دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

اتساع زوج‌های قاب دوگان در C^*-مدول‌های هیلبرت

حمیدرضا حیدری

استادان راهنما

دکتر کامران شریفی و دکتر علیرضا خدّامی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم به:

ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج)

و روح پاک پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی ایستادن را تجربه نمایم

و به مادرم دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :

از اساتید با کمالات و شایسته؛ جناب آقایان دکتر علیرضا خدّامی و دکتر کامران شریفی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند تشکر می‌کنم.

در پایان از زحمات جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش و جناب آقای دکتر غلامرضا عباسپور که زحمت داوری این پایایان‌نامه را متقبل شده‌اند تشکر می‌کنم.

حمیدرضا حیدری

بهمن ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **حمیدرضا حیدری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **اتساع زوج‌های قاب دوگان در C^*-مدول‌های هیلبرت** ، تحت راهنمایی **دکتر کامران شریفی** و **دکتر علیرضا خدّامی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حمیدرضا حیدری
بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه خواص هندسی قاب‌های C^*-مدول‌های هیلبرت مورد بررسی واقع می‌شوند. در این راستا نشان می‌دهیم که هر زوج قاب دوگان در یک C^*-مدول هیلبرت، تراکم متعامدی از یک پایه ریس و دوگان متعارفش از یک C^*-مدول هیلبرت بزرگتر است. این مطلب، نظریه اتساع زوج‌های قاب دوگان در فضاهای هیلبرت را به زوج‌های قاب دوگان در C^*-مدول‌های هیلبرت تعمیم می‌دهد. به ویژه برای هر زوج قاب دوگان در C^*-مدول هیلبرت که توسط یک گروه از عملگرهای یکانی تولید شده است، نشان می‌دهیم که یک زوج قاب دوگان متسع موجود است به طوری‌که همان ساختار گروهی را به ارث می برد. در پایان ساختار g-قاب‌ها را در فضاهای هیلبرت بررسی می‌کنیم.
کلمات کلیدی. اتساع، قاب، پایه ریس، دنباله بسل، C^*-مدول‌های هیلبرت، فضای هیلبرت، g-قاب، g-پایه ریس، g-دنباله بسل.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

هدف از این فصل بیان مقدمات و پیش‌نیازهای لازم برای این پایان‌نامه است. در این فصل ابتدا به معرفی C^*-جبرها می‌پردازیم، سپس فضای هیلبرت و فضای C^*-مدول‌های هیلبرت[۱] را معرفی می‌کنیم و در پایان نیز قسمتی از نظریه عملگرها روی فضای هیلبرت را یادآوری می‌کنیم.

۲.۱ C^*-جبرها

تعریف ۱.۲.۱. یک فضای نرم‌دار مانند X یک فضای برداری است که روی آن یک نرم تعریف شود. یک نرم[۲] روی یک فضای برداری X یک تابع حقیقی مقدار[۳] روی X است که به هر $x \in X$ عنصر $\|x\|$ را متناظر می‌سازد که دارای ویژگی‌های زیر است،

۱. برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq ۰$؛

۲. $\|x\| = ۰$ اگروفقط اگر $x = ۰$؛

۳. برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

۴. برای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

هرفضای نرم‌دار را با نماد $(X, \|.\|)$ نمایش می‌دهیم.

---

[۱] Hilbert C^*-Modules

[۲] Norm

[۳] Real-valued function

تعریف ۲.۲.۱. یک جبر A، یک فضای برداری به همراه یک نگاشت دو خطی چون

$$\begin{cases} A^{2} & \longrightarrow A \\ (a,b) & \longrightarrow ab \end{cases}$$

است، به‌طوری‌که به ازای هر $a,b,c \in A$، $a(bc) = (ab)c$. همچنین یک زیر جبر از A، یک زیر فضای برداری از آن چون B است، به‌طوری‌که به ازای هر $b,b' \in B$ داشته باشیم $bb' \in B$.

تعریف ۳.۲.۱. یک نرم روی جبر A زیر ضربی گفته می‌شود، هرگاه به ازای هر $a,b \in A$ داشته باشیم

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

که در این حالت زوج $(A, \|.\|)$ را یک جبر نرم‌دار می‌نامیم.

نکته. هرگاه جبر A دارای عنصر یکه‌ای چون ۱ باشد، به‌طوری‌که $\|1\| = 1$، و به ازای هر $a \in A$، $a1 = 1a = a$، آنگاه می‌گوئیم A یک جبر نرم‌دار یک‌دار است.

تعریف ۴.۲.۱. یک برگشت [۴] روی جبر A یک نگاشت مانند:

$$\begin{cases} * : A \longrightarrow A \\ \quad a \mapsto a^* \end{cases}$$

است، که در شرایط زیر صادق است:

۱. $a^{**} = a$،

۲. $(ab)^* = b^* a^*$،

۳. $(a+b)^* = a^* + b^*$،

۴. $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$.

به ازای هر $a,b \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$. در این‌صورت زوج $(A,*)$ یک $*$−جبر نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A یک $*$−جبر دلخواه باشد. در این صورت عنصر $a \in A$ را هرمیتی یا خودالحاق[۵] نامیده می‌شود هرگاه $a = a^*$. مجموعه همه عناصر خودالحاق از $*$−جبر A را با نماد A_{sa} نشان می‌دهیم.

نکته. برای هر عنصر مانند a از $*$−جبر A عناصر خودالحاقی مانند b و c در A چنان موجود هستند که $a = b + ic$، به‌طوری‌که

$$b = \frac{1}{2}(a + a^*), \qquad c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که عناصر aa^* و a^*a نیز خودالحاق هستند.

---

[۴] Involution

[۵] Self-adjoint

تعریف ۶.۲.۱. یک $*$-جبر باناخ، $*$-جبری چون A به همراه یک نرم زیر ضربی کامل است، هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\|a\| = \|a^*\|$. به‌علاوه اگر A یکدار باشد و $\|1\| = 1$، می‌گوئیم A یک $*$-جبر باناخ یکدار است.

تعریف ۷.۲.۱. یک C^*-جبر یکدار، یک $*$-جبر باناخ یکدار چون A است به‌طوری‌که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\|a\|^2 = \|a^*a\|$.

نمادگذاری. فرض کنیم Ω یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده[۶] باشد، در این‌صورت مجموعه تمام توابع پیوسته f از Ω به $\mathbb{C}$ را که در بینهایت صفر می‌شوند، به عبارت دیگر به ازای هر ε مثبت مجموعه $\{\omega \in \Omega | |f(\omega)| \geq \varepsilon\}$ فشرده است، را با نماد $C_0(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.
اکنون به بیان چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۸.۲.۱. میدان $\mathbb{C}$ یک C^*-جبر یکدار با برگشت $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ است.

مثال ۹.۲.۱. اگر Ω یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد آنگاه $C_0(\Omega)$ یک C^*-جبر با برگشت $f \mapsto \overline{f}$ و نرم سوپریمم است.

مثال ۱۰.۲.۱. هرگاه H یک فضای هیلبرت باشد آنگاه $B(H)$ همراه با برگشت $T \to T^*$ و نرم عملگری یک C^*-جبر است.

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر A یک C^*-جبر یکدار باشد و $a, p, u \in A$ آنگاه

۱. a نرمال[۷] است اگر $a^*a = aa^*$؛

۲. p یک تصویر[۸] است اگر $p = p^* = p^2$؛

۳. u یکانی[۹] است اگر $u^*u = uu^* = 1$؛

۴. a معکوس‌پذیر[۱۰] است اگر $b \in A$ موجود باشد بطوریکه $ab = ba = 1$؛

۵. طیف[۱۱] a عبارت است از $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}$؛

۶. a مثبت[۱۲] است اگر $a^* = a$ و $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$؛

۷. $a \geqslant b$ اگر و تنها اگر $a - b$ مثبت باشد.

[۶] Locally compact Hausdorff space
[۷] Normal
[۸] Image
[۹] Unitary
[۱۰] Invertible
[۱۱] Spectrum
[۱۲] Positive

لم ۱۲.۲.۱. در هر C^*-جبر جمع دو عنصر مثبت، عنصری مثبت است.

برهان. رجوع شود به لم (۲.۲.۳) مرجع [۲۱]. □

قضیه ۱۳.۲.۱. اگر a عنصری دلخواه در C^*-جبر A باشد، آنگاه a^*a مثبت است.

برهان. رجوع شود به قضیه (۲.۲.۴) مرجع [۲۱]. □

قضیه ۱۴.۲.۱. اگر A یک C^*-جبر باشد آنگاه :

۱. A^+(مجموعه عناصر مثبت A) برابر است با $\{a^*a|a \in A\}$.

۲. اگر $a,b \in A_{sa}$ و $c \in A$، آنگاه $a \leq b$ نتیجه می‌دهد که $c^*ac \leq c^*bc$.

۳. اگر $0 \leq a \leq b$ آنگاه $\|a\| \leq \|b\|$.

۴. اگر A یکدار باشد و a و b دو عنصر مثبت معکوس‌پذیر باشند، آنگاه $a \leq b$ نتیجه می‌دهد $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

برهان. رجوع شود به قضیه (۲.۲.۵) مرجع [۲۱]. □

قضیه ۱۵.۲.۱. اگر a و b دو عنصر مثبت از C^*- جبر A باشند، آنگاه $a \leq b$ نتیجه می‌دهد $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$.

برهان. رجوع شود به قضیه (۲.۲.۶) مرجع [۲۱]. □

۳.۱ C^*-مدول‌های هیلبرت

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه[۱۳] باشد. در این‌صورت یک R-مدول (چپ) A ، گروه آبلی و جمعی به همراه تابعی چون $R \times A \longrightarrow A$ است به‌طوری‌که به ازای هر $a,b \in A$ و هر $r,s \in R$ ،

۱. $r(a+b) = ra + rb$،

۲. $(r+s)a = ra + sa$،

۳. $r(sa) = (rs)a$.
و هرگاه R دارای واحد 1_R باشد و داشته باشیم

۴. $1_R a = a$،

آنگاه می‌گوئیم A یک R-مدول چپ یکانی است.

[۱۳] Ring

به همین ترتیب می‌توان R-مدول یکانی راست را به همراه تابعی چون $A \times R \longrightarrow A$: با خواص مشابه تعریف کرد.
اکنون به بیان چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲.۳.۱. هر گروه آبلی[۱۴] جمعی G یک $\mathbb{Z}$-مدول یکانی است.

مثال ۳.۳.۱. هرگاه S یک حلقه و R یک زیر حلقه باشد، آنگاه S یک R-مدول است.

مثال ۴.۳.۱. هرگاه I یک ایده آل[۱۵] چپ حلقه R باشد، آنگاه I یک R-مدول چپ است که در آن ra که $r \in R$ و $a \in I$، حاصل‌ضرب معمولی در R است.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم H یک فضای برداری مختلط باشد. آنگاه یک ضرب داخلی روی H نگاشتی چون

$$\begin{cases} \langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle \end{cases}$$

است که به‌ازای هر $x,y,z \in H$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند.

۱. $\langle x,x \rangle \geq 0$،

۲. $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$،

۳. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

۴. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$

تعریف ۶.۳.۱. یک فضای برداری مختلط چون H که مجهز به ضرب داخلی است، یک فضای پیش هیلبرت نامیده می‌شود. حال اگر نرم را در این فضا به صورت $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ تعریف کنیم، آنگاه فضای پیش هیلبرتی که نسبت به این نرم کامل باشد، یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

مثال ۷.۳.۱. فرض کنیم (X, M, μ) یک فضای اندازه[۱۶] باشد و $L^2(\mu)$ مجموعه تمام توابع اندازه‌پذیر[۱۷] چون $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ باشد که $\int |f|^2 d\mu < \infty$، دراین‌صورت با تعریف ضرب داخلی روی $L^2(\mu)$ که به‌صورت $\langle f,g \rangle = \int f\overline{g} d\mu$ است، می‌توان دید که $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت به ازای هر اندازه μ است.

قضیه ۸.۳.۱. (نامساوی کشی-شوارتز[۱۸])
اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر $x,y \in X$،

$$|\langle x,y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$$

[۱۴] Abelian group

[۱۵] Ideal

[۱۶] Measure space

[۱۷] Measurable function

[۱۸] Cauchy-Schwartz inequality

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که x و y وابسته خطی[19] باشند.

برهان. اگر $\langle x,y\rangle = 0$، حکم واضح است. حال اگر $\langle x,y\rangle \neq 0$ (به ویژه وقتی $y \neq 0$)، قرار می‌دهیم $\alpha = sgn\langle x,y\rangle$ و $z = \alpha y$، لذا $\langle x,z\rangle = \langle z,x\rangle = |\langle x,y\rangle|$ و $\|y\| = \|z\|$. در نتیجه به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم:

$$0 \leq \langle x - tz, x - tz\rangle = \|x\|^2 - 2t|\langle x,y\rangle| + t^2\|y\|^2.$$

عبارت طرف راست یک تابع درجه دوم از متغیر t است که مینیمم مطلق آن در $t = \|y\|^{-2}|\langle x,y\rangle|$ رخ می‌دهد. t را مساوی این مقدار قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم :

$$0 \leq \|x - tz\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^{-2}|\langle x,y\rangle|^2$$

که تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $x - tz = x - \alpha t y = 0$ که از این هم فوراً حکم مطلوب حاصل می‌شود. □

تعریف ۹.۳.۱. در یک فضای هیلبرت مانند H، هرگاه $E \subset H$ تعریف می‌کنیم:

$$E^{\perp} = \{x \in H \mid \forall y \in E; \langle x,y\rangle = 0\}.$$

هرگاه $\langle x,y\rangle = 0$، می‌نویسیم $x \perp y$.

قضیه ۱۰.۳.۱. فرض کنیم M یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشد، در این‌صورت،

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

برهان. رجوع شود به قضیه (۵.۲۴) مرجع [۷]. □

قضیه ۱۱.۳.۱. (قضیه فیثاغورث[20]) فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. در این‌صورت اگر $x_1, \cdots x_n \in H$ به طوری‌که به‌ازای هر $j \neq k$، $x_j \perp x_k$، آنگاه،

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

برهان. رجوع شود به قضیه (۵.۲۳) مرجع [۷]. □

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنیم $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در فضای هیلبرت H باشد. در این‌صورت مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی x_nها را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\sum_{i=1}^{k} c_{n_i} x_{n_i} : k, n_i \in \mathbb{N}, c_{n_i} \in \mathbb{C}\right\}.$$

بستار مجموعه مذکور را با نماد $\overline{span}\{x_n\}_{n=1}$ نمایش می‌دهیم.

[19] linear dependence

[20] Pythagorean theorem

تعریف ۱۳.۳.۱. دنباله $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک سیستم متعامد[۲۱] است هرگاه،

$$\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} ۱ & k = j \\ ۰ & k \neq j \end{cases}$$

به ویژه هر سیستم متعامد ماکسیمال برای H را یک پایه متعامد یکه[۲۲] برای H می‌نامیم.

قضیه ۱۴.۳.۱. فرض کنید $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک سیستم متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

۱. $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه است.

۲. به ازای هر $f \in H$، $f = \sum_{k=۱}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k$.

۳. به‌ازای هر $f, g \in H$، $\langle f, g\rangle = \sum_{k=۱}^{\infty}\langle f, e_k\rangle\langle e_k, g\rangle$.

۴. به‌ازای هر $f \in H$، $\sum_{k=۱}^{\infty}|\langle f, e_k\rangle|^۲ = \|f\|^۲$.

۵. $\overline{span}\{e_k\}_{k=۱}^{\infty} = H$

۶. اگر به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $\langle f, e_k\rangle = ۰$ آنگاه $f = ۰$.

برهان. رجوع کنید به قضیه (۳.۴.۲) مرجع [۵]. □

تعریف ۱۵.۳.۱. اگر V زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد آنگاه تصویر متعامد[۲۳] H روی V عملگر خطی $P : H \longrightarrow H$ است به طوری‌که:

$$\begin{cases} Px = x & x \in V \\ Px = ۰ & x \in V^{\perp} \end{cases}$$

تعریف ۱۶.۳.۱. فرض کنید A یک C^*-جبرباشد. یک A-مدول ضرب داخلی[۲۴] یا یک A-مدول پیش هیلبرت، یک A-مدول راست X مجهز به نگاشت مزدوج خطی $\langle ., . \rangle : X \times X \longrightarrow A$ است به‌طوری‌که به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و هر $a \in A$ شرایط زیر برقرار می‌باشند،

۱. $\langle x, x\rangle \geqslant ۰$،

۲. $\langle x, x\rangle = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$،

۳. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$،

۴. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$،

---

[۲۱] Orthogonal system

[۲۲] Orthogonal bases

[۲۳] Orthogonal projection

[۲۴] Inner-product A-module

۵. $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$.

به طور مشابه می‌توان A-مدول پیش هیلبرت چپ را تعریف نمود با این تفاوت که ضرب داخلی نسبت به مولفه اول خطی است و به‌ازای هر $a \in A$ و هر $x, y \in X$ داشته باشیم
$$\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle.$$

مثال ۱۷.۳.۱. هر فضای ضرب داخلی H یک مدول پیش هیلبرت چپ روی میدان $\mathbb{C}$ است.

برهان. با توجه به تعریف ضرب داخلی به صورت
$$\begin{cases} \langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \end{cases}$$
خاصیت اول و دوم به وضوح برقرار است. برای خواص دیگر نیز داریم

۱. $\langle \alpha x + \lambda y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$

۲. $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$

□

مثال ۱۸.۳.۱. اگر J یک ایده‌آل راست از C^*-جبر A باشد آنگاه J با تعریف $\langle x, y\rangle = x^*y$ یک A-مدول پیش هیلبرت راست است.

برهان. با توجه به این نکته که در هر C^*-جبر، ضرب یک عنصر دلخواه در الحاقش عنصری مثبت از C^*-جبر است، لذا شرط اول به وضوح برقرار است.

۱.
$$\langle a, a\rangle = a^*a \geq \circ.$$

۲.
$$\begin{aligned} \langle a, a\rangle = \circ &\Longleftrightarrow a^*a = \circ \\ &\Longleftrightarrow \|a^*a\| = \|a\|^{۲} = \circ \\ &\Longleftrightarrow a = \circ. \end{aligned}$$

۳.
$$\langle a, b\rangle^* = (a^*b)^* = b^*a = \langle b, a\rangle.$$

۴.

$$\begin{aligned}\langle a, \alpha b+\beta c\rangle &= a^*(\alpha b+\beta c)\\ &= a^*\alpha b + a^*\beta c\\ &= \alpha(a^*b)+\beta(a^*c)\\ &= \alpha\langle a,b\rangle+\beta\langle a,c\rangle.\end{aligned}$$

به طوری‌که $a, b, c \in J$ و $\alpha, \beta \in A$. $\square$

مثال ۱۹.۳.۱. فرض کنیم $\{X_i\}_{i=1}^{m}$ یک خانواده از A-مدول‌های پیش هیلبرت راست باشد. در این صورت فضای برداری $\bigoplus_{i=1}^{m} X_i$ همراه با عمل مدولی و ضرب داخلی تعریف شده زیر یک A-مدول پیش هیلبرت راست است.

$$(x_1, ..., x_m)a = (x_1a, ..., x_ma) \quad , \quad \langle (x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m)\rangle = \sum_{i=1}^{m}\langle x_i, y_i\rangle.$$

برهان. فرض کنید $(x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} X_i$ و $a, b \in A$ باشد در این‌صورت

۱.

$$\begin{aligned}((x_1, ..., x_m)+(y_1, ..., y_m))\,a &= (x_1+y_1, ..., x_m+y_m)\,a\\ &= ((x_1+y_1)a, ..., (x_m+y_m)a)\\ &= ((x_1a+y_1a), ..., (x_ma+y_ma))\\ &= (x_1a, ..., x_ma)+(y_1a, ..., y_ma)\\ &= (x_1, ..., x_m)a+(y_1, ..., y_m)a.\end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}(x_1, ..., x_m)(a+b) &= (x_1(a+b), ..., x_m(a+b))\\ &= (x_1a+x_1b, ..., x_ma+x_mb)\\ &= (x_1, ..., x_m)a+(x_1, ..., x_m)b.\end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned}((x_1, ..., x_m)a)b &= (x_1a, ..., x_ma)b\\ &= (x_1ab, ..., x_mab)\\ &= (x_1(ab), ..., x_m(ab))\\ &= (x_1, ..., x_m)(ab)\end{aligned}$$

تا کنون نشان داده‌ایم که $\bigoplus_{i=1}^{m} X_i$ یک A-مدول راست است.
اکنون نشان می‌دهیم که $\bigoplus_{i=1}^{m} X_i$ یک A-مدول پیش هیلبرت راست است:

۱. طبق تعریف به‌ازای هر $(x_1, ..., x_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} X_i$ داریم

$$\langle (x_1, ..., x_m), (x_1, ..., x_m) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, x_i \rangle$$

از طرفی می‌دانیم که بازای هر $1 \leq i \leq m$ ، $\langle x_i, x_i \rangle \geqslant 0$ بنابر این

$$\langle (x_1, ..., x_m), (x_1, ..., x_m) \rangle \geqslant 0.$$

۲. حال فرض کنید $x = (x_1, \cdots, x_m)$ دراین‌صورت،

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, x_i \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x_i, x_i \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned} \langle (x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m) + \lambda (z_1, ..., z_m) \rangle &= \langle (x_1, ..., x_m), (y_1 + \lambda z_1, ..., y_m + \lambda z_m) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, y_i + \lambda z_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, y_i \rangle + \lambda \langle x_i, z_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, y_i \rangle + \lambda \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, z_i \rangle \\ &= \langle (x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m) \rangle \\ &\quad + \lambda \langle (x_1, ..., x_m), (z_1, ..., z_m) \rangle. \end{aligned}$$

۴.

$$\begin{aligned} \langle (x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m) a \rangle &= \langle (x_1, ..., x_m), (y_1 a, ..., y_m a) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, y_i a \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, y_i \rangle a \\ &= \langle (x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m) \rangle a. \end{aligned}$$

.۵

$$\begin{aligned}\langle (x_۱, ..., x_m), (y_۱, ..., y_m)\rangle &= \sum_{i=۱}^{m} \langle x_i, y_i\rangle \\ &= \sum_{i=۱}^{m} \langle y_i, x_i\rangle^* \\ &= (\sum_{i=۱}^{m} \langle y_i, x_i\rangle)^* \\ &= (\langle (y_۱, ..., y_m), (x_۱, ..., x_m)\rangle)^*.\end{aligned}$$

□

تعریف ۲۰.۳.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. دراین‌صورت X را یک A-مدول چپ نرم‌دار می‌نامیم هرگاه X یک A-مدول چپ بوده و به‌ازای هر $x \in X$ و هر $a \in A$ داشته باشیم
$$\|ax\| \leq \|a\|\|x\|.$$

قضیه ۲۱.۳.۱. اگر X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد آنگاه به‌ازای هر $x, y \in X$
$$\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leqslant \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle.$$

برهان. ابتدا فرض کنیم شرط $\|\langle x, x\rangle\| = ۱$ برقرار باشد. در این‌صورت برای هر $a \in A$ داریم

$$\begin{aligned}\circ \leqslant \langle xa - y, xa - y\rangle &= \langle xa, xa\rangle - \langle y, xa\rangle - \langle xa, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= a^*\langle x, x\rangle a - \langle y, x\rangle a - a^*\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqslant \|\langle x, x\rangle\| a^*a - \langle y, x\rangle a - a^*\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در نامساوی آخر از این نکته استفاده کردیم که هرگاه b یک عنصر مثبت از C^*-جبر A باشد، آنگاه به‌ازای هر $a \in A$ رابطه $a^*ba \leq \|b\|a^*a$ برقرار است.

حال با جایگذاری $a = \langle x, y\rangle$ داریم $a^*a \leqslant \langle y, y\rangle$ و حکم ثابت می‌شود.

حال اگر $x \neq \circ$، آنگاه با قرار دادن $x_\circ = \frac{x}{\|\langle x, x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}}$ داریم $\|\langle x_\circ, x_\circ\rangle\| = ۱$ لذا داریم

$$\begin{aligned}\langle y, x_\circ\rangle\langle x_\circ, y\rangle \leqslant \|\langle x_\circ, x_\circ\rangle\|\langle y, y\rangle &\Longrightarrow \left\langle y, \frac{x}{\|\langle x, x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}}\right\rangle \left\langle \frac{x}{\|\langle x, x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}}, y\right\rangle \leqslant \langle y, y\rangle \\ &\Longrightarrow \frac{۱}{\|\langle x, x\rangle\|}\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leqslant \langle y, y\rangle \\ &\Longrightarrow \langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leqslant \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle.\end{aligned}$$

□

اگر X یک A-مدول پیش هیلبرت باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ لذا داریم

$$\begin{aligned}\|\langle x, y\rangle\|^{2} &= \|\langle x, y\rangle^{*}\langle x, y\rangle\| \\ &= \|\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle\| \\ &\leqslant \|\langle x, x\rangle\|\|\langle y, y\rangle\| \\ &= \|x\|^{2}\|y\|^{2}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\langle x, y\rangle\| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

تعریف ۲۲.۳.۱. هر A-مدول پیش هیلبرت را یک C^*-مدول هیلبرت می‌نامیم هرگاه نسبت به نرم زیر تام باشد.

$$\forall x \in A, \qquad \| x \| = \| \langle x, x\rangle \|^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۲۳.۳.۱. هر C^*-جبر A به همراه ضرب داخلی $< a, b >= a^*b$ یک A-مدول هیلبرت است.

مثال ۲۴.۳.۱. فرض کنیم $I \subset \mathbb{N}$ یک مجموعه اندیس گذار نامتناهی باشد و $\{X_n\}_{n\in I}$یک دنباله از A-مدول‌های هیلبرت باشد. آنگاه مجموعه

$$\bigoplus_{n\in I} X_n = \left\{ \{x_n\}_{n\in I} | x_n \in X_n, \sum_{n\in I}\langle x_n, x_n\rangle < +\infty \right\}$$

همراه با اعمال تعریف شده در ذیل یک C^*-مدول هیلبرت است.

$$\{x_n\}_{n\in I} + \lambda\{y_n\}_{n\in I} = \{x_n + \lambda y_n\}_{n\in I}$$

$$(\{x_n\}_{n\in I})a = \{x_n a\}_{n\in I}$$

$$\langle\{x_n\}_{n\in I}, \{y_n\}_{n\in I}\rangle = \sum_{n\in I}\langle x_n, y_n\rangle$$

برهان. برای هر $a \in A$ و $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \in \bigoplus_{n\in I} X_n$ داریم:

۱.

$$\langle\{x_n\}, \{x_n\}\rangle = \sum_{n\in I}\langle x_n, x_n\rangle \geqslant 0.$$

همچنین

$$\begin{aligned}\langle\{x_n\}, \{x_n\}\rangle = \sum_{n\in I}\langle x_n, x_n\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \forall n, \langle x_n, x_n\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \forall n, x_n = 0 \\ \Leftrightarrow \{x_n\} = 0.\{x_n\} \qquad\qquad = 0.\end{aligned}$$

.۲

$$\begin{aligned}
\langle \{x_n\}, \{y_n\}\rangle^* &= (\sum_{n\in I}\langle x_n, y_n\rangle)^* \\
&= (\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\langle x_n, y_n\rangle)^* \\
&= \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}\langle x_n, y_n\rangle)^* \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(\langle x_n, y_n\rangle)^* \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\langle y_n, x_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n, x_n\rangle = \langle \{y_n\}, \{x_n\}\rangle.
\end{aligned}$$

.۳

$$\begin{aligned}
\langle \{x_n\}, \{y_n\}a\rangle &= \langle \{x_n\}, \{y_n a\}\rangle \\
&= \sum_{n\in I}\langle x_n, y_n a\rangle \\
&= \sum_{n\in I}\langle x_n, y_n\rangle a \\
&= \left(\sum_{n\in I}\langle x_n, y_n\rangle\right) a \\
&= \langle \{x_n\}, \{y_n\}\rangle a.
\end{aligned}$$

.۴

$$\begin{aligned}
\langle \{x_n\}, \{y_n\} + \lambda\{z_n\}\rangle &= \sum_{n\in I}\langle x_n, y_n + \lambda z_n\rangle \\
&= \sum_{n\in I}\langle x_n, y_n\rangle + \lambda\langle x_n, z_n\rangle \\
&= \sum_{n\in I}\langle x_n, y_n\rangle + \sum_{n\in I}\lambda\langle x_n, z_n\rangle \\
&= \langle \{x_n\}, \{y_n\}\rangle + \lambda\langle \{x_n\}, \{z_n\}\rangle.
\end{aligned}$$

حال کافیست نشان دهیم $\bigoplus_{n\in I} X_n$ نسبت به نرم القاء شده توسط ضرب داخلی کامل است. برای این منظور فرض کنیم J یک مجموعه اندیس گذار شمارا و $\{\upsilon_k\}_{k\in J}$ یک دنباله کشی در $\bigoplus_{n\in I} X_n$ باشد.

برای هر $k \in J$ قرار می‌دهیم $\upsilon_k = \{x_{n,k}\}_{n\in I}$ در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\|x_{n,k} - x_{n,l}\|^۲ &= \|\langle x_{n,k} - x_{n,l}, x_{n,k} - x_{n,l}\rangle\| \\ &\leqslant \|\sum_{n=۱}^{\infty}\langle x_{n,k} - x_{n,l}, x_{n,k} - x_{n,l}\rangle\| \\ &= \|\langle \upsilon_k - \upsilon_l, \upsilon_k - \upsilon_l\rangle\| \\ &= \|\upsilon_k - \upsilon_l\|^۲.\end{aligned}$$

که در آن $\lim_{k,l\to\infty}\|\upsilon_k - \upsilon_l\|^۲ = ۰$. بنابراین دنباله $\{x_{n,k}\}_{n\in I, k\in J}$ در $\bigoplus_{n\in I} X_n$ کشی است. لذا به‌ازای هر $n \in I$ عنصر u_n چنان موجود است که $\lim_{k\to\infty} x_{n,k} = u_n$ و $u_n \in \bigoplus_{n\in I} X_n$. بنابراین قرار می‌دهیم $u = \{u_n\}$، پس $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. حال کافیست نشان دهیم $u \in \bigoplus_{n\in I} X_n$، به عبارت دیگر باید نشان دهیم که $\sum_{n=۱}^{\infty}\langle u_n, u_n\rangle < \infty$.
برای این کار نشان می‌دهیم که $\sum_{n=۱}^{\infty}\langle u_n, u_n\rangle$ در شرط کشی صدق می‌کند

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=p}^{q}\langle u_n, u_n\rangle\| &= \|\sum_{n=p}^{q}\left\langle \lim_{k\to\infty} x_{n,k}, \lim_{k\to\infty} x_{n,k}\right\rangle\| \\ &= \lim_{k\to\infty}\|\sum_{n=p}^{q}\langle x_{n,k}, x_{n,k}\rangle\| < \epsilon\end{aligned}$$

دلیل درستی آخرین نامساوی این است که $\{x_{n,k}\}_{n\in I,k\in J} \in \bigoplus_{n\in I} X_n$ و این که $\sum_{n\in I,k\in J}\langle x_{n,k}, x_{n,k}\rangle$ همگراست. این نشان می‌دهد که $\sum_{n=۱}^{\infty}\langle u_n, u_n\rangle$ در C^*-جبر A همگراست، و لذا $\bigoplus_{n\in I} X_n$ یک C^*-مدول هیلبرت است. □

C^*-مدول‌های هیلبرت در مواردی رفتارهایی مشابه با فضاهای هیلبرت دارند. به عنوان مثال رابطه زیر همانند فضای هیلبرت، دریک C^*-مدول هیلبرت، برقرار است.

$$\|x\| = sup\{\|\langle x, y\rangle\| \mid y \in X, \|y\| \leqslant ۱\}.$$

زیرا با استفاده از نامساوی کشی شوارتز هرگاه $\|y\| \leq ۱$، داریم

$$\begin{aligned}\|\langle x, y\rangle\| \leqslant \|x\|\|y\| &\Longrightarrow \|\langle x, y\rangle\| \leqslant \|x\| \\ &\Longrightarrow \sup\{\|\langle x, y\rangle\| \mid y \in X, \|y\| \leqslant ۱\} \leqslant \|x\|.\end{aligned}$$

همچنین فرض کنیم $y = \frac{x}{\|x\|}$ و $x \neq ۰$، در این‌صورت،

$$\begin{aligned}\|\langle x, y\rangle\| &= \left\|\langle x, \frac{x}{\|x\|}\rangle\right\| \\ &= \frac{۱}{\|x\|}\|\langle x, x\rangle\| \\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

در نتیجه
$$\|x\| = \|\langle x,y\rangle\| \leqslant sup\{\|\langle x,y\rangle\| | y \in X, \|y\| \leqslant ۱\}.$$

حال اگر $x = ۰$ آنگاه $\|x\| = ۰$ و همچنین به‌ازای هر y که $\|y\| \leqslant ۱$، $\|\langle x,y\rangle\| = ۰$. لذا حکم در این شرایط نیز برقرار خواهد بود.

ملاحظه ۲۵.۳.۱. اکنون به بررسی حالتی می‌پردازیم که C^*-مدول‌های هیلبرت با فضاهای هیلبرت متفاوتند. برای این منظور فرض کنید F یک زیر مدول بسته از A-مدول هیلبرت X باشد. تعریف می‌کنیم
$$F^\perp = \{y \in X | \forall x \in F, \langle x,y\rangle = ۰.\}$$

در این صورت $F^\perp$ زیر مدولی بسته از X است، زیرا

۱. فرض کنید $x, y \in F^\perp$ دلخواه باشند. در این‌صورت به‌ازای هر $z \in F$ داریم
$$\langle x,z\rangle = ۰, \qquad \langle y,z\rangle = ۰.$$
در نتیجه $\langle x-y, z\rangle = ۰$، و این نشان می‌دهد $x - y \in F^\perp$.

۲. حال فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ و $y \in F^\perp$ دلخواه باشند. در این‌صورت به‌ازای هر $x \in F$ داریم
$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle = ۰.$$
این نشان می‌دهد که $\lambda y \in F^\perp$.

۳. فرض کنیم $x \in F^\perp$ و $a \in A$ دلخواه باشند. دراین‌صورت به‌ازای هر $y \in F$ داریم
$$\langle y, xa\rangle = \langle y,x\rangle a = ۰.$$
و این بدان معناست که $xa \in F^\perp$.

لذا تا کنون نشان داده‌ایم که $F^\perp$ یک زیر مدول از X است. همچنین $F^\perp$ بسته نیز هست، زیرا اگر $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در $F^\perp$ باشد به طوریکه $x_n \longrightarrow x$، آنگاه کافیست نشان دهیم $x \in F^\perp$. برای این منظور می‌دانیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، X_n در $F^\perp$ است، یعنی به‌ازای هر $y \in F$ داریم

$$\begin{aligned}\langle x_n, y\rangle = ۰ &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = ۰\\ &\Longrightarrow \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\right\rangle = ۰\\ &\Longrightarrow \langle x,y\rangle = ۰.\end{aligned}$$

پس $F^\perp$ زیر مدولی بسته از X است، اما بر خلاف قضیه ۱۰.۳.۱، در C^*-مدول‌های هیلبرت روابط زیر لزوماً برقرار نیستند
$$X = F \oplus F^\perp, \qquad F^{\perp\perp} = F.$$

این مطلب را با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم.

مثال ۲۶.۳.۱. فرض کنیم $A = C([0,1])$، $X = A$ و $F = \{f \in A | f(\frac{1}{2}) = 0\}$، در این‌صورت $F^{\perp} = \{0\}$.
واضح است F زیر مدولی بسته از X است. زیرا

(i) به‌ازای هر $f, g \in F$ داریم
$$(f-g)(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2}) = 0,$$
در نتیجه $f - g \in F$.

(ii) به‌ازای هر $f \in F$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم
$$(\lambda f)(\frac{1}{2}) = \lambda f(\frac{1}{2}) = 0,$$
در نتیجه $\lambda f \in F$.

(iii) به‌ازای هر $f \in F$ و $a \in A$ داریم
$$(fa)(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})a(\frac{1}{2}) = 0,$$
در نتیجه $fa \in F$.

بنابراین F زیر مدولی از X است. همچنین F بسته نیز هست، زیرا اگر $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در F باشد به طوری‌که $f_n \longrightarrow g$ در این‌صورت داریم
$$g(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{2}) = 0,$$
و این بدان معنی است که $g \in F$.
نشان می‌دهیم که $F^{\perp} = \{0\}$، زیرا فرض کنید $g \in F^{\perp}$ دلخواه باشد در این‌صورت تعریف کنید $f(t) = g(t)(t - \frac{1}{2})$. واضح است که $f \in F^{\perp}$. از طرفی
$$0 = \langle f, g\rangle = \overline{f}g = |g(t)|^2(t - \frac{1}{2}).$$
این نشان می‌دهد که به‌ازای هر $t \neq \frac{1}{2}$، $g(t) = 0$. حال باتوجه به پیوستگی تابع g در $\frac{1}{2}$ واضح است که $g(\frac{1}{2}) = 0$ و لذا $g \equiv 0$ پس $F^{\perp} = \{0\}$. حال با توجه به این‌که $F^{\perp\perp} = X$ داریم
$$F \neq F^{\perp\perp}, \quad F \oplus F^{\perp} \neq X.$$

همچنین تساوی فیثاغورث نیز در حالت کلی برای C^*-مدول‌های هیلبرت برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۷.۳.۱. فرض کنیم $A = C([0,1] \cup [2,3])$ در این‌صورت واضح است که A یک A-مدول هیلبرت است، توابع f, g را به صورت زیر تعریف کنید.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \in [2,3] \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [2,3] \end{cases}$$

در این صورت $f, g \in A$ و
$$\langle f, g\rangle = \overline{f}g = ۰$$

از طرفی داریم
$$\|f\| = \|f\|_{\sup} = \max\{f\} = ۱, \qquad \|g\| = \|g\|_{\sup} = \max\{g\} = ۱$$

همچنین $\|f+g\|_{\sup} = ۱$. بنابراین به‌وضوح رابطه فیثاغورث همانند قضیه ۱۱.۳.۱ برای C^*-مدول‌های هیلبرت برقرار نیست.

تعریف ۲۸.۳.۱. A-مدول هیلبرت H متناهیاً تولید شده[۲۵] نامیده می‌شود هرگاه، مجموعه‌ی متناهی $\{x_۱, ..., x_n\} \subseteq H$ موجود باشد که هر $x \in H$ را بتوان به صورت ترکیب A-خطی زیر نوشت:
$$x = \sum_{i=۱}^{n} x_i a_i, \quad a_i \in A.$$

تعریف ۲۹.۳.۱. A-مدول هیلبرت H شمارا تولید شده [۲۶] نامیده می‌شود هرگاه، مجموعه‌ی شمارش‌پذیر $\{x_i\} \subseteq H$ موجود باشد به طوری‌که:
$$H = \overline{\langle x_۱, x_۲, ...\rangle}.$$

تعریف ۳۰.۳.۱. برای C^*-جبر A، $l^۲(A)$ یک A-مدول هیلبرت است که به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$l^۲(A) = \left\{\{a_j\}_{j\in J} \subseteq A \,|\, \sum_{j\in J} a_j a_j^* \text{ در نرم همگراست}\right\}.$$

که J یک مجموعه‌ی اندیس گذار شمارا یا متناهی باشد و ضرب داخلی روی آن به صورت زیر تعریف می‌شود
$$\begin{cases} l^۲(A) \times l^۲(A) \to A \\ \langle \{a_j\}_{j\in J}, \{b_j\}_{j\in J} = \sum_{j\in J} a_j^* b_j \end{cases}$$

مثال ۳۱.۳.۱. اگر A یک C^*-جبر یکدار با عضو واحد ۱_A باشد و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $۱ \leq i \leq n$ که $e_i = (\delta_{i۱}, ..., \delta_{in})$ که $\delta_{ij} = \begin{cases} ۱_A & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$ آنگاه $\{e_۱, ..., e_n\}$ یک مولد A-مدول هیلبرت A^n است و اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $e_i = \{\delta_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ آنگاه $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ یک مولد A-مدول هیلبرت $l^۲(A)$ است. بنابراین A^n یک A-مدول هیلبرت متناهیاً تولید شده و $l^۲(A)$ یک A-مدول هیلبرت شمارا تولید شده می‌باشد.

[۲۵] Finitely generated

[۲۶] Countably generated

۴.۱ عملگرها روی فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند، در این‌صورت نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی [۲۷] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد، در این‌صورت

۱. T یک به یک[۲۸] نامیده می‌شود هرگاه $x \neq y$ نتیجه دهد $Tx \neq Ty$،

۲. برد T عبارت است از $Rang(T) = \{Tx \mid x \in X\}$،

۳. T برو[۲۹] نامیده می‌شود هرگاه $Rang(T) = Y$،

۴. T دوسوئی[۳۰] نامیده می‌شود هرگاه هم یك به یك و هم برو باشد.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و T عملگر خطی از X به توی Y باشد. در این‌صورت نرم عملگر خطی T را با نماد $\|T\|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq ۱\}.$$

عملگر T را کران‌دار [۳۱] گوئیم هرگاه $\|T\| < \infty$.

ملاحظه ۴.۴.۱. هرگاه $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی کران‌دار باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = ۱\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq ۰\} \\ &= \inf\{M > ۰ : \forall x \in X,\ \|Tx\| \leq M\|x\|\}. \end{aligned}$$

مجموعه‌ی همه عملگرهای کران‌دار از X به Y را با نماد $B(X, Y)$ نمایش می‌دهیم و اگر $X = Y$، آنگاه T را یک عملگر رویX می‌نامیم و $B(X, X)$ را با $B(X)$ نشان می‌دهیم.

اگر $Y = \mathbb{C}$ آنگاه T را تابعک خطی[۳۲] می‌نامیم و مجموعه تمام تابعک‌های خطی و کران‌دار روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان[۳۳] X می‌نامیم.

