_{\lambda \phi \theta} + \phi_s \phi_s \eta_{\lambda \phi \phi} + \phi_{ss} \eta_{\lambda \phi} \\ &\quad - \phi_s \xi_{ss} - \phi_s t_s \xi_{st} - \phi_s r_s \xi_{sr} - \phi_s \theta_s \xi_{s\theta} - \phi_s \phi_s \xi_{s\phi} - \phi_{ss} \xi_s \\ &\quad - t_s \phi_s \xi_{ts} - t_s \phi_s t_s \xi_{tt} - t_s \phi_s r_s \xi_{tr} - t_s \phi_s \theta_s \xi_{t\theta} - t_s \phi_s \phi_s \xi_{t\phi} - t_{ss} \phi_s \xi_t \\ &\quad - t_{ss} \phi_s \xi_t - r_s \phi_s \xi_{rs} - r_s \phi_s t_s \xi_{rt} - r_s \phi_s r_s \xi_{rr} - r_s \phi_s \theta_s \xi_{r\theta} - r_s \phi_s \phi_s \xi_{r\phi} \\ &\quad - r_s \phi_{ss} \xi_r - r_{ss} \phi_s \xi_r - \theta_s \phi_s \xi_{\theta s} - \theta_s \phi_s t_s \xi_{\theta t} - \theta_s \phi_s r_s \xi_{\theta r} - \theta_s \phi_s \theta_s \xi_{\theta \theta} \\ &\quad - \theta_s \phi_s \phi_s \xi_{\theta \phi} - \theta_s \phi_{ss} \xi_{\theta} - \theta_{ss} \phi_s \xi_{\theta} - \phi_s \phi_s \xi_{\phi s} - \phi_s \phi_s t_s \xi_{\phi t} - \phi_s \phi_s r_s \xi_{\phi r} \\ &\quad - \phi_s \phi_s \phi_s \xi_{\phi \phi} - \phi_s \phi_{ss} \xi_{\phi} - \phi_{ss} \phi_s \xi_{\phi} - \phi_s \phi_s \theta_s \xi_{\phi \theta}, \end{aligned}$$

جبر لی شش-بعدی تقارن های نقطه ای دستگاه، توسط میدان های برداری زیر بدست می آیند،

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\lambda} &= \frac{\partial}{\partial s}, & \mathbf{v}_{\gamma} &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_{\gamma} &= \frac{\partial}{\partial \phi}, & \mathbf{v}_{\gamma} &= s \frac{\partial}{\partial s}, \\ \mathbf{v}_{\delta} &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, & \mathbf{v}_{\epsilon} &= -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

بنابراین جدول جابجاگرهای جبر لی $\mathcal{G}$ که توسط میدانهای برداری $v_1, \dots, v_6$ تولید می شوند در جدول زیر آمده است،

$[v_i, v_j]$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	0	v_1	0	0	0
v_2	0	0	0	0	0	0
v_3	$-v_1$	0	0	0	$-v_6$	v_5
v_4	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	v_6	0	0	$-v_3$
v_6	0	0	$-v_5$	0	v_3	0

۳.۴ تحلیل جوابهای دستگاه معادلات ژئودزیک

محاسبات نشان می دهند که اگر $\gamma(s) = (t(s), r(s), \theta(s), \phi(s))$ خم ژئودزیک متریک (۱.۴) باشد بطوریکه:

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s + \varepsilon), r(s + \varepsilon), \theta(s + \varepsilon), \phi(s + \varepsilon)), \quad (3.4)$$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s) + \varepsilon, r(s), \theta(s), \phi(s)), \quad (4.4)$$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s), r(s), \theta(s), \phi(s) + \varepsilon), \quad (5.4)$$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(e^\varepsilon), r(e^\varepsilon), \theta(e^\varepsilon), \phi(e^\varepsilon)), \quad (6.4)$$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s), r(s), \varepsilon \sin \phi(s), \arcsin(\varepsilon \theta(s)) + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2 \theta^2(s)} \cot \theta(s)), \quad (7.4)$$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s), r(s), -\cos \phi(s), \arccos(-\varepsilon \theta(s)) + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2 \phi^2(s)} \cot \theta(s)), \quad (8.4)$$

بنابراین، معادلات (۴.۴)–(۹.۴) شارهای میدانهای برداری $\{v_1, \dots, v_6\}$ هستند. معادلات (۷.۴) و (۴.۴)، ناوردایی دستگاه را نسبت به زمان، شعاع، زاویه طول و عرض جغرافیایی را نشان می دهد، معادلات (۶.۴) و (۵.۴) به ترتیب ناوردایی دستگاه را نسبت به زاویه عرض جغرافیایی و زمان را نشان می دهد و معادلات (۸.۴) و (۹.۴)، گروه موضعی تبدیلات را نشان می دهد.

