دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

کنترل سیستم‌های توسیع یافته گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری

رسول تورانی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر علی مس‌فروش

بهمن ۱۳۹۴

تقدیر و تشکر

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است...

به استوارترین تکیه گاهم و به سبزترین نگاه زندگیم ، همسرم و روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.

خداوندا به ما توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، مناعت بی غرور، عشق بی هوس و دوست داشتن بی آنکه دوستت بدارند را عنایت فرما. در نهایت از زحمات بی دریغ جناب آقای دکتر احسنی طهرانی و جناب آقای دکتر مس فروش کمال تشکر و امتنان را دارم.

تقدیم به

همسر عزیزم که همواره مرا در نگارش این پایان نامه همراهی نمود...

رسول تورانی

بهمن ۱۳۹۴

تعهد نامه

اینجانب **رسول تورانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **کنترل سیستم‌های توسیع یافته گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری** ، تحت راهنمایی **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می‌شوم :

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رسول تورانی
بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، سیستم‌های گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری و تحلیل پایداري آنها مورد بررسي قرار مي‌گيرند. سیستم‌های گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری را معرفی می‌کنیم. شرایط لازم و کافی را برای پایداری ارائه می‌دهیم. شرط لازم برای عدم پایداری بیان می‌شود که می تواند مانع از بررسی ماتریس‌های بزرگ برای بررسی ناپایداری باشد. در مرحله بعد مساله پایدار سازی این سیستم‌ها و تخصیص مقادیر ویژه در داخل یک دایره به مرکز مبدا و در ادامه سیستم‌های مثبت بررسی خواهد شد.

کلمات کلیدی کسری، مشتق، توسیع یافته، خطی، گسسته زمانی

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مباحثی از جبر خطی و ماتریس ها

در این فصل به برخی مفاهیم، تعاریف و قضایا از جبرخطی می‌پردازیم. لازم به ذکر است که تعاریف مربوط به جبرخطی از کتاب جبر خطی هافمن [۳] و تعاریف مربوط به کنترل از کتاب کنترل مدرن دکتر خاکی صدیق [۲] استخراج شده است.

۱.۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. مجموعه ریشه‌های چند جمله‌ای

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) \tag{۱.۱}$$

که چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A است را طیف [۱] ماتریس A می‌نامند و با نماد $\Lambda(A)$ نشان می‌دهند و به هر عضو از $\Lambda(A)$ مقدار ویژه [۲] ماتریس A می‌گویند. به بیان دیگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A است اگر و فقط اگر بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ موجود باشد بطوریکه :

$$Ax = \lambda x \tag{۲.۱}$$

بردار x را بردار ویژه [۳] متناظر با مقدار ویژه λ می‌گویند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد، زیر فضای تولید شده توسط سطر (ستون) های ماتریس A، فضای سطری (ستونی) A نام دارد.
در مورد رتبه ماتریس A می‌توان گفت :
الف - بعد فضای سطری(ستونی) A را رتبه [۴] ماتریس A می‌نامند.

[۱] Spectrum
[۲] Eigenvalue
[۳] Eigenvector
[۴] Rank

ب - ماتریس A را رتبه کامل ستونی(سطری) می‌نامیم هرگاه ستون(سطر) های آن مستقل خطی باشد.
ج - ماتریس A را رتبه کامل [۵] نامند هرگاه رتبه کامل سطری یا رتبه کامل ستونی باشد.

تعریف ۳.۱.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معکوس پذیر است هرگاه :

$$det(A) \neq ۰ \tag{۳.۱}$$

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند :*

الف - $det(A) \neq ۰$

ب - $rank(A) = n$

ج - تمامی مقادیر ویژه‌های ماتریس A ناصفر می‌باشند.

تعریف ۵.۱.۱. ماتریس مربعی A را بالا مثلثی گویند هرگاه عناصر زیر قطر اصلی آن صفر و نیز پایین مثلثی گویند هرگاه عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشد.

تعریف ۶.۱.۱. ماتریس حقیقی که عناصر غیر از قطر اصلی نامنفی است را ماتریس متزلر [۶] می‌گویند.

تعریف ۷.۱.۱. ماتریس مربعی A را مقدماتی گویند هرگاه از انجام یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس I_n بدست آمده باشد.

تعریف ۸.۱.۱. ماتریس A و B متشابه است هرگاه ماتریس نامنفرد $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ موجود باشد بطوریکه :

$$T^{-۱}AT = B \tag{۴.۱}$$

۲.۱ برخی تجزیه های ماتریسی

قضیه ۱.۲.۱. *هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ با یک تغییر اساسی می تواند به فرم کانونیکال جردن تبدیل شود. ماتریس نامنفرد $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ وجود دارد بطوریکه :*

$$T^{-۱}AT = \begin{bmatrix} j_۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & j_۲ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & j_r \end{bmatrix} \tag{۵.۱}$$

که ماتریس های J_i ماتریس های جردن متناظر با λ_i می‌باشد و بصورت زیر تعریف می شود :

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۱ & \dots & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & ۱ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{۶.۱}$$

و بعد J_i با ستون های مستقل خطی متناظر با λ_i برابر است.

---

[۵] Full Rank

[۶] Metzler

تعریف ۲.۲.۱. مقادیر تکین ماتریس $A^{n\times m}$، برابر با ریشه دوم مقادیر ویژه ماتریس متقارن A^TA می‌باشد بطوریکه برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ داریم :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \tag{۷.۱}$$

قضیه ۳.۲.۱. *(تجزیه مقدار تکین [۷]) فرض کنید $A \in R^{m\times n}$ و $rank(A) = r$ باشد. آنگاه ماتریس‌های متعامد $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود دارند بطوریکه :*

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} V^T \tag{۸.۱}$$

بطوریکه :

$$\Sigma = diag(\sigma_۱, \ldots \sigma_r)$$
$$\sigma_۱ \geqslant \sigma_۲ \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > ۰ \tag{۹.۱}$$

قضیه ۴.۲.۱. *هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ می‌تواند به شکل*

$$A = QR \tag{۱۰.۱}$$

تجزیه شود که در آن $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ متعامد یکه و $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ بالا مثلثی می‌باشد.

قضیه ۵.۲.۱. *(تجزیه شور حقیقی) فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آنگاه ماتریس متعامد Q وجود دارد بطوریکه :*

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} R_{۱۱} & R_{۱۲} & \ldots & R_{۱k} \\ ۰ & R_{۲۲} & \ldots & R_{۲k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \ldots & R_{kk} \end{bmatrix} \tag{۱۱.۱}$$

در فرم بلوکی بالا مثلثی است و هر بلوک R_{ii} آن یا ۱×۱ با یک مقدار ویژه حقیقی و یا ۲×۲ با زوج مقادیر ویژه مختلط A می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱. (زیر فضای ناوردا[۸]) : زیر فضای $L \subset \mathbb{R}^n$، زیر فضای ناوردای ماتریس A نامیده می‌شود اگر :

$$AL \subset L$$

قابل ذکر است که هر مجموعه مرکب از بردارهای ویژه ماتریس A، یک زیر فضای ناوردا از A بوجود می‌آورد.

[۷] Singular value decomposition

[۸] Subspace invariant

۳.۱ تعاریف و پیش نیاز های کنترل

در مبحث کنترل خطی، معادلات

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{۱۲.۱}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{۱۳.۱}$$

بیانگر سیستم‌های چند متغیره ای هستند که در آن t متغیر زمان، $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ بردار حالت، $u \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ بردار ورودی و $y \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ بردار خروجی است. ماتریس‌های $A(t), B(t), C(t)$ و $D(t)$ را ماتریس‌های سیستم می‌نامیم که به ترتیب دارای ابعاد $n\times n, n\times m, p\times n$ و $p\times m$ می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱. اگر همه ماتریس‌های سیستم معادلات (۱۲.۱)و (۱۳.۱) مستقل از زمان باشند، آنگاه سیستم را یک سیستم کنترل ناوردای زمانی گویند.

تعریف ۲.۳.۱. سیستم (۱۲.۱) و (۱۳.۱) را یک سیستم خطی پیوسته زمانی گوییم. چنانچه در این سیستم به جای $\dot{x}(t)$ مقدار تقریبی آن را قرار دهیم، آنگاه به سیستم گسسته زمانی بصورت زیر می‌رسیم :

$$\begin{aligned}\frac{x(i+1) - x(i)}{h} &\approx Ax(i) + Bu(i)\\ x(i+1) - x(i) &\approx hAx(i) + hBu(i)\\ x(i+1) &\approx (hA+1)x(i) + hBu(i)\end{aligned}$$

که در آن $x(t_i) = x(i)$ است. حال اگر در عبارت فوق به جای $(hA+1)$ مقدار A و به جای hB مقدار B را قرار دهیم آنگاه داریم :

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \tag{۱۴.۱}$$

که (۱۴.۱) را سیستم گسسته زمانی می‌گوییم.

تعریف ۳.۳.۱. یک مداد ماتریسی از مرتبه n به شکل یک چند جمله‌ای از مرتبه n با ضرایب ماتریسی به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\Gamma(\lambda) = A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0 \tag{۱۵.۱}$$

بطوریکه $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ و همه ماتریس‌های A_i ناصفر هستند. در حالت خاص، مداد ماتریسی خطی به صورت $(A, B) = A - \lambda B$ نمایش داده می‌شود. مداد ماتریسی $A - \lambda B$ را منظم نامند اگر :

$$|A - \lambda B| \neq 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{۱۶.۱}$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشند. مجموعه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه

$$P(\lambda) := det(A - \lambda E) \tag{۱۷.۱}$$

طیف مداد ماتریس $(A-\lambda E)$ نامیده می شود. طیف را با نماد $\Lambda(A,E)$ نشان می‌دهیم. λ یک مقدار ویژه مداد $(A-\lambda E)$ است اگر و فقط اگر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$ موجود باشد بطوریکه :

$$Ax = \lambda Ex \tag{۱۸.۱}$$

بردار x را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. حالت تعادل یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت عدم وجود ورودی و اغتشاش و ورودی ثابت، خروجی در آن حالت باقی بماند که معمولا حالت تعادل، صفر در نظر گرفته می‌شود.

۴.۱ کنترل پذیری

تعریف ۱.۴.۱. سیستم خطی ناوردای زمانی [۹]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۱۹.۱}$$

را به ازای $t \geqslant t_0$ با حالت اولیه $x(t_0) = x_0$ در نظر بگیرید. هرگاه ورودی $u(t)$ که $t \in [t_0, t_1]$، حالت اولیه x_0 را در زمان t_1 به حالت تعادل منتقل نماید، حالت x_0 را در زمان t_0 کنترل پذیر می‌گوییم. اگر تمام مقادیر x_0 به ازای هر t_0 کنترل پذیر باشند، سیستم را کاملا کنترل پذیر یا بطور ساده کنترل پذیر گوییم.

تعریف ۲.۴.۱. سیستم خطی ناوردای زمانی (۱۹.۱) را کاملا کنترل پذیر گوییم اگر و تنها اگر برای ماتریس کنترل پذیری

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{۲۰.۱}$$

داشته باشیم $rank(Q) = n$. اگر سیستم دارای فقط یک ورودی باشد($m = 1$)، شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری سیستم این است که ماتریس Q نامنفرد باشد.

۵.۱ مشاهده پذیری

سیستم

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{۲۱.۱}$$

را با ماتریس‌های مذکور در نظر بگیرید. اگر بتوان هر حالت $x(t_0)$ را با مشاهده $y(t)$ در فاصله زمانی محدود $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ تعیین کرد، سیستم را کاملا مشاهده پذیر گوییم. بنابراین سیستمی کاملا مشاهده پذیر است که هر تغییر حالتی سر انجام بر تمام درایه های بردار خروجی تاثیر بگذارد.

[۹] Linear Time-Invariant

قضیه ۱.۵.۱. سیستم (۲۱.۱) *را کاملا مشاهده پذیرگوییم اگر و تنها اگر برای ماتریس مشاهده پذیری*

$$E = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \dots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}_{n\times np} \quad (۲۲.۱)$$

داشته باشیم $rank(E) = n$.

۶.۱ پایداری سیستم‌های کنترل

در طراحي سيستم کنترل، شناخت اجزای سیستم براي پيش بيني رفتار ديناميكي سيستم لازم است. مهم‌ترين مشخصه ي رفتار ديناميكي سيستم هاي کنترل، پايداري مطلق است. يك سيستم کنترل خطي ناورداي زماني در صورتي پايدار است كه هنگام اعمال يك شرط اوليه ي جديد به آن به حالت تعادل خود برگردد.
يك سيستم کنترل خطي را پايدار بحراني گوييم هرگاه نوسانات خروجي براي هميشه ادامه يابد و در صورتي ناپايدار است كه هنگام اعمال يك شرط اوليه ي جديد به آن، خروجي بطور بيكران واگرا شود.
حال به بررسي مفهوم رياضي پايداري در سيستم هاي کنترل مي پردازيم. سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی (۱۹.۱) با بردار ورودی

$$u(t) = Kx(t) \quad (۲۳.۱)$$

موسوم به قانون کنترل که در آن $u(t)$ متناسب با بردار حالت $x(t)$ انتخاب شده است، در نظر می‌گیریم. در این صورت سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس خورد حالت و $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را ماتریس پس خورد حالت نامند.
چنانچه $u(t)$ متناسب با بردار خروجي $y(t)$ انتخاب شود يعني :

$$u(t) = Ky(t) \quad (۲۴.۱)$$

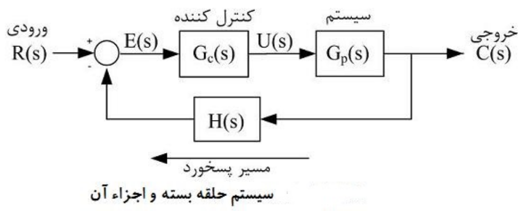
آن گاه سيستم کنترل را يك سيستم کنترل با پس خورد خروجي و $K \in \mathbb{R}^{m\times p}$ را ماتريس پس خورد خروجي نامند.

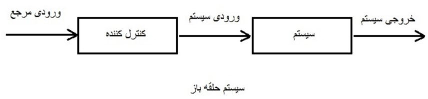
تعریف ۱.۶.۱. سیستم‌هایی که در آنها خروجی بر عملکرد کنترل تاثیر ندارد را سیستم‌های کنترل حلقه باز گوییم. همه ي سيستم هايي كه بر اساس زمانبندي كار مي‌كنند سيستم هاي حلقه باز هستند. چراغ‌هاي راهنمايي يك نمونه از اين سيستم ها مي باشند.

سیستم‌های کنترل پس خوردی را عموما سیستم‌های کنترل حلقه بسته می نامیم. منظور از کنترل حلقه بسته، استفاده از پس خورد برای کاهش خطا و رسیدن به پایداری است.
با ترکیب معادلات (۱۹.۱) و (۲۳.۱) رابطه زیر بدست می آید :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (۲۵.۱)$$

در این رابطه ماتریس A را ماتریس حلقه باز و مقادیر ویژه ی آن را مقادیر ویژه ی سیستم حلقه باز گوییم. همچنین ماتریس $(A + BK)$ را ماتریس حلقه بسته سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه ی حلقه بسته سیستم می‌نامیم. (شکل صفحه ۹)





شکل ۱.۱: سیستم‌های حلقه باز و حلقه بسته (۱.۱۴.۵)

قضیه ۲.۶.۱. *فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. به ازای هر بردار حالت اولیه ی $x_\circ$، سیستم خطی ناوردای زمانی*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad x(t_\circ) = x_\circ$$

دارای یک جواب منحصر به فرد به صورت زیر می‌باشد[۳] :

$$x(t) = e^{At}x_\circ$$

با استفاده از این قضیه و انتخاب بردار حالت اولیه $x_\circ$ جواب سیستم حلقه بسته را به صورت زیر بدست می آوریم :

$$x(t) = e^{(A+BK)t}x_\circ$$

چنانچه تمام مقادیر ویژه ی حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند آنگاه داریم :

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\circ \lim_{t\to\infty} e^{(A+BK)t} = \circ \tag{۲۶.۱}$$

این رابطه بیان می‌کند که با گذر زمان هر حالت اولیه در صورتی به حالت تعادل برده می‌شود که قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه ی ماتریس حلقه بسته منفی باشند. بنابراین شرط لازم و کافي براي پايداري يك سيستم خطي پيوسته زماني، وجود ماتريس پس خورد، به گونه اي است كه همه مقادير ويژه ماتريس حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط قرار گيرند.

۷.۱ تعاریف پایداری

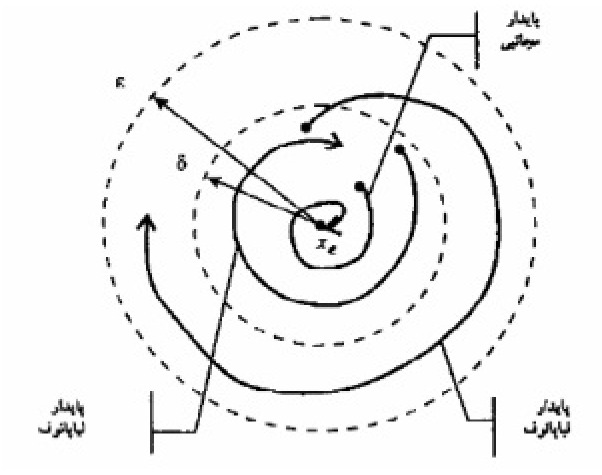
معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ معادله متناظر با یک سیستم غیر خطی تغییر پذیر با زمان است. t متغیر زمان، $x(t)$ بردار ستونی تغییرپذیر با زمان و بردار حالت n بعدی، $u(t)$ نشانگر متغیر ورودی یا کنترل و f تابع غیر خطی توصیف کننده سیستم است.

تعریف ۱.۷.۱. سیستم $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ را در نظر بگیرید:
نقطه تعادل x_e را پایدار به مفهوم لیاپانوف گویند، اگر برای هر t_0 و هر $0 < \epsilon$یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد که به ازای $\| x(t_0) - x_e \| < p$ برای $t \geqslant t_0$ داشته باشیم: $\| x(t_0) - x_e \| < \epsilon$ یعنی می‌توان با انتخاب حالت اولیه به اندازه کافی نزدیک به نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری کرد. به عبارت دیگر، حالت تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گوییم، هرگاه پاسخ سیستم ناشی از هر حالت اولیه که نزدیک به x_e باشد، هیچ گاه از نقطه تعادل دور نشود.
این تعریف صورت ضعیف پایداری است، صورت قوی‌تر و عملی‌تر وقتی است که پاسخ علاوه بر نزدیک ماندن به حالت تعادل، به سمت آن نیز میل کند.

تعریف ۲.۷.۱. نقطه تعادل پایدار مجانبی است، اگر :
الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.
ب) به ازای هر t_0 یک $\rho(\mathrm{t}_0) > 0$ وجود دارد که به ازای $\| \mathrm{x}(\mathrm{t}_0) - \mathrm{x}_\mathrm{e} \| < \rho$ و برای هر $\mathrm{t} \longrightarrow \infty$ رابطه زیر برقرار باشد :

$$\| x(t_0) - x_e \| \longrightarrow 0 \qquad (۲۷.۱)$$

بنابراین پایداری مجانبی علاوه بر پایداری به مفهوم لیاپانوف، همگرایی سیستم به نقطه تعادل را نیز تضمین می‌کند.



تعریف ۳.۷.۱. نقطه تعادل معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = f[x(t), t]$ را پایدار مجانبی فراگیر گویند، اگر :
الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

ب) برای هر $x(t_\circ)$ و هر $t_\circ$ هنگامیکه $t \longrightarrow \infty$ داشته باشیم :
$\parallel x(t_\circ) - x_\circ \parallel \longrightarrow \circ$

پس نقطه تعادل پایدار مجانبی فراگیر دارای این خاصیت است که کلیه پاسخ‌های دیگر نهایتا به سمت آن میل می‌کنند.

قضیه ۴.۷.۱. *سیستم داده شده زیر را در نظر بگیرید :*

$$\dot{x}(t) = f(x,t)$$

$$f(\circ,t) = \circ$$

و نیز تابع اسکالر $V(x,t)$ وجود داشته باشد که مشتقات جزئی آن پیوسته باشد، اگر :
الف) $V(x,t)$ معین مثبت باشد.
ب) $\dot{V}(x,t)$ معین منفی باشد.

آنگاه حالت تعادل مبدأ دارای پایداری مجانبی یکنواخت است.

تعریف ۵.۷.۱. یافتن ماتریس پس خورد K، برای سیستم کنترل خطی تعریف شده توسط مجموعه معادلات (۱۹.۱) و (۲۳.۱) به گونه‌ای که سیستم پایدار مجانبی باشد را مساله تخصیص مقادیر ویژه[۱۰] گوییم.

[۱۰] Eigenvalue assignment

فصل ۲

مدل‌سازی و پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با مشتق مرتبه کسری

۱.۲ مقدمه

در این فصل به سیستم‌های گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری می‌پردازیم. در ابتدا نوع پیوسته آن را تعریف کرده و سپس با تعریف مشتقات کسری، حالت گسسته این سیستم را بررسی می‌نماییم. همچنین برخی ویژگی‌های سیستم‌های گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری مانند کنترل پذیری، قابلیت دسترسی و مشاهده پذیری را بیان می‌کنیم. در نهایت به تحلیل پایداری این سیستم‌ها می‌پردازیم.

ابتدای تاریخ معادلات دیفرانسیل به قرن هفدهم برمی‌گردد. زمانی‌که حساب مشتق و انتگرال توسط نیوتن [۱] و لایبنیتز کشف شد. در حالت خاصی لایبنیتز نماد زیر را معرفی کرد :

$$D^{(n)}f(x) \qquad (۱.۲)$$

که مشتق مرتبه nام تابع f خوانده می‌شود. هوپیتال [۲] گزارش داد که چنین رابطه ای که ظاهرا برای مرتبه $n \in \mathbb{N}$ می باشد، اگر $n = \frac{1}{2}$ باشد نیز معنی دار خواهد بود. امروزه این نظریه به نام مشتقات مرتبه کسری شناخته می‌شود. وی در این یادداشت معنی مشتق از درجه $\frac{1}{2}$ را توضیح داده بود. در سال ۱۳۷۰ اویلر [۳] نیز موضوع مشتقات مرتبه کسری را مورد توجه خود قرار داد.[۷] در سال ۱۷۷۲ لاگرانژ قانون مرتبه عملگرهای دیفرانسیل را گسترش داد و بطور غیر مستقیم به حساب مشتق مرتبه کسری کمک کرد. لاپلاس [۴] نیز در سال ۱۸۱۲ با تعریف مفهوم انتگرال، مشتقات مرتبه کسری را تعریف کرد [۸]. همچنین فوریر [۵] در سال ۱۸۲۲ مشتقات مرتبه کسری را برای هر مرتبه دلخواه بیان کرد.

[۱] Newton

[۲] Hopital

[۳] Euler

[۴] Lpalace

[۵] Fourier

لتنیکوف [۶] نیز چندین مقاله را در مورد همین موضوع در سال های ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ به چاپ رسانید. اهمیت معادلات با مشتقات (انتگرال) مرتبه کسری این است که وابسته به تمام نقاط قبل از یک نقطه دلخواه می‌باشد، یعنی برای محاسبه مقدار مشتق یا انتگرال کسری در نقطه x_i، اطلاعات نقاط قبل از x_i نیز در محاسبات لحاظ می‌گردد. بدین ترتیب انتظار می رود که معادلات با مشتقات (انتگرال) مرتبه کسری سازگاری بیشتری با مدل سازی پدیده ها داشته باشند. در سه قرن پیش این موضوع فقط توسط ریاضی‌دان ها درک می شد، اما در چند سال اخیر در بسیاری از پژوهش های مهندسی، پزشکی و اقتصادی نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۹].

در ابتدا روی سیستم‌های با نمایش پیوسته زمانی تمرکز می‌کنیم. نمایش فضای حالت پیوسته زمانی معرفی گردیده و در تحلیل سیستم به کار گرفته شده است. نتایج معادلات فضای حالت با استفاده از تابع میتاج-لفلر [۷] بدست می آید و در ادامه نیز در خصوص پایداری سیستم‌های مرتبه کسری بحث می‌شود.

۲.۲ تعریف مشتقات کسری

تعاریف متفاوتی برای مشتقات غیر صحیح وجود دارد. تابع $f(t)$ را که $t \in \mathbb{R}$ در نظر بگیرید بطوریکه در فاصله $[a,\infty]$ پیوسته و انتگرال پذیر باشد و a نیز مبدا t است. ما معمولا با سیستم‌های دینامیک سر و کار داریم و نیز تابع $f(t)$ که تابعی از t است و $a \geqslant t$. لذا اگر $t < a$ آنگاه $f(t) = 0$ در نظر گرفته می‌شود. عدد صحیح m را به گونه ای در نظر بگیرید که $(m-1) < \alpha < m$. لتنیکوف تعریف زیر را برای مشتق غیر صحیح ارائه داده است [۸] :

$$\underset{a}{L} D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{(m-\alpha)} f^{(m+1)}(\tau) d(\tau) + \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(a)(t-\tau)^{(k-a)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \tag{۲.۲}$$

بطوریکه $\Gamma(\beta)$ تابع گاما می باشد که بصورت زیر است :

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} z^{\beta-1} e^{-z} dz \tag{۳.۲}$$

و $z \in \mathbb{C}$ ، یک عدد مختلط می باشد. در تعریف (۲.۲) فرض کنید که تابع f به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر است. یعنی :

$$f^k(a) < \infty, \qquad k = 0, 1, \dots, m \tag{۴.۲}$$

تعریف دیگری به نام لیوویل-ریمان-لتنیکوف در خصوص مشتق غیر صحیح نیز به فرم زیر وجود دارد :

$$\underset{a}{L} D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \tag{۵.۲}$$

بطور طبیعی، سیستم فیزیکی مدل شده با معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری، نیازمند این است که شرایط اولیه این نوع معادلات، تعبیر فیزیکی داشته باشد.متاسفانه تعریف (۵.۲) منجر به الزام وجود

[۶] Letnikov

[۷] Mittag-Lefler

شرایط اولیه می‌شود.برای رفع این موضوع، تعریف زیر پیشنهاد می‌شود :

$$ {}_{a}^{C} D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)(\tau)}}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \tag{۶.۲} $$

توجه داشته باشید که مشتق کسری (۵.۲) از یک تابع ناصفر ثابت $f(t) = c$ بصورت زیر است :

$$ {}_{a}^{L} D_t^{\alpha} f(t) = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{۷.۲} $$

ولی مشتق کسری (۶.۲) از یک تابع ثابت برابر صفر است.

۳.۲ معادلات دیفرانسیل سیستم‌های مرتبه کسری

سیستم تک وردی - تک خروجی ناوردای زمانی با مشتق مرتبه کسری را در نظر بگیرید. در همه موارد ما از (۶.۲) با زمان اولیه $t = 0$ استفاده می‌کنیم بطوریکه $a = 0$. معادلات زیر را داریم :

$$ \sum_{i=1}^{n_a} a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=1}^{n_b} b_j D^{\beta_j} u(t) \tag{۸.۲} $$

بطوریکه $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ و $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^+$ و $u(t) \in \mathbb{R}$ ورودی سیستم و $y(t) \in \mathbb{R}$ خروجی سیستم است. $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ تعداد جملات هر سمت از معادلات دیفرانسیل است. در این حالت مي توان نوشت :

$$ \sum_{i=1}^{n_a} a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=1}^{n_b} b_j D^{j\alpha} u(t) \tag{۹.۲} $$

۴.۲ تابع تبدیل

با دیدگاهی کلی تر، تابع تبدل را برای سیستم‌های با چند ورودی و چند خروجی تعریف می‌کنیم. برای یک سیستم خطی با n متغیر حالت، r ورودی و m خروجی، معادلات حالت بصورت زیر می باشد :

$$ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{۱۰.۲} $$

بطوریکه :

$$ x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \tag{۱۱.۲} $$

در این معادلات $A_{n\times n}$، $B_{n\times r}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times r}$ می باشد. با تبدیل معادلات (۱۰.۲) از میدان زمان به میدان لاپلاس داریم :

$$ \begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + Bu(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \tag{۱۲.۲} $$

که در آن :

$$U(s) = L\{u(t)\}$$

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

$$Y(s) = L\{y(t)\}$$

است. معادلات (۱۲.۲) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}((x_\circ) + BU(s)) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}((x_\circ) + BU(s)) + DU(s) \end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

برای این سیستم تابع تبدیل از معادله ماتریسی زیر با فرض $x(\circ) = \circ$ تعریف می‌شود :

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{۱۴.۲}$$

از مقایسه رابطه (۱۴.۲) با دومین معادله از (۱۳.۲) با توجه به اینکه $x(\circ) = \circ$ است، نتیجه می‌شود:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{۱۵.۲}$$

تابع تبدیل $G(s)$ در معادلات (۱۴.۲) و (۱۵.۲) یک رابطه ماتریسی به صورت ماتریس $m \times r$ است. معادله (۱۴.۲) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} Y_۱(t) \\ Y_۲(t) \\ \vdots \\ Y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{۱۱}(s) & G_{۱۲}(s) & \dots & G_{۱r}(s) \\ G_{۲۱}(s) & G_{۲۲}(s) & \dots & G_{۲r}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{m۱}(s) & G_{m۲}(s) & \dots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_۱(s) \\ U_۲(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{bmatrix} \tag{۱۶.۲}$$

هر یک از خروجی های سیستم به وسیله r تابع تبدیل با r ورودی سیستم ارتباط دارند. یعنی از رابطه (۱۶.۲) نتیجه می‌شود :

$$Y_i(s) = G_{i۱}(s)U_۱(s) + G_{i۲}(s)U_۲(s) + \dots + G_{ir}(s)U_r(s), \qquad (i = ۱, ۲, \dots, m) \tag{۱۷.۲}$$

رابطه (۱۷.۲) را می توان به صورت زیر هم بیان کرد :

$$Y_i(s) = \sum_{j=۱}^{r} G_{ij}(s)U_j(s), \qquad (i = ۱, ۲, \dots, m) \tag{۱۸.۲}$$

با توجه به وجود عامل $(sI - A)^{-1}$ در معادله (۱۵.۲) و با عنایت به اینکه :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)}$$

لذا مخرج تمامی توابع تبدیل G_{ij} عبارت $det(sI - A)$ است که با مساوی صفر قرار دادن آن، معادله مشخصه سیستم بدست می آید.

۵.۲ مدل فضای حالت بدست آمده با استفاده از تابع تبدیل مرتبه کسری

با استفاده از تبدیل لاپلاس با فرض شرایط اولیه صفر، از (۸.۲) تابع تبدیل زیر بدست می آید :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{n_b} b_j s^{\beta_j}}{\sum_{i=0}^{n_a} a_i s^{\alpha_i}} \quad (۱۹.۲)$$

اگر a_i و b_j را به ترتیب با $\acute{a}_{2k+1}$ و $\acute{a}_{2k}$ نشان دهیم، آنگاه (۱۹.۲) بصورت زیر بازنویسی می‌شود :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\acute{a}_0 + \acute{a}_2 s^{\beta_2} + \acute{a}_4 s^{\beta_4} + \cdots + \acute{a}_{2n} s^{\beta_{2n}}}{1 + \acute{a}_1 s^{\alpha_1} + \acute{a}_3 s^{\alpha_3} + \cdots + \acute{a}_{2n+1} s^{\alpha_{2n+1}}} \quad (۲۰.۲)$$

بطوریکه α_i ها مراتب کسری هستند و $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_{2n} \le \alpha_{2n+1}$. برای بدست آوردن (۲۰.۲) ابتدا یک متغیر واسط مانند $X(s)$ را بگونه ای تعریف می‌کنیم که :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{U(s)} \quad (۲۱.۲)$$

در ادامه می توانیم داشته باشیم :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(\acute{a}_0 + \acute{a}_2 s^{\beta_2} + \acute{a}_4 s^{\beta_4} + \cdots + \acute{a}_{2n} s^{\beta_{2n}}) X(s)}{(1 + \acute{a}_1 s^{\alpha_1} + \acute{a}_3 s^{\alpha_3} + \cdots + \acute{a}_{2n+1} s^{\alpha_{2n+1}}) U(s)} \quad (۲۲.۲)$$

داریم :

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= X(s) \\
X_2(s) &= s^{\alpha_1} X(s) = s^{\alpha_1} X_1(s) \\
X_3(s) &= s^{\alpha_2} X(s) = s^{(\alpha_2 - \alpha_1)} X_2(s) \\
&\vdots \\
X_{2n+1}(s) &= s^{\alpha_{2n}} X(s) = s^{(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1})} X_{2n}(s)
\end{aligned} \quad (۲۳.۲)$$

با استفاده از (۲۲.۲) و (۲۳.۲) داریم :

$$\begin{aligned}
s^{\alpha_1} X_1(s) &= X_2(s) \\
s^{(\alpha_2 - \alpha_1)} X_2(s) &= X_3 \\
&\vdots \\
s^{(\alpha_i - \alpha_{i-1})} X_i(s) &= X_{i+1}(s) \\
&\vdots \\
s^{(\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n})} X_{2n+1}(s) &= \frac{1}{\acute{a}_{2n+1}} [U(s) - X_1(s) - \acute{a}_1 X_2(s) - \cdots - \acute{a}_{2n-1} X_{2n}(s)]
\end{aligned} \quad (۲۴.۲)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس وارون می توان نوشت :

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}x_1(t) &= x_2 \\ D^{(\alpha_2-\alpha_1)}x_2(t) &= x_3 \\ &\vdots \\ D^{(\alpha_i-\alpha_{i-1})}x_i(t) &= x_{i+1} \\ &\vdots \\ D^{(\alpha_{2n}-\alpha_{2n-1})}x_{2n}(t) &= x_{2n+1} \\ D^{(\alpha_{2n+1}-\alpha_{2n})}x_{2n+1}(t) &= \frac{1}{\acute{a}_{2n+1}}[U(t)-x_1(t)-\acute{a}_1x_2(t)-\cdots-\acute{a}_{2n-1}x_{2n}(t)] \end{aligned} \tag{25.2}$$

خروجی سیستم به شکل زیر است :

$$y(t) = \acute{a}_0x_1(t)+0x_2(t)+\acute{a}_2x_3(t)+\cdots+0x_{2n}(t)+\acute{a}_{2n}x_{2n+1}(t) \tag{26.2}$$

با برابر قرار دادن معادلات فضای حالت داریم :

$$D^{[\gamma]}x(t) = Ax(t)+Bu(t), \qquad x(0)=x_0 \tag{27.2}$$

بطوریکه بردار حالت

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_{2n+1}(t) \end{bmatrix}^T \tag{28.2}$$

در فضای $\mathbb{R}^{2n+1}$ می باشد. فرض صفر بودن شرایط اولیه ایجاب می کند که یک مدل تابع انتقال را به شکل زیر تعریف کنیم :

$$D^{[\gamma]}x(t) = \begin{bmatrix} D^{\gamma_1}x_1(t) \\ \vdots \\ D^{\gamma_{2n+1}}x_{2n+1}(t) \end{bmatrix} \tag{29.2}$$

بطوریکه $\gamma_1=\alpha_1$ و برای $\gamma_i=(\alpha_i-\alpha_{i-1})$ که $i=2,\dots,2n+1$، معادله خروجی نیز به شکل

$$y(t) = Cx(t)+Du(t) \tag{30.2}$$

می باشد. ماتریس های A,B,C,D به شکل زیر هستند :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-1}{\acute{a}_{2n+1}} & \frac{-\acute{a}_1}{\acute{a}_{2n+1}} & 0 & \frac{-\acute{a}_3}{\acute{a}_{2n+1}} & 0 & \dots & \frac{-\acute{a}_{2n-1}}{\acute{a}_{2n+1}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\acute{a}_{2n+1}} \end{bmatrix}, \tag{31.2}$$

$$C = \begin{bmatrix} \acute{a}_0 & 0 & \acute{a}_2 & 0 & \dots & \acute{a}_{2n} \end{bmatrix}$$

و نیز برای ماتریس D ، در همه جا یک ماتریس صفر است مگر در حالتیکه $\alpha_{2n}=\alpha_{2n+1}$ که به شکل $D=[\frac{\acute{a}_{2n}}{\acute{a}_{2n+1}}]$ می باشد.

ویژگی های کنترل پذیری و مشاهده پذیری نیر در کتب و مقالات متعدد به خوبی مورد بررسی قرار گرفته

است. در موردی که مرتبه مشتقات همگی یکسان باشند، آنها را α نامگذاری می‌کنیم. در این حالت داریم :

$$D^{[\alpha]}x_(t) = \begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n_d} \end{bmatrix} = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{۳۲.۲}$$

که $2n+1$ را با n_d نشان می دهیم. با بکارگیری تبدیل لاپلاس برای (۳۲.۲) داریم :

$$X(s) = [s^\alpha I - A]^{-1}[BU(s) + x(0)] \tag{۳۳.۲}$$

با تعریف $\Phi(t) = L^{-1}[s^\alpha I - A]^{-1}$ متناظر با ماتریس انتقال حالت، جواب حالت بصورت زیر می باشد :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \tag{۳۴.۲}$$

$\Phi(t)$ می تواند بصورت زیر بیان شود [۱۴] :

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \tag{۳۵.۲}$$

سمت چپ معادله زیر، تابع میتاج - لفلر را نشان می دهد :

$$E_\alpha(t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \tag{۳۶.۲}$$

شرایط کنترل پذیری و مشاهده پذیری نمایش فضای حالت پیوسته زمانی سیستم‌های با مرتبه کسری، مشابه مرتبه صحیح هستند. لذا سیستم (۳۲.۲) قابل کنترل است اگر رتبه ماتریس کنترل پذیری

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n_d-1}B \end{bmatrix} \tag{۳۷.۲}$$

برابر n_d باشد. بر همین اساس سیستم مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر رتبه ماتریس مشاهده پذیری

$$\Omega = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n_d-1} \end{bmatrix} \tag{۳۸.۲}$$

برابر n_d باشد.

۶.۲ عملگر تفاضل کسری گسسته زمانی

در این قسمت یک نمایش گسسته شده از مدل فضای حالت کسری پیوسته از معادلات (۲۷.۲) و (۴۵.۲) را ارائه می دهیم. مدل فضای حالت با مشتقات مرتبه صحیح را در نظر بگیرید :

$$D^1 x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۳۹.۲}$$

بطوریکه :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_{n_d}(t) \end{bmatrix}^T \in R^{n_d} \tag{۴۰.۲}$$

بردار حالت باشد. تناوب ساده h را در نظر بگیرید. لذا برای $kh \le t \le (k+1)h$، $D^1x(t)$ بصورت زیر تقریب زده می‌شود :

$$D^1x(t) \approx \triangle^1 x((k+1)h) = \frac{x((k+1)h) - x(kh)}{h} \tag{۴۱.۲}$$

بنابراین می توان نوشت :

$$\triangle^1 \, x((k+1)h) = Ax(kh) + Bu(kh) \tag{۴۲.۲}$$

با مرتبه کسری یکسان، (۳۲.۲) را گسسته سازی می‌کنیم.مشتقات کسری $D^{[\alpha]}x(t)$ را می توان با استفاده از تعریف گراند - لتنیکوف تقریب زد. تقریب مشتق کسری گراند - لتنیکوف بدون استفاده از حد بصورت زیر می باشد :

$$D^{[\alpha]}f(x(t)) \approx \frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(k-j+1) \tag{۴۳.۲}$$

با جایگذاری این عملگر در سیستم کسری پیوسته، سیستم متناظر گسسته را بدست می آوریم :

$$\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{\alpha}{j}x_{k-j+1} = Ax_k + Bu_k \tag{۴۴.۲}$$

در نتیجه :

$$\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{\alpha}{j}x_{k-j+1} = (h^\alpha A)x_k + (h^\alpha B)u_k \tag{۴۵.۲}$$

با فاکتورگیری h^α از سمت راست (۴۵.۲) داریم :

$$D^{[\alpha]}x(t) \approx \triangle_h^{[\alpha]}x((k+1)h) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(x(k-j+1)h) \tag{۴۶.۲}$$

بطوریکه $\alpha \in \mathbb{R}^+$ مرتبه کسری، t زمان فعلی و $h \in \mathbb{R}^+$ دوره نمونه برداری است. جمله $\binom{\alpha}{j}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & , \quad j = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & , \quad j > 0 \end{cases} \tag{۴۷.۲}$$

اگر $h = 1$ در نظر بگیریم، عملگر تفاضل کسری گسسته $\triangle^\alpha$ بدست می آید. لازم به ذکر است که انتخاب دوره نمونه برداری h خیلی مهم است و نباید خیلی کوچک باشد.چون امکان دارد که تولید و انتشار خطا نماید.

۷.۲ مدل فضای حالت کسری گسسته زمانی

از موارد مطرح شده در قسمت های قبل، به یک مدل فضای حالت کسری گسسته زمانی خطی می‌رسیم:

$$\triangle^{[\alpha]} \, x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{۴۸.۲}$$

در این مدل، مرتبه مشتقگیری α برای تمام متغیرهای حالت $x_i(k)$ مشابه است. بر همین اساس از (۴۸.۲) داریم :

$$h^\alpha \triangle^{[\alpha]} x(k+۱) = x(k+۱) + \sum_{j=۱}^{k+۱}(-۱)^j \binom{\alpha}{j} x(k-j+۱) \qquad (۴۹.۲)$$

با جایگذاری (۴۸.۲) و (۴۹.۲) داریم :

$$x(k+۱) = \tilde{A}x(k) - \sum_{j=۱}^{k+۱}(-۱)^j \binom{\alpha}{j} x(k-j+۱) + \tilde{B}u(k) \qquad (۵۰.۲)$$

بطوریکه $\tilde{A} = h^\alpha A$ و $\tilde{B} = h^\alpha B$ می باشد. اگر $c_j = (-۱)^j \binom{\alpha}{j}$ آنگاه (۴۹.۲) می تواند به شکل زیر بازنویسی شود :

$$x(k+۱) = (\tilde{A} - c_۱ I_{n_d})x(k) - \sum_{j=۲}^{k+۱} c_j x(k-j+۱) + \tilde{B}u(k) \qquad (۵۱.۲)$$

اگر تعریف کنیم

$$A_\circ = (\tilde{A} - c_۱ I_{n_d}) \qquad (۵۲.۲)$$

و

$$A_j = -c_{j+۱} I_{n_d}, \qquad j > \circ \qquad (۵۳.۲)$$

آنگاه نتیجه می‌شود :

$$x(k+۱) = A_\circ x(k) + A_۱ x(k-۱) + A_۲ x(k-۲) + \cdots + A_k x(\circ) + \tilde{B}u(k) \qquad (۵۴.۲)$$

این توصیف می تواند به سیستم‌های با مرتبه های کسری مختلف نیز تعمیم یابد :

$$\triangle_h^{[\gamma]} x(k+۱) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$x(k+۱) = \triangle_h^{[\gamma]} x(k+۱) + \sum_{j=۱}^{k+۱} A_j x(k-j+۱)$$

بطوریکه :

$$\triangle_h^{[\gamma]} x(k+۱) = \begin{bmatrix} h^{\gamma_۱} \triangle^{\gamma_۱} x_۱(k+۱) \\ \vdots \\ h^{\gamma_{n_d}} \triangle^{\gamma_{n_d}} x_{n_d}(k+۱) \end{bmatrix}$$

که γ_i ها $(i = ۱, ۲, \ldots)$، مرتبه کسری را نشان می دهند. لذا می توان نوشت :

$$A_\circ = \tilde{A} + diag\{\binom{\gamma_i}{۱}, i = ۱, ۲, \ldots, n_d\} \qquad (۵۵.۲)$$

$$A_j = diag\{-(-۱)^{j+۱}\binom{\gamma_i}{j+۱}, i = ۱, ۲, \ldots, n_d\}, \qquad j = ۱, ۲ \ldots \qquad (۵۶.۲)$$

با استفاده از (۵۵.۲) معادله حالت زیر بدست می آید :

$$x(k+۱) = \sum_{j=\circ}^{k} A_j x(k-j) + \tilde{B}u(k), \qquad x(\circ) = x_\circ \qquad (۵۷.۲)$$

بطوریکه $\tilde{A}_i = h^{\gamma_i} A_i$ و $\tilde{B}_i = h^{\gamma_i} B_i$ مي باشند و نیز A_i و B_i به ترتیب نمایش سطرهای A و B هستند.

مثال عددی

مثال ۱.۷.۲. سیستم زیر را درنظر بگیرید :

$$\triangle^{0/5}x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(k)$$

بطوریکه در سیستم فوق $\alpha=0/5$، $h=1$ و بردار اولیه x و u صفر در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه $\tilde{A}=h^{\alpha}A$ و $\tilde{B}=h^{\alpha}B$ می باشد و نیز مقدار h برابر یک است، لذا ماتریس های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ تفاوتی با ماتریس های A و B ندارند. داریم :

$$\triangle^{0/5}\,x(k+1)=A_{0}x(k)-\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j}\binom{0/5}{j}x(k-j+1)+Bu(k) \tag{۵۸.۲}$$

بعنوان نمونه c_1 و A_0 را حساب می‌کنیم. بقیه ضرایب و ماتریس ها طبق الگو و بطور مشابه قابل محاسبه میباشند. داریم :

$$c_{1}=(-1)^{1}\times\frac{\frac{1}{2}}{1!}=-\frac{1}{2}$$

$$A_{0}=(A-c_{1}I_{2})=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 2\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

با محاسبه بقیه ضرایب و ماتریس ها، می توان معادله (۵۸.۲) را نوشت. همانطورکه از معادله (۵۸.۲) پیداست، مقدار k می تواند بطور ذاتی تا بینهایت ادامه یابد، لذا در نگاه اول، نمی‌توانیم آن را محدود سازیم. ولی در فصول بعد نشان خواهیم داد زمانی که ضرایب c_i کوچک می‌شود، می توان از مرحله‌ای به بعد، از بقیه آنها صرف نظر نمود تا به یک سیستم متناهی البعد برسیم.

۸.۲ ویژگی های سیستم‌های گسسته ناوردای زمانی مرتبه کسری

۱.۸.۲ قابلیت دسترسی و کنترل پذیری

در اینجا پیرامون یک معادله پایه برای سیستم‌های دینامیک مدل شده با (۵۷.۲) بحث می‌کنیم. معادله‌ای که بدست می آید، امکان این را فراهم می کند که حالت سیستم از هر حالت اولیه به هر حالت دلخواه انتقال یابد. در ادامه مفهوم قابلیت دسترسی[۸] و کنترل پذیری[۹] را بررسی می‌کنیم. ما به سیستم‌هایی علاقه مندیم که بطورکامل قابل کنترل و قابل دسترسی هستند.

قضیه ۱.۸.۲. *سیستم گسسته زمانی کسری خطی مدل شده با (۵۷.۲) قابل کنترل است اگر یک دنباله کنترل یافت شود بطوریکه از مبدا در یک زمان متناهی بتواند به یک حالت دلخواه برسد.*

[۸] Reachability

[۹] Controllability

تعریف ۲.۸.۲. برای سیستم گسسته زمانی کسری مدل شده با (۵۷.۲) موارد زیر را تعریف می‌کنیم :

الف ـ ماتریس کنترل پذیری :

$$C_k = \begin{bmatrix} G_0 B & G_1 B & G_2 B & \dots & G_{k-1} B \end{bmatrix} \qquad (۵۹.۲)$$

می باشد بطوریکه $G_i = \Phi(i, 0)$ است.

ب ـ قابلیت دسترسی :

$$W_r(0, k) = \sum_{j=0}^{k-1} G_j B B^T G_j^T \qquad (۶۰.۲)$$

واضح است که :

$$W_r(0, k) = C_k C_k^T = \begin{bmatrix} G_0 B & G_1 B & G_2 B & \dots & G_{k-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 B \\ G_1 B \\ G_2 B \\ \dots \\ G_{k-1} B \end{bmatrix} \qquad (۶۱.۲)$$

پ ـ گرامیان کنترل پذیری[۱۰] نشان می دهد که A_0 نامنفرد است :

$$W_r(0, k) = G_k^{-1} w_r(0, k) G_k^{-T}, \qquad k \geq 1 \qquad (۶۲.۲)$$

توجه کنید که $G_1 = A_0$ و وجود $w_r(0, k)$ نامنفرد بودن A_0 را الزام می کند. بنابراین A_0 را نامنفرد در نظر می گیریم.

قضیه ۳.۸.۲. *سیستم گسسته زمانی خطی با مرتبه کسری مدل شده با* (۵۷.۲) *قابل دسترس است اگر و تنها اگر یک زمان متناهی k موجود باشد بطوریکه $rank(G_k) = n$ یا $rank(w_r(0, k)) = n$. بنابراین دنباله ورودی*

$$U_k = \begin{bmatrix} u^T(k-1) & u^T(k-2) & \dots & u^T(0) \end{bmatrix} \qquad (۶۳.۲)$$

$x_0 = 0$ را در $k = 0$ به $x_f \neq 0$ در $k = K$ بصورت زیر انتقال دهد :

$$U_k = -C_k^T C_k^{-T} W_c^{-1}(0, k) x_0 \qquad (۶۴.۲)$$

۹.۲ مشاهده پذیری

در این قسمت تعمیم مفهوم مشاهده پذیری را برای سیستم معادلات

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{j=0}^{k} A_j x(k-j) + \tilde{B} u(k) \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned} \qquad (۶۵.۲)$$

بررسی می‌کنیم.

[۱۰] Reachability Gramian

قضیه ۱.۹.۲. *سیستم گسسته زمانی مرتبه کسری مدل شده با معادلات (۶۵.۲) در زمان $k = 0$ مشاهده‌پذیر است اگر و تنها اگر $t > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه حالت x_0 در لحظه $k = 0$ با مشخص بودن u_k و y_k که $(k \in [0, t])$ بصورت یکتا بدست آید [۳۱].*

تعریف ۲.۹.۲. برای سیستم گسسته زمانی مرتبه کسری مدل شده با معادلات (۶۵.۲) تعاریف زیر را داریم :

الف – ماتریس مشاهده پذیری :

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} CG_0 \\ CG_1 \\ CG_2 \\ \vdots \\ CG_{k-1} \end{bmatrix} \tag{۶۶.۲}$$

ب – گرامیان مشاهده پذیری :

$$W_0(0, k) = \sum_{j=0}^{k-1} G_j^T C^T C G_j \tag{۶۷.۲}$$

واضح است که $W_0(0, k) = \Omega_k^T \Omega_k$.

قضیه ۳.۹.۲. *سیستم گسسته زمانی خطی با مرتبه کسری مدل شده با (۵۷.۲) قابل دسترس است اگر و تنها اگر زمان متناهی k موجود باشد بطوریکه $rank(\Omega_k) = n$ یا بطور معادل :*

$$rank(W_0(0, k)) = n$$

بنابراین حالت اولیه x_0 در $k = 0$ به صورت زیر است :

$$x_0 = W_0^{-1}(0, k)\Omega_K^T[\tilde{\Lambda}_K - \Pi_K \tilde{\Sigma}_K] \tag{۶۸.۲}$$

بطوریکه :

$$\tilde{\Lambda}_K = \begin{bmatrix} u^T(0) & u^T(1) & \dots & u^T(K-1) \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\Sigma}_K = \begin{bmatrix} y^T(0) & y^T(1) & \dots & y^T(K-1) \end{bmatrix}^T$$

و

$$\Pi_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CG_0B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CG_1B & CG_0B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CG_2B & CG_1B & CG_0B & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ CG_{K-2}B & CG_{K-3}B & CG_{K-4}B & \dots & CG_0B & 0 \end{bmatrix} \tag{۶۹.۲}$$

از قضیه کیلی – همیلتون می‌توان نتیجه گرفت که برای سیستم‌های با مرتبه صحیح، رتبه ماتریس مشاهده پذیری Ω_k در تعداد گام $k \geq n$ نمیتواند افزایش یابد. شرط مشاهده پذیری برای سیستم‌های گسسته زمانی کسری مدل شده با (۵۷.۲) این است که در $k = n$، $rank(\Omega_k) = n$ باشد. نتایج نشان می‌دهد که رتبه کامل Ω_k می‌تواند به $k = K$ برسد که بزرگتر از n است.

۲.۱۰ تحلیل پایداری

۲.۱۰.۱ پایداری مجانبی

فضای حالت مدل شده با معادلات (۲.۵۷) را در نظر بگیرید. جواب این سیستم بصورت زیر است :

$$x(k) = G_k x(0) + \sum_{j=o}^{k-1} G_{k-j-1} B u(j)$$

برای مطالعه ویژگی های پایداری مجانبی سیستم، رابطه زیر را در نظر بگیرید :

$$x(k+1) = \sum_{j=0}^{k-1} A_j x(k-j), \qquad x(0) = x_0 \tag{۲.۷۰}$$

تعریف ۲.۱۰.۱. سیستم (۲.۷۰) پایدار مجانبی است اگر برای هر $k \geq 1$ و هر شرط اولیه x_0 داشته باشیم :

$$\lim_{k \to \infty} ||x(k)|| = 0 \tag{۲.۷۱}$$

با استفاده از نرم اقلیدسی داریم :

$$||x(k)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(k)} \tag{۲.۷۲}$$

که $x_i(k)$ ها، مولفه های $x(k)$ هستند. جواب (۲.۷۰) با شرط اولیه x_0 بصورت زیر است :

$$x(k) = G_k x_0, \qquad k \geqslant 0, \qquad G_0 = I_n \tag{۲.۷۳}$$

نتیجه می‌شود که سیستم(۲.۷۰) پایدار است اگر و تنها اگر :

$$||G_k|| \leqslant 1 \quad , \qquad k \geqslant 1 \tag{۲.۷۴}$$

نرم اقلیدسی برای ماتریس تبدیل بصورت زیر است :

$$||G_k|| = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}(G_k G_k^T) = \sigma_{max}(G_k) \tag{۲.۷۵}$$

بطوریکه λ_{max} و σ_{max} به ترتیب مقدار ویژه ماکسیمال و مقدار تکین ماکسیمال G_k می باشد. حال عملگر پسرو S را تعریف می‌کنیم. یک دنباله نامتناهی از نمونه های بردار x را در نظر گرفته و با X نمایش می دهیم بطوریکه شروع آن $k = 0$ تا بی نهایت است و برای $k < 0$، صفر می باشد. بنابراین داریم :

$$X = \{\ldots, 0, 0, x(0), x(1), x(2), \ldots, x(k), x(k+1), \ldots\}$$

عملگر S به شکل زیر عمل می کند :

$$\begin{aligned} SX &= S\{\ldots, 0, 0, x(0), x(1), x(2), \ldots, x(k), x(k+1), \ldots\} \\ &= \{\ldots, 0, 0, 0, 0, x(0), x(1), x(2), \ldots, x(k-1), \ldots\} \end{aligned}$$

قابل ذکر است که SX یک گام عقب‌تر از X می‌باشد. اکنون دنباله ستونی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(k) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{۷۶.۲}$$

با این نمایش، معادلات (۶۵.۲) می تواند به شکل زیر بازنویسی شود :

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \tilde{S}\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{S}\tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{X} \end{aligned} \tag{۷۷.۲}$$

بطوریکه :

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ I_n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I_n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & I_n & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1 & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \dots \\ A_3 & A_2 & A_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & B & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & C & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & C & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & C & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

قضیه ۲.۱۰.۲. *اگر قرار دهیم $A_s = \tilde{S}\tilde{A}$، آنگاه سیستم*

$$\tilde{X} = \tilde{S}\tilde{A}\tilde{X} = A_s\tilde{X} \tag{۷۸.۲}$$

بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر $\rho(A_s) \leq 1$، بطوریکه ρ شعاع طیفی عملگر A_s است که به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$\rho(A_s) = \lim_{i\to\infty} ||A_s^i||_*^{\frac{1}{i}} \tag{۷۹.۲}$$

بطوریکه :

$$||A_s^i||_*^{\frac{1}{i}} = sup_{[I,J]}||A_{s[I,J]}^i|| \qquad (۸۰.۲)$$

که $A_{s[I,J]}^i$ نمایش بلوک $[I,J]$ام ماتریس A_s^i می باشد. در عبارات فوق بجای ستاره در روابط می توان از نرم های مختلف استفاده نمود. در این روش یک مشاهده زمان - متناهی سیستم مطلوب است. برای این منظور، مفهوم پایداری عملی را به شکل زیر دنبال می‌کنیم.

تعریف ۳.۱۰.۲. سیستم (۶۵.۲) در یک زمان متناهی $L_h > 0$ پایدار عملی است اگر برای هر $1 \leqslant k \leqslant L_h$ و هر شرط اولیه x_0 نامساوی زیر برقرار باشد :

$$||x(k)|| \leqslant M||x_0|| \qquad (۸۱.۲)$$

بطوریکه M یک عدد متناهی مثبت می‌باشد. در نتیجه برای جواب سیستم (۷۳.۲)، سیستم (۷۰.۲) بطور عملی پایدار است اگر و تنها اگر :

$$||G_k|| \leqslant M, \qquad 1 \leqslant k \leqslant L$$

همچنین می‌توان نوشت :

$$A_s^L = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G_3 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{L_h} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & A_0^{L-h+1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \times & A_0^{L-h+2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

بلوک ماتریسی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$A_{sL_h}^L = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G_3 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{L_h} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

از موارد فوق می توان نتیجه گرفت که حالت سیستم (۷۰.۲) بطور عملی پایدار است اگر و تنها اگر :

$$||A_{sL_h}^L||_* \leqslant M$$

فصل ۳

مثبت بودن و پایداری مجانبی سیستم‌های توسیع یافته خطی با مداد منظم

۱.۳ مقدمه

در این فصل به بررسی سیستم‌های توسیع یافته خطی پیوسته و گسسته با مداد منظم می‌پردازیم. با تعریف سیستم‌های توسیع یافته خطی مثبت و بیان قضایا، پایداری آنها نیز مورد بحث واقع می‌شود.

سیستم‌های توسیع یافته خطی و تخصیص مقادیر ویژه با پسخورد حالت و خروجی در بسیاری از کتب و مقالات مورد توجه قرار گرفته‌اند. سیستم‌های خطی مثبت با مرتبه های کسری متفاوت و محاسبه فرم متعارف کرونکر مداد منفرد نیز در مقالات مختلفی مورد بحث قرار گرفته‌اند.[۳۲]
در این فصل مثبت بودن و پایداری سیستم‌های خطی توسیع یافته بررسی شده است. شرایط لازم و کافی برای مثبت بودن و پایداری سیستم‌های خطی گسسته زمانی و پیوسته زمانی نیز مورد بحث قرار گرفته است.

۲.۳ تعاریف و قضایای مقدماتی

سیستم پیوسته زمانی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(\circ) = x_\circ \qquad (۱.۳)$$

بطوریکه $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردارهای حالت و ورودی و $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ می باشند.

تعریف ۱.۲.۳. سیستم (۱.۳) را مثبت نامند اگر برای هر شرط اولیه $x(t_\circ) = x(\circ) \in \mathbb{R}^n_+$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m_+$ که $t \geq \circ$، داشته باشیم :

$$x(t) \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۲.۳}$$

قضیه ۲.۲.۳. سیستم (۱.۳) *مثبت است اگر و تنها اگر :*

$$A \in M_n, B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+ \tag{۳.۳}$$

برهان. [۱۵] □

تعریف ۳.۲.۳. سیستم مثبت (۱.۳) به طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر $u(t) = \circ$ و $t \geq \circ$.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \circ \qquad \forall x_\circ \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۴.۳}$$

قضیه ۴.۲.۳. سیستم مثبت (۱.۳) *بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای :*

$$\det[I_n s - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_\circ \tag{۵.۳}$$

مثبت باشند.[۱۵]

اکنون سیستم خطی گسسته زمانی زیر را در نظر می‌گیریم :

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \tag{۶.۳}$$

بطوریکه $x_i \in \mathbb{R}^n$ *و* $u_i \in \mathbb{R}^m$ *بردارهای حالت و ورودی و* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *و* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *می‌باشد.*

برهان. [۱۵] □

تعریف ۵.۲.۳. سیستم (۲۱.۴) را مثبت نامند اگر برای هر شرط اولیه $x(t_i) = x(i) \in \mathbb{R}^n_+$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m_+$ که $i \in \mathbb{Z}_+$، داشته باشیم :

$$x(t) \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۷.۳}$$

قضیه ۶.۲.۳. سیستم (۲۱.۴) *مثبت است اگر و تنها اگر :*

$$A \in \mathbb{R}^{n\times m}_+ \quad , \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+ \tag{۸.۳}$$

برهان. [۱۵] □

تعریف ۷.۲.۳. سیستم مثبت (۲۱.۴) به طور مجانبی پایدار نامند اگر $u_i = \circ$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$:

$$\lim_{i\to\infty} x_i = \circ \qquad \forall x_\circ \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۹.۳}$$

قضیه ۸.۲.۳. *سیستم مثبت (۲۱.۴) بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای*

$$\det[I_n(z+1)-A] = z^n + \bar{a}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 \qquad (۱۰.۳)$$

مثبت باشد.

برهان. [۱۵] □

۳.۳ مثبت بودن سیستم‌های خطی توسیع یافته

۱.۳.۳ سیستم‌های توسیع یافته پیوسته زمانی [۱]

سیستم توسیع یافته خطی پیوسته زمانی مستقل زیر را در نظر بگیرید:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (۱۱.۳)$$

بطوریکه $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ می باشند. مفروض است که $rank(E) < n$ و ماتریس $[Es - A]$ دارای مداد ماتریسی منظم است یعنی :

$$\det[Es - A] \neq 0, \quad s \in \mathbb{C} \qquad (۱۲.۳)$$

با انتخاب $s = c$ بطوریکه $\det[Ec - A] \neq 0$ و با ضرب (۱۱.۳) با ماتریس $[Ec - A]^{-1}$ داریم

$$\hat{E}\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) \qquad (۱۳.۳)$$

بطوریکه :

$$\hat{E} = [Ec - A]^{-1}E \quad , \quad \hat{A} = [Ec - A]^{-1}A \qquad (۱۴.۳)$$

با ارجاع به [۲۴] داریم :

$$\hat{E}\hat{A} = \hat{A}\hat{E} \qquad (۱۵.۳)$$

برای چگونگی رابطه (۱۵.۳) ابتدا نشان می‌دهیم که $\hat{A} = c\hat{E} - I_n$.

$$c\hat{E} = (cE - A)^{-1}(cE) \quad \Rightarrow \quad c\hat{E} - \hat{A} = (cE - A)^{-1}(cE) - (cE - A)^{-1}A$$

$$c\hat{E} - \hat{A} = (cE - A)^{-1}(cE - A) \quad \Rightarrow \quad c\hat{E} - \hat{A} = I_n \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = c\hat{E} - I_n$$

حال جابجایی دو ماتریس بدیهی است :

$$\hat{A}\hat{E} = (c\hat{E} - I_n)\hat{E} = c\hat{E}^2 - \hat{E} = \hat{E}(c\hat{E} - I_n) = \hat{E}\hat{A}$$

---

[۱] Continuse time descriptor systems

تعریف ۱.۳.۳. ماتریس A^D معکوس درزین[۲] $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ است اگر شرایط زیر برقرار باشد :

$$AA^D = A^D A \tag{۱۶.۳}$$

$$A^D A A^D = A^D \tag{۱۷.۳}$$

$$A^D A^{q+1} = A^q \tag{۱۸.۳}$$

بطوریکه q کوچکترین عدد صحیح نامنفی است که :

$$rank(A^q) = rank(A^{q+1}) \tag{۱۹.۳}$$

لم ۲.۳.۳. *اگر (۱۹.۳) برقرار باشد آنگاه :*

$$\hat{E}^D \hat{A} = \hat{A}\hat{E}^D \tag{۲۰.۳}$$

$$\hat{E}\hat{A}^D = \hat{A}^D \hat{E} \tag{۲۱.۳}$$

$$\hat{E}^D \hat{A}^D = \hat{A}^D \hat{E}^D \tag{۲۲.۳}$$

قضیه ۳.۳.۳. *جواب معادله (۱۳.۳) به شکل زیر است :*

$$x(t) = e^{\hat{E}^D \hat{A} t}\hat{E}^D \hat{E} v \tag{۲۳.۳}$$

بطوریکه $v \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است.[۲۴]

قضیه ۴.۳.۳. *برای سیستم استاندارد*

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) \quad , x(0) \in im(\bar{F}) \tag{۲۴.۳}$$

احکام زیر را داریم :

$$\bar{A}\bar{F} = \bar{F}\bar{A} \tag{۲۵.۳}$$

و

$$x(t) = \bar{F}x(t), \quad t \geq 0$$

برهان. با استفاده از تعریف ۱.۳.۳ و لم ۲.۳.۵ داریم :

$$\bar{A}\bar{F} = \hat{E}^D \hat{A}\hat{E}^D \hat{E} = \hat{E}^D \hat{E}\hat{A}\hat{E}^D = \hat{E}^D \hat{E}\hat{E}^D \hat{A} = \bar{F}\bar{A} \tag{۲۶.۳}$$

[۲] Drazin inverse

و از آنجایی که

$$\hat{E}^D\hat{E}e^{\hat{E}^D\hat{A}t} = e^{\hat{E}^D\hat{A}t}\hat{E}^D\hat{E}, \quad \hat{E}\hat{E}^D = \hat{E}^D$$

داریم :

$$\bar{F}x(t) = \hat{E}^D\hat{E}e^{\hat{E}^D\hat{A}t}\hat{E}^D\hat{E}v = e^{\hat{E}^D\hat{A}t}\hat{E}^D\hat{E}\hat{E}^D\hat{E}v = e^{\hat{E}^D\hat{A}t}\hat{E}^D\hat{E}v = x(t) \tag{۲۷.۳}$$

□

تعریف ۵.۳.۳. سیستم توسیع یافته (۱۱.۳) مثبت است اگر برای تمام $x(\circ) \in \mathbb{R}^n_+$ و $x(\circ) \in im(\hat{F})$ و $t \geq \circ$، $x(t) \in \mathbb{R}^n_+$.

قضیه ۶.۳.۳. *سیستم پیوسته زمانی توسیع یافته (۱۱.۳) مثبت است اگر و تنها اگر :*

$$\hat{E}^D\hat{A} \in M_n, \quad im(\hat{E}^D\hat{E}) \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۲۸.۳}$$

برهان. با استفاده از قضیه ۲.۲.۳ سیستم پیوسته زمانی خطی استاندارد مذکور مثبت است اگر و تنها اگر $\bar{A} \in M_n$. سیستم توسیع یافته (۱۳.۳) و همچنین (۱۱.۳) مثبت است اگر و تنها اگر سیستم معادل استاندارد آن مثبت باشد در این صورت (۲۸.۳) برقرار است. □

مثال ۷.۳.۳. سیستم توسیع یافته با ماتریس های زیر را در نظر بگیرید:

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & \circ \\ \circ & -۲ & \circ \\ \circ & \circ & -۱ \end{bmatrix} \tag{۲۹.۳}$$

مداد (۲۹.۳) منظم است و برای $c = ۱$ داریم:

$$[Ec - A]^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & \circ \\ \circ & ۲ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} \circ/۵ & \circ/۲۵ & \circ \\ \circ & \circ/۵ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۳۰.۳}$$

و

$$\hat{E} = [Ec - A]^{-۱}E = \begin{bmatrix} \circ/۵ & \circ/۲۵ & \circ \\ \circ & \circ/۵ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ/۵ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = [Ec - A]^{-۱}A = \begin{bmatrix} \circ/۵ & \circ/۲۵ & \circ \\ \circ & \circ/۵ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & \circ \\ \circ & -۲ & \circ \\ \circ & \circ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\circ/۵ & \circ & \circ \\ \circ & -۱ & \circ \\ \circ & \circ & -۱ \end{bmatrix} \tag{۳۱.۳}$$

با استفاده از روش ارائه شده در مقاله [۲۴] داریم:

$$\hat{E}^D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \tag{۳۲.۳}$$

و

$$\hat{A} = \hat{E}^D \hat{A} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \bar{F} = \hat{E}^D \hat{E} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \tag{۳۳.۳}$$

با استفاده از قضیه ۶.۳.۳ سیستم توسیع یافته (۱۳.۳) با (۳۱.۳) و همچنین سیستم (۱۱.۳) با (۲۹.۳) مثبت است.

۲.۳.۳ سیستم‌های توسیع یافته گسسته زمانی

سیستم گسسته زمانی خطی توسیع یافته مستقل زیر را در نظر بگیرید:

$$E' x_{i+۱} = A' x_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ = \{۰, ۱, ...\} \tag{۳۴.۳}$$

بطوریکه $x_i \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $E', A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ می باشد. مفروض است که $rank(E') < n$ و ماتریس $[E'z - A']$ دارای مداد ماتریسی منظم است، یعنی :

$$\det[E'z - A'] \neq ۰, z \in \mathbb{C} \tag{۳۵.۳}$$

با انتخاب $z = c$ بطوریکه $\det[E'c - A'] \neq ۰$ و ضرب (۳۴.۳) با ماتریس $[E'c - A']^{-۱}$ داریم:

$$\hat{E}' x_{i+۱} = \hat{A}' x_i \tag{۳۶.۳}$$

بطوریکه :

$$\hat{E}' = [E'c - A']^{-۱} E' \tag{۳۷.۳}$$

و

$$\hat{A}' = [E'c - A']^{-۱} A' \tag{۳۸.۳}$$

مشابه حالت (۱۳.۳) می توان نوشت :

$$\hat{E}' \hat{A}' = \hat{A}' \hat{E}' \tag{۳۹.۳}$$

قضیه ۸.۳.۳. *جواب معادله (۳۶.۳) به فرم زیر است [۲۴] :*

$$x_i = (\hat{E}'^D \hat{A}')^i \hat{E}'^D \hat{E}' v \tag{۴۰.۳}$$

بطوریکه $v \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است.

نشان می دهیم که (۴۰.۳) جواب معادله تفاضلی :

$$x_{i+1} = \bar{A}' x_i \tag{۴۱.۳}$$

می باشد بطوریکه :

$$\bar{A}' = \hat{E}'^D \hat{A}', \quad \bar{F}' = \hat{E}'^D \hat{E}', \quad x_i = (\bar{A}')^i \bar{F}' v \tag{۴۲.۳}$$

لذا سیستم توسیع یافته (۳۶.۳) برابر با سیستم استاندارد (۴۱.۳) است.

قضیه ۹.۳.۳. *برای سیستم استاندارد (۴۱.۳) احکام زیر را داریم :*

$$\bar{A}' \bar{F}' = \bar{F}' \bar{A}' \tag{۴۳.۳}$$

و

$$x_i = \bar{F}' x_i \quad , \quad i \in \mathbb{Z}_+ \tag{۴۴.۳}$$

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۴.۳.۳ است.

تعریف ۱۰.۳.۳. سیستم توسیع یافته (۳۴.۳) مثبت است اگر :

$$x_i \in \mathbb{R}^n_+, \qquad \forall x_\circ \in \mathbb{R}^n_+; x_\circ \in im(\bar{F}'), i \in \mathbb{Z}_+ \tag{۴۵.۳}$$

قضیه ۱۱.۳.۳. *سیستم گسسته زمانی توسیع یافته (۳۴.۳) مثبت است اگر و تنها اگر :*

$$\hat{E}'^D \hat{A}' \in \mathbb{R}^{n\times n}_+, im(\hat{E}'^D \hat{E}') \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۴۶.۳}$$

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۶.۳.۳ است.

مثال ۱۲.۳.۳. سیستم توسیع یافته (۳۴.۳) با ماتریس های زیر را در نظر بگیرید :

$$E' = \begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۲ & \circ \\ -۲ & -۲ & \circ \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} \circ/۵ & \circ/۵ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۲ \end{bmatrix} \tag{۴۷.۳}$$

مداد (۴۷.۳) منظم است و برای $c = ۱$ داریم :

$$[E'c - A']^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & \circ/۵ \\ ۱ & ۱ & \circ/۵ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۴۸.۳}$$

$$\hat{E}' = [E'c - A']^{-1}E' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0/5 \\ 1 & 1 & 0/5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴۹.۳)$$

$$\hat{A}' = [E'c - A']^{-1}A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0/5 \\ 1 & 1 & 0/5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (۵۰.۳)$$

با استفاده از روش ارائه شده در [۲۴] داریم :

$$\hat{E}'^{D} = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۱.۳)$$

و

$$\bar{A}' = \hat{E}'^{D}\hat{A}' = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۲.۳)$$

$$\bar{F}' = \hat{E}'^{D}\hat{E}' = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۳.۳)$$

با استفاده از قضیه ۱۱.۳.۳ سیستم توسیع یافته (۳۶.۳) با (۴۹.۳) و (۵۰.۳) و (۳۴.۳) با (۴۷.۳) مثبت است.

۴.۳ پایداری مجانبی سیستم‌های توسیع یافته خطی مثبت

۱.۴.۳ پایداری مجانبی سیستم‌های پیوسته زمانی

تعریف ۱.۴.۳. سیستم توسیع یافته مثبت (۱۳.۳) و (۱۱.۳) بطور مجانبی پایدار است اگر

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \quad \forall x(0) \in im(\hat{E}^{D}\hat{E}), x(0) \in \mathbb{R}^{n}_{+} \quad (۵۴.۳)$$

قضیه ۲.۴.۳. *سیستم توسیع یافته مثبت (۱۱.۳) بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای*

$$\det[I_n s - \hat{E}^{D}\hat{A}] = s^{p}(s^{n-p} + a_{n-p-1}s^{n-p-1} + ... + a_1 s + a_0) \quad (۵۵.۳)$$

مثبت باشند، بطوریکه :

$$p = n - rank\hat{E}^D\hat{A} \qquad (۵۶.۳)$$

برهان. با استفاده از قضیه ۴.۲.۳ سیستم پیوسته زمانی استاندارد مثبت (۱.۳) بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای (۵.۳) مثبت باشند. از این واقعیت و تعریف (۱.۴.۳) نتیجه می‌شود که سیستم توسیع یافته مثبت (۱۱.۳) بطورمجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چند جمله‌ای (۵۵.۳) مثبت باشند. □

مثال ۳.۴.۳. (ادامه مثال (۷.۳.۳)) در این مورد ماتریس $\hat{E}^D\hat{A}$ به شکل زیر است :

$$\hat{E}^D\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵۷.۳)$$

چند جمله‌ای مشخصه (۵۵.۳) به صورت زیر است :

$$\det[I_3 s - \hat{E}^D\hat{A}] = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^2(s+1) \qquad (۵۸.۳)$$

شرایط قضیه (۱۳.۳) برقرار است و سیستم توسیع یافته مثبت با ماتریس های (۲۹.۳) بطور مجانبی پایدار است.

۲.۴.۳ پایداری مجانبی سیستم‌های گسسته زمانی

تعریف ۴.۴.۳. سیستم توسیع یافته مثبت (۳۴.۳) بطور مجانبی پایدار است اگر :

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0, \forall x_0 \in (\hat{E}'^D\hat{E}'), x_0 \in \mathbb{R}^n_+ \qquad (۵۹.۳)$$

قضیه ۵.۴.۳. *سیستم توسیع یافته مثبت (۳۴.۳) بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای :*

$$\det[I_n(z+1) - \hat{E}'^D\hat{A}'] = (z+1)^{\bar{P}}(z^{n-\bar{p}} + \bar{a}_{n-\bar{p}-1}z^{n-\bar{p}-1} + \ldots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0) \qquad (۶۰.۳)$$

$$\bar{p} = n - rank(\hat{E}'^D\hat{A}') \qquad (۶۱.۳)$$

برهان. با استفاده از قضیه (۸.۲.۳) سیستم گسسته زمانی استاندارد مثبت (۲۱.۴) بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای (۱۰.۳) مثبت باشند. از این واقعیت و ۴.۴.۳ نتیجه می‌شود که سیستم توسیع یافته مثبت (۳۴.۳) بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چند جمله‌ای (۶۰.۳) مثبت باشد. □

مثال ۶.۴.۳. (ادامه مثال ۷.۳.۳)
در این حالت ماتریس $\hat{E}'^D\hat{A}'$ به شکل زیر است :

$$\hat{E}'^D\hat{A}' = \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \tag{۶۲.۳}$$

و چند جمله‌ای مشخصه آن به صورت زیر است :

$$\det[I_۳(z+۱) - \hat{E}'^D\hat{A}'] = \begin{vmatrix} z+۰/۵ & -۰/۵ & ۰ \\ ۰ & z+۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & z+۱ \end{vmatrix} = (z+۱)^۲(z+۰/۵) \tag{۶۳.۳}$$

شرایط قضیه (۵.۴.۳) برقرار است و سیستم توسیع یافته مثبت (۳۴.۳) با ماتریس های (۴۷.۳) بطور مجانبی پایدار است.

۵.۳ تعمیم سیستم‌های وابسته خطی

۱.۵.۳ سیستم‌های پیوسته زمانی وابسته خطی

سیستم پیوسته زمانی توسیع یافته خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(۰) = x_۰ \tag{۶۴.۳}$$

بطوریکه $x(t) \in \mathbb{R}^n$، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردارهای حالت و ورودی و $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ می باشند مفروض است که شرط (۱۲.۳) برقرار است.

قضیه ۱.۵.۳. *جواب معادله (۶۴.۳) به شکل زیر است [۲۴] :*

$$x(t) = e^{\hat{E}^D\hat{A}t}\hat{E}^D\hat{E}v + \int_۰^t e^{\hat{E}^D\hat{A}(t-\tau)}\hat{E}^D\hat{B}u(\tau)d\tau + \sum_{k=۰}^{q-۱}(\hat{E}^D\hat{E}-I_n)(\hat{E}^D\hat{A}^D)^k\hat{A}^D\hat{B}u^{(k)}(t) \tag{۶۵.۳}$$

بطوریکه $\hat{E}$ و $\hat{A}$ ماتریس های تعریف شده در (۱۴.۳) هستند و

$$u^{(k)}(t) = \frac{d^k u(t)}{dt^k} \quad , \quad k = ۰, ۱, \ldots, q-۱ \tag{۶۶.۳}$$

و

$$\hat{B} = [Ec - A]^{-۱}B \tag{۶۷.۳}$$

و $v \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است.

تعریف ۲.۵.۳. سیستم توسیع یافته (۶۴.۳) مثبت نامند اگر :

$$x(t) \in \mathbb{R}^n_+, t \geq \circ \qquad \forall x(\circ) \in \mathbb{R}^n_+, x(\circ) \in im(\bar{F}) \tag{۶۸.۳}$$

و تمام ورودی های $u(t) \in \mathbb{R}^m_+$ $(t \geq \circ)$.

قضیه ۳.۵.۳. *سیستم پیوسته زمانی توسیع یافته (۶۴.۳) مثبت است اگر و تنها اگر :*

$$\hat{E}^D\hat{A} \in M_n, \hat{E}^D\hat{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+ \quad , \quad (\hat{E}^D\hat{E} - I_n)(\hat{E}^D\hat{A}^D)^k\hat{A}^D\hat{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+ \tag{۶۹.۳}$$

بطوریکه $k = \circ, \text{۱}, ..., q - \text{۱}$ *می باشد و*

$$im[H_\circ, H_\text{۱}, ..., H_q] \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۷۰.۳}$$

بطوریکه :

$$H_k = \begin{cases} (\hat{E}^D\hat{E} - I_n)(\hat{E}^D\hat{A}^D)^k\hat{A}^D\hat{B} & k = \circ, \text{۱}, ..., q - \text{۱} \\ \hat{E}^D\hat{E} & k = q \end{cases} \tag{۷۱.۳}$$

برهان. از [۲۶] می توان گفت که اگر $E = I_n$ سیستم پیوسته زمانی استاندارد خطی (۶۴.۳) مثبت است اگر و تنها اگر $A \in M_n$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$. نشان می دهیم که :

$$\int_\circ^t e^{\hat{E}^D\hat{A}(t-\tau)}\hat{E}^D\hat{B}u(\tau)d\tau \in \mathbb{R}^n_+ \qquad u(t) \in \mathbb{R}^m_+, t \geq \circ \tag{۷۲.۳}$$

اگر و تنها اگر $\hat{E}^D\hat{A} \in M_n$ و $\hat{E}^D\hat{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$. بنابراین سیستم توسیع یافته (۶۴.۳) مثبت است اگر و تنها اگر شرایط (۶۹.۳) و (۷۰.۳) برقرار باشند. □

۲.۵.۳ سیستم‌های گسسته زمانی وابسته خطی

سیستم گسسته زمانی توسیع یافته خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$E'x_{i+\text{۱}} = A'x_i + B'u_i, i \in Z_+ = \{\circ, \text{۱}, ...\} \tag{۷۳.۳}$$

بطوریکه $x_i \in \mathbb{R}^n$ و $u_i \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردارهای حالت و ورودی و $E', A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B' \in \mathbb{R}^{n\times m}$ می باشند. مفروض است که $rank(E) < n$ و شرط (۳۵.۳) برقرار است.

قضیه ۴.۵.۳. *جواب معادله (۷۳.۳) به صورت زیر است :*

$$\begin{aligned} x_i = (\hat{E}'^D\hat{A}')^i\hat{E}'^D\hat{E}'v + \sum_{k=\circ}^{i-\text{۱}}(\hat{E}'^D\hat{A}')^{i-k-\text{۱}}\hat{E}'^D\hat{B}'u_k + \\ \sum_{k=\circ}^{q-\text{۱}}(\hat{E}'^D\hat{E}' - I_n)(\hat{E}'\hat{A}'^D)^k\hat{A}'\hat{B}'u_{i+k} \end{aligned} \tag{۷۴.۳}$$

بطوریکه $\hat{A}'$ و $\hat{E}'$ تعریف شده در (۳.۳۷) می باشند.

$$B' = [E'c - A']^{-1} B' \tag{۳.۷۵}$$

و $v \in \mathbb{R}^n_+$ دلخواه می باشد.

تعریف ۳.۵.۵. سیستم توسیع یافته (۳.۷۳) مثبت است اگر :

$$x_i \in \mathbb{R}^n_+, i \in Z_+ \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n_+, x_0 \in im(\bar{F}) \tag{۳.۷۶}$$

و تمام ورودی های $u_i \in \mathbb{R}^n_+$ که $i \in \mathbb{Z}_+$.

قضیه ۳.۵.۶. *سیستم گسسته زمانی توسیع یافته (۳.۷۳) مثبت است اگر و تنها اگر*

$$\hat{E}'^D \hat{A}' \in \mathbb{R}^{n\times n}_+, \hat{E}'^D \hat{B}' \in \mathbb{R}^{n\times m}_+, (\hat{E}'^D \hat{E}' - I_n)(\hat{E}' \hat{A}'^D)^k \hat{A}' \hat{B}' \in \mathbb{R}^{n\times m}_+ \tag{۳.۷۷}$$

که $k = 0, 1, ..., q-1$ می باشد و

$$im[H'_0, H'_1, ..., H'_q] \in \mathbb{R}^n_+ \tag{۳.۷۸}$$

بطوریکه

$$H'_k = \begin{cases} (\hat{E}'^D \hat{E}' - I_n)(\hat{E}' \hat{A}'^D)^k \hat{A}' \hat{B}' & k = 0, 1, ..., q-1 \\ \hat{E}'^D \hat{E}' & k = q \end{cases} \tag{۳.۷۹}$$

برهان. از [۲۶] می توان گفت که اگر $E' = I_n$، سیستم گسسته زمانی استاندارد خطی (۳.۷۳) مثبت است اگر و تنها اگر $\hat{A}' \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ و $\hat{B}' \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$.

نشان می دهیم که :

$$\sum_{k=0}^{i-1} (\hat{E}'^D \hat{A}')^{i-k-1} \hat{E}' \hat{B}' u_k \in \mathbb{R}^n_+ \qquad u_i \in \mathbb{R}^m_+, i \in \mathbb{Z}_+ \tag{۳.۸۰}$$

اگر و تنها اگر $\hat{E}'^D \hat{A}' \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ و $\hat{E}'^D \hat{B}' \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$. بنابراین سیستم توسیع یافته (۳.۷۳) مثبت است اگر و تنها اگر شرایط (۳.۷۷) و (۳.۷۸) برقرار باشد. □

در این فصل مثبت بودن و پایداری مجانبی سیستم‌های توسیع یافته پیوسته زمانی و گسسته زمانی با مداد منظم بررسی گردید. شرایط لازم و کافی برای مثبت بودن و پایداری مجانبی سیستم‌های توسیع یافته خطی نیز بیان شد. کارایی شرایطی که گفته شد روی مثال های عددی و سیستم‌های گسسته زمانی و پیوسته زمانی نشان داده شد. ملاحظات فوق می‌تواند برای سیستم‌های توسیع یافته کسری و توسیع یافته خطی تعمیم یابد.

فصل ۴

بررسی مثبت بودن سیستم‌های توسیع یافته خطی

۱.۴ مقدمه

تعاریف مربوط به سیستم‌های توسیع یافته خطی مثبت در فصل سوم بطورکامل مطرح گردید. این نوع از سیستم‌ها در علوم مهندسی، اقتصادی، اجتماعی، داروسازی و...کاربرد فراوان دارند. در این فصل روشی به کار گرفته خواهد شد که شرایط لازم و کافی جهت مثبت بودن سیستم‌های توسیع یافته خطی گسسته زمانی و پیوسته زمانی را بررسی خواهد کرد. [۳۳]

۲.۴ مثبت بودن سیستم‌های توسیع یافته خطی

۱.۲.۴ سیستم‌های توسیع یافته پیوسته زمانی خطی

سیستم توسیع یافته پیوسته زمانی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad x(\circ) = x_\circ \tag{۱.۴}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{۲.۴}$$

اگر زوج ماتریس (E, A) یا مداد ماتریسی $Es - A$ دارای دترمینان غیر صفر باشد آنگاه منظم است $(s \in \mathbb{C})$.

تعریف ۱.۲.۴. سیستم (۱.۴) و (۲.۴) مثبت است اگر برای هر شرط اولیه نامنفی $x_\circ \in \mathbb{R}^n_+$ و هر ورودی نامنفی $u(t) \in \mathbb{R}^m_+$ بطوریکه :

$$u^k(t) = \frac{d^k u(t)}{dt^k} \in \mathbb{R}^m_+ \quad , \quad k = ۱, \ldots, q-۱$$

داشته باشیم :

$$x(t) \in \mathbb{R}^n_+ \quad , \quad y(t) \in \mathbb{R}^p_+ \quad , \quad t > \circ$$

و q اندیس زوج ماتریس (E, A) می باشد [۳۳]. (لازم به ذکر است که اندیس q از ابتدا برای ما مشخص نیست و در انتها معلوم می‌گردد.)

قضیه ۲.۲.۴. *سیستم‌های توسیع یافته پیوسته زمانی خطی*

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}_0 u(t) + \bar{B}_1 u^{(1)}(t) + \cdots + \bar{B}_{q-1} u^{q-1}(t) \tag{۳.۴}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{۴.۴}$$

مثبت است اگر و تنها اگر :

$$\bar{A} \in M_n \ , \ \bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n\times m} \ , \ k = 0, 1, \ldots, q-1 \ , \ C \in \mathbb{R}_+^{p\times n} \tag{۵.۴}$$

بطوریکه M_n مجموعه ماتریس های متزلر $n \times n$ است.

۲.۲.۴ سیستم‌های توسیع یافته گسسته زمانی خطی

سیستم توسیع یافته گسسته زمانی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+ \tag{۶.۴}$$

$$y_i = Cx_i \tag{۷.۴}$$

فرض می کنیم که مداد $Ez - A$ منظم است.

تعریف ۳.۲.۴. سیستم (۶.۴) و (۷.۴) مثبت نامند اگر برای هر شرط اولیه نامنفی $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و هر ورودی $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ بطوریکه $i \in \mathbb{Z}_+$ داشته باشیم :

$$x_i \in \mathbb{R}_+^n, \qquad y_i \in \mathbb{R}_+^p \qquad (i \in \mathbb{Z}_+) \tag{۸.۴}$$

قضیه ۴.۲.۴. *سیستم توسیع یافته گسسته زمانی*

$$x_{i+1} = \bar{A}x_i + \bar{B}_0 u_i + \bar{B}_1 u_{i+1} + \cdots + \bar{B}_{q-1} u_{i+q-1} \tag{۹.۴}$$

$$y_i = Cx_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+ \tag{۱۰.۴}$$

مثبت است اگر و تنها اگر داشته باشیم :

$$\bar{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \ , \ \bar{B} \in \mathbb{R}_+^{n\times m} \ , \ (k = 0, 1, \ldots, q-1) \ ; \ C \in \mathbb{R}_+^{p\times n} \tag{۱۱.۴}$$

برهان.

$$x_i = \bar{A}^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{A}^{i-k-1}(\bar{B}_0 u_k + \bar{B}_1 u_{k+1} + \cdots + \bar{B}_{q-1} u_{k+q-1}) \tag{۱۲.۴}$$

از (۱۲.۴) و (۱۰.۴) نتیجه می شود که اگر (۱۱.۴) برقرار باشد، آنگاه برای هر $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ که $i \in \mathbb{Z}_+$، داشته باشیم :

$$x_i \in \mathbb{R}_+^n \ , \ y_i \in \mathbb{R}_+^p \tag{۱۳.۴}$$

در نظر بگیرید که برای هر $i \in \mathbb{Z}_+$ داشته باشیم $u_i = 0$. آنگاه از (۹.۴) و (۱۰.۴) برای $i = 0$ داریم :

$$x_1 = \bar{A}x_0 \in \mathbb{R}^n_+ \ , \ y_0 = Cx_0 \in \mathbb{R}^p_+ \tag{۱۴.۴}$$

(ماتریس های $\bar{A}$ و C و بردار x_0 دلخواه هستند). □

۳.۴ تبدیل معادلات حالت

۱.۳.۴ سیستم‌های پیوسته زمانی خطی

معادله (۱.۴) را با $det(E) = 0$ و مداد منظم $Es - A$ به صورت معادله (۳.۴) می توان نوشت. با انجام عملیات سطری مقدماتی[1] [۳] روی چیدمان ماتریسی زیر :

$$\begin{matrix} E & A & B \end{matrix} \tag{۱۵.۴}$$

یا بطور هم ارز روی معادله (۱.۴) داریم :

$$\begin{matrix} E_1 & A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \end{matrix} \tag{۱۶.۴}$$

و

$$E_1\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \tag{۱۷.۴}$$

$$0 = A_2x(t) + B_2u(t) \tag{۱۸.۴}$$

بطوریکه سطرهای ماتریس E_1 مستقل خطی هستند. با مشتق گیری از رابطه (۱۸.۴) نسبت به زمان داریم :

$$A_2\dot{x}(t) = -B_2\dot{u}(t) \tag{۱۹.۴}$$

معادلات (۱۷.۴) و (۱۹.۴) می توانند بصورت زیر بازنویسی شوند :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2 \end{bmatrix} \dot{u}(t) \tag{۲۰.۴}$$

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ نامنفرد باشد، آنگاه با حل (۲۰.۴) داریم :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2 \end{bmatrix} \dot{u}(t) \right) \tag{۲۱.۴}$$

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ منفرد باشد، آنگاه با عملیات سطری مقدماتی روی چیدمان ماتریس های زیر :

[1] Elementary row operations

$$\begin{matrix} E_1 & A_1 & B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & -B_2 \end{matrix} \tag{۲۲.۴}$$

داریم :

$$\begin{matrix} E_2 & A_3 & B_3 & C_1 \\ 0 & A_4 & B_4 & C_2 \end{matrix} \tag{۲۳.۴}$$

و

$$E_2\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) + C_1\dot{u}(t) \tag{۲۴.۴}$$

$$0 = A_4x(t) + B_4u(t) + C_2\dot{u}(t) \tag{۲۵.۴}$$

بطوریکه E_2 دارای سطرهای مستقل خطی می باشد و $rank(E)_2 \geqslant rank(E)_1$. با مشتق گیری از (۲۵.۴) نسبت به زمان داریم :

$$A_4\dot{x}(t) = -B_4\dot{u}(t) - C_2\ddot{u}(t) \tag{۲۶.۴}$$

معادلات (۲۴.۴) و (۲۶.۴) می توانند بصورت زیر بازنویسی شوند :

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ A_4 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} C_1 \\ -B_4 \end{bmatrix} \dot{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_2 \end{bmatrix} \ddot{u}(t) \tag{۲۷.۴}$$

بطوریکه چیدمان ماتریسی زیر

$$\begin{matrix} E_2 & A_3 & B_3 & C_1 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & -B_4 & -C_2 \end{matrix} \tag{۲۸.۴}$$

را می توان از (۲۲.۴) بدست آورد.[۳۳]

اگر ماتریس

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{۲۹.۴}$$

نامنفرد باشد، آنگاه می توان مشابه معادله (۲۰.۴)، معادله (۲۷.۴) را حل نمود. اگر ماتریس (۳۰.۴) منفرد باشد، کار را برای (۲۸.۴) تکرار می کنیم. بعد از $q-1$ مرحله به ماتریس نامنفرد زیر می رسیم :

$$\begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix} \tag{۳۰.۴}$$

و

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_q \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_q \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} C_q \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t) + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ -H_q \end{bmatrix} u^{(q-1)}(t) \right) \tag{۳۱.۴}$$

بطوریکه $u^{(k)}(t) = \dfrac{d^k u(t)}{dt^k}$ می باشد. همچنین q در عبارت فوق، برابر با اندیس زوج (E, A) می باشد [۳۳].

مثال عددی

مثال ۱.۳.۴. با توجه به مراحل مذکور در قسمت قبل، معادله زیر را به صورت معادله (۲۱.۴) تبدیل نموده و اندیس q را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} u(t) \tag{۳۲.۴}$$

در ابتدا داریم :

$$\begin{array}{ccc} E & A & B \end{array} = \begin{array}{cccccccc} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}$$

با جمع سطر دو و یک و جایگذاری آن در سطر دو و نیز تعویض سطر دو با سه داریم :

$$\begin{array}{ccc} E_۱ & A_۱ & B_۱ \\ ۰ & A_۲ & B_۲ \end{array} = \begin{array}{cccccccc} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \end{array}$$

در مرحله بعد داریم [۳۳] :

$$\begin{array}{cccc} E_۱ & A_۱ & B_۱ & ۰ \\ A_۲ & ۰ & ۰ & -B_۲ \end{array} = \begin{array}{cccccccccc} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array}$$

ماتریس

$$\begin{bmatrix} E_۱ \\ A_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نامنفرد است و از (۲۱.۴) داریم :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} E_۱ \\ A_۲ \end{bmatrix}^{-۱} \left(\begin{bmatrix} A_۱ \\ ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_۱ \\ ۰ \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} ۰ \\ -B_۲ \end{bmatrix} \dot{u}(t) \right) \tag{۳۳.۴}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \dot{u}(t)$$

در این مثال $q = ۲$ می باشد.

۲.۳.۴ سیستم‌های گسسته زمانی

مشابه روشی که برای سیستم‌های پیوسته زمانی گفته می شود، می توان آن را برای سیستم‌های گسسته زمانی نیز اعمال نمود. با بکارگیری اعمال سطری مقدماتی روی (۱۵.۴)، به (۱۶.۴) می رسیم و :

$$E_1 x_{i+1} = A_1 x_i + B_1 u_i \tag{۳۴.۴}$$

$$0 = A_2 x_i + B_2 u_i \tag{۳۵.۴}$$

بطوریکه E_1 دارای سطرهای مستقل خطی می باشد. با جایگزینی $i+1$ به جای i در (۳۵.۴) داریم :

$$A_2 x_{i+1} = -B_2 u_{i+1} \tag{۳۶.۴}$$

معادلات (۳۴.۴) و (۳۶.۴) می توانند بصورت زیر نوشته شوند :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2 \end{bmatrix} u_{i+1} \tag{۳۷.۴}$$

چیدمان زیر می تواند از (۱۶.۴) بدست آید [۳۳]:

$$\begin{matrix} E_1 & A_1 & B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & -B_2 \end{matrix} \tag{۳۸.۴}$$

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ نامنفرد باشد، آنگاه از حل (۳۷.۴) داریم :

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2 \end{bmatrix} u_{i+1} \right) \tag{۳۹.۴}$$

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ منفرد باشد، آنگاه با عملیات سطری مقدماتی روی (۳۸.۴)، می توانیم (۲۳.۴) را بدست آوریم و :

$$E_2 x_{i+1} = A_3 x_i + B_3 u_i + C_1 u_{i+1} \tag{۴۰.۴}$$

$$0 = A_4 x_i + B_4 u_i + C_2 u_{i+1} \tag{۴۱.۴}$$

بطوریکه E_2 دارای سطرهای مستقل خطی می باشد و $rank(E_2) \geqslant rank(E_1)$. با جایگزینی $i+1$ به جای i در (۴۱.۴) داریم :

$$E_4 x_{i+1} = -B_4 u_i - C_2 u_{i+2} \tag{۴۲.۴}$$

معادلات (۴۰.۴) و (۴۲.۴) می توانند بصورت زیر نوشته شوند :

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ A_4 \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} C_1 \\ -B_4 \end{bmatrix} u_{i+1} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_2 \end{bmatrix} u_{i+2} \tag{۴۳.۴}$$

از (۲۳.۴) داریم [۳۳] :

$$\begin{matrix} E_2 & A_3 & B_3 & C_1 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & -B_4 & -C_2 \end{matrix} \tag{۴۴.۴}$$

اگر ماتریس (۳۰.۴) نامنفرد باشد، می توان x_{i+1} را از (۴۳.۴) بدست آورد و اگر منفرد باشد، کار را برای ماتریس (۴۴.۴) تکرار می کنیم. اگر دارای مداد منظم باشد، بعد از $q-1$ مرحله ماتریس نامنفرد زیر را داریم :

$$\begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix} \tag{۴۵.۴}$$

و

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_q \\ 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} B_q \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} C_q \\ 0 \end{bmatrix} u_{i+1} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ -H_q \end{bmatrix} u_{i+q-1} \right) \tag{۴۶.۴}$$

مثال عددی

مثال ۲.۳.۴. با توجه به مراحل مذکور در قسمت قبل، معادله زیر را به صورت معادله (۳.۴) تبدیل نموده و اندیس q را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} u_i \tag{۴۷.۴}$$

در ابتدا چیدمان زیر را داریم :

$$E \quad A \quad B \; = \; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{matrix}$$

در چیدمان فوق اگر سطر سوم را با سطر دوم جمع کرده و به جای سطر سوم قرار داده و سپس سطر سوم را با دو برابر سطر اول جمع کرده و به جای سطر سوم جایگزین نماییم، داریم :

$$\begin{matrix} E_1 & A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{matrix}$$

در مرحله بعد داریم [۳۳] :

$$\begin{array}{cccc} E_1 & A_1 & B_1 & 0 \\ -A_2 & 0 & 0 & B_2 \end{array} = \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

ماتریس

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ -A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نامنفرد است و از (۳۹.۴) داریم :

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_2 \end{bmatrix} u_{i+1} \right) \tag{۴۸.۴}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0/5 \end{bmatrix} u_{i+1}$$

در این مثال $q = 1$ می باشد.

قضیه ۳.۳.۴. *سیستم توسیع یافته گسسته زمانی خطی (۳.۴) و (۴.۴) مثبت است اگر و تنها اگر :*

$$\begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_q \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \quad \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_q \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, \ldots, \begin{bmatrix} E_{q-1} \\ A_{q+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -H_q \end{bmatrix} \tag{۴۹.۴}$$

برهان. [۳۳]. □

مثال عددی

مثال ۴.۳.۴. (ادامه مثال (۲.۳.۴)) سیستم توسیع یافته گسسته زمانی خطی با معادله (۴۷.۴) طبق قضیه فوق، مثبت است، زیرا داریم :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ -A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ -A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0/5 \end{bmatrix}$$

همانطورکه ملاحظه می کنید، ماتریس های فوق دارای دارایه های نامنفی هستند.

در این بخش مثبت بودن سیستم‌های توسیع یافته پیوسته زمانی و گسسته زمانی خطی بررسی گردید و شرایط لازم و کافی برای مثبت بودن این سیستم‌ها ذکر شد. در نهایت با بکارگرفتن قضایای گفته شده در این بخش، چند مثال عددی نیز مطرح شد.

فصل ۵

کنترل سیستم‌های کسری با پسخورد حالت پیشرو و گزاره‌ای

۱.۵ مقدمه

در این فصل پسخوردحالت پیشرو و گزاره‌ای را برای یک سیستم توسیع یافته کسری گسسته زمانی خطی معرفی می‌کنیم و با ارائه مثال این روش را توضیح می‌دهیم.

۲.۵ شرح مسئله

سیستم توسیع یافته کسری گسسته زمانی خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$E\Delta^{\alpha}x_{k+۱} = Ax_k + Bu_k \quad , \quad x(۰) = ۰, \quad ۰ < \alpha < ۱ \tag{۱.۵}$$

بطوریکه $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس منفرد، $x_k \in \mathbb{R}^{n\times ۱}$ بردار حالت، α مرتبه مشتق گیری، u_k بردار ورودی کنترل و $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$، ماتریس های ناوردای زمانی باشد. مشتق مرتبه αام $x_{k+۱}$ بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$\Delta^{\alpha}x_{k+۱} = \sum_{i=۰}^{k+۱}(-۱)^i\binom{\alpha}{i}x_{k-i+۱} \tag{۲.۵}$$

$$\binom{\alpha}{i} = \begin{cases} ۱ & i = ۰ \\ \frac{\alpha(\alpha-۱)\dots(\alpha-i+۱)}{i!} & i = ۱, ۲, \dots \end{cases}$$

با جایگذاری (۲.۵) در (۱.۵) داریم :

$$E\left(\sum_{i=۰}^{k+۱}(-۱)^i\binom{\alpha}{i}x_{k-i+۱}\right) = Ax_k + Bu_k \tag{۳.۵}$$

با توجه به معادله (۳.۵) می‌توان نوشت :

$$Ex_{k+1} = (A + c_1 E)x_k + c_2 Ex_{k-1} + \cdots + c_{k+1}Ex_0 + Bu_k \ , \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (۴.۵)$$

بطوریکه :

$$c_i = (-1)^{i+1}\binom{\alpha}{i}$$

سیستم (۱.۵) را می‌توان بصورت سیستمی با بعد بینهایت تبدیل کرد. طبق تعریف $\Delta^\alpha x_{k+1}$، معادله (۳.۵) بصورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{aligned} Ex_{k+1} &= (A + \alpha E)x_k + \sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{j+1}\binom{\alpha}{j}Ex_{k-j+1} + Bu_k \\ &= (A + \alpha E)x_k + \sum_{j=2}^{k+1} c_j Ex_{k-j+1} + Bu_k. \end{aligned} \qquad (۵.۵)$$

با توجه به اینکه ضرایب c_i نزولی است و به ازای Lهای بزرگ $c_{L+1} \approx 0$، $(L = 0, 1, \ldots)$ سیستم فوق بصورت زیر تبدیل می‌گردد :

$$Ex_{k+1} = (A + \alpha E)x_k + \sum_{j=2}^{L} c_j Ex_{k-j+1} + Bu_k. \qquad (۶.۵)$$

حال با تغییر

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + \alpha E & c_1 E & c_2 E & \ldots & c_{k-L+1}E \\ I & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad U_k = u_k$$

$$X_k = [x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-L+1}]^T, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & I \end{bmatrix}$$

آنگاه سیستم (۶.۵) به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\bar{E}X_{k+1} = \bar{A}X_k + \bar{B}U_k \qquad (۷.۵)$$

بطوریکه $\bar{A}$ و $\bar{E} \in \mathbb{R}^{n(k+1)\times n(k+1)}$ ، $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n(k+1)\times 1}$ و $X_k \in \mathbb{R}^{n(k+1)\times 1}$ بردار حالت و $U_k \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ بردار ورودی می‌باشد که این را پایداری عملی می نامیم. (به دلیل اینکه ابعاد ماتریس را در عمل متناهی کردیم.)

۳.۵ کنترل سیستم‌های توسیع یافته گسسته زمانی کسری با استفاده از پسخورد حالت پیشرو

سیستم(۱.۵) با ماتریس های تعریف شده و رابطه (۲.۵) در نظر بگیرید. حال کنترل پسخورد حالت پیشرو را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$u_k = -k_d X_{k+1} \tag{۸.۵}$$

بنابراین ما باید پسخورد حالت پیشرو k_d را با استفاده از روش های پسخورد حالت بدست آوریم که قطب های سیستم کنترل شده (۱.۵) و (۸.۵) مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ که در آن $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و برای $i = 1, 2, \ldots, n$ ،$\lambda_i \neq 0$ باشد. این روش برتری استفاده از پسخورد حالت پیشرو را به جای استفاده از پسخورد حالت نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۵. *ماتریس های زیر را تعریف می‌کنیم :*

$$N = A^{-1}E \quad , \quad M = -A^{-1}B \tag{۹.۵}$$

و فرض می‌کنیم‌که زوج (A, B) کنترل پذیر باشد و k_d پسخورد حالتی باشد‌که مجموعه $\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\}$ قطب های سیستم حلقه بسته زیر باشند :

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Mw(t) \tag{۱۰.۵}$$

$$w(t) = -k_d z(t) \tag{۱۱.۵}$$

آنگاه برای پسخورد k_d، مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ قطب هایی از سیستم حلقه بسته زیر می‌باشد :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۱۲.۵}$$

$$u(t) = -k_d x(t) \tag{۱۳.۵}$$

برهان. اثبات : [۷] □

مفروضات زیر را در نظر بگیرید :

$$rank[\bar{E} \mid \bar{B}] = n(k+1)$$
$$rank[\bar{A}] = n(k+1)$$
$$rank[\bar{B}] = m$$

واضح است که اگر $rank[\bar{A}] = n(k+1)$، آنگاه ماتریس k_d وجود دارد بطوریکه :

$$rank[\bar{E} + \bar{B}k_d] = n(k+1) \tag{۱۴.۵}$$

در ادامه بررسی خواهیم کرد که شرط (۱۴.۵) ،شرط خوبی نمی‌باشد. به این دلیل که در اغلب اوقات، ماتریس $\bar{A}$ رتبه کامل نیست و لذا مسائل در این زمینه بسیار محدود می‌شود. برای k_d که صادق در (۱۴.۵) می‌باشد، از (۸.۵) نتیجه می‌گیریم که سیستم (۱.۵) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود :

$$\bar{E}X_{k+1} = \bar{A}X_k - \bar{B}k_d X_{k+1} \tag{۱۵.۵}$$

$$X_{k+1} = (\bar{E} + \bar{B}k_d)^{-1}\bar{A}X_k \tag{۱۶.۵}$$

لم ۲.۳.۵. *ماتریس $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را با $rank(Z) = n$ و مقادیر ویژه ای برابر با $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ در نظر بگیرید. آنگاه مقادیر ویژه Z^{-1} برابر با $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ می‌باشد.*

برهان. برای هر مقدار ویژه $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ از Z، یک بردار ویژه v وجود دارد که :

$$Zv = \lambda v$$

از آنجایی که $rank(Z) = n$، آنگاه Z نامنفرد است و $\lambda \neq 0$. بنابراین داریم :

$$v = Z^{-1}\lambda v \Rightarrow \lambda^{-1}v = Z^{-1}v$$

و بنابراین λ^{-1} یک مقدار ویژه z^{-1} است. □

۴.۵ پایداری عملی

کنترل پسخورد حالت پیشرو و گزاره‌ای را برای سیستم (۷.۵) به فرم زیر در نظر می‌گیریم :

$$U_k = k_d X_{k+1} + k_p X_k \tag{۱۷.۵}$$

که در آن k_p ماتریس پسخورد حالتی است که مقادیر ویژه غیر صفر را به سیستم حلقه بسته معادله :

$$Q_{k+1} = \bar{A}Q_k + \bar{B}V_k \tag{۱۸.۵}$$
$$V_k = k_p Q_k$$

اختصاص می‌دهد. لذا هدف به دست آوردن حالت پسخورد پیشرو k_d با استفاده از روش‌های پسخورد حالت است که قطب های سیستم (۱۷.۵) و (۱۸.۵) بطور دلخواه می‌باشند و از مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ انتخاب شده اند بطوریکه $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و برای هر i، $\lambda_i \neq 0$. مفروضات زیر را در نظر بگیرید :

$$rank[\bar{E}|\bar{B}] = n(k+1)$$
$$rank[\bar{B}] = m$$

واضح است که اگر این شرایط برقرار باشد آنگاه k_d وجود دارد که :

$$rank[\bar{E} - \bar{B}k_d] = n(k+1) \tag{۱۹.۵}$$

از k_d صادق در (۱۹.۵) و از (۱۷.۵) نتیجه می‌شود که سیستم (۷.۵) می‌تواند بصورت خطی بازنویسی گردد :

$$\bar{E}X_{k+1} = \bar{A}X_k + \bar{B}(k_d X_{k+1} + k_p X_k), \tag{۲۰.۵}$$

$$X_{k+1} = (\bar{E} - \bar{B}k_d)^{-1}(\bar{A} + \bar{B}k_p)X_k. \tag{۲۱.۵}$$

از(۲۱.۵) می‌توان نتیجه گرفت که اگر k_p بگونه‌ای باشد که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته (۱۸.۵) اختصاص دهد آنگاه سیستم (۷.۵) و (۱۷.۵) ناپایدار می‌شوند، زیرا حداقل یک قطب آن برابر صفر می باشد. قابل ذکر است که در این روش نیازی به رتبه کامل بودن $\bar{A}$ نیست، فقط کافیست مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته (۱۸.۵) طوری تنظیم گردد که غیر صفر بوده تا سیستم وارون پذیر باشد.

قضیه ۱.۴.۵. *ماتریس های زیر را در نظر بگیرید :*

$$N = (\bar{A}+\bar{B}k_p)^{-1}\bar{E}, \quad M = -(\bar{A}+\bar{B}k_p)^{-1}\bar{B} \tag{۲۲.۵}$$

و فرض کنیم زوج (N, M) کنترل پذیر باشند و k_d پسخورد حالتی باشد که مجموعه $\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_{n(k+1)}^{-1}\}$ مقدار ویژه های سیستم حلقه بسته زیر باشند :

$$z_{k+1} = Nz_k + Mw_K, \tag{۲۳.۵}$$

$$w_k = k_d Z_k. \tag{۲۴.۵}$$

بطوریکه $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $\lambda_i \neq 0$ برای هر $i = 1, 2, \ldots, n(k+1)$ مقادیر ویژه مشخصی باشند که از پیش تعیین شده اند، آنگاه مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n(k+1)}\}$ مقادیر ویژه سیستم کنترل پذیر (۷.۵) با پسخورد حالت مشتق و گزاره‌ای (۱۷.۵) هستند و همچنین شرط (۱۹.۵) برقرار است.

برهان. فرض کنید (N, M) کنترل پذیر باشند، آنگاه پسخورد حالت k_d وجود دارد که سیستم (۲۳.۵) با پسخورد حالت (۲۴.۵) کنترل پذیر باقی بماند. با جایگذاری (۲۳.۵) و (۲۴.۵) داریم :

$$Z_{k+1} = (N + Mk_d)Z_k \tag{۲۵.۵}$$

و طبق فرض مقدار ویژه ها برابرند با $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_{n(k+1)}^{-1}$ حال از

$$N = (\bar{A}+\bar{B}k_p)^{-1}\bar{E}, \ M = -(\bar{A}+\bar{B}k_p)^{-1}\bar{B}, \ \lambda_i \neq 0$$

برای $i = 1, 2, \ldots, n(k+1)$ داریم :

$$(N+Mk_d)^{-1} = \left((\bar{A}+\bar{B}k_p)^{-1}(\bar{E}-\bar{B}k_d)\right)^{-1} = (\bar{E}-\bar{B}k_d)^{-1}(\bar{A}+\bar{B}k_p) \tag{۲۶.۵}$$

حال از (۲۶.۵)و لم (۲.۳.۵) نتیجه می‌شود که $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n(k+1)}$ مقادیر ویژه ای از

$$(\bar{E}-\bar{B}k_d)^{-1}(\bar{A}+\bar{B}k_p)$$

می باشند. این مقدار ویژه ها، مقدار ویژه هایی از سیستم (۷.۵) و پسخورد حالت مشتق (۱۷.۵) تلفیق شده در (۲۱.۵) می‌باشد. □

۵.۵ تبدیل فضای حالت به کمک یک تبدیل تشابهی

فرض می‌کنیم T یک تبدیل خطی تشابهی باشد، که بر فضای $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ تعریف شده است و $z(t)$ عضو دلخواهی از فضای حالت سیستم زیر باشد و ماتریس های M و N بصورت تعریف شده در (۲۲.۵) باشند.

$$z(i+1) = Nz(i) + Mw(i), \tag{۲۷.۵}$$

اگر حالت سیستم توسط ماتریس T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود و بردار حالت در فضای حالت تبدیل یافته $\hat{z}(i)$ باشد، یعنی :

$$\hat{z}(i) = T^{-1}z(i), \qquad (۲۸.۵)$$

با محاسبه‌ی $z(i)$ از رابطه‌ی (۲۸.۵) و جایگذاری آن در رابطه(۲۷.۵) خواهیم داشت :

$$T\hat{z}(i+1) = NT\hat{z}(i) + Mw(i), \qquad (۲۹.۵)$$

با ضرب طرفین رابطه در T^{-1} خواهیم داشت :

$$\hat{z}(i+1) = T^{-1}NT\hat{z}(i) + T^{-1}Mw(i), