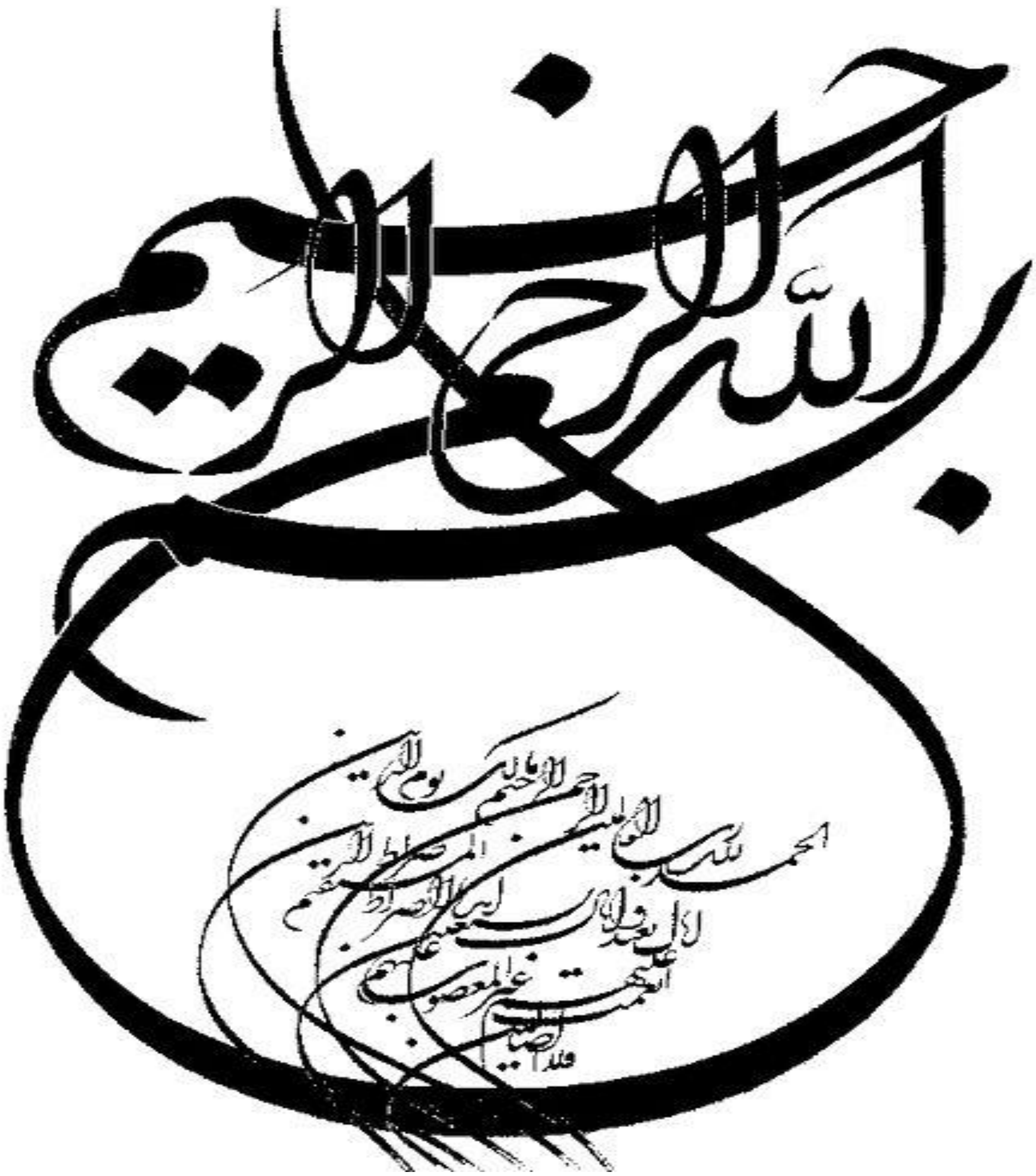
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی

گروه محض

بعد گلدی و بعد دوگان گلدی مدول چند جمله ایها روی حلقه چند جمله ایهای اریب

ملیحه قدیری

استاد راهنما :

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور :

دکتر احمد زیره

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۸۹

تقدیم به ...

تقدیم به پدر عزیز و مادر مهربانم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید .

به پاس دست های گرم و نگاه پر فروغشان که راهگشاست.

و به پاس عشق و محبت بی دریغشان که هرگز فراموش نمی شود.

سلامت و سعادتشان را از ایزد منان خواستارم.

تشکر و قدردانی

اینک که به یاری پروردگار مهربان و اساتید گرامی پایان نامه ام را به سرانجام رسانده ام بسی شایسته است از استاد راهنمای فرهیخته و گرانقدرم جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی که با راهنمایی های کار ساز و سازنده ، راهگشای من بوده اند ، تقدیر و تشکر نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر احمد زیره به خاطر زحماتشان سپاسگذارم. از خواهر مهربانم به خاطر کمک های بی دریغ و همراهی دلسوزانه و از خانواده عزیزم که با پشتیبانی همیشگی خود در تمامی دوران زندگی امید موفقیت را در من زنده نگاه داشتند ، متشکرم.

ملیحه قدیری

مهر ماه ۱۳۸۹

چکیده

حلقه R را متناهی البعد راست نامیم اگر شامل مجموع مستقیم تعداد نامتناهی ایده آل راست ناصفر نباشد. در فصل اول این پایان نامه ، نشان می دهیم که حلقه چند جمله ای ها روی حلقه با بعد متناهی ، از بعد متناهی است.

در فصل دوم ، به مطالعه بعد گلدی و بعد دوگان گلدی برخی توسیع های یک مدول روی حلقه چند جمله ایهای اریب می پردازیم. در واقع، با فرض اینکه M یک مدول (σ,δ)- سازگار باشد به مطالعه بعد گلدی و بعد دوگان گلدی مدولهای $M[x]$ ، $M[x^{-1}]$ و $M[x,x^{-1}]$ روی حلقه چند جمله ایهای اریب $S:=R[x;\sigma,\delta]$ می پردازیم و ثابت می کنیم بعد گلدی مدول های M_R ، $M[x,x^{-1}]$ و $\frac{M[x]}{<x^n>}$ برابر است. همچنین اگر R یک حلقه جابجایی باشد ، ثابت می کنیم بعد دوگان گلدی مدول های $R[x]$ و $R[x,x^{-1}]$ برابر است. اگر M_R یک R - مدول یکانی باشد ، نشان می دهیم بعد دوگان گلدی مدول های M_R و $\frac{M[x]}{<x^n>}$ برابر است.

این پایان نامه بر گرفته از دو مقاله به شرح ذیل می باشد:

1- Co-uniform dimension over skew polynomial rings, Communications in Algebra , 33 (2005) , p. 1195-1204.
2- Polynomial rings over finite dimensional rings , Robert C .Shock , pacific Journal of mathematics vol.42, No.1,1972.

کلمات کلیدی : (σ,δ)- سازگار ، بعد گلدی ، بعد دوگان گلدی ، حلقه چند جمله ایهای اریب

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست علائم

$ann(m)$	پوچساز راست m
$Aut(R)$	مجموعه تمام خودریختی های حلقه R
$Corank\,(M_R)$	بعد دوگان گلدی مدول M_R
$\deg(f(x))$	درجه چند جمله ای $f(x)$
$\dim(R)$	بعد گلدی حلقه R
DVR	حلقه مقدار گسسته
$End(R)$	مجموعه تمام درونریختی های حلقه R
$Ess(R)$	مجموعه تمام ایده آل های راست اساسی حلقه R
f_i^j	مجموع تمام کلماتی از σو δ که هر کلمه شامل تعداد i حرف از σ و $j-i$ حرف از δ است
$Ker(\phi)$	هسته همریختی ϕ
$l(K)$	پوچساز چپ مجموعه K
$\prod_{i=1}^{k} N_i$	حاصلضرب مستقیم زیر مدولهای N_1 ، N_2 ،... و N_k
$\bigoplus_{i=1}^{k} N_i$	حاصلجمع مستقیم زیر مدولهای N_1 ، N_2 ،... و N_k

PID	دامنه ایده آل اصلی
$rad\,(R)$	رادیکال ژاکوبسون حلقه R
$r\,(S)$	پوچساز راست مجموعه S
$R[x]$	حلقه چند جمله ایهای R
$R[x,x^{-1};\sigma]$	حلقه چند جمله ایهای اریب لوران روی R
$R[x;\sigma,\delta]$	حلقه چند جمله ایهای اریب روی R
$\frac{R}{I}$	حلقه خارج قسمتی R بر I
$u.\dim(M_R)$	بعد گلدی مدول M_R
Z_n	مجموعه اعداد صحیح به پیمانه n
$Z\,(R)$	ایده آل راست منفرد حلقه R
δ_{ij}	دلتای کرونکر

فصل اول :

حلقه چند جمله ای ها روی حلقه متناهی البعد

۱- ۱) مقدمه و خلاصه ای از نتایج فصل اول

در سال ۱۹۶۰ گلدی[۱] نشان داد شرط لازم و کافی برای اینکه حلقه کسرهای کلاسیک راست یک حلقه وجود داشته باشد این است که نیم اول آرتینی باشد . اگر R یک حلقه نوتری راست باشد آنگاه حلقه چند جمله ای ها با تعداد متناهی متغیر روی R نیز نوتری راست است (قضیهٔ پایه ای هیلبرت). ثابت می کنیم اگر R یک حلقه متناهی البعد راست باشد، آنگاه حلقه چند جمله ای ها با تعداد متناهی متغیر روی R نیز متناهی البعد راست است.

در این فصل R نمایانگر یک حلقه شرکت پذیر است که لزوماً یکدار نیست. برای یک زیر حلقه K از R، فرض کنیم $K[x_۱, x_۲,...]$ نشان دهندهٔ حلقهٔ چند جمله ایها روی تعدادی دلخواه از متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$و ... باشد که این متغیرها با عناصر K و نیز با هم جابجا می شوند.

تعریف ۱- ۱- ۱ : ۱) ایده آل راست I در R را اساسی [۲] گوییم اگر برای هر ایده آل راست نا صفر J، $I \cap J \neq \{۰\}$ ، و با علامت $I \leq_e R$ نمایش می دهیم. مجموعه تمام ایده آل های راست اساسی R را با $Ess(R)$ نمایش می دهیم .

۲) فرض کنیم $Z(R) = \{a \in R \mid aI = ۰ \ , \ \ I \in Ess(R)$ برای برخی $\}$. می توان نشان داد $Z(R)$ یک ایده آل راست R است . $Z(R)$ را ایده آل راست منفرد حلقه R نامیم .

۳) فرض کنیم M_R یک $R-$مدول راست باشد و $m \in M$. پوچساز m را با علامت $ann(m)$ نمایش می دهیم و $ann(m) = \{r \in R \mid mr = ۰\}$.

---

۱ Goldie

۲ Essential Ideal

اگر حلقه R متناهی البعد راست باشد آنگاه عدد صحیح مثبت n موجود است بطوریکه R شامل مجموع مستقیم n ایده آل راست یکنواخت است و هر مجموع مستقیم دیگر از ایده آل های راست R حداکثر شامل n جمعوند است. این عدد صحیح منحصر به فرد بعد R نامیده می شود و با علامت $\dim R=n$ نمایش داده می شود. در این فصل نشان می دهیم برای هر حلقه متناهی البعد راست R، $\dim R=\dim R[x_1,x_2,\ldots]$. همچنین ثابت می کنیم برای هر حلقه R، $Z(R[x_1,x_2,\ldots])=Z(R)[x_1,x_2,\ldots]$. سرانجام نشان می دهیم که حلقه R نیم اول گلدی راست است اگر و تنها اگر $R[x_1,x_2,\ldots]$ نیم اول گلدی راست باشد.

۱- ۲) قضایای اصلی

تعریف ۱- ۲- ۱ : پوچساز راست زیر مجموعه S از R را با $r(S)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$r(S)=\{y\in R \mid sy=0 \;;\forall s\in S\} \quad .$$

حلقه R را با عمل ضرب زیر به یک حلقه یکدار تبدیل می کنیم. این حلقه را با $R^1=R\times Z$ نمایش می دهیم. ضرب در R^1 به صورت زیر تعریف می شود : برای هر $(m,r),(n,s)\in R^1$ ، $(m,r)\,(n,s)=(mn+rn+ms,rs)$. برای هر $b\in R$ ، bR^1 ایده آل راست اصلی تولید شده توسط عنصر b در R^1 می باشد. برای هر $(m,r)\in R^1$ و هر $a\in M$، R- مدول M را با تعریف ضرب اسکالر $(m,r)\,a=ma+ra$ ، می توان به یک R^1 - مدول تبدیل کرد. بعد R و بعد R^1 لزوماً برابر نیست . مثال بعد این مطلب را نشان می دهد.

مثال : فرض کنیم $R=\{x,\cdot\}$ ، که $x+x=x^{۲}=\cdot$. مجموع $(x,\cdot)R^{۱}+(\cdot,۲)R^{۱}$ در $R^{۱}$ یک مجموع مستقیم است. بنابراین $\dim R=۱\neq \dim R^{۱}=۲$.

لم ۱–۲ –۲ : فرض کنیم $a_{۱}$ ، $a_{۲}$ ، ... و a_n عناصری از R باشند . در این صورت برای هر $۱\leq j\leq n$ ، یا $r(a_n)=r(a_j)$ و یا $b\in R$ و $۱\leq j\leq n$ موجودند به قسمی که $a_j\, b\neq \cdot$ و برای هر $۱\leq k\leq n$ $r(a_j b)=r(a_k b)$.

اثبات : فرض کنیم $i\neq j$ موجود باشند که ، $r(a_i)\neq r(a_j)$. مجموعه پوچسازهای راست $r(a_i)$ که $a_i\neq \cdot$ را در نظر می گیریم :

$$S_{۱}=\{r(a_i)\,|\,a_i\neq \cdot \;,\; ۱\leq i\leq n\} \quad .$$

فرض کنیم $r(a_{k_{۱}})\neq r(a_{k_{۲}})$. اگر $x\in r(a_{k_{۱}})-r(a_{k_{۲}})$، آنگاه $a_{k_{۱}}\,x=\cdot$ و $a_{k_{۲}}\,x\neq\cdot$. حال مجموعه جدیدی از پوچسازهای راست $r(a_k x)$ که $a_k x\neq \cdot$ را در نظر می گیریم :

$$S_{۲}=\{r(a_k x)\,|\,a_k x\neq \cdot \;,\; ۱\leq k\leq n\} \quad .$$

تعداد اعضای مجموعه $S_{۲}$ از مجموعه $S_{۱}$ کمتر خواهد بود ، زیرا : $a_{k_{۱}}x=\cdot$. پس $r(a_{k_{۱}})\notin S_{۲}$ ، اما $r(a_{k_{۱}})\in S_{۱}$. حال مطابق قبل دو پوچساز نابرابر $r(a_{k_{۲}}x)$ و $r(a_{k_{۳}}x)$ را در نظر می گیریم . اگر $y\in r(a_{k_{۲}}x)-r(a_{k_{۳}}x)$ ، آنگاه $a_{k_{۲}}xy=\cdot$ اما $a_{k_{۳}}xy\neq \cdot$. حال مجموعه $S_{۳}$ را در نظر میگیریم :

$$S_{۳}=\{r(a_k x y)\,|\,a_k x y\neq \cdot \;,\; ۱\leq k\leq n\}.$$

با ادامه این روند می توان نشان داد عنصر $b\in R$ و $۱\leq j\leq n$ وجود دارند بقسمی که در شرایط لم صدق می کنند. ▓

تذکر ۱– ۲– ۳ : فرض کنیم $0 \neq g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$ که $a_n \neq 0$. اگر برای هر $a_j \neq 0$ داشته باشیم : $r(a_n) = r(a_j)$ ، آنگاه گوییم پوچسازهای راست ضرایب $g(x)$ برابرند.

گزاره ۱– ۲– ۴ : برای چند جمله ای ناصفر $p(x)$ در $R[x]$ عنصر $b \in R^1$ چنان موجود است که پوچسازهای راست ضرایب چند جمله ای ناصفر $p(x)b$ برابرند.

اثبات : فرض کنیم $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$. اگر برای هر $a_k \neq 0$ ، $r(a_n) = r(a_k)$ ، آنگاه با فرض $b = (0,1) \in R^1$ نتیجه بدست می آید.

اگر $a_k \neq 0$ و $r(a_n) \neq r(a_k)$ ، آنگاه بنا به لم قبل عنصر $d \in R$ و اندیس j چنان موجود است که برای هر $0 \leq h \leq n$ ، $a_j d \neq 0$ و $r(a_j d) = r(a_h d)$.

حال با فرض $b = (d, 0) \in R^1$ ، نتیجه حاصل است. ∎

لم ۱– ۲– ۵ : فرض کنیم $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_{k+n} x^{k+n}$ یک چند جمله ای در $R[x]$ باشد که $k \geq 0$. فرض کنیم $a_k \neq 0$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $r(a_k) \subseteq r(a_{k+i})$.

اگر $q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m \in R[x]$ ، آنگاه $p(x)q(x) = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، b_0 و b_1 و ... و $b_m \in r(a_{k+i})$.

اثبات : می دانیم

$$p(x)q(x) = (a_k x^k + \ldots + a_{k+n} x^{k+n})(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$$

$$= a_k b_0 x^k + (a_k b_1 + a_{k+1} b_0) x^{k+1} + (a_k b_2 + a_{k+1} b_1 + a_{k+2} b_0) x^{k+2} + \ldots + a_{k+n} b_m x^{k+n+m}$$

بنابراین $p(x)q(x)=c_k x^k + c_{k+1}x^{k+1}+\dots+c_{k+n+m}x^{k+n+m}$ ، بطوریکه $c_k=a_k b_0$. حال $a_k b_0 = c_k = 0$ و ... و $c_{k+n+m}=a_{k+n}b_m$ ، ایجاب می کند که $b_0 \in r(a_k)$ و لذا برای هر $1 \le i \le n$ ، $b_0 \in r(a_{k+i})$.

چون $b_1 a_k + b_0 a_{k+1} = c_{k+1} = 0$ و $b_0 \in r(a_{k+1})$ ، لذا $b_1 \in r(a_k)$ و در نتیجه برای هر $1 \le i \le n$ ، $b_1 \in r(a_{k+i})$.

چون $a_k b_2 + a_{k+1}b_1 + a_{k+2}b_0 = c_{k+2} = 0$ ، $b_0 \in r(a_{k+2})$ و $b_1 \in r(a_{k+1})$ ، پس $b_2 \in r(a_k)$ و در نتیجه برای هر $1 \le i \le n$ ، $b_2 \in r(a_{k+i})$.

با ادامه این روند می توان نشان داد برای هر $0 \le j \le m$ ، $b_j \in r(a_k)$. در نتیجه برای هر $1 \le i \le n$ و هر $0 \le j \le m$ ، $b_j \in r(a_{k+i})$.

بعکس : اگر ضرایب b_0 و b_1 و ... و b_m در $r(a_{k+i})$ باشند ، آنگاه برای هر $1 \le i \le n$ و $0 \le j \le m$ ، $a_{k+i}b_j = 0$. در نتیجه $p(x)q(x)=0$. ▓

تعریف ۱- ۲- ۶ : ایده آل راست K در R یکنواخت[1] نامیده می شود هر گاه برای هر دو عنصر نا صفر x و y در K داشته باشیم : $xR^1 \cap yR^1 \neq \{0\}$.

گزاره ۱- ۲- ۷ : ایده آل راست K در R یکنواخت است اگر و تنها اگر $K[x]$ در $R[x]$ یکنواخت باشد.

