



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی تک ارزی عملگر انتگرال برای زیر رده‌ای از توابع ستاره‌گون

حمیدہ سکوہی

استاد راهنما

دکتر احمد زیرہ

شہریور ۱۳۹۵

تقدیم به...

تقدیم به روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم و به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود، توانش رفت تا به توانایی برسم، مویش سپیدی گرفت تا روی سپید بمانم. او که فروغ نگاهش، گرمی کلامش و روشنایی رویش سرمایه زندگانی من است. در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مالا مال از عشق و محبت بر دستانش بوسه می‌زنم...

پاس‌گزاری...

نخست بر خود می‌دانم که پروردگار خود را شکر گویم به پاس لبخندهای محبت‌بار، دوستان یاری رسان، عشق و محبت و همه آنچه را که از رحمت او دریافت کرده‌ام و از او می‌خواهم که لیاقت تشکر از استاد را بر من ارزانی کند که

قدر استاد نکو دانستن، حیف! استاد به من یاد نداد،...

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر احمد زیره به خاطر راهنمایی‌های بی‌منتشان کمال تشکر را دارم،

و برای این استاد گرانقدر آرزوی سربلندی و روزگاری سبز دارم،

هم‌چنین لازم می‌دانم از خانواده و تمامی دوستانی که مرا در این امر مهم یاری نمودند، تقدیر و تشکر کنم.

حمیده شکوهی
شهریور ۱۳۹۵

تعمدنامه

اینجانب حمیده شکوهی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی تک ارزی عملکرد انتگرال برای زیررده‌ای از توابع ستاره‌گون، تحت راهنمایی دکتر احمد زیره متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
 - در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
 - مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
 - حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
 - حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
 - در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
 - در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.
- حمیده شکوهی
شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه برای توابع تحلیلی تعریف شده بر دیسک واحد، بعضی از عملگرهای انتگرالی را بر روی این توابع تعریف می‌کنیم. مطابق با لم الکساندر اگر تابع f محدب باشد، آنگاه $G(z) = \int_0^z \frac{f(u)}{u} du$ تابع ستاره‌گون است. همچنین عملگرهای تعمیم یافته‌ای از عملگر الکساندر را معرفی و شرایطی را بررسی می‌کنیم که طبق آن این عملگرها تک ارز باشند.

کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستاره‌گون، عملگر انتگرال

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول

۲. مقاله دوم

۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

۱	پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی	۱
۱	۱.۱ نمادگذاری و تعاریف	۱
۷	۲.۱ ردهی $\mathbb{S}^*$	۷
۹	۳.۱ ردهی C	۹
۱۳	۲ بررسی محک‌های تک ارزی برای عملگرهای انتگرال	۱۳
۱۳	۱.۲ عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$	۱۳
۱۴	۱.۱.۲ تک ارزی عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$	۱۴
۲۰	۲.۲ عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma, \beta}$	۲۰
۲۰	۱.۲.۲ تک ارزی عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma, \beta}$	۲۰
۲۴	۳.۲ عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$	۲۴
۲۵	۱.۳.۲ ستاره‌گون بودن عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$	۲۵
۲۸	۴.۲ عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f, g)$	۲۸
۳۷	۳ تک ارزی عملگر انتگرال برای توابع P ظرفیتی	۳۷
۳۷	۱.۳ ارتباط بین توابع p -ظرفیتی و توابع تک‌ارز	۳۷
۳۹	۱.۱.۳ عملگر انتگرال $\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p$	۳۹
۴۲	۲.۳ عملگر انتگرال T_γ	۴۲
۴۴	۳.۳ عملگر انتگرال $f_1, f_2, \dots, f_n$	۴۴
۵۱	مراجع	۵۱
۵۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۵۳

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز در فصل‌های آینده می‌باشد. مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم.

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند D در $\mathbb{C}$ ، یک میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ را در $z \in D$ تحلیلی گوئیم هرگاه در یک همسایگی z مشتق پذیر باشد.

تعریف ۳.۱.۱. تابع تحلیلی که یک به یک باشد را تک ارز می‌نامیم. بنابراین اگر f تابع تک ارز باشد، $f(z_1) = f(z_2)$ نتیجه می‌دهد $z_1 = z_2$. از نظر تحلیلی تابع تک ارز، مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی تابع تک ارز، خم‌های ساده را بر خم‌های ساده می‌نگارد.

مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت چگونگی ترکیب این خواص و خواص دیگر برای اثبات قضایایی که سرشت هندسی یا تحلیلی داشته باشند، انجام گرفته است. در ابتدا سیلورمن رده‌ی توابعی که در دیسک یک‌به‌یک باز، تحلیلی و تک ارز می‌باشند را رده‌ی $\mathbb{S}$ نامید و با شرح کاملی از زیررده‌های این رده به بررسی قضایای مربوط پرداخت.

تعریف ۴.۱.۱. (لم شوارتز). [۹] فرض کنیم $f(z)$ تابعی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M ، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = 0$ صفر مرتبه m تابع f باشد، در این صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m} |z|^m \quad (z \in U_R).$$

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^m} z^m$$

به‌طوری‌که در آن θ مقداری ثابت است.

تعریف ۵.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x, y)$ را که در میدان D تعریف شده است در D همساز گویند هرگاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام D در معادله زیر صادق باشند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است.

تعریف ۶.۱.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z| < 1$ تحلیلی و تک ارز می‌باشند و در شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (|z| < 1).$$

لم ۷.۱.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ ، آنگاه $g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in \mathbb{S}$.

ملاحظه ۸.۱.۱. به جای $\sqrt{f(z^2)}$ ، می‌نویسیم $z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)} = e^{\frac{1}{2} \log f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.

برهان. فرض کنید $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ لذا داریم:

$$g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z \sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots} \quad (1.1)$$

(شاخه‌ی اصلی $\sqrt{\cdot}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$ است. حال به اثبات تک ارزی می‌پردازیم.

اگر $g(z_1) = g(z_2)$ یعنی $z_1 \sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2 \sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در این صورت $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_1^2 = z_2^2$ ، یعنی $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_1 = z_2$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۹.۱.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ ، آنگاه $|a_2| \leq 2$. [۲۱]

مثال ۱.۱.۱.۱. (تابع کوئب^۱). در قضیه ۹.۱.۱، اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه

$$g(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \quad \text{لذا}$$

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \dots$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا $-\infty$ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۱.۱.۱.۱. (پوشش). اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و برای $|z| < 1$ که $f(z) \neq c$ ، $c \in \mathbb{C}$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots$$

بنا به قضیه ۹.۱.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$. از طرفی:

$$\left|\frac{1}{c}\right| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \implies \left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2|$$

چون $f(z) \in \mathbb{S}$ ، پس $|a_2| \leq 2$ است. لذا داریم:

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 4 \implies |c| \geq \frac{1}{4}$$

□

لم ۱.۲.۱.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و $z = re^{i\theta}$ آنگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$$

برهان. چون برای $|z| < 1$ ، $f'(z) \neq 0$ ، پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا:

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

^۱Koeb

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}.$$

□

قضیه ۱۳.۱.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ ، آنگاه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ نیز به ازای $(|z| < 1)$ تحلیلی و تک ارزش است، داریم:

$$g(\circ) = b_0 = f(z_0)$$

$$b_1 = g'(\circ) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(\circ)}{2} = \frac{1}{2} (f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به $\mathbb{S}$ نیست، با توجه به این که تابع $\frac{g(z) - g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$ در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد، لذا بنابر قضیه ۹.۱.۱، یعنی: $\left| \frac{b_2}{b_1} \right| \leq 2$

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 2$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$ داریم:

$$\left| \frac{zf''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است، قرار می‌دهیم:

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{4r}{1 - r^2}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{4r}{1 - r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1 - r^2}$ واقع است، لذا:

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}$$

بنا به لم ۱۲.۱.۱ می‌دانیم:

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$$

یعنی:

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}$$

پس

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم:

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log |f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

و لذا داریم:

$$\log \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log |f'(z)| \leq \log \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

در نتیجه :

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z|=r < 1).$$

□

مثال ۱۴.۱.۱. مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ برابر است با

$$k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

لذا کران بالای قضیه ۱۳.۱.۱، در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.قضیه ۱۵.۱.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ ، آنگاه :

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z|=r < 1)$$

برهان. بنا بر قضیه ۱۳.۱.۱ برای $|z|=r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه‌ی ۰ را بایک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوی $\frac{r}{(1+r)^2} \leq \frac{1}{4}$ همواره برقرار است. حال اگر $\frac{1}{4} \leq |f(z)|$ باشد، آنگاه $\frac{r}{(1+r)^2} \leq \frac{1}{4}$ $|f(z)| < \frac{1}{4}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ باشد، بنا بر قضیه ۱۱.۱.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکی از ۰ تا z موجوداست که تصویر آن پاره خط مستقیم c از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |d\omega| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا به قضیه ۱۳.۱.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

مثال ۱۶.۱.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ کران بالای قضیه ۱۵.۱.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۷.۱.۱. (لیتلوود^۲) [۲۱] اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در ردهی $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq en$.

قضیه ۱۸.۱.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در ردهی $\mathbb{S}$ و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $z = re^{i\theta}$ ، $r < 1$ قرار می‌دهیم:

$$\operatorname{Im} f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از 0 تا π داریم:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \quad (2.1)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin \theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin \theta|$ لذا از رابطه‌ی (۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (3.1)$$

حال نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$ که در آن $(0 < \theta < \pi, 0 < r < 1)$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا:

$$r = |a_1 r| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta. \quad (4.1)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱)، رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می‌آید و با $r \rightarrow 1$ قضیه ثابت می‌گردد. $\square$

^۲Littlewood's

۲.۱ ردهی $\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۲.۱. میدان D را نسبت به z ستاره گون^۲ گوئیم، هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z وصل می کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را نسبت به مبدا ستاره گون گوئیم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $\omega = 0$ ستاره گون است. این زیر ردهی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده می شود.

لم ۲.۲.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}^*$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $0 < t < 1$ ، $tw \in D$ (چون D ستاره گون نسبت به مبدا می باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می کند. چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$ ، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$. اکنون نقطه‌ی $w_1 \in D_r$ را انتخاب می کنیم. در این صورت برای نقطه‌ی z_1 ای با فرض $|z_1| < 1$ و برای t دلخواه با فرض $0 < t < 1$ داریم:

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی w_1 ها در D_r و همه‌ی t ها که $0 < t < 1$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = 0$ ستاره گون است. بر عکس، اگر $f(z)$ در ردهی $\mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_0 \in D$ موجود است به طوری که برای t_0 ای، $(0 < t_0 < 1)$ ، $t_0 w_0$ متعلق به D نمی باشد. اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می کنیم به طوری که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $t_0 w_0$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ ، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره گون نمی نگارد. $\square$

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

برهان. با توجه به لم ۲.۲.۱ $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره گون باشد. به بیان معادل برای هر θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد و این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی می بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص می شود. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})$ بنابراین:

^۲Starlike

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

□

مثال ۴.۲.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < 1$ صفحه‌ی w می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{1}{4}$ تا $-\infty$ بریده شده است و همچنین:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zk'(z)}{k(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\}.$$

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنیم برای $|z| < 1$ ، $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ، $|a_n| \leq 2$ ، n هر $\operatorname{Re} f(z) > 0$ ، $|z| < 1$ اگر برای

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. چون برای $|z| < 1$ ، $f(z) \neq 0$ ، تابع

$$P(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \quad (5.1)$$

در $|z| < 1$ تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^{n-1} \quad (6.1)$$

از طرفی برای $|z| < 1$ ، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ پس $\operatorname{Re} \{P(z)\} > 0$. بنا بر قضیه‌ی ۹.۱.۱ می‌دانیم:

$$|\alpha_n| \leq 2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$k a_k = a_k + a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}$$

و یا به صورت معادل:

$$(k-1)a_k = a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (8.1)$$

با استفاده از کران (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) به کار برد لذا

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_2| + 1)$$

از رابطه‌ی فوق در می‌یابیم $|a_2| \leq 2$. سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, \dots, n-1$ داشته باشیم

$|a_k| \leq k$ در این صورت:

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

□

و لذا رابطه $|a_n| \leq n$ برقرار می‌باشد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است.

تعریف ۷.۲.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ ستاره‌گون از مرتبه α ($0 \leq \alpha < 1$) نامیده می‌شود هرگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

این زیر ردهی $\mathbb{S}$ را به $\mathbb{S}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ، $f(z)$ اگر $(0 \leq \alpha < 1)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha$$

آنگاه $f(z) \in \mathbb{S}^*(\alpha)$.

۳.۱ ردهی C

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را محدب^۴ گوئیم، هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۳.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب گوئیم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر ردهی $\mathbb{S}$ را با C نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ ، در این صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in C$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1, w_2 را در D_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(0 < t < 1)$ $tw_1 + (1-t)w_2$ هم در D_r قرار دارد. نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < 1$ موجود هستند به‌طوری که $\omega_1 = f(z_1)$ و $\omega_2 = f(z_2)$.

بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_1| \leq |z_2|$ آنگاه تصویر $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < 1$ و $h(0) = 0$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$ به‌ویژه:

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \leq |z_2| < r \quad (9.1)$$

چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی z_0 در قرص $|z| < 1$ موجود است که $tw_1 + (1-t)w_2 = f(z_0)$ ولی بنابر (۹.۱) نقطه‌ی $z_0 = f^{-1}(f(z_0))$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < 1$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_1 + (1-t)w_2$ در D_r قرار دارد.

^۴Convex

برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی C نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $1 > r > |z|$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. $\square$

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (|z| < 1).$$

برهان. بنا بر قضیه ۳.۳.۱، $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < 1$ را بر یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی w با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > 0$$

و لذا:

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{Im} \log f'(re^{i\theta})) = 1 + \operatorname{Im} \left\{ (ire^{i\theta}) \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

$\square$

قضیه ۵.۳.۱. (الکساندر^۵) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D با دو شرط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathbb{S}^*$.

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در این صورت:

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. $\square$

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در C باشد. در این صورت برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۳.۱ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد لذا بنا بر قضیه ۶.۲.۱ برای هر n ، $n|a_n| \leq 1$ و در نتیجه $|a_n| \leq 1$. $\square$

^۵Alexander

قضیه ۷.۳.۱. اگر $f(z) \in C$ برای $|z| < ۱$ و $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < ۱$ تک ارز است، دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم در این صورت:

$$g(z_0) - g(z_1) = ((c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2) = (f(z_0) - f(z_1))(f(z_0) + f(z_1) - 2c)$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{1}{4}[f(z_0) + f(z_1)]$ به تصویر $|z| < ۱$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس

$$f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$$

ولذا تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \dots$ تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + \left(\frac{-z^2}{2c}\right) + \dots$$

بعلاوه در $|z| < ۱$ ، $h(z) \neq \frac{c}{4}$ ، زیرا $g(z)$ هرگز در آن جا صفر نیست. با به کار بردن قضیه‌ی پوششی

در می‌یابیم $\frac{1}{4} \leq \left|\frac{c}{4}\right|$ و یا $|c| \geq \frac{1}{4}$. $\square$

قضیه ۸.۳.۱. اگر $f(z) \in C$ ، آنگاه برای $|z| = r < ۱$ داریم:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ که $|z_0| < ۱$ ، تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$$

نیز به ازای $|z| < ۱$ تحلیلی و تک ارز است. بنابراین:

$$g(0) = b_0 = f(z_0)$$

$$b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2} (f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)).$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا در رده‌ی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به این که تابع

$$\frac{g(z) - g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$$

در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد لذا در C نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی ۶.۳.۱:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 1$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$\left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}.$$

حال چون z_0 دلخواه است داریم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| &\leq \frac{2r}{1-r^2} \\ \Rightarrow \frac{2r^2 - 2r}{1-r^2} &\leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 2r}{1-r^2} \\ \Rightarrow \frac{2r-2}{1-r^2} &\leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r+2}{1-r^2} \end{aligned}$$

حال از $\circ$ تا r انتگرال می گیریم:

$$-2 \log(1+r) \leq \log |f'(z)| \leq -2 \log(1-r)$$

لذا:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

□

قضیه ۹.۳.۱. اگر $f(z) \in C$ آنگاه برای $|z| = r < 1$ داریم:

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$$

برهان. بنا بر قضیه ۸.۳.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$ نقطه $\circ$ را به z

با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می گیریم:

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{r}{1-r}.$$

نامساوی $\frac{r}{1+r} \leq |f(z)|$ همواره برقرار است، حال اگر $\frac{1}{r} \geq |f(z)|$ لذا $\frac{r}{1+r} \leq |f(z)|$ و اگر

$\frac{1}{r} < |f(z)|$ طبق قضیه پوششی مسیر c داخل دایره ی یکه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از $\circ$ تا $f(z)$ را می پوشاند در این صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا بر قضیه ی قبل:

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \int_0^r \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{r}{1+r}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}.$$

□

فصل ۲

بررسی محک‌های تک ارزی برای عملگرهای انتگرال

در این فصل، چند عملگر انتگرال جدید را معرفی می‌کنیم و محک‌های تک ارزی را در مورد این عملگرها بررسی می‌کنیم.

۱.۲ عملگر انتگرال $\mathcal{I}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$

تعریف ۱.۱.۲ (قرارداد) $\mathcal{A}$ را رده‌ای از توابع به شکل $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ گوئیم که در دیسک یکه‌ی باز $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ تحلیلی می‌باشند.

تعریف ۲.۱.۲ عملگر انتگرال $H_\alpha(z)$ برای $f \in \mathcal{A}$ و عدد مختلط α که $\alpha \neq 0$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H_\alpha(z) = \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_0^z u^{-1} (f(u))^{\frac{1}{\alpha}} du \right\}^\alpha \quad (z \in U) \quad (1.2)$$

میلر^۱ و مکانو^۲ عملگر انتگرال $H_\alpha(z)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ را برای $f \in \mathbb{S}^*$ بررسی و مطالعه کرده‌اند [۱۱].

تعریف ۳.۱.۲ برای $f_j \in \mathcal{A}$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ و عدد مختلط γ_j ، $\gamma_j \neq 0$ عملگر انتگرال

^۱Miller

^۲Mocanu

$\mathcal{J}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{J}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(z) = \left\{ \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \dots + \frac{1}{\gamma_n} \right) \int_0^z u^{-1} (f_1(u))^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots (f_n(u))^{\frac{1}{\gamma_n}} du \right\}^{\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \dots + \frac{1}{\gamma_n}}} \quad (2.2)$$

عملگر انتگرال فوق، تعمیم یافته عملگر انتگرال $H_\alpha(z)$ می‌باشد.

اگر در رابطه (۲.۲) قرار دهیم $n = 1$ ، $f_1 = f$ و $\gamma_1 = \alpha$ عملگر انتگرال $H_\alpha(z)$ به دست می‌آید.

لم ۴.۱.۲. [۱۵، ۱۶] فرض کنیم α عدد مختلط، $\operatorname{Re} \alpha > 0$ و $f \in \mathcal{A}$. اگر

$$\frac{1 - |z|^{2\operatorname{Re} \alpha}}{\operatorname{Re} \alpha} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (3.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$F_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u) du \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.2)$$

متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

لم ۵.۱.۲. (لم کاراتئودوری) [۲، ۱۰] فرض کنیم f تابعی تحلیلی در U با $f(0) = 0$. اگر مقدار $M > 0$ موجود باشد که

$$\operatorname{Re} f(z) \leq M \quad (5.2)$$

آنگاه

$$(1 - |z|)|f(z)| \leq 2M|z| \quad (z \in U) \quad (6.2)$$

۱.۱.۲ تک ارزی عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$

قضیه ۶.۱.۲. فرض کنیم برای γ_j اعداد مختلط که $\operatorname{Re} \gamma_j \neq 0$ و M_j اعداد

حقیقی مثبت، $b = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma_j} > 0$ ،

$$f_j(z) = z + a_{2j}z^2 + a_{3j}z^3 + \dots, \quad f_j \in \mathcal{A}.$$

اگر

$$\left| \frac{zf'_j(z)}{f_j(z)} - 1 \right| \leq M_j \quad (z \in U, j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.2)$$

و

$$\sum_{j=1}^n \frac{M_j}{|\gamma_j|} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} b \quad (0 < b < 1) \quad (۸.۲)$$

یا

$$\sum_{j=1}^n \frac{M_j}{|\gamma_j|} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (b \geq 1) \quad (۹.۲)$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}$ تعریف شده در (۲.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. داریم:

$$\mathcal{J}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(z) = \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_j} \right) \int_0^z u^{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_j} - 1} \left(\frac{f_1(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots \left(\frac{f_n(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma_n}} du \right\}^{\frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_j}}} \quad (۱۰.۲)$$

برای $f_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \dots, n$ تابع g که در U تحلیلی است را در نظر می‌گیریم.

$$g(z) = \int_0^z \left(\frac{f_1(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots \left(\frac{f_n(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma_n}} du \quad (۱۱.۲)$$

تابع p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(z) = \frac{zg''(z)}{g'(z)} \quad (z \in U) \quad (۱۲.۲)$$

$p(0) = 0$ و طبق (۱۱.۲) و (۱۲.۲) به دست می‌آوریم:

$$|p(z)| \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\gamma_j|} \left| \frac{zf'_j(z)}{f_j(z)} - 1 \right| \quad (z \in U) \quad (۱۳.۲)$$

از (۷.۲) و (۱۳.۲) داریم:

$$|p(z)| \leq \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{|\gamma_j|} \quad (۱۴.۲)$$

با استفاده از لم ۴.۱.۱ داریم:

$$|p(z)| \leq \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{|\gamma_j|} |z| \quad (z \in U) \quad (۱۵.۲)$$

از (۱۲.۲) و (۱۵.۲) داریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq \frac{1 - |z|^{2b}}{b} |z| \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{|\gamma_j|} \quad (z \in U) \quad (۱۶.۲)$$

برای $b \in (0, 1)$ داریم:

$$1 - |z|^{2b} \leq 1 - |z|^2 \quad (z \in U)$$

حال طبق (۱۶.۲) به دست می‌آوریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq \frac{(1 - |z|^2)}{b} |z| \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{|\gamma_j|} \quad (۱۷.۲)$$

از آنجایی که

$$\max_{|z| \leq 1} \{(1 - |z|^2)|z|\} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (۱۸.۲)$$

طبق (۸.۲) و (۱۷.۲) برای $b \in (0, 1)$ داریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (۱۹.۲)$$

برای $b \in [1, \infty)$ تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} \leq 1 - |z|^2$$

و با استفاده از (۱۶.۲) داریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq (1 - |z|^2) |z| \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{|\gamma_j|} \quad (۲۰.۲)$$

طبق روابط (۹.۲)، (۱۸.۲) و (۲۰.۲) برای $b \in [1, \infty)$ داریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (۲۱.۲)$$

از (۱۱.۲) به دست می‌آوریم:

$$g'(z) = \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z} \right)^{\frac{1}{\gamma_n}}$$

و با استفاده از (۱۹.۲)، (۲۱.۲) و طبق لم ۴.۱.۲ نتیجه می‌گیریم عملگر انتگرال $\mathcal{T}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ داده شده در (۲.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است. $\square$

نتیجه ۷.۱.۲. فرض کنیم α عدد مختلط $\circ, \operatorname{Re} \alpha \neq \circ$ ، $\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} > \circ$ ، $f \in \mathcal{A}$ ،

$$f(z) = z + a_{21}z^2 + a_{31}z^3 + \dots$$

اگر

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} |\alpha| \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} \quad (\circ < \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} < 1) \quad (22.2)$$

یا

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} |\alpha| \quad (\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} \geq 1) \quad (23.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال H_α متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

□

برهان. در قضیه ۶.۱.۲ قرار دهیم $\alpha = \gamma_1$ ، $f_1 = f$ ، $b = \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha}$ و $n = 1$.

نتیجه ۸.۱.۲. فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_{21}z^2 + a_{31}z^3 + \dots$ ، اگر

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (z \in U) \quad (24.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال الکساندر داده شده به صورت زیر متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

$$G(z) = \int_0^z \frac{f(u)}{u} du$$

□

برهان. با قرار دادن $\gamma_1 = 1$ ، $f_1 = f$ و $n = 1$ در قضیه ۶.۱.۲ نتیجه حاصل می شود.

در قضیه زیر، شرایط دیگری برای تک ارزی عملگر انتگرال (۲.۲) بیان می شود. بعد از مطالعه قضیه ذیل در خواهیم یافت که قضیه ۹.۱.۲ در واقع بهبودی از قضیه ۶.۱.۲ است.

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنیم برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، γ_j اعداد مختلط و $\operatorname{Re} \gamma_j \neq \circ$ ،

$b = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma_j} > \circ$ ، $f_j \in \mathcal{A}$ ، $f_j(z) = z + a_{2j}z^2 + a_{3j}z^3 + \dots$ ، اگر برای هر $z \in U$ و $\theta \in [\circ, 2\pi)$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\gamma_j| \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma_j}}{4} \quad j = 1, \dots, n, b \in (\circ, 1) \quad (25.2)$$

یا

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\gamma_j|}{4n} \quad j = 1, \dots, n, b \in [1, \infty) \quad (26.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. تعریف می‌کنیم

$$h(z) = \int_{\circ}^z \left(\frac{f_1(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots \left(\frac{f_n(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma_n}} du \quad (27.2)$$

تابع h در U تحلیلی است. داریم:

$$\frac{zh''(z)}{h'(z)} = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{\gamma_j} \left(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)} - 1 \right) \right\} \quad (28.2)$$

تابع

$$\psi_j(z) = e^{i\theta} \left(\frac{zf'_j(z)}{f_j(z)} - 1 \right) \quad (j = 1 \dots n, \theta \in [0, 2\pi)) \quad (29.2)$$

را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم که

$$\Psi_j(\circ) = \circ \quad j = 1 \dots n$$

طبق (۲۵.۲) و لم ۵.۱.۲ برای $b \in (\circ, 1)$ به دست می‌آوریم:

$$|\Psi_j(z)| \leq \frac{|z||\gamma_j| \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma_j}}{2(1-|z|)} \quad (30.2)$$

طبق (۲۶.۲) و لم ۵.۱.۲ برای $b \in [1, \infty)$ داریم:

$$|\Psi_j(z)| \leq \frac{|z||\gamma_j|}{2n(1-|z|)} \quad (31.2)$$

از (۲۸.۲) و (۳۰.۲) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2b}}{b} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \leq \frac{(1-|z|^{2b})|z|}{2(1-|z|)} \quad (z \in U, b \in (\circ, 1)) \quad (32.2)$$

از آنجایی که

$$1-|z|^{2b} \leq 1-|z|^2 \quad (z \in U, b \in (\circ, 1))$$

طبق (۳۲.۲) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2b}}{b} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U, b \in (\circ, 1)) \quad (33.2)$$

برای $b \in [1, \infty)$ داریم:

$$\frac{1-|z|^{2b}}{b} \leq 1-|z|^2 \quad (z \in U)$$

از (۲۸.۲) و (۳۱.۲) به دست می آوریم:

$$\frac{1 - |z|^{2b}}{b} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1 \quad b \in [0, \infty) \quad (34.2)$$

از (۲۷.۲) داریم:

$$h'(z) = \left(\frac{f_1(z)}{z} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z} \right)^{\frac{1}{\gamma_n}}$$

با استفاده از (۳۳.۲)، (۳۴.۲) و لم ۴.۱.۲ نتیجه می گیریم که عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است. $\square$

نتیجه ۱۰.۱.۲. فرض کنیم α عدد مختلط، $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$ ، $b = \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} > 0$ ، $f \in \mathcal{A}$

$$f(z) = z + a_{21}z^2 + a_{31}z^3 + \dots$$

اگر برای هر $z \in U$ و $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\alpha| \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha}}{4} \quad (b \in (0, 1)) \quad (35.2)$$

یا

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\alpha|}{4} \quad (b \in [1, \infty)) \quad (36.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $H_\alpha(z)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

$\square$

برهان. در قضیه ۹.۱.۲ قرار دهیم $\gamma_1 = \alpha$ ، $f_1 = f$ و $n = 1$.

نتیجه ۱۱.۱.۲. فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$ ، اگر $f(z) = z + a_{21}z^2 + a_{31}z^3 + \dots$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{1}{4} \quad (z \in U, \theta \in [0, 2\pi)) \quad (37.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال الکساندر داده شده به صورت زیر متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

$$G(z) = \int_0^z \frac{f(u)}{u} du \quad (38.2)$$

برهان. با جایگزینی $\gamma_1 = 1$ ، $f_1 = f$ و $n = 1$ در قضیه ۹.۱.۲ نتیجه می شود که $G \in \mathbb{S}$ $\square$

۲.۲ عملگر انتگرال $\mathcal{T}_{\gamma,\beta}$

در این بخش از فصل، شرایطی که عملگر انتگرال

$$\mathcal{T}_{\gamma,\beta} = \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_0^z u^{-\beta} (f(u))^{\frac{1}{\gamma} + \beta - 1} du \right\}^{\gamma}$$

در رده $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد را مرور می‌کنیم و در ادامه، با توجه به بحث انجام شده شرایط جدیدی برای عملگر H_{α} که در بخش قبل آن را معرفی کردیم، به دست خواهیم آورد. با قرار دادن $\beta = 1$ و $\gamma = \alpha$ عملگر انتگرال (۱.۲) حاصل خواهد شد. همچنین اگر $\frac{1}{\gamma} = 1$ و $\beta = 1$ عملگر انتگرال الکساندر به دست می‌آید و با قرار دادن $\beta = 0$ عملگر انتگرال $\mathcal{T}_{\gamma,0} = \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_0^z (f(u))^{\frac{1}{\gamma} - 1} du \right\}^{\gamma}$ را خواهیم داشت.

۱.۲.۲ تک ارزی عملگر انتگرال $\mathcal{T}_{\gamma,\beta}$

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم γ اعداد مختلط $\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} > 0$ ، $f \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ ، اگر برای هر $z \in U$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$ و $\beta \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\gamma| \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}}{4(1 + |\gamma||\beta - 1|)} \quad (0 < \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} < 1) \quad (39.2)$$

یا

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\gamma|}{4(1 + |\gamma||\beta - 1|)} \quad (\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \geq 1) \quad (40.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{T}_{\gamma,\beta}$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. عملگر انتگرال $\mathcal{T}_{\gamma,\beta}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{T}_{\gamma,\beta} = \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_0^z u^{\frac{1}{\gamma} - 1} \left(\frac{f(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma} + \beta - 1} du \right\}^{\gamma}$$

تعریف می‌کنیم:

$$g(z) = \int_0^z \left(\frac{f(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma} + \beta - 1} du \quad (41.2)$$

تابع g در U تحلیلی است، داریم:

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = \left(\frac{1}{\gamma} + \beta - 1 \right) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \quad (42.2)$$

تابع

$$\psi(z) = e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \quad (z \in U, \theta \in [0, 2\pi)) \quad (43.2)$$

را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم که

$$\Psi(0) = 0$$

طبق (۳۹.۲) و لم ۵.۱.۲ برای $\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$ به دست می‌آوریم:

$$|\Psi(z)| \leq \frac{|z||\gamma| \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}}{2(1-|z|)(1+|\gamma||\beta-1|)} \quad (z \in U, \beta \in \mathbb{C}) \quad (44.2)$$

طبق (۴۰.۲) و لم ۵.۱.۲ برای $\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$ داریم:

$$|\Psi(z)| \leq \frac{|z||\gamma|}{2(1-|z|)(1+|\gamma||\beta-1|)} \quad (z \in U, \beta \in \mathbb{C}) \quad (45.2)$$

از (۴۲.۲) و (۴۴.۲) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}}}{\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq \frac{(1-|z|^{2\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}})|z|}{2(1-|z|)} \quad (z \in U, \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in (0, 1)) \quad (46.2)$$

چون برای $\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in (0, 1)$:

$$1-|z|^{2\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}} \leq 1-|z|^2 \quad (z \in U)$$

طبق (۴۶.۲) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}}}{\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U, \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in (0, 1)) \quad (47.2)$$

برای $\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in [1, \infty)$ داریم:

$$\frac{1-|z|^{2\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}}}{\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}} \leq 1-|z|^2 \quad (z \in U)$$

از (۴۲.۲) و (۴۵.۲) به دست می‌آوریم:

$$\frac{1-|z|^{2\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}}}{\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1 \quad (\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in [0, \infty)) \quad (48.2)$$

□

با توجه به روابط (۴۷.۲)، (۴۸.۲) و لم ۴.۱.۲ عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma, \beta}$ در رده $\mathbb{S}$ قرار دارد.

نتیجه ۲.۲.۲. فرض کنیم α عدد مختلط، $f \in \mathcal{A}$ ، $\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} > 0$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

اگر برای هر $z \in U$ و $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\alpha| \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha}}{4} \quad \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} \in (0, 1) \right) \quad (49.2)$$

یا

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\alpha|}{4} \quad \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} \in [1, \infty) \right) \quad (50.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $H_\alpha(z)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

□

برهان. در قضیه ۱.۲.۲ قرار دهیم $\gamma = \alpha$ و $\beta = 1$.

