



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

فرآیند برآونی و فرایندهای دیفیوژن

فاطمه نژادی

استاد راهنما

خانم دکتر الهام دسترنج

۱۳۹۴

تقدیم به همه آنهایی که

ریاضی را دوست می دارند

تعمدنامه

اینجانب فاطمه یزدی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان فرآیند برآونی و فرایندهای دیفیوژن، تحت راهنمایی خانم دکتر الهام دسترنج متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه یزدی
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه ضمن بررسی فرایندهای مارکف و مارتینگل، فرایند دیفیوژن را معرفی و در ادامه فرایند برآونی را به عنوان مثالی از فرایند دیفیوژن مطرح و خواص آن از جمله زمان برخورد و قانون لگاریتم و توزیع ماکزیمم را بیان می‌کنیم و در آخر کاربردهایی برای فرایند برآونی می‌آوریم.

کلمات کلیدی: توزیع ماکزیمم، فرایند دیفیوژن، قانون لگاریتم، زمان برخورد، فرایند برآونی.

فهرست مطالب

۳	۱ تعاریف و مفاهیم آنالیز
۳	۱.۱ اندازه و اندازه پذیری
۶	۲.۱ نظریه احتمال
۷	۱.۲.۱ متغیر تصادفی-امید ریاضی
۹	۲.۲.۱ فرآیند تصادفی
۹	۳.۲.۱ امید شرطی
۱۰	۳.۱ فرایند مارکف
۱۰	۴.۱ مارتینگل
۱۳	۲ فرایند برآونی و فرایندهای دیفیوژن
۱۳	۱.۲ فرایند دیفیوژن
۱۳	۱.۱.۲ تعریف فرایند دیفیوژن
۱۴	۲.۲ توزیع نرمال
۱۶	۳.۲ ساختار فرایند برآونی از قدم زدن تصادفی متقارن ساده
۱۷	۴.۲ تعریف فرایند برآونی یک بعدی
۱۸	۵.۲ فرایند گاوسی
۱۹	۶.۲ فرایند برآونی به عنوان فرایند گاوسی
۲۰	۷.۲ زمان برخورد فرایند برآونی
۲۱	۸.۲ نتایج بیشتر در مورد زمان برخورد
۲۳	۹.۲ زمان برخورد فرایند برآونی دیررفت
۲۵	۱۰.۲ فرایند برآونی به عنوان یک فرایند مارکف
۲۵	۱۱.۲ فرایند برآونی به عنوان مارتینگل
۲۷	۱۲.۲ مشتق ناپذیری مسیرهای فرایند برآونی
۳۰	۱۳.۲ اصول فرایند برآونی
۳۰	۱۴.۲ قانون لگاریتم مکرر
۳۱	۱۵.۲ اصل پایایی
۳۲	۱۶.۲ مثال ها

۳۵	۳	انتگرال ایتو
۳۵	۱.۳	انتگرال ایتو
۳۷	۲.۳	فرمول ایتو
۴۳		مراجع
۴۵		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۴۷		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۴۹		نمایه

مقدمه

فرایندهای دیفیوژن پرکاربردترین و مهمترین فرایندها در آنالیز تصادفی و به ویژه ریاضیات مالی هستند. از جمله این فرایندها، فرایند برآونی است که در این پایان نامه در فصول ۲ و ۳ به آن پرداخته شده است. در فصل اول مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد نیاز در سایر فصول بیان و در فصل دوم به فرایندهای دیفیوژن و فرایندهای برآونی، فرایند گاوسی و خواص فرایند برآونی پرداخته شده است و در فصل آخر کاربردهایی برای آن ارائه شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم آنالیز

مقدمه

در این فصل به تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این رساله می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا تعاریف و مفاهیمی از نظریه اندازه و نظریه احتمال بیان می‌کنیم. مطالب ارائه شده در این بخش به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است از مراجع [۱۱]، [۹] و [۱۵] گرفته شده‌اند. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی V گوئیم هرگاه

$$0 \leq \|x\|, x \in V \quad 0.1$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R} \text{ و } x \in V \quad 0.2$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in V \quad 0.3$$

$$\|x\| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0. \quad 0.4$$

به $(V, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار می‌گوئیم. هرگاه V با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای متریک تام باشد، به آن فضای باناخ می‌گوئیم.

۱.۱ اندازه و اندازه پذیری

مفاهیمی که در این بخش و بخش بعد آمده از مرجع [۱۴] می‌باشد. فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی و C دسته ای ناتهی از زیر مجموعه های X باشد.

۱. C را یک نیم حلقه از زیر مجموعه های X گوئیم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو C برابر با اجتماع متناهی از اعضای دوبدو مجزای C باشد.

۲. C را یک حلقه از زیر مجموعه های X گوئیم اگر C تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳. C را یک نیم میدان (نیم جبر) از زیر مجموعه‌های X گوئیم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماع متناهی از اعضای دودو مجزای C باشد.

۴. C را یک σ -میدان از زیر مجموعه‌های X گوئیم اگر C تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر و مکمل بسته باشد

دسته‌های گوناگون از بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب‌های دکارتی آنها در سایر فضاها اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه هستند. فرض کنیم C دسته‌ای ناتهی و دلخواه از زیر مجموعه‌ها باشد منظور از یک اندازه روی C تابعی مانند μ با دامنه C است بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

$$(1) \text{ برای هر } A \text{ در } C, 0 \leq \mu(A) \leq \infty,$$

(۲) هرگاه $\{A_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دودو مجزای C باشد به طوری که $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in C$ آنگاه $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

فرض کنیم C دسته‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های X باشد. (برحسب رابطه‌ی شمول) کوچکترین σ -میدان شامل C از زیر مجموعه‌های X را σ -میدان تولید شده توسط C می‌نامیم و به صورت $\sigma(C)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(C)$ اشتراک تمام σ -جبرهای شامل C است. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و C دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد. σ -جبر تولید شده توسط C را σ -جبر بول گوئیم و با B نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت $[a, b]$ یا $[a, b)$ یا (a, b) که در آن a, b اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد B اند.

ملاحظه ۱.۱.۱. الف) بطور کلی در یک فضای توپولوژیکی σ -میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز σ -میدان بول می‌نامیم و با B نشان می‌دهیم.

ب) دسته‌ی مجموعه‌های بول، کوچکترین σ -میدانی است که حاوی همه‌ی مجموعه‌های باز است.

فرض کنیم C سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی C باشد. اندازه μ را روی C ، متناهی گوئیم هرگاه برای هر A در C ، $\mu(A) < \infty$ و σ -متناهی گوئیم هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq 1\}$ از اعضای C وجود داشته باشد به طوری که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n ، $\mu(A_n) < \infty$. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای σ -متناهی روی $\mathcal{H}$ باشد. برای زیر مجموعه‌ی دلخواه A از X اندازه خارجی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

ملاحظه ۲.۱.۱. الف) برای $I \in \mathcal{H}$ ، $\mu^*(I) = \mu(I)$

ب) اگر $\{A_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای دلخواه باشد آنگاه

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

زیر مجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یا μ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A)$$

ملاحظه ۳.۱.۱. الف) هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه‌پذیراند.

ب) اگر A نسبت به μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه B از X داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

منظور از یک فضای اندازه‌پذیر عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$ ، که متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند X و σ -میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های X می‌باشد. هر عضو A را یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر می‌نامیم. منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ یک اندازه روی σ -میدان $\mathcal{A}$ است. گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، تقریباً همه جا^۱ یا (a.e.) برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه‌پذیر و دارای اندازه‌ی μ صفر باشند. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, B)$ را اندازه‌پذیر یا $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $u \in B$ ، داشته باشیم

$$f^{-1}(u) := \{x \in X; f(x) \in u\} \in \mathcal{A}.$$

تابع $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, B)$ را در نظر بگیرید. σ -میدان $\mathcal{F}_Y$ تولید شده توسط Y ، کوچکترین σ -میدان روی Ω شامل مجموعه‌های

$$Y^{-1}(B); \quad B \in B,$$

می‌باشد، به عبارت دیگر

$$\mathcal{F}_Y = \{Y^{-1}(B); B \in B\}.$$

به وضوح Y نسبت به $\mathcal{F}_Y$ ، اندازه‌پذیر است.

انتگرال

اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σ -میدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تابع ساده تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد. می‌توان نوشت

^۱Almost everywhere

اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_i ها اندازه پذیراند. انتگرال φ نسبت به اندازه μ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می کنیم $\circ \times \infty = \circ$. فرض می کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A \varphi d\mu : \varphi \leq f \right\},$$

که در آن φ تابعی ساده و نامنفی است.

۲.۱ نظریه احتمال

فضای احتمال عبارت است از فضای اندازه $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به طوری که $P(\Omega) = 1$ را فضای نمونه، اعضای $\mathcal{F}$ را پیشامد و P را اندازه احتمال می نامیم. مجموعه $A \in \mathcal{F}$ را P -پوچ می نامیم هرگاه $P(A) = 0$. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را کامل یا تام می نامیم هرگاه $\mathcal{F}$ شامل تمام زیرمجموعه های هر مجموعه P -پوچ باشد. به روشنی، هر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را می توان با اضافه کردن زیر مجموعه های هر مجموعه P -پوچ به $\mathcal{F}$ کامل نمود. اگر $P(A) = 1$ می گوییم پیشامد A با احتمال ۱ رخ می دهد یا A قریب به یقین^۲ رخ می دهد. فرض کنید $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ، $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ ، ...، $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ فضاهای اندازه پذیر باشند. زیر مجموعه های $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ از $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ را برای $F_n \subseteq \Omega_n$ و $F_2 \subseteq \Omega_2$ ، $F_1 \subseteq \Omega_1$ ، $F_2 \in \mathcal{F}_2$ ، $F_1 \in \mathcal{F}_1$ ، $\dots$ ، $F_n \in \mathcal{F}$ راست گوشه ای اندازه پذیر می نامیم. دسته ای راست گوشه های اندازه پذیر، یک نیم میدان روی $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ است. σ -میدان تولید شده در $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ توسط نیم میدان راست گوشه های اندازه پذیر را σ -میدان حاصل ضربی نامیده و با نماد $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$ نشان می دهیم. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، P_i یک اندازه روی $\mathcal{F}_i$ باشد، اندازه P روی نیم حلقه راست گوشه های اندازه پذیر به صورت زیر تعریف می شود

$$P(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n) = P_1(F_1) \times P_2(F_2) \times \dots \times P_n(F_n).$$

گیریم $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ دسته ای از زیر σ -میدان های $\mathcal{F}$ باشد. σ -میدان الحاقی این دسته از σ -میدان ها به صورت زیر تعریف می شود

$$\bigvee_{\alpha \in I} U_\alpha = \sigma \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right)$$

از این پس، همه جا منظور از $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ -میدان مفروض روی آنها σ -میدان بورل است و $\mathcal{B}$ نماد نشانگر σ -میدان بورل روی $\mathbb{R}$ است.

^۲almost surely

فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه روی A باشند. اندازه μ_1 را نسبت به اندازه μ_2 مطلقاً پیوسته گوئیم و می‌نویسیم $\mu_1 \ll \mu_2$ ، هرگاه

$$\forall A \in A (\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0).$$

قضیه ۱۰.۲.۱ (مشتق رادن نیکودیم).^۳ فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه σ -متناهی روی (X, A) باشند به طوری که $\mu_1 \ll \mu_2$. تابع A -اندازه‌پذیر و μ_2 -انتگرال‌پذیر f روی X وجود دارد که $f \geq 0$ و

$$\forall A \in A, \quad \mu_1(A) = \int_A f \mu_2.$$

۱۰.۲.۱ متغیر تصادفی-امید ریاضی

در سراسر این رساله توپولوژی مفروض روی فضاهاى اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ -میدان مفروض روی آنها σ -میدان بورل است. اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضایی احتمال باشد، هر تابع حقیقی و اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ متغیر تصادفی نامیده می‌شود.

معمولاً برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Z, U, \dots$ استفاده می‌کنیم. بردار تصادفی n -بعدی $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ، تابعی است اندازه‌پذیر که دامنه‌ی آن فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مقادیر آن در $\mathbb{R}^n$ است یعنی برای هر $A \in \mathcal{B}_n$ داریم

$$\{\omega : \bar{X}(\omega) \in A\} = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in A\} \in \mathcal{F},$$

که در آن $\mathcal{B}_n$ ، σ -میدان بورل روی $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد، σ -میدان تولید شده توسط X که بانماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}_X$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\},$$

اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. تابع توزیع X که آن را با F_X نشان می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی x ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}.$$

که در آن P_X اندازه‌ی القاشده توسط X روی $\mathcal{B}$ است که توزیع متغیر تصادفی نامیده می‌شود. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. $\int_{\Omega} X dP$ را امید ریاضی X می‌گوئیم و با نماد $E(X)$ نشان می‌دهیم. امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی، مثل $g(X)$ بطور طبیعی تعریف می‌شود

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP.$$

واریانس متغیر تصادفی X را با $\sigma^2(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma^2(X) = E[(X - E(X))^2].$$

^۳Radon-Nikodym Derivation

به طور کلی اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه پذیر باشد و $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| P(\omega) < \infty$ آن گاه

$$E[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) P(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) P_X(x).$$

اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی را کواریانس می نامیم. (اگر دو متغیر یکی باشند کواریانس برابر واریانس خواهد شد) برای متغیرهای تصادفی X و Y که امید ریاضی آنها $E[X] = \mu$ و $E[Y] = \nu$ هستند کواریانس برابر است با

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[(X - \mu)(Y - \nu)]$$

چنانکه دو متغیر تصادفی ناهمبسته باشند کواریانس آنها صفر می شود. خواص کواریانس

$$1. \text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$$

$$2. \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$3. \text{ برای هر } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{cov}(X, a) = 0 \quad (آ)$$

$$\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y) \quad (ب)$$

$$\text{cov}(X + a, Y + b) = \text{cov}(X, Y) \quad (ج)$$

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد آنگاه $E(X^r)$ (که r یک عدد طبیعی است) را گشتاور مرتبه r ام پیرامون مبدا می گوئیم.

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد تابع مولد گشتاور X را با علامت $M_X(t)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

دو پیشامد A و B از فضای احتمال مفروض $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ مستقل است هرگاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

دو متغیر تصادفی $X, Y: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ را مستقل گوییم هرگاه σ -میدان های تولید شده توسط X و Y یعنی $\mathcal{F}_X$ و $\mathcal{F}_Y$ مستقل باشند، به این معنا که برای هر $A \in \mathcal{F}_X$ و $B \in \mathcal{F}_Y$ داشته باشیم

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$(\mathcal{F}_X = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\})$$

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

۲.۲.۱ فرآیند تصادفی

در سراسر این بخش فضای احتمال مفروض (Ω, F, P) است. همچنین σ -میدان مفروض روی فضاهای اقلیدسی σ -میدان بورل است. خانواده‌ی $\{X_t\}_{t \in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک (Ω, F, P) را **فرآیند تصادفی** می‌نامیم (مجموعه‌ی اندیس گذار I می‌تواند شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد). برای فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ ، و برای هر $\omega \in \Omega$ ، نگاشت $t \rightarrow X_t(\omega)$ را یک مسیر می‌نامیم. خانواده‌ی $\mathbb{F} = \{F_t, t \geq 0\}$ از زیر σ -میدان‌های F را **فیلتر** می‌نامیم هرگاه برای هر $s \leq t$ داشته باشیم $F_s \subseteq F_t$. گوییم فیلتر $\mathbb{F}$ در شرایط معمول صدق می‌کند هرگاه

• $\mathcal{F}_0$ شامل تمام مجموعه‌های P -پوچ باشد،

• $\mathbb{F}$ از راست پیوسته باشد، یعنی $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$.

فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار می‌گوییم هرگاه برای هر $t \geq 0$ ، $X_t \in F_t$ ؛ یعنی متغیر تصادفی X_t ، F_t -اندازه‌پذیر باشد. فرض کنید $\mathbb{G}$ و $\mathbb{F}$ دو فیلتر باشند. می‌گوییم فیلتر $\mathbb{G}$ از فیلتر $\mathbb{F}$ بزرگ‌تر است و می‌نویسیم $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ ، هرگاه

$$\forall t, \quad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t.$$

فیلتر طبیعی فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ، را کوچکترین فیلتر مانند $\mathbb{F} = \{F_t, t \geq 0\}$ می‌گیریم که در شرایط معمول صدق می‌کند و $\{X_t\}_{t \geq 0}$ نسبت به آن سازگار است (و برای هر $t \geq 0$ ، $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$).

۳.۲.۱ امید شرطی

فرض کنید (Ω, F, P) فضایی احتمال باشد و فرض کنید D زیر σ -میدانی از F و Y متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Y به شرط D یک متغیر تصادفی D -اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Y|D)$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall D \in \mathcal{D}, \quad \int_D E(Y|D) P = \int_D Y P.$$

برای متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر دلخواه، امید شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(Y|D) = E(Y^+|D) - E(Y^-|D),$$

که در آن برای هر ω ، $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), 0\}$ و $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), 0\}$.

خواص امید شرطی

۱- اگر $X \geq 0$ آن‌گاه $E(X|D) \geq 0$ a.s.

۲- a.s. $E(X + Y|D) = E(X|D) + E(Y|D)$.

۳- برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \quad \text{a.s.}$$

۴- اگر $D = \{\Omega, \emptyset\}$ آنگاه

$$E(X|D) = E(X), \quad \text{a.s.}$$

۵- اگر $D_1 \subseteq D_2$

$$E(E(X|D_2)|D_1) = E(X|D_1), \quad \text{a.s.}$$

۶-

$$E(E(X|D)) = E(X), \quad \text{a.s.}$$

۳.۱ فرایند مارکف

فرایند های مارکف رده ای مهم از فرایند های تصادفی هستند، یک فرایند تصادفی را مارکف گویند هرگاه آینده فرایند به گذشته آن بستگی نداشته باشد و اصطلاحاً آن را فرایند بی حافظه می گوئیم. شرط مارکف را برای $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

برای هر مقدار n و j و i و i_{n-1} و $\dots$ و i_0 . این احتمال که به آن احتمال تغییر وضعیت از i به j در یک گام (یا احتمال انتقال یک مرحله ای) گفته می شود، در حالت کلی به n بستگی دارد.

۴.۱ مارتینگل

فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ مارتینگل^۴ می نامیم هرگاه

(i) برای هر n ، X_n انتگرال پذیر باشد؛ یعنی برای هر n ، $E(|X_n|) < \infty$ ،

(ii) نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد،

(iii) برای هر n ، $E(X_{n+1}|F_n) = X_n$ ، a.s.

فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ قابل پیش بینی^۵ گوئیم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، متغیر تصادفی X_n ، $-F_{n-1}$ اندازه پذیر باشد. نگاشت $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ را زمان توقف (یا زمان مارکوف) نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ گوئیم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم

$$\{\tau \leq n\} \in F_n.$$

^۴Martingale

^۵Predictable

گزاره ۱.۴.۱. فرض کنید $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$. در این صورت τ یک زمان توقف است اگر و تنها اگر برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم

$$\{\tau = n\} \in F_n.$$

برهان. به [۱۵] مراجعه کنید. □

دنباله‌ی $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ از زمان‌های توقف را یک دنباله‌ی موضعی می‌نامیم هرگاه برای هر $n \geq 1$ ، $T_n \geq T_{n-1}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ a.s. گوئیم فرایند تصادفی $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ مارتینگل موضعی است اگر دنباله‌ای از زمان‌های توقف $T_n \uparrow T$ موجود باشد که $\{X_{t \wedge T_n}, t > 0\}$ یک مارتینگل باشد.

قضیه ۲.۴.۱. (توقف اختیاری)^۶

فرض کنید $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ مارتینگلی نسبت به فیلتر $\{F_n\}_n$ و τ یک زمان توقف نسبت به همان فیلتر باشد به طوری که داشته باشیم

$$P(\tau \in \mathbb{Z}^+) = 1.$$

۲- متغیر تصادفی انتگرال پذیر باشد،

$$E(X_n \chi_{\{\tau > n\}}) \rightarrow 0 \text{ وقتی که } n \rightarrow \infty.$$

در این صورت خواهیم داشت

$$E(X_\tau) = E(X_0)$$

برهان. به [۱۳] رجوع کنید. □

^۶Option Stopping theorem

فصل ۲

فرایند برآونی و فرایندهای دیفیوژن

۱.۲ فرایند دیفیوژن

در این بخش به معرفی فرایند دیفیوژن و پاره ای از خواص آن می‌پردازیم و در آخر مثالی برای آن ارائه می‌دهیم.

۱.۱.۲ تعریف فرایند دیفیوژن

فرایند مارکف $X = \{X_t; t \geq 0\}$ را فرایند دیفیوژن^۱ می‌نامیم هرگاه حدهای زیر در آن موجود باشد. برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $s \geq 0$ و $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|x-y| > \epsilon} P(s, x; t, y) dy = 0 \quad .1$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \epsilon} P(s, x; t, y) dy = \alpha(s, x) \quad .2$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \epsilon} (y-x)^2 P(s, x; t, y) dy = \beta^2(s, x) \quad .3$$

- فرایند دیفیوژن همیشه پیوسته است ولی لزوما مشتق پذیر نیست.
- پارامتر $\alpha(s, x)$ دیریفیت در زمان s و موقعیت x نامیده می‌شود.
- پارامتر $\beta^2(s, x)$ ضریب دیفیوژن در زمان s و موقعیت x نامیده می‌شود.