همانطور که در فصل سوم توضیح داده شد، میدانیم که ارزیابی شار میدانهای برداری در $\mathcal{G}$ ، ما را در تعریف نگاشت نمایی $\exp: \mathcal{G} \rightarrow G$ یاری می کند. از آنجایی که $\exp(\circ) = e$ و $d\exp(\circ) = I_d$ ، بنابراین نگاشت نمایی یک دیفئومورفیسم موضعی در یک همسایگی عضو همانی $\circ \in \mathcal{G}$ تعریف می کند. بنابراین همه گروههای لی، جبرهای لی یکسان دارد و این یکسان بودن آن را در همسایگی عضو

همانی نشان می دهد. تنها در خواص توپولوژیکی فراگیر متفاوت هستند، در حقیقت نیازی نیست به طور فراگیر نگاشت نمایی یک به یک و پوشا باشد اگر چه که اگر یک گروه لی همبند باشد به وسیله $\exp$ پی در پی می توان آن را بدست آورد. اغلب گروه یک-پارامتری تقارنهای از ترکیب خطی $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_6 \mathbf{v}_6$ میدانهای برداری داده شده بدست می آید. فرمول صریح تبدیلات بسیار پیچیده است، به طور ویژه اگر g در نزدیکی عضو همانی باشد میتوان به فرم منحصر بفرد زیر نشان داد،

$$g = \exp(\varepsilon_6 \mathbf{v}_6) \circ \dots \circ \exp(\varepsilon_1 \mathbf{v}_1). \quad (9.4)$$

برای مثال اگر $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = 0$ باشد بنابراین عمل گروه لی عمومی به صورت زیر است:

$$g = \left(t + \varepsilon_2, r, \varepsilon_5 - \cos \left(\arcsin(\varepsilon_5 \theta) + \varepsilon_5 \sqrt{1 - \varepsilon_5^2 \theta^2} \cot \theta \right), \sqrt{1 - \varepsilon_5^2 \theta^2} \sin^2 \phi + \varepsilon_6 \sqrt{1 - \varepsilon_6 \left[\arcsin(\varepsilon_5 \theta) + \varepsilon_5 \sqrt{1 - \varepsilon_5^2 \theta^2} \cot \theta \right]^2} \cot(\varepsilon_5 \sin \phi) + \varepsilon_3 \right).$$

۴.۴ محاسبه میدان الکترومغناطیسی سیاهچاله کر-نیومن

بررسی و تحلیل میدان الکترومغناطیسی سیاهچاله چرخان و باردار درک ما را نسبت به سیاه چاله و خواص آن را ارتقا میدهد. برای محاسبه میدان الکترومغناطیسی سیاهچاله کر-نیومن، تانسور میدان الکترومغناطیسی را معرفی می کنیم و سپس به کمک پتانسیل های متریک کر-نیومن، معادله میدان الکترومغناطیسی را تعریف می کنیم و سرانجام این معادله را حل می کنیم [۳، ۸].

میدان الکترومغناطیسی $F_{\mu\nu}$ ، یک میدان ۲-تانسوری کواریان است که، میدان برداری الکتریکی E_i و میدان برداری مغناطیسی B_i ، اجزای تشکیل دهنده آن است.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}. \quad (10.4)$$

بطوریکه $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ و $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ به ترتیب میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی هستند. تانسور میدان الکترومغناطیسی F یک تانسور پاد متقارن از رتبه دو است که با ضرب تانسوری به صورت زیر تعریف می شود،

$$\mathbf{F} = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta,$$

بنابراین با توجه به $(dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha)$ ، یک ۲-فرم دیفرانسیلی است که به صورت زیر نیز میتوان نوشت،

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

و سرانجام فرمول عمومی $\mathbf{F}$ را به این صورت بدست می آوریم:

$$\mathbf{F} = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy.$$

با توجه به متریک کرنیومن (۱.۴)، پتانسیل های این متریک را بدست می آوریم،

$$A_t = \rho^{-2} [Qr - \rho a \cos \theta], \quad A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \\ A_\phi = \rho^{-2} [\rho(r^2 + a^2) \cos \theta - Qar \sin^2 \theta].$$

بنابراین میدان الکترومغناطیسی ($F_{\alpha\beta}$) با توجه به پتانسیل ها به صورت زیر تعریف می شود،