---

[۲۷] Linear operator

[۲۸] Injection

[۲۹] Surjective

[۳۰] Bijective

[۳۱] Bounded

[۳۲] Linear Functional

[۳۳] Dual space

تعریف ۱.۴.۵. زیر فضاهای $N_T = \{x \in X : Tx = 0\}$ و $R_T = \{y = T(x) \,| x \in X\}$ به ترتیب از X و Y را فضای پوچ و فضای برد T می‌نامیم.

تعریف ۱.۴.۶. فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت و $T \in B(H, K)$، در این‌صورت عملگر الحاقی T، عملگر منحصربه‌فرد $T^* : K \longrightarrow H$ است به‌طوری که $T^* \in B(K, H)$ و به‌ازای هر $x \in H$ و $y \in K$،

$$\langle Tx, y\rangle_K = \langle x, T^*y\rangle_H.$$

به‌علاوه می‌توان نشان داد که

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

تعریف ۱.۴.۷. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $S, T : H \longrightarrow H$ دو عملگر خطی کران‌دار باشند. در این‌صورت

۱. T خودالحاق نامیده می‌شود هرگاه $T = T^*$، یعنی برای هر $x, y \in H$ ، $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

۲. T مثبت است و می‌نویسیم $T \geqslant 0$ هرگاه برای هر $x \in H$ داشته باشیم $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$.

۳. $T \geqslant S$ اگر $T - S \geqslant 0$.

۴. T یکانی[۳۴] نامیده می‌شود هرگاه $T^*T = TT^* = I$.

لم ۱.۴.۸. هر عملگر مثبت خود الحاق است.

برهان. فرض کنیم $T : H \longrightarrow H$ یک عملگر مثبت باشد در این‌صورت به ازای هر $x \in H$،

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle Tx, x\rangle &= \langle x, T^*x\rangle \\ &= \overline{\langle T^*x, x\rangle} \\ &= \langle T^*x, x\rangle \\ &\Longrightarrow \langle Tx, x\rangle = \langle T^*x, x\rangle \\ &\Longrightarrow T = T^*. \end{aligned}$$

□

تعریف ۱.۴.۹. فرض کنیم X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرم‌دار باشد. دنباله $T_n : X \longrightarrow Y$ از عملگرهای خطی کران‌دار را به طور نقطه‌وار کران‌دار می‌نامیم هرگاه $\{\|T_n\|\}$ برای هر $x \in X$ کران‌دار باشد یعنی

$$\|T_n(x)\| \leq c_x, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

[۳۴] Unitar

قضیه ۱۰.۴.۱. (اصل کران‌داری یکنواخت[۳۵]) فرض کنیم X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرم‌دار باشند. همچنین فرض کنیم $T_n : X \longrightarrow Y$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی کران‌دار باشد که به‌طور نقطه وار کران‌دار است در این‌صورت دنباله $\{\|T_n\|\}_{n=۱}^{\infty}$ کران‌دار است.

برهان. رجوع شود به قضیه (۵.۱۳) مرجع [۷]. □

قضیه ۱۱.۴.۱. (قضیه نویمان[۳۶]) فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت باشند، اگر عملگر خطی $U : H \longrightarrow K$ کران‌دار بوده و $\|I - U\| < ۱$، در این‌صورت U دوسویی بوده و داریم

$$U^{-۱} = \sum_{j=۰}^{\infty}(I-U)^j.$$

و همچنین

$$\|U^{-۱}\| \leq \frac{۱}{۱ - \|I-U\|}.$$

برهان. رجوع شود به قضیه (A.۵.۳) مرجع [۵]. □

تعریف ۱۲.۴.۱. فرض کنیم $V : H \longrightarrow K$ نگاشت خطی کران‌دار از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت K باشد. V را یک طولپایی جزئی گوئیم هرگاه برای هر $x \in \ker(V)^{\perp}$،

$$\|V(x)\| = \|x\|.$$

قضیه ۱۳.۴.۱. اگر $T \in B(H)$ دارای برد بسته اباشد آنگاه T^* و $|T|$ نیز با برد بسته هستند و داریم،

$$H = \ker|T| \oplus |T|H = \ker T^* \oplus TH = \ker T \oplus T^*H.$$

همچنین T داری تجزیه قطبی است و یک طولپایی جزئی مانند $V \in B(H)$ چنان موجود است که،

$$\ker V = kerT, \ker V^* = \ker T^*, VH = TH, V^*H = T^*H.$$

بنابراین $TH^{\perp\perp} = TH$ و $|T| + (I - V^*V)$ در $B(H)$ معکوس پذیر است.

برهان. رجوع شود به قضیه (۱۵.۳.۸) مرجع [۳۱]. □

تعریف ۱۴.۴.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد و H یک A-مدول هیلبرت باشد. عملگر خطی $T : H \longrightarrow H$ را A-خطی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in H$ و هر $\alpha, \beta \in A$ داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

تعریف ۱۵.۴.۱. مجموعه‌ی همه عملگرهای کران‌دار A-خطی روی A-مدول هیلبرت H را با $End_A(H)$ نشان می‌دهیم و همچنین زیر مجموعه‌ی همه عملگرهای A-خطی الحاق‌پذیر کران‌دار روی H را با $End_A^*(H)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۴.۱. اگر E و F دو A-مدول هیلبرت باشند، آنگاه مجموعه‌ی همه نگاشت های الحاق‌پذیر از E به F را با $\mathbb{L}(E, F)$ نشان می‌دهیم.

---

[۳۵] Uniform boundedness principle

[۳۶] Neumann theorem

فصل ۲

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت و C^*-مدول‌های هیلبرت

۱.۲ مقدمه

در این فصل به معرفی قاب‌ها در فضاهای هیلبرت و C^*-مدول‌های هیلبرت می‌پردازیم و برخی از خواص آنها را بیان می‌کنیم. در پایان نیز به معرفی زوج قاب‌های دوگان در C^*-مدول‌های هیلبرت می‌پردازیم.

۲.۲ قاب‌ها در فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۲. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ از نقاط فضای هیلبرت H را یک قاب برای H می‌نامیم، هرگاه دو ثابت $A, B > 0$ موجود باشند به قسمی که

$$\forall f \in H, \qquad A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{k=\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

اعداد A و B را کران‌های قاب می نامیم.

هرگاه $A = B$، آنگاه دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{k=\infty}$را یک قاب چسبان یا تنگ[1] برای H می‌نامیم.

همچنین هرگاه $A = B = 1$، آنگاه دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ را یک قاب پارسوال[2] برای H می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه استاندارد برای فضای هیلبرت H باشد. آنگاه دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \cdots\}$ یک قاب چسبان برای فضای هیلبرت H است، به طوری‌که کران‌های آن برابر است با $A = B = 2$.

---

[1] Tight frame

[2] Parseval frame

زیرا برای هر $f \in H$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + \cdots \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = 2\|f\|^2.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد برای $A = B = 2$، $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب چسبان است.

مثال ۳.۲.۲. فرض کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه استاندارد برای فضای هیلبرت H باشد. در این‌صورت دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H است، به‌طوری‌که کران‌های آن برابر است با $A = 1, B = 2$.

زیرا برای هر $f \in H$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + \cdots \\ &\geq |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2\end{aligned}$$

بنابراین $A = 1$، از طرفی داریم :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + \cdots \\ &= 2|\langle f, e_1\rangle|^2 + |\langle f, e_2\rangle|^2 + |\langle f, e_3\rangle|^2 + \cdots \\ &\leq 2|\langle f, e_1\rangle|^2 + 2|\langle f, e_2\rangle|^2 + 2|\langle f, e_3\rangle|^2 + \cdots \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = 2\|f\|^2\end{aligned}$$

لذا کافی‌است B را عدد ۲ اختیار کنیم.

مثال ۴.۲.۲. اگر $\{f_k\}_{k=1}^{k=\infty} = \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \ldots\right\}$آنگاه برای هر $f \in H$ داریم،

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} k|\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}}e_k\rangle|^2 = \|f\|^2$$

. لذا $\{f_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ یک قاب پارسوال است.

تعریف ۵.۲.۲. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H یک دنباله بسل[۳] نامیده می‌شود، هرگاه عدد ثابت $B>0$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $f\in H$،

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

عدد B را یک کران بسل برای دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌نامیم. کران بهینه برای دنباله بسل کوچکترین عددی است که در نامساوی اخیر صدق می‌کند.

با توجه به تعریف دنباله بسل می‌توان نتیجه گرفت که هر قاب یک دنباله بسل است ولی هر دنباله بسل لزوماً یک قاب نیست، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶.۲.۲. اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه برای فضای هیلبرت H باشد آنگاه دنباله $\{f_k\}=\{e_k+e_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل است ولی یک قاب H نیست.
واضح است که $\{f_k\}=\{e_k+e_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل است. زیرا برای هر $f\in H$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k+e_{k+1}\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle + \langle f, e_{k+1}\rangle|^2 \\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_{k+1}\rangle|^2 \leqslant 4\|f\|^2\end{aligned}$$

پس $\{e_k+e_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل با کران بسل ۴ است.
حال به ازای هر $j\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم

$$g_j=\sum_{n=1}^{j}(-1)^{n+1}e_n$$

در این صورت $\|g_j\|^2=j$ و از ضرب داخلی g_j با f_k داریم.

$$\langle g_j, f_k\rangle = \langle e_1-e_2+\cdots+(-1)^{j+1}e_j, e_k+e_{k+1}\rangle = \begin{cases} 0 & j<k \\ (-1)^{j+1} & j=k \\ 0 & j>k \end{cases}$$

لذا به‌ازای هر $j\in\mathbb{N}$، $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle g_j, f_k\rangle|^2=1=\frac{1}{j}\|g_j\|^2$. این نشان می‌دهد که هیچ $A>0$ موجود نیست که به ازای هر $j\in\mathbb{N}$ داشته باشیم

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle g_j, f_k\rangle|^2 > A\|g_j\|^2 = Aj.$$

لم ۷.۲.۲. فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله ای در فضای هیلبرت H باشد به طوری‌که به‌ازای هر $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\in l^2(\mathbb{N})$ سری $\sum_{k=1}^{\infty}c_kf_k$ همگرا باشد در این‌صورت نگاشت

[۳] Bessel sequence

$$\begin{cases} T : l^{2}(\mathbb{N}) \longrightarrow H \\ T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \end{cases}$$

یک عملگر خطی و کران‌دار است و عملگر الحاقی آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} T^* : H \to l^{2}(\mathbb{N}) \\ T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}. \end{cases}$$

به‌علاوه به‌ازای هر $f \in H$،

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^{2} \leq \|T\|^{2}\|f\|^{2} \qquad \forall f \in H.$$

برهان. رجوع کنید به لم (۳.۲.۱) مرجع [۵]. □

تعریف ۸.۲.۲. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. همچنین فرض کنیم I یک مجموعه اندیس گذار باشد و $x_i \in H$، برای هر $i \in I$ سری $\sum_{i\in I} x_i$ را همگرای نامشروط[۴] به $x \in H$ می‌نامیم اگر،

۱. مجموعه اندیس $I_0 = \{i \in I \,|\, x_i \neq 0\}$ شمارش پذیر باشد.

۲. برای هر جایگشت از $I_0 = \{i \in I \,|\, x_i \neq 0\}$ رابطه $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ برقرار باشد.

به طور معادل سری $\sum_{i\in I} x_i$ همگرای نامشروط است اگر برای هر دنباله $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشرط $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ همگرا باشد.

نتیجه ۹.۲.۲. فرض کنیم $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل در فضای هیلبرت H باشد، در این‌صورت سری $\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j$ به‌ازای هر دنباله مانند $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ در $l^{2}(\mathbb{N})$ همگرای نامشروط است.

برهان. رجوع کنید نتیجه(۳.۲.۵) مرجع [۵]. □

قضیه ۱۰.۲.۲. فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای هیلبرت H باشد. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل با کران بسل B است اگر و تنها اگر عملگر T با ضابطه،

$$\begin{cases} T : l^{2}(\mathbb{N}) \to H \\ \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \end{cases}$$

یک عملگر خوش تعریف کران‌دار باشد و $\|T\| \leqslant \sqrt{B}$.

[۴] Converges unconditionally

برهان. در ابتدا فرض می‌کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل با کران B باشد و $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. می‌خواهیم نشان دهیم T خوش تعریف است بدین معنی که به ازای هر $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ همگراست. برای این منظور فرض می‌کنیم $n, m \in \mathbb{N}$ و $n > m$، در این‌صورت

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k\right\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k\right\| = \sup_{\|g\|=1} \left|\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k, g\rangle\right|$$

حال با استفاده از نامساوی کشی شوارتز داریم

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k\right\| &\leqslant \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k \langle f_k, g\rangle| \\ &\leqslant \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=m+1}^{n} |\langle f_k, g\rangle|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{B}\left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

چون $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$، لذا $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ در شرط کشی صدق می‌کند و لذا با توجه به نابرابری فوق، سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ در شرط کشی صادق است و این خوش تعریفی T را اثبات می‌کند. از طرفی چون

$$\begin{aligned}\|T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k\| &= \sup_{\|g\|=1} \|\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, g\rangle\| \\ &\leqslant \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k \langle f_k, g\rangle| \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_k, g\rangle|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

در نتیجه T کران‌دار است و $\|T\| \leqslant \sqrt{B}$.
حال فرض کنید T یک عملگر کران‌دار با خاصیت $\|T\| \leqslant \sqrt{B}$ باشد. در این صورت لم ۷.۲.۲ نشان می‌دهد که $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل با کران B است. □

حال با توجه به این مطلب که هر قاب در فضای هیلبرت H یک دنباله بسل است. لذا

$$\begin{cases} T : l^2(\mathbb{N}) \to H \\ T\{c_j\}_{j=J}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j \end{cases}$$

یک عملگر خطی کران‌دار است که به آن عملگر پیش قابی یا ترکیب[5] می‌گوییم. همچنین با استفاده از لم ۷.۲.۲ عملگر الحاقی آن به صورت زیر تعریف می‌شود ،

$$\begin{cases} T^* : H \to l^2(\mathbb{N}) \\ T^*f = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j=1}^{\infty} . \end{cases}$$

که آن را عملگر تجزیه[6] می‌نامیم.

اکنون با ترکیب دو عملگر T و T^*، عملگر قابی[7] به‌دست می‌آید که آن را با S نمایش می‌دهیم و داریم

$$\begin{cases} S : H \to H \\ Sf = TT^*f = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f, f_j\rangle f_j . \end{cases}$$

حال خاصیت‌های مهمی از عملگرهای قابی را بیان می‌کنیم.

لم ۱۱.۲.۲. فرض کنیم $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب با عملگر قابی S و کران‌های A و B باشد، در این صورت روابط زیر همواره برقرار است:

۱. S کران‌دار، معکوس‌پذیر، خودالحاق و مثبت است.

۲. $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ یک قاب با عملگر قابی S^{-1} و کران‌های B^{-1} و A^{-1} است.

۳. اگر A و B کران‌های قابی بهینه قاب $\{f_j\}_{j\in J}$ در فضای هیلبرت H باشند، آنگاه B^{-1} و A^{-1} به ترتیب کران‌های بهینه برای قاب $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ هستند.

برهان. (۱) : فرض کنید T عملگر ترکیب متناظر با قاب $\{f_j\}_{j\in J}$ باشد. با توجه به کران‌داری عملگرهای T و T^*، عملگر $S = TT^*$ نیز کران‌دار است و با استفاده از قضیه ۱۰.۲.۲ داریم

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|^2 \leqslant B$$

همچنین $S = TT^* = (TT^*)^* = S^*$. بنابراین عملگر S خود الحاق است. از طرفی از قاب بودن $\{f_j\}_{j\in J}$ و ضابطه S برای هر $f \in H$ داریم

$$\langle Sf, f\rangle = \langle\sum_{j\in J}\langle f, f_j\rangle f_j, f\rangle = \sum_{j\in J}\langle f, f_j\rangle\langle f_j, f\rangle = \sum_{j\in J}|\langle f, f_j\rangle|^2 \geqslant 0$$

بنابراین داریم

$$\langle Sf, f\rangle \geqslant 0$$

پس عملگر S مثبت است. از طرفی

$$A\|f\|^2 \leqslant \langle Sf, f\rangle \leqslant B\|f\|^2$$

[5] Synthesis operator

[6] Analysis operator

[7] Frame operator

در نتیجه

$$AI_H \leqslant S \leqslant BI_H$$
$$\circ \leqslant I_H - B^{-1}S \leqslant \frac{B-A}{B} I_H$$

لذا

$$\|I_H - B^{-1}S\| = \sup_{\|f\|=1} \left|\left\langle (I_H - B^{-1}S)f, f \right\rangle\right| \leqslant \frac{B-A}{B} < 1.$$

حال از قضیه ۱۱.۴.۱ نتیجه می‌شود که S وارون پذیر است و $B^{-1}I_H \leqslant S^{-1} \leqslant A^{-1}I_H$.

(۲): چون عملگر S خودالحاق است، عملگر S^{-1} نیز خود الحاق است. برای هر $f \in H$ داریم :

$$\sum_{j\in J} |\langle f, S^{-1}f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} |\langle S^{-1}f, f_j\rangle|^2 \leqslant B\|S^{-1}f\|^2 \leqslant B\|S^{-1}\|^2\|f\|^2.$$

در نتیجه $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل است. لذا عملگر قاب برای $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ خوش تعریف است. حال اگر S° عملگر قاب نظیر $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ باشد. برای هر $f \in H$ داریم :

$$\begin{aligned} S^\circ f &= \sum_{j\in J} \langle f, S^{-1}f_j\rangle S^{-1}f_j \\ &= \sum_{j\in J} \langle S^{-1}f, f_j\rangle S^{-1}f_j \\ &= S^{-1}\sum_{j\in J} \langle S^{-1}f, f_j\rangle f_j \\ &= S^{-1}SS^{-1}f = S^{-1}f. \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

پس $S^\circ = S^{-1}$. اگر A و B کران‌های بهینه قاب $\{f_j\}_{j\in J}$ باشند در این صورت $AI_H \leqslant S \leqslant BI_H$.

حال با توجه به وارون پذیری S داریم :

$$B^{-1}I_H \leqslant S^{-1} \leqslant A^{-1}I_H,$$

لذا به‌ازای هر $f \in H$ داریم

$$B^{-1}\|f\|^2 \leqslant \langle S^{-1}f, f\rangle \leqslant A^{-1}\|f\|^2,$$

در نتیجه با توجه به ۱.۲ داریم

$$B^{-1}\|f\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} |\langle f, S^{-1}f\rangle|^2 \leqslant A^{-1}\|f\|^2.$$

و این نشان می‌دهد که یک $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ قاب با کران‌های A^{-1} و B^{-1} است.

۳ : فرض کنیم $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ یک قاب با عملگر قابی S^{-1} و کران بالایی بهینه C باشد به طوری‌که $C < \frac{1}{A}$. حال با توجه به اینکه $\{f_j\}_{j\in J} = \{(S^{-1})^{-1}S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ یک قاب با کران پایین $\frac{1}{C}$ است و چون A کران پایین بهینه قاب $\{f_j\}_{j\in J}$ است پس $A > \frac{1}{C}$. پس فرض خلف باطل و $C = \frac{1}{A}$ است. برای اثبات کران پایین بهینه‌ی قاب $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ نیز به طریق مشابه بیان می‌شود. □

تعریف ۱۲.۲.۲. $\{S^{-1}f_j\}_{j\in J}$ را که در لم بالا ثابت می‌شود یک قاب است را قاب دوگان متعارف یا کانونی[8] $\{f_j\}_{j\in J}$ می‌نامیم.

[8]canonical dual frame

مثال ۱۳.۲.۲. فرض‌کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت H باشد و همچنین فرض کنیم

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \cdots\}$$

قبلاً بررسی کردیم که $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب با کران‌های $A = 1$ و $B = 2$ است. با توجه به رابطه $Sf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k$ داریم:

$$\begin{aligned} Se_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_1, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle e_2 + \langle e_1, e_3 \rangle e_3 + \cdots \\ &= e_1 + e_1 + 0 + 0 + \cdots = 2e_1 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} Se_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_2, f_k \rangle f_k \\ &= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_2 \rangle e_2 + \langle e_2, e_3 \rangle e_3 + \cdots \\ &= 0 + 0 + e_2 + 0 + \cdots = e_2 \end{aligned}$$

با ادامه همین روند به‌دست می‌آوریم که

$$Se_3 = e_3, \qquad Se_4 = e_4, \cdots$$

پس داریم :

$$S^{-1}e_1 = \frac{1}{2}e_1, \quad S^{-1}e_2 = e_2, \quad S^{-1}e_3 = e_3, \cdots$$

بنابراین قاب دوگان متعارف آن به صورت زیر است

$$\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, e_2, e_3, \cdots\}.$$

قضیه زیر که یکی از مهمترین نتایج مطالعه قاب‌هاست بیان می‌کند که اگر $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد، آنگاه هر عنصر در H دارای نمایشی نامتناهی از ترکیبات خطی عناصر قاب است. به عبارت دیگر یک قاب را می‌توان به عنوان یک پایه برای H در نظر گرفت.

قضیه ۱۴.۲.۲. فرض کنیم $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب با عملگر قابی S باشد، در این‌صورت

$$\forall f \in H, \qquad f = \sum_{j\in J} \langle f, S^{-1}f_j \rangle f_j, \tag{۲.۲}$$

$$\forall f \in H, \qquad f = \sum_{j\in J} \langle f, f_j \rangle S^{-1}f_j. \tag{۳.۲}$$

هر دو سری فوق همگرای نامشروط هستند.

برهان. برای هر $f \in H$ داریم :

$$f = SS^{-1}f = \sum_{j\in J}\langle S^{-1}f, f_j\rangle f_j = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-1}f_j\rangle f_j.$$

و به‌طور مشابه:

$$f = S^{-1}Sf = S^{-1}\left(\sum_{j\in J}\langle f, f_j\rangle f_j\right) = \sum_{j\in J}\langle f, f_j\rangle S^{-1}f_j.$$

از طرفی چون $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل و $\{\langle f, S^{-1}f_j\rangle\}_{j\in J} \in l^2(\mathbb{N})$ می‌باشد بنابراین طبق نتیجه ۹.۲.۲ سری‌های فوق همگرای نامشروط است. □

لم ۱۵.۲.۲. فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه‌ای برای H باشد. در این صورت دنباله منحصر به فرد $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ در H وجود دارد به طوری‌که برای هر $f \in H$ داریم،

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, g_k\rangle f_k$$

به ویژه

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$$

برهان. چون $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قابی برای H است، آنگاه هر $f \in H$ را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, S^{-1}f_k\rangle f_k.$$

کافی است قرار می‌دهیم

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$$

لذا،

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, g_k\rangle f_k$$

حال فرض کنیم دو دنباله $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ موجود باشند، به طوری‌که

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, g_k\rangle f_k, \qquad f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, h_k\rangle f_k.$$

در نتیجه

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\langle f, g_k\rangle - \langle f, h_k\rangle)f_k = 0$$

چون $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه است، پس برای هر $f \in H$ داریم:

$$0 = \langle f, g_k\rangle - \langle f, h_k\rangle = \langle f, g_k - h_k\rangle.$$

در نتیجه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $g_k - h_k = 0$. و این نشان می‌دهد که $g_k = h_k$. به عبارت دیگر $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ منحصربه‌فرد است. □

قضیه ۱۶.۲.۲. فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای هیلبرت H باشد و همچنین فرض کنیم P تصویر متعامد از H به روی زیرفضای بسته V در نظر گرفته شود. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند :

۱. اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قابی برای H با کرانهای قابی A و B باشد، آنگاه $\{Pf_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای V با کران‌های A و B است.

۲. فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قابی برای V با عملگر قابی S باشد، در این‌صورت برای هر $f \in H$،
$$Pf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k.$$

برهان. (۱) چونP تصویر متعامد از H به روی V است پس

$$Pf = \begin{cases} f & f \in V \\ 0 & f \in V^{\perp} \end{cases}$$

بنابراین برای هر $f \in V$ داریم
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Pf_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Pf, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2.$$
از این که $\{f_k\}_{k=}^{\infty}$ قاب است و با توجه به روابط فوق،$\{Pf_k\}_{k=}^{\infty}$ نیز یک قاب برای V با کران‌های A و B است.

(۲) طبق قضیه ۱۴.۲.۲ برای هر $g \in V$ داریم
$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, S^{-1} f_k \rangle f_k$$

بنابراین به‌ازای هر $f \in H$ داریم
$$Pf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Pf, S^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, PS^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k.$$
در نتیجه Pf نیز داری نمایشی بر حسب عناصر قاب است. □

قضیه ۱۷.۲.۲. فرض کنیم $\{f_j\}_{j\in J}$ دنباله قابی با کران‌های A و B برای فضای هیلبرت H باشد و همچنین فرض کنیم $U : H \to H$ یک عملگر کراندار یکانی باشد. در این‌صورت $\{Uf_j\}_{j\in J}$ یک دنباله قابی با کران‌های A و B خواهد بود. همچنین اگر $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب در H باشد، آنگاه $\{Uf_j\}_{j\in J}$ نیز قابی در H خواهد بود.

برهان. رجوع شود به [۱۴]. □

قضیه ۱۸.۲.۲. فرض کنید $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد، قاب دوگان $\{x_j\}_{j\in J}$ دقیقاً خانواده‌ای به فرم زیر است.
$$\{y_j\}_{j\in J} = \left\{ S^{-1} x_j + h_j - \sum_{i\in J} \langle S^{-1} x_j, x_i \rangle h_i \right\}_{j\in J}.$$
که در آن $\{h_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل است.

برهان. رجوع شود به قضیه (۵.۶.۵) مرجع [۵]. □

۳.۲ پایه‌های ریس

تعریف ۱.۳.۲. یک پایه ریس[۹] برای فضای هیلبرت H، خانواده‌ای به فرم $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ است، که در آن $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای H و $U : H \to H$ یک عملگر دوسوئی کراندار است.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قابی برای H باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ریس برای H است.

۲. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ که در آن $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$، آن گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $c_k = 0$.

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض می‌کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ریس برای H باشد و $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله از $l^2(\mathbb{N})$ در نظر گرفته شود، حال اگر $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ آنگاه
$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k U e_k = U(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k),$$
یک به یک بودن U نتیجه می‌دهد که
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = 0.$$
و چون $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه است، پس برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $c_k = 0$.
(۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض می‌کنیم $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $l^2(\mathbb{N})$ باشد. قبلاً دیدیم که T به عنوان عملگر ترکیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} T : l^2(\mathbb{N}) \to H \\ T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \end{cases}$$

نشان می‌دهیم T دوسوئی و کران‌دار است. طبق فرض یک به یک بودن T واضح است. همچنین پوشا بودن T از قاب بودن $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نتیجه می‌شود. از طرفی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ بسل نیز هستند، پس بنا به قضیه ۱۰.۲.۲، $\|T\| \leqslant \sqrt{D}$ پس T کراندار است. چون برای هر k، $T\delta_k = f_k$ است، بنابراین طبق تعریف پایه ریس $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{T\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ریس است. □

قضیه ۳.۳.۲. هر پایه ریس در H، یک پایه برای H است.

برهان. فرض کنیم $\{f_j\}_{j\in J} = \{Ue_j\}_{j\in J}$ یک پایه ریس برای H باشد که در آن U یک عملگر دوسوئی کراندار و $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه است، همچنین $\{c_j\}_{j\in J}$ را یک دنباله از اسکالرها بگیرید که $\sum_{j\in J} c_j f_j = 0$. بنابراین $\sum_{j\in J} c_j U e_j = 0$ و چون U^{-1} خطی و کران‌دار است، داریم
$$U^{-1}(\sum_{j\in J} c_j U e_j) = 0$$

[۹] Riesz bases

$$\sum_{j\in J} c_j U^{-1} U e_j = \sum_{j\in J} c_j e_j = 0$$

حال چون $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه است به ازای هر $j \in J$، $c_j = 0$. یعنی $\{f_j\}_{j\in J}$ دنباله مستقل خطی است. از طرفی دیگر چون $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه برای H است پس برای هر $h \in H$ داریم

$$U^{-1}h = \sum j \in J \langle U^{-1}h, e_j\rangle e_j \Rightarrow$$
$$h = \sum j \in J \langle U^{-1}h, e_j\rangle U e_j = \sum j \in J \langle U^{-1}h, e_j\rangle f_j$$

این نشان می‌دهد که $h \in \overline{span}\{f_j\}_{j\in J}$ پس $\{f_j\}_{j\in J}$ پایه است. □

نتیجه ۴.۳.۲. برای یک جفت از پایه‌های ریس دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ گزاره‌های زیر برقرارند:

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$، دو به دو متعامد هستند.

(ii) برای هر $f \in H$ داریم:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k\rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle g_k.$$

برهان. (i). طبق فرض چون $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک جفت پایه ریس دوگان هستند، لذا قرار می‌دهیم

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty} \qquad , \qquad \{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(U^{-1})^* e_k\}_{k=1}^{\infty}$$

بنابراین داریم :

$$\langle f_k, g_j\rangle = \langle Ue_k, (U^{-1})^* e_j\rangle = \langle U^{-1}Ue_k, e_j\rangle = \langle e_k, e_j\rangle = \delta_{k,j}.$$

(ii). چون $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه ریس است، طبق نتیجه ۱۵.۲.۲ $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ منحصربفردی وجود دارد به طوری که برا هر $f \in H$ داریم

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k\rangle f_k \tag{۴.۲}$$

همچنین چون $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه ریس است، پس $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ منحصربه‌فردی وجود دارد به‌طوری که برای هر $f \in H$ داریم

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle g_k \tag{۵.۲}$$

حال طبق ۴.۲ و ۵.۲ برای هر $f \in H$ داریم

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k\rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle g_k$$

□

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید $\{f_j\}_{j\in J}$ یک پایه ریس برای H باشد. در این صورت $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H با کران‌های $\|U^{-1}\|^{-2}$ و $\|U\|^{2}$ است. که در آن U همان عملگر خطی و کران‌دار دوسویی در تعریف پایه ریس است.

برهان. طبق تعریف پایه ریس، عملگر معکوس پذیر $U\in B(H)$ و پایه متعامد یکه $\{e_j\}_{j\in J}$ موجود است، به طوری‌که به ازای هر $j\in J$، $Ue_j=f_j$. حال فرض کنیم $f\in H$ دلخواه باشد، بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}|\langle f,f_j\rangle|^{2}&=\sum_{j\in J}|\langle f,Ue_j\rangle|^{2}\\&=\sum_{j\in J}|\langle U^*f,e_j\rangle|^{2}\\&=\|U^*f\|^{2}\leqslant\|U\|^{2}\|f\|^{2}.\end{aligned}$$

از طرفی برای هر $f\in H$ داریم

$$\begin{aligned}\|f\|^{2}&=\|(U^{-1})^*U^*f\|^{2}\\&\leqslant\|(U^{-1})^*\|^{2}\|U^*f\|^{2}=\|U^{-1}\|^{2}\|U^*f\|^{2}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|U^{-1}\|^{-2}\|f\|^{2}\leqslant\|U^*f\|^{2}\leqslant\|U\|^{2}\|f\|^{2}.$$

بنابراین $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H با کران‌های قابی $\|U^{-1}\|^{-2}$ و $\|U\|^{2}$ است. □

قضیه ۶.۳.۲. اگر $\{f_j\}_{j\in J}$ یک پایه ریس برای فضای هیلبرت H باشد آنگاه دنباله منحصر به فرد $\{g_j\}_{j\in J}$ در H چنان موجود است که به‌ازای هر $f\in H$،

$$f=\sum_{j\in J}\langle f,g_j\rangle f_j.$$

که سری فوق برای هر $f\in H$ همگرای نامشروط است و همچنین $\{g_j\}_{j\in J}$ یک پایه ریس و $\{f_j\}_{j\in J}$ و $\{g_j\}_{j\in J}$ متعامدند.

برهان. رجوع کنید به قضیه (۳.۶.۳) مرجع [۵]. □

پایه ریس $\{g_j\}_{j\in J}$ در قضیه فوق را پایه ریس دوگان برای $\{f_j\}_j$ می‌نامیم.

۴.۲ قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر یک‌دار و H یک A-مدول هیلبرت چپ باشد و J یک مجموعه اندیس‌گذار متناهی یا شمارش پذیر باشد. دنباله $\{x_j\}_{j\in J}$ از اعضای H را یک قاب (استاندارد) برای H می‌نامیم. هرگاه دو ثابت $C,D>0$ موجود باشند به قسمی که:

$$\forall x\in H,\qquad C\langle x,x\rangle\leqslant\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\leqslant D\langle x,x\rangle.$$

لازم به ذکر است که همگرایی سری فوق در نرم لحاظ شده است. اعداد C و D را کران‌های قاب می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۲. دنباله $\{x_j\}_{j\in J}$یک دنباله بسل با کران D در A-مدول هیلبرت H نامیده می‌شود اگر $D>۰$ موجود باشد به قسمی که داشته باشیم:

$$\forall x\in H,\qquad \sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\leqslant D\langle x,x\rangle.$$

همگرایی سری فوق در نرم لحاظ شده است.

لم ۳.۴.۲. فرض می‌کنیم که $\{x_j\ :\ j\in J\}$ دنباله‌ای در A-مدول هیلبرت چپ متناهیاً تولید شده یا شمارا تولید شده H باشد. اگر به ازای هر $x\in H$، $x=\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle x_j$ آنگاه $\{x_j\ :\ j\in J\}$ یک قاب پارسوال می‌باشد.

برهان. اگر هر $x\in H$ را بتوان به صورت $x=\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle x_j$ نوشت آنگاه برای هر $x\in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle &= \langle\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle x_j,x\rangle\\ &=\sum_{j\in J}\langle\langle x,x_j\rangle x_j,x\rangle\\ &=\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\end{aligned}$$

پس دنباله $\{x_j\ :\ j\in J\}$ یک قاب پارسوال است. □

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر یک‌دار باشد. اگر $\{x_j\}_{j\in J}$ و $\{y_j\}_{j\in J}$ به ترتیب قاب‌هایی از A-مدول های هیلبرت H و K باشند، آنگاه آنها را به طور یکانی هم ارز می‌گوئیم هرگاه عملگر A-خطی یکانی چون $U:H\longrightarrow K$ با شرط $U(x_j)=y_j$ موجود باشد. قابهای مذکور یکریخت یا مشابه نامیده می‌شوند، هرگاه عملگر U صرفاً A-خطی، کراندار و معکوس‌پذیر و الحاق‌پذیر باشد.

تعریف ۵.۴.۲. فرض کنیم $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای A-مدول هیلبرت شمارا تولید شده یا متناهیاً تولید شده H باشد، در این‌صورت عملگر زیر را یک عملگر تجزیه برای آن می‌نامیم

$$\begin{cases}T:H\to l^۲(A)\\ Tx=\{\langle x,x_j\rangle\}_{j\in J},\ .\end{cases}$$

همچنین عملگر الحاقی آن که به‌صورت زیر تعریف می‌شود را عملگر ترکیب برای قاب مذکور می‌نامیم.

$$\begin{cases}\quad T^*:l^۲(A)\to H\\ T^*\{c_j\}_{j\in J}=\sum_{j\in J}c_jx_j\end{cases}$$

اکنون با ترکیب دو عملگر T و T^*، عملگر قابی به‌دست می‌آید که آن را با S نمایش می‌دهیم و داریم

$$\begin{cases} S : H \to H \\ Sx = T^*Tx = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle x_j. \end{cases}$$

تعریف ۶.۴.۲. قاب $\{x_j\}_{j\in J}$ برای A-مدول هیلبرت چپ H یک پایه ریس نامیده می‌شود هرگاه

۱. به‌ازای هر $j \in J$، $x_j \neq 0$،

۲. اگر هر ترکیب A-خطی $\sum_{j\in S} a_j x_j$ با ضرایب $\{a_j; j \in S\} \subseteq A$ ، $S \subseteq J$ مساوی صفر باشد آنگاه به‌ازای هر $j \in S$، $a_j x_j$ برابر صفر باشد.

۵.۲ زوج قاب‌های دوگان

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم H یک A-مدول هیلبرت روی C^*-جبر یکدار A باشد. همچنین فرض کنیم $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب استاندارد و $\{y_j\}_{j\in J}$یک دنباله در H باشد. در این‌صورت $\{y_j\}_{j\in J}$ را یک دنباله دوگان استاندارد می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$\forall x \in H, \qquad x = \sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle x_j.$$

همگرایی سری فوق در نرم لحاظ شده است.
علاوه براین هرگاه $\{y_j\}_{j\in J}$ یک قاب باشد آنگاه $\{y_j\}_{j\in J}$ و $\{x_j\}_{j\in J}$ را یک زوج قاب دوگان می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۵.۲. اگر در تعریف فوق دنباله‌های $\{x_j\}_{j\in J}$ و $\{y_j\}_{j\in J}$ در H بسل فرض شوند و T عملگر ترکیب $\{x_j\}_{j\in J}$ و U عملگر ترکیب $\{y_j\}_{j\in J}$ باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $TU^* = I$.

برهان.

$$x = \sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle x_j = T\left(\{\langle x, y_j\rangle\}_{j\in j}\right) = T(U^*(x)) \Leftrightarrow TU^* = I.$$

□

لم ۳.۵.۲. فرض کنیم $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای A-مدول هیلبرت H و $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامد یکه برای $l^2(A)$ در نظر گرفته شود، اگر T^* عملگر تجزیه مربوط به قاب $\{x_j\}_{j\in J}$ و همچنین $V : H \longrightarrow l^2(A)$ یک وارون چپ کران‌دار برای T^* درنظر گرفته شود آنگاه $\{y_j\}_{j\in J} = \{Ve_j\}_{j\in J}$ را قاب دوگان برای $\{x_i\}_{j\in J}$ می‌نامیم.

برهان. رجوع شود به لم (۵.۶.۳) مرجع[۵]. □

لم ۴.۵.۲. فرض کنیم $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب با عملگر ترکیب T و عملگر قاب S باشد. در این‌صورت وارون چپ T^* دقیقاً عملگرهایی به شکل $S^{-1}T + W(I - T^*S^{-1}T)$ است که $W : l^2(A) \longrightarrow H$ یک عملگر کران‌دار است و I عملگر همانی روی $l^2(A)$ است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $S^{-1}T+W(I-T^*S^{-1}T)$ وارون چپ T^* است، برای این منظور

$$\begin{aligned}(S^{-1}T+W(I-T^*S^{-1}T))T^* &= S^{-1}TT^*+WIT^*-WT^*S^{-1}TT^*\\ &= I+WT^*-WT^*=I.\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم هر وارون چپ به شکل $S^{-1}T+W(I-T^*S^{-1}T)$ است. فرض می‌کنیم U نیز وارون چپ باشد، پس $UT^*=I$. لذا چون می‌توان نوشت

$$U=S^{-1}T+U(I-T^*S^{-1}T).$$

پس U به شکل مطلوب می‌باشد. □

قضیه ۵.۵.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر یک‌دار و H یک A-مدول هیلبرت چپ متناهیاً تولید شده باشد. همچنین اگر $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب پارسوال برای H درنظر گرفته شود، آنگاه عملگر تجزیه آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases}\theta: H\to l^2(A)\\ \theta(x)=\{\langle x,x_n\rangle\}_{n\in J}\end{cases}$$

که θ یک الحاق مانند θ^* دارد که پوشاست. هرگاه $\{e_n=(0,\cdots,\overbrace{1_A}^{\text{مولفه n ام}},\cdots,0)\}_{n\in J}$ یک پایه متعامد یکه استاندارد از $l^2(A)$ باشد، آنگاه $\theta^*(e_n)=x_n$ وقتی $n\in J$.

برهان. رجوع کنید به قضیه (۴.۱) مرجع[۹]. □

قضیه ۶.۵.۲. اگر H یک A-مدول هیلبرت چپ باشد و $T\in L(H)$ وارون پذیر در نظر گرفته شود آنگاه به‌ازای هر $x\in H$،

$$\|T^{-1}\|^{-2}\langle x,x\rangle\leqslant\langle Tx,Tx\rangle\leqslant\|T\|^2\langle x,x\rangle$$

برهان. فرض کنیم $T\in L(H)$ وارون پذیر باشد و $x\in H$ در این صورت،

$$\langle x,x\rangle=\langle T^{-1}Tx,T^{-1}Tx\rangle\leqslant\|T^{-1}\|^2\langle Tx,Tx\rangle$$

پس داریم

$$\|T^{-1}\|^{-2}\langle x,x\rangle\leqslant\langle Tx,Tx\rangle.$$

حال برای اثبات سمت راست رجوع شود به گزاره (۲.۶) مرجع [۲۶]. □

قضیه ۷.۵.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد و H را یک A-مدول هیلبرت چپ متناهیاً تولید شده یا شمارا تولید شده در نظر گرفته شود. اگر $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب در H باشد آنگاه عملگر وارون‌پذیر و یکتای S متعلق به $End_A^*(H)$ چنان موجود است که به‌ازای هر $x\in H$،

$$x = \sum_{j\in J} \langle x, Sx_j\rangle x_j.$$

در واقع عملگر S به شکل $S = G^*G$ است که در آن $G : H \longrightarrow K$ یک عملگر کراندار،معکوس پذیر و خودالحاق است و K نیز یک C^*-مدول هیلبرت چپ است با این خاصیت که $\{G(x_j)\}_{j\in J}$ یک قاب پارسوال در K است، به‌ویژه

$$S = \theta^{-۱}\theta^{*-۱} = (\theta^*\theta)^{-۱}$$

که در آن θ عملگر تجزیه متناظر با $\{x_j\}_{j\in J}$ با هم دامنه $\theta(H)$ است و همچنین S معکوس‌پذیر و مثبت است.

برهان. فرض کنیم $G \in End_A^*(H, K)$ یک عملگر معکوس‌پذیر از A-مدول هیلبرت H به روی A-مدول هیلبرت K باشد. وجود چنین عملگری طبق قضیه ۵.۵.۲ نشان می‌دهد که $K = \theta(H)$ و $G = (\theta^*)^{-۱}$ حال به‌ازای هر $x \in H$ داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J} \langle x, Sx_j\rangle \langle Sx_j, x\rangle &= \sum_{j\in J} \langle x, G^*Gx_j\rangle \langle G^*Gx_j, x\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \langle Gx, Gx_j\rangle \langle Gx_j, Gx\rangle \\
&= \langle Gx, Gx\rangle = \langle G^*Gx, x\rangle \\
&= \langle Sx, x\rangle.
\end{aligned}$$

از طرفی طبق قضیه ۶.۵.۲ داریم

$$\|G^{-۱}\|^{-۲}\langle x, x\rangle \leqslant \langle Gx, Gx\rangle \leqslant \|G\|^{۲}\langle x, x\rangle.$$

حال چون $\langle Gx, Gx\rangle = \sum_{j\in J}\langle x, Sx_j\rangle\langle Sx_j, x\rangle$ بنابراین به‌ازای هر $x \in H$ داریم

$$C\langle x, x\rangle \leqslant \sum_{j\in J} \langle x, S(x_j)\rangle \langle S(x_j), x\rangle \leqslant D\langle x, x\rangle.$$

حال فرض کنیم $x \in H$ لذا داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J} \langle x, Sx_j\rangle x_j &= \sum_{j\in J} \langle x, G^*Gx_j\rangle G^{-۱}(Gx_j) \\
&= G^{-۱}(\sum_{j\in J} \langle Gx, Gx_j\rangle Gx_j \\
&= G^{-۱}Gx = x.
\end{aligned}$$

برای نشان دادن یکتایی عملگر S فرض می‌کنیم که عملگر دیگر مانند $T \in End_A^*(H)$ موجود باشد که

به‌ازای هر $x \in H$ تساوی $x = \sum_{j\in J}\langle x, T(x_j)\rangle x_j$ برقرار باشد دراین‌صورت

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j\in J}\langle x, Tx_j\rangle x_j \\ &= \sum_{j\in J}\langle x, T(G^{-1}Gx_j)\rangle G^{-1}Gx_j \\ &= G^{-1}\left(\sum_{j\in J}\langle (G^*)^{-1}Tx, Gx_j\rangle Gx_j\right) \\ &= G^{-1}((G^*)^{-1}Tx) = (G^*G)^{-1}Tx. \end{aligned}$$

لذا برای هر $x \in H$ داریم

$$x = S^{-1}Tx$$

پس $S^{-1}T = I$ و لذا $S = T$. □

تعریف ۸.۵.۲. اگر $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای A-مدول هیلبرت H باشد آنگاه دنباله $\{Sx_j\}_{j\in J}$ که در قضیه ۷.۵.۲ ثابت می‌شود یک قاب است را قاب دوگان متعارف $\{x_j\}_{j\in J}$ می‌نامیم.

گزاره ۹.۵.۲. فرض کنیم $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای A-مدول هیلبرت H با عملگر قابی H باشد، در این‌صورت به ازای هر $x \in H$ داریم

$$x = \sum_{j\in J}\langle x, S^{-1}x_j\rangle x_j = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle S^{-1}x_j$$

برهان. رجوع کنید به گزاره (۶.۲) مرجع [۹]. □

لم ۱۰.۵.۲. فرض کنیم H یک A-مدول هیلبرت چپ روی C^*-جبر A باشد. اگر $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب و S عملگر قاب متناظر با آن در نظر گرفته شود آنگاه به‌ازای هر $T \in End_A^*(H)$ با شرط معکوس‌پذیری T، دنباله $\{Tx_j\}_{j\in J}$ یک قاب با عملگر قابی $T^{*-1}S^{-1}T^{-1}$ است.

برهان. چون $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H است، لذا اعداد ثابت مثبت C و D چنان موجودند که به‌ازای هر $x \in H$ داریم

$$C\langle x, x\rangle \leq \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq D\langle x, x\rangle. \tag{۶.۲}$$

و همچنین طبق گزاره ۹.۵.۲ می‌توان نوشت $x = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle S^{-1}x_j$ و این نتیجه می‌دهد که

$$Sx = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle SS^{-1}x_j = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle x_j.$$

از طرفی چون طبق فرض T معکوس‌پذیر بوده و $T \in End_A^*(H)$، پس T^* معکوس‌پذیر و A-خطی است. در نتیجه به‌ازای هر $x \in H$ داریم

$$\|T^{*-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|T^*x\| \leq \|T^*\|\|x\| \tag{۷.۲}$$

حال از آنجا که عملگر T، A-خطی است داریم

$$TSx = T\sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle x_j = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle Tx_j.$$

بنابراین به‌ازای هر $x \in H$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} TST^*T^{*-1}x &= \sum_{j\in J}\langle T^*T^{*-1}x, x_j\rangle Tx_j \\ &= \sum_{j\in J}\langle T^{*-1}x, Tx_j\rangle Tx_j. \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

حال با استفاده از روابط ۶.۲ و ۷.۲ داریم

$$\begin{aligned} C\|T^{*-1}\|^{-2}\langle x, x\rangle &\le C\langle T^*x, T^*x\rangle \\ &\le \sum_{j\in J}\langle T^*x, x_j\rangle\langle x_j, T^*x_j\rangle \\ &\le D\langle T^*x, T^*x\rangle \\ &\le D\|T^*\|^2\langle x, x\rangle. \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\{Tx_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H است و با توجه به رابطه ۸.۲ عملگر قابی متناظر با $\{Tx_j\}_{j\in J}$ به صورت زیر است

$$(TST^*)^{-1} = T^{*-1}S^{-1}T^{-1}.$$

□

فصل ۳

اتساع زوج‌های قاب دوگان در C^*-مدول های هیلبرت

۱.۳ مقدمه

هدف از این فصل این است که نشان دهیم هر زوج قاب دوگان در یک C^*-مدول هیلبرت، تراکم متعامدی از یک پایه ریس و دوگان متعارفش از یک C^*-مدول هیلبرت بزرگتر است. در این فصل قضیه اساسی اتساع را برای زوج‌های قاب دوگان در C^*-مدول‌های هیلبرت بیان و اثبات می‌کنیم.
در این فصل A را یک C^*-جبر یکانی در نظر می‌گیریم و همچنین $\{e_j\}_{j\in J}$ که در آن $e_j = (0, \cdots, \overbrace{1_A}^{\text{مولفه زام}}, \cdots, 0)$ یک پایه متعامد یکه استاندارد برای $l^2(A)$ است.

۲.۳ اتساع زوج‌های قاب دوگان در C^*-مدول های هیلبرت

لم ۱.۲.۳. فرض کنید که $\{x_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل از A-مدول های هیلبرت تولید شده شمارش پذیر یا متناهی H روی C^*-جبر یک‌دار A باشد. آنگاه عملگر تجزیه $T : H \longrightarrow l^2(A)$ با ضابطه $Tx = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle e_j$ الحاق پذیر است. و به‌ازای هر $j \in J$، $T^*e_j = x_j$.

فرض کنید $\{x_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل با کران بسل D باشد. از طرفی داریم

$$\begin{aligned}\langle T(x),T(x)\rangle &= \left\langle \sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle e_j, \sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle e_j\right\rangle \\ &= \sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle.\langle e_j,e_j\rangle.\overline{\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle} \\ &= \sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle.\langle e_j,e_j\rangle.\sum_{j\in J}\langle x_j,x\rangle \\ &= \sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle \leqslant D\langle x,x\rangle.\end{aligned}$$

پس عملگر T کران‌دار است. حال با توجه به قضیه ۵.۵.۲ برهان تکمیل می‌شود.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید M و N، A-مدول های هیلبرت روی C^*-جبر A باشند، و نیز فرض کنید $T: M \longrightarrow N$ یک نگاشت خطی باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

۱. عملگر T، کران‌دار و A-خطی است.

۲. ثابت $k \geqslant ۰$ موجود است به قسمی که نامساوی $\langle Tx,Tx\rangle \leqslant k\langle x,x>$ در A به‌ازای هر $x\in M$ برقرار است.

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید به‌ازای هر $x\in M$ و $a\in A$، $T(x.a)=(Tx).a$ و با توجه به کران‌داری T فرض کنید $\|T\|\leqslant ۱$، نشان می‌دهیم برای هر $x\in M$، $\langle Tx,Tx\rangle \leqslant \langle x,x\rangle$.
برای هر $x\in M$ و $n\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $b_n=(\langle x,x\rangle+n^{-۱})^{-\frac{۱}{۲}}$ و $x_n=x.b_n$، پس داریم

$$\begin{aligned}\langle x_n,x_n\rangle &= \langle x.b_n,x.b_n\rangle \\ &= b_n\langle x,x\rangle b_n \\ &= \langle x,x\rangle(\langle x,x\rangle+n^{-۱})^{-۱} \leq ۱.\end{aligned}$$

بنابراین $\|x_n\|\leq ۱$، پس $\|Tx_n\|\leq ۱$ در نتیجه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\langle Tx_n,Tx_n\rangle\leq ۱$، از طرفی

$$\langle Tx_n,Tx_n\rangle = b_n\langle Tx,Tx\rangle b_n \leq ۱.$$

بنابراین برای $n\in\mathbb{N}$، $\langle Tx,Tx\rangle \leq b_n^{-۲}=\langle x,x\rangle+n^{-۱}$ که نتیجه می‌دهد

$$\langle Tx,Tx\rangle \leq \langle x,x\rangle.$$

(۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنید برای برای هر $x\in M$، $\langle Tx,Tx\rangle\leq\langle x,x\rangle$، واضح است که T کران‌دار است فرض کنید $\|T\|\leq ۱$، $x\in M$، $y\in N$ و B را یک C^*-زیر جبر بسته از A باشند. نگاشت $\theta: B\to A$ با ضابطه $\theta(b)=\langle T(x.b),y\rangle$ برای هر $b\in B$ را در نظر گرفته، با استفاده ازگزاره ۳ − ۲ در [۲۶]، داریم

$$\begin{aligned}\theta(b)^*\theta(b)=\langle y,T(x.b)\rangle\langle T(x.b),y\rangle &\leq \|y\|^۲\langle T(x.b),T(x.b)\rangle \\ &\leq \|y\|^۲\langle x.b,x.b\rangle = \|y\|^۲ b^*\langle x,x\rangle b \\ &\leq \|y\|^۲\|x\|^۲ b^*b.\end{aligned}$$

حال شرایط استفاده از گزاره ۷ − ۲ در مرجع [۲۶] مهیاست، یعنی به‌ازای هر $b \in B$، $\theta(b) = \theta(1)b$ پس داریم

$$\theta(b) = \langle T(x.b), y\rangle = \langle Tx, y\rangle b = \langle T(x).b, y\rangle,$$

$$\Longrightarrow T(x.b) = T(x).b.$$

بنابراین(۱) برقرار است و برهان کامل می‌شود. □

لم ۳.۲.۳. فرض کنید که $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب در A-مدول هیلبرت تولید شده شمارش پذیر یا متناهی H روی C^*-جبر یک‌دار A باشد. و نیز فرض کنید $\{y_j\}_{j\in J}$ و $\{z_j\}_{j\in J}$ قاب‌های دوگان $\{x_j\}_{j\in J}$ باشند با این خاصیت که $Rang(T_Z) \subseteq Rang(T_Y)$ و یا $Rang(T_Y) \subseteq Rang(T_Z)$ که در آن T_Y و T_Z به ترتیب عملگرهای تجزیه $\{y_j\}_{j\in J}$ و $\{z_j\}_{j\in J}$ می‌باشند. در این‌صورت به‌ازای هر $j \in J$، $y_j = z_j$.

برهان. فرض کنیم $Rang(T_Z) \subseteq Rang(T_Y)$ آنگاه برای هر $x \in H$ وجود دارد $y_x \in H$ به‌طوری‌که

$$T_{Y(y_x)} = T_{Z(x)}$$

با اثر دادن T^*X در دو طرف رابطه فوق به‌ازای هر $x \in H$ و هر $j \in J$ داریم،

$$\begin{aligned}
y_x &= T_X^* T_{Yyx} = T^* T_{Zx} = x \\
&\Longrightarrow T_{Yx} = T_{Zx} \\
T_{Yx} &= \sum_{j_J} \langle x, y_j\rangle e_j \qquad \text{طبق لم ۱.۲.۳} \\
T_{Zx} &= \sum_{j\in J} \langle x, z_j\rangle e_j \\
&\Longrightarrow \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle e_j - \sum_{j} \langle x, z_j\rangle e_j = 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{j\in J} \langle x, y_j - z_j\rangle e_j = 0 \\
&\Longrightarrow y_j = z_j.
\end{aligned}$$

□

لم ۴.۲.۳. فرض کنید A یک C^*-جبر و $\{a_j\}_{j\in J}$ و $\{b_j\}_{j\in J}$ دو دنباله در A باشند به‌طوری‌که $\sum_{j\in J} a_j a_j^*$ و $\sum_{j\in J} b_j b_j^*$ در A همگرا باشند، در این صورت‌داریم:

$$\sum_{j\in J} (a_j + b_j)(a_j + b_j)^* \leqslant 2 \sum_{j\in J} (a_j a_j^* + b_j b_j^*)$$

.

برهان. کافیست نشان دهیم نامساوی زیر برقرار است.

$$(a_j b_j^* + b_j a_j^*) \leqslant (a_j a_j^* + b_j b_j^*).$$

لذا داریم

$$\begin{aligned}(a_ja_j^*+b_jb_j^*)-(a_jb_j^*+b_ja_j^*)&=a_j(a_j^*-b_j^*)-b_j(a_j^*-b_j^*)\\&=(a_j-b_j)-(a_j^*-b_j^*)\\&=(a_j-b_j)(a_j-b_j)^*.\end{aligned}$$

که عبارت $(a_j-b_j)(a_j-b_j)^*$ در یک C^*-جبر همواره مثبت است چون ضرب هر عنصر در الحاقش مثبت است و این برهان را کامل می‌کند. $\square$

گزاره ۵.۲.۳. فرض کنید H یک A-مدول هیلبرت متناهیاً تولید شده یا شمارا تولید شده روی C^*-جبر یک‌دار A باشد و $\{x_j\}_{j\in J}$ و $\{y_j\}_{j\in J}$ دو دنباله بسل در H باشند. اگر برای هر $x\in H$ داشته باشیم

$$x=\sum_{j\in J}\langle x,y_j\rangle x_j.$$

آنگاه $\{x_j\}_{j\in J}$ و $\{y_j\}_{j\in J}$ قاب‌های H هستند و برای هر $x\in H$ داریم

$$x=\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle y_j.$$

برهان. فرض کنید D_Y کران بسل $\{y_j\}_{j\in J}$ باشد. در این‌صورت برای هر $x\in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\|x\|^۴&=\left\|\langle\sum_{j\in J}\langle x,y_j\rangle x_j,x\rangle\right\|^۲\\&=\left\|\sum_{j\in J}\langle x,y_j\rangle\langle x_j,x\rangle\right\|^۲\\&\leqslant\left\|\sum_{j\in J}\langle x,y_j\rangle\langle y_j,x\rangle\right\|.\left\|\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\right\|\\&\leqslant D_Y\|x\|^۲\left\|\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\right\|.\end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$D_Y^{-۱}\|x\|^۲\leqslant\left\|\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle\right\|.$$

پس $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $\{y_j\}_{j\in J}$ نیز یک قاب برای H است. حال نشان می‌دهیم که برای هر $x\in H$ رابطه زیر برقرار است.

$$x=\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle y_j.$$

طبق گزاره (۵.۶) در مرجع [۹]، پایه ریس استاندارد $\{f_j\}_{j\in J}$ از A-مدول هیلبرت K و تصویر متعامد P وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $j\in J$ داریم $y_j=P(f_j)$.

چون $\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x\rangle$ نرم-کران‌دار است، می‌توانیم عملگر الحاق‌پذیر دیگری مانند $T:H\to K$

با ضابطه $T(x)=\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle f_j$ را برای $x\in H$ تعریف کنیم. بنابراین $PT\in End_A^*(H)$ و برای هر $x\in H$ داریم $PT(x)=\sum_{j\in J}\langle x,x_j\rangle y_j$. در نتیجه روابط زیر برای هر $x\in H$ برقرار است:

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle &= \left\langle \sum_j \langle x,y_j\rangle x_j, x\right\rangle\\ &= \sum_j \langle x,y_j\rangle\langle x_j,x\rangle\\ &= \sum_j \langle x,x_j\rangle\langle y_j,x\rangle\\ &= \left\langle \sum_j \langle x,x_j\rangle y_j, x\right\rangle = \langle PT(x),x\rangle\end{aligned}$$

توجه کنید که در روابط فوق از خاصیت خودالحاقی $\langle x,x\rangle$ استفاده شده است. چون

$$PT=(PT)^{۱/۲}((PT)^{۱/۲})^*=((PT)^{۱/۲})^*(PT)^{۱/۲}=id_H.$$

پس عملگر $(PT)^{۱/۲}$ یکانی است و $PT=id_H$. □

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنید H یک A-مدول هیلبرت متناهی یا شمارا تولید شده روی C^*-جبر یک‌دار A باشد. $\{x_j\}_{j\in J}$ را یک قاب با عملگر تجزیه T_X در نظر بگیرید، آنگاه شرایط زیر هم ارزند.

۱. $\{x_j\}_{j\in J}$ یک قاب دوگان منحصربفرد دارد؛

۲. $Rang(T_X)=l^۲(A)$ ؛

۳. اگر برای دنباله $\{c_j\}_{j\in J}\in l^۲(A)$ ، $\sum_{j\in J}c_jx_j=۰$ ، آنگاه برای هر j، $c_j=۰$.

شرایط هم ارزی نتیجه می‌دهد که $\{x_j\}_{j\in J}$ یک پایه ریس است.

برهان. $(۱)\Rightarrow(۲)$. فرض کنید $\{x_j^*\}_{j\in J}$ دوگان استاندارد $\{x_j\}_{j\in J}$ با عملگر تجزیه T_X^* باشد. در این صورت $x_j^*=S_X^{-۱}x_j$، که در آن S_X عملگر قابی $\{x_j\}_{j\in J}$ است.
همچنین فرض کنید $\{y_j\}_{j\in J}$ قاب دوگان $\{x_j\}_{j\in J}$ با عملگر تجزیه T_Y باشد، در این‌صورت

$$Rang(T_Y)\subseteq l^۲(A)=Rang(T_X)=Rang(T_{x^*}).$$

حال با استفاده از لم ۳.۲.۳ برای هر $j\in J$ داریم $y_j=x_j^*$.
$(۲)\Rightarrow(۱)$. فرض (خلف) کنید $Rang(T_X)\neq l^۲(A)$ با توجه به قضیه ۸ − ۳ − ۱۵ در مرجع [۳۱]، داریم

$$l^۲(A)=Rang(T_X)\oplus Ker(T_X^*)$$

P_X را تصویر متعامد از $l^۲(A)$ بر روی $Rang(T_X)$ بگیرید، بنابراین

$$l^۲(A)=P_Xl^۲(A)\oplus P_X^{\perp}l^۲(A)$$

در نتیجه $P_X^{\perp}l^۲(A)=Ker(T_X^*)\neq\{۰\}$. زیرا در غیر این‌صورت $Rang(T_X)=l^۲(A)$.
حال $e_{j۰}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $P_X^{\perp}e_{j۰}\neq ۰$ و عملگر $U:P_X^{\perp}l^۲(A)\to H$ را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم

$$U\omega = \langle \omega, P_X^{\perp} e_{j_\circ}\rangle x_{j_\circ};$$

بنابراین U عملگری خطی و الحاق‌پذیر است.
حال $\{x_j^*\}_{j\in J}$ را دوگان استاندارد $\{x_j\}_{j\in J}$ با کران بالای D_{X^*} بگیرید و قرار دهید

$$y_j = x_j^* + UP_X^{\perp} e_j$$

لذا داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle\langle y_j, x\rangle &= \sum_{j\in J}\langle x, x_j^* + UP_X^{\perp}e_j\rangle\langle x_j^* + UP_X^{\perp}e_j, x\rangle \\ &\leqslant ۲\left(\sum_{j\in J}\langle x, x_j^*\rangle\langle x_j^*, x\rangle + \sum_{j\in J}\langle P_X^{\perp}U^*x, e_j\rangle\langle e_j, P_X^{\perp}U^*x\rangle\right) \qquad (*) \\ &\leqslant ۲\left(D_{X^*}\langle x, x\rangle + \sum_{j\in J}\langle P_X^{\perp}U^*x, P_X^{\perp}U^*x\rangle\right).\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $\{y_j\}_{j\in J}$ دنباله بسل است. توجه کنید که در نامساوی $(*)$ از لم ۴.۲.۳ استفاده کردیم.
همچنین برای هر $x \in H$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\langle x, UP_X^{\perp}e_j\rangle x_j &= T_X^*\sum_{j\in J}\langle x, UP_X^{\perp}e_j\rangle e_j \\ &= T_X^*\sum_{j\in J}\langle P_X^{\perp}U^*x, e_j\rangle e_j \\ &= T_X^*P_X^{\perp}U^*x = \circ\end{aligned}$$

بنابراین برای هر$x \in H$ داریم:

$$x = \sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle x_j.$$

با توجه گزاره ۵.۲.۳ $\{y_j\}_{j\in J}$ قاب دوگان $\{x_j\}_{j\in J}$ است، که مساوی $\{x_J^*\}_{j\in J}$ نیست. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.
(۳) $\Rightarrow$ (۲) می‌دانیم A-مدول هیلبرت $l^۲(A)$ به صورت جمعوند متعامد

$$l^۲(A) = RangT_X \oplus KerT_X^*$$

است. بنا به فرض داریم $l^۲(A) = RangT_X$ لذا $KerT_X^* = \{\circ\}$ بنابراین T_X^* یک به یک است.
همچنین برای هر $j \in J$ داریم

$$T_X(x) = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle e_j. \qquad (۱.۳)$$

با اثر دادن T_X^* داریم

$$T_X^*T_X(x) = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle T_X^*(e_j) = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle x_j.$$

فرض کنید دنباله $\{c_j\}_{j\in J}$ موجود باشد به طوری‌که $\sum_{j\in J} c_j x_j = 0$ برقرار باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} T_X^* T_X &= \sum_{j\in J} (\langle x, x_j\rangle + c_j) x_j \\ &= T_X^* \left(\sum_{j\in J} d_j e_j \right). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$T_X(x) = \sum_{j\in J} d_j e_j. \tag{۲.۳}$$

از ۱.۳ و ۲.۳ نتیجه می‌شود $d_j = \langle x, x_j\rangle$ برای هر $j \in J$ برقرار است. بنابراین برای هر $j \in J$ داریم $c_j = 0$.

(۲) $\Rightarrow$ (۳). برای اینکه نشان دهیم $RangT_X = l^2(A)$ است، کافیست نشان دهیم $\ker T_X^* = \{0\}$. برای هر دنباله $\{a_j\}_{j\in J}$ و $\{b_j\}_{j\in J}$ در $l^2(A)$ اگر $T_X^*(\{a_j\}_{j\in J}) = T_X^*(\{b_j\}_{j\in J})$ یعنی

$$\sum_{j\in J} a_j x_j = \sum_{j\in J} b_j x_j.$$

آنگاه $\sum_{j\in J}(a_j - b_j) x_j = 0$ لذا با استفاده از فرض به ازای هر $j \in J$ داریم $a_j - b_j = 0$ در اینصورت $\{a_j\}_j = \{b_j\}_j$ که این نشان می‌دهد T_X^* یک به یک بوده و $KerT_X^* = \{0\}$ بنابراین $RangT_x = l^2(A)$. □

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنید A یک C^*- جبر یک‌دار باشد، همچنین فرض کنید $\{x_j\}_{j\in J}$و $\{y_j\}_{j\in J}$ یک زوج قاب دوگان روی A-مدول هیلبرت شمارش‌پذیر یا متناهی تولید شده H باشد. در این‌صورت یک A-مدول هیلبرت مانند $H \subseteq K$ و همچنین یک پایه ریس مانند $\{u_j\}_{j\in J}$ از K موجود است به‌طوری‌که $\{u_j\}_{j\in J}$ دارای دوگان منحصر به فرد $\{u_j^*\}_{j\in J}$ است. و روابط $Pu_j = x_j$ و $Pu_j^* = y_j$ به‌ازای هر $j \in J$ برقرار است. به‌طوری‌که $P: K \longrightarrow H$ یک تابع تصویر است.

برهان. فرض کنید T_X و T_Y عملگرهای تجزیه $\{x_j\}_{j\in J}$ و $\{y_j\}_{j\in J}$ و P_X و P_Y به ترتیب تصاویر متعامد از $l^2(A)$ بروی برد T_X و برد T_Y باشند. S_Y را عملگر قاب $\{y_j\}_{j\in J}$ در نظر بگیرید. در این صورت داریم $S_Y = T_Y^* T_Y$، که معکوس‌پذیر است. پس برای هر $x \in H$ داریم :

$$\begin{aligned} \langle T_Y x, T_Y S_Y^{-1} y_j\rangle &= \langle x, T_Y^* T_Y S_Y^{-1} y_j\rangle = \langle x, S_Y S_Y^{-1} y_j\rangle \\ &= \langle x, y_j\rangle = \langle T_Y x, e_j\rangle = \langle T_Y x, P_Y e_j\rangle. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

بنابراین $P_Y e_j = T_Y S_Y^{-1} y_j$. از طرفی می‌بینیم که برای هر $x \in H$ داریم

$$\begin{aligned} P_Y T_Y x &= P_Y \sum_{j\in J} \langle x, x_j\rangle e_j = \sum_{j\in J} \langle x, x_j\rangle P_Y e_j \\ &= \sum_{j\in J} \langle x, x_j\rangle T_Y S_Y^{-1} y_j = T_Y S_Y^{-1} \sum_{j\in J} \langle x, x_j\rangle y_j \\ &= T_Y S_Y^{-1} x. \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

توجه کنید که در مساوی سوم از ۳.۳ استفاده کردیم. حال قرار دهید

$$K = H \oplus P_Y^{\perp} l^{2}(A), \qquad u_j = x_j \oplus P_Y^{\perp} e_j.$$

به سادگی دیده می‌شود $\{u_j\}_{j\in J}$ دنباله بسل در K است. پس عملگر تجزیه متناظر $T_U : K \to l^{2}(A)$ را داریم که برای هر $x \in H$ و $\omega \in P_Y^{\perp} l^{2}(A)$

$$T_U(x \oplus \omega) = \sum_{j\in J} \langle x \oplus \omega, x_j \oplus P_Y^{\perp} e_j\rangle e_j.$$

توجه کنید برای هر $x \in H$ و $\omega \in P_Y^{\perp} l^{2}(A)$ داریم

$$\begin{aligned} T_U(x \oplus \omega) &= \sum_{j\in J} \langle x \oplus \omega, x_j \oplus P_Y^{\perp} e_j\rangle e_j \\ &= \sum_{j\in J} \left(\langle x, x_j\rangle + \langle \omega, P_Y^{\perp} e_j\rangle\right) e_j = T_X x + \omega \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

ادعا می‌کنیم T_U دوسوئی است. ابتدا نشان می‌دهیم برد T_U بسته است. پس فرض می‌کنیم $\phi_n \in Rang(T_U)$ و $\phi_n \to \phi$ وقتی که $n \to \infty$. آنگاه $x_n \in H$ و $\omega_n \in P_Y^{\perp} l^{2}(A)$ وجود دارند که به‌طوری $T_U(x_n \oplus \omega_n) = \phi_n$.

با توجه به رابطه (۵.۳)، $T_X x_n + \omega_n = \phi_n \to \phi$ وقتی که $n \to \infty$.

با اثر دادن T_Y^* به دو طرف رابطه وقتی که $n \to \infty$ داریم

$$T_Y^*(T_X x_n + \omega_n) = T_Y^*(T_X x_n) = T_Y^*(\langle x_n, x_j\rangle) = \sum_j \langle x_n, x_j\rangle x_j = x_n \to T_Y^* \phi$$

چون برد T_X بسته است، پس $Rang(T_U)$ نیز بسته است. برای این که نشان دهیم T_U پوشاست، با استفاده از قضیه (۱۵.۳.۸) در مرجع [۳۱]، معادل این است که نشان دهیم T_U^* یک به یک است.

فرض کنید $T_U^* \sum_{j\in J} a_j e_j = 0$ برای $\{a_j\}_{j\in J} \in l^{2}(A)$.

بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} 0 &= T_U^* \sum_{j\in J} a_j e_j = \sum_{j\in J} a_j (x_j \oplus P_Y^{\perp} e_j) \\ &= \sum_{j\in J} a_j x_j \oplus \sum_{j\in J} a_j P_Y^{\perp} e_j = \sum_{j\in J} a_j x_j \oplus P_Y^{\perp} \sum_{j\in J} a_j e_j. \end{aligned} \tag{۶.۳}$$

بنابراین $P_Y^{\perp} \sum_{j\in J} a_j e_j = 0$، پس $\sum_{j\in J} a_j e_j \in Rang(P_Y) = Rang(T_Y)$.

آنگاه عنصر $z \in H$ وجود دارد به‌طوریکه $T_Y z = \sum_{j\in J} a_j e_j$ از طرفی $T_Y z = \sum_{j\in J} \langle z, y_j\rangle e_j$، لذا برای هر j داریم $a_j \langle z, y_j\rangle$.

تساوی (۶.۳) نتیجه می‌دهد $\sum_{j\in J} a_j x_j = 0$ بنابراین

$$0 = \sum_{j\in J} a_j x_j = \sum_{j\in J} \langle z, y_j\rangle x_j = z$$

پس برای هر $j \in J$، $a_j = 0$.

حال نشان می‌دهیم T_U یک به یک است. فرض می‌کنیم برای $x \in H$ و $\omega \in P_Y^{\perp} l^2(A)$، $T_U(x \oplus \omega)$. با توجه به (۵.۳) داریم $T_X x + \omega = 0$، لذا $T_X x = -\omega$.
با اثر دادن P_Y به دو طرف آن به رابطه $P_Y T_X x = P_Y(-\omega) = 0$ می‌رسیم.
با استفاده از (۴.۳) می‌بینیم که $0 = P_Y T_X x = T_Y S_Y^{-1} x$، بنابر این $x = 0$ چون T_Y و S_Y^{-1} هر دو یک به یک هستند، با استفاده از قضیه(۱۵.۳.۸) در مرجع [۳۱]، نتیجه می‌گیریم T_U^* دو سوئی است.
حال قرار می‌دهیم $S_U = T_U^* T_U$. بنابراین S_U^{-1} الحاق پذیر و کران‌دار است. پس S_U هم یک عملگر A-خطی، کران‌دار و معکوس‌پذیر است، بنابراین با توجه به لم ۲.۲.۳، $\{u_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای K است.
$\{u_j^*\}_{j\in J}$ را قاب دوگان استاندارد $\{u_j\}_{j\in J}$ می‌گیریم و می‌نویسیم $u_j^* = z_j \oplus \omega_j$.
برای هر $x \in H$ داریم :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J}\langle x, z_j\rangle\langle z_j, x\rangle &= \sum_{j\in J}\left(\langle x, z_j\rangle + \langle 0, \omega_j\rangle\right)\left(\langle z_j, x\rangle + \langle \omega_j, 0\rangle\right)\\
&= \sum_{j\in J}\langle x\oplus 0, z_j\oplus\omega_j\rangle\langle z_j\oplus\omega_j, x\oplus 0\rangle\\
&\leqslant D\langle x\oplus 0, x\oplus 0\rangle = D\langle x, x\rangle.
\end{aligned}$$

که D کران بالای $\{u_j^*\}_{j\in J}$ است. بنابراین $\{z_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل H است. حال عملگر تجزیه متناظر آن را با T_Z مشخص می‌کنیم.
ادعا می‌کنیم برای هر $x \in H$، $x = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle z_j$.
در واقع برای هر $x \in H$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
x\oplus 0 &= \sum_{j\in J}\langle x\oplus 0, u_j\rangle u_j^*\\
&= \sum_{j\in J}\langle x\oplus 0, x_j\oplus P_Y^{\perp}e_j\rangle z_j\oplus\omega_j\\
&= \sum_{j\in J}\langle x\oplus 0, z_j\oplus\omega_j\rangle x_j\oplus P_Y^{\perp}e_j\\
&= \sum_{j\in J}\left(\langle x, z_j\rangle + \langle 0, \omega_j\rangle\right)x_j\oplus P_Y^{\perp}e_j\\
&= \sum_{j\in J}\langle x, z_j\rangle x_j \oplus \sum_{j\in J}\langle x, z_j\rangle P_Y^{\perp}e_j,
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x \in H$ داریم

$$P_Y^{\perp}\sum_{j\in J}\langle x, z_j\rangle e_j = P_Y^{\perp}T_Z x = 0$$

که نتیجه می‌دهد $Rang(T_Z) \subset Rang(T_Y)$. با توجه به لم ۳.۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر j، $z_j = y_j$.
به‌علاوه عملگر تجزیه $\{u_j^*\}_{j\in J}$ پوشاست. پس با استفاده مجدد از لم ۳.۲.۳، یکتایی دوگان $\{u_j\}_{j\in J}$

را بدست می‌آوریم. برای کامل کردن برهان، کافی است نشان دهیم $\{u_j\}_{j\in J}$ و $\{u_j^*\}_{j\in J}$ پایه ریس K هستند. توجه کنید که با توجه به پوشایی T_U و با استفاده از قضیه ۶.۲.۳، می‌بینیم که $\{u_j\}_{j\in J}$ پایه ریس K و $\{u_j^*\}_{j\in J}$ هم پایه ریس است، به طوری‌که $u_j^* = S_U^{-1}u_j$ و S_U معکوس‌پذیر است. $\square$

برای یک مجموعه ناتهی $\mathcal{U}$ و یک C^*-جبر A، $l^2_{\mathcal{U}}(A)$ را یک A-مدول هیلبرت می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$l^2_{\mathcal{U}}(A) = \left\{ \{a_U\}_{U\in\mathcal{U}} \subseteq A : \text{در نرم همگراست } \sum_{U\in\mathcal{U}} a_U a_U^* \right\}$$

$\{e_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ را پایه متعامد یکه استاندارد $l^2_{\mathcal{U}}(A)$ می‌گیریم، که e_U در U برابر 1_A ودر غیر این صورت مساوی 0_A است.

تعریف ۸.۲.۳. بردار ψ در H، بردار قاب کامل (بردار پایه ریس کامل) برای گروه یکانی $\mathcal{U}$ روی H گفته می‌شود اگر $\mathcal{U}\psi = \{U\psi : U \in \mathcal{U}\}$ یک قاب (پایه ریس) برای H باشد.

تعریف ۹.۲.۳. دو بردار $\phi, \psi \in H$ بردارهای قاب دوگان(بردارهای پایه ریس دوگان) برای گروه یکانی $\mathcal{U}$ روی H گفته می‌شود اگر $\mathcal{U}\phi$ و $\mathcal{U}\psi$ قاب‌های دوگان (پایه‌های ریس دوگان) در H باشند.

اگر $\mathcal{U}$ یک گروه باشد، برای هر $U \in \mathcal{U}$، تعریف می‌کنیم :

$$L_U e_V = e_{UV}, \qquad R_U e_V = e_{VU^{-1}}.$$

توجه کنید که $L_U^{-1} = L_U^* = L_{U^*}$ و $R_U^{-1} = R_U^* = R_{U^*}$ که L و R نمایش‌های منظم چپ و راست $\mathcal{U}$ است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر دو قاب تولید شده توسط گروه‌های یکانی، قاب دوگان باشند، باید با استفاده از همان گروه یکانی تولید شده باشند.

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنید H یک A-مدول هیلبرت روی C^*-جبر یک‌دار A و $\xi, \eta \in H$ را بردارهای قاب کامل برای گروه‌های یک‌دار $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$ روی H بگیرید. فرض کنید $\pi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ یک گروه همریختی(ایزومورفیسم) باشد. اگر $\mathcal{G}_1\xi$ و $\mathcal{G}_2\eta$ قاب‌های دوگان باشند، آنگاه برای هر $U \in \mathcal{G}_1$، $\pi(U) = U$.

برهان. برای $U \in \mathcal{G}_1$ دلخواه و $x \in H$ داریم :

$$\begin{aligned} Ux &= \sum_{V\in\mathcal{G}_1} \langle Ux, V\xi\rangle \pi(V)\eta \\ &= \sum_{V\in\mathcal{G}_1} \langle x, U^{-1}V\xi\rangle \pi(V)\eta \\ &= \pi(U) \sum_{V\in\mathcal{G}_1} \langle x, U^{-1}V\xi\rangle \pi(U^{-1}V)\eta \\ &= \pi(U)x \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد برای هر $U \in \mathcal{G}_1$، $\pi(U) = U$. $\square$

برای کامل کردن این بخش ویژگی‌های اتساع ساختار جفت قاب دوگان را برای C^*-مدول‌های هیلبرت را ملاحظه می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۲.۳. فرض کنید $\mathcal{G}$ یک گروه یکانی روی A-مدول هیلبرت متناهی یا شمارا تولید شده H روی C^*-جبر یکانی A باشد. ξ و η را دو بردار قاب دوگان کامل برای $\mathcal{G}$ بگیرید. در این‌صورت یک A-مدول هیلبرت $H \subseteq K$ و یک گروه یکانی $\tilde{\mathcal{G}}$ روی K ویک بردار ریس کامل $\tilde{\xi}$ با یک بردار دوگان یکتا $\tilde{\eta}$ برای $\tilde{\mathcal{G}}$ وجود دارد، به طوری‌که

$$P\tilde{U}\tilde{\xi} = U\xi, \qquad P\tilde{U}\tilde{\eta} = U\eta$$

که P تابع تصویر از K بروی H است.

برهان. فرض کنید T_ξ و T_η عملگرهای تجزیه $\mathcal{G}_\xi$ و $\mathcal{G}_\eta$ باشند. و P_ξ و P_η به ترتیب تصویر متعامد از $l^2_{\mathcal{G}}(A)$ بروی برد T_ξ و T_η باشند. برای هر $U \in \mathcal{G}$ قرار دهید

$$\tilde{U} = U \oplus L_U, \qquad K = H \oplus P_Y^{\perp} l^2_{\mathcal{G}}(A)$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $\tilde{G} = \{\tilde{U} : U \in \mathcal{G}\}$ یک گروه از عملگرهای یکانی روی K است. زیرا برای $\tilde{U} \in \tilde{G}$ داریم

$$\begin{aligned}
\tilde{U}\tilde{U}^* &= (U \oplus L_U)(U \oplus L_U)^* \\
&= (U \oplus L_U)(U^* \oplus L_U^*) \\
&= UU^* \oplus L_U L_U^* \\
&= UU^* \oplus L_U L_{U^*} \\
&= UU^* \oplus L_{UU^*} = I \oplus L_I
\end{aligned}$$

برای $\tilde{U}^*\tilde{U} = I$ نیز بطور مشابه می‌توان اثبات کرد. حال فرض کنید $\tilde{\xi} = \xi \oplus P_\eta^{\perp} e_I$ در این‌صورت

$$\tilde{U}\tilde{\xi} = U\xi \oplus L_U P_\eta^{\perp} e_I = U\xi \oplus P_\eta^{\perp} e_U.$$

بنابراین با توجه به قضیه ۷.۲.۳، $\tilde{\xi}$ یک بردار قاب کامل برای $\tilde{G}$ است. S را عملگر قاب $\tilde{\mathcal{G}}\tilde{\xi}$ و $\tilde{\eta} = S^{-1}\tilde{\xi}$ بگیرید، در این صورت حکم برقرار است. $\square$

فصل ۴

اتساع g-قاب‌های دوگان روی g-پایه‌های ریس دوگان

۱.۴ مقدمه

هدف از این فصل این است که نشان دهیم g-قابهای دوگان در یک فضای هیلبرت، تراکم متعامدی از یک پایه ریس و دوگان متعارفش در یک فضای هیلبرت بزرگتر است. در ابتدای این فصل به معرفی g-قاب‌ها می‌پردازیم، سپس، g-قاب‌های مجزا را معرفی می‌کنیم و در بخش پایانی نیز قضیه اتساع را برای g-قاب‌های دوگان بیان می‌کنیم.

۲.۴ g-قاب‌ها

قرارداد. در این فصل H یک فضای هیلبرت و J, I یک مجموعه اندیس‌گذار متناهی یا شمارش‌پذیر است.

تعریف ۱.۲.۴. دنباله $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ از عملگرهای کران‌دار را یک g-قاب برای H نسبت به $\{H_i\}$ می‌گوییم. اگر دو ثابت مثبت A و B موجود باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in H$،

$$A\|f\|^۲ \leqslant \sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|_i^۲ \leqslant B\|f\|^۲.$$

اعداد A و B را به ترتیب کران‌های پایین و بالای g-قاب می‌نامند.
هرگاه $A = B$، آنگاه دنباله Λرا یک g-قاب چسبان یا تنگ[۱] برای H می‌نامیم.
همچنین هرگاه $A = B = ۱$، آنگاه دنباله Λ را یک g-قاب پارسوال[۲] برای H می‌نامیم.
لم زیر نشان می‌دهد که هر g-قاب تعمیم یافته یک قاب است.

[۱] Tight g-frame
[۲] Parseval g-frame

لم ۲.۲.۴. هر قاب یک g-قاب تولید می‌کند.

برهان. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای H باشد در نتیجه اعداد حقیقی و مثبت A و B موجودند به‌طوریکه به ازای هر $f \in H$ داریم:

$$A\|f\|^۲ \leqslant \sum_{i\in j} |\langle f, f_j\rangle|^۲ \leqslant B\|f\|^۲ \tag{۱.۴}$$

اگر به ازای هر $j \in J$ قرار دهیم $\Lambda_j f = \langle f, f_j\rangle$ در این صورت $\|\Lambda_j f\|^۲ = |\langle f, f_j\rangle|^۲$ و در نتیجه داریم

$$\sum_{i\in j} \|\Lambda_j f\|^۲ = \sum_{i\in j} |\langle f, f_j\rangle|^۲ \tag{۲.۴}$$

اکنون از روابط (۱.۴) و (۲.۴) نتیجه می‌شود به‌ازای هر $f \in H$،

$$A\|f\|^۲ \leqslant \sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|_i^۲ \leqslant B\|f\|^۲.$$

در نتیجه $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ یک g-قاب برای H نسبت به $\mathbb{C}$ است. g-قاب بالا را g-قاب تولید شده به وسیله قاب $\{f_j\}_{j\in J}$ است. □

تعریف ۳.۲.۴. دنباله $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ از عملگرهای کران‌دار را یک g-دنباله بسل[۳] برای H نسبت به $\{H_i\}$ می‌گوییم. اگر ثابت مثبت B چنان موجود باشد که به‌ازای هر $f \in H$،

$$\sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|_i^۲ \leqslant B\|f\|^۲.$$

تعریف ۴.۲.۴. فرض کنید $\Lambda_i \in B(H, H_i)$ برای هر $i \in I$ فضای $\widehat{H}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\widehat{H} = \left\{ \{f_i\}_{i\in I} : f_i \in H_i, \sum_{i\in I} \|f\|_i^۲ < \infty \right\}$$

و ضرب داخلی روی آن را به صورت $\langle\{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I}\langle f_i, g_i\rangle$ تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد که $\widehat{H}$ با ضرب داخلی ذکر شده یک فضای هیلبرت است.

لم ۵.۲.۴. دنباله $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-دنباله بسل برای H است اگر و فقط اگر عملگر زیر کران‌دار باشد.

$$T_\Lambda : \widehat{H} \to H, \qquad T_\Lambda(\{f_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* f_i. \tag{۳.۴}$$

برهان. رجوع شود به گزاره (۲.۳) مرجع [۲۸]. □

تعریف ۶.۲.۴. عملگر تعریف شده در ۳.۴ را عملگر ترکیب برای Λ می‌گوئیم و عملگر الحاقی آن که به صورت زیر بیان می‌شود را عملگر تجزیه برای Λ می‌نامیم

$$T_\Lambda^* : H \to \widehat{H}, \qquad T_\Lambda^* f = \{\Lambda_i f\}_{i\in I}.$$

---

[۳] g-Bessel sequence

اگر $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-قاب برای H باشد، آنگاه

$$S_\Lambda : H \to H, \qquad S_\Lambda f = \sum_{i \in I} \Lambda_i^* \Lambda_i f$$

یک عملگر مثبت معکوس‌پذیر و کران‌دار است و برای هر $f \in H$ داریم

$$f = \sum_{i \in I} S_\Lambda^{-1} \Lambda_i^* \Lambda_i f = \sum_{i \in I} \Lambda_i^* \Lambda_i S_\Lambda^{-1} f. \tag{۴.۴}$$

عملگر S_Λ را یک عملگر g-قاب برای Λ می‌نامیم.

لم ۷.۲.۴. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-قاب برای H باشد، و برای هر $i \in I$ داشته باشیم $\tilde{\Lambda}_i = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$ در این‌صورت $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\Lambda}_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ نیز یک g قاب برای H است.

برهان. رجوع شود به صفحه ۶ مرجع [۲۹]. □

تعریف ۸.۲.۴. اگر $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ دو g-قاب برای H باشند و داشته باشم

$$f = \sum_{i \in I} \Theta_i^* \Lambda_i f,$$

در این صورت Λ و Θ g-قاب‌های دوگان برای H هستند. از ۴.۴ می‌توان نتیجه بگیریم که $\tilde{\Lambda}$ g-قاب دوگان برای Λ است که به آن g-قاب دوگان متعارف یا کانونی برای Λ می‌نامیم.

تعریف ۹.۲.۴. دنباله $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) i \in I\}$ یک g-پایه ریس برای Hروی $\{H_i\}_i$ می‌نامیم اگر دو ثابت مثبت A و B وجود باشند که برای هر زیر مجموعه متناهی $F \subset I$ و برای هر $g_i \in \{H_i\}$ داریم

$$A \sum_{i \in F} \|g_i\|_i^۲ \leqslant \left\| \sum_{i \in F} \Lambda_i^* g_i \right\|_i^۲ \leqslant B \sum_{i \in F} \|g_i\|_i^۲.$$

تعریف ۱۰.۲.۴. دنباله $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-پایه متعامد برای Hروی $\{H_i\}_{i \in I}$ می‌نامیم اگر برای هر $f \in H$، $\sum_{i \in I} \|\Lambda_i f\|_i^۲ = \|f\|^۲$ و به‌ازای هر $i, j \in I$ و به‌ازای هر $g_i \in H_i, g_j \in H_j$ داریم

$$\langle \Lambda_i^* g_i, \Lambda_j^* g_j \rangle_H = \delta_{ij} \langle g_i, g_j \rangle.$$

۳.۴ g-قاب‌های مجزا

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(K, H_i) : i \in I\}$ به ترتیب دو g-قاب برای فضای هیلبرت H و K باشد دراین‌صورت،

۱. اگر $RangT_\Lambda^* \cap RangT_\Theta^* = \{۰\}$ و $RangT_\Lambda^* + RangT_\Theta^*$ یک زیر فضای بسته از $\widehat{H}$ باشد، آنگاه آن‌ها را مجزا گوئیم.

۲. اگر $RangT_\Lambda^* \perp RangT_\Theta^*$، آنگاه آن‌ها را قویاً مجزا می‌گوئیم.

۳. اگر $RangT_\Lambda^* \cap RangT_\Theta^* = \{0\}$ و $RangT_\Lambda^* + RangT_\Theta^* = \widehat{H}$، آنگاه آن‌ها را زوج مکمل می‌گوئیم.

۴. اگر $RangT_\Lambda^* \oplus RangT_\Theta^* = \widehat{H}$، آنگاه آن‌ها را زوج مکمل قوی می‌گوئیم.

۵. اگر $RangT_\Lambda^* \cap RangT_\Theta^* = \{0\}$، آنگاه آن‌ها را مجزای ضعیف می‌نامیم.

گزاره ۲.۳.۴. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(K, H_i) : i \in I\}$ به ترتیب دو g-قاب برای فضای هیلبرت H و K باشند در این‌صورت Λ و Θ قویاً مجزا هستند اگر و فقط اگر عملگرهای معکوس‌پذیر $T_1 \in B(H)$ و $T_2 \in B(K)$ موجود باشند به طوری‌که $\{\Lambda_i T_1 \in B(H, H_i) : i \in I\}$، $\{\Theta_i T_2 \in B(K, H_i) : i \in I\}$ و $\{\Delta_i \in B(H \oplus K, H_i) : i \in I\}$ به ترتیب g- قاب‌های پارسوال روی H، K و $H \oplus K$ هستند، جائیکه به ازای هر $i \in I$ عملگر Δ_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Delta_i : H \oplus K \to H_i,$$

$$\Delta_i(f \oplus g) = \Lambda_i T_1 f + \Theta_i T_2 g.$$

برهان. رجوع شود به گزاره (۲.۲) مرجع [۱]. □

گزاره ۳.۳.۴. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(K, H_i) : i \in I\}$ به ترتیب دو g-قاب برای فضای هیلبرت H و K باشند، به‌ازای هر $i \in I$ عملگر زیر را درنظر می‌گیریم

$$\Gamma_i : H \oplus K \to H_i,$$

$$\Gamma_i(f \oplus g) = \Lambda_i f + \Theta_i g.$$

در این‌صورت g-قاب‌های Λ و Θ به صورت زیر هستند

۱. مجزا هستند، اگر و فقط اگر $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g-قاب برای $H \oplus K$ روی $\{H_i\}_{i\in I}$ باشد،

۲. مکمل هستند، اگر و فقط اگر $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g-پایه ریس برای $H \oplus K$ روی $\{H_i\}_{i\in I}$ باشد،

۳. قویاً مکملند، اگر و فقط اگر Λ و Θ قویاً مجزا باشند و $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g-پایه ریس برای $H \oplus K$ باشد،

۴. مجزای ضعیف است، اگر و فقط اگر

$$\{f \oplus g : \Gamma_i(f \oplus g) = 0, \forall i \in I\} = \{0\}.$$

برهان. رجوع شود به گزاره (۲.۳) مرجع [۱]. □

مثال ۴.۳.۴. فرض کنید $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ به ترتیب دو پایه یکامتعامد برای فضای هیلبرت H و K باشند. برای هر $i\in\mathbb{N}$ ، $H_i=\mathbb{C}^{۲}$ و عملگرهای Λ_i و Θ_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Lambda_i : H \to \mathbb{C}^{۲}, \quad \Lambda_i f = (\langle f, e_i\rangle_H, \langle f, e_{i+۱}\rangle_H)\,,$$

$$\Theta_i : K \to \mathbb{C}^{۲}, \quad \Theta_i g = (\langle g, h_i\rangle_K, \langle g, h_{i+۱}\rangle_K)\,.$$

در این‌صورت $\Lambda=\{\Lambda_i\in B(H,\mathbb{C}^{۲}) : i\in\mathbb{N}\}$ و $\Theta=\{\Theta_i\in B(K,\mathbb{C}^{۲}) : i\in\mathbb{N}\}$ به ترتیب دو g-قاب برای H و K است. برای ثابت $j\in\mathbb{N}$ داریم

$$\{\Lambda_i e_j\}_{i\in\mathbb{N}} = \{\Theta_i h_j\}_{i\in\mathbb{N}} = \{\delta_{ij}(۱,۰)\}_{i\in\mathbb{N}},$$

بنابراین $RangeT^*_\Lambda \cap RangeT^*_\Theta \neq \{۰\}$ و Λ و Θ مجزای ضعیف نیستند. از طرف دیگر به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ داریم،

$$\Gamma_i : H\oplus K \to \mathbb{C}^{۲}, \quad \Gamma_i(f\oplus g) = (\langle f, e_i\rangle_H + \langle g, h_i\rangle_K, \langle f, e_{i+۱}\rangle_H + \langle g, h_{i+۱}\rangle_K)\,.$$

واضح است که $\Gamma=\{\Gamma_i\in B(H\oplus K,\mathbb{C}^{۲}) : i\in\mathbb{N}\}$ یک g-قاب برای $H\oplus K$ نیست. بنابراین برای ثابت $j\in\mathbb{N}$ و به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ داریم

$$\Gamma_i(-e_j\oplus h_j) = ۰$$

ولی

$$-e_j\oplus h_j \neq ۰.$$

مثال ۵.۳.۴. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ به ترتیب دو قاب در فضای هیلبرت H و K باشند. برای $n>۱$ و به ازای هر $i\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $H_i=\mathbb{C}^n$ و عملگرهای زیر را تعریف می‌کنیم

$$\Lambda_i : H \to \mathbb{C}^n, \qquad \Lambda_i f = (\langle f, f_i\rangle_H, ۰, \cdots, ۰)\,,$$

$$\Theta_i : K \to \mathbb{C}^n, \qquad \Theta_i g = \frac{\langle g, g_i\rangle_K}{\sqrt{n-۱}}(۰, ۱, ۱, \cdots, ۱).$$

آنگاه $\Lambda=\{\Lambda_i\in B(H,\mathbb{C}^n) : i\in\mathbb{N}\}$ و $\Theta=\{\Theta_i\in B(K,\mathbb{C}^n) : i\in\mathbb{N}$ به ترتیب دو g-قاب برای H و K هستند. واضح است که Λ و Θ قویاً مجزا هستند، در حالی‌که زوج Λ و Θ مکمل نیستند، زیرا $\{\delta_{i۲}(۰,۱,۲,۰,\cdot,۰)\}_{i\in\mathbb{N}}\in\widehat{H}$ ولی $\{\delta_{i۲}(۰,۱,۲,۰,\cdot,۰)\}_{i\in\mathbb{N}}$ به $RangeT^*_\Lambda + RangeT^*_\Theta$ تعلق ندارد.

مثال ۶.۳.۴. فرض کنید $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ به ترتیب دو پایه یکامتعامد برای فضای هیلبرت H و K باشند. برای هر $i\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $H_i=\mathbb{C}^{۴}$ و عملگرهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$\Lambda_i : H \to \mathbb{C}^{۴}, \qquad \Lambda_i f = (\langle f, e_{۲i}\rangle_H, \langle f, e_{۲i-۱}\rangle_H, ۰, ۰)\,,$$

و

$$\Theta_i : K \to \mathbb{C}^{۴}, \qquad \Theta_i g = (۰, ۰, \langle g, h_{۲i}\rangle_K, \langle g, h_{۲i-۱}\rangle_K)\,.$$

در این‌صورت $\Lambda=\{\Lambda_i\in B(H,\mathbb{C}^{۴}) : i\in\mathbb{N}\}$ و $\Theta=\{\Theta_i\in B(K,\mathbb{C}^{۴}) : i\in\mathbb{N}$ به ترتیب دو g-قاب پارسوال برای H و K هستند. واضح است که Λ و Θ قویاً مجزا هستند زیرا

$RangT_{\Lambda}^{*} \perp RangT_{\Theta}^{*}$. حال اگر اگر $\{(c_{1,i}, c_{2,i}, c_{3,i}, c_{4,i})\} \in \widehat{H}$ و

$$f = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_{1,i}e_{2,i} + c_{2,i}e_{2i-1}, \qquad g = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_{3,i}h_{2,i} + c_{4,i}h_{2i-1},$$

آنگاه

$$\{\Lambda_i f\}_{i\in\mathbb{N}} = \{(c_{1,i}, c_{2,i}, 0, 0)\}_{i\in\mathbb{N}}, \qquad \{\Theta_i g\}_{i\in\mathbb{N}} = \{(0, 0, c_{3,i}, c_{4,i})\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

بنابراین

$$\{\Lambda_i f\}_{i\in\mathbb{N}} + \{\Theta_i g\}_{i\in\mathbb{N}} = \{(c_{1,i}, c_{2,i}, c_{3,i}, c_{4,i})\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

این بدین معنی است که

$$RangT_{\Lambda}^{*} + RangT_{\Theta}^{*} = \widehat{H}.$$

در نتیجه زوج Λ و Θ مکمل قوی هستند. همچنین اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ در نظر بگیریم

$$\Gamma_i : H \oplus K \to \mathbb{C}^4, \qquad \Gamma_i(f \oplus g) = (\langle f, e_{2i}\rangle_H, \langle f, e_{2i-1}\rangle_H, \langle g, h_{2i}\rangle_K, \langle g, h_{2i-1}\rangle_k),$$

آنگاه $\Gamma = \{\Gamma_i \in B(H \oplus K, \mathbb{C}^4) : i \in \mathbb{N}\}$ یک g-پایه یکا متعامد برای $H \oplus K$ است.

۴.۴ اتساع g-قاب‌های دوگان

گزاره ۱.۴.۴. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ g-قاب‌های دوگان برای H باشند. همچنین $\Psi = \{\Psi_i \in B(K, H_i) : i \in I\}$ و $\Phi = \{\Phi_i \in B(K, H_i) : i \in I\}$ g-قاب‌های دوگان برای K باشند. اگر Λ و Θ و نیز Ψ و Φ قویاً مجزا باشند، آنگاه $\Gamma = \{\Gamma_i \in B(H \oplus K, H_i) : i \in I\}$ و $\Delta = \{\Delta_i \in B(H \oplus K, H_i) i \in I\}$ g-قاب‌های دوگان برای $H \oplus K$ هستند، به طوری‌که به ازای هر $i \in I$ داریم

$$\Gamma_i(f \oplus g) = \Lambda_i f + \Psi_i g, \qquad \Delta_i(f \oplus g) = \Theta_i f + \Phi_i g.$$

و اگر Γ یک g-پایه ریس برای $H \oplus K$ باشد آنگاه Δ نیز یک g-پایه ریس برای $H \oplus K$ است.

برهان. رجوع شود به گزاره (۳.۱) مرجع [۱]. □

مثال ۲.۴.۴. فرض کنید $F = \{f_i\}_{i\in I}$ و $G = \{g_i\}_{i\in I}$ به ترتیب قاب‌هایی برای فضای هیلبرت H و K باشند. به‌ازای هر $i \in I$ قرار می‌دهیم $H_i = \mathbb{C}^2$ و عملگرهای Λ_i و Θ_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Lambda_i : H \to \mathbb{C}^2, \qquad \Lambda_i f = (\langle f, f_i\rangle_H, 0),$$

و

$$\Theta_i : H \to \mathbb{C}^2, \qquad \Theta_i f = \left(\langle S_F^{-1} f, f_i\rangle_H, 0\right).$$

آنگاه $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, \mathbb{C}^2) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(H, \mathbb{C}^2 : i \in I\}$ g-قاب‌هایی برای H هستند. و به‌ازای هر $f \in H$ داریم

$$\sum_{i\in I} \Lambda_i^{*}\Theta_i f = \sum_{i\in I} \Lambda_i^{*}\left(\langle S_F^{-1} f, f_i\rangle_H, 0\right) = \sum_{i\in I} \langle S_F^{-1} f, f_i\rangle_H, f_i = f.$$

بنابراین Λ و Θ g -قاب‌های دوگان برای H هستند. همچنین برای هر $i \in I$ تعریف می‌کنیم

$$\psi_i : K \to \mathbb{C}^2, \qquad \psi_i g = (0, \langle g, g_i\rangle_K),$$

و

$$\phi_i : K \to \mathbb{C}^2, \qquad \phi_i g = \left(0, \langle S_G^{-1} g, g_i\rangle_k\right).$$

آنگاه $\psi = \{\psi_i \in B(K, \mathbb{C}^2) : i \in I\}$ و $\phi = \{\phi_i \in B(K, \mathbb{C}^2) : i \in I\}$ g-قاب‌هایی برای K هستند. به‌ازای هر $g \in K$ داریم

$$\sum_{i\in I} \psi_i^* \phi_i g = \sum_{i\in I} \psi_i^* \left(0, \langle S_G^{-1} g, g_i\rangle_K\right) = \sum_{i\in I} \langle S_G^{-1} g, g_i\rangle_K g_i = g.$$

بنابراین ψ و ϕ g- قاب‌های دوگان برای K هستند. از سوی دیگر Λ و Θ و نیز ψ و ϕ قویاً مجزا هستند. و برای هر $i \in I$ عملگرهای Γ_i و Δ_i را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Gamma_i : H \oplus K \to \mathbb{C}^2, \qquad \Gamma_i(f \oplus g) = (\langle f, f_i\rangle_H, \langle g, g_i\rangle_K),$$

و

$$\Delta_i : H \oplus K \to \mathbb{C}^2, \qquad \Delta_i(f \oplus g) = \left(\langle S_F^{-1} f, f_i\rangle_H, \langle S_G^{-1} g, g_i\rangle_k\right).$$

آنگاه به‌ازای هر $i \in I$ داریم

$$\Gamma_i^*(c_1, c_2) = c_1 f_i \oplus c_2 g_i,$$

و به‌ازای هر $f \oplus g \in H \oplus K$ داریم

$$\sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Delta_i (f \oplus g) = f \oplus g.$$

که گزاره ۱.۴.۴ این مطلب را تایید می‌کند.

فرض کنید $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ یک پایه یکا متعامد برای H_i برای هر $i \in I$ باشد. طبق گزاره(۲.۳) مرجع [۲۸] $\{E_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ یک پایه یکامتعامد برای $\widehat{H}$ است، به طوری‌که

$$(E_{ij})_k = \begin{cases} e_{ij} & (i = k) \\ 0 & (i \neq k.) \end{cases}$$

فرض کنید M و N دو زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشند، همچنین اگر P و Q به ترتیب تصاویر متعامد برای H به روی M و N باشند. در این‌صورت،

$$\|P - Q\| = max\left\{\sup_{g\in M, \|g\|=1} \|Q^\perp g\|, \sup_{h\in N, \|h\|=1} \|P^\perp h\|\right\}.$$

گزاره ۳.۴.۴. اگر $F = \{f_i\}_{i\in I}$ و $G = \{g_i\}_{i\in I}$ قاب‌های دوگان برای فضای هیلبرت H باشند، و P و Q به ترتیب تصاویر متعامد از $l_2(I)$ به روی $RangT_F^*$ و $RangT_G^*$ باشند، آنگاه داریم

۱. به‌ازای هر $i \in I$، $T_F^* S_F^{-1} f_i = P e_i$،

۲. $PT_F^* = T_F^* S_F^{-1}$.

بنابراین $P|_{Q(l_2(I))} : Q(l_2(I)) \to P(l_2(I))$ یک ایزومورفیسم است، و بطور مشابه $P^{\perp}|_{Q\perp(l_2(I))} : Q \perp (l_2(I)) \to P \perp (l_2(I))$ نیز یک ایزومورفیسم است.

برهان. رجوع شود به گزاره ۳ − ۷ مرجع [۴]. □

حال این گزاره را برای g-قاب‌ها تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۴.۴.۴. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ g-قاب‌های دوگان برای H باشند. اگر P و Q به ترتیب تصاویر متعامد از $\widehat{H}$ به روی $RangT^*_{\Lambda}$ و $RangT^*_{\Theta}$ باشند، آنگاه داریم

۱. برای هر $i \in I$ و هر $j \in J_i$ داریم $T^*_{\Theta}S^{-1}_{\Theta}\Theta^*_i e_{ij} = QE_{ij}$.

۲. $QT^*_{\Lambda} = T^*_{\Theta}S^{-1}_{\Theta}$.

بنابراین $Q|_{P(\widehat{H})} : P(\widehat{H}) \to Q(\widehat{H})$ ایزومورفیسم است، به طور مشابه $Q^{\perp}|_{P^{\perp}(\widehat{H})} : P^{\perp}(\widehat{H}) \to Q^{\perp}(\widehat{H})$ نیز یک ایزومورفیسم است.

برهان. رجوع شود به گزاره (۳.۳) مرجع [۱]. □

قضیه ۵.۴.۴. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ و $\Theta = \{\Theta_i \in B(H, H_i) : i \in I\}$ g-قاب‌های دوگان برای H روی $\{H_i\}_{i\in I}$ باشند. در این‌صورت یک فضای هیلبرت M و $H \subset M$ همچنین یک g-پایه ریس مانند $\Gamma = \{\Gamma_i \in B(M, H_i) : i \in I\}$ برای M موجود است به طوری‌که به‌ازای هر $i \in I$ داریم $\Lambda_i = \Gamma_i P_H$ و $\Theta_i = \tilde{\Gamma}_i P_H$، که P_H تصویر یکامتعامد از M به روی H است و $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\Gamma}_i \in B(M, H_i) : i \in I\}$ g-قاب دوگان متعارف Γ باشد.

برهان. فرض کنید P و Q به ترتیب تصاویر متعامد از $\widehat{H}$ به روی $RangeT^*_{\Lambda}$ و T^*_{Θ} باشند. حال M را به‌صورت زیر در نظر می‌گیرم

$$M = H \oplus Q^{\perp}(\widehat{H}).$$

فرض کنید $T = Q^{\perp}|_{P^{\perp}(\widehat{H})}$ در این‌صورت طبق گزاره ۴.۴.۴، T یک ایزومورفیسم از $P^{\perp}(\widehat{H})$ به روی $Q^{\perp}(\widehat{H})$. اگر $S = T^{-1}$، آنگاه $Q^{\perp}S = I_{Q^{\perp}(\widehat{H})}$. در واقع، اگر $\{g_i\}_{i\in I} \in Q^{\perp}(\widehat{H})$، آنگاه وجود دارد $\{h_i\}_{i\in I} \in P^{\perp}(\widehat{H})$ به طوری‌که

$$\{g_i\}_{i\in I} = T\{h_i\}_{i\in I} = Q^{\perp}\{h_i\}_{i\in I}.$$

بنابراین

$$Q^{\perp}S\{g_i\}_{i\in I} = Q^{\perp}\{h_i\}_{i\in I} = \{g_i\}_{i\in I}.$$

به‌ازای هر $i \in I$ عملگر زیر را تعریف می‌کنیم

$$\varphi_i : Q^{\perp}(\widehat{H}) \to H_i, \qquad \varphi_i(g) = \sum_{j\in J_i} \langle g, Q^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}} e_{ij}.$$

آنگاه $\varphi=\{\varphi_i\in B(Q^{\perp}(\widehat{H}),H_i): i\in I\}$ یک g-قاب پارسوال برای $Q^{\perp}(\widehat{H})$ است. زیرا

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\|\varphi_i g\|_i^۲&=\sum_{i\in I}\left\|\sum_{j\in J_i}\langle g,Q^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}e_{ij}\right\|_i^۲\\&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle g,Q^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}|_i^۲\\&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle Q^{\perp}g,E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}|_i^۲\\&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle g,E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}|_i^۲=\|g\|^۲.\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم Θ و φ قویاً مجزا هستند. زیرا برای هر $g\in Q^{\perp}(\widehat{H}), f\in H$ داریم

$$\begin{aligned}\langle\{\Theta_i f\}_{i\in I},\{\varphi_i g\}_{i\in I}\rangle_{\widehat{H}}&=\sum_{i\in I}\langle\Theta_i f,\varphi_i g\rangle_i\\&=\sum_{i\in I}\left\langle\sum_{j\in J_i}\langle\Theta_i f,e_{ij}\rangle_i e_{ij},\sum_{k\in J_i}\langle g,Q^{\perp}E_{ik}\rangle_{\widehat{H}e_{ik}}\right\rangle_i\\&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle\Theta_i f,e_{ij}\rangle_i\overline{\langle g,Q^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}}\\&=\left\langle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle\Theta_i f,e_{ij}\rangle_i Q^{\perp}E_{ij},g\right\rangle_{\widehat{H}}\\&=\langle Q^{\perp}T_{\Theta}^{*}f,g\rangle_{\widehat{H}=۰}.\end{aligned}$$

حال عملگر کران‌دار زیر را برای هر $i\in I$ در نظر می‌گیریم

$$\psi_i:Q^{\perp}(\widehat{H})\to H_i,\qquad \psi_i(g)=\sum_{j\in J_i}\langle g,S^{*}P^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}e_{ij}.$$

بنابراین برای هر $g\in Q^{\perp}(\widehat{H})$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\|\psi_i g\|_i^۲&=\sum_{i\in I}\left\|\sum_{j\in J_i}\langle g,S^{*}P^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}e_{ij}\right\|_i^۲\\&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle g,S^{*}P^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}|_i^۲\\&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle Sg,P^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}|_i^۲\\&=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle Sg,E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}|_i^۲=\|Sg\|^۲.\end{aligned}$$

از این رو
$$\frac{1}{\|S^{-1}\|^2}\|g\|^2 \leqslant \sum_{i\in I}\|\psi_i g\|_i^2 \leqslant \|S\|^2\|g\|^2, \qquad g\in Q^{\perp}(\widehat{H}).$$
در نتیجه $\psi=\{\psi_i\in B(Q\perp(\widehat{H}),H_i): i\in I\}$ یک g-قاب برای $Q^{\perp}(\widehat{H})$ است. همچنین Λ و ψ قویاً مجزا هستند، زیرا برای هر $f\in H, g\in Q^{\perp}(\widehat{H})$ داریم
$$\begin{aligned}
\langle\{\Lambda_i f\}_{i\in I},\{\psi_i g\}_{i\in I}\rangle_{\widehat{H}} &= \sum_{i\in I}\langle\Lambda_i f,\psi_i g\rangle_i\\
&= \sum_{i\in I}\left\langle\sum_{j\in J_i}\langle\Lambda_i f,e_{ij}\rangle_i e_{ij},\sum_{k\in J_i}\langle g,S^*P^{\perp}E_{ik}\rangle_{\widehat{H}}e_{ik}\right\rangle_i\\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle\Lambda_i f,e_{ij}\rangle_i\overline{\langle g,S^*P^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}}\\
&= \left\langle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle\Lambda_i f,e_{ij}\rangle_i P^E_{ij},Sg\right\rangle_{\widehat{H}}\\
&= \langle P^{\perp}T^*_{\Lambda}f,Sg\rangle_{\widehat{H}} = \langle 0,Sg\rangle = 0.
\end{aligned}$$
ادعا می‌کنیم φ و ψ g-قاب‌های دوگان برای $Q^{\perp}(\widehat{H})$ هستند. زیرا برای هر $g\in Q^{\perp}(\widehat{H})$ داریم
$$\begin{aligned}
\sum_{iI}\varphi_i^*\psi_i g &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\left\langle\sum_{k\in J_i}\langle g,S^*P^{\perp}E_{ik}\rangle_{\widehat{H}}e_{ik},e_{ij}\right\rangle_i Q^{\perp}E_{ij}\\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle g,S^*P^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}Q^{\perp}E_{ij}\\
&= Q^{\perp}\left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle Sg,P^{\perp}E_{ij}\rangle_{\widehat{H}}E_{ij}\right) = Q^{\perp}Sg = g.
\end{aligned}\tag{۵.۴}$$
توجه کنیدکه در مساوی ۵.۴ از رابطه زیر استفاده شده است
$$\varphi_i^* g_i = \sum_{j\in J_i}\langle g_i,e_{ij}\rangle_i Q^{\perp}E_{ij}, \qquad i\in I, g_i\in H_i. \tag{۶.۴}$$
طبق گزاره ۱.۴.۴ داریم $\Gamma=\{\Gamma_i\in B(M,H_i): i\in I\}$ و $\Delta=\{\Delta_i\in B(M,H_i): i\in I\}$ g-قاب‌های دوگان برای M است و برای هر $i\in I$ عملگرهای Γ_i و Δ_i را به صورت زیر تعریف می‌شود
$$\Gamma_i: M\to H_i, \qquad \Gamma_i(f\oplus g)=\Lambda_i f+\varphi_i g,$$
و
$$\Delta_i: M\to H_i, \qquad \Delta_i(f\oplus g)=\Theta_i f+\psi_i g.$$
حال طبق گزاره ۱.۴.۴ نشان دهیم Γ یک g-پایه ریس است. کافیست نشان دهیم عملگر ترکیب T_Γ یک به یک است. فرض کنید $g=\{g_i\}_{i\in I}\in\widehat{H}$ و $T_\Gamma(\{g_i\})=0$ در این‌صورت
$$T_\Gamma(\{g_i\}) = \sum_{i\in I}(\Lambda_i^* g_i\oplus\varphi_i^* g_i) = \left(\sum_{i\in I}\Lambda_i^* g_i\right)\oplus\left(\sum_{i\in I}\varphi_i^* g_i\right) = 0. \tag{۷.۴}$$

از این رو $g=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle g,E_{ij}\rangle E_{ij}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle g_i,e_{ij}\rangle E_{ij}$، از طرفی ۶.۴ و ۷.۴ نتیجه می‌دهد که

$$Q^{\perp}(g)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\langle g_i,e_{ij}\rangle_i Q^{\perp}E_{ij}=\circ. \tag{۸.۴}$$

همچنین ۷.۴ نشان می‌دهد $\sum_{i\in I}\Lambda_i^* g_i=\circ$. بنابراین به‌ازای هر $f\in H$

$$\circ=\left\langle \sum_{i\in I}\Lambda_i^* g_i,f\right\rangle_H=\sum_{i\in I}\langle g_i,\Lambda_i f\rangle_i=\langle g,\{\Lambda_i f\}_{i\in I}\rangle_{\widehat{H}}.$$

و این بدان معنی است $g\in P^{\perp}(\widehat{H})$ یا $P^{\perp}g=g$. بنابراین طبق ۸.۴ داریم $Q\perp P^{\perp}g=Q^{\perp}g=\circ$. اما طبق گزاره ۴.۴.۴ داریم $Q\perp|_{P^{\perp}(\widehat{H})}:P^{\perp}(\widehat{H})\to Q^{\perp}(\widehat{H})$ یک به یک است، بنابراین $g=p^{\perp}g=\circ$. پس $\Gamma=\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g پایه ریس برای M است و طبق گزاره ۱.۴.۴ $\Delta=\{\Delta_i\}_{i\in I}$ نیز یک g-پایه ریس برای M است و طبق گزاره ۱۲ مرجع [۲] $\Delta_i=\tilde{\Gamma}_i$. لذا برای هر $i\in I$ داریم

$$\Lambda_i=\Gamma_i P_H,\qquad \Theta_i=\tilde{\Gamma}_i P_H.$$

□

مراجع

[1] Abdollahpour, M.R., Dilation of dual g-frames to dual g-Riesz bases, Banach J. Math. Anal. 9, (2015), no. 1, 54–66.

[2] Abdollahpour, M.R. and Bagarello, F., On some properties of g-frames and g-coherent states, Il Nouvo Cimento B 125, (2010), no. 11, 1327–1342.

[3] Abdollahpour, M.R. and Najati, A., Besselian g-frames and near g-Riesz bases, Appl. Anal. Discrete Math. 5, (2011), 259-270 .

[4] Casazza, P., Han, D., Larson, D., Frames in Banach spaces. Contemp. Math. 247, (1999), 149–181.

[5] Christensen, O., An Introduction to Frames and Riesz Bases. Birkh¨auser, Boston (2002).

[6] Duffin, R., Schaeffer, A., A class of nonhamonic Fourier series, Am. Math. 72, (1952), 341-366.

[7] Folland, Gerald B., Real Analysis Modern Techniques and Their Applications (Second Edition), A Wiley-Interscience publication, Printed in the United States of America (1999).

[8] Frank, M., Larson, D., Modular frames for Hilbert C^*-modules and symmetric approximation of frames, Proc. SPIE 4119, (2000), 325–336.

[9] Frank, M., Larson, D., Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras. J. Oper.Theory 48, (2002), 273–314.

[10] Han, D., Dilation of dual frame pairs in Hilbert C^*-modules, Duke Math. J., 1(2013), 241-250.

[11] Han, D., Jing, W., Larson, D., Mohapatra, R., Riesz bases and their dual modular frames in Hilbert C^*-modules. J. Math. Anal. Appl. 343, (2008), 246.256.

[12] Han, D., Jing, W., Mohapatra, R., Perturbation of frames and Riesz bases in Hilbert C^*-modules. Linear Algebra Appl. 431, (2009), 746–759.

[13] Han, D., Larson, D., Frames, bases and group representations. Mem. Am. Math.Soc. 147(697), (2000), 1–94.

[14] Jing, W., Hilbert C^*-Modules, Ph. D. Thesis, University of Central Florida, Orlando (2006).

[15] Jing, W., Han, D., Mohapatra, R., Structured Parseval frames in Hilbert C^*-modules. Contemp. Math. 414,(2006), 275–287.

[16] Kasparov, G., Hilbert C^*-modules: the theorem of Stinespring and Voiculescu. J. Oper. Theory 4, (1980), 133-150.

[17] Lance, E., Hilbert C^*-modules—a Toolkit for Operator Algebraists. London Mathematical Society lecture Note Series, vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[18] Li, H., A Hilbert C^*-module admitting no frames. Bull. Lond. Math. Soc. 43, (2010), 388–394.

[19] Li, J.Z and Zhu. Y.C, Exact g-frames in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 374, (2011), 201–209.

[20] Manuilov, V., Troisky, E., Hilbert C^*-Modules. American Mathematical Society,Providence (2005).

[21] Murphy, Gerard. J, *C^*-algebras and operator theory*, Mathematics Dep. University college Cork, Ireland (1990).

[22] Najati, A., Faroughi, M.H., and Rahimi, A., G-frames and stability of g-frames in Hilbert spaces, Methods Funct. Anal. Topology 14, (2008), 271–286.

[23] Packer, J., Rieffel, M., Wavelet filter functions, the matrix completion problem, and projective modules over $C(\mathbb{T}^n)$. J. Fourier Anal. Appl. 9, (2003), 101–116.

[24] Packer, J., Rieffel, M., Projective multi-resolution analyses for $L^۲(\mathbb{R}^۲)$. J. Fourier Anal. Appl. 10, (2004), 439–464.

[25] Paley, R., Wiener, N., Fourier Transforms in the Complex Domains, AMS Colloquium Publications, vol. 19. American Mathematical Society, Providence (1987)

[26] Paschke, W., Inner product modules over B^*-algebras, Trans. Am. Math. Soc.182, (1973), 443–468.

[27] Raeburn, I., Thompson, S., Countably generated Hilbert modules, the Kasparov stabilization theorem, and frames in Hilbert modules. Proc. Am. Math. Soc. 131, (2003), 1557–1564.

[28] Rahimi, A., Radjavi, H., Multipliers of generalized frames in Hilbert spase, Bull. Iranian Math. Soc. Vol. 37 No. 1 (2011), pp 63-80.

[29] Sun. W, G-frames and g-Riesz bases, J. Math. Anal. Appl. 322, (2006), 437–452 .

[30] Sun. W, Stability of g-frames, J. Math. Anal. Appl. 326, (2007), 858–868 .

[31] Wegge-Olsen, N., K-Theory and C^*-Algebras—a Friendly. Approach Oxford University Press, Oxford (1993).

[32] Wood, P., Wavelets and Hilbert modules. J. Fourier Anal. Appl. 10, (2004), 573–598.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اصل کران‌داری یکنواخت	Uniform boundedness principle
ایده آل	Ideal
برگشت	Involution
برو	Surjective
تابع اندازه پذیر	Measurable function
تابعک	Functional
تابعک خطی کراندار	Bounded linear functional
تابع حقیقی مقدار	Real-valued function
تصویر	Image
تصویر متعامد	Orthogonal projection
پایه	Basis
پایه ریس	Riesz bases
پایه متعامد یکه	Orthogonal bases
حلقه	Ring
خودالحاق	Self-adjoint
دنباله بسل	Bessel sequence
دوسوئی	Bijective
سیستم متعامد	Orthogonal system
شمارا تولید شده	Countably generated
طیف	Spectrum
عملگر تجزیه	Analysis operator
عملگر ترکیب	Synthesis operator
عملگر خطی کراندار	Bounded linear operatoru
عملگر قاب	Frame operator
عملگر مزدوج باناخ	Banach conjugate operator

فضای اندازه .... Measure space
فضای هیلبرت .... Hilbert space
فضای نرم‌دار .... Normed space
فضای دوگان .... Dual space
فضای موضعاً فشرده هاسدورف .... Locally compact Hausdorff space
قاب .... Frame
قاب پارسوال .... Parseval frame
قاب چسبان یا تنگ .... Tight frame
قاب کانونی دوگان .... Canonical dual frame
قضیه فیثاغورث .... Pythagorean theorem
قضیه نویمان .... Neumann theorem
کران‌دار .... Bounded
گروه آبلی .... Abelian group
متناهیاً تولید شده .... Finitely generated
مثبت .... Positive
مستقل خطی .... Linearly independent
معکوس‌پذیر .... Invertible
A-مدول ضرب داخلی .... Inner-product A-module
نامساوی کشی-شوارتز .... Cauchy-Schwarz inequality
نرم .... Norm
نرمال .... Normal
وابسته خطی .... Linearly dependent
یکانی .... Unitary
یک به یک .... Injection

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian group	گروه آبلی
Additivity	جمع پذیری
Analysis operator	عملگر تجزیه
Basis	پایه
Bessel sequence	دنباله بسل
Bijective	دوسوئی
Bounded	کران‌دار
Bounded linear functional	تابعک خطی کران‌دار
Bounded linear operator	عملگر خطی کران‌دار
Canonical dual frame	قاب کانونی دوگان
Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی–شوارتز
Countably generated	تولید شده شمارش‌پذیر
Dual space	فضای دوگان
Finitely generated	متناهیاً تولیدشده
Frame	قاب
Frame operator	عملگر قاب
Hilbert C^*-Modules	C^*–مدول‌های هیلبرت
Hilbert space	فضای هیلبرت
Ideal	ایده آل
Image	تصویر
Injection	یک به یک
Inner-product A-module	A–مدول ضرب داخلی
Inner product space	فضای ضرب داخلی
Invertible	معکوس‌پذیر
Involution	برگشت

وابسته خطی .... Linearly dependent
تابعک خطی .... Ltinear Functional
مستقل خطی .... Linearly independent
عملگر خطی .... Linear operator
فضای هاسدورف موضعاً فشرده .... Locally compact Hausdorff space
فضای اندازه .... Measurable function
قضیه نیومان .... Neumann theorem
نرم .... Norm
نرمال .... Normal
فضای نرم‌دار .... Normed space
پایه متعامد یکه .... Orthogonal bases
تصویر متعامد .... Orthogonal projection
سیستم متعامد .... Orthogonal system
قاب پارسوال .... Parseval frame
مثبت .... Positive
قضیه فیثاغورث .... Pythagorean theorem
تابع حقیقی مقدار .... Real-valued function
پایه ریس .... Riesz bases
حلقه .... Ring
خودالحاق .... Self-adjoint
طیف .... Spectrum
برو .... Surjective
عملگر ترکیب .... Synthesis operator
قاب محکم .... Tight frame
یکانی .... Unitary
اصل کران‌داری یکنواخت .... Uniform boundedness principle
فضای برداری .... Vector space

Aabstract

We investigate the geometric properties for Hilbert C^*-modular frames. We show that any dual frame pair in a Hilbert C^*-module is an orthogonal compression of a Riesz basis and its canonical dual for some larger Hilbert C^*-module. This generalizes the Hilbert space dual frame pair dilation theory due to Casazza, Han and Larson to dual Hilbert C^*-modular frame pairs. Additionally, for any Hilbert C^*-modular dual frame pair induced by a group of unitary operators, we show that there is a dilated dual pair which inherits the same group structure. Finaly we investigate the structure of g-frames on Hilbert spaces.

Keywords: Dilation, Frame, Riesz basis, Bessel sequence, Hilbert C*-modular, Hilbert space, g-Frame, g-Riesz basis, g-Bessel sequence

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Dilation of Dual Frame Pairs in Hilbert C^*-Modules

Hamid Reza Heydari

Supervisors

Dr. Kamran Sharifi and Dr. Ali Reza Khoddami

2016