نتیجه ۳.۲.۲. فرض کنیم γ عدد مختلط، $f \in \mathcal{A}$ ، $\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} > 0$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

اگر

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\gamma| \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma}}{4(1 + |\gamma|)} \quad \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in (0, 1) \right) \quad (51.2)$$

یا

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} \leq \frac{|\gamma|}{4(1 + |\gamma|)} \quad \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} \in [1, \infty) \right) \quad (52.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma, 0}(z)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

□

برهان. در قضیه ۱.۲.۲ قرار دهیم $\beta = 0$.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنیم γ عدد مختلط $a = \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} > 0$ ، $f \in \mathcal{A}$ ، $\beta \in \mathbb{C}$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

اگر

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{(2a + 1)^{\frac{\gamma a + 1}{2a}} |\gamma|}{2(1 + |\gamma| |\beta - 1|)} \quad (53.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma, \beta}$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ را در نظر می گیریم:

$$\mathcal{J}_{\gamma,\beta}(z) = \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_0^z u^{\frac{1}{\gamma}-1} \left(\frac{f(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1} du \right\}^\gamma$$

تعریف می کنیم:

$$g(z) = \int_0^z \left(\frac{f(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1} du \quad (54.2)$$

تابع g در U تحلیلی است. داریم:

$$p(z) = \frac{zg''(z)}{g'(z)} = \left(\frac{1}{\gamma} + \beta - 1 \right) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \quad (55.2)$$

با توجه به روابط (52.2) و (53.2) داریم:

$$|p(z)| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2} \quad (z \in U)$$

طبق لم 4.1.1 داریم:

$$|p(z)| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2} |z| \quad (z \in U) \quad (56.2)$$

از (54.2) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq \frac{(1-|z|^{2a})(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2a} |z| \quad (57.2)$$

از آنجایی که:

$$\max_{|z| \leq 1} \frac{(1-|z|^{2a})}{a} |z| = \frac{2}{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}$$

طبق (55.2) داریم:

$$\frac{1-|z|^{2a}}{a} \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1 \quad (58.2)$$

از (53.2) به دست می آوریم:

$$g'(z) = \left(\frac{f(u)}{u} \right)^{\frac{1}{\gamma}+\beta-1} \quad (59.2)$$

و با استفاده از (57.2)، (58.2) و لم 4.1.2 نتیجه می گیریم عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma,\beta}$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است. $\square$

نتیجه ۵.۲.۲. فرض کنیم α عدد مختلط، $a = \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} > 0$ ، $f \in \mathcal{A}$ ،

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}} |\alpha|}{2}$$

آنگاه عملگر انتگرال $H_\alpha(z)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

□

برهان. در قضیه ۴.۲.۲ قرار دهیم $\gamma = \alpha$ ، $\beta = 1$.

نتیجه ۶.۲.۲. فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$ ، $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ ، اگر برای هر $z \in U$

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

آنگاه عملگر انتگرال الکساندر متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

□

برهان. در قضیه ۴.۲.۲ قرار دهیم $\gamma = 1$ ، $\beta = 1$.

نتیجه ۷.۲.۲. فرض کنیم γ عدد مختلط، $a = \operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} > 0$ ، $f \in \mathcal{A}$ و برای هر $z \in U$

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}} |\gamma|}{2(1+|\gamma|)}$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{J}_{\gamma,0}(z)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

□

برهان. در قضیه ۴.۲.۲ قرار دهیم $\beta = 0$.

۳.۲ عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

تعریف ۱.۳.۲. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب یکنواخت می‌نامیم هرگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \quad (z \in U)$$

این زیر رده $\mathbb{S}$ را با UCV نشان می‌دهیم.

در سال ۱۹۷۳، کودریاشو^۳ ماکزیم مقدار M را شناسایی کرد به‌طوری‌که اگر

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq M$$

^۳Kudryashov

آنگاه f در رده $\mathbb{S}$ قرار می گیرد. او نشان داد اگر $M = ۳, ۰۵\dots$ و

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq ۳, ۰۵\dots$$

به طوری که M جواب معادله زیر است:

$$۸[M(M-۲)^{\frac{1}{2}}] - ۳(۳-M)^2 = ۱۲$$

آنگاه f متعلق به رده $\mathbb{S}$ است. همچنین اگر $M = ۲, ۸۳۲۹\dots$ و

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq ۲, ۸۳۲۹\dots$$

به طوری که M ریشه معادله $x \sin x + \cos x = \frac{1}{e}$ ، آنگاه f در دیسک واحد U تابعی ستاره گون است، این نتیجه توسط میلر^۴ و مکانو^۵ به دست آمده است [۱۱].

تعریف ۲.۳.۲. برای $f_i \in \mathcal{A}$ ، $i = \{1, 2, \dots, n\}$ و عدد مختلط α عملگر انتگرال را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z) = \int_0^z (f_1'(t))^{\alpha_1} \dots (f_n'(t))^{\alpha_n} dt \quad (۶۰.۲)$$

۱.۳.۲ ستاره گون بودن عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنیم $f_i \in \mathbb{S}$ ، $i = 1, \dots, n$ ، $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ، $\alpha_i > 0$ ، و

$$\left| \frac{f_i''(z)}{f_i'(z)} \right| \leq M \quad (۶۱.۲)$$

اگر برای هر $z \in U$ ، $M = ۳, ۰۵\dots$ و $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq ۱$ آنگاه عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ در رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. ابتدا مشتقات مرتبه اول و دوم برای $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ را محاسبه می کنیم:

$$F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z) = \int_0^z (f_1'(t))^{\alpha_1} \dots (f_n'(t))^{\alpha_n} dt$$

در این صورت داریم:

$$F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z) = (f_1'(z))^{\alpha_1} \dots (f_n'(z))^{\alpha_n}$$

^۴Miller

^۵Mocanu

و

$$F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{(f_i''(z))(f_i'(z))^{\alpha_i}}{f_i'(z)}$$

از تساوی‌های فوق داریم:

$$\frac{F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} = \alpha_1 \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} + \dots + \alpha_n \frac{f_n''(z)}{f_n'(z)} \quad (۶۲.۲)$$

که معادل است با:

$$\left| \frac{F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} \right| \leq \alpha_1 \left| \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} \right| + \dots + \alpha_n \left| \frac{f_n''(z)}{f_n'(z)} \right|$$

حال طبق نامساوی (۶۱.۲) به دست می‌آوریم:

$$\left| \frac{F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} \right| \leq \alpha_1 M + \dots + \alpha_n M = M \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq M$$

□

لذا عملگر $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنیم $f_i \in \mathbb{S}$ ، $i = 1, \dots, n$ ، $\alpha_i > 0$ و

$$\left| \frac{f_i''(z)}{f_i'(z)} \right| \leq M_1 \quad (۶۳.۲)$$

اگر $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ و $M_1 = 2, 829 \dots$

برهان. با در نظر گرفتن اثبات قضیه ۳.۳.۲ و نامساوی (۶۳.۲) داریم:

$$\left| \frac{F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} \right| \leq \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_1 = M_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq M_1$$

□

در نتیجه عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ متعلق به رده $\mathbb{S}^*$ است.

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنیم $\alpha_i \in R$ ، $i = 1, \dots, n$ و $\alpha_i > 0$.

اگر برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $f_i \in C$ ، آنگاه عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ متعلق به رده C است.

برهان. داریم:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} + 1 \right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{Re} \left(\frac{z f_i''(z)}{f_i'(z)} + 1 \right) \geq 0$$

از آنجایی که برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z f_i''(z)}{f_i'(z)} + 1 \right) \geq 0$$

□

لذا عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ متعلق به رده C است.

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنیم $f_i \in C(\beta_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ و $0 \leq \beta_i < 1$. اگر

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta_i - 1) + 1 < 1$$

آنگاه عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ محدب از مرتبه $1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta_i - 1)$ است.

برهان. داریم:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} + 1 \right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{Re} \left(\frac{z f''_i(z)}{f'_i(z)} + 1 \right) + 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (64.2)$$

از آنجایی که $f_i \in C(\beta_i)$ داریم:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z f''_i(z)}{f'_i(z)} + 1 \right) \geq \beta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

طبق نامساوی (۶۴.۲) به دست می آوریم:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} + 1 \right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta_i - 1) + 1 \quad (65.2)$$

با در نظر گرفتن (۶۵.۲) نتیجه می شود، عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ محدب از مرتبه

$$1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta_i - 1) \text{ است.}$$

□

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنیم $f_i \in UCV$ برای هر $i = 1, \dots, n$ و $\alpha_i > 0$ ، $\alpha_i \in R$ اگر

$$1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq 0$$

آنگاه عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ محدب از مرتبه $1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ است.

برهان. داریم:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} + 1 \right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{Re} \left(\frac{z f''_i(z)}{f'_i(z)} + 1 \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \quad (66.2)$$

طبق فرض $f_i \in UCV$ داریم:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{z f''_i(z)}{f'_i(z)} \right\} \geq \left| \frac{z f''_i(z)}{f'_i(z)} \right| \quad (z \in U)$$

لذا طبق نامساوی (۶۶.۲) به دست می آوریم:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z F''_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)}{F'_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)} + 1 \right\} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \left| \frac{z f''_i(z)}{f'_i(z)} \right| + 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (67.2)$$

با توجه به رابطه (۶۷.۲)، عملگر انتگرال $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ محدب از مرتبه $1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ است. □

۴.۲ عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f, g)$

در این بخش از فصل دوم، شرایطی جدیدی برای عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ به دست خواهیم آورد.

تعریف ۱.۴.۲. رده G_b برای $f \in \mathcal{A}$ که $0 < b \leq 1$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$G_b = \left\{ \left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < b \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \quad \forall z \in U \right\} \quad (۶۸.۲)$$

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنیم $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ برای هر $i = 1, \dots, n$ و $n \in \mathbb{N}$ و $\gamma \in \mathbb{C}$ که $\operatorname{Re} \gamma > 0$ عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i} : \mathcal{A}^n \times \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_{\gamma, \alpha_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n(z)) \\ = \left\{ \gamma \int_0^z t^{\gamma-1} \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{1-\frac{1}{\alpha_1}} \left(g'_1(t) \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \dots \left(\frac{f_n(t)}{t} \right)^{1-\frac{1}{\alpha_n}} \left(g'_n(t) \right)^{\frac{1}{\alpha_n}} dt \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \quad (۶۹.۲)$$

قضیه ۳.۴.۲. [۱۷] فرض کنیم $\delta \in \mathbb{C}$ و $\operatorname{Re} \delta > 0$. اگر $f \in \mathcal{A}$ و

$$\frac{1 - |z|^{2\operatorname{Re} \delta}}{\operatorname{Re} \delta} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U)$$

آنگاه برای هر عدد مختلط γ که $\operatorname{Re} \gamma \geq \operatorname{Re} \delta$ ، عملگر انتگرال

$$F_\gamma(z) = \left(\gamma \int_0^z t^{\gamma-1} f'(t) dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

قضیه ۴.۴.۲. [۱۸] فرض کنیم γ و c اعداد مختلط و $c \neq -1$ ، $|c| \leq 1$ ، $\operatorname{Re} \gamma > 0$ و $f \in \mathcal{A}$ اگر

$$\left| c|z|^{2\gamma} + (1 - |z|^{2\gamma}) \frac{zf''(z)}{\gamma f'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$F_\gamma(z) = \left(\gamma \int_0^z t^{\gamma-1} f'(t) dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

قضیه ۵.۴.۲. فرض کنیم $\gamma \in \mathbb{C}$ ، $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ ، برای هر $i = 1, \dots, n$

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1|) + 2b_i + 1 \quad (۷۰.۲)$$

آنگاه برای هر $f_i \in \mathcal{A}$ ، $0 < b_i \leq 1$ ، $g_i \in G_{b_i}$ ، $i = 1, \dots, n$ و

$$\left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad (z \in U) \quad (۷۱.۲)$$

عملگر انتگرال تعریف شده در (۶۹.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. تعریف می‌کنیم:

$$h(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{1-\frac{1}{\alpha_i}} (g'_i(t))^{\frac{1}{\alpha_i}} \right] dt$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$h'(z) = \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{1-\frac{1}{\alpha_i}} (g'_i(t))^{\frac{1}{\alpha_i}} \right] \quad (۷۲.۲)$$

و

$$\begin{aligned} \frac{zh''(z)}{h'(z)} &= \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) \left(\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right) + \frac{1}{\alpha_i} \frac{zg''_i(z)}{g'_i(z)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) \left(\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right) + \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{zg''_i(z)}{g'_i(z)} - \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} + 1 \right) + \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (۷۳.۲)$$

از (۶۸.۲) و (۷۱.۲) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} \left| \frac{zg''_i(z)}{g'_i(z)} - \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} + 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \left(\left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| + 1 \right) + \frac{1}{|\alpha_i|} \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i + \frac{1}{|\alpha_i|} \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} (b_i + 1) \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} + \frac{1}{|\alpha_i|} (b_i + 1) + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \end{aligned} \quad (۷۴.۲)$$

لذا:

$$\begin{aligned} \frac{1 - |z|^{2\operatorname{Re}\gamma}}{\operatorname{Re}\gamma} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| &\leq \frac{1 - |z|^{2\operatorname{Re}\gamma}}{\operatorname{Re}\gamma} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \right) \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}\gamma} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \right) \leq 1 \end{aligned}$$

□ طبق قضیه ۳.۴.۲ عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

اگر در قضیه ۵.۴.۲ قرار دهیم $\alpha_i = 1$ برای $i = 1, \dots, n$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۶.۴.۲. فرض کنیم $\gamma \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re}\gamma \geq \sum_{i=1}^n (2b_i + 1) \quad (75.2)$$

اگر برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $g_i \in G_{b_i}$ ، $0 < b_i \leq 1$ و

$$\left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1 \quad (z \in U) \quad (76.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$I_{\gamma}(g_1, \dots, g_n)(z) = \left\{ \gamma \int_0^z t^{\gamma-1} \prod_{i=1}^n (g'_i(t)) dt \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \quad (77.2)$$

متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

اگر در قضیه ۵.۴.۲ قرار دهیم $n = 1$ ، $\alpha_1 = \alpha$ ، $b_1 = b$ و $f_1 = f$ ، $g_1 = g$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۷.۴.۲. فرض کنیم $\gamma \in \mathbb{C}$ ، $\alpha \in \mathbb{C}^*$ و

$$\operatorname{Re}\gamma \geq \frac{1}{|\alpha|} (|\alpha - 1| + 2b + 1) \quad (78.2)$$

اگر $0 < b \leq 1$ ، $g \in G_b$ ، $f \in \mathcal{A}$ و

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg'(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \quad (z \in U) \quad (79.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال تعریف شده به صورت زیر متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

$$I_{\gamma, \alpha}(f, g)(z) = \left\{ \gamma \int_0^z t^{\gamma-1+\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{g'(t)}{f(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{f(t)}{t} dt \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \quad (80.2)$$

قضیه ۸.۴.۲. فرض کنیم برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ ، $M_i \geq 1$ ، $N_i \geq 1$ ، $\delta \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re} \delta \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} [|\alpha_i - 1|(\gamma M_i + 1) + (b_i + 1)(\gamma N_i + 1) + b_i] \quad (۸۱.۲)$$

اگر برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $g_i \in G_{b_i}$ ، $0 < b_i \leq 1$ ، $f_i \in \mathcal{A}$ در شرط

$$\left| \frac{z^\gamma f'_i(z)}{[f_i(z)]^\gamma} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^\gamma g'_i(z)}{[g_i(z)]^\gamma} - 1 \right| < 1, \quad (z \in U) \quad (۸۲.۲)$$

صدق کند و

$$|f_i(z)| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i \quad (z \in U)$$

آنگاه برای هر عدد مختلط γ که $\operatorname{Re} \gamma \geq \operatorname{Re} \delta$ عملگر انتگرال تعریف شده در (۶۹.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. با در نظر گرفتن اثبات قضیه ۵.۴.۲ داریم:

$$\left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} (b_i + 1) \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \right] \quad (۸۳.۲)$$

بنابراین به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - |z|^{\gamma \operatorname{Re} \delta}}{\operatorname{Re} \delta} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \\ & \leq \frac{1 - |z|^{\gamma \operatorname{Re} \delta}}{\operatorname{Re} \delta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} (b_i + 1) \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \right] \\ & \leq \frac{1 - |z|^{\gamma \operatorname{Re} \delta}}{\operatorname{Re} \delta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left(\left| \frac{z^\gamma f'_i(z)}{[f_i(z)]^\gamma} \right| \left| \frac{f_i(z)}{z} \right| + 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{|\alpha_i|} (b_i + 1) \left(\left| \frac{z^\gamma g'_i(z)}{[g_i(z)]^\gamma} \right| \left| \frac{g_i(z)}{z} \right| + 1 \right) + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \right] \end{aligned}$$

طبق لم ۴.۱.۱ و رابطه (۸۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1 - |z|^{\gamma \operatorname{Re} \delta}}{\operatorname{Re} \delta} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| & \leq \frac{1 - |z|^{\gamma \operatorname{Re} \delta}}{\operatorname{Re} \delta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} \left(\left| \frac{z^\gamma f'_i(z)}{[f_i(z)]^\gamma} \right| M_i + M_i + 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{|\alpha_i|} (b_i + 1) \left(\left| \frac{z^\gamma g'_i(z)}{[g_i(z)]^\gamma} \right| N_i + N_i + 1 \right) + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \right] \\ & \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \delta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\alpha_i - 1|}{|\alpha_i|} (\gamma M_i + 1) + \frac{1}{|\alpha_i|} (b_i + 1) (\gamma N_i + 1) + \frac{1}{|\alpha_i|} b_i \right] \\ & \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \delta} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} [|\alpha_i - 1|(\gamma M_i + 1) + (b_i + 1)(\gamma N_i + 1) + b_i] \end{aligned}$$

بنا به فرض داریم:

$$\frac{1 - |z|^{2\operatorname{Re}\delta}}{\operatorname{Re}\delta} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U)$$

طبق لم (۴.۱.۲) عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است. $\square$

اگر در قضیه ۸.۴.۲ قرار دهیم $\alpha_i = 1$ برای $i = 1, \dots, n$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۹.۴.۲. فرض کنیم برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $N_i \geq 1$ ، $\delta \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re}\delta \geq \sum_{i=1}^n [(b_i + 1)(2N_i + 1) + b_i] \quad (۸۴.۲)$$

اگر برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $0 < b_i \leq 1$ ، $g_i \in G_{b_i}$ ،

$$\left| \frac{z^2 g'_i(z)}{[g_i(z)]^2} - 1 \right| < 1 \quad (۸۵.۲)$$

و

$$|g_i(z)| \leq N_i \quad (z \in U)$$

آنگاه برای هر عدد مختلط γ که $\operatorname{Re}\gamma \geq \operatorname{Re}\delta$ ، عملگر انتگرال تعریف شده در (۷۷.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

اگر در قضیه ۸.۴.۲ قرار دهیم $n = 1$ ، $\alpha_1 = \alpha$ ، $b_1 = b$ ، $M_1 = M$ ، $N_1 = N$ و $f_1 = f$ ، $g_1 = g$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱۰.۴.۲. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ، $N \geq 1$ ، $M \geq 1$ ، $\delta \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re}\delta \geq \frac{1}{|\alpha|} [|\alpha - 1|(2M + 1) + (b + 1)(2N + 1) + b] \quad (۸۶.۲)$$

اگر $0 < b \leq 1$ ، $g \in G_b$ ، $f \in A$

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 g'(z)}{[g(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad (z \in U) \quad (۸۷.۲)$$

و

$$|g(z)| \leq N, \quad |f(z)| \leq M, \quad (z \in U)$$

آنگاه برای هر عدد مختلط γ که $\operatorname{Re}\gamma \geq \operatorname{Re}\delta$ عملگر انتگرال تعریف شده در (۸۰.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

قضیه ۱۱.۴.۲. فرض کنیم $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ برای هر $i = 1, \dots, n$ و $\gamma \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \quad (۸۸.۲)$$

همچنین $c \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \quad (۸۹.۲)$$

اگر برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $g_i \in G_{b_i}$ ، $f_i \in \mathcal{A}$ و

$$\left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1 \quad (z \in U) \quad (۹۰.۲)$$

آنگاه عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ تعریف شده در (۶۹.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. از رابطه (۷۴.۲) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \left| c|z|^{2\gamma} + \left(1 - |z|^{2\gamma} \right) \frac{zh''(z)}{\gamma h'(z)} \right| &\leq |c| + \left| \frac{1 - |z|^{2\gamma}}{\gamma} \right| \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \\ &\leq |c| + \left| \frac{1 - |z|^{2\gamma}}{\gamma} \right| \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \\ &\leq |c| + \frac{1}{|\gamma|} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \\ &\leq |c| + \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1| + 2b_i + 1) \leq 1 \end{aligned}$$

□ لذا با استفاده از قضیه ۴.۴.۲ عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ در رده $\mathbb{S}$ است.

اگر در قضیه ۱۱.۴.۲ قرار دهیم $\alpha_i = 1$ برای $i = 1, \dots, n$ نتیجه زیر به دست می آید.

نتیجه ۱۲.۴.۲. فرض کنیم $\gamma \in \mathbb{C}^*$ ،

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \sum_{i=1}^n (2b_i + 1) \quad (۹۱.۲)$$

و $c \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma} \sum_{i=1}^n (2b_i + 1) \quad (۹۲.۲)$$

اگر برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $g_i \in G_{b_i}$ و

$$\left| \frac{zg'_i(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1 \quad (z \in U) \quad (۹۳.۲)$$

آنگاه عملگر انتگرال $I_{\gamma}(g_1, \dots, g_n)$ تعریف شده در (۷۷.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

اگر در قضیه ۱۱.۴.۲ قرار دهیم $\alpha_1 = \alpha$ ، $b_1 = b$ و $f_1 = f$ و $g_1 = g$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱۳.۴.۲. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ، $\gamma \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \frac{1}{|\alpha|} (|\alpha - 1| + 2b + 1) \quad (94.2)$$

و $c \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma} \frac{1}{|\alpha|} (|\alpha - 1| + 2b + 1) \quad (95.2)$$

اگر $0 < b \leq 1$ ، $g \in G_b$ ، $f \in \mathcal{A}$ و

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg'(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1 \quad (z \in U) \quad (96.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $I_\gamma(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ تعریف شده در (۸۰.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

قضیه ۱۴.۴.۲. فرض کنیم برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ ، $N_i \geq 1$ ، $M_i \geq 1$ و $\gamma \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1|(2M_i + 1) + (b_i + 1)(2N_i + 1) + b_i) \quad (97.2)$$

هم چنین $c \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1|(2M_i + 1) + (b_i + 1)(2N_i + 1) + b_i) \quad (98.2)$$

اگر $0 < b_i \leq 1$ ، $g_i \in G_{b_i}$ ، $f_i \in \mathcal{A}$ ، $i = 1, \dots, n$ و

$$\left| \frac{z^2 f'_i(z)}{[f_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 g'_i(z)}{[g_i(z)]^2} - 1 \right| < 1 \quad (z \in U) \quad (99.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $I_\gamma(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ تعریف شده در (۶۹.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. طبق قضیه ۸.۴.۲ داریم:

$$\begin{aligned} & \left| c|z|^{2\gamma} + \left(1 - |z|^{2\gamma}\right) \frac{zh''(z)}{\gamma h'(z)} \right| \\ & \leq |c| + \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (|\alpha_i - 1|(2M_i + 1) + (b_i + 1)(2N_i + 1) + b_i) \end{aligned}$$

از فرض به دست می‌آوریم:

$$\left| c|z|^{2\gamma} + \left(1 - |z|^{2\gamma}\right) \frac{zh''(z)}{\gamma h'(z)} \right| \leq 1$$

طبق قضیه ۱۱.۴.۲ عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ در رده $\mathbb{S}$ است. $\square$

اگر در قضیه ۱۴.۴.۲ قرار دهیم $\alpha_i = 1$ برای $i = 1, \dots, n$ نتیجه زیر به دست می آید.