اثبات : فرض کنیم $K[x]$ در $R[x]$ یکنواخت نباشد . فرض کنیم $p(x)R[x]^1 + q(x)R[x]^1$ مجموعی مستقیم باشد که $p(x)$ و $q(x) \in K[x]-\{0\}$.

[1] Uniform

بنا به گزاره ۱- ۲- ۴ می توان چند جمله ایهای $p(x)$ و $q(x)$ را چنان انتخاب نمود که پوچسازهای راست ضرایب $p(x)$ و $q(x)$ برابر باشند .

قرار می دهیم $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$ و $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$. اگر $a_i \neq 0$ و $b_j \neq 0$ ، آنگاه برای هر $0 \le i \le k$ و $0 \le j \le n$ ، $r(a_k) = r(a_i)$ و $r(b_n) = r(b_j)$. بعلاوه می توان فرض کرد که $n \ge k$. با استفاده از اصل خوشترتیبی در مجموعه اعداد صحیح نا منفی و با استفاده از استقرا روی درجه $q(x)$ می توان فرض نمود که $q(x)$ کمترین درجه ممکن در بین همه $q(x)$ هایی که در بالا صدق می کنند را دارد و برای هر مجموع مستقیم دیگری به شکل $p(x)R[x]^1 + t(x)R[x]^1$ ، $\deg t(x) \ge \deg q(x)$ ، که $t(x) \in K[x] - \{0\}$ و پوچسازهای راست ضرایب $t(x)$ برابرند. چون $a_k, b_n \in K - \{0\}$ و K ایده آل راست یکنواخت در R است لذا $a_k R^1 \cap b_n R^1 \neq \{0\}$ ، یعنی z و y در R^1 موجودند بطوریکه $0 \neq a_k y = b_n z$.

قرار می دهیم $h(x) := p(x) y x^{n-k} + q(x)(-z)$. چون

$$h(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) y x^{n-k} + (b_0 + \ldots + b_n x^n)(-z)$$

$$= a_0 y x^{n-k} + \ldots + a_k y x^n - b_0 z - \ldots - b_n z x^n$$

و $a_k y = b_n z$ ، لذا $h(x) = a_0 y x^{n-k} + \ldots + a_{k-1} y x^{n-1} - b_0 z - \ldots - b_{n-1} z x^{n-1}$. پس $h(x)$ از درجه حداکثر $n-1$ است و $\deg q(x) > \deg h(x)$. همچنین $h(x) \neq 0$ ، زیرا در غیر اینصورت $p(x) y x^{n-k} = q(x) z$ ، که $q(x) z \in q(x) R[x]^1$ و $p(x) y x^{n-k} \in p(x) R[x]^1$. پس $p(x)R[x]^1 + q(x)R[x]^1$ یک مجموع مستقیم نخواهد بود .

حال ادعا می کنیم $h(x)R[x]^1 + p(x)R[x]^1$ مجموع مستقیم نیست. بنا به گزاره ۱ – ۲- ۴، $b \in R^1$ چنان موجود است که پوچسازهای راست ضرایب $h(x) b \neq 0$ برابرند. بوضوح $\deg q(x) > \deg h(x) b$. اگر $h(x) R[x]^1 + p(x) R[x]^1$ مجموع مستقیم باشد، آنگاه $(h(x) b) R[x]^1 + p(x) R[x]^1$ نیز مجموع مستقیم خواهد بود، که یک تناقض است.

زیرا $q(x)$ در بین همه مجموع های مستقیم به شکل $q(x)R[x]^1 + p(x)R[x]^1$ کمترین درجه را داشت ولی درجه $h(x)b$ از درجه $q(x)$ کمتر است. بنابراین $h(x)R[x]^1 + p(x)R[x]^1$ مجموع مستقیم نیست ، پس چند جمله ایهای $m(x), g(x) \in R[x]^1$ چنان موجودند که $0 \neq h(x)m(x) = p(x)g(x)$. اگر $q(x)(-z)m(x) = 0$ ، آنگاه بنا به لم ۱- ۲- ۵ ضرایب $m(x)$ در $r(b_n z)$ خواهند بود . می دانیم $r(b_n z) = r(a_k y)$ ، پس باز هم بنا به لم ۱- ۲- ۵ چون ضرایب $m(x)$ در $r(a_k y)$ هستند خواهیم داشت : $p(x)yx^{n-k}m(x) = 0$. بنابراین $0 \neq h(x)m(x) = [p(x)yx^{n-k} + q(x)(-z)]m(x) = 0$ ، که یک تناقض است . پس نتیجه می شود که $q(x)(-z)m(x) \neq 0$. اما

$$0 \neq q(x)(-z)m(x) = h(x)m(x) - p(x)yx^{n-k}m(x)$$

$$= p(x)g(x) - p(x)yx^{n-k}m(x)$$

که با مجموع مستقیم بودن $p(x)R[x]^1 + q(x)R[x]^1$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و $K[x]$ ایده آل راست یکنواخت در $R[x]$ می باشد .

حالت عکس بطور مشابه اثبات می شود. ▓

فرض کنیم K یک ایده آل راست اساسی باشد ، در این صورت برای برخی عناصر ناصفر a_1 و a_2 و ... و a_n در R ، $b \in R^1$ موجود است که $a_i b \in K - \{0\}$ ، زیرا با توجه به اساسی بودن K خواهیم داشت : $K \cap a_1 R^1 \neq \{0\}$ ، بنابراین عناصر $k_1 \in K$ و $r_1 \in R^1$ چنان موجودند که $k_1 = a_1 r_1 \neq 0$ لذا $a_1 r_1 \in K - \{0\}$.

اگر $a_2 r_1 = 0$ ، کافیست عنصر b را به شکل $b = r_1 \in R^1$ انتخاب کنیم. در غیر اینصورت خواهیم داشت: $a_2 r_1 R^1 \cap K \neq \{0\}$. پس $r_2 \in R^1$ چنان موجود است که $a_2 r_1 r_2 \in K - \{0\}$. بنابراین $b = r_1 r_2 \in R^1$. با ادامه این روند برای ما بقی a_i ها ، عنصر b را بدست می آوریم.

گزاره ۱– ۲– ۸ : حلقه R متناهی البعد راست است اگر وتنها اگر حلقه چند جمله ای های $R[x]$ متناهی البعد راست باشد. بعلاوه $\dim R = \dim R[x]$.

اثبات : فرض کنیم R متناهی البعد راست باشد و $\dim R = k$. پس مجموعه متناهی از ایده آل های راست یکنواخت ناصفر از R مانند $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ چنان موجود است که $L' = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ مجموع مستقیم است و L' در R اساسی است . زیرا در غیر این صورت ایده آل ناصفر J از R موجود است که $J \cap L' = \{0\}$. پس $L' + J = L_1 + L_2 + \ldots + L_k + J$ مجموع مستقیم است که با فرض $\dim R = k$ در تناقض خواهد بود. ادعا می کنیم $L'[x] = L_1[x] + \ldots + L_k[x]$ یک مجموع مستقیم است ، زیرا برای هر $f_1(x) \in L_1[x]$ و $f_2(x) \in L_2[x]$ و ... و $f_k(x) \in L_k[x]$ ، اگر $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) = 0$ ، آنگاه با فرض $f_i(x) = a_0^i + a_1^i x + \ldots + a_{n_i}^i x^{n_i}$ ، برای هر $1 \leq i \leq k$ و $n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ ، خواهیم داشت :

$$(a_0^1 + a_1^1 x + \ldots + a_n^1 x^n) + \ldots + (a_0^k + a_1^k x + \ldots + a_n^k x^n) = 0$$

$$\Rightarrow (a_0^1 + a_0^2 + \ldots + a_0^k) + (a_1^1 + a_1^2 + \ldots + a_1^k)x + \ldots + (a_n^1 + a_n^2 + \ldots + a_n^k)x^n = 0 \qquad .$$

اما برای هر $0 \leq i \leq n$ ، $a_i^1 + a_i^2 + \ldots + a_i^k \in L_1 + \ldots + L_k$. چون $L' = L_1 + \ldots + L_k$ مجموع مستقیم بود و برای هر $0 \leq i \leq n$ ، $a_i^1 + a_i^2 + \ldots + a_i^k = 0$ ، در نتیجه برای هر $0 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq k$ ، $a_i^j = 0$. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq k$ ، $f_i(x) = 0$.

چون برای هر $1 \le i \le k$ ، L_i در R یکنواخت است ، بنا به گزاره ۱- ۲- ۷ ، $L_i[x]$ در $R[x]$ یکنواخت می باشد.

ادعا می کنیم که اساسی بودن L' در R نتیجه می دهد که $L'[x]$ در $R[x]$ اساسی است. فرض کنیم $p(x)$ یک چند جمله ای ناصفر در $R[x]$ باشد . پس بنا به گزاره ۱- ۲- ۴ ، $b \in R^1$ چنان موجود است که $p(x)b \neq 0$. همچنین پوچسازهای راست ضرایب نا صفر چند جمله ای $p(x)b = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)b$ برابرند. در نتیجه برای هر $0 \le i \le n$ ، $r(a_i b) = r(a_n b)$. از طرفی چون L' در R اساسی است لذا $a_0 bR \cap L' \neq \{0\}$. پس $r_0 \in R$ موجود است بطوریکه $a_0 b r_0 \in L'$. حال اگر $a_1 b r_0 \neq 0$ ، آنگاه $a_1 b r_0 R \cap L' \neq \{0\}$. در نتیجه $r_1 \in R$ چنان موجود است که $a_1 b r_0 r_1 \in L'$. با ادامه این روند برای مابقی a_iها، $b' \in R^1$ بدست می آید بطوریکه هر ضریب از $p(x)b'$ به L' تعلق دارد. لذا $p(x)b' \in L'[x]$. بنابراین $R[x]$ نیز متناهی البعد راست است و $\dim R = \dim R[x]$.

حالت عکس بطور مشابه اثبات می شود . ▓

قضیه ۱- ۲- ۹ : حلقه R متناهی البعد راست است اگر و تنها اگر $R[x_1, x_2, \ldots]$ متناهی البعد راست باشد. بعلاوه $\dim R = \dim R[x_1, x_2, \ldots]$.

برهان : فرض کنیم $\dim R = n$. ابتدا نشان می دهیم برای هر عدد صحیح نامنفی k ، $\dim R = \dim R[x_1, \ldots, x_k]$. این مطلب با استفاده از استقرا روی تعداد متغیرها و گزاره ۱- ۲- ۸ بوضوح اثبات می شود.

قرار می دهیم $S := R[x_1, x_2, \ldots]$. (فرض خلف) فرض کنیم $\dim S = n+1$. مجموع مستقیم $p_1 S^1 + \ldots + p_n S^1 + p_{n+1} S^1$ را در نظر بگیرید ، که برای هر $1 \le i \le n+1$ ، $p_i \in S$.

هر جمله از هر چند جمله ای p_i شامل فقط تعدادی متناهی از متغیرهای x_1 و x_2 و ... است . لـذا بـرای هـر $1 \le i \le n+1$ ، $p_i \in R[x'_1,\dots,x'_k]$ ، کـه x'_1 و x'_2 و ... و x'_k یـک زیـر مجموعـه متنـاهی مناسب از متغیرهای x_1 و x_2 و ... است.

قرار می دهیم $T := R[x'_1,\dots,x'_k]$. مجموع مستقیم $p_1T^1 + \dots + p_{n+1}T^1$ را در نظر می گیـریم . در نتیجه $\dim T > n = \dim R$ ، که یـک تنـاقض اسـت ، زیـرا $\dim R[x'_1,\dots,x'_k] = \dim R$. پـس $\dim S \le \dim R$ ، و چون $\dim S \ge \dim R$، لذا $\dim S = \dim R$. ▓

قضــــــیه ۱- ۲- ۱۰ : فـــرض کنـــیم R یـــک حلقـــه باشـــد . در ایـــن صـــورت $Z(R[x_1, x_2,\dots]) = Z(R)[x_1, x_2,\dots]$.

برهان : قرار می دهیم $S := R[x_1, x_2,\dots]$. فرض کنیم a_1 و a_2 و ... و a_n ضـرایب چنـد جملـه ای p در S باشند. اگر برای هر $1 \le i \le n$ ، $a_i \in Z(R)$ ، آنگاه $r(a_i) \le_e R$ ، و لذا $\cap r(a_i) \le_e R$. واضح است کـه $\cap r(a_i)[x_1, x_2,\dots]$ در S اساسـی اسـت و $\cap r(a_i)[x_1, x_2,\dots] \subseteq r(p)$. بنـابراین $Z(R)[x_1, x_2,\dots] \subseteq Z(S)$.

حال فرض کنیم h یک چند جمله ای در $Z(S)$ باشد. h را به شکل مجموع دو چنـد جملـه ای h_1 و h_2 طوری می نویسیم که $h_1 \in Z(R)[x_1, x_2,\dots]$ و هر ضریب نا صفر از h_2 متعلق بـه $Z(R)$ نباشد . بنابراین $h_1 \in Z(S)$. چون $h \in Z(S)$ پـس $h_2 \in Z(S)$ ، و در نتیجـه $r(h_2) \le_e S$. فرض کنیم $h_2 \ne 0$. اگر $a_n \ne 0$ ضریب پیشرو h_2 باشد، آنگاه $a_n \in R - Z(R)$. چون $a_n \notin Z(R)$ ، لذا $r(a_n)$ در R اساسی نیست و در نتیجه عنصر نا صفر $b \in R$ موجود است بطوریکه

$$r(a_n) \cap bR^1 = \{0\}. \qquad (*)$$

همچنین $r(h_2)\cap bS^1=\{0\}$ ، زیرا در غیر اینصورت $0\neq g(x)\in S^1$ چنان موجود است که $h_2 b\, g(x)=0$. در این صورت با فرض $g(x)=b_0+...+b_m x^m$ خواهیم داشت : $a_n bb_m=0$. اما $bb_m\neq 0$ ، که با (*) در تناقض است . در نتیجه $r(h_2)\cap bS^1=\{0\}$. چون $r(h_2)\leq_e S$ ، لذا $h_2=0$ و در نتیجه $Z(S)\subseteq Z(R)[x_1,x_2,...]$ ، که حکم ثابت می شود. ▓

۱- ۳) کاربرد

در این بخش قضایای گلدی[1] و اسمال[2] را برای حلقه چند جمله ایها تعمیم می دهیم . از این پس فرض می کنیم R حلقه ای یکدار است.

تعریف ۱- ۳- ۱ : ۱- ایده آل راست K یک پوچساز راست نامیده می شود ، اگر برای زیر مجموعه مناسب S از R، $K=r(S)$.

۲- حلقه R گلدی راست نامیده می شود ، اگر متناهی العبد راست باشد و مجموعه تمام پوچساز های راست آن در شرط ماکسیمال صدق کنند.

۳- پوچی عنصر پوچ توان a از حلقه R ، کوچکترین عدد طبیعی n است که $a^n=0$.

۴- پوچی ایده آل پوچ توان I از حلقه R ، کوچکترین عدد طبیعی n است که $I^n=0$.

۵- $x\in R$ منظم راست است هر گاه برای هر $r\in R$ ،

$$xr=0 \quad\Rightarrow\quad r=0.$$

$x\in R$ منظم است هر گاه منظم راست و منظم چپ باشد .

---
[1] Goldie
[2] Small

۶- فرض کنیم S یک زیر مجموعه بسته ضربی نا تهی از حلقه R باشد و $ass\ S=\{r\in R \mid rs=0 \quad ,\exists s\in S\}$. در این صورت ، Q ، حلقه کسرهای راست R نسبت به S نامیده می شود هر گاه همومورفیسم $\phi: R\to Q$ وجود داشته باشد بقسمی که

(i) برای هر $s\in S$ ، $\phi(s)$ یکه Q باشد .

(ii) برای هر $q\in Q$ ، $r\in R$ و $s\in S$ وجود داشته باشند که $q=\phi(r)\phi(s)^{-1}$.

(iii) $Ker\ \phi=ass\ S$.

همچنین اگر $ass\ S=0$ ، آنگاه برای هر $q\in Q$ ، $r\in R$ و $s\in S$ وجود دارند که $q=rs^{-1}$.

اگر S یک مجموعه بسته ضربی باشد که تمام عناصرش منظم هستند ، آنگاه RS^{-1} حلقه کسرهای کلاسیک راست R خواهد بود .

گزاره ۱- ۳- ۲ : حلقه R نیم اولِ گلدی راست است اگر و تنها اگر $R[x_1,x_2,\ldots]$ نیم اول گلدی راست باشد.

اثبات : بدیهی است که یک حلقه نیم اولِ گلدی راست ، متناهی العبد راست و نیم اول است. می دانیم اگر حلقه R نیم اول و گلدی راست باشد، آنگاه یک ایده آل راست از آن اساسی است اگر و تنها اگر شامل یک عنصر منظم باشد. اما $Z(R)=\{a\in R \mid r(a)\leq_e R\}$. بنابراین $r(a)$ شامل یک عنصر منظم است ، پس $r(a)=R$ ، و در نتیجه $a=0$. بنابراین $\{0\}$ ایده آل منفرد است.

قرار می دهیم $S:=R[x_1,x_2,\ldots]$. بنا به قضیه ۱- ۲- ۹ ، حلقه R متناهی العبد راست است اگر و تنها اگر حلقه S متناهی البعد راست باشد. قضیه ۱- ۲- ۱۰ ایجاب می کند که $Z(R)=0$ اگر و تنها اگر $Z(S)=0$. بوضوح R نیم اول است اگر و تنها اگر S نیم اول باشد. بنابراین اثبات کامل است. ▩

نتیجه ۱– ۳– ۳ : (اسمال[1]). حلقه R نیم اول گلدی راست است اگر و تنها اگر برای هـر n ، $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ، نیم اول گلدی راست باشد.

اثبات : اثبات این نتیجه با توجه به گزاره قبل بدیهی است. ▓

قضیه ۱– ۳– ۴ : (شاک[2]). فرض کنیم R یک حلقه متناهی البعد راست باشد . زیـر حلقـه پوچ B در R پوچ توان است ، اگر وتنها اگر زیر حلقه $B \bigcap Z(R)$ پوچ توان باشد. بعلاوه اگر $Z(R)$ با پوچی k باشد، آنگاه هر زیر حلقه پوچ ، پوچ توان است و پوچی آن حداقل $k(\dim R+1)$ است.

اثبات : اثبات در [۱۳] .

قضیه ۱–۳– ۵ : فرض کنیم R یک حلقه متناهی البعد راسـت باشـد. و $S := R[x_1, x_2, \ldots]$. در این صورت زیر حلقه پوچ K در S پوچ توان است اگر و تنها اگر $K \cap Z(R)[x_1, x_2, \ldots]$ پوچ تـوان باشد. بعلاوه اگر $Z(R)$ با پوچی k باشد ، آنگاه هر زیر حلقه پوچ در S پوچ توان اسـت و پـوچی آن حداقل $k(\dim R+1)$ است .

برهان : بنا به قضیه ۱- ۲- ۹ ، حلقه R متناهی البعد راست است اگر و تنها اگر حلقه S متناهی البعد راست باشد . اکنون بنا به قضیه قبل زیر حلقه پوچ K از S ، پوچ توان است اگر و تنها اگر $K \cap Z(S) = K \cap Z(R[x_1, x_2, \ldots]) = K \cap Z(R)[x_1, x_2, \ldots]$ پوچ توان باشد. ▓

[1] Small
[2] Shock

تعریف ۱– ۳– ۶ : فرض کنیم R یک حلقه باشد و $K \subseteq R$. پوچساز چپ K در R را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$l(K) = \{x \in R \mid xk = 0 \;\; ; \;\; \forall k \in K\} \quad .$$

قضیه ۱– ۳– ۷ : (اسمال[1]). فرض کنیم N نمایانگر رادیکال اول حلقه R باشد . در این صورت حلقه کسرهای کلاسیک راست R که آرتینی است وجود دارد ، اگر و تنها اگر R ویژگی های زیر را داشته باشد :

۱) N پوچ توان و $\frac{R}{N}$ یک حلقه گلدی راست باشد.

۲) هر حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{T_k}$ که $T_k = l(N^k) \cap N$ ، متناهی البعد راست باشد. (برای هر عدد صحیح نامنفی k)

۳) مجموعه کامل[2] $S(M)$ شامل مقسوم علیه های نا صفر R موجود باشد.

برهان : اثبات در [۱۶] ، [۱۷] و [۱۸] .

قضیه ۱– ۳– ۸ : اگر R حلقه کسرهای کلاسیک راست آرتینی داشته باشد آنگاه $R[x_1, x_2, \ldots]$ نیز حلقه کسرهای کلاسیک راست آرتینی دارد.

برهان : قرار می دهیم $S := R[x_1, x_2, \ldots]$. نشان می دهیم S در فرضیات قضیه ۱- ۳- ۷ صدق می کند.

---

[1] Small
[2] exhaustive set

فرض کنیم $N(R)$ رادیکال اول حلقه R و $N(S)$ رادیکـال اول حلقـه S باشـد. در ایـن صـورت برای $k \geq ۱$، $N(S)^k = N(R[x_۱, x_۲, \ldots])^k = N(R)^k[x_۱, x_۲, \ldots]$. چون $\frac{R}{N(R)}$ یک حلقه نـیم اول گلدی راست است ، و $\frac{S}{N(S)} = \frac{R[x_۱, x_۲, \ldots]}{N(R[x_۱, x_۲, \ldots])} \cong \frac{R}{N(R)}[x_۱, x_۲, \ldots]$ ، لذا بنا بـه گـزاره ۱- ۳- ۲ ، حلقه $\frac{S}{N(S)}$ نیم اول گلدی راست است.

قرار می دهیم $T_k := l(N(S)^k) \cap N(S)$ که k عدد صحیح نامنفی اسـت. اگـر $p \in T_k$ ، آنگـاه $p \in l(N(S)^k) = l(N(R)^k[x_۱, x_۲, \ldots])$. بنابراین برای هر $y \in N(R)^k$ ، $py = ۰$. چون ضـرایب p در $l(N(R)^k) \cap N(R)$ قرار دارند، لذا $T_k = (l(N(R)^k) \cap N(R))[x_۱, x_۲, \ldots]$. حلقه خارج قسـمتی $\frac{S}{T_k}$ متنـــــــــاهی البعـــــــــد راســـــــــت اســـــــــت زیـــــــــرا ، $\frac{S}{T_k} = \frac{R[x_۱, x_۲, \ldots]}{(l(N(R)^k) \cap N(R))[x_۱, x_۲, \ldots]} \cong \frac{R}{(l(N(R)^k) \cap N(R))}[x_۱, x_۲, \ldots]$ و حلقـــــــــه $\frac{R}{l(N(R)^k) \cap N(R)}$ متناهی البعد راست است .

فرض کنیم $S(M)$ نشان دهندهٔ مجموعه تمام چند جمله ای های نا صفر در S باشد که ضـرایب پیشرو آنها مقسوم علیه های صفر هستند. مجموعه $S(M)$ در S کامل است. لذا بنا به قضیه ۱- ۳- ۷ حکم ثابت می شود. ▓

نتیجه ۱- ۳- ۹ : (اسمال[۱]). اگر R حلقه کسرهای کلاسیک راسـت آرتینـی داشـته باشـد ، آنگاه برای هر $n \in N$ ، $R[x_۱, x_۲, \ldots, x_n]$ حلقه کسرهای کلاسیک راست آرتینی دارد.

اثبات : اثبات با توجه به قضیه ۱- ۳- ۸ واضح است. ▓

[۱] Small

فصل دوم :

بُعد گُلدی و بعد دوگان گلدی مدول چند جمله ایها روی حلقه چند جمله ایهای اریب

۲-۱) مقدمه و خلاصه ای از نتایج فصل دوم

در تمام این فصل R نمایانگر یک حلقه شرکت پذیر یکدار و M_R نمایانگر یک R-مدول راست است ، مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

شاک[۱] در سال ۱۹۷۲ رفتار بعد یکنواخت برخی از توسیع های حلقه R که با علامت $u.\dim(R_R)$ نمایش داده می شود، را بررسی نمود. به ویژه ، او برای هر حلقه R ثابت کرد : $u.\dim(R_R) = u.\dim(R[x]_{R[x]})$.

کارِ شاک تعمیمی از کارهای ماتزوک[۲] روی توسیع های اریب و ورادرجان[۳] روی برخی از توسیع هایی از یک حلقه در زمینه بُعد گلدی و دوگان گلدی است که در سه دهه اخیر انجام شده است . در این فصل به مطالعه و توسیع مفهوم بعد گلدی (یکنواخت) و دوگان گلدی روی حلقه چند جمله ای ها می پردازیم ؛ و چند مثال را برای روشن شدن مفاهیم اصلی ارائه می دهیم. در این فصل بیشتر با توسیع های چند جمله ای های اریب سر و کار داریم . در این فصل فرض می کنیم σ نمایانگر یک درونریختی از حلقه R و δ یک تابع σ-مشتق باشد . تابع جمعی δ را یک تابع σ-مشتق نامیم هر گاه برای هر a و $b \in R$ ، داشته باشیم :

$$\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b. \qquad (۱)$$

حلقه چند جمله ایهای اریب روی R را با $S := R[x;\sigma,\delta]$ نمایش می دهیم که در آن جمع و ضرب به طور طبیعی تعریف می شوند و عمل ضرب از قاعده زیر پیروی می کند : برای هر $a \in R$ ، $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

برای اینکه از σ و δ بتوانیم راحت تر استفاده کنیم ابتدا چند قرارداد را بیان می کنیم.

---
[۱] Shock
[۲] Matczuk
[۳] Varadarajan

قرارداد : σ و δ را همانند بالا و اعداد صحیح $j \geq i \geq 0$ را در نظر می گیریم . فرض کنیم f_i^j نمایانگر مجموع تمام کلماتی از σ و δ باشد بطوریکه هر کلمه شامل تعداد i حرف از σ و $j-i$ حرف از δ باشد . مثلاً : $f_j^j = \sigma^j$ ، $f_0^j = \delta^j$ و $f_{j-1}^j = \sigma^{j-1}\delta + \sigma^{j-2}\delta\sigma + \ldots + \delta\sigma^{j-1}$.

با استفاده از رابطه بازگشتی برای f_i^j و استقرا ، با انجام محاسبات معمولی می توان نشان داد برای هر $a \in R$،

$$x^j a = \sum_{i=0}^{j} f_i^j(a) x^i . \tag{2}$$

فرض کنیم M_R یک R- مدول راست باشد . مجموعه تمام چندجمله ای ها با ضرایب در M را به $M[x]$ نمایش می دهیم و آن را به یک S- مدول تبدیل می کنیم : عمل جمع روی $M[x]$ بطور طبیعی تعریف می شود و عمل ضرب اسکالر از قاعده $(mx)(a) = m\sigma(a)x + m\delta(a)$ پیروی می کند.

نتیجه : برای هر $m(x) = m_0 + m_1 x + \cdots + m_k x^k \in M[x]$ و هر $r \in R$ ،

$$m(x) r = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} m_j f_i^j(r) x^i . \tag{3}$$

اثبات : با محاسبات ساده و استفاده از (۲) داریم :

$$m(x)r = m_0 r + m_1 x r + \ldots + m_k x^k r$$

$$= m_0 r + m_1 (\sum_{i=0}^{1} f_i^1(r) x^i) + m_2 (\sum_{i=0}^{2} f_i^2(r) x^i) + \ldots + m_k (\sum_{i=0}^{k} f_i^k(r) x^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} m_j f_i^j(r) x^i \quad .$$

▓

از فرمول (۳) در ادامه زیاد استفاده خواهد شد.

در حالت خاص اگر $\delta = 0$ و σ یک اتومورفیسم باشد، می توانیم مجموعه تمام چند جمله ایهای معکوس پذیر $M[x^{-1}]$ را به S- مدول تبدیل نماییم : برای هر $i, j \geq 0$ ، هر $m \in M$ و هر $a \in R$:

$$(mx^{-i})(ax^j) := \begin{cases} m\sigma^{-i}(a) x^{-i+j} & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} .$$

تعریف ۲- ۱- ۱ : فرض کنیم M_R یک R- مدول ، $\sigma : R \rightarrow R$ یک درونریختی و $\delta : R \rightarrow R$ یک تابع σ- مشتق باشد. گوییم M_R ، σ- سازگار است اگر برای هر $m \in M$ و هر $r \in R$ داشته باشیم : $mr = 0 \Leftrightarrow m\sigma(r) = 0$. گوییم M_R ، δ- سازگار است اگر برای هر $m \in M$ و هر $r \in R$ داشته باشیم : $mr = 0 \Rightarrow m\delta(r) = 0$. اگر M_R هم σ- سازگار و هم δ- سازگار باشد گوییم M_R ، (σ, δ)- سازگار است.

تعریف : ۱) R - زیر مدول N_R از M_R را اساسی نامیم ، اگر برای هر $m \in M$ ، $r \in R$ موجود باشد بطوریکه $0 \neq mr \in N$. و با علامت $N_R \subseteq_e M_R$ نمایش می دهیم .

۲) R - مدول M_R را یکنواخت نامیم ، هر گاه برای هر دو عنصر نا صفر x و y در M داشته باشیم : $xR \bigcap yR \neq \{0\}$.

حال مفاهیم بُعد گلدی و بعد دوگان گلدی که در این فصل با آنها سروکار داریم را یادآوری می کنیم.

تعریف ۲– ۱– ۲ : گوییم M_R بعد گلدی n دارد هر گاه یک زیر مدول اساسی $V_R \subseteq M_R$ وجود داشته باشد بطوریکه مجموع مستقیم n زیر مدول یکنواخت باشد و می نویسیم $u.\dim(M_R) = n$. اگر چنین nای وجود نداشته باشد می نویسیم $u.\dim(M_R) = \infty$.

می توان نشان داد اگر M_R یک R - مدول راست باشد آنگاه

$u.\dim(M_R) = \sup\{ k \in \mathrm{N} \mid$ شامل مجموع مستقیم k - زیر مدول ناصفر باشد M_R $\}$.

تعریف ۲– ۱–۳ : بعد دوگان گلدی R - مدول نا صفر M را با علامت $Corank\,(M_R)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

فرض کنیم $k \geq 1$. گوییم $Corank\,(M_R) \geq k$ ، هر گاه زیر مدول های نا صفر N_1 ، N_2 و … و N_k و اپی مورفیسم $f : M \to \prod_{i=1}^{k} N_i$ موجود باشد . اگر $Corank\,(M_R) \geq k$ و $Corank\,(M_R) \ngeq k+1$، گوییم $Corank\,(M_R)$ دقیقاً k است . اگر برای هر $k \geq 1$ ، $Corank\,(M_R) \geq k$ ، گوییم $Corank\,(M_R) = \infty$.

به عبارت دیگر :

$Corank(M_R)=\sup\{\ k\in \mathbb{N}\ |$ برای زیر مدولهای ناصفر $L_1, L_2, \ldots, L_k$، یک اپی مورفیسم $\}$

$M_R \to L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$ وجود داشته باشد.

مفهوم $Corank$ اولین بار توسط ورادرجان[1] درمقاله [۱۹] ارائه شده است. اکنون نتایج اصلی این فصل را بیان می کنیم. مجموعه تمام خود ریختی های حلقه R را به $Aut(R)$ نمایش می دهیم.

ابتدا نشان می دهیم ، اگر $\sigma \in Aut(R)$ و δ یک تابع σ- مشتق و M_R یک $R-$ مدول (σ,δ)- سازگار باشد، آنگاه $u.\dim(M[x]_S)=u.\dim(M_R)$.

همچنین اگر $\sigma \in Aut(R)$ و $S=R[x;\sigma]$، آنگاه برای هر مدول M_R:

(a) $u.\dim(M[x^{-1}]_S)=u.\dim(M_R)$.

(b) اگر R یک حلقه کامل راست باشد آنگاه $Corank(M[x^{-1}]_S)=Corank(M_R)$.

تعریف ۲ – ۱– ۴ : زیر مجموعه A از حلقه R را $T-$پوچتوان راست (چپ) نامیم هرگاه برای هر دنباله از عناصر A مانند $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ عدد صحیح $n \geq 1$ وجود داشته باشد بطوریکه $a_n \ldots a_2 a_1 = 0$ $(a_1 a_2 \ldots a_n = 0)$.

تعریف ۲– ۱– ۵ : حلقه R را کامل راست[2] (چپ) نامیم اگر $\frac{R}{radR}$ یک حلقه نیم ساده و $rad\, R$ ، $T-$پوچتوان راست (چپ) باشد. R را حلقه کامل گوییم اگر هم کامل چپ و هم کامل راست باشد.

---
[1] Varadarajan
[2] Right Perfect Ring

گزاره ۲- ۱- ۶ : [۸] حلقه R کامل راست است هرگاه $\frac{R}{radR}$ نیم ساده باشد و هر مدول نا صفر M_R شامل یک زیر مدول ماکسیمال باشد.

۲- ۲) بعد گلدی مدول چند جمله ایها روی حلقه چند جمله ایهای اریب

ماتزوک[۱] نتایج برجسته شاک[۲] در ارتباط با بُعد گلدی حلقه چند جمله ای ها را به حلقه چند جمله ای های اریب $S := R[x;\sigma,\delta]$ تعمیم داد .

ماتزوک چندجمله ای را که بتوان رابطه ای بین پوچسازهای ضرایب آن پیدا نمود ، چند جمله ای "خوب " نامید [۱۱] . چنین پوچسازهایی نقش اساسی در مطالعه بعد گلدی حلقه چند جمله ای ها بازی می کنند . اشکال اساسی در مواجهه با این چند جمله ایهای خوب این است که اگر شرط خاصی روی σ و δ نداشته باشیم ممکن است چند جمله ای های خوب رفتار مورد نظر ما را نداشته باشند . البته ، نتایج [۱۱] فقط برای توسیع های اریب که σ و δ در شرایط لازم صدق می کنند ، کاربرد دارد. برای بدست آوردن نتایج کلی برای مدول M_R محدودیت های مشابهی را باید اعمال کرد . می توان خانواده ای از چند جمله ایها را در $M[x]$ ، مشابه چند جمله ایهای خوبِ ماتزوک معرفی کرد که ویژگی های مورد نیاز لم های ۲- ۲- ۲ و ۲- ۲- ۳ را برای بدست آوردن یکی از نتایج اصلی داشته باشد. به ویژه ، لزوم فراوانی این چند جمله ایها به (σ,δ) - سازگاری مدول M_R وابسته است.

---

[۱] Matczuk
[۲] Shock

تعریف ۲– ۲– ۱ : چند جمله ای ناصفر $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k \in M[x]$ $(m_k\neq 0)$ را AC [1] نامیم ، اگر برای هر $i\leq k$ داشته باشیم $ann(m_k)\subseteq ann(m_i)$.

لم ۲– ۲– ۲ : فرض کنیم $\sigma\in End(R)$ و δ یک تابع σ- مشتق و M_R یک مدول (σ,δ)- سازگار باشد. اگر $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k \in M[x]$ یک چند جمله ای نا صفر باشد ، آنگاه $r\in R$ وجود دارد بطوریکه $m(x)r$ یک چند جمله ای AC است.

اثبات : (فرض خلف) فرض کنیم $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k$ چند جمله ای در $M[x]$ از کمترین درجه ممکن k باشد که برای هر $r\in R$ ، $m(x)r$ چند جمله ای AC نیست .

بوضوح $k\geq 1$. به ویژه $m(x)$ چند جمله ای AC نیست . بنابراین iای موجود است که $ann(m_k)\not\subset ann(m_i)$. پس $b\in R$ وجود دارد که $b\in ann(m_k)$ و $b\notin ann(m_i)$، یعنی $m_kb=0$ اما $m_ib\neq 0$.

حال

$$m(x)b=m_0b+m_1xb+\ldots+m_kx^kb$$

$$=m_0b+\ldots+m_k(\sum_{i=0}^{k} f_i^k(b)\,x^i)$$

$$=m_0b+\ldots+m_k(f_0^k(b)+f_1^k(b)\,x^1+\ldots+f_k^k(b)x^k)$$

$$=m_0b+\ldots+m_k(\delta^k(b)+\delta^{k-1}(b)\,\sigma(b)x+\delta^{k-2}(b)\,\sigma(b)\,\delta(b)x+\ldots+\sigma(b)\,\delta^{k-1}(b)x+\ldots+\sigma^k(b)x^k).$$

---

[1] Annihilator - Compliant

$m_k \sigma^k(b)$ ضریب جمله kام چند جمله ای $m(x)b$ است که با توجه به σ- سازگاری M_R و اینکه $m_k b = ۰$ نتیجه می شود $m_k \sigma^k(b) = ۰$. پس $m(x)b$ حداکثر از درجه $k-۱$ خواهد بود. حال با استفاده از (۳) ، خاصیت (σ, δ)- سازگاری M_R و از اینکه $m_i b \neq ۰$ ، نتیجه می شود $m(x)b \neq ۰$. با توجه به انتخاب $m(x)$ ، $c \in R$ چنان موجود است که $m(x)bc$ چند جمله ای AC می باشد ، که با فرض در تناقض است . پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. ▓

یک خاصیت جالب دیگر از چند جمله ای های AC روی یک مدول (σ, δ)- سازگار M_R ، این است که هر مضرب اسکالر نا صفر از آن باز هم یک چند جمله ای AC است.

لم ۲- ۲- ۳ : فرض کنیم σ ، δ و M_R همانند لم قبل باشند. فرض کنیم $m(x) \in M[x]$ یک چند جمله ای AC باشد و $r \in R$. اگر $m(x)r \neq ۰$، آنگاه $m(x)r$ نیز AC است.

اثبات : فرض کنیم $m(x) = m_۰ + m_۱ x + \cdots + m_k x^k \in M[x]$ و $m(x)r \neq ۰$. $m_k \sigma^k(r)$ ضریب جمله kام چند جمله ای $m(x)r$ است که باید نا صفر باشد ، زیرا در غیر این صورت ،

$$m_k \sigma^k(r) = ۰ \;\Rightarrow\; m_k r = ۰ \;\Rightarrow\; m_i r = ۰ \;\Rightarrow\; \begin{cases} m_i \sigma(r) = ۰ \\ m_i \delta(r) = ۰ \end{cases} \;\Rightarrow\; m(x) r = ۰$$

که یک تناقض است ، بنابراین $m_k \sigma^k(r) \neq ۰$ ضریب پیشرو چند جمله ای $m(x)r$ است .

اکنون فرض کنیم $a \in ann(m_k \sigma^k(r))$. بنا به (۳) ، $\sum_{j=i}^{k} m_j \, f_i^j(r)$ ضریب جمله iام از $m(x)r$ است . پس کافیست نشان دهیم $a \in ann(m_j \, f_i^j(r))$ و بدین ترتیب AC بودن چند جمله ای $m(x)r$ نتیجه خواهد شد .

اکنون چون $m_k \sigma^k(r)a=۰$ و M_R یک مدول σ- سازگار است ، خواهیم داشت $m_k ra=۰$.

در نتیجه $ra \in ann\,(m_k)$. بنا به خاصیت AC چند جمله ای $m(x)$ ، برای هر $j \le k$ ،

$ra \in ann\,(m_j)$. در نتیجه برای هر $j \le k$ ، $m_j ra=۰$.

اکنون برای هر $m \in M$ و هر $a,r \in R$ ،

$$m\sigma(r)a=۰ \iff m\sigma(r)\sigma(a)=۰ \iff m\sigma(ra)=۰ \iff mra=۰$$

لذا $ann\,(mr)=ann\,(m\sigma(r)) \subseteq ann\,(m\delta(r))$ (*) .

حال کافیست نشان دهیم $ann\,(mr) \subseteq ann\,(m\delta(r))$. فرض کنیم $a \in ann\,(mr)$. پس $mra=۰$. بنا به خاصیت δ- سازگاری M_R ، $m\delta(ra)=۰$. از (۱) نتیجه می شود $m\,(\,\sigma(r)\,\delta(a)+\delta(r)\,a\,)=۰$.

چون $mra=۰$ ، بنا به خاصیت σ- سازگاری M_R، $m\sigma(r)a=0$. با توجه به خاصیت δ- سازگاری مدول M_R ، $m\sigma(r)\delta(a)=۰$. در نتیجه $m\delta(r)a=۰$ ، و لذا $a \in ann\,(m\delta(r))$. بنابراین $ann\,(mr) \subseteq ann\,(m\delta(r))$. چون برای هر $j \le k$، $m_j ra=۰$ ، از رابطه (*) نتیجه می شود برای هر $i \le j$ ، $m_j\ f_i^j(r)a=۰$. بنابراین اثبات کامل می گردد. ▓

پوچساز یک چند جمله ای AC در S را می توان بر اساس پوچسازی از R بیان کرد. در نتایج بعدی هم σ یک درون ریختی از حلقه R می باشد.

لم ۲- ۲- ۴ : فرض کنیم M_R یک مدول (σ,δ)- سازگار و $m(x)=m_۰+m_۱x+\ldots+m_k x^k \in M[x]$ $(m_k \neq ۰)$ یک چند جمله ای AC باشد . اگر $\beta=ann(m_k)_R$، آنگاه $ann(m(x))_S=\beta\,[x;\sigma,\delta]$.

اثبات : فرض کنیم $g(x)=a_{0}+a_{1}x+\ldots+a_{l}x^{l}\in\beta[x;\sigma,\delta]$ که $a_l\neq 0$. چون برای هر j ،

$a_j\in\beta=ann(m_k)$ ، لذا $m_k a_j=0$. بنا به خاصیت AC چند جمله ای $m(x)$ ، برای هر j و i :

$m_i\, a_j=0$.

یک جمله نوعی از چند جمله ای $m(x)\,g(x)$ به شکل زیر می باشد :

$$(m_j x^j)(a_d x^d)=m_j x^j a_d x^d=(m_j\sum_{i=0}^{j}f_i^{\,j}(a_d)x^i\,)x^d\;=m_j\sum_{i=0}^{j}f_i^{\,j}(a_d)x^{i+d}\quad .$$

چون $m_j a_d=0$ ، لذا بنا به (σ,δ)- سازگاری M_R ، $m_j\;f_i^{\,j}(a_d)=0$. در نتیجه

$m(x)\,g(x)=0$ و $g(x)\in ann(m(x))_S$. بنابراین $\beta\,[x;\sigma,\,\delta]\subseteq ann(m(x))_S$ (*) .

اکنون فرض کنیم تساوی برقرار نباشد ، یعنی $ann(m(x))_S\not\subset\beta[x;\sigma,\delta]$. فرض کنیم چند جمله ای $g(x)$ با حداقل درجه l چنان موجود باشد که $g(x)\in ann(m(x))_S-\beta[x;\sigma,\delta]$ و جمله ثابت $g(x)$ نا صفر باشد . با در نظر گرفتن $g(x)$ به شکل بالا ، خواهیم داشت :

$$0=m(x)\,g(x)\;=m_k\,\sigma^k(a_l)\;x^{k+l}+\text{" جملات از درجه کمتر "}\quad\Rightarrow\quad m_k\,\sigma^k(a_l)=0\quad .$$

با توجه به σ- سازگاری M_R، $m_k a_l=0$ ، لذا $a_l\in ann(m_k)=\beta$. بنا به خاصیت AC چند جمله ای $m(x)$ ، برای هر j خواهیم داشت : $m_j a_l=0$. بنا به (σ,δ)- سازگاری M_R ، برای هر j و i ، $m_j\;f_i^{\,j}(a_l)=0$. با توجه به (۳) ، $m(x)\;a_l x^l=0$. بنابراین

$$m(x)\;(a_{0}+a_{1}x+\ldots+a_{l-1}x^{l-1})=0\quad\Rightarrow\quad h(x)=a_{0}+\ldots+a_{l-1}x^{l-1}\in ann(m\;(x))_{\;S}\,.$$

چون $a_l\in\beta$ و $h(x)\notin\beta\,[x;\sigma,\delta]$ ، لذا $h(x)\in ann(m(x))_S-\beta[x;\sigma,\delta]$، که با مینیمم بودن l در تناقض است . پس فرض خلف باطل است و $ann(m(x))_S\subseteq\beta[x;\sigma,\delta]$ (**) .

از (*)و (**) حکم ثابت می گردد. ▓

در مثال بعد نشان می دهیم که لم ۲- ۲- ۴ بدون فرض (σ,δ) - سازگاری M_R برقرار نیست .

مثال ۲– ۲– ۵ : فرض کنیم R یک حلقه دلخواه باشد و $R:=R[t]$. تابع $\sigma: R \to R$ با ضابطهٔ $\sigma(t)=t+1$ یک R- اتومورفیسم است . قرار می دهیم $M:=(\frac{R}{tR})_R$. مدول M_R ، (σ,δ)- سازگار نیست ؛ زیرا با فرض $m=tR+1$ و $t \in R$ ، خواهیم داشت :

$$m\sigma(t)=(tR+1)\ (t+1)=tR+t+1=tR+1 \neq tR=0$$

$$mt\ =(tR+1)\ (t)=tR+t=tR=0\ .$$

فرض کنیم $m(x):=\bar{1}x \in M[x]$ ، که " $\bar{\ }$ " نشان دهنده عنصری از مدول خارج قسمتی M_R است. $m(x)$ فقط یک ضریب نا صفر دارد ، زیرا $m(x)=(tR+1)x=tR+x$. بنابراین $m(x)$ یک چند جمله ای AC می باشد ، اما $ann(\bar{1})_R=tR$ و

$$m(x)t=(\bar{1}x)t=\bar{1}(xt)=\bar{1}(\sigma(t)x)=\bar{1}(t+1)x=(tR+1)(tx+x)=tR+tx+x=tR+x=\bar{1}x\neq 0$$

در نتیجه $t \notin ann(m(x))_S$ ، و لم ۲- ۲- ۴ برقرار نمی باشد. ▓

مدول های اساسی و یکنواخت دو مفهوم اساسی در تعریف بعد گلدی هستند . دو لم بعد در انتقال این ویژگیها از M به مدول چند جمله ایهای اریب روی آن کمک می کنند .

لم ۲– ۲– ۶ : فرض کنیم $\sigma \in Aut(R)$ و δ یک تابع σ- مشتق باشد. اگر M_R یک مدول (σ,δ)- سازگار باشد و $N_R \subseteq_e M_R$ ، آنگاه $N[x]_R \subseteq_e M[x]_R$. به ویژه $N[x]_S \subseteq_e M[x]_S$.

اثبات : فرض کنیم $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k\in M[x]$ که $m_k\neq 0$. با استقرا روی k نشان می دهیم که $r\in R$ وجود دارد بطوریکه $0\neq m(x)r\in N[x]$.

اگر $k=0$ ، آنگاه $m(x)=m_0\in M$. چون N_R زیر مدول اساسی M_R است در نتیجه $r\in R$ موجود است که $0\neq m_0r\in N\subseteq N[x]$.

حال فرض کنیم که گزاره برای هر چند جمله ای از درجه کمتر از k برقرار باشد . بنا به لم ۲- ۲- ۲ ، $r\in R$ چنان موجود است که $m(x)r$ چند جمله ای AC می باشد. اگر $\deg(m(x)r)<k$ ، آنگاه بنا به فرض استقرا حکم ثابت می شود . پس فرض کنیم که $m(x)r$ از درجه k و $m(x)$ یک چند جمله ای AC باشد .

چون $m_k\neq 0$ ، لذا فرض استقرا در حالت $k=0$ نتیجه می دهد که $r\in R$ وجود دارد بطوریکه $0\neq m_kr\in N_R$.

بنابراین

$$
\begin{aligned}
m(x)\sigma^{-k}(r) &= m_0\sigma^{-k}(r)+\ldots+m_kx^k\sigma^{-k}(r)\\
&= m_0\sigma^{-k}(r)+\ldots+m_k\sigma^k(\sigma^{-k}(r))x^k\\
&= m_0\sigma^{-k}(r)+\ldots+m_krx^k \quad .
\end{aligned}
$$

پس

$$m(x)\sigma^{-k}(r)=m'(x)+m_krx^k \tag{۴}$$

که $m'(x)\in M[x]$ از درجه کمتر از k است . بنا به فرض استقرا $r'\in R$ چنان موجود است که $0\neq m'(x)r'\in N[x]$. از طرفی $m(x)\sigma^{-k}(r)r'=m'(x)r'+m_krx^kr'$ (*) .

با توجه به $m_kr\in N$ نتیجه می شود : $m_krx^kr'\in N[x]$. بنابراین $m(x)\sigma^{-k}(r)r'\in N[x]$.

اکنون ثابت می کنیم $m(x)\sigma^{-k}(r)r' \neq ۰$. (فرض خلف) فرض کنیم $m(x)\sigma^{-k}(r)r' = ۰$.
در نتیجه

$$m(x)\sigma^{-k}(r)r' = m_{۰}\sigma^{-k}(r)r' + \ldots + m_k x^k \sigma^{-k}(r)r'$$

$$= m_{۰}\sigma^{-k}(r)r' + \ldots + m_k \sigma^k(\sigma^{-k}(r))x^k r'$$

$$= m_{۰}\sigma^{-k}(r)r' + \ldots + m_k r x^k r'$$

$$= m_{۰}\sigma^{-k}(r)r' + \ldots + m_k r\sigma^k(r')x^k$$

و لذا $m_k r\sigma^k(r') = ۰$. اما $r\sigma^k(r') \in ann(m_k)$ ، و چون $m(x)$ یک چند جمله ای AC است، پس برای هر $i \leq k$ ، $m_i r\sigma^k(r') = ۰$.

از طرفی بنا به $(*)$، $m'(x)r' = ۰$ ، که با $۰ \neq m'(x)r' \in N[x]$ در تناقض است . پس فرض خلف باطل است . و در نتیجه $۰ \neq m(x)\sigma^{-k}(r)r' \in N[x]$ ، که حکم ثابت می شود . ▓

لم ۲– ۲– ۷ : فرض کنیم M_R ، σ و δ همانند لم ۲- ۲- ۶ باشند. اگر M_R یکنواخت باشد آنگاه $M[x]_S$ نیز یکنواخت است.

اثبات : (برهان خلف) اگر $M[x]_S$ یکنواخت نباشد ، آنگاه چند جمله ایهای نا صفر $m_۱(x)$ و $m_۲(x)$ چنان موجودند که $m_۱(x)S \cap m_۲(x)S = \{۰\}$.

چند جمله ایهای $m_۱(x)$ و $m_۲(x)$ را طوری انتخاب می کنیم که $\deg(m_۱(x)) + \deg(m_۲(x))$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد (بنا به اصل خوش ترتیبی در مجموعه اعداد صحیح نا منفی) .

بنا به لم ۲- ۲- ۲ ، می توان فرض کرد $m_۱(x)$ و $m_۲(x)$ چند جمله ای های AC هستند .

قرار می دهیم $m_1(x)=\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ و $m_2(x)=\sum_{j=0}^{l} b_j x^j$ که $b_l \neq 0$ و a_k . بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود فرض می کنیم $k \leq l$. از آنجا که M_R یکنواخت است ، $a_k R \cap b_l R \neq \{0\}$. بنابراین $r_2 \in R$ و r_1 موجود است که $a_k r_1 = b_l r_2 \neq 0$. چند جمله ایهای $m_1(x)\sigma^{-k}(r_1)$ و $m_2(x)\sigma^{-l}(r_2)$ که بنا به لم ۲- ۲- ۳ چند جمله ایهای AC هستند، ضرایب پیشرو یکسان دارند ، زیرا :

$$m_1(x)\sigma^{-k}(r_1) = a_0\sigma^{-k}(r_1)+\ldots+a_k x^k\sigma^{-k}(r_1)=a_0\sigma^{-k}(r_1)+\ldots+a_k r_1 x^k$$

$$m_2(x)\sigma^{-l}(r_2) = b_0\sigma^{-l}(r_2)+\ldots+b_l x^l\sigma^{-l}(r_2)=b_0\sigma^{-l}(r_2)+\ldots+b_l r_2 x^l \quad .$$

پس می توان فرض کرد که $m_1(x)$ و $m_2(x)$ علاوه بر اینکه چند جمله ایهای AC هستند ، ضرایب پیشرو مساوی نیز دارند .

چون $ann(m_1(x)x^{l-k})_S = ann(a_0 x^{l-k}+\ldots+a_k x^l)$ ، لذا بنا به لم ۲- ۲- ۴ ، $ann(m_1(x)x^{l-k})_S = ann(a_k)_R[x;\sigma,\delta]$ و $ann(m_2(x))_S = ann(b_l)_R[x;\sigma,\delta]$. با توجه به اینکه $a_k=b_l$ خواهیم داشت :

$$ann(m_1(x)x^{l-k})_S = ann(m_2(x))_S \quad . \tag{۵}$$

قرار می دهیم :

$$m'_2(x) := m_2(x)-m_1(x)x^{l-k} \quad . \tag{۶}$$

در نتیجه $m'_2(x)=(b_0+b_1x+\ldots+b_l x^l)-(a_0 x^{l-k}+\ldots+a_k x^l)=b_0+\ldots+(b_l-a_k)x^l$. اما $b_l-a_k=0$ ، پس $m'_2(x)$ حداکثر از درجه $l-1$ می باشد . اما $m'_2(x)\neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت $m_2(x)=m_1(x)x^{l-k}$. بنابراین

$$m_2(x)\in m_2(x)S \quad , m_2(x)\in m_1(x)S \quad \Rightarrow \quad m_2(x)\in m_1(x)S\cap m_2(x)S=\{0\}$$

که با فرض $m_۲(x) \neq ۰$ در تناقض است ، بنابراین $m'_۲(x) \neq ۰$.

با استفاده از لم ۲- ۲- ۲ ، $r \in R$ را طوری انتخاب می کنیم که $m'_۲(x)r$ چند جمله ای AC باشد . با توجه به مینیمال بودن $l+k$ ، $m_۱(x)S \cap m'_۲(x)rS \neq \{۰\}$ ؛ زیرا در غیر این صورت ، با توجه به اینکه $m'_۲(x)r$ چند جمله ای AC و از درجه l' $(l' < l)$ است ، داریم $l'+k < l+k$ که یک تناقض است. بنابراین چند جمله ایهای $g(x) \in S$ و $h(x)$ چنان موجودند که

$$m_۱(x)\, g(x) = m'_۲(x)\, r\, h(x) \neq ۰ \quad .$$

با توجه به (۶) خواهیم داشت :

$$m_۱(x)\, g(x) = [\, m_۲(x) - m_۱(x) x^{l-k}\,]\, r\, h(x) \neq ۰ \quad . \tag{۷}$$

با فاکتور گیری از رابطه (۷) ، داریم $m_۱(x)[\, g(x) + x^{l-k} r\, h(x)] = m_۲(x)\; r\, h(x)$. از فرض $m_۱(x)S \cap m_۲(x)S = \{۰\}$ ، نتیجه می شود $m_۱(x)[\, g(x) + x^{l-k} r\, h(x)] = m_۲(x)\; r\, h(x) = ۰$. پس $r\, h(x) \in ann(m_۲(x))_S$. با توجه به (۵) ،

$$r\, h(x) \in ann(m_۱(x)\, x^{l-k}) \;\Rightarrow\; m_۱(x) x^{l-k}\; r\, h(x) = ۰ \quad .$$

در نتیجه $۰ \neq m'_۲(x)\, r\, h(x) = m_۲(x)\, r\, h(x) - m_۱(x)\, x^{l-k}\; r\, h(x) = ۰$ ، که یک تناقض است . پس فرض خلف باطل و $M[x]_S$ یکنواخت است . ▓

لم ۲- ۲- ۸ : فرض کنیم $\sigma \in Aut(R)$ و $S := R[x;\sigma]$. اگر M_R یک مدول دلخواه باشد و $N_R \subseteq_e M_R$، آنگاه $N[x^{-۱}]_S \subseteq_e M[x^{-۱}]_S$.

اثبات : چند جمله ای نا صفر $m(x) \in M[x^{-۱}]_S$ از درجه k را در نظر می گیریم . فرض کنیم $m_k \in M$ ضریب پیشرو آن باشد . از آنجایی که N_R زیر مدولی اساسی است ، $r \in R$ موجود است

بطوریکه $0 \neq m_k r \in N$. اگر N_R را به عنوان یک S- زیر مدول از $M[x^{-1}]_S$ در نظر بگیریم ، آنگاه $m(x)\sigma^k(r)x^k = m_k r \in N - \{0\} \subseteq N[x^{-1}]_S$. بنابراین $N[x^{-1}]_S \subseteq_e M[x^{-1}]_S$. ▓

لم ۲- ۲- ۹ : فرض کنیم M_R ، σ و δ همانند لم قبل باشند. اگر N_R یکنواخت باشد، آنگاه $N[x^{-1}]_S$ نیز یکنواخت است.

اثبات : فرض کنیم $m_2(x) \in N[x^{-1}]_S$ و $m_1(x)$ دو چند جمله ای نا صفر و m_{k_2} و m_{k_1} به ترتیب ضرایب پیشرو این دو چند جمله ای باشند . از یکنواخت بودن مدول N_R نتیجه می شود ، $0 \neq m_{k_1}R \cap m_{k_2}R \subseteq m_1(x)S \cap m_2(x)S$. در نتیجه $N[x^{-1}]_S$ نیز یکنواخت می باشد . ▓

لم های ۲- ۲- ۶ و ۲- ۲- ۷ بدون فرض سازگاری برقرار نمی باشند . مثال بعد این مسئله را نشان می دهد.

مثال ۲- ۲- ۱۰ : این مثال نشان می دهد که لم ۲- ۲- ۶ بدون شرط δ- سازگاری برقرار نمی باشد :

فرض کنیم $R := \mathbb{Z}_2[t]$، $M_R := \dfrac{R}{<t^2>}$ ، $\sigma = Id$ و $\delta = \dfrac{d}{dt}$. مدول M_R، δ- سازگار نمی باشد ، زیرا اگر $m = t + <t^2>$ و $r = t$ ، آنگاه

$$mr = (t + <t^2>)t = t^2 + <t^2> = 0$$

$$m\delta(r) = (t + <t^2>)(1) = t + <t^2> \neq 0.$$

اکنون فرض کنیم $N_R := \frac{<t>}{<t^۲>} \subseteq M_R$. نشان می دهیم $N_R \subseteq_e M_R$. عنصر ناصفر $\overline{a+bt} \in M_R$ را در نظر می گیریم . اگر $a=۰$ ، آنگاه $\overline{a+bt} = bt+<t^۲> \in N_R$. در غیر این صورت

$(\overline{a+bt})(t) = (a+bt+<t^۲>)(t) = at+bt^۲+<t^۲> = at+<t^۲> = \overline{at} \neq ۰$

و $\overline{at} \in N_R$ ، پس $N_R \subseteq_e M_R$.

اکنون ادعا می کنیم که $N[x]_S$ در $M[x]_S$ اساسی نیست . عنصر $\bar{۱}+\bar{t}x \in M[x]$ و عنصری از S به شکل $f_۰(t)+f_۱(t)x+\ldots+f_k(t)x^k$ که برای هر i ، $f_i(t) \in Z_۲[t]$ ، را در نظر می گیریم . می دانیم

$.(\bar{۱}+\bar{t}x)t^i = \overline{t^i}+\bar{t}(xt^i) = \overline{t^i}+\bar{t}(t^ix+it^{i-۱}) = \overline{t^i}+\overline{t^{i+۱}}x+i\overline{t^i}$

با توجه به اینکه $\overline{t^۲} = \bar{۰}$ ، اگر $i \geq ۱$ ، عبارت بالا صفر خواهد شد (اگر $i=۱$ ، باید با یک حلقه از مشخصه ۲ کار کنیم) . پس می توان فرض کرد که برای هر i ، $f_i(t) = a_i \in Z_۲$. در نتیجه

$$(\bar{۱}+\bar{t}x)(a_۰+a_۱x+\ldots+a_kx^k) = \overline{a_۰}+\overline{a_۱}x+\ldots+\overline{a_k}x^k+\overline{a_۰t}x+\overline{a_۱t}x^۲+\ldots+\overline{a_kt}x^{k+۱}$$

$$= \overline{a_۰}+(\overline{a_۱}+\overline{a_۰t})x+\ldots+(\overline{a_k}+\overline{a_{k-۱}t})x^k+\overline{a_kt}x^{k+۱} \qquad (۸) .$$

برای اینکه عبارت (۸) در $N[x]_S$ باشد ، لازم است که $a_۰ = a_۱ = \ldots = a_k = ۰$ ، و این ایجاب می کند که $(\bar{۱}+\bar{t}x)[f_۰(t)+f_۱(t)x+\ldots+f_k(t)x^k] = ۰$. بنابراین $N[x]_S$ در $M[x]_S$ اساسی نیست . ▓

مثال ۲- ۲- ۱۱ : فرض کنیم M_R ، N_R ، σ و δ همانند مثال ۲- ۲- ۱۰ باشند . با توجه به اینکه زنجیر $۰ \subset N_R \subset M_R$ مجموعه تمام زیر مدول های M را نشان می دهد ، M_R یکنواخت است .

برای اینکه نشان دهیم $M[x]_S$ یکنواخت نیست ، کافیست دو چندجمله ای نا صفر $m_1(x)$ و $m_2(x)$ را طوری پیدا کنیم که $m_1(x)S \cap m_2(x)S = \{0\}$. قرار می دهیم $m_1(x) := \bar{t}$ و $m_2(x) := \bar{1} + \bar{t}x$. در این صورت $m_1(x)S_S = N[x]_S$. اما مثال قبل نشان می دهد که :

$m_2(x)S_S \cap N[x]_S = \{0\} \quad \Rightarrow \quad u.\dim(M[x]_S) \geq 2 \quad .$

پس $M[x]_S$ یکنواخت نیست . ▓

مثالهای فوق نشان می دهند که لم های مورد بحث بدون فرض σ- سازگاری درست نخواهند بود . فرض محدود کننده دیگر در این نتایج معکوس پذیری σ می باشد ، که نتایج بدون این فرض ها برقرار نخواهد بود .

مثال ۲- ۲- ۱۲ : فرض کنیم R یک حلقه تقسیم و σ یک درون ریختی از حلقه R باشد که خودریختی نیست . در این صورت R_R یکنواخت است ، ولی حلقه چند جمله ای های اریب $S := R[x;\sigma]$ یکنواخت نیست . اگر $a \in R - \sigma(R)$ ، آنگاه S شامل مجموع مستقیم ایده آلهای

$axS \oplus xaxS \oplus x^2axS \oplus x^3axS \oplus \ldots$

می باشد ، و در نتیجه $u.\dim(S_S) = \infty$. ▓

با کنار هم قرار دادن لم های ۲- ۲- ۶ و ۲- ۲- ۷ اولین نتیجه اساسی زیر بدست می آید .

قضیه ۲- ۲- ۱۳ : فرض کنیم $\sigma \in Aut(R)$ و δ یک تابع σ- مشتق باشد. اگر M_R یک مدول (σ,δ)- سازگار باشد ، آنگاه $u.\dim(M[x]_S) = u.\dim(M_R)$.

برهان : فرض کنیم $u.\dim(M_R)=\infty$. در نتیجه M_R شامل مجموع مستقیم تعداد نا متناهی زیر مدول نا صفر به شکل $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots$ است. در این صورت $M[x]_S$ شامل $N_1[x] \oplus N_2[x] \oplus \dots$ می باشد. بنابراین $u.\dim(M[x]_S)=\infty$.

حال فرض کنیم $u.\dim(M_R)=n<\infty$. در نتیجه مجموع مستقیمی مانند $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n \subseteq_e M$ موجود است که هر N_i یکنواخت است .

بنا به لم ۲- ۲- ۶ ، $N_1[x] \oplus N_2[x] \oplus \dots \oplus N_n[x] \subseteq_e M[x]_S$ ، و بنا به لم ۲- ۲- ۷ ، هر $N_i[x]$ یکنواخت است . در نتیجه $u.\dim(M[x]_S)=n$. ▓

حال ثابت می کنیم که برای مدول دلخواه M_R بعد یکنواخت مدول چند جمله ای های $M[x^{-1}]_S$ روی $S:=R[x;\sigma]$ با بعد یکنواخت مدول M_R برابر است .

قضیه ۲- ۲- ۱۴ : فرض کنیم $\sigma \in Aut(R)$ ، $S=R[x;\sigma]$ و M_R یک R- مدول باشد.

در این صورت :

(a) $u.\dim(M[x^{-1}]_S)=u.\dim(M_R)$.

(b) اگر R یک حلقه کامل راست باشد آنگاه $Corank(M[x^{-1}]_S)=Corank(M_R)$.

برهان : (a) فرض کنیم $u.\dim(M_R)=n<\infty$. بنا به تعریف ، زیر مدول های یکنواخت N_1 و N_2 و ... و N_n چنان موجودند که $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n \subseteq_e M_R$. با توجه به لم ۲- ۲- ۹ ، هر $N_i[x^{-1}]_S$ یکنواخت است و بنا به لم ۲- ۲- ۸ ،

$N_1[x^{-1}] \oplus N_2[x^{-1}] \oplus \dots \oplus N_n[x^{-1}] \subseteq_e M[x^{-1}]_S$ ٠

پس $u.\dim(M[x^{-1}]_S)=n$.

حال فرض کنیم $u.\dim(M_R) = \infty$. در نتیجه M_R شامل مجموع مستقیم زیر مدول های ناصفر $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus \ldots$ می باشد و لذا $M[x^{-1}]_S$ شامل $N_1[x^{-1}] \oplus N_2[x^{-1}] \oplus N_3[x^{-1}] \oplus \ldots$ است . بنابراین $u.\dim(M[x^{-1}]_S) = \infty$. ▓

وراردجان[1] برای هر حلقه R و مدول M_R گزاره زیر را ثابت کرد :

تذکر ۲- ۲- ۱۵ : فرض کنیم M_R یک R- مدول باشد . در این صورت :

$$u.\dim(M_R) = u.\dim(M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}) = u.\dim\left(\frac{M[x]}{<x^n>}_{\frac{R[x]}{<x^n>}}\right). \tag{۹}$$

اثبات : اگر $u.\dim(M_R) = \infty$ ، آنگاه به وضوح نتیجه می شود :

$$u.\dim(M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}) = u.\dim\left(\frac{M[x]}{<x^n>}_{\frac{R[x]}{<x^n>}}\right) = \infty.$$

فرض کنیم $u.\dim(M_R) = k$. در این صورت زیر مدول های یکنواخت N_1 و... و N_k موجودند که $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k \subseteq_e M_R$. ثابت می کنیم برای هر $1 \le i \le k$ ، $\frac{N_i[x]}{<x^n>}_{\frac{R[x]}{<x^n>}}$ یکنواخت است و $\frac{N_1[x]}{<x^n>} \oplus \frac{N_2[x]}{<x^n>} \oplus \ldots \oplus \frac{N_k[x]}{<x^n>} \subseteq_e \frac{M[x]}{<x^n>}$. ابتدا نشان می دهیم اگر M یک R- مدول یکنواخت باشد ، آنگاه $\frac{M[x]}{<x^n>}$ یکنواخت است .

قرار می دهیم $S_1 := \frac{R[x]}{<x^n>}$. (فرض خلف) فرض کنیم $0 \neq \alpha \in \frac{M[x]}{<x^n>}$ و $0 \neq \beta \in \frac{M[x]}{<x^n>}$ موجود باشند بطوریکه $\alpha S_1 \cap \beta S_1 = \{0\}$. بنا به لم ۱- ۲- ۲ ، می توان فرض کرد پوچساز های راست ضرایب βو α برابرند .

---
[1] Varadarajan

قرار می دهیم :

$$G:=\{(\alpha,\beta)\,|\,0\neq\alpha,\beta\in\frac{M[x]}{<x^n>}\,,\ \text{پوچساز های راست ضرایب } \beta,\alpha \text{ برابرند}\,,\ \alpha S_1\cap\beta S_1=\{0\}\ \}.$$

مجموعه G نا تهی است . اگر $(\alpha,\beta)\in G$ ، آنگاه $(\beta,\alpha)\in G$. عنصر $(\gamma,\delta)\in G$ را طوری انتخاب می کنیم که γ بیشترین مرتبه را داشته باشد . بنابراین برای هر $(\alpha,\beta)\in G$ ، مرتبه $\gamma\geq$ مرتبه α. و برای هر $(\beta,\alpha)\in G$، مرتبه $\gamma\geq$ مرتبه β. به ویژه مرتبه $\gamma\geq$ مرتبه δ. همچنین فرض کنیم برای هر $(\gamma,\eta)\in G$ ، مرتبه $\gamma\geq$ مرتبه $\delta\geq$ مرتبه η . قرار می دهیم $k=$ مرتبه γ و $l=$ مرتبه δ. در این صورت $l\leq k$. فرض کنیم $\gamma=\sum_{i=k}^{n-1}a_ix^i$ و $\delta=\sum_{j=l}^{n-1}b_jx^j$ که $a_k,b_l\neq 0$ و برای هر j و i ، $a_i,b_j\in M$. چون M_R یک R- مدول یکنواخت است ، پس $a_kR\cap b_lR\neq\{0\}$. در نتیجه $\lambda,\mu\in R$ موجود است بطوریکه $a_k\lambda=b_l\mu\neq 0$.

قرار می دهیم :

$$\alpha=\gamma\lambda-\delta x^{k-l}\mu \qquad (*)$$

ادعا می کنیم $\alpha\neq 0$. اگر $\alpha=0$ ، آنگاه $\gamma\lambda=\delta x^{k-l}\mu$. چون $a_k\lambda\neq 0$ ضریب x^k در $\gamma\lambda$ می باشد، پس $\gamma\lambda\neq 0$. در نتیجه $0\neq\gamma\lambda=\delta x^{k-l}\mu\in\gamma S_1\cap\delta S_1$. پس $\gamma S_1\cap\delta S_1\neq\{0\}$ ، که با فرض $(\gamma,\delta)\in G$ در تناقض است . بنابراین $\alpha\neq 0$. بنا به لم ۱- ۲- ۲ ، پوچساز های راست ضرایب α برابرند و یا $r\in R$ موجود است بطوریکه $\alpha r\neq 0$ و پوچساز های راست ضرایب αr برابرند . اگر پوچساز های راست ضرایب α برابر باشند ، آنگاه قرار می دهیم $\alpha=\overline{\alpha}$ ، در غیر این صورت $\overline{\alpha}=\alpha r$. به وضوح $k<$ مرتبه $\overline{\alpha}$. چون مرتبه γ ماکسیمال است ، پس $(\overline{\alpha},\delta)\notin G$. بنابراین $\overline{\alpha}S_1\cap\delta S_1\neq\{0\}$. اما $\overline{\alpha}S_1\subseteq\alpha S_1$ ، در نتیجه $\alpha S_1\cap\delta S_1\neq\{0\}$. پس چند جمله ایهای $g(x)\in S_1$ و $f(x)$ موجودند بطوریکه $\alpha f(x)=\delta g(x)\neq 0$. ادعا می کنیم $\gamma\lambda f(x)\neq 0$.

قرار می دهیم $f(x)=\sum_{t=0}^{n-1} c_t x^t$ که برای هر $0 \le t \le n-1$ ، $c_t \in R$. چون پوچساز های راست ضرایب $\gamma=\sum_{i=k}^{n-1} a_i x^i$ برابرند ، پس برای هر $k \le i \le n-1$ ، $r(a_i)=r(a_k)$. در نتیجه $r(a_i \lambda)=(r(a_i):\lambda)=(r(a_k):\lambda)=r(a_k \lambda)$. اگر $\gamma \lambda f(x)=0$ ، آنگاه بنا به لم ۱- ۲- ۵ ، برای هر $0 \le t \le n-k-1$ ، $c_t \in r(a_k \lambda)$. اما می دانیم $\mu=\sum_{j=l}^{n+l-k-1} b_j \mu x^{k-l+j}$ δx^{k-l} . چون پوچساز های راست ضرایب δ برابرند ، پس برای هر $l \le j \le n-1$ ، $r(b_j)=r(b_l)$. بنابراین $r(b_j \mu)=r(b_l \mu)$. چون $a_k \lambda=b_l \mu$ ، پس برای هر $0 \le t \le n-k-1$ ، $c_t \in r(b_l \mu)$. بنا به لم ۱- ۲- ۵ ، $\delta x^{k-l} \mu f(x)=0$ و چون $\gamma \lambda f(x)=0$ ، بنا به (*) خواهیم داشت :

$$\alpha f(x)=\gamma \lambda f(x)-\delta x^{k-l} \mu f(x)=0.$$

اما می دانیم $\alpha f(x)\neq 0$ ، بنابراین $\gamma \lambda f(x) \neq 0$. پس

$$\begin{aligned}\gamma \lambda f(x) &= \alpha f(x)+\delta x^{k-l} \mu f(x)\\ &= \delta g(x)+\delta x^{k-l} \mu f(x)\\ &=\delta(g(x)+x^{k-l} \mu f(x)).\end{aligned}$$

بنابراین $0\neq \gamma \lambda f(x) = \delta(g(x)+x^{k-l} \mu f(x))\in\gamma S_1 \cap\delta S_1$. که با $(\gamma,\delta)\in G$ در تناقض است . در نتیجه $\frac{M[x]}{<x^n>}_{\frac{R[x]}{<x^n>}}$ یکنواخت است .

اکنون نشان می دهیم اگر $K_R \subseteq_e M_R$ ، آنگاه $\frac{M[x]}{<x^n>} \subseteq_e \frac{K[x]}{<x^n>}_{\frac{R[x]}{<x^n>}}$. برای هر $0 \le j \le n-1$ که $0 \neq a_j \in M$ ، قرار می دهیم $0\neq a=\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \in \frac{M[x]}{<x^n>}$.

چون $a_j \in M$ و $K_R \subseteq_e M_R$ ، $\lambda_{.} \in R$ موجود است که برای هر $0 \leq j \leq n-1$ ،

$0 \neq a_j \lambda_{.} \in K$. بنابراین $0 \neq a\lambda_{.} \in \frac{K[x]}{<x^n>}$ ؛ و در نتیجه $\frac{K[x]}{<x^n>}_{\frac{R[x]}{<x^n>}} \subseteq_e \frac{M[x]}{<x^n>}$.

با توجه به توضیحات فوق نتیجه می شود که $u.\dim(\frac{M[x]}{<x^n>}_{\frac{R[x]}{<x^n>}}) = k$. بطور مشابه می توان

ثابت نمود $u.\dim(M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}) = k$. ▓

۲- ۳) بعد دوگان گلدی مدول چند جمله ایها

موضوع بعد دوگان گلدی اولین بار توسط ورادرجان[۱] در سال ۱۹۷۹ معرفی شد . در این بخش ابتدا چند تعریف و نتیجه در مورد بعد دوگان گلدی که در ادامه استفاده خواهد شد را از مقاله ورادرجان یادآوری می کنیم ، سپس به بیان اثبات قضایای اصلی می پردازیم.

تعریف ۲- ۳- ۱ : (a) زیر مدول S_R از مدول دلخواه M_R کوچک نامیده می شود ، اگر برای هر زیر مدول $N_R \subseteq M_R$ که $N+S=M$ ، داشته باشیم : $N=M$ ، و می نویسیم $S_R \subseteq_S M_R$.

(b) مدول M_R را پوچ نامیم اگر هر مجموع از زیر مدولهای سره آن ، همچنان سره باقی بماند. در واقع هر زیر مدول سره M_R ، در M_R کوچک باشد.

(c) $rad(M)$ را مجموع تمام زیر مدولهای کوچک M در نظر می گیریم.

(d) منظور از یک حلقه مقدار گسسته (DVR)[۲]، یک دامنه ایده آل اصلی (PID) است، که دارای دقیقاً یک ایده آل ماکسیمال ناصفر باشد . بنابراین یک DVR ، یک دامنه صحیح است .

---

[۱] Varadarajan
[۲] Discrete Valuation Ring

تعریف ۲ – ۳ – ۲ : خانواده نا تهی $\{N_\lambda\}_\Lambda$ از زیر مدول های نا صفر R- مدول M را مستقل[1] گوییم ، هرگاه برای هر $\lambda\in\Lambda$ و هر زیر مجموعه متناهی $F\subseteq\Lambda-\{\lambda\}$ داشته باشیم :

$$N_\lambda+\bigcap_{i\in F}N_i=M.$$

قضیه ۲ – ۳ – ۳ : (قضیه باقیمانده چینی[2]). فرض کنیم M یک R- مدول دلخواه باشد. برای هر خانواده مستقل از زیر مدول های $\{K_i\}_I$ ، که I متناهی است ، خواهیم داشت :

$$\frac{M}{\bigcap_{i\in I}K_i}\cong\bigoplus_{i\in I}\frac{M}{K_i}.$$

اثبات : با استفاده از استقرا روی $|I|=n$ قضیه را اثبات می کنیم . اگر $n=1$ ، آنگاه حکم بدیهی است . فرض کنیم $n>1$ و حکم برای خانواده مستقل $\{L_1,L_2,\ldots,L_{n-1}\}$ از زیر مدول های M برقرار باشد . فرض کنیم $\{K_1,K_2,\ldots,K_n\}$ خانواده ای مستقل با n عنصر باشد . در این صورت خانواده $\{K_1,K_2,\ldots,K_{n-1}\}$ نیز مستقل است . قرار می دهیم : $K:=\bigcap_{i=1}^{n-1}K_i$. بنا به فرض استقرا $\frac{M}{K}\cong\bigoplus_{i=1}^{n-1}\frac{M}{K_i}$. به علاوه $K+K_n=M$، همچنین

$$\frac{M}{\bigcap_{i=1}^{n}K_i}=\frac{M}{K\bigcap K_n}=\frac{K}{K\bigcap K_n}\oplus\frac{K_n}{K\bigcap K_n}\cong\frac{M}{K_n}\oplus\frac{M}{K}\cong\bigoplus_{i=1}^{n}\frac{M}{K_i}.$$

بنابراین حکم ثابت می شود . ▓

---
[1] Coindependent
[2] Chinese Remainder Theorem

قضیه ۲ – ۳ – ۴ : (قضیه ضعیف باقیمانده چینی[1]) . فرض کنیم M یک R - مدول دلخواه، $\{N_\lambda\}_\Lambda$ یک خانواده از R - مدول های نا صفر و $\{f_\lambda : M \to N_\lambda\}_\lambda$ یک خانواده از اپی مورفیسم ها باشند . برای هر $\lambda \in \Lambda$ ، قرار می دهیم $K_\lambda := Ker(f_\lambda)$. فرض کنیم $f : M \to \prod_\Lambda N_\lambda$ هومومورفیسم حاصلضربی باشد که توسط f_λ ها بدست می آید . در این صورت :

(a) $Ker\ f = \bigcap_\Lambda K_\lambda$.

(b) اگر f یک اپی مورفیسم باشد ، آنگاه $K_\lambda + \bigcap_{\lambda \neq \mu} K_\mu = M$.

(c) اگر $K_\lambda + \bigcap_{\lambda \neq \mu} K_\mu = M$ ، آنگاه f یک اپی مورفیسم است.

اثبات : (a) بدیهی است .

(b) فرض کنیم $\lambda \in \Lambda$ و $m \in M$. ثابت می کنیم $K_\lambda + \bigcap_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} K_\mu = M$. اگر $m \notin K_\lambda$ ، آنگاه $f_\lambda(m) \neq 0$. فرض کنیم n عنصری از $\prod_\Lambda N_\lambda$ باشد که $n = (\delta_{\mu\lambda}\ f_\lambda(m))_{\lambda \in \Lambda}$. $\delta_{\mu\lambda}$ نمایانگر دلتای کرونکر[2] است . چون f یک اپی مورفیسم است ، $m_\lambda \in M$ موجود است بطوریکه $f(m_\lambda) = n$.

برای هر $\mu \in \Lambda$ ، $f_\mu(m_\lambda) = \delta_{\mu\lambda}\ f_\lambda(m)$. بنابراین برای هر $\mu \neq \lambda$ ، نتیجه می شود $m_\lambda \in \bigcap_{\mu \neq \lambda} K_\mu$. اما $f_\lambda(m_\lambda) = f_\lambda(m)$ ، پس $m - m_\lambda \in K_\lambda$. در نتیجه $m = (m - m_\lambda) + m_\lambda \in K_\lambda + \bigcap_{\mu \neq \lambda} K_\mu$. بنابراین حکم ثابت می شود .

(c) اثبات بنا به قضیه ۲- ۳- ۳ واضح است. ▓

---
[1] Weak Chinese Remainder Theorem
[2] Kronecker Delta

مدول یکنواخت M_R (که $u.\dim(M_R)=1$) در نظریه بعد یکنواخت نقش مهمی بازی می کند . همچنین مدول M_R با $Corank(M_R)=1$ در مطالعه بعد دوگان گلدی مهم است .

تذکر ۲ – ۳ – ۵ : فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد . در این صورت M پوچ است اگر و تنها اگر $Corank(M_R)=1$.

اثبات : فرض کنیم M پوچ باشد. در این صورت $M\neq 0$ و $Corank(M_R)\geq 1$. فرض کنیم $\phi: M\to N_1\times N_2$ یک اپی مورفیسم باشد که $N_1\neq 0\neq N_2$. نگاشت های $\phi_1=\pi_1\phi: M\to N_1$ و $\phi_2=\pi_2\phi: M\to N_2$ را در نظر بگیرید . اگر برای ۲ و $j=1$ داشته باشیم $K_j=Ker(\phi_j)$ ، آنگاه $K_1+K_2=M$، زیرا برای هر $m\in M$ ، $(x,y)\in N_1\times N_2$ موجود است که $\phi(m)=(x,y)=(x,0)+(0,y)$. از آنجا که ϕ یک اپی مورفیسم است ، $m_2\in M$ و m_1 چنان موجودند که $\phi(m_1)=(x,0)$ و $\phi(m_2)=(0,y)$. اما $\phi_1(m_2)=\pi_1\phi(m_2)=\pi_1(0,y)=0$. در نتیجه $m_2\in Ker\,\phi_1=K_1$. بطور مشابه می توان نشان داد $\phi_2(m_1)=0$. پس $m_1\in Ker\,\phi_2=K_2$. بنابراین $m=m_1+m_2\in K_1+K_2$ ؛ و در نتیجه $K_1+K_2=M$.

اما $N_j\neq 0$ نتیجه می دهد $K_j\subset M$. بنابراین K_1 و K_2 در M کوچک نیستند که یک تناقض است . بنابراین $Corank(M_R)=1$.

برعکس : فرض کنیم $Corank(M_R)=1$. قرار می دهیم $L\subset M$. ثابت می کنیم L در M کوچک است . (فرض خلف) فرض کنیم $K\subset M$ ، بطوریکه $L+K=M$. بروریختی های کانونی $\eta_L: M\to \frac{M}{L}$ و $\eta_K: M\to \frac{M}{K}$ را در نظر می گیریم .

پس $\phi=(\eta_L,\eta_K):M\to\frac{M}{L}\times\frac{M}{K}$ یک اپی مورفیسم است. از آنجا که $\frac{M}{K}\neq\cdot\neq\frac{M}{L}$ نتیجه می شود $Corank\,(M_R)\geq ۲$ ، که یک تناقض است . لذا حکم ثابت می شود.

▓

گزاره ۲– ۳– ۶ : فرض کنیم M_R یک R- مدول باشد . در این صورت $Corank\,(M_R)=k<\infty$ ، اگر و تنها اگر اپی مورفیسم $\phi:M_R\to\prod_{i=۱}^{k}H_i$ چنان موجود باشد که همه H_iها پوچ باشند و $Ker\phi\subseteq_S M_R$.

اثبات : (برهان خلف) فرض کنیم $Corank\,(M_R)=k<\infty$ ، اما $Ker\ \phi=K$ در M کوچک نباشد . در این صورت $L\subset M$ چنان موجود است که $K+L=M$. نگاشت طبیعی $f:M\to\frac{M}{L}$ را در نظر می گیریم . چون $\theta=(f,\phi):M\to\frac{M}{L}\times(\prod_{i=۱}^{k}H_i)$ یک اپی مورفیسم می باشد ، لذا $Corank\,(M)\geq k+۱$ ، که یک تناقض است . پس $Ker\phi\subseteq_S M_R$.

حال فرض کنیم یکی از H_iها ، مثلاً $H_۱$ پوچ نباشد . پس بنا به تذکر ۲- ۳- ۵ ، $Corank\,(H_۱)\geq ۲$. در نتیجه اپی مورفیسم $h:H_۱\to A\times B$ موجود است بطوریکه $A\neq\cdot\neq B$. اما نگاشت $\eta:M\to A\times B\times\prod_{i=۲}^{k}H_i$ یک اپی مورفیسم است ، در نتیجه $Corank\,(M)\geq k+۱$، که یک تناقض است . پس همه H_iها پوچ می باشند و حکم ثابت می شود . ▓

گزاره ۲– ۳– ۷ : فرض کنیم R یک حلقه یکدار باشد . در این صورت :

(a) اگر $N_R\subseteq M_R$، آنگاه $Corank\,(\frac{M}{N})_R\leq Corank\,(M_R)$.

(b) اگر $M_R \subseteq_S S_R$، آنگاه $Corank\,(M_R) = Corank\,(\frac{M}{S})_R$. عکس این گزاره وقتی برقرار است که $Corank\,(M_R) < \infty$.

(c) اگر M_1 و M_2 و ... و M_n، R - مدول باشند ، آنگاه $Corank\,(\prod_{i=1}^{n} M_i) = \sum_{i=1}^{n} Corank\,(M_i)$.

اثبات : (a) فرض کنیم $0 \to N \to M \to \frac{M}{N} \to 0$ یک دنباله دقیق باشد و $Corank\,(M) = m$ و $Corank\,(\frac{M}{N}) = n$. بنا به گزاره ۲- ۳- ۶ ، اپی مورفیسم های $\phi: M \to \prod_{i=1}^{m} H_i$ و $\theta: \frac{M}{N} \to \prod_{j=1}^{n} K_j$ موجودند ، بطوریکه برای هر $1 \le i \le m$ و هر $1 \le j \le n$ ، H_iها و K_jها همگی پوچ هستند و $Ker\,\phi \subseteq_S M$ و $Ker\theta \subseteq_S \frac{M}{N}$. نگاشت طبیعی $\eta: M \to \frac{M}{N}$ را در نظر می گیریم . نگاشت $f = \theta o \eta: M \to \prod_{j=1}^{n} K_j$ یک اپی مورفیسم است ، در نتیجه

$$Corank\,(M) \ge n = Corank\,(\frac{M}{N}).$$

(b) فرض کنیم $Corank\,(M_R) = \infty$. در این صورت برای هر $k \ge 1$ ، زیر مدول های نا صفر N_1 ، N_2 و ... و N_k و اپی مورفیسم $f: M \to \prod_{i=1}^{k} N_i$ وجود دارد .

برای هر $1 \le i \le k$ ، قرار می دهیم $L_i = Ker\, f_i$. چون $L_i \ne M$ و S در M کوچک است ، لذا $S + L_i \ne M$. در نتیجه اپی مورفیسم $\phi: \frac{M}{S} \to \prod_{i=1}^{k} W_i$ موجود است که برای هر i ، $W_i = \frac{M}{S + L_i}$.

بنابراین برای هر $k \ge 1$ خواهیم داشت:

$$Corank\,(\frac{M}{S}) \ge k.$$

پس $Corank\,(\frac{M}{S}) = \infty$.

حال فرض کنیم $Corank\,(M_R)=k<\infty$. در نتیجه اپی مورفیسم $f:M\to\prod_{i=1}^{k}N_i$ وجود دارد بطوریکه همه N_i ها پوچ هستند و $Ker\,\phi\subseteq_S M$. بروریختی کانونی $h\colon M\to\frac{M}{S}$ را در نظر می گیریم .

برای هر $1\leq i\leq k$ ، فرض کنیم $f_i\colon M\to N_i$ و $K_i=Kerf_i$. چون $K_i\neq M$ و S در M کوچک است ، پس $S+K_i\neq M$. قرار می دهیم $S_i=S+K_i$. بروریختی کانونی $\eta_i\colon M\to\frac{M}{S_i}$ را در نظر می گیریم . از آنجا که $S\subseteq S_i$ ، اپی مورفیسم $\alpha_i\colon\frac{M}{S}\to\frac{M}{S_i}$ که در شرط $\eta_i=\alpha_i o h$ صدق می کند ، را در نظر می گیریم . نگاشت $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\colon\frac{M}{S}\to\prod_{i=1}^{k}\frac{M}{S_i}$ را در نظر می گیریم . می دانیم که $\frac{M}{S_i}\neq 0$ و $\alpha_i\colon\frac{M}{S}\to\frac{M}{S_i}$ یک اپی مورفیسم است که $Ker\,\alpha_i=h(S_i)$. چون f پوشاست ، پس بنا به قضیه ۲- ۳- ۴ ، برای هر $1\leq i\leq k$ ، $K_i+\bigcap_{j\neq i}K_j=M$. چون $K_i\subseteq S_i$ ، پس برای هر $1\leq i\leq k$ ، خواهیم داشت :

$$S_i+\bigcap_{j\neq i}S_j=M.$$

چون $S\subseteq S_i$ ، لذا $h(\bigcap_{j\neq i}S_j)=\bigcap_{j\neq i}h(S_j)$. بنابراین برای هر $1\leq i\leq k$ ، $h(S_i)+\bigcap_{j\neq i}h(S_j)=\frac{M}{S}$.

در نتیجه بنا به قضیه ۲- ۳- ۴ ، $\alpha\colon\frac{M}{S}\to\prod_{i=1}^{k}\frac{M}{S_i}$ پوشاست ، و لذا $Corank\,(\frac{M}{S})\geq k$. پس $Corank\,(\frac{M}{S})\geq Corank\,(M_R)$. و بنا به (a) ، $Corank(M_R)\geq Corank(\frac{M}{S})_R$، بنابراین حکم ثابت می شود.

(c) اثبات با استقرا : فرض کنیم $n=۲$. فرض کنیم M و N دو R - مدول نا صفر باشند . نشان می دهیم :

$$Corank\,(M\times N)=Corank\ M+Corank\ N.$$

اگر $Corank\ M$ یا $Corank\ N$ نا متناهی باشند ، آنگاه $Corank\,(M\times N)=\infty$.

حال فرض کنیم $Corank\ M=m$ ، $Corank\ N=n$ و $Corank(M\times N)=k$. بنا به گزاره ۲- ۳- ۶ ، اپی مورفیسم های $f:M\to\prod_{i=۱}^{m}V_i$ و $g:N\to\prod_{j=۱}^{n}W_j$ موجودند بطوریکه برای هر $۱\le i\le m$ و هر $۱\le j\le n$ ، V_i ها و W_j ها پوچ می باشند و $Ker\ f\subseteq_S M$ و $Ker\ g\subseteq_S N$.

قرار می دهیم $K=Ker\ f$ و $L=Ker\ g$. در نتیجه نگاشت

$$f\times g:M\times N\to(\prod_{i=۱}^{m}V_i)\times(\prod_{j=۱}^{n}W_j)$$

یک اپی مورفیسم است و $Ker f\times g=K\times L\subseteq_S M\times N$. بعلاوه V_i ها و W_j ها ، همگی پوچ هستند . پس بنا به گزاره ۲- ۳- ۶ ، $k=m+n$.

فرض کنیم حکم برای $i=n$ برقرار باشد ، ثابت می کنیم :

$$Corank\,(\prod_{i=۱}^{n+۱}M_i)=\sum_{i=۱}^{n+۱}Corank\,(M_i).$$

دنبالهٔ دقیق $۰\to M_۱\to M_۱\times M_۲\times\ldots\times M_{n+۱}\to M_۲\times M_۳\times\ldots\times M_{n+۱}\to۰$ ، را در نظر بگیرید. با استفاده از فرض استقرا و دنباله فوق به سادگی می توان نشان داد :

$$Corank\,(\prod_{i=۱}^{n+۱}M_i)=\sum_{i=۱}^{n+۱}Corank\,(M_i).$$

■

نتیجه زیر که توسط ورادرجان [1] ثابت شده است ، نشان می دهد که دوگان نتیجه شاک [2] $(u.\dim(R[x]_{R[x]})=u.\dim(R_R))$ برای هر حلقه R لزوماً درست نیست . قضیه زیر با تکنیک هایی که در نظریه مدولها موجود است قابل اثبات نیست ، برای اثبات آن تکنیک جدیدی مورد نیاز است.

قضیه ۲- ۳- ۸ : اگر R یک حلقه جابجایی باشد ، آنگاه

$$Corank\ (R\,[x]_{R\,[x]})=Corank\ (R[x,x^{-1}]_{R\ [x,x^{-1}]})=\infty.$$

برهان : ابتدا ثابت می کنیم : اگر K یک میدان باشد ، آنگاه $Corank\ (K[x]_{K[x]})=\infty=Corank\ (K[x,x^{-1}]_{K[x,x^{-1}]})$. برای هر $k\geq 1$ ، k چند جمله ای تکین تحویل ناپذیر متمایزِ $\{f_j(x)\}_{j=1}^{k}$ در $K[x]$ موجودند . بنا به قضیه باقیمانده چینی نگاشت $\beta : K[x]\to\prod_{j=1}^{k}\frac{K[x]}{<f_j(x)>}$ یک اپی مورفیسم است . همچنین $\bigcap_{i\neq j} f_i(x)K[x]+f_j(x)K[x]=K[x]$. در نتیجه

$$\bigcap_{i\neq j} f_i(x)K[x,x^{-1}]+f_j(x)K[x,x^{-1}]=K[x,x^{-1}].$$

بنابراین برای هر $k\geq 1$ ، اپی مورفیسم $\alpha : K[x,x^{-1}]\to\prod_{j=1}^{k}\frac{K[x,x^{-1}]}{<f_j(x)K[x,x^{-1}]>}$ از $K[x,x^{-1}]$ - مدولها موجود است . پس $Corank\ (K[x]_{K[x]})=\infty=Corank\ (K[x,x^{-1}]_{K[x,x^{-1}]})$.

حال ایده آل ماکسیمال π از R را در نظر می گیریم . $K=\frac{R}{\pi}$ یک میدان می باشد . نگاشت کانونی $\eta : R\to K$ ، اپی مورفیسم $\theta : R[x]\to K[x]$ را القا می کند .

---

[1] Varadarajan
[2] Shock

نگاشت $\beta o \theta : R[x] \to \prod_{j=1}^{k} \frac{K[x]}{< f_j(x) >}$ یک اپی مورفیسم است و چون $k \geq 1$ ، پس $Corank\ (R[x]_{R[x]}) = \infty$. بطور مشابه ثابت می شود که $Corank\ (R[x,x^{-1}]_{R\ [x,x^{-1}]}) = \infty$. ▓

تذکر ۲- ۳- ۹ : (ورادرجان [1]). برای R - مدول یکانی M_R و هر $n \geq 1$ ،

$$Corank\ (\frac{M\ [x]}{< x^n >})_{\frac{R[x]}{<x^n>}} = Corank\ (M_R).$$

اثبات : اگر $M = 0$ ، حکم بدیهی است . فرض کنیم $M \neq 0$ و $Corank(M_R) = \infty$. بنابراین برای هر $k \geq 1$ ، R - مدول های نا صفر N_1 ، N_2 ، ... و N_k و اپی مورفیسم $f : M \to \prod_{i=1}^{k} N_i$ موجود است .

برای هر $1 \leq i \leq k$ ، قرار می دهیم $c_i = \frac{N_i[x]}{< x^n >}$. بوضوح اپی مورفیسمی از $\frac{R[x]}{< x^n >}$ - مدولها به صورت $g : \frac{M\ [x]}{< x^n >} \to \prod_{i=1}^{k} c_i$ موجود است . بنابراین برای هر $k \geq 1$ ، $Corank\ (\frac{M\ [x]}{< x^n >})_{\frac{R[x]}{<x^n>}} \geq k$.

پس

$$Corank\ (\frac{M\ [x]}{< x^n >})_{\frac{R[x]}{<x^n>}} = \infty.$$

حال فرض کنیم $Corank\ (M_R) = k < \infty$. در این صورت اپی مورفیسم $f : M \to \prod_{i=1}^{k} H_i$ موجود است ، بطوریکه H_iها همگی پوچ هستند و $Ker\ f \subseteq_S M$. قرار می دهیم $K = Ker\ f$ ، و برای هر $1 \leq i \leq k$ ، $\phi_i : M \to H_i$ اپی مورفیسم باشد . در این صورت $R H_i = H_i$، زیرا

$$R H_i = R(\frac{M}{Ker\ \phi_i}) = \frac{R M + Ker\ \phi_i}{Ker\ \phi_i} = \frac{M}{Ker\ \phi_i} = H_i\ .$$

---
[1] Varadarajan

بنا به گزاره ۲- ۵ [۲۱] ، برای هر $1 \le i \le k$ ، $\left(\frac{H_i\,[x]}{< x^n >}\right)_{\frac{R[x]}{<x^n>}}$ پوچ می باشد . از نگاشت f ، اپی مورفیسم القایی $\overline{f}: \frac{M\,[x]}{< x^n >} \to \prod_{i=1}^{k} \frac{H_i\,[x]}{< x^n >}$ بدست می آید ، که $Ker\ \overline{f} = \frac{K\,[x]}{< x^n >}$. بنا به لم ۲- ۴ [۲۱] ، $\frac{K\,[x]}{< x^n >}$ در $\frac{M\,[x]}{< x^n >}$ کوچک است . در نتیجه $Corank\,\left(\frac{M\,[x]}{< x^n >}\right)_{\frac{R[x]}{<x^n>}} = k$. ■

ورادرجان[1] حدس زد که قضیه ۲- ۳- ۸ برای R- مدول دلخواه M_R نیز برقرار است. نتیجه بعد حدس ما را در کلاس بزرگی از مدولها به واقعیت تبدیل می کند . مجدداً این نتایج را به حلقه چند جمله ای های اریب $S = R[x;\sigma]$ تعمیم می دهیم . برای این کار ، یک بار دیگر مدول σ- سازگار M_R را بررسی می کنیم . مدول چند جمله ایهای لوران $M\,[x, x^{-1}]$ را روی حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $T := R[x, x^{-1};\sigma]$ در نظر می گیریم.

لم ۲- ۳- ۱۰ : فرض کنیم M_R یک مدول σ- سازگار ساده باشد و $T = R[x, x^{-1};\sigma]$. در این صورت $rad\,(M\,[x]_S) = rad\,(M\,[x, x^{-1}]_T) = 0$.

اثبات : ابتدا مدول $M\,[x]_S$ را در نظر می گیریم . فرض کنیم $rad\,(M\,[x]_S) \neq 0$. در نتیجه زیر مدول کوچک ناصفری از $M\,[x]_S$ موجود است . می توان فرض کرد این زیر مدول کوچک دوری است (زیرا اگر زیر مدول نا صفر N کوچک باشد آنگاه $0 \neq a \in N$ موجود است که $aR \subseteq N$ ، لذا می توان فرض کرد این زیر مدول کوچک دوری است) . فرض کنیم این زیر مدول کوچک دوری توسط چند جمله ای AC، $m(x)$ تولید می شود که $0 \neq m(x)S_S \subseteq_S M\,[x]_S$.

---
[1] Varadarajan

قرار می دهیم $m(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_kx^k\in M[x]$ که $m_k\neq 0$. اگر $m_0\neq 0$ ، آنگاه

$$m(x)S_S+m_0xS_S=M[x]_S \qquad (*).$$

(برای اثبات (*) کافیست نشان دهیم مجموع دو زیر مدول $m(x)S_S$ و m_0xS_S ، m_0 را تولید می کند . اگر $r_1\in S$ ، آنگاه $m_0xr_1=m_0\sigma(r_1)x=m_1x$. اما

$$m(x)-m_0xr_1=m(x)-m_1x=m_0+m_2x^2+m_3x^3+\ldots+m_kx^k.$$

کافیست این روند را برای m_2x^2 و m_3x^3 و ... انجام دهیم تا m_0 باقی بماند) .

اما (*) با کوچک بودن $m(x)S_S$ در تناقض است ، زیرا : $m_0xS_S\neq M[x]_S$. حال فرض کنیم $m_0=0$. در نتیجه $k>0$. قرار می دهیم $m'(x):=m_k+m(x)\in M[x]$. در این صورت $m(x)S_S+m'(x)S_S=M[x]_S$. ادعا می کنیم $m'(x)S_S$ در $M[x]_S$ سره است . فرض کنیم چنین نباشد، در نتیجه چندجمله ای $r(x):=r_0+r_1x+\cdots+r_lx^l\in S$ با $r_l\neq 0$ چنان موجود است که

$$m_k=m'(x)r(x). \tag{10}$$

انتخاب $r(x)$ به گونه ای است که l کمترین مقدار ممکن را که در (10) صدق کند داشته باشد . اما

$$\begin{aligned}
m'(x)r(x) &=(m_k+m(x))\,r(x)\\
&= m_k(r_0+\ldots+r_lx^l)+(m_1x+\ldots+m_kx^k)(r_0+\ldots+r_lx^l)\\
&= m_kr_0+m_kr_1x+\ldots+m_kr_lx^l+m_1xr_0+\ldots+m_1xr_lx^l+m_kx^kr_0+\ldots+m_kx^kr_lx^l\\
&= m_kr_0+(m_kr_1+m_1\sigma(r_0))x+\ldots+(m_kr_l+\ldots+m_l\sigma^l(r_0))x^l+\ldots+m_k\sigma^k(r_l)x^{k+l}.
\end{aligned}$$

چون $m'(x)r(x)=m_k$ ، پس $m_k\sigma^k(r_l)=0$. بنا به σ- سازگاری M_R خواهیم داشت : $m_k\,r_l=0$ ، و چون $m(x)$ چند جمله ای AC است ، پس برای هر $i\leq k$ ، $m_i\,r_l=0$. بنا به σ- سازگاری M_R ، $m_i\sigma^i(r_l)=0$. اما درجه چند جمله ای $r'(x)=r(x)-r_lx^l$ کمتر از l

می باشد که در (۱۰) صدق می کند ، و این یک تناقض است . بنابراین $m'(x)S_S$ در $M[x]_S$ سره است ، که با کوچک بودن $m(x)S_S$ در $M[x]_S$ متناقض است.

اکنون فرض کنیم $rad(M[x,x^{-1}]_T) \neq 0$. مانند قبل یک زیر مدول کوچک ناصفر به شکل $m(x)T_T \subseteq_S M[x,x^{-1}]_T$ را پیدا می کنیم بطوریکه $m(x)=m_j x^j+\ldots+m_k x^k$ ، چند جمله ای AC می باشد و $m_j, m_k \neq 0$. با ضرب کردن $m(x)$ در x^{-j+1} می توان فرض کرد $1=j<k$. از آنجا که جمله ثابت این چند جمله ای صفر است ، جمله ثابت $m_k \neq 0$ را به آن اضافه می کنیم و قرار می دهیم $m'(x)=m_k+m(x)$. بوضوح $m(x)T_T+m'(x)T_T=M[x,x^{-1}]_T$. همانند حالت قبل ادعا می کنیم $m'(x)T_T$ در $M[x,x^{-1}]_T$ سره است . اگر چنین نباشد برای $r(x):=r_a x^a+\ldots+r_b x^b$ که $a,b \in Z$ و $r_a, r_b \neq 0$ ، داریم :

$$m_k = m'(x)\,r(x). \tag{۱۱}$$

انتخاب b,a در (۱۱) به گونه ای است که ، طول چند جمله ای $r(x)$ کمترین مقدار ممکن را دارد . بنابراین

$$\begin{aligned} m_k &= (m_k + m_j x^j + \ldots + m_k x^k)(r_a x^a + \ldots + r_b x^b) \\ &= m_k\, r_a\, x^a + \ldots + m_k\, r_b\, x^b + m_j\, \sigma^j(r_a)\, x^{j+a} + \ldots + m_j\, \sigma^j(r_b)\, x^{j+b} \\ &\quad + \ldots + m_k\, \sigma^k(r_a)\, x^{k+a} + \ldots + m_k\, \sigma^k(r_b)\, x^{k+b} \quad . \end{aligned} \tag{۱۲}$$

اما $m_k r_a \neq 0$ و $m_k r_b \neq 0$. (فرض خلف) اگر $m_k r_a = m_k r_b = 0$ ، آنگاه بنا به AC بودن چند جمله ای $m(x)$ ، برای هر $i \leq k$ خواهیم داشت : $m_i\, r_a = m_i\, r_b = 0$. و از σ- سازگاری M_R ، برای هر i

نتیجه می شود : $m_i\,\sigma^i\,(r_a)=m_i\,\sigma^i\,(r_b)=۰$. بنابراین از (۱۲) خواهیم داشت :

$$m_k = m_k\, r_{a+1}\, x^{a+1} +\ldots+ m_k\, r_{b-1}\, x^{b-1} + m_j\, \sigma^j\,(r_{a+1})\, x^{j+a+1} +\ldots+ m_j\, \sigma^j\,(r_{b-1})\, x^{j+b-1}$$

$$+\ldots+ m_k\, \sigma^k\,(r_{a+1})\, x^{k+a+1} +\ldots+ m_k\, \sigma^k\,(r_{b-1})\, x^{k+b-1} \quad .$$

که با مینیمال بودن $b-a$ در تناقض است . اما

$m'(x)\,r(x) = (m_k + m(x))(r_a x^a +\ldots+ r_b x^b) = m_k\, r_a x^a +\ldots+ m_k\, r_b x^b +\ldots+ m_k x^k r_b x^b$ حداقل

دو جمله ناصفر از درجات مختلف دارد ، بنابراین (۱۱) برقرار نمی باشد که یک تناقض است . بنابراین

$rad\,(M\,[x, x^{-1}]_T) = ۰$. ▓

قضیه ۲- ۳- ۱۱ : فرض کنیم $\sigma \in Aut(R)$ و M_R یک مدول σ- سازگار باشد که شامل یک زیر مدول ماکسیمال است. (در حالت خاص ، اگر M_R با تولید متناهی یا R یک حلقه کامل راست باشد) . در این صورت $Corank\,(M\,[x]_S) = Corank\,(M\,[x, x^{-1}]_T) = \infty$.

برهان : (فرض خلف) فرض کنیم بعد دوگان گلدی $M\,[x]_S$ متناهی باشد . ابتدا حالت خاص که M_R ساده باشد را مورد بررسی قرار می دهیم . بنابه لم ۲- ۳- ۱۰ ، $rad\,(M\,[x]_S) = ۰$ (یا $rad\,(M\,[x, x^{-1}]_T) = ۰$). بنا به [۱۲] ، $M\,[x]_S$ ($M\,[x, x^{-1}]_T$) آرتینی نیم ساده است . اما مدول $M[x]_S$ آرتینی نیست ، زیرا زنجیر نزولی $M[x] \supset M[x]x \supset M[x]x^۲ \supset \cdots$ از زیرمدولهای $M[x]_S$ متوقف نمی شود. بنا به (۹)، مدول $M\,[x, x^{-1}]_T$ یکنواخت است. اما یک مدول نیم ساده یکنواخت باید ساده باشد ، که در مورد این مدول درست نیست ، زیرا با استفاده از σ - سازگاری ، به سادگی مشاهده می شود که برای هر $k \neq l \in Z$ ، هر چند جمله ای به شکل $mx^k + mx^l$ یک T- زیر مدول سره از

$M[x,x^{-1}]$ را تولید می کند (زیرا این زیر مدول شامل هیچ تک جمله ای نیست) . به این ترتیب فرض خلف باطل است و قضیه در حالتی که M ساده باشد ثابت می شود .

حال فرض کنیم $N_R \subseteq M_R$ یک زیر مدول ماکسیمال باشد . چون $(\frac{M}{N})_R$ ساده است ، لذا $Corank(M[x]_S) \geq Corank(\frac{M}{N})[x] = \infty$. بطور مشابه می توان نشان داد : $Corank\ (M[x,x^{-1}]_T) = \infty$. ▓

اینک ثابت می کنیم اگر R یک حلقه کامل راست باشد ، آنگاه بعد دوگان گلدی M_R و $M[x^{-1}]_R$ برابرند. (قضیه ۲- ۲- ۱۴ (b)) . اگر شرط " R یک حلقه کامل راست باشد " را حذف کنیم حتی اگر $\sigma = Id$ ، مثال بعد نشان می دهد بعد دوگان گلدی M_R و $M[x^{-1}]_R$ برابر نیستند .

مثال ۲- ۳- ۱۲ : فرض کنیم $(R,\underline{m})$ یک حلقه مقدار گسسته با ایده آل ماکسیمال $\underline{m} := <\pi>$ باشد . قرار می دهیم $S := R[x]$ و $M_R := R_R$. از اینکه R یک حلقه موضعی است، R_R پوچ می باشد. بنابراین $Corank\ (R_R) = ۱$. اکنون ادعا می کنیم $R[x^{-1}]$ پوچ نیست .

فرض کنیم m_k $(k \in \mathrm{N})$، نمایانگر چند جمله ای معکوس پذیر $x^{-k} + \pi x^{-(k+1)} \in R[x^{-1}]$ باشد .

همچنین Q_S یک S- زیر مدول از $R[x^{-1}]$ باشد ، که توسط $\{m_k | k \in \mathrm{N}\}$ تولید می شود . Q_S زیر مدولی سره از $R[x^{-1}]_S$ می باشد . برای اثبات این مطلب کافیست نشان دهیم Q_S جملات ثابت را تولید نمی کند. فرض کنیم $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in S$ یک چند جمله ای ناصفر باشد بطوریکه $n < k$.

از آنجا که m_k مولد Q_S است برای ایجاد جمله ثابت ۱ خواهیم داشت :

$$(x^{-k} + \pi x^{-(k+1)})(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) = ۱ \quad .$$

در نتیجه :

$$a_0 x^{-k} + a_1 x^{-k+1} + \ldots + a_n x^{-k+n} + \pi a_0 x^{-(k+1)} + \pi a_1 x^{-k} + \pi a_2 x^{-k+1} + \ldots + \pi a_n x^{-(k+1)+n} = 1$$

بنابراین

$$\pi a_0 x^{-(k+1)} + (a_0 + \pi a_1) x^{-k} + (a_1 + \pi a_2) x^{-k+1} + \ldots + \pi a_n x^{-(k+1)+n} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi a_0 & = 0 \\ a_0 + \pi a_1 & = 0 \\ \vdots & \\ \pi a_n & = 0 \end{cases} .$$

بنابراین $\pi a_0 = 0$. چون R حوزه صحیح و π یک ایده آل ماکسیمال است ، پس $a_0 = 0$. از معادله دوم نتیجه می شود $\pi a_1 = 0$ ، که به طور مشابه نتیجه می گیریم $a_1 = 0$. با ادامه این روند $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ ، که یک تناقض است . بنابراین Q_S زیر مدولی سره می باشد .

از آنجا که $\pi x^{-(k+1)} \in \underline{m}[x^{-1}]$ ، لذا برای هر k ، $x^{-k} \in Q + \underline{m}[x^{-1}]$. بنابراین $R[x^{-1}] = Q + \underline{m}[x^{-1}]$، که نشان می دهد $R[x^{-1}]_S$ پوچ نیست . حال نشان می دهیم $R[x^{-1}]_S$ بعد دوگان گلدی نامتناهی دارد. برای این منظور ، کافیست نشان دهیم برای هر $k \geq 1$ ، یک اپی مورفیسم از $R[x^{-1}]_S$ به مجموع مستقیم k مدول ناصفر موجود است . فرض کنیم F نمایانگر میدان کسرهای R باشد. یکه های متمایز $u_1 = 1$ ، u_2 و u_3 و ... و u_k را از R انتخاب می کنیم .

در نتیجه ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ u_۲^{-۱} & u_۲^{-۲} & u_۲^{-۳} & \dots & u_۲^{-k} \\ u_۳^{-۱} & u_۳^{-۲} & u_۳^{-۳} & \dots & u_۳^{-k} \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_k^{-۱} & u_k^{-۲} & u_k^{-۳} & \dots & u_k^{-k} \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر است . اکنون قرار می دهیم $r_d := u_d \pi$ که $۱ \le d \le k$. برای هر $d \le k$ ، S- مدول N_d را که به عنوان R - مدول ، زیر مدولی از $(\frac{F}{R})_R$ است ، تشکیل می دهیم و به $R[x]$- مدول تبدیل می کنیم . همچنین فرض کنیم x روی N_d با ضرب در r_d عمل کند. می توان نگاشتی از $R[x^{-۱}]_S$ به $(N_d)_S$ را که برای هر $a \in R$ و $i \ge ۰$ ، هر تک جمله ای ax^{-i} را به ar_d^{-i} می برد ، در نظر گرفت . با استفاده از این نگاشت ها ، S- همومورفیسم $\phi : R[x^{-۱}]_S \to (N_۱)_S \oplus (N_۲)_S \oplus \dots \oplus (N_k)_S$ بدست می آید. کافیست نشان دهیم ϕ پوشا ست.

عنصر $\overline{a\pi^{-i}}$ از $(\frac{F}{R})_R$ که $i \ge ۰$ و یکهٔ $a \in U(R)$ ، را در نظر می گیریم. کافیست یک نگاره برای عنصری به شکل $(\overline{a\pi^{-i}}, \bar{۰}, \dots, \bar{۰}) \in \bigoplus_{j=۱}^{k} N_j$ پیدا کنیم . برای این کار ابتدا بردار

$$\vec{v} := \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ u_۲^{-۱} & u_۲^{-۲} & u_۲^{-۳} & \dots & u_۲^{-k} \\ u_۳^{-۱} & u_۳^{-۲} & u_۳^{-۳} & \dots & u_۳^{-k} \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_k^{-۱} & u_k^{-۲} & u_k^{-۳} & \dots & u_k^{-k} \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} a \\ ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} \in F^k$$

را در نظر می گیریم . dاُمین درایهٔ ستون این بردار در نظر می گیریم که $v_d := \alpha_d \pi^{j_d}$ را در نظر می گیریم که $\alpha_d \in U(R)$ و $j_d \in \mathbb{Z}$.

قرار می دهیم $0 \le |j_d| \le \max\{|j_1|,|j_2|,\dots,|j_n|\} =: m$. فرض کنیم $b_0=b_1=\dots=b_{i+m}=0$. برای

هر $1 \le d \le k$، قرار می دهیم : $b_{i+m+d} := \pi^{m+d} v_d \in R$. ادعا می کنیم $\sum_{j=0}^{i+m+k} b_j x^{-j} \in R[x^{-1}]$ یک

نگاره برای $(\bar{0},\dots,\bar{0},\overline{a\pi^{-i}})$ است . برای اثبات این مطلب کافیست عنصر $b_j \in R$ را بگونه ای بسازیم

که در عبارت

$$b_0+b_1 r_d^{-1}+\dots+b_{i+m+k}\, r_d^{-(i+m+k)} = \begin{cases} a\pi^{-i} & d=1 \\ 0 & 2 \le d \le k \end{cases}$$

صدق کند.

با ضرب کردن معادله فوق در $\pi^i u_d^{i+m}$ خواهیم داشت :

$$b_0(\pi u_d)^i u_d^{m} + b_1 r_d^{-1}(\pi u_d)^i u_d^{m} + \dots + b_{i+m+k}\, r_d^{-(i+m+k)} (\pi u_d)^i u_d^{m} = \begin{cases} a\pi^{-i}\pi^i u_d^{i+m} & d=1 \\ 0 & 2 \le d \le k \end{cases}$$

اما $b_0=b_1=\dots=b_{i+m}=0$. پس

$$b_{i+m+1}\, r_d^{-(i+m+1)} (\pi u_d)^i u_d^{m} + \dots + b_{i+m+k}\, r_d^{-(i+m+k)} (\pi u_d)^i u_d^{m} = \begin{cases} a u_d^{i+m} & d=1 \\ 0 & 2 \le d \le k \end{cases} .$$

چون $u_1^{i+m}=1$ ، پس

$$\frac{b_{i+m+1}}{u_d\, \pi^{m+1}} + \frac{b_{i+m+2}}{u_d^{2}\, \pi^{m+2}} + \dots + \frac{b_{i+m+k}}{u_d^{k}\, \pi^{m+k}} = \begin{cases} a & d=1 \\ 0 & 2 \le d \le k \end{cases} .$$

فرمول بندی معادلات به شکل ماتریسی به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ u_۲^{-۱} & u_۲^{-۲} & u_۲^{-۳} & \dots & u_۲^{-k} \\ u_۳^{-۱} & u_۳^{-۲} & u_۳^{-۳} & \dots & u_۳^{-k} \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_k^{-۱} & u_k^{-۲} & u_k^{-۳} & \dots & u_k^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_{i+m+۱}}{\pi^{m+۱}} \\ \frac{b_{i+m+۲}}{\pi^{m+۲}} \\ \frac{b_{i+m+۳}}{\pi^{m+۳}} \\ \vdots \\ \frac{b_{i+m+k}}{\pi^{m+k}} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}$$

که b_j دقیقاً در شرط مورد نظر صدق می کند . ▓

با اضافه کردن شرط کامل راست روی حلقه R ، برهان قضیه ۲- ۲- ۱۴ (b) را بیان می کنیم . برای اثبات این قضیه به دو لم نیاز داریم که ابتدا آنها را بیان می کنیم. لم اول گسترش چند جمله ای های معکوس پذیر، از یک زیر مدول کوچک به مدول های دیگر و دومین لم خاصیت چند جمله ای های معکوس پذیر را بررسی می کند.

لم ۲- ۳- ۱۳ : فرض کنیم R یک حلقه کامل راست باشد و $N_R \subseteq M_R$. در این صورت $N_R \subseteq_S M_R$، اگر و تنها اگر $N[x^{-۱}]_S \subseteq_S M[x^{-۱}]_S$.

اثبات : اگر N_R در M_R کوچک نباشد ، آنگاه می توان زیر مدول $L_R \subset M_R$ را طوری پیدا نمود که $M_R = L_R + N_R$. به این ترتیب $N[x^{-۱}]_S$ به عنوان S- مدول در $M[x^{-۱}]_S$ ، کوچک نیست .

برعکس ، فرض کنیم $Q_S \subset M[x^{-۱}]_S$ وجود داشته باشد بطوریکه $Q_S + N[x^{-۱}] = M[x^{-۱}]$.

با در نظر گرفتن Q به عنوان R - مدول ، از آنجا که R یک حلقه کامل راست است ، نتیجه می شود Q_R شامل یک زیر مدول ماکسیمال مانند $P_R \subset M[x^{-1}]_R$ است . بنابراین :

$M[x^{-1}]=P_R+N[x^{-1}]_R$.

اما $N[x^{-1}]_R \not\subset P_R$ ، زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت : $P_R=M[x^{-1}]_R$، که یک تناقض است . بنابراین می توان تک جمله ای $nx^{-k} \in N[x^{-1}]-P$ را که $k \in \mathbb{N}$ و $n \in N$ پیدا نمود. قرار می دهیم $P_k := \{m \in M \mid mx^{-k} \in P_R\} \subseteq M_R$.

اولاً P_k یک R - زیر مدول از M_R است ؛ زیرا برای هر $m \in P_k$ و هر $r \in R$، $mx^{-k}\sigma^k(r) \in P$ ، پس $mrx^{-k} \in P$. بنابراین $mr \in P_k$.

ثانیاً $P_k=M$ یا P_k یک زیر مدول ماکسیمال M_R است. برای اثبات این مطلب فرض کنیم k ایی موجود باشد که $P_k \neq M$. نشان می دهیم P_k یک زیر مدول ماکسیمال از M_R است. فرض کنیم M'_R مدولی باشد که $P_k \subset M'_R \subseteq M_R$. فرض کنیم $m' \in M'_R - P_k$. بنا به تعریف P_k، $m'x^{-k} \notin P_R$. اما از آنجا که P_R یک زیر مدول ماکسیمال از $M[x^{-1}]_R$ است ، خواهیم داشت : $M[x^{-1}]=P+m'x^{-k}R_R$. کافیست نشان دهیم $M'=M$. فرض کنیم $m \in M$. در نتیجه $r \in R$ و $p \in P$ موجودند بطوریکه $mx^{-k}=p+m'x^{-k}r$ ، و لذا $p=(m-m'\sigma^{-k}(r))x^{-k} \in P$. بنا به تعریف $m-m'\sigma^{-k}(r) \in P_k \subseteq M'$ ، و در نتیجه $m \in M'$. بنابراین $M'=M$ و P_k یک زیر مدول ماکسیمال M_R است . چون $nx^{-k} \notin P$ ، لذا $n \notin P_k$. از آنجا که $N \not\subset P_k$ و P_k زیر مدول ماکسیمال است ، خواهیم داشت : $M=P_k+N$. اما $P_k \neq M$ ، بنابراین N_R در M_R کوچک نیست و به این ترتیب اثبات کامل می شود. ▓

توجه : در مثال ۲- ۳- ۱۲ ، $m_R \subseteq_S R_R$ ، اما $m[x^{-1}]_S$ در $R\ [x^{-1}]_S$ کوچک نیست . بنابراین لم ۲- ۳- ۱۳ در حالت کلی درست نمی باشد و به یک شرط (محدودیت) روی حلقه نیاز است. این توجه بعد از لم ۲- ۳- ۱۴ نیز به کار می رود.

لم ۲- ۳- ۱۴ : فرض کنیم R یک حلقه کامل راست باشد . در این صورت $R-$ مدول M_R پوچ است اگر وتنها اگر $M[x^{-1}]$ پوچ باشد .

اثبات : اگر M_R پوچ نباشد ، آنگاه زیر مدول های $K_R, L_R \subset M_R$ موجودند بطوریکه $K+L=M$. در این صورت $M[x^{-1}]=K[x^{-1}]+L[x^{-1}]$ ، که نشان می دهد $M[x^{-1}]$ به عنوان S- مدول پوچ نیست.

برای اثبات عکس ، حالت خاصی را بیان می کنیم و بعد لم را در حالت کلی اثبات می کنیم :

حالت خاص : نشان می دهیم اگر M_R ساده و پوچ باشد، آنگاه $M[x^{-1}]$ پوچ است. در این حالت حلقه R لزوماً کامل راست نیست.

قضیه را برای مدول M_R روی حلقه دلخواه R ثابت می کنیم. کافیست نشان دهیم برای هر $Q_S \subset M[x^{-1}]_S$ ، $k \in \mathrm{N}$ موجود است بطوریکه هر عنصر Q_S از درجه حداکثر k می باشد.

(فرض خلف) برای نشان دادن این مطلب فرض کنیم Q_S شامل چند جمله ایهای معکوس پذیر از درجه ای بسیار بزرگ باشد. با استقرا روی k نشان می دهیم که Q_S شامل هر تک جمله ای از درجه k است ، که ایجاب می کند $Q=M[x^{-1}]$ ، و این یک تناقض است . فرض کنیم $k=۰$. چند جمله ای معکوس $q \in Q$ را انتخاب نموده و برای هر $l \in \mathrm{N}$ و هر $۰ \neq m \in M$ جمله پیشرو $m x^{-l}$ را در نظر می گیریم . در نتیجه $m=qx^l \in Q$. پس $۰ \neq Q \cap M \subseteq M$ ؛ و چون M_R ساده است ، لذا

$Q \bigcap M = M$. فرض کنیم $k \in \mathrm{N}$ دلخواه باشد. چند جمله ای $q \in Q$ را از درجه حداقل k در نظر می گیریم . برای هر $l \geq k$ و هر $0 \neq m \in M$ جمله پیشرو $m x^{-l}$ را در نظر می گیریم. در این صورت $qx^{l-k} \in Q$ جمله پیشرو $m x^{-k}$ دارد . با استقرا روی جملات از درجه پایین تر در Q، نتیجه می شود $m x^{-k} \in Q$. چون $\sigma \in Aut(R)$ و M_R ساده است ، لذا $M x^{-k} \subseteq Q$. در نتیجه استقرا کامل می شود و به این ترتیب حالت خاص ثابت می گردد.

اثبات در حالت کلی : فرض کنیم M_R پوچ باشد و زیر مدول های Q_S و $Q'_S \subset M[x^{-1}]_S$ موجود باشند بطوریکه $Q_S + Q'_S = M[x^{-1}]_S$. با توجه به کامل راست بودن حلقه R ، زیر مدول ماکسیمال L_R از M_R را در نظر می گیریم. چون M_R پوچ است ، لذا $L_R \subseteq_S M_R$. با استفاده از لم ۲- ۳- ۱۳ نتیجه می شود $M[x^{-1}]_S \subseteq_S L[x^{-1}]_S$. بنابراین $L[x^{-1}]_S + Q_S$ و $L[x^{-1}]_S + Q'_S$ دو زیر مدول سره از $M[x^{-1}]_S$ هستند که مجموعشان $M[x^{-1}]_S$ است ، زیرا اگر $L[x^{-1}]_S + Q_S = M[x^{-1}]$ ($L[x^{-1}]_S + Q'_S = M[x^{-1}]$) با توجه به کوچک بودن $L[x^{-1}]$ خواهیم داشت : $Q_S = M[x^{-1}]$ ($Q'_S = M[x^{-1}]$)، که یک تناقض است . از کوچک بودن $L[x^{-1}]$ در $M[x^{-1}]_S$ نتیجه می شود که هر دو مدول ظاهر شده باید اکیداً شامل $L[x^{-1}]_S$ باشند . بنابراین تصویر این دو مدول در $\left(\frac{M[x^{-1}]}{L[x^{-1}]}\right)_S \cong (\frac{M}{L})[x^{-1}]_S$ ناصفر و سره است ، که مجموعشان برابر $(\frac{M}{L})[x^{-1}]$ است. چون L ماکسیمال است ، لذا $(\frac{M}{L})_R$ ساده می باشد. بنا به حالت خاص ، $(\frac{M}{L})[x^{-1}]_S$ پوچ است ، که یک تناقض است . بنابراین فرض خلف باطل و اثبات کامل می شود. ▓

اکنون با استفاده از لم های ۲- ۳- ۱۳ و ۲- ۳- ۱۴ ، قضیه زیر را می توان ثابت نمود .

قضیه ۲- ۲- ۱۴ : (b) فرض کنیم R یک حلقه کامل راست باشد و $S=R[x;\sigma]$. در این صورت برای هر مدول M_R ، $Corank\,(M[x^{-1}]_S)=Corank\,(M_R)$.

برهان : ابتدا فرض کنیم $Corank\left(M_R\right)=n<\infty$. بنا به گزاره ۲- ۳- ۶ ، R - مدول های پوچ ناصفر H_1 ،H_2 و...و H_n و اپی مورفیسم $\phi: M_R \to \prod_{i=1}^{n} H_i$ وجود دارند که $(Ker\,\phi)_R \subseteq_S M_R$. با استفاده از ϕ ، S- اپی مورفیسم $\theta: M[x^{-1}]_S \to \left(\prod_{i=1}^{n} H_i\right)[x^{-1}]_S \cong \prod_{i=1}^{n} H_i\,[x^{-1}]_S$ با ضابطهٔ $m\,x^{-j} \mapsto \phi(m)\,x^{-j}$ بدست می آید. به سادگی می توان نشان داد که $Ker\,\theta=(Ker\,\phi)[x^{-1}]$. چون $Ker\,\phi \subseteq_S M_R$ ، لذا بنا به لم ۲- ۳- ۱۳ ، $\left(Ker\,\theta\right)_S=\left(Ker\,\phi\right)[x^{-1}] \subseteq_S M[x^{-1}]_S$. بنا به قسمت (b) گزاره ۲- ۳- ۷ ، خواهیم داشت :

$$Corank\,\left(M\left[x^{-1}\right]_S\right)=Corank\left(\frac{M\left[x^{-1}\right]}{Ker\,\theta}\right)_S=Corank\left(\prod_{i=1}^{n} H_i\left[x^{-1}\right]_S\right).$$

چون برای هر i ، $H_i\,[x^{-1}]_S$ پوچ است ، با استفاده از (c) گزاره ۲- ۳- ۷ ، خواهیم داشت :

$$Corank\,\left(M\left[x^{-1}\right]_S\right)=Corank\left(\prod_{i=1}^{n} H_i\left[x^{-1}\right]_S\right)=\sum_{i=1}^{n} Corank\left(\ H_i\left[x^{-1}\right]_S\ \right)=n.$$

به این ترتیب در حالتی که M_R بعد دوگان گلدی متناهی داشته باشد ، اثبات کامل می شود .

حال اگر $Corank\left(M_R\right)=\infty$ ، آنگاه برای هر $k\geq 1$ ، R - زیر مدول های نا صفر N_1 ، N_2 ، ... و N_k و اپی مورفیسم ϕ_k به شکل $\phi_k: M_R \to \prod_{i=1}^{k} N_i$ موجود است . برای هر k، اپی مورفیسم ϕ_k $\theta: M[x^{-1}]_S \to \prod_{i=1}^{k} N_i\,[x^{-1}]_S$ را القا می کند . بنابراین $Corank\,(M[x^{-1}]_S)=\infty$. ▓

واژه نامه فارسی به انگلیسی

ایده آل	ideal
– اساسی	- essential
– اصلی	- principal
- راست	- right
– ماکسیمال	- maximal
- منفرد	- singular
- یکنواخت	- uniform
برووریختی کانونی	canonical epimorphism
بعد	dimension
- دوگان گلدی	- dual Goldie
- گلدی	- Goldie
پوچساز	annihilator
پوچی	nilpotency
چند جمله ای تکین	monic polynomial
حاصلجمع مستقیم	direct sum
حلقه	ring
- آرتینی	-Artinian
– تقسیم	- division

- skew polynomial	- چند جمله ایهای اریب
- right perfect	- کامل راست
- right quotients	- کسرهای راست
- right finite dimensional	- متناهی البعد راست
- Discrete Valuation	- مقدار گسسته
- local	- موضعی
- semiprime	- نیم اول
Automorphism	خودریختی
Endomorphism	درونریختی
exact sequences	دنباله دقیق
prime radical	رادیکال اول
subring	زیر حلقه
submodule	زیر مدول
leading coefficient	ضریب پیشرو
regular element	عنصر منظم
Chinese Remainder Theorem	قضیه باقیمانده چینی
Hilbert Basis Theorem	قضیه پایه ای هیلبرت
Weak Chinese Remainder Theorem	قضیه ضعیف باقیمانده چینی
module	مدول
- hollow	- پوچ
- small	- کوچک

zero divisors	مقسوم علیه صفر
imbed	نشاندن

واژه نامه انگلیسی به فارسی

annihilator	پوچساز
Artinian ring	حلقه آرتینی
Automorphism	خودریختی
canonical epimorphism	بروریختی کانونی
Chinese Remainder Theorem	قضیه باقیمانده چینی
direct sum	حاصلجمع مستقیم
Discrete Valuation Ring	حلقه مقدار گسسته
division ring	حلقه تقسیم
dual Goldie dimension	بعد دوگان گلدی
Endomorphism	درونریختی
essential ideal	ایده آل اساسی
exact sequences	دنباله دقیق
Goldie dimension	بعد گلدی
Hilbert Basis Theorem	قضیه پایه ای هیلبرت
hollow module	مدول پوچ
imbed	نشاندن
leading coefficient	ضریب پیشرو
local ring	حلقه موضعی

maximal ideal	ایده آل ماکسیمال
monic polynomial	چند جمله ای تکین
nilpotency	پوچی
prime radical	رادیکال اول
principal ideal	ایده آل اصلی
regular element	عنصر منظم
right finite dimensional ring	حلقه متناهی البعد راست
right ideal	ایده آل راست
right perfect ring	حلقه کامل راست
right quotients ring	حلقه کسرهای راست
semiprime ring	حلقه نیم اول
singular ideal	ایده آل منفرد
skew polynomial ring	حلقه چند جمله ایهای اریب
small module	مدول کوچک
submodule	زیر مدول
subring	زیر حلقه
uniform ideal	ایده آل یکنواخت
Weak Chinese Remainder Theorem	قضیه ضعیف باقیمانده چینی
zero divisors	مقسوم علیه صفر

References

[1] S . Annin . (2002) " Associated primes over skew polynomial rings " **Communications in Algebra .** 30. pp 2511-2528.

[2] S . Annin . (2002) PhD.thesis, "Associated and Attached Primes over noncommutative rings ", Math .depart . university of California at Berkeley ,129 pp .

[3] S . Annin . (2004) "Associated primes over Ore Extension rings ", **Journal of Algebra and its Applications .** 3, no.2, pp 193-205.

[4] S . Annin . (2008) " Attached primes over noncommutative rings " **Journal of Pure and Applied Algebra .** 212. pp 510-521 .

[5] C . Faith . (2000) "Associated primes in commutative polynomial rings ", **Communications in Algebra .**28, pp 3983-3986 .

[6] A . W . Goldie . (1960) " Semiprime rings with the maximum condition " **Proc . London Math . Soc .** 10 , pp 201-220 **.**

[7] R . E . Johnson . (1951) " Exlended centralizer of a ring over a module " **Proc . Amre .** Soc . 2 . pp 891-895 **.**

[8] T. Y. Lam . (1991) " A first course in noncommutative rings " , Graduate Texts in Mathematcs volume 131., Springer – Verlag . Berlin- Hidelberg- New York.

[9] T. Y. Lam . (1998) " Lectures on modules and rings ", Graduate Texts in Mathematcs volume 189., Springer – Verlag . Berlin- Hidelberg- New York.

[10] T. Y. Lam , A. Leory , and J. Matczuk . (1997) " Primeness , semiprimeness , and prim radical of Ore extensions" , **Communications in Algebra .** 25, pp 2459-2506.

[11] J. Matczuk . (1995) " Goldie rank of Ore extensions" , **Communications in Algebra .** 23, pp 1455-1471.

[12] B. Sarath and K. Varadarajan . (1979) " Dual Goldie dimension II " , **Communications in Algebra .** 7, pp 1885-1899.

[13] R .C. Shock .(1972) " The ring of endomorphisms of a finite dimensional module " , **Journal of mathematics**,volume 11, Number 3, 309-314 .

[14] R . C. Shock .(1972) "Polynomial rings over finite dimensional rings " , **Pacific J. of Math ,** 42 , pp 251-257.

[15] R .C. Shock . (1969), PhD.thesis, " Ring with finiteness conditions " , Math .depart. North Carolina university.

[16] L . W . Small . (1966) " Orders in Artinian rings " **J. Algebra .** 4, pp 13-14.

[17] L . W . Small . (1966) "Correction and Addendum : Orders in Artinian rings " , **J. Algebra .** 4, pp 505-507 .

[18] L . W . Small . (1968) " Orders in Artinian rings II " **J. Algebra .**9 , PP 226-273 .

[19] K. Varadarajan .(1979) "Dual Goldie dimension " , **Communications in Algebra .** 7, pp 565-610.

[20] K. Varadarajan . (1982) " On a theorem of Shock " , **Communications in Algebra.** 10, pp 2205-2222.

[21] K. Varadarajan. (1982) "Dual Goldie dimension of certain extensions rings " , **Communications in Algebra .** 10, pp 2223-2231.

Abstract

A rings R is right dimensional if it contains no infinite direct sum of nonzero right ideals.

In chapter 1 of this thesis , we prove that polynomial rings over finite dimensional rings are finite dimensional rings.

In chapter 2, we study the behavior of in uniform (or Goldie) dimension and the co – uniform (or dual Goldie) dimension of a module under various polynomial extensions. For a ring automorphism $\sigma \in Aut(R)$ and a σ- derivation δ on R, we use the notion of a (σ, δ)- compatible module M_R to extend earlier results on the uniform and co – uniform dimensions to polynomial modules $M[x]$, $M[x^{-1}]$, $M[x, x^{-1}]$ over skew extension rings $S := R[x; \sigma, \delta]$.

Also we prove that the uniform dimension of module M_R , $M[x, x^{-1}]$, and $\frac{M[x]}{< x^n >}$ are equal.

If R is a commutative ring , then $Corank\,(R[x]_{R[x]}) = Corank\,(R[x, x^{-1}]_{R[x, x^{-1}]})$.

Note that this results from this papers:

3- Co-uniform dimension over skew polynomial rings, Communications in Algebra , 33 (2005) , p. 1195-1204.
4- Polynomial rings over finite dimensional rings , Robert C .Shock , pacific Journal of mathematics vol.42, No.1,1972.

Keywords : (σ, δ)- compatible , uniform dimension (u.dim) , co – uniform dimension (corank) , skew polynomial ring.

Shahrood University of Technology

Department of Mathematics

Uniform and co-uniform dimension of polynomial modules over skew polynomial rings

Malihe Ghadiri

Superviser:
Dr. Ebrahim Hashemi

september 2010