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha, \\ \nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho A_\rho, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\rho A_\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\alpha g_{\beta\rho} + \partial_\beta g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}),$$

با استفاده از پتانسیل ها و همچنین مقادیر کریستوفل ها (۲.۴)، میدان الکترومغناطیسی کر-نیومن را طبق روابط زیر بدست می آوریم:

$$\mathbf{F} = F_{t\phi} dx^t \wedge dx^\phi \quad (11.4)$$

$$F_{t\phi} = \partial_t A_\phi - \Gamma_{t\phi}^\lambda A_\lambda - \partial_\phi A_t + \Gamma_{\phi t}^\lambda A_\lambda, \quad (12.4)$$

بنابراین برای $\lambda = t, r, \theta, \phi$ داریم،

$$\partial_\phi A_\theta = 0, \\ \partial_\theta A_\phi = -2a^2 \cos \theta \sin \theta [\rho(r^2 + a^2) \cos \theta - Qar \sin^2 \theta] \\ + \rho^{-2} [-\rho(r^2 + a^2) \sin \theta - 2Qar \sin \theta \cos \theta].$$

در نهایت میدان الکترومغناطیسی هندسه کر-نیومن به صورت ۲-فرم زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{\rho^2} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) dr \wedge [dt - a \sin^2 \theta d\phi + 2Q\rho^2 ar \cos \theta \sin \theta d\theta] \wedge [(r^2 + a^2) d\phi - a dt].$$

مراجع

- [1] W. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2nd Edition, Academic Press, Boston (1986).
- [2] R. H. Boyer and W. L. Richard, *Maximal analytic extension of the Kerr metric*, Journal of mathematical physics, 8 (1967) 265-281.
- [3] U. E. Bruchholz, *Geometry of space-time*, Progress in Physics, 4 (2009) 65-66.
- [4] G. W. Bluman, A. F. Cheviakov and S. C. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer, New York (2002).
- [5] G. W. Bluman and J. D. Cole, *Similarity Methods for Differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York (1974).
- [6] A. Cohen, *An Introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups, with Applications to the Solution of Differential Equations*, D. C. Heath and Co, New York (1911).
- [7] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Second Edition (1993).
- [8] I. Dymnikova, *Electromagnetic source for the Kerr-Newman geometry*, International Journal of Modern Physics D, 24 (2015) 8 pages.
- [9] S. R. Hejazi, *Contact geometry and symmetry analysis of differential equations*, Ph.D. Thesis Dissertation, Iran University of Science and Technology, Tehran (2011).
- [10] P. E. Hydon, *Symmetry Methods for Differential Equations A Beginner's Guide*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [11] N. H. Ibragimov, M. Torrisi and A. Valenti, *Preliminary Group Classification of Equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$* , Journal of Mathematical Physics, 32 (1991) 2988-2995.
- [12] N. H. Ibragimov, *Archives of ALGA*, ALGA Publications Karlskrona, Sweden (2012).
- [13] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green and Co, London (1926).

- [14] K. D. Kokkotas, *The geometry of the Kerr-Newman ergosurface*, General relativity and gravitation, 20 (1988) 829-839.
- [15] J. M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer (2005).
- [16] J. M. Lee, *Introduction to Smooth manifolds*, Springer (2001).
- [17] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and company, USA (1973).
- [18] A. Naderifard, *Tangent sphere bundles which are η -Einstein*, MSC Thesis, Arak University.
- [19] M. Nadjafikhah and F. Ahangari, *Symmetry analysis and conservation laws of the geodesic equations for the Reissner-Nordström de Sitter black hole with a global monopole*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17 (2012) 2350-2361.
- [20] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer (2000).
- [21] P. J. Olver, *Equivalence, invariance and symmetry*, Cambridge University Press (1995).
- [22] L. V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York (1982).
- [23] A. K. Prykarpatsky and M. M. Prytula, *The Gradient-Holonomic Integrability Analysis of a Whitham-Type Nonlineardynamical Model for a Relaxing Medium with Spatial Memory*, Nonlinearity, 19 (2006) 2115-2122.
- [24] H. Stephani, *Differential Equations, Their Solutions Using Symmetries*, Cambridge University Press, Cambridge New York (1989).
- [25] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [26] M. Visser, *The Kerr spacetime: A brief introduction*, arXiv preprint arXiv:0706.0622 (2007).
- [27] A. Zee, *Einstein Gravity in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (2013).

[۲۸] ب. بیدآباد، هندسه منیفلد ۲، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، چاپ اول، زمستان ۱۳۸۹.

[۲۹] م. نجفی خواه، ا. ر. فروغ، س. شاغولی، آشنایی با هندسه منیفلد، انتشارات دانشگاه شاهد، ۱۳۹۰.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

connection	اتصال
Affine connection	اتصال آفین
Bianchi connection	اتصال بیانچی
linear connection	اتصال خطی
Levi-Civita connection	اتصال لوی-چویتا
curvature	انحناء
prolongation	امتداد
immersion	ایمرژن
closure	بستار
tangent vector	بردار مماس
section	برش
dimension	بعد
basis	پایه
equation	تابع
fiber	تار
tensor	تانسور
degenerate	تباهیده
point transformation	تبدیل نقطه‌ای
symmetry of differential equation	تقارن معادلات دیفرانسیل
image	تصویر
correspondence	تناظر
discrete topology	توپولوژی گسسته
distribution	توزیع
coordinate chart	چارت مختصات
polynomial	چند جمله‌ای

motion	حرکت
integral curve	خم انتگرال
determinant	دترمینان
entry	درایه
dual	دوگان
diffeomorphism	دیفئومورفیسم
maximal rank	رتبه ماکسیمال
one-parameter subgroup	زیر گروه یک-پارامتری
regular submanifold	زیر منیفلد منظم
submersion	سابمرژن
metric compatibility	سازگاری با متریک
product	ضرب
multiplier	ضریب
action	عمل
infinitesimal group action	عمل گروه بی‌نهایت کوچک
topological space	فضای توپولوژیکی
total space	فضای کامل
jet space	فضای جت
tangent space	فضای مماس
Hausdorff space	فضای هاسدورف
closed subgroup theorem	قضیه زیر گروه بسته
complete	کامل
totally non-degenerate	کاملاً غیر تباهیده
equivalence class	کلاس هم ارزی
bundle	کلاف
vector bundle	کلاف برداری
dual bundle	کلاف دوگان
tangent bundle	کلاف مماسی
transformation group	گروه تبدیلات
rotation group	گروه متعامد
orthogonal group	گروه دوران
Lie group	گروه لی

lemma	لم
Riemannian metric	متریک ریمانی
dependent variable	متغیر مستقل
local coordinate	مختصات موضعی
level set	مجموعه تراز
partial differential equation	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
ordinary differential equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
determining equations	معادلات مشخصه
manifold	منیفلد
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
infinitesimal generator	مولد بی‌نهایت کوچک
vector field	میدان برداری
differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
exponential	نمایی
identity	همانی
connected	همبند
smooth	هموار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action	عمل
Affine connection	اتصال آفین
basis	پایه
Bianchi identity	اتحاد بیانچی
bracket	کروشه، براکت
bundle	کلاف
Cartesian	ضرب دکارتی
characteristic	مشخصه
closed subgroup theorem	قضیه زیرگروه بسته
coefficient	ضریب
combination	ترکیب
complete	کامل
connected	همبند
connection	اتصال
constant rank theorem	قضیه رتبه ثابت
coordinate chart	چارت مختصات
correspondence	تناظر
covariant	کواریان
covariant derivative	مشتق کواریان
cristoeffel	کریستوفل
curvature	انحناء
definiton	تعریف
degenerate	تباهیده
dependent variable	متغیر وابسته
derivation	مشتق‌گیری

determinant	دترمینان
determining equations	معادلات مشخصه
diffeomorphism	دیفئومورفیسم
differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
dimension	بعد
discrete topology	توپولوژی گسسته
distribution	توزیع
dual	دوگان
dual vector bundle	کلاف برداری دوگان
entry	درایه
equivalence class	کلاس هم ارزی
exponential	نمایه
equation	تابع
fiber	تار
graph of a function	نمودار تابع
Hausdorff space	فضای هاسدورف
identity	همانی
image	تصویر
immersion	ایمرژن
independent variable	متغیر مستقل
infinitesimal generator	مولد بی نهایت کوچک
infinitesimal group action	عمل گروه بی نهایت کوچک
initial condition	شرط آغازی
integral curve	خم انتگرال
inversion map	نگاشت وارون ساز
jet space	فضای جت
Leibniz' rule	قاعده لایبنیتز
lemma	لم
level set	مجموعه تراز
Levi-Civita connection	اتصال لوی-چویتا
Lie group	گروه لی
linear connection	اتصال خطی

local coordinate	مختصات موضعی
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
manifold	منیفلد
maximal rank	رتبه ماکسیمال
metric compatibility	سازگاری با متریک
moment energy	انرژی لحظه‌ای
motion	حرکت
multiplier	ضریب
one-parameter subgroup	زیرگروه یک-پارامتری
operator	عملگر
orbit	مدار
order	مرتبه
ordinary differential equation	معادلات دیفرانسیلی معمولی
orthogonal group	گروه متعامد
partial differential equation	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
point transformation	تبدیل نقطه‌ای
polynomial	چندجمله‌ای
product	ضرب
prolongation	امتداد
regular submanifold	زیر منیفلد منظم
Riemannian metric	متریک ریمانی
rotation group	گروه دوران
section	برش
submanifold	زیر منیفلد
submersion	سابمرژن
smooth	هموار
symmetry of differential equation	تقارن معادلات دیفرانسیل
symmetry	تقارن
tangent vector	بردار مماس
topological space	فضای توپولوژیکی
tangent space	فضای مماس
tangent bundle	کلاف مماسی

tensor	تانسور
total derivative	مشتق کامل
total space	فضای کامل
totally non-degenerate	کاملاً غیر تباهیده
transformation group	گروه تبدیلات
vector bundle	کلاف برداری
vector field	میدان برداری

نمایه

- معادله دسته-وיתהام، ۶۶
- ۶، اطلس
- امتداد دهی عمل گروه، ۳۵
- امتداد میدان برداری، ۳۵
- امتداددهی، ۳۳
- ایمرژن، ۱۳
- برش موضعی، ۱۱
- تابع G -ناوردا، ۲۴
- تار (فایبر)، ۱۵
- تبدیلات، ۳۱
- تقارن‌ها، ۳۵
- جبرلی، ۲۴
- خم هموار، ۱۱
- دستگاه معادلات دیفرانسیل، ۳۴
- دیفئومورفیسم، ۵
- رتبه ثابت، ۱۲
- زیر منیفلد ایمرژن، ۱۵
- زیر منیفلد باز، ۹
- زیر گروه لی بسته، ۲۱
- زیر گروه پایدار ساز، ۲۲
- زیر گروه یک-پارامتری، ۲۶
- زیرگروه لی، ۲۱
- سابمرژن، ۱۳
- شارهای قوانین پایستگی، ۵۲
- شمارای نوع دوم، ۵
- عمل متعدی، ۲۲
- عمل نیم‌منظم، ۲۲
- عمل گروه بینهایت کوچک، ۲۷
- فرم‌های دیفرانسیلی، ۱۷
- فضای مماسی، ۹
- فلو، ۲۷
- قانون پایستگی موضعی، ۵۲
- قضیه تابع معکوس در منیفلدها، ۱۳
- قضیه رتبه در منیفلدها، ۱۳
- مختصات اصلاح شده، ۲۹
- مدار، ۲۲
- مستقل تابعی، ۲۹
- مشتق جهتی، ۷
- مشتق پیشرو، ۵۰
- معادله بورن-اینفلد، ۵۹
- منحنی انتگرال ماکسیمال، ۲۷
- منیفلد، ۵
- موضعا آزاد، ۲۲
- موضعا اقلیدسی، ۵
- موضعا موثر، ۲۲
- ناتباهیده، ۵۰
- ناورداهای بی‌نهایت کوچک، ۲۹
- نگاشت نمایی، ۲۷
- هاسدورف، ۵
- هموار، ۵

وابسته تابعی، ۲۹

ژاکوبین، ۷

کروشه لی، ۱۲

کلاف برداری، ۱۶

کلاف مماسی، ۱۰

کنج فراگیر، ۱۶

کنج موضعی، ۱۶

گروه تبدیل، ۲۱

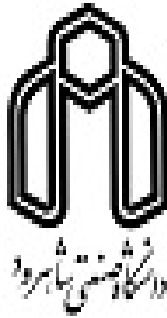
گروه لی، ۲۰

گروه یک-پارامتری، ۲۳

Aabstract

An application of differential geometry together with Lie group method in theoretical physics is considered. In this paper study the Kerr-Newman geometry as a geometric structure of a rotating charged black hole to classify all geodesic curves by using the set of Lie point symmetries of the associated system of differential equations.

Keywords : *Riemannian geometry, Lie groups, Point symmetry, Geodesics equations, Space-time coordinates, Kerr-Newman metric.*



Shahrood University of Technology

MSc Thesis in Differential Geometry

Classification of Kerr-Newman Black Hole's Geodesics

By: Sousan Abbaspour

Supervisor

Dr. Seyed Reza Hejazi

Advisor

Dr. Kazem Bitaghsir Fadafan

July 2016