نتیجه ۱۵.۴.۲. فرض کنیم $N_i \geq 1$ برای هر $i = 1, \dots, n$ و $\gamma \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \sum_{i=1}^n [(b_i + 1)(2N_i + 1) + b_i] \quad (100.2)$$

همچنین $c \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{\operatorname{Re} \gamma} \sum_{i=1}^n [(b_i + 1)(2N_i + 1) + b_i] \quad (101.2)$$

اگر $i = 1, \dots, n$ ، $0 < b_i \leq 1$ ، $g_i \in G_{b_i}$ و

$$\left| \frac{z^2 g'_i(z)}{[g_i(z)]^2} - 1 \right| < 1 \quad (z \in U) \quad (102.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha_i}(g_1, \dots, g_n)$ تعریف شده در (۷۷.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

اگر در قضیه ۱۴.۴.۲ قرار دهیم $n = 1$ ، $\alpha_1 = \alpha$ ، $b_1 = b$ ، $M_1 = M$ ، $N_1 = N$ و $f_1 = f$ و $g_1 = g$ نتیجه زیر به دست می آید.

نتیجه ۱۶.۴.۲. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ، $M \geq 1$ ، $N \geq 1$ و $\gamma \in \mathbb{C}$ و

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \frac{1}{|\alpha|} [|\alpha - 1|(2M + 1) + (b + 1)(2N + 1) + b] \quad (103.2)$$

همچنین $c \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{|\operatorname{Re} \gamma|} [|\alpha - 1|(2M + 1) + (b + 1)(2N + 1) + b] \quad (104.2)$$

اگر $0 < b \leq 1$ ، $g \in G_b$ ، $f \in A_b$ و

$$\left| \frac{z^2 f'_i(z)}{[f_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 g'_i(z)}{[g_i(z)]^2} - 1 \right| < 1 \quad (z \in U) \quad (105.2)$$

آنگاه عملگر انتگرال $I_{\gamma, \alpha}(f, g)$ تعریف شده در (۸۰.۲) متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

ملاحظه ۱۷.۴.۲. اگر در رابطه (۶۹.۲) قرار دهیم، $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$ و $g_i = f_i$ برای هر $i = 1, \dots, n$ عملگر انتگرال زیر به دست می آید.

$$I_{\gamma}^{\beta_i}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)(z) =$$

$$\left\{ \gamma \int_0^z t^{\gamma-1} \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{1-\beta_1} (f'_1(t))^{\beta_1} \dots \left(\frac{f_n(t)}{t} \right)^{1-\beta_n} (f'_n(t))^{\beta_n} dt \right\}^{\frac{1}{\gamma}}$$

که توسط فرسین^۶ در [۷] مطالعه شده است.

^۶Frasin

فصل ۳

تک ارزی عملگر انتگرال برای توابع P ظرفیتی

۱.۳ ارتباط بین توابع p -ظرفیتی و توابع تک‌ارز

در این فصل شرایط کافی برای عملگرهای انتگرال p -ظرفیتی با توان p ام از توابع تک‌ارز در دیسک واحد را به دست می‌آوریم.

تعریف ۱.۱.۳. $A(p)$ را رده‌ای از توابع داده شده به صورت زیر که در دیسک واحد U تحلیلی و p -ظرفیتی هستند، تعریف می‌کنیم.

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \quad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}) \quad (1.3)$$

تعریف ۲.۱.۳. تابع $f(z) \in A(p)$ ستاره‌گون p -ظرفیتی از مرتبه γ می‌نامیم هرگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \gamma \quad (0 \leq \gamma < p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad z \in U)$$

این زیر رده را با $S^*(p, \gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۳. $S_p^*(\gamma)$ زیررده‌ای از $S^*(p, \gamma)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < p - \gamma \quad (0 \leq \gamma < p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad z \in U) \quad (2.3)$$

تعریف ۴.۱.۳. تابع $f(z) \in A(p)$ محدب p -ظرفیتی از مرتبه γ می‌نامیم هرگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \gamma \quad (0 \leq \gamma < p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad z \in U)$$

این زیررده را با $C(p, \gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۳. $C_p(\gamma)$ زیر رده‌ای از $C(p, \gamma)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - (p-1) \right| < p-\gamma \quad (0 \leq \gamma < p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad z \in U) \quad (3.3)$$

بنابراین داریم:

$$f(z) \in C(p, \gamma) \iff \frac{zf'(z)}{p} \in \mathbb{S}^*(p, \gamma) \quad (4.3)$$

تعریف ۶.۱.۳. برای $f_i \in \mathcal{A}(p)$, $i = 1, 2, \dots, n$ و اعداد مختلط α_i و β ($\alpha_i \neq 0$) اولین عملگر انتگرال P -ظرفیتی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p(z) = \left\{ \beta p \int_0^z u^{\beta p-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(u)}{u^p} \right)^{\frac{1}{\alpha_i}} du \right\}^{\frac{1}{\beta}} \quad (5.3)$$

عملگر انتگرال p -ظرفیتی تعریف شده در (۵.۳) برای $p = 1$ توسط بریز^۱ [۲۳] مطالعه شده است.

اگر $\alpha_i = \alpha$ برای هر $i = 1, \dots, n$ و $p = 1$ در این صورت عملگر انتگرال p -ظرفیتی $\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p(z)$ تبدیل به $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^1(z)$ می‌شود [۲۲].

اگر در $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}^1(z)$ قرار دهیم $\beta = 1$ و $\alpha = 1$ به ترتیب عملگرهای انتگرال $\mathcal{F}_{\alpha, 1}^1(z)$ و $\mathcal{F}_{1, 1}^1(z)$ به دست می‌آید که توسط بریز مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است [۴].

علاوه بر این در موارد خاص وقتی که $p = n = \beta = 1$ و جای $\alpha_i = \alpha$ قرار دهیم $\frac{1}{\alpha}$ عملگر انتگرال p -ظرفیتی $\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p(z)$ تبدیل به عملگر $\mathcal{F}_{\frac{1}{\alpha}}^1(z)$ می‌شود که توسط او^۲ و پسکار^۳ بررسی شده است [۱۹].

تعریف ۷.۱.۳. برای $f_i \in \mathcal{A}(p)$, $i = 1, 2, \dots, n$ و اعداد مختلط α_i و β ($\alpha_i \neq 0$) دومین عملگر انتگرال P -ظرفیتی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p(z) = \left\{ \beta p \int_0^z u^{\beta p-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f'_i(u)}{pu^{p-1}} \right)^{\alpha_i} du \right\}^{\frac{1}{\beta}} \quad (6.3)$$

برای $p = 1$ عملگر انتگرال $\mathcal{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^1(z)$ توسط بریز و برای $\beta = 1$, $\mathcal{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1}^p(z)$ توسط فراسین^۴ [۶] مطالعه و بررسی شده‌اند.

^۱Breaz

^۲Owa

^۳Pescar

^۴Frasin

قضیه ۸.۱.۳. فرض کنید $f \in A(p)$ و α عدد مختلط به طوری که $R(\alpha) > 0$. همچنین

$$\frac{1 - |z|^{p\operatorname{Re}(\alpha)}}{\operatorname{Re}(\alpha)} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - (p-1) \right| \leq p \quad (z \in U) \quad (7.3)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$\mathcal{H}_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z u^{p(\alpha-1)} f'(u) du \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (8.3)$$

توان p یک تابع تک ارز در U است.

۱.۱.۳ عملگر انتگرال $\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p$

قضیه ۹.۱.۳. فرض کنیم $f_i \in \mathbb{S}^*(p, \gamma_i)$ ، $0 \leq \gamma_i < p$ ، برای هر $i = 1, \dots, n$. اگر پارامترهای β و α_i ($\alpha_i \neq 0$) مختلط و

$$p\operatorname{Re}(\beta) \geq 1 - p + \sum_{i=1}^n \frac{(p - \gamma_i)}{|\alpha_i|} \quad (9.3)$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p$ تعریف شده در (۵.۳) توان p یک تابع تک ارز در U است. **برهان.** تابع زیر را تعریف می کنیم:

$$h(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(u)}{u^p} \right)^{\frac{1}{\alpha_i}} du \quad (10.3)$$

در این صورت:

$$h'(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(z)}{z^p} \right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \quad (11.3)$$

از رابطه (۱۱.۳) و ضرب z به دست می آوریم:

$$\frac{zh''(z)}{h'(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - p \right) \quad (12.3)$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - |z|^{p\operatorname{Re}(\beta)}}{\operatorname{Re}(\beta)} \left| 1 - p + \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \\ &= \frac{1 - |z|^{p\operatorname{Re}(\beta)}}{\operatorname{Re}(\beta)} \left| 1 - p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - p \right) \right| \\ &\leq \frac{1 - |z|^{p\operatorname{Re}(\beta)}}{\operatorname{Re}(\beta)} \left[1 - p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} \left| \frac{zf'_i(z)}{f_i(z)} - p \right| \right] \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\beta)} \left[1 - p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\alpha_i|} (p - \gamma_i) \right] \leq p \end{aligned}$$

لذا طبق قضیه ۸.۱.۳ عملگر انتگرال $\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p$ تعریف شده در (۵.۳) توان p ام یک تابع تک ارز در U است. $\square$

اگر در قضیه ۹.۱.۳ قرار دهیم $\beta = n = 1$ ، $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha}$ ، $\gamma_1 = \gamma$ و $f_1 = f$ نتیجه زیر به دست می آید.

نتیجه ۱۰.۱.۳. فرض کنیم $f_i \in \mathbb{S}^*(p, \gamma)$ ، اگر α ، $|\alpha| \neq \frac{1}{p}$ پارامتر مختلط باشد و در شرط

$$p \geq \frac{|\alpha| - \gamma}{2|\alpha| - 1} \quad (13.3)$$

صدق کند، آنگاه عملگر انتگرال

$$\mathcal{F}_{\alpha}^p(z) = \int_0^z p u^{p-1} \left(\frac{f(u)}{u^p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} du \quad (14.3)$$

توان p ام یک تابع تک ارز در U است.

اگر در نتیجه ۱۰.۱.۳ قرار دهیم $\alpha = 1$ نتیجه زیر به دست می آید.

نتیجه ۱۱.۱.۳. فرض کنیم $f \in \mathbb{S}^*(p, \gamma)$ و

$$p \geq 1 - \gamma \quad (15.3)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$\mathcal{F}^p(z) = \int_0^z \frac{f(u)}{u} du \quad (16.3)$$

توان p ام یک تابع تک ارز در U است.

قضیه ۱۲.۱.۳. فرض کنیم برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $f_i \in C(p, \gamma_i)$ ، $0 \leq \gamma_i < p$ ، اگر α_i و β پارامترهای مختلط و

$$p \operatorname{Re}(\beta) \geq 1 - p + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|(p - \gamma_i) \quad (17.3)$$

آنگاه عملگر انتگرال $\mathcal{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p$ تعریف شده در (۶.۳) توان p ام یک تابع تک ارز در U است.

برهان. تعریف می کنیم:

$$g(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i'(u)}{p u^{p-1}} \right)^{\alpha_i} du \quad (18.3)$$

در این صورت :

$$g'(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{f'_i(z)}{pz^{p-1}} \right)^{\alpha_i} \quad (۱۹.۳)$$

از رابطه (۱۹.۳) و ضرب z داریم:

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{zf''_i(z)}{f'_i(z)} - (p-1) \right) \quad (۲۰.۳)$$

طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - |z|^{2p\operatorname{Re}(\beta)}}{\operatorname{Re}(\beta)} \left| 1 - p + \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \\ &= \frac{1 - |z|^{2p\operatorname{Re}(\beta)}}{\operatorname{Re}(\beta)} \left| 1 - p + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{zf''_i(z)}{f'_i(z)} - (p-1) \right) \right| \\ &\leq \frac{1 - |z|^{2p\operatorname{Re}(\beta)}}{\operatorname{Re}(\beta)} \left[1 - p + \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \left| \frac{zf''_i(z)}{f'_i(z)} - (p-1) \right| \right] \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\beta)} \left[1 - p + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|(p - \gamma_i) \right] \leq p \end{aligned}$$

از این رو طبق قضیه ۸.۱.۳ عملگر انتگرال $\mathcal{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}^p$ تعریف شده در (۶.۳) توان p ام یک تابع تک‌ارز در U است. $\square$

اگر در قضیه ۱۲.۱.۳ قرار دهیم $\alpha_1 = \alpha, \beta = n = 1, \gamma_1 = \gamma$ و $f_1 = f$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱۳.۱.۳. فرض کنیم $f \in C(p, \gamma)$ اگر α که $(\alpha \neq 2)$ پارامتر مختلط و

$$p \geq \frac{1 - \gamma|\alpha|}{2 - |\alpha|} \quad (۲۱.۳)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$\mathcal{G}_{\alpha}^p(z) = \int_0^z pu^{p-1} \left(\frac{f'(u)}{pu^{p-1}} \right)^{\alpha} du \quad (۲۲.۳)$$

توان p ام یک تابع تک‌ارز در U است.

اگر در نتیجه ۱۳.۱.۳ قرار دهیم $\alpha = 1$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱۴.۱.۳. فرض کنیم $f \in C(p, \gamma)$ اگر

$$p \geq 1 - \gamma \quad (23.3)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$G^p(z) = \int_0^z f'(u) du \quad (24.3)$$

توان p یک تابع تک ارز در U است.

۲.۳ عملگر انتگرال T_γ

در این بخش، محک تک ارزی را برای عملگر انتگرال T_γ بررسی می‌کنیم. ابتدا لم و قضیه‌هایی را که در این قسمت لازم داریم بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۲.۳. اگر g تابع تحلیلی در U و $|g(z)| < 1$ آنگاه برای هر $\xi \in U$ و $z \in U$ داریم:

$$\left| \frac{g(\xi) - g(z)}{1 - \overline{g(z)}g(\xi)} \right| \leq \left| \frac{\xi - z}{1 - \overline{z}\xi} \right| \quad (25.3)$$

و

$$|g'(z)| \leq \frac{1 - |g(z)|^2}{1 - |z|^2} \quad (26.3)$$

لم ۲.۲.۳. [لم شوارتز] فرض کنیم $f(z)$ در دیسک واحد U تحلیلی و $f(0) = 0$. اگر $|z| < 1$ آنگاه

$$|f(z)| \leq |z| \quad (|z| < 1) \quad (27.3)$$

اگر $f(z) = Kz$ و $|K| = 1$ تساوی برقرار است.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم γ عدد مختلط $1 \leq \operatorname{Re} \gamma$ ، $g \in \mathcal{A}$. اگر

$$|g(z)| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (28.3)$$

آنگاه عملگر انتگرال

$$G_\gamma(z) = \left[\gamma \int_0^z u^{\gamma-1} e^{g(u)} du \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (29.3)$$

متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. تابع تحلیلی $f(z)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(z) = \int_0^z e^{g(u)} du \quad (30.3)$$

در این صورت داریم:

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| = (1 - |z|^2) |z| |g'(z)| \quad (31.3)$$

طبق رابطه (۲۸.۳) و قضیه ۱.۲.۳ به دست می‌آوریم:

$$|g'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \quad (32.3)$$

از (۳۱.۳) و (۳۲.۳) به دست می‌آوریم:

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (33.3)$$

طبق (۳۰.۳) به دست می‌آوریم:

$$f'(z) = e^{g(z)}$$

□

طبق رابطه (۳۳.۳) و لم ۴.۱.۲ عملگر انتگرال G_γ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنیم γ عدد مختلط $\gamma \in \mathbb{C}$ ، $\operatorname{Re} \gamma = a > 0$ ، $g \in \mathcal{A}$. اگر

$$|zg'(z)| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (34.3)$$

و در شرط

$$|\gamma| \leq \frac{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}{2} \quad (35.3)$$

صدق کند، آنگاه

$$T_\gamma(z) = \left[\gamma \int_0^z u^{\gamma-1} (e^{g(u)})^\gamma du \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (36.3)$$

متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

برهان. تعریف می‌کنیم:

$$f(z) = \int_0^z [e^{g(u)}]^\gamma du \quad (37.3)$$

تابع تحلیلی $h(z)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$h(z) = \frac{1}{|\gamma|} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \quad (38.3)$$

طبق (37.3) و (38.3) به دست می آوریم:

$$h(z) = \frac{\gamma}{|\gamma|} zg'(z) \quad (39.3)$$

با استفاده از (34.3) و (39.3) به دست می آوریم:

$$|h(z)| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (40.3)$$

از (39.3) داریم:

$$h(0) = 0$$

همچنین با استفاده از لم شوارتز 2.2.3 نتیجه می گیریم:

$$|h(z)| \leq |z| \quad (z \in U) \quad (41.3)$$

از این رو به دست می آوریم:

$$\frac{1 - |z|^{2a}}{a} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{|\gamma|}{a} (1 - |z|^{2a}) |z| \quad (42.3)$$

تابع $Q: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ، $Q(x) = (1-x)^{2a}x$ ، $x = |z|$ را در نظر می گیریم. لذا برای هر $x \in [0, 1]$ داریم:

$$Q(x) \leq \frac{2a}{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}} \quad (43.3)$$

از روابط (35.3)، (42.3) و (43.3) به دست می آوریم:

$$\frac{1 - |z|^{2a}}{a} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1 \quad (44.3)$$

لذا طبق رابطه (44.3) و لم 4.1.2 عملگر انتگرال T_γ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است. $\square$

۳.۳ عملگر انتگرال $f_1, f_2, \dots, f_n$

در بخش جاری، عملگر $f_1, f_2, \dots, f_n$ را برای حالتی که $f_i \in A$ مورد بررسی قرار می دهیم. قبل از آن به لم و تعاریف مورد استفاده در این قسمت اشاره می کنیم.

لم ۱.۳.۳. فرض کنیم تابع f به صورت زیر در دیسک واحد U تحلیلی باشد،

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \quad (45.3)$$

و

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (46.3)$$

آنگاه تابع f در U تک‌ارز است.

تعریف ۲.۳.۳. عملگر دیفرانسیل راسچوی^۵ $R^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ را برای $f \in \mathcal{A}$ ، $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^0 f(z) = f(z),$$

$$R^1 f(z) = zf'(z),$$

$$(n+1)R^{n+1}f(z) = z[R^n f(z)]' + nR^n f(z) \quad (47.3)$$

ملاحظه ۳.۳.۳. اگر $f \in \mathcal{A}$ و

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j \quad (48.3)$$

آنگاه

$$R^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} C_{n+j-1}^n a_j z^j \quad (49.3)$$

با

$$R^n f(0) = 0 \quad [R^n f(0)]' = 1 \quad (50.3)$$

با استفاده از عملگر دیفرانسیل راسچوی داده شده در تعریف ۲.۳.۳ عملگر انتگرال زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۳.۳. عملگر انتگرال $I = \mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{A}$ را برای $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ، $\alpha_i \in \mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I = (f_1, f_2, \dots, f_m)(z) = \int_0^z \left[\frac{R^n f_1(t)}{t} \right]^{\alpha_1} \dots \left[\frac{R^n f_m(t)}{t} \right]^{\alpha_m} dt \quad (z \in U) \quad (51.3)$$

که $f_i(z) \in \mathcal{A}$ و R^n عملگر دیفرانسیل راسچوی است.

^۵Ruscheweyh

ملاحظه ۵.۳.۳. برای $\alpha_1 = 1, m = 1, n = 0$ و $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ داریم:

$$R^0 f(z) = f(z) \quad (52.3)$$

عملگر انتگرال الکساندر مطالعه شده در [۱] به دست می آوریم:

$$I(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt \quad (z \in U) \quad (53.3)$$

برای $R^0 f(z) = f(z) \in \mathbb{S}$ و $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0, \alpha_1 = \alpha \in [0, 1], m = 1, n = 0$ عملگر انتگرال زیر را به دست می آوریم:

$$I_\alpha(z) = \int_0^z \left[\frac{f(t)}{t} \right]^\alpha dt \quad (54.3)$$

برای $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0, |\gamma| \leq \frac{1}{4}, \alpha_1 = \gamma \in \mathbb{C}, m = 1, n = 1$ و $R^1 f(z) = z f'(z) \in \mathbb{S}$ عملگر انتگرال زیر را داریم [۱۴]:

$$F_\gamma(z) = \int_0^z [f'(t)]^\gamma dt \quad (55.3)$$

برای $R^0 f(z) = f(z) \in \mathbb{S}$ و $i \in \{1, 2, \dots, m\}, \alpha_i \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n = 0$ داریم [۵]:

$$F(z) = \int_0^z \left[\frac{f_1(t)}{t} \right]^{\alpha_1} \dots \left[\frac{f_m(t)}{t} \right]^{\alpha_m} dt \quad (56.3)$$

برای $F_m : \mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{A}$ عملگر انتگرال $\alpha_i > 0$ و $i \in \{1, 2, \dots, m\}, \alpha_i \in \mathbb{C}, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ زیر را به دست می آوریم [۱۲]:

$$F_m(f_1, f_2, \dots, f_m)(z) = \int_0^z \left[\frac{R^n f_1(t)}{t} \right]^{\alpha_1} \dots \left[\frac{R^n f_m(t)}{t} \right]^{\alpha_m} dt \quad (57.3)$$

برای $R^0 f(z) = f(z)$ و $\alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0, \alpha_1 = \gamma, m = 1, n = 0$ داریم [۲۰]:

$$F_\gamma(z) = \int_0^z \left[\frac{f(t)}{t} \right]^\gamma dt \quad (58.3)$$

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنیم $f_i \in \mathcal{A}, i \in \{1, 2, \dots, m\}, \alpha_i \in \mathbb{C}, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ اگر

$$\left| \frac{z(R^n f_i(z))'}{R^n f_i(z)} - 1 \right| \leq 1, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m| \leq 1 \quad (59.3)$$

آنگاه $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ داده شده در (۵۱.۳) تک ارزی است.

برهان. از آنجایی که $f_i \in \mathcal{A}$ ، $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ طبق ملاحظه ۳.۳.۳ داریم:

$$\frac{R^n f_i(z)}{z} = \frac{z + \sum_{j=2}^{\infty} C_{n+j-1}^m a_{j,i} z^j}{z} = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} C_{n+j-1}^m a_{j,i} z^{j-1}, \quad (60.3)$$

$$\frac{R^n f_i(z)}{z} \neq 0 \quad (z \in U)$$

برای $z = 0$ داریم:

$$\left[\frac{R^n f_1(z)}{z} \right]^{\alpha_1} \dots \left[\frac{R^n f_m(z)}{z} \right]^{\alpha_m} = 1 \quad (61.3)$$

با مقایسه (۵۱.۳) به دست می آوریم:

$$I'(f_1, f_2, \dots, f_m(z)) = \left[\frac{R^n f_1(z)}{z} \right]^{\alpha_1} \dots \left[\frac{R^n f_m(z)}{z} \right]^{\alpha_m} \quad (z \in U) \quad (62.3)$$

$$I'(f_1, f_2, \dots, f_m(0)) = 1$$

با استفاده از (۶۲.۳) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} & \log I'(f_1, f_2, \dots, f_m(z)) \\ &= \alpha_1 [\log R^n f_1(z) - \log z] + \dots + \alpha_m [\log R^n f_m(z) - \log z] \quad (z \in U) \end{aligned} \quad (63.3)$$

با مقایسه (۶۳.۳) داریم:

$$\frac{I''(f_1, f_2, \dots, f_m(z))}{I'(f_1, f_2, \dots, f_m(z))} = \alpha_1 \left[\frac{(R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} - \frac{1}{z} \right] + \dots + \alpha_m \left[\frac{(R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} - \frac{1}{z} \right] \quad (z \in U) \quad (64.3)$$

به دست می آوریم:

$$\frac{z I''(f_1, f_2, \dots, f_m(z))}{I'(f_1, f_2, \dots, f_m(z))} = |\alpha_1| \left[\frac{z(R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} - 1 \right] + \dots + |\alpha_m| \left[\frac{z(R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} - 1 \right] \quad (65.3)$$

با ضرب قدر مطلق رابطه (۶۵.۳) در $(1 - |z|^2)$ داریم:

$$\begin{aligned} & (1 - |z|^2) \left| \frac{z I''(f_1, f_2, \dots, f_m(z))}{I'(f_1, f_2, \dots, f_m(z))} \right| \\ &= (1 - |z|^2) \left| \alpha_1 \left[\frac{z(R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} - 1 \right] + \dots + \alpha_m \left[\frac{z(R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} - 1 \right] \right| \\ &\leq (1 - |z|^2) \left[|\alpha_1| \left| \frac{z(R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} - 1 \right| + \dots + |\alpha_m| \left| \frac{z(R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} - 1 \right| \right] \\ &\leq [|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|] (1 - |z|^2) \leq |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| \leq 1 \end{aligned} \quad (66.3)$$

با استفاده از لم ۱.۳.۳ عملگر انتگرال $I'(f_1, f_2, \dots, f_m(z))$ متعلق به رده $\mathbb{S}$ است.

ملاحظه ۷.۳.۳. برای $n = 0$ ، $R^n f_i(z) = f_i(z) \in \mathbb{S}$ ، قضیه ۶.۳.۳ از [۵] به دست می آید. برای $\alpha_i \in R$ ، $\alpha_i > 0$ ، قضیه ۶.۳.۳ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

نتیجه ۸.۳.۳. فرض کنیم $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ، $\alpha_i > 0$ با $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq 1$ اگر $f_i \in \mathcal{A}$ و

$$\left| \frac{z(R^n f_i(z))'}{R^n f_i(z)} - 1 \right| \leq 1 \quad (z \in U) \quad (67.3)$$

آنگاه عملگر انتگرال داده شده در (۵۱.۳) تک ارزی است.

قضیه ۹.۳.۳. فرض کنیم $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ، $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ، اگر $f_i \in \mathcal{A}$ و

$$i) |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| \leq \frac{1}{3}$$

$$ii) |R^n f_i(z)| \leq 1$$

$$ii) \left| \frac{z^2 (R^n f_i(z))'}{(R^n f_i(z))^2} - 1 \right| < 1$$

آنگاه عملگر انتگرال داده شده در (۵۱.۳) تک ارزی است.

برهان. با استفاده از رابطه (۶۴.۳) به دست می آوریم:

$$\left| \frac{z [I(f_1, f_2, \dots, f_m(z))']'}{[I(f_1, f_2, \dots, f_m(z))']'} \right| = |\alpha_1| \left| \frac{z(R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} - 1 \right| + \dots + |\alpha_m| \left| \frac{z(R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} - 1 \right| \quad (68.3)$$

با ضرب $(1 - |z|^2)$ در رابطه (۶۸.۳) و لم شوارتز ۲.۲.۳ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 & (1 - |z|^2) \left| \frac{z F''(z)}{F'(z)} \right| \\
 &= (1 - |z|^2) |\alpha_1| \left| \frac{z (R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} - 1 \right| + \dots + |\alpha_m| \left| \frac{z (R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} - 1 \right| \\
 &= (1 - |z|^2) |\alpha_1| \left| \frac{z (R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} \right| + (1 - |z|^2) |\alpha_1| + \dots \\
 &+ (1 - |z|^2) |\alpha_m| \left| \frac{z (R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} \right| + (1 - |z|^2) |\alpha_m| \\
 &= (1 - |z|^2) |\alpha_1| \left[\left| \frac{z (R^n f_1(z))'}{R^n f_1(z)} \right| + \dots + \left| \frac{z (R^n f_m(z))'}{R^n f_m(z)} \right| \right] + (1 - |z|^2) [|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|] \\
 &= (1 - |z|^2) \left[|\alpha_1| \left| \frac{z^2 (R^n f_1(z))'}{(R^n f_1(z))^2} \right| \frac{|R^n f_1|}{|z|} + \dots \right. \\
 &+ |\alpha_m| \left| \frac{z^2 (R^n f_m(z))'}{(R^n f_m(z))^2} \right| \frac{|R^n f_m|}{|z|} + (1 - |z|^2) [|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|] \\
 &\leq (1 - |z|^2) \left[|\alpha_1| \left| \frac{z^2 (R^n f_1(z))'}{(R^n f_1(z))^2} \right| + \dots + |\alpha_m| \left| \frac{z^2 (R^n f_m(z))'}{(R^n f_m(z))^2} \right| \right] \\
 &+ (1 - |z|^2) [|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|] \\
 &= (1 - |z|^2) \left[|\alpha_1| \left| \frac{z^2 (R^n f_1(z))'}{(R^n f_1(z))^2} \right| - |\alpha_1| + |\alpha_1| \right] \\
 &+ \dots + (1 - |z|^2) \left[|\alpha_m| \left| \frac{z^2 (R^n f_m(z))'}{(R^n f_m(z))^2} \right| - |\alpha_m| + |\alpha_m| \right] + (1 - |z|^2) [|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - |z|^2) \left[|\alpha_1| \left| \frac{z^2 (R^n f_1(z))'}{(R^n f_1(z))^2} - 1 \right| + \dots + |\alpha_m| \left| \frac{z^2 (R^n f_m(z))'}{(R^n f_m(z))^2} - 1 \right| \right] \\
 &+ (1 - |z|^2)(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|) + (1 - |z|^2)(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|) \\
 &\leq (1 - |z|^2)(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|) + 2(1 - |z|^2)(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|) \\
 &= 3(1 - |z|^2)(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|) \\
 &\leq 3(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|). \tag{۶۹.۳}
 \end{aligned}$$

از (۶۹.۳) و شرط (i) داریم:

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{z F''(z)}{F'(z)} \right| \leq 1 \quad (z \in U) \tag{۷۰.۳}$$

لذا عملگر انتگرال $I(f_1, f_2, \dots, f_m(z))$ تک ارز است. $\square$

ملاحظه ۱۰.۳.۳. برای $\alpha_1 = \alpha \in \mathbb{C}, m = 1, n = 0$ ، $|\alpha| \leq \frac{1}{3}$ ، $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ ، نتیجه در [۲۰] به دست آمده شده است.

برای $\alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i > 0$ قضیه ۹.۳.۳ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

نتیجه ۱۱.۳.۳. فرض کنیم $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ و $\alpha_i > 0$. اگر $f_i \in A$ و

$$i) \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq \frac{1}{3},$$

$$ii) |R^n f_i(z)| \leq 1,$$

$$ii) \left| \frac{z^2 (R^n f_i(z))'}{(R^n f_i(z))^2} - 1 \right| < 1.$$

آنگاه عملگر انتگرال داده شده در (۵۱.۳) تک ارز است.

مراجع

- [1] Alexander, James Waddell. "Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions." *The Annals of Mathematics* 17.1 (1915): 12-22.
- [2] Blezu, Dorin. "On univalence criteria." *General Mathematics* 14.1 (2006): 87-93.
- [3] Breaz, D. A. N. I. E. L., and N. I. C. O. L. E. T. A. Breaz. "Two integral operators." *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica* 47.3 (2002): 13-19.
- [4] Breaz, D. A. N. I. E. L., and N. I. C. O. L. E. T. A. Breaz. "Two integral operators." *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica* 47.3 (2002): 13-19.
- [5] Breaz, D. A. N. I. E. L., and N. I. C. O. L. E. T. A. Breaz. "Two integral operators." *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica* 47.3 (2002): 13-19.
- [6] Frasin, B. A. "New general integral operators of p-valent functions." *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 10.4 (2009): 9.
- [7] Frasin, Basem Aref. "Univalence criteria for general integral operator." *Mathematical Communications* 16.1 (2011): 115-124.
- [8] Hallenbeck, D. J., and A. E. Livingston. "Subordination chains and p-valent functions." preprint (1975).
- [9] Mayer, O. "The functions theory of one complex variable." Bucuresti (1981).
- [10] Moldoveanu, S. I. L. V. I. A., NICOLAE N. Pascu, and RADU N. Pascu. "On the univalence of an integral operator." *Mathematica* 43 (2001): 113-116.
- [11] Miller, Sanford S., and Petru T. Mocanu. *Differential subordinations: theory and applications*. CRC Press, 2000.
- [12] Oros, Georgia Irina, and Gheorghe Oros. "A convexity property for an integral operator f m." *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica* 3 (2010).
- [13] Pascu, N. N. "An improvement of Becker's univalence criterion." *Proceedings of the Commemorative Session Simion Stoilow, Brasov* (1987): 43-48.

- [14] Pascu, N. N., and V. Pescar. "On the integral operators of Kim-Merkes and Pfaltz-graff." *Mathematica (Cluj)* 32.55 (1990): 185-192.
- [15] Pascu, N. N. "On a univalence criterion. II." In *Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity (Cluj-Napoca, 1985)*, vol. 85, pp. 153-154. Cluj-Napoca, Romania: Babeş-Bolyai University, 1985.
- [16] Pascu, N. N. "On a univalence criterion. II." *Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity (Cluj-Napoca, 1985)*. Vol. 85. Cluj-Napoca, Romania: Babeş-Bolyai University, 1985.
- [17] Pascu, N. N. "An improvement of Becker's univalence criterion." *Proceedings of the Commemorative Session Simion Stoilow, Brasov (1987)*: 43-48.
- [18] Pescar, Virgil. "A new generalization of Ahlfors's and Becker's criterion of univalence." *Bull. Malaysian Math. Soc.(Second Series)* 19 (1996): 53-54.
- [19] Pescar, Virgil, and Shigeyoshi Owa. "Sufficient conditions for univalence of certain integral operators." *Indian Journal of Mathematics* 42.3 (2000): 347-352.
- [20] Pescar, Virgil, and Shigeyoshi Owa. "Sufficient conditions for univalence of certain integral operators." *Indian Journal of Mathematics* 42.3 (2000): 347-352.
- [21] Rosy, T., Stephen, B.A., Subramanian, K.G., and Jahangiri, J.M., Goodman-Ronning type harmonic univalent functions, *Kyungpook Math. J*, 41 (2001), 45-54.
- [22] Srivastava, Hari Mohan, and Shigeyoshi Owa, eds. *Current topics in analytic function theory*. Singapore: World Scientific, 1992.
- [23] Seenivasagan, Narayanasamy, and Daniel Breaz. "Certain sufficient conditions for univalence." *General Mathematics* 15.4 (2007): 7-15.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic Function	تابع تحلیلی
Bound	کران
Complex	مختلط
Field	میدان
Injective Function	تابع یک به یک
Integral operator	عملگر انتگرال
Starlike Function	تابع ستارگون
Univalent	تک‌ارز

Aabstract

For analytic functions in the open unit disk U , we define some general integral operator. According to Alexander lemma, if $f(z)$ be convex function then $\int_0^z \frac{f(u)}{u} du$ is a starlike function. Therefor in this thesis we study some conditions of Alexander operator to detemine univalence conditions of them.

Keywords: Starlike Function, Univalent Function, Analitic Function, Integral Operator



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

**Univalence of integral operator for
subclasses of starlike functions**

Hamideh Shokuhi

Supervisor

Dr. Ahmad Zireh

September 2016