^۱Diffusion Process

مثال ۱.۱.۲. فرایند برآونی که در ادامه به آن خواهیم پرداخت را می‌توان به عنوان مثالی از فرایند دیفیوژن با دیریت $\alpha(s, x) = 0$ و پارامتر دیفیوژن $\beta(s, x) = 1$ در نظر گرفت.

در ادامه سعی داریم به فرایند برآونی و خواص و کاربردهای آن در زمینه های دیگر بپردازیم

۲.۲ توزیع نرمال

گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد یعنی Ω مجموعه ای ناتهی و σ -میدانی از زیرمجموعه های Ω و P اندازه احتمال روی آن است متغیر تصادفی $(\mathbb{R}, B) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F}, P) : X$ را نرمال یا دارای توزیع نرمال $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ می‌نامیم اگر توزیع X دارای چگالی زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

که در آن $\sigma > 0$ و m به ترتیب واریانس و میانگین X هستند به راحتی می‌توان نشان داد

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = m,$$

و همچنین

$$Var(X) = E[(X-m)^2] = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 f(x) dx = \sigma^2.$$

همچنین زمانی که $m = 0$ و $\sigma^2 = 1$ ، توزیع نرمال استاندارد را با نماد $\mathcal{N}(0, 1)$ نشان می‌دهیم سپس داریم

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}}$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y)^2}{2}} dy$$

قرار دهید $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ، تابع مولد گشتاور توزیع نرمال به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} M_X(s) &= E(e^{sX}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x) dx \\ &= e^{\frac{sm + s^2 \sigma^2}{2}}, \quad -\infty < s < \infty \end{aligned}$$

اگر $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ سپس $X = \sigma Z + m$ دارای توزیع $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ است. برعکس اگر $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ سپس $Z = \frac{(X - m)}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. برای این اساس، اگر $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ آنگاه

$$F(x) = P(X \leq x) = \Theta\left(\frac{(x - m)}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= E(e^{sZ}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2 - 2sx)}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-s)^2}{2}} e^{\frac{s^2}{2}} \right) dx \\ &= e^{\frac{s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{s^2}{2}} \end{aligned}$$

قضیه ۱.۲.۲. قضیه حد مرکزی^۲

اگر $\{X_i : i \geq 1\}$ خانواده ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل (*i.i.d.*) با میانگین متناهی m و واریانس متناهی σ^2 باشد، آنگاه

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - nm \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty;$$

که در آن $\xrightarrow{d}$ نماد نشانگر همگرایی در توزیع است یعنی عبارت اخیر به این معناست که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \Theta(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

اگر $m = 0$ و $\sigma^2 = 1$ آنگاه

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

به علاوه برای هر $c \neq 0$ ،

$$c\mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(0, c^2)$$

^۲central limit theorem

که در آن = نماد نشانگر معادل بودن است.
اگر $m = 0$ و $\sigma^2 = 1$ آنگاه

$$c \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} N(0, c^2)$$

۳.۲ ساختار فرایند برآونی از قدم زدن تصادفی متقارن ساده

قدم زدن تصادفی متقارن ساده ^۳ $\{R_n\}_{n \geq 0}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$\begin{cases} R_0 = 0 \\ R_n = \Delta_1 + \dots + \Delta_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad n \geq 1, \end{cases}$$

Δ_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (*i.i.d.*) هستند و برای آنها داریم

$$P(\Delta_i = -1) = P(\Delta_i = 1) = \frac{1}{2}, \quad i \geq 1,$$

در نتیجه

$$E(\Delta) = 0, \quad Var(\Delta) = 1.$$

در حقیقت برای R_n گام n ام حرکت است که در دقیقه n ام برداشته می شود و این گام با احتمال $\frac{1}{2}$ به جلو و با احتمال $\frac{1}{2}$ به عقب برداشته خواهد شد.

اگر عدد صحیح $k > 1$ ، به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود و اندازه ی گام ها کوتاه تر و زمان برداشتن گام بعدی سریع تر شود، یعنی در هر $\frac{1}{k}$ ام دقیقه و به اندازه ی $\frac{1}{\sqrt{k}}$ گام R_n ها، گام برداریم. در این صورت اگر برای $t = \frac{n}{k}$ ، $n > 1$ ، قرار می دهیم

$$B_k(t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{tk} \Delta_i,$$

(طبق قرارداد اگر tk عدد صحیح نباشد، آن را با بزرگترین عدد صحیح کمتر از آن جایگزین می کنیم.) زمانی که $k \rightarrow \infty$ ، گام های کوچک تبدیل به زنجیره و در نهایت فرایند $\{B_k(t) : t \geq 0\}$ همگرا به فرایند $\{B(t) : t \geq 0\}$ با نمونه های پیوسته خواهد شد که آن را فرایند برآونی ^۴ می نامند. برای هر k ثابت، عبارت

$$B_k(t) - B_k(s) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=sk}^{tk} \Delta_i, \quad 0 < t,$$

نمو فرایند در بازه زمانی $[s, t]$ نامیده می شود که توزیع آن تنها به طول $t - s$ بستگی دارد.

با توجه به اینکه Δ_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع هستند و توزیع نمو فرایند $\{B_k\}$ به توزیع آنها بستگی دارد بنابراین از حد این فرایند ($\{B_k\}$) زمانی که $k \rightarrow \infty$ این طور انتظار می رود که فرایند

^۳Simple symmetric random walk

^۴Brownian Motion

حاصل، نموهای ثابتی داشته باشد. به این معنی که توزیع هر نمو $B(t) - B(s)$ فقط به طول بازه زمانی $t - s$ بستگی داشته باشد.

بنابراین برای بازه های زمانی نامتداخل $(t_1, t_2], (t_2, t_3], \dots, (t_{k-1}, t_k]$ ، نموهای زیر مستقل خواهند بود.

$$B_k(t_k) - B_k(t_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=t_{k-1}k}^{t_k k} \Delta_i, \quad 0 < t,$$

$$B_k(t_k) - B_k(t_1) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=t_1 k}^{t_k k} \Delta_i, \quad 0 < t,$$

از طرف دیگر داریم $E(B_k(t)) = 0$ و $Var(B_k(t)) = \frac{[tk]}{k} \rightarrow t$ در نهایت مستقیما می توان از قضیه حد مرکزی با قرار دادن $n = tk, m = 0, \sigma^2 = 1, c = \sqrt{t}$ نتیجه گرفت که

$$B_k(t) = \sqrt{t} \left(\frac{1}{\sqrt{kt}} \sum_{i=1}^{tk} \Delta_i \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, t),$$

همچنین می توان نتیجه گرفت که برای هر $t > 0$ ، $B(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس t است. به طور مشابه، با استفاده از خاصیت نمو ثابت و مستقل، نتیجه می گیریم که $B(t) - B(s)$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ است. یعنی اگر $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ، آنگاه خواهیم داشت و

$$B(t_i) - B(t_{i-1}) \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

اگر $X(t) = \sigma B(t) + mt$ آن گاه $X(t) \sim \mathcal{N}(mt, \sigma^2 t)$ و می توان نشان داد نموهای $X(t) - X(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین $m(t - s)$ و واریانس $\sigma^2(t - s)$ هستند. زمانی که $\sigma^2 = 1$ و $m = 0$ فرایند حاصل را فرایند برآونی استاندارد می گوئیم.

۴.۲ تعریف فرایند برآونی یک بعدی

فرایند براونی یک فرایند تصادفی است، یعنی خانواده ای از متغیرهای تصادفی است که با مجموعه ای اعداد حقیقی نامنفی اندیس گذاری شده است و همگی متغیرهای تصادفی آن روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده اند. در ادامه خواهیم دید که این فرایند دارای خاصیت مارکوفی، گاوسی، مارتینگلی با نمونه های ایستا و مستقل است. همچنین دارای خاصیت پیوستگی مسیرها و مشتق ناپذیری در هر نقطه می باشد.

فرایند تصادفی $B = \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ را یک فرایند برآونی استاندارد^۵ گوئیم هرگاه

(الف) $B_0 = 0$

(ب) $B_t - B_s$ برای $s \leq t$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $t - s$ باشد،

^۵Standard Brownian motion

(ج) متغیرهای تصادفی $B(t_n) - B(t_{n-1}), \dots, B(t_3) - B(t_2), B(t_2) - B(t_1)$ برای هر $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, t \in \mathbb{R}$ مستقل باشند (در این حالت گوییم $B(t)$ دارای نمونه‌های مستقل است).

فرایند برآونی استاندارد را فرایند وینر^۶ نیز می‌گوییم.

۱.۴.۲. ملاحظه

۱. از (ب) نتیجه می‌شود که، $B_{s+t} - B_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس t است؛ بنابراین برای هر مجموعه بورل A داریم

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A e^{-x^2/2t} x.$$

از آنجا که داریم $B_t = B_{0+t} - B_0$ ، پس از (ب) نتیجه می‌شود که هر B_t دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس t است.

۲. ویژگی (ج) نتیجه می‌دهد که هر گردآیه از نمونه‌های

$$B_{t_1} - B_{s_1}, B_{t_2} - B_{s_2}, \dots, B_{t_n} - B_{s_n},$$

از هم مستقل هستند که در آن $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 \leq t_2 < \dots \leq s_n < t_n$

n تایی $(B_t^1, \dots, B_t^n)$ از فرایندهای برآونی مستقل $B_t^1, \dots, B_t^n$ (در $\mathbb{R}$) را یک فرایند برآونی n -بعدی در $\mathbb{R}^n$ (فرایند وینر n -بعدی در $\mathbb{R}^n$) می‌گوییم.

۵.۲. فرایند گاوسی

مفهوم فرایند گاوسی^۷ می‌تواند به عنوان تعمیم بی‌نهایت بعدی از توزیع نرمال چند متغیره نیز تعبیر شود. فرایند گاوسی $X_t, t \geq 0$ فرایند تصادفی است که برای هر افرازی از زمان که از بازه‌ی $[0, T]$ انتخاب می‌شود مانند $t_1, t_2, \dots, t_n = T, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$ ، مجموعه‌ی متغیرهای تصادفی

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$$

دارای توزیع نرمال باشند.

۱.۵.۲. ملاحظه. اگر $X_t, t \geq 0$ فرایند گاوسی باشد، آنگاه دترمینان آن به کمک تابع میانگین

$$m(t) = E(X(t))$$

و تابع کواریانس آن به صورت

$$\text{cov}(s, t) = E(X(s) - m(s)).(X(t) - m(t))$$

^۶Wiener process

^۷Gaussian process

بدست می‌آید. هم چنین تابع چگالی توام $X(t_1), \dots, X(t_n)$ به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$P\{X(t_1) \in dx_1, \dots, X(t_n) \in dx_n\} \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m(t)).\Sigma^{-1}.(x - m(t))^T\right\}$$

و ماتریس کواریانس به صورت زیر خواهد بود.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} cov(t_1, t_1) & cov(t_1, t_2) & \dots & cov(t_1, t_n) \\ cov(t_2, t_1) & cov(t_2, t_2) & \dots & cov(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cov(t_n, t_1) & cov(t_n, t_2) & \dots & cov(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

اگر x بردار سطری $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ، t بردار سطری به فرم $[t_1, t_2, \dots, t_n]$ باشد، $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ و $m(t) = [m(t_1), m(t_2), \dots, m(t_n)]$ آنگاه تابع مولد گشتاور به فرم زیر خواهد بود.

$$E \exp \left\{ \sum_{k=1}^n u_k X(t_k) \right\} = \exp \{ u.m(t)^T + \frac{1}{2} u.\Sigma.u^T \}.$$

۶.۲ فرایند برآونی به عنوان فرایند گاوسی

بردار $(B(t_1), \dots, B(t_n))$ دارای توزیع نرمال چند متغیره است. چون پیشامد

$$\{B(t_1) = x_1, \dots, B(t_n) = x_n\}$$

را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\{B(t_1) = x_1, B(t_2) - B(t_1) = x_2 - x_1, \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}\},$$

در نتیجه تابع چگالی توام $(B(t_1), \dots, B(t_n))$ برابر است با

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n),$$

که در آن

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

تابع چگالی $\mathcal{N}(\circ, t)$ است، در نتیجه فرایند برآونی مثالی از فرایند گاوسی با مسیرهای پیوسته خواهد بود.

از آنجا که توزیع نرمال چند متغیره به طور کامل توسط میانگین و کواریانس پارامترهای آن تعیین می‌شود، نتیجه می‌گیریم که فرایند گاوسی به طور کامل توسط میانگین و تابع کواریانس

$$m(t) = E(X(t)) \quad \text{و} \quad a(s, t) = cov(X(s), X(t)), \quad 0 \leq s \leq t.$$

تعیین می‌شود،

که برای فرایند برآونی استاندارد داریم: $a(s, t) = s$, $m(t) = 0$ و

$$\begin{aligned} \text{cov}(B(s), B(t)) &= \text{cov}(B(s), B(s) + B(t) - B(s)) \\ &= \text{cov}(B(s), B(s)) + \text{cov}(B(s), B(t) - B(s)) \\ &= \text{var}(B(s)) + 0 \\ &= s. \end{aligned}$$

مشابها فرایند برآونی، فرایند $X(t) = \sigma B(t) + mt$ فرایندی گاوسی با $m(t) = mt$ و $a(s, t) = \sigma^2 \min\{s, t\}$ است.

۷.۲ زمان برخورد فرایند برآونی

دو مقدار $a > 0$ و $b > 0$ و مجموعه دو عضوی $\{a, -b\}$ را در نظر بگیرید. قرار دهید

$$\tau = \min\{t \geq 0 : B(t) \in \{a, -b\}\},$$

τ اولین زمان برخورد فرایند برآونی^۸ با هر یک دو نقطه a, b خواهد بود.

اگر به مسأله‌ی قدم زدن تصادفی متقارن ساده‌ی $\{R_n\}_n$ ، برگردیم و احتمال برخورد به نقطه a (با شروع از $0 = R_0$)، (قبل از برخورد به نقطه $-b$) را p_a بنامیم خواهیم داشت

$$p_a = \frac{b}{a+b}$$

در نتیجه

$$\tau = \min\{n \geq 0 : R_n \in \{a, -b\} | R_0 = 0\},$$

و $p_a = P(R_\tau = a)$. به روشنی برای اینکه فرایند برآونی $\{B_k(t) : t \geq 0\}$ به a قبل از $-b$ برخورد کند باید قدم زدن تصادفی تصادفی زیر به a قبل از $-b$ برخورد کند.

$$R_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad n \geq 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$p_a = \frac{b\sqrt{k}}{a\sqrt{k} + b\sqrt{k}} = \frac{b}{a+b}.$$

در عبارت اخیر اگر k به سمت ∞ میل کند به احتمال برخورد فرایند برآونی به a قبل از $-b$ خواهیم رسید.

اگر قرار دهیم $p_a = P(B(\tau) = a)$ که $\tau = \min\{t \geq 0 : B(t) \in \{a, -b\} | B(0) = 0\}$ ، آنگاه

$$R_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad n \geq 0$$

^۸Hitting times for Brownian motion

گزاره ۱.۷.۲. برای فرایند براونی استاندارد، احتمال اینکه اولین برخورد قبل از $-b$ در a اتفاق بیفتد برابر است با

$$p_a = \frac{b}{a+b}, \quad a > 0, b > 0$$

برهان. با توجه به قضیه توقف اختیاری برای مارتینگل‌ها داریم $E(B(\tau)) = E(B(0)) = 0$ پس $\square$ $ap_a - b(1 - p_a) = 0$ و در نتیجه $p_a = \frac{a}{a+b}$.

گزاره ۲.۷.۲. برای فرایند براونی استاندارد، اگر $\tau = \min\{t \geq 0 : B(t) \in \{a, -b\} | B(0) = 0\}$ آن‌گاه خواهیم داشت

$$E(\tau) = ab.$$

مثال ۳.۷.۲. ذره‌ای را در نظر بگیرید که روی یک خط با قاعده‌ی فرایند براونی استاندارد $B(t)$ حرکت می‌کند. برای تحلیل موقعیت مورد انتظار ذره در لحظه‌ی $t = 6$ و واریانس موقعیت آن در $t = 6$ ، از آنجا که $B(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین $E(B(t)) = 0$ و واریانس $Var(B(t)) = t$ است از این رو موقعیت مورد انتظار در $t = 6$ ، صفر و واریانس آن موقعیت ۶ خواهد بود.

۸.۲ نتایج بیشتر در مورد زمان برخورد

قرار دهید $T_x = \min\{t \geq 0 : B(t) = x | B(0) = 0\}$ زمان برخورد به نقطه x ، $x > 0$ ، است. با توجه به دانسته‌های ما در مورد قدم زدن تصادفی انتظار داریم $P(T_x < \infty) = 1$ ، اما $E(T_x) = \infty$ روشن است اگر $T_x < t$ ، آن‌گاه s ای وجود دارد $(s < t)$ که $B(s) = x$ اما فرایند براونی بعد از برخورد به نقطه x خاصیت نموهای ثابت و مستقل گاوسی خود را حفظ کرده و با توجه به تقارن (نسبت به x) هر دو پیشامد زیر با احتمال $\frac{1}{2}$ رخ خواهند داد.

$$\{B(t) < x | T_x \leq t\} \text{ و } \{B(t) > x | T_x \leq t\}$$

از آنجا که $B(t)$ توزیع پیوسته دارد، داریم $P(B(t) = x) = 0$. به عبارت دقیق‌تر، اگر $T_x = s < t$ ، آنگاه $B(t) = x + B(t) - B(s)$ و این یعنی که $B(t)$ دارای توزیع $\mathcal{N}(x, t-s)$ است. (که به روشنی نسبت به x متقارن است) بنابراین $\frac{1}{2} \{B(t) > x | T_x \leq t\} =$ از طرف دیگر $P\{B(t) > x | T_x > t\} = 0$ در مجموع خواهیم داشت

$$\begin{aligned} P(B(t) > x) &= P(B(t) > x | T_x \leq t)P(T_x \leq t) + P(B(t) > x | T_x > t)P(T_x > t) \\ &= P(B(t) > x | T_x \leq t)P(T_x \leq t) + 0 \\ &= \frac{1}{2}P(T_x \leq t). \end{aligned}$$

یا

$$P(T_x \leq t) = 2P(B(t) > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2t}} dy,$$

چون $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ با تغییر متغیر $u = \frac{y}{\sqrt{t}}$ گزاره زیر را داریم.

گزاره ۱.۸.۲. برای فرایند برآونی استاندارد و برای هر ثابت x که مخالف صفر باشد، خواهیم داشت

$$P(T_x \leq t) = 2P(B(t) > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2(1 - \Theta(\frac{x}{\sqrt{t}})), \quad t \geq 0.$$

که در آن $P(T_x < \infty) = 1$.

$P(T_x < \infty) = 1$ چون وقتی $t \rightarrow \infty$ داریم

$$P(T_x < \infty) = 2(1 - \Theta(0)) = 2(1 - 0.5) = 1.$$

نتیجه ۲.۸.۲. برای فرایند برآونی استاندارد و برای هر ثابت x که مخالف صفر باشد، $E(T_x) = \infty$.

برهان. داریم

$$E(T_x) = \int_0^{\infty} P(T_x > t) dt.$$

از طرف دیگر داریم

$$P(T_x > t) = 1 - P(T_x \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right).$$

از آنجا که ضریب ثابت $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ هیچ نقشی در بدست آوردن تابع اولیه متناهی یا نامتناهی ندارد می‌توانیم

برای سادگی کار، آن را کنار می‌گذاریم. پس کافی است نشان دهیم که

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy dt = \infty.$$

داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dt dy &= x^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &\geq x^2 \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &\geq x^2 e^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{y^2} dy \\ &= \infty. \end{aligned}$$

نامساوی دوم از این واقعیت نتیجه می‌شود که تابع کاهشی $e^{-\frac{y^2}{2}}$ مقدار مینیم خود را روی بازه‌ی $(0, 1]$ در نقطه‌ی $y = 1$ می‌گیرد. $\square$

عبارت $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} (B(s))$ را ماکسیمم مقدار فرایند برآونی تا زمان t تعریف می‌کنیم. با توجه به اینکه $M_t \geq x$ اگر و تنها اگر $T_x \leq t$ ، نتیجه می‌گیریم

$$P(M_t \geq x) = P(T_x \leq t)$$

بنابراین نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۳.۸.۲. برای فرایند برآونی استاندارد و برای هر ثابت $t \geq 0$ ، داریم

$$P(M_t > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) = 2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})), \quad x \geq 0.$$

۹.۲ زمان برخورد فرایند برآونی دیریف

برای $X_t = \sigma B(t) + mt$ ، فرض کنید $m < 0$ ، یعنی X_t ، فرایند برآونی با دیریف^۹ منفی باشد. این گفته شبیه به قدم زدن تصادفی ساده با دیریف منفی است، یعنی زمانی که نموهای $\{R_n\}$ دارای توزیع زیر هستند.

$$P(\Delta = 1) = p, P(\Delta = -1) = q = 1 - p$$

که در آن $q > p$.

در این صورت خواهیم داشت

$$p_a = \frac{1 - (\frac{p}{q})^b}{(\frac{p}{q})^{-a} - (\frac{p}{q})^b}.$$

و بنابراین با فرض اینکه $b \rightarrow \infty$ ، احتمال اینکه قدم زدن تصادفی هرگز فراتر از a نرود را محاسبه می‌کنیم. یعنی خواهیم داشت

$$P(\max_{n \geq 0} R_n \geq a) = \lim_{b \rightarrow \infty} p_b = (\frac{p}{q})^a.$$

در نتیجه ماکسیمم قدم زدن تصادفی دارای توزیع هندسی با احتمال ”موفقیت“ $1 - \frac{p}{q}$ است.

گزاره ۱.۹.۲. برای فرایند برآونی با دیریف منفی، $(X_t = \sigma B(t) + mt, \quad m < 0)$ داریم

$$p_a = \frac{1 - e^{-\alpha b}}{e^{\alpha a} - e^{-\alpha b}},$$

زمانی که $\alpha = \frac{2|m|}{\sigma^2}$ ، بنابراین وقتی $b \rightarrow \infty$ ، داریم

$$P(M > a) = e^{-\alpha a}, \quad a \geq 0,$$

^۹drift

و نتیجه می‌گیریم M دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{\sigma^2}{2|m|}$ است. $\alpha^{-1} = \frac{\sigma^2}{2|m|}$.
در حالت کلی که $m > 0$ یا $m < 0$ ، فرمول p_a به صورت زیر است.

$$p_a = \frac{1 - e^{(\frac{2m}{\sigma^2})b}}{e^{-(\frac{2m}{\sigma^2})a} - e^{(\frac{2m}{\sigma^2})b}}.$$

برهان. با استفاده از یک مارتینگل نمایی به فرم زیر، درستی حکم را تحقیق می‌کنیم.

$$Y_t = e^{\lambda X(t) - (\lambda m + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2)t}, \quad t \geq 0.$$

Y_t ، برای هر مقدار λ یک مارتینگل است. با انتخاب $\lambda = \alpha = -\frac{2m}{\sigma^2}$ ، جمله دوم در توان Y_t از بین می‌رود، و به مارتینگل زیر می‌رسیم.

$$U(t) = e^{\alpha X(t)}.$$

پس برای $\tau = \min\{t \geq 0 : X(t) \in \{a, -b\} | X(0) = 0\}$ ، با توجه به قضیه توقف اختیاری خواهیم داشت

$$E(Y(\tau)) = 1 \quad \text{یا} \quad e^{\alpha a} p_a + e^{-\alpha b} (1 - p_a)$$

□

و در نتیجه درستی حکم روشن است.

گزاره ۲.۹.۲. برای فرایند برآونی با دیررفت، $X(t) = \sigma B(t) + mt$ و $m \neq 0$ اگر $\tau = \min\{t \geq 0 : X(t) \in \{a, -b\} | X(0) = 0\}$

آنگاه

$$E(\tau) = \frac{a(1 - e^{-\frac{2mb}{\sigma^2}}) + b(1 - e^{-\frac{2ma}{\sigma^2}})}{m(e^{-\frac{2ma}{\sigma^2}} - e^{-\frac{2mb}{\sigma^2}})}$$

اگر دیررفت منفی باشد می‌دانیم که برای $x > 0$ ، فرایند برآونی به x برخورد نمی‌کند. یعنی

$$P(T_x = \infty) = P(M < x) > 0$$

اما اگر دیررفت مثبت باشد، مطمئناً به x برخورد می‌کند.

گزاره ۳.۹.۲. برای فرایند برآونی با دیررفت مثبت، یعنی $X(t) = \sigma B(t) + mt$ ، $m > 0$ ، اگر

$$T_x = \min\{t \geq 0 : X(t) = x | X(0) = 0\}$$

آنگاه

$$E(T_x) = \frac{x}{m}, \quad x > 0.$$

بنابراین وقتی $m \rightarrow 0$ داریم $E(T_x) \rightarrow \infty$ و این با محاسبات قبلی در مورد $E(T_x) = \infty$ را در حالتی که m صفر بود، تایید می‌کند.

۱۰.۲ فرایند برآونی به عنوان یک فرایند مارکف

اگر B فرایند برآونی استاندارد باشد، آنگاه خاصیت استقلال نموها نتیجه می‌دهد که

$$B(s) \quad \text{و} \quad (B(s+t) - B(s))$$

از هم مستقلند. خاصیت استقلال نموها همچنین نتیجه می‌دهد که

$(B(s+t) - B(s))$ از گذشته یعنی از $\{B(u) : 0 \leq u < s\}$ مستقل است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که فرایند برآونی دارای خاصیت مارکف است از آنجا که همچنین نموهای آن نیز هم توزیع هستند، نتیجه می‌گیریم که فرایند برآونی یک فرایند مارکف همگن است.

اگر $p(x, t, y)$ نشان دهنده تابع چگالی احتمال $B(s+t)$ با شرط $B(s) = x$ باشد، از آنجا که

$$B(s+t) = x + (B(s+t) - B(s))$$

پس $p(x, t, y)$ تابع چگالی $x + (B(s+t) - B(s))$ نیز خواهد بود ولی

$$x + B(s+t) - B(s) = y$$

اگر و تنها اگر

$$B(s+t) - B(s) = y - x$$

پس خواهیم داشت

$$p(t, x, y) = f_t(y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2t}\right)$$

در حالت کلی $X(t) = \sigma B(t) + mt$ یک فرایند مارکف با تابع چگالی زیر است.

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - y - mt)^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

۱۱.۲ فرایند برآونی به عنوان مارتینگل

فرایند برآونی استاندارد یک مارتینگل است. یعنی داریم

$$E(B(t+s)|B(u); 0 \leq u \leq s) = B(s), \quad t \geq 0, s \geq 0,$$

که بیانگر این واقعیت است که امید شرطی فرایند برآونی در هر زمانی در آینده، پس از زمان s ، برابر است با مقدار آن در زمان s . البته این از خاصیت استقلال نموها منتج می‌شود و با توجه به اینکه

$$B(s+t) = B(s) + (B(s+t) - B(s)),$$

داریم

$$\begin{aligned}
E(B(t+s)|B(u) : 0 \leq u \leq s) &= E(B(t+s)|B(s)) \quad (\text{خاصیت مارکف}) \\
&= E(B(s) + B(t+s) - B(s)|B(s)) \\
&= B(s) + E(B(t+s) - B(s)|B(s)) \\
&= B(s) + E(B(t+s) - B(s)), \quad (\text{استقلال نموها}) \\
&= B(s) + 0 \\
&= B(s).
\end{aligned}$$

قدم زدن تصادفی متقارن ساده یک مارتینگل است (و یک زنجیر مارکوف) در زمان گسسته است؛

$$E(R_{n+k}|R_n, \dots, R_0) = E(R_{n+k}|R_n) = R_n, k \geq 0, n \geq 0,$$

چون

$$R_{n+k} = R_n + \sum_{i=1}^k \Delta_{n+i},$$

و $\sum_{i=1}^k \Delta_{n+i}$ از R_n مستقل است و دارای میانگین صفر است.
در نتیجه می‌توان لم زیر را داشت.

لم ۱.۱۱.۲. فرض کنیم $B = \{B_t\}$ فرایند برآونی استاندارد باشد. داریم

۱. فرایند برآونی B مارتینگل است.

۲. فرایند $\{B_t^\gamma - t\}$ مارتینگل است.

۳. برای هر ثابت $\theta \in R$ ، فرایند $Z = \{Z_t\}$ که

$$Z_t = \exp \left\{ \theta B_t - \frac{1}{2} \theta^2 t \right\}$$

مارتینگل است که به آن مارتینگل نمایی گفته می‌شود.

برهان. ۱. کافی است درستی ویژگی (iii) را در تعریف مارتینگل تحقیق کنیم، داریم

$$B_t^\gamma = B_s^\gamma + (B_t - B_s)^\gamma + \gamma B_s (B_t - B_s)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
E(B_t^\gamma - t | \mathcal{F}_s) &= E(B_s^\gamma - t | \mathcal{F}_s) + E((B_t - B_s)^\gamma | \mathcal{F}_s) \\
&\quad + \gamma E(B_s (B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) + s - t \\
&= B_s^\gamma - s + (t - s) + \gamma B_s E(B_t - B_s) + s - t \\
&= B_s^\gamma - s.
\end{aligned}$$

۲. فرض کنیم $0 \leq s \leq t$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} E[Z(t)|\mathcal{F}(s)] &= E \left[\exp\{-\theta(B(t) - B(s) + B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2((t-s) + s)\} \mid \mathcal{F}(s) \right] \\ &= E \left[Z(s) \exp\{-\theta(B(t) - B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)\} \mid \mathcal{F}(s) \right] \\ &= Z(s) E \left[\exp\{-\theta(B(t) - B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)\} \right] \\ &= Z(s) \exp \left\{ \frac{1}{2}(-\theta)^2 \text{var}(B(t) - B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s) \right\} \\ &= Z(s). \end{aligned}$$

□

۱۲.۲ مشتق ناپذیری مسیرهای فرایند برآونی

قضیه ۱۰.۱۲.۲. با احتمال یک، مسیر $t \rightarrow B_t(\omega)$ هیچ جا مشتق پذیر است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $0 \leq t < 1$. ثابت $\beta > 0$ را در نظر می‌گیریم. اگر تابع داده شده‌ی f در نقطه‌ی s مشتق پذیر و مشتق آن $f'(s)$ باشد و داشته باشیم $f'(s) \leq \beta$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$|f(t) - f(s)| \leq 2\beta|t - s|$$

که در آن $|t - s|$ به اندازه کافی کوچک است (اگر t به اندازه کافی به s نزدیک باشد) بنابراین فرض کنید

$$A_n = \{\omega : \exists s \in (0, 1) : |B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq 2\beta|t - s|, \text{ when ever } |t - s| \leq \frac{1}{n}\}$$

به روشنی $A_n \subset A_{n+1}$ و $\cup_n A_n$ شامل تمام ω هایی از Ω است که تابع $t \rightarrow B_t(\omega)$ در نقطه‌ای از $(0, 1)$ دارای مشتقی با مقدار کمتر یا مساوی β است. فرض کنید برای f و برای s داده شده δ ی مثبتی وجود داشته باشد که

$$|f(t) - f(s)| \leq 2\beta|t - s|, \quad (1.2)$$

(وقتی $|t - s| \leq 2\delta$). فرض کنید $n \geq \frac{1}{\delta}$ و k بزرگترین عدد صحیحی باشد که $\frac{k}{n} \leq s$. آنگاه داریم

$$\max\{|f(\frac{k+2}{n}) - f(\frac{k+1}{n})|, |f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})|, |f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})|\} \leq \frac{6\beta}{n} \quad (2.2)$$

(که در آن $\frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} \leq s < \frac{k+1}{n} < \frac{k+2}{n}$) و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} |f(\frac{k+2}{n}) - f(\frac{k+1}{n})| &\leq |f(\frac{k+2}{n}) - f(s)| + |f(s) - f(\frac{k+1}{n})| \\ &\leq 2\beta|\frac{k+2}{n} - s| + 2\beta(s - \frac{k+1}{n}) \\ &\leq \frac{6\beta}{n} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
|f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})| &\leq |f(\frac{k+1}{n}) - f(s)| + |f(s) - f(\frac{k}{n})| \\
&\leq 2\beta |\frac{k+1}{n} - s| + 2\beta (s - \frac{k}{n}) \\
&\leq 2\beta \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

و داریم

$$\begin{aligned}
|f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})| &\leq |f(\frac{k}{n}) - f(s)| + |f(s) - f(\frac{k-1}{n})| \\
&\leq 2\beta |\frac{k}{n} - s| + 2\beta (s - \frac{k-1}{n}) \\
&\leq 2\beta \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

که نامساوی ۲.۲ را ثابت می‌کند.

برای ω داده شده، فرض کنید.

$$g_k(\omega) = \max\{|B_{\frac{k+2}{n}}(\omega) - B_{\frac{k+1}{n}}(\omega)|, |B_{\frac{k+2}{n}}(\omega) - B_{\frac{k+1}{n}}(\omega)|, |B_{\frac{k+2}{n}}(\omega) - B_{\frac{k+1}{n}}(\omega)|\}$$

و فرض کنید

$$C_n = \{\omega : g_k(\omega) \leq \frac{2\beta}{n} \quad \text{for some} \quad k \leq n-2\}$$

حال اگر $\omega \in A_n$ آنگاه $B_t(\omega)$ در s ای مشتق پذیر بوده و

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq 2\beta |t - s|$$

(اگر $|t - s| \leq \frac{2}{n}$). این به آن معنا است که $g_k(\omega) \leq \frac{2\beta}{n}$ (وقتی k بزرگترین عدد صحیحی است که $\frac{k}{n} \leq s$) بنابراین $\omega \in C_n$ و بنابراین $A_n \subset C_n$.

سپس داریم

$$C_n = \cup_{k=1}^{n-2} \{\omega : g_k(\omega) \leq \frac{2\beta}{n}\}$$

و بنابراین

$$P(C_n) \leq \sum_{k=1}^{n-2} P(g_k \leq \frac{2\beta}{n})$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}
 P(g_k \leq \frac{\epsilon\beta}{n}) &= P(\max\{|B_{\frac{k+\epsilon}{n}} - B_{\frac{k+\epsilon-1}{n}}|, \\
 &\quad |B_{\frac{k+\epsilon-1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}|, |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|\} \leq \frac{\epsilon\beta}{n}) \\
 &= P(\max\{|B_{\frac{k+\epsilon}{n}} - B_{\frac{k+\epsilon-1}{n}}| \leq \frac{\epsilon\beta}{n}\} \\
 &\quad \cap \{|B_{\frac{k+\epsilon-1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}| \leq \frac{\epsilon\beta}{n}\} \cap \{|B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}| \leq \frac{\epsilon\beta}{n}\}) \\
 &= P(\max\{|B_{\frac{k+\epsilon}{n}} - B_{\frac{k+\epsilon-1}{n}}| \leq \frac{\epsilon\beta}{n}\}) \\
 &\quad \times (P\{|B_{\frac{k+\epsilon-1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}| \leq \frac{\epsilon\beta}{n}\}) P(\{|B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}| \leq \frac{\epsilon\beta}{n}\}), \\
 &= (\sqrt{\frac{n}{\epsilon\pi}} \int_{-\frac{n}{\epsilon\beta}}^{\frac{n}{\epsilon\beta}} \exp\{-n\frac{x^2}{\epsilon}\} dx)^3 \\
 &\leq (\sqrt{\frac{n}{\epsilon\pi}} \frac{12\beta}{n})^3 \\
 &= Cn^{-\frac{3}{\epsilon}},
 \end{aligned}$$

که در آن C مستقل از n است. بنابراین

$$P(C_n) \leq nCn^{-\frac{3}{\epsilon}} = Cn^{-\frac{1}{\epsilon}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

حال برای ثابت j , $A_j \subset A_n$ ($n \geq j$) و بنابراین

$$P(A_j) \leq P(A_n) \leq P(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

و از آنجا $P(A_j) = 0$ و در نتیجه $P(\cup A_j) = 0$.

و این یعنی B_t در هیچ نقطه‌ای s از $[0, 1]$ مشتق پذیر و با مقدار مشتق کمتر از β نیست. حال اگر بازه‌ی واحد $[j, j+1]$ ($j \in \mathbb{Z}^+$) را در نظر بگیریم و گام‌های قبل را بجای B_t برای $B_t + j$ تکرار کنیم به این نتیجه می‌رسیم که X_t در هیچ s ای از $[0, 1]$ مشتق‌پذیر و با مقدار مشتق کمتر از β نیست. از آنجا که مشتق‌پذیر بودن X_t در s به معنای مشتق‌پذیر بودن B_t در $s+j$ است. بنابراین با احتمال یک B_t در هیچ نقطه‌ای از $[j, j+1]$ مشتق‌پذیر و با مقدار مشتق کمتر از β نیست. اگر قرار دهیم

$D_j = \{\omega : B_t(\omega) \text{ در نقطه ای مانند } s \text{ مشتق پذیر بوده و مقدار آن کمتر یا مساوی } \beta \text{ است.}\}$ داریم

$$P(D_j) = 0$$

و در نتیجه

$$P(\cup_{j \in \mathbb{Z}^+} D_j) = 0,$$

و این به آن معناست که با احتمال یک، B_t در هیچ نقطه ای از $\mathbb{R}^+$ مشتق پذیر با مقدار مشتق کمتر یا مساوی β نیست.

□

به ترتیب درستی حکم روشن است.

۱۳.۲ اصول فرایند برآونی

در این بخش ما اصول اولیه توزیع ها و مثال ها از فرایند برآونی را بیان می کنیم. در اینجا فرض می کنیم $B = \{B_t\}$ فرایند برآونی استاندارد با نقطه شروع ۰ است.

۱. قانون اعداد بزرگ^{۱۰}. با احتمال یک،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

۲. مقیاس گذاری. برای هر ثابت $c > 0$ ، فرایند $W = \{W_t\}$ که

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$$

فرایند برآونی استاندارد با نقطه شروع ۰ است.

۳. معکوس زمان. فرایند $W = \{W_t\}$ فرایند برآونی استاندارد با نقطه ۰ است که

$$W_t = \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

۱۴.۲ قانون لگاریتم مکرر

هرگاه $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی (i.i.d.) باشد که $E(X_i) = 0$ و $E(X_i^2) < \infty$ ، می توان ثابت کرد که برای هر $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ ، $\frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} 0$ ، که نتیجه ای قوی تر از قانون اعداد بزرگ است.

از طرف دیگر قانون ضعیف اعداد بزرگ ایجاب می کند که اگر $E(X_i^2) > 0$ ، آنگاه به ازای هر $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ داریم

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 0$$

^{۱۰} Law of Large Numbers

اگر $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ آنگاه $|S_n|$ به طور متوسط از مرتبه بزرگی $\sqrt{n}$ است، ولی اگر در طول دنباله‌ی S_n حرکت کنیم می‌بینیم که گاهی $|S_n|$ مقادیری از مرتبه بزرگتر از $\sqrt{n}$ اختیار می‌کند و به ازای هر $\alpha > 0$,

$$\left| \frac{S_n}{\sqrt{n}(\log n)^\alpha} \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

برای اینکه رفتار مجانبی دقیق بزرگترین مقادیر $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}$ را بفهمیم باید لگاریتم n و ریشه دوم آن را بگیریم. در واقع این مقدار وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، به سمت بی نهایت میل می‌کند.

۱. قانون لگاریتم^{۱۱} با احتمال ۱ روابط زیر برای فرایند برآونی برقرار است.

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log \left(\frac{1}{t}\right)}} &= 1, & \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log \left(\frac{1}{t}\right)}} &= -1 \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} &= 1, & \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} &= -1 \end{aligned}$$

۲. احتمال قوی مارکف^{۱۲} برای هر زمان توقف متناهی τ ، فرایند $W = \{W_t\}$ با

$$W_t = B_{t+\tau} - B_\tau$$

فرایند برآونی با نقطه شروع ۰ است. بعلاوه W مستقل از $\{B_s : 0 \leq s \leq \tau\}$ است.

۱۵.۲ اصل پایایی

همگرایی $B_n(t) \rightarrow B(t)$ قوی تر از توزیع های بعد متناهی است. در اینجا نوع قوی‌تری از همگرایی به نام اصل پایایی یا قضیه حد مرکزی را معرفی می‌کنیم.

فضای $C[0, \infty)$ را به عنوان یک فضای متریک در نظر می‌گیریم. متر معمولی این فضا برای $f, g \in C[0, \infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 \wedge \sup_{0 \leq t \leq n} |f(t) - g(t)| \right)$$

بنابراین برای $f_n \in C[0, \infty)$ که $n \geq 1$ ، اگر $\rho(f_n, f_0) \rightarrow 0$ و تنها اگر برای هر k ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq n} |f_n(t) - f_0(t)| = 0$$

توجه می‌کنیم که فرایند $\{B_n(t) : t \geq 0\}$ که قبلاً تعریف شد پیوسته نیست. اکنون برآنیم که فرایند را به گونه ای تغییر دهیم که مسیرهای تغییر یافته متعلق به $C[0, \infty)$ باشند.

با این هدف برای هر $t \geq 0$ تعریف می‌کنیم

$$B_n^c(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}} (nt - [nt]) \chi_{[nt]+1}$$

^{۱۱}Law of Iterated Logarithm

^{۱۲}Strong Markov property

این تابع از وصل کردن نقاط

$$\left\{ \left(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{\sqrt{n}} \right) : j \geq 0 \right\}$$

در صفحه $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ به دست آمده است. در واقع برای هر تابع حقیقی $T : C[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ که نسبت به فضای متریک $C[0, \infty)$ به عنوان دامنه آن و $\mathbb{R}$ به عنوان برد آن پیوسته باشد، داریم.

$$T(B_n^c) \rightarrow T(B).$$

۱۶.۲ مثال ها

مثال ۱ فرض کنید B یک فرایند برآونی استاندارد با نقطه شروع ۰ باشد. و T_b زمان توقف باشد آنگاه تبدیل لاپلاس T_b برای هر $\alpha \geq 0$ عبارت است از

$$E[e^{-\alpha T_b}] = \exp \{ -\sqrt{2\alpha b} \}$$

زیرا برای هر θ دلخواه با در نظر گرفتن مارتینگل نمایی

$$X(t) = \exp \{ -\theta B(t) - \frac{1}{2} \theta^2 t \}$$

برای هر $t \geq 0$ داریم $0 \leq X_{t \wedge T_b} \leq \exp \theta b$ سپس

$$E[X_{T_b}] = E[X_0] = 1.$$

اگر قرار دهیم $\theta = \sqrt{2\alpha}$ ، مشاهده می شود $B_{T_b} = b$ و از آنجا

$$1 = E[X_{T_b}] = E \exp \{ \sqrt{2\alpha b} - \alpha T_b \},$$

و یا به طور معادل داریم

$$E \exp \{ -\alpha T_b \} = \exp \{ -\sqrt{2\alpha b} \}$$

مثال ۲ فرض کنید B فرایند برآونی استاندارد با نقطه شروع ۰ باشد و $-a < 0 < b$ و

$$T = \inf \{ t \geq 0 : B_t \notin (-a, b) \}.$$

آنگاه $P(B_T = -a), P(B_T = b)$ به صورت زیر بدست می آید.

می دانیم فرایند برآونی خود یک مارتینگل است. بعلاوه $-a \leq B_t \wedge T$ همچنین

$$E[B_T] = 0.$$

$$E[B_T] = -aP(B_T = -a) + bP(B_T = b)$$

و

$$P(B_T = -a) + P(B_T = b) = 1$$

از حل دو معادله اخیر، رابطه زیر به دست می آید

$$P(B_T = -a) = \frac{b}{b+a}, P(B_T = b) = \frac{a}{b+a}$$

مثال ۳ فرایند برآونی $\{X_t\}_t$ با دیریت m را در نظر بگیرید یعنی فرض کنید

$$X_t = B_t + mt$$

که $m \in \mathbb{R}$ ثابت است و $m \neq 0$ ، اگر مفروضات مثال قبل را در نظر بگیریم داریم

$$P(X_T = -a) = \frac{1 - \exp(\gamma mb)}{\exp(\gamma ma) - \exp(-\gamma mb)}.$$

برهان. مارتینگل نمایی زیر را در نظر بگیرید

$$Y_t = \exp\{\theta B_t + \frac{\theta^2 t}{\gamma}\} = \exp\{\theta X_t - \theta(\theta + \gamma m)\frac{t}{\gamma}\}.$$

در حالت خاص اگر $\theta = -\gamma m$ ، فرایند $Y_t = \exp\{-\gamma m X_t\}$ مارتینگل خواهد بود و به روشنی برای هر $t \geq 0$ ، Y_{t+T} به طور یکنواخت کراندار است. بنابراین به کمک قضیه توقف اختیاری

$$E[Y_T] = E[Y_0] = 1.$$

یعنی داریم

$$\exp\{-\gamma mb\}P(X_T = b) + \exp\{\gamma ma\}P(X_T = -a) = 1.$$

از آنجا که

$$P(X_T = b) + P(X_T = -a) = 1,$$

داریم

$$P(X_T = b) = \frac{\exp(\gamma ma) - 1}{\exp(\gamma ma) - \exp(-\gamma mb)}$$

و در نتیجه

$$P(X_T = -a) = \frac{1 - \exp(\gamma mb)}{\exp(\gamma ma) - \exp(-\gamma mb)}.$$

□

مثال ۴ فرض کنید X فرایند برآونی با دیریت منفی m باشد یعنی

$$X_t = B_t + mt$$

اگر $M = \sup\{X_t : t \geq 0\}$ توزیع M به صورت زیر بدست می آید.

یکی از راههای پیدا کردن توزیع M استفاده از نتایج مثال قبل است (وقتی $a \rightarrow \infty$) حال مشاهده می کنیم که

$$P(M \geq b) = \lim_{a \rightarrow \infty} P(X_T = b) = \exp\{\gamma mb\}$$

بنابراین M نمایی با نرخ $-\gamma m$ است.

روش دیگر بدست آوردن توزیع M استفاده از مارتینگل $Y = \{Y_t\}$ است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$Y_t = \exp\{-\gamma m X_t\}.$$

حال زمان توقف

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : X_t = b\}$$

را در نظر بگیرید که $0 \leq Y_{t \wedge T_b} \leq \exp\{-\lambda mb\}$ با استفاده از قضیه توقف اختیاری داریم

$$E[Y_{T_b}] = E[Y_0] = 1$$

اما با بهره گیری از قانون اعداد بزرگ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = -\infty.$$

بنابراین

$$E[Y_{T_b}] = E[Y_{T_b} \mathbf{1}_{\{T_b < \infty\}}] = \exp\{-\lambda mb\} P(T_b < \infty),$$

و

$$= P(M \geq b) = P(T_b < \infty) = \exp\{\lambda mb\}$$

و نتیجه حاصل می شود.

فصل ۳

انتگرال ایتو

۱.۳ انتگرال ایتو

در سراسر این فصل فضای احتمال مفروض $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ و σ -میدانهای مفروض روی فضاهای اقلیدسی σ -میدان بورل است. (توپولوژی مفروض روی فضای اقلیدسی، توپولوژی استاندارد است.)

مقدمه: می‌خواهیم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب یک جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به دست آوریم. از آنجا که مکان ذره در لحظه t ، $t \in [0, T]$ و $(T > 0)$ به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \text{ (نوفه)} \quad (1.3)$$

که در آن b, σ توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (0, \infty)$ هستند و نوفه، فرایند تصادفی مانند Z_t است، در سه شرط زیر صدق می‌کند،

۱. برای هر $t_1, t_2 \in [0, T]$ که $t_1 \neq t_2$ است Z_{t_1} و Z_{t_2} مستقل از هم باشند،

۲. توزیع توام متغیرهای تصادفی $Z_{t_1+t}, \dots, Z_{t_n+t}$ ، $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد،

۳. برای هر $t \in (0, T]$ ، $E(Z_t) = 0$.

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ افرازی از فاصله $[0, T]$ باشد. با گسسته سازی فرمول ۱.۳ داریم

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k Z_k.$$

تنها فرایندی با ویژگی‌های بالا که دارای مسیرهای پیوسته است فرایند برآونی است. لذا می‌توان نوشت

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ وجود داشته باشد خواهیم داشت

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, \omega) dB_s,$$

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرایند $\{X_t\}$ ناگزیر از محاسبه انتگرال‌های به فرم زیر هستیم

$$\int_s^T f(t, \omega) dB_t(\omega)$$

که $B_t(\omega)$ فرایند برآونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $\Omega \times [0, \infty)$ است. برای رسیدن به این هدف گام‌های زیر را برمی‌داریم.

فرض کنیم $\phi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی ابتدایی^۱ روی $\Omega \times [0, \infty)$ باشد یعنی

$$\phi(t, \omega) = X(\omega)I_{(a,b]}(t), \quad a, b \in [0, \infty)$$

در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s, \omega) dB_s = \int_a^t X(\omega) \chi_{[a,b)}(s) dB_s(\omega) = X(\omega)[B_{b \wedge t}(\omega) - B_{a \wedge t}(\omega)]$$

که در آن برای $x, y \in \mathbb{R}$ ، $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

فرض کنیم f تابعی ساده^۲ روی $\Omega \times [0, \infty)$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=0}^n \phi_j,$$

که ϕ_i ها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f dB_s = \sum_{j=0}^n \int_a^t \phi_j dB_s. \quad (2.3)$$

رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

گزاره ۱.۱.۳. اگر f یک تابع ساده باشد آنگاه

(الف) $\{X_t = \int_a^t f(s, \omega) dB_s, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ یک مارتینگل است،

(ب) $\{(X_t)^2 - \int_a^t f^2(s) dB_s, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ یک مارتینگل است و در نتیجه

$$E\left(\left(\int_a^t f(s, \omega) dB_s\right)^2\right) = E\left(\int_a^t f^2(s) ds\right)$$

برهان. (الف) فرض کنیم $f(t, \omega) = X(\omega) \chi_{(a,b)}(\omega)$ ، اندازه پذیر است.

$$X_t = \int_a^t X(\omega) \chi_{(a,b)}(\omega) dB_s = X(\omega)[B_b(\omega) - B_a(\omega)]$$

$$E(X_{t+\Delta} | \mathcal{F}_t) = E(X_\omega [B_b(\omega) - B_a(\omega)] | \mathcal{F}_t) = X(\omega) E([B_b(\omega) - B_a(\omega)] | \mathcal{F}_t)$$

$$= X(\omega)[B_b(\omega) - B_a(\omega)] = X_t$$

□

(ب) قسمت دوم مشابه قسمت اول ثابت می‌شود.

^۱Elementary function

^۲simple function

رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t, \omega)$ روی مجموعه‌ی $\Omega \times [0, \infty)$ ، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است.

• تابع $f(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ ، $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ - اندازه‌پذیر باشد،

• به ازای هر t ، تابع $f(t, \cdot)$ ، $\mathcal{F}_t$ - اندازه‌پذیر باشد،

• برای هر $T \geq 0$ ، $E \left[\int_0^T f^2(s, \omega) ds \right] < \infty$.

لم ۲.۱.۳ (لم ایزومتري ایتو). اگر تابع $\phi(t, \omega)$ کراندار و ابتدایی باشد، آنگاه

$$E \left[\left(\int_0^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^T \phi^2(t, \omega) dt \right].$$

□

برهان. به [۹] مراجعه کنید.

لم ۳.۱.۳. اگر $f \in \mathcal{P}_2$ ، آنگاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به‌طوری‌که

$$E \left[\int_0^T |\phi(s) - \phi_n(s)|^2 ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

برهان. به [۹] مراجعه کنید.

اکنون می‌توانیم $\int_0^T f(t, \omega) dB_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_2$ تعریف می‌کنیم زیرا برای $f \in \mathcal{P}_2$ ، با توجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}$ موجود است که در نرم L^2 به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_0^T f dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n dB_t.$$

انتگرال اخیر را انتگرال ایتو می‌نامیم.

۲.۳ فرمول ایتو

فرض کنید $(B_t)_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. یک انتگرال تصادفی یک-بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است و به‌طوری‌که

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s(\omega),$$

که در آن توابع $u, v : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده‌اند.

$$dX_t = u dt + v dB_t,$$

بیان می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳ (فرمول یک-بعدی ایتو^۳). فرض کنید $dX_t = u dt + v dB_t$ و $Y_t = g(t, X_t)$ در این صورت

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2,$$

^۳Ito

داریم

$$(dB)^2 = dt, \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0.$$

مثال ۲.۲.۳. فرض کنید $Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2} B_t^2$ ، در این صورت $g(t, x) = \frac{1}{2} x^2$ ، لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial g}{\partial x^2} = \frac{1}{2},$$

با استفاده از فرمول ایتو داریم

$$dY_t = B_t dB_t + \frac{1}{2} dt.$$

قضیه ۳.۲.۳ (فرمول کلی ایتو). فرض کنید $dX_t = udt + vdB_t$ یک انتگرال تصادفی n -بعدی و

$g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت C^2 باشد. در این صورت

$$Y(t, \omega) = g(t, X_t),$$

یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_i dX_j,$$

داریم

$$dB_i \cdot dB_j = \delta_{ij} dt, \quad dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0.$$

مثال ۴.۲.۳. اگر $X_t = B_1(t) + B_2(t)$ ، آنگاه $g(t, x) = x_1^2 + x_2^2$ ، لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{ij}.$$

بنابراین

$$dX_t = \sum_{i=1}^2 B_i dB_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} 2\delta_{ij} dB_i dB_j = 2(B_1 dB_1 + B_2 dB_2 + dt).$$

گزاره ۵.۲.۳. فرض کنید $\zeta \subset \mathcal{F}$ یک σ -جبر و X ، $\mathcal{F}$ -اندازه پذیر باشد اگر برای هر $\theta \in \mathbb{R}$ داشته

باشیم

$$E(e^{i\theta X} | \zeta) = e^{-\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}}.$$

آنگاه X نسبت به ζ ، σ -جبر مستقل است و X دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس σ^2 است.

برهان. برای هر $A \in \zeta$

$$\begin{aligned} E(e^{i\theta X} | A) &= E(e^{-\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}} | A) \\ &= e^{-\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}} E(1 | A) \\ &= e^{-\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}} P(A). \end{aligned}$$

در حالت خاص برای $A = \Omega$ داریم $E(e^{i\theta X}) = e^{-\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}}$ و بنابراین X نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 است. حال نشان می‌دهیم X مستقل از ζ است، فرض می‌کنیم $A \in \zeta$ و $P(A) > 0$. تابع احتمال Q روی $\mathcal{F}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Q(b) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{E(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)}{P(A)}$$

حال Q یک اندازه احتمال است و

$$\begin{aligned} E_Q(e^{i\theta X}) &= \int_{\Omega} e^{i\theta X} dQ \\ &= \int_{\Omega} e^{i\theta X} \frac{dp}{P(A)} \\ &= \frac{E(e^{i\theta X} \mathbb{1}_A)}{P(A)} \\ &= e^{-\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

بنابراین X توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 است. از اینرو اگر ϕ نشان‌دهنده تابع توزیع نرمال استاندارد باشد، برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Q(X \leq x) = \phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) &\implies \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{p(A)} = \phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = P(X \leq x) \\ &\implies \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{p(A)} = P(X \leq x)P(A) \end{aligned}$$

برای هر $A \in \zeta$ با $P(A) \neq 0$. و این رابطه برای هر $A \in \zeta$ با $P(A) = 0$ بدیهی است. بنابراین ما می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که برای تمام $A \in \zeta$ برقرار است و این بدین معانست که A از ζ مستقل است. $\square$

(قضیه نمایش L^2 - دوب مارتینگل) (Doob L^2 -martingale representation theorem)

قضیه ۶.۲.۳. قرار دهید $X \in L^2(\Omega, F_T, P)$ سپس f منحصر به فردی وجود دارد که $f \in \mathcal{K}_T$ و $\alpha = E(X)$ به طوری که

$$X = \alpha + \int_0^T f(s, \omega) d_s^W$$

برهان. به [۱۵] رجوع کنید. $\square$

(قضیه مشخصه مارتینگل لوی (Levey martingle chareterization)

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنیم $\{B_t\}$ L^2 -martingale باشد و $B_0 = 0$ و $\{B_t - t\}$ martingale باشد آنگاه $\{B_t\}$ فرایند براونی است.

برهان. بنابر قضیه ۶.۲.۳، $B \in \mathcal{K}_T$ وجود دارد به طوری که

$$X_t = \int_0^t B(s, \omega) dW_s$$

حال اگر $dX_t = udt + v dW_t$ نگاه طبق فرمول ایتو

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t) dt + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, X_t) dX_t dX_t + \partial_x f(t, X_t) dX_t.$$

از طرفی $dX_t dX_t = v^2 dt$ قرار می‌دهیم و $u = 0$ و $f(t, x) = x^2$ داریم $\partial_x f = 2x$ و $\partial_t f = 0$ در نتیجه $\partial_{xx} f = 2$

$$d(X_t^2) = 0 + \underbrace{dX_t dX_t}_{v^2 dt} + 2x dX_t$$

سپس

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t 2X_s dX_s + \int_0^t v^2 ds$$

اکنون dX_s را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$dX_s = uds + v dW_s = 0 + dW_s$$

و X_s یک مارتینگل است پس

$$X_t^2 = X_0^2 + \underbrace{\int_0^t 2X_s v dW_s}_{\text{مارتینگل } Z_t} + \underbrace{\int_0^t v^2 ds}_{\text{فرایند افزایشی صعودی } B_t}$$

اکنون از محاسبات بالا نتیجه می‌گیریم $d(X_t^2) = dZ_t + B^2 dt$ و به همین ترتیب از فرضیه منحصر به

فردی تجزیه دوب-میر پیروی می‌کند. قرار می‌دهیم $f(t, x) = e^{i\theta x}$ داریم
 $\partial_t f = 0, \quad \partial_x f = i\theta e^{i\theta x}, \quad \partial_{xx} f = -\theta^2 e^{i\theta x}$

طبق فرمول ایتو $f(t, X_t)$ داریم $dX = BdW$

$$d(e^{i\theta X_t}) = -\frac{1}{2} \theta^2 e^{i\theta X_t} \underbrace{dX_t dX_t}_{B^2 dt = dt} + i\theta e^{i\theta X_t} \underbrace{dX_t}_{BdW}$$

بنابراین

$$e^{i\theta X_t} - e^{i\theta X_s} = -\frac{1}{2} \theta^2 \int_s^t e^{i\theta X_u} du + i\theta \int_s^t e^{i\theta X_u} BdW_u$$

آنگاه

$$e^{i\theta(X_t - X_s)} - 1 = -\frac{1}{2} \theta^2 \int_s^t e^{i\theta(X_u - X_s)} du + i\theta \int_s^t e^{i\theta(X_u - X_s)} BdW_s \quad (3.3)$$

قرار می‌دهیم $Y_t = \int_0^t e^{i\theta X_u} BdW_u$ پس Y_t یک مارتینگل است. حال معادله دوم سمت راست رابطه ۳.۳ برابر است با

$$i\theta e^{-i\theta X_s} (Y_t - Y_s).$$

در نتیجه از رابطه ۳.۳ امید شرطی با شرط $\mathcal{F}_s$ می‌گیریم آنگاه

$$E(e^{i\theta(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s) - 1 = -\frac{1}{2} \theta^2 \int_s^t E(e^{i\theta(X_u - X_s)} | \mathcal{F}_s) du$$

قرار می‌دهیم $\varphi(t) = E(e^{i\theta(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s)$. برای هر $t \geq s$ داریم

$$\begin{aligned}\varphi(t) - 1 &= \frac{1}{\gamma} \theta^2 \int_s^t \varphi(u) du \\ \Rightarrow \varphi'(t) &= -\frac{1}{\gamma} \theta^2 \varphi(t), \quad \varphi(s) = 1 \\ \varphi(t) &= C e^{-\frac{\theta^2}{\gamma}(t-s)}.\end{aligned}$$

حال بنابر گزاره ۵.۲.۳ اگر رابطه بالا را داشته باشیم می‌توانیم نتیجه بگیریم که X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(t-s)$ است که این خواص، فرایند براونی را نتیجه می‌دهد بنابراین به نتیجه مطلوب رسیدیم. $\square$

مراجع

- [1] Bismut, J.M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. Appl.* 44:384–404.
- [2] Breiman, L. (1992). Probability, Philadelphia. *Springer Verlag*.
- [3] Dudley, R.M. (1989) Real Analysis and Probability. *Chapman Hall*, NewYork.
- [4] Folland. G. B. (1982). Real analysis. *Springer Verlag*.
- [5] Jeanblanc, M., Yor, M., and Chesney, M. (2009). Mathematical methods for financial markets. *Springer*.
- [6] Karatzas, I., Shreve, S.E. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus,
- [7] Lamperti, J. (1966). Probability, Benjamin, New York.
- [8] Moharana, R. (2014). Review on Young's Inequality (Doctoral dissertation, NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ROURKELA).
- [9] Øksendal, B. (2003). Stochastic differential equations (pp. 65-84). *Springer Berlin Heidelberg*.
- [10] Resnik, S. (1992). Adventures in Stochastic Processes, Birkhanser, Boston.
- [11] Rudin, W. (1991). Functional Analysis. *McGraw Hill*, New York.
- [12] Sigman, k. (2006). Notes on Brownian motion (Vol. 26). *Walter de Gruyter*.
- [13] Spreij, P. J. (2007). Stochastic integration. *Lecture Notes, May*.
- [14] Varsei, A. Red Analysis–Notes. *Lecture Notes, Preprint*.
- [15] Wilde, I. F. (2009). Stochastic Analysis–Notes. *Lecture Notes, King's College, London*.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Expectation	امید
Conditional expectation	امید شرطی
Ito's integral	انتگرال ایتو
Probability measure	اندازه احتمال
Measurable	اندازه‌پذیر
پ	
Event	پیشامد
ت	
Random function	تابع تصادفی
Functional	تابعک
Linear functional	تابعک خطی
Distribution	توزیع
Standard normal distribution	توزیع نرمال استاندارد
د	
Cauchy sequence	دنباله کوشی
ز	
Hitting times for Brownian motion process	زمان برخورد فرایند براونی
Hitting times for Brownian motion process with drift	زمان برخورد فرایند براونی با دیریت
Stopping times	زمان توقف
س	
σ -Field	σ -میدان
ض	
Coefficient	ضریب

ف

Diffusion process	فرایند دیفیوژن
Stochastic process	فرآیند تصادفی
Gaussian process	فرایند گاوسی
Increasing process	فرآیند صعودی
Wiener process	فرایند وینر
Ito's formula	فرمول ایتو
Filtration	فیلتر
Natural filtration	فیلتر طبیعی

ق

Predictable	قابل پیش‌بینی
Law of Iterated Logarithm	قانون لگاریتم مکرر
Random walk	قدم زدن تصادفی
Simple symmetric random walk	قدم زدن تصادفی متقارن ساده
Central limit theorem	قضیه حد مرکزی

م

Local martingale	مارتینگال موضعی
Random variable	متغیر تصادفی
Convex	محدب
Independent	مستقل
Concave	مقعر
Generator	مولد

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

C

Central limit theorem	قضیه حد مرکزی
Cauchy sequence	دنباله کوشی
Coefficient	ضریب
Conditional expectation	امید شرطی
Continuously	به طور پیوسته

D

Distribution	توزیع
--------------	-------

E

Estimate	تخمین
Event	پیشامد
Expectation	امید

F

Filtration	فیلتر
Functional	تابع

G

Gaussian process	فرایند گاوسی
Generator	مولد

I

Increasing process	فرایند صعودی
Increment	نمو

Independent	مستقل
Ito's formula	فرمول ایتو
Ito's integral	انتگرال ایتو

L

Law of Iterated Logarithm	قانون لگاریتم مکرر
Linear functional	تابع خطی
Local martingale	مارتینگال موضعی

M

Maximum distribution	توزیع ماکزیمم
Measurable	اندازه‌پذیر
Modulus of continuity	ضریب پیوستگی

N

Natural filtration	فیلتر طبیعی
Nonlinear expectation	امید غیرخطی

P

Predictable	قابل پیش‌بینی
Probability measure	اندازه احتمال

R

Random function	تابع تصادفی
Random variable	متغیر تصادفی

S

σ -field	σ -میدان
-----------------	-----------------

Aabstract

In this thesis, After investigatiang Markov processes and , Diffusion processes have been introduce. next step, Brownian motion has been presented as an example of Diffusion processes. In the last step some applications of Brownian motion have been presented.

Keywords: Maximum distribution, Diffusion process, Logarithmic law, Time to deal, Brownian process.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Brownian Motion and Diffusion Processes

Fateme Yazdi

Supervisor

Elham Dastranj

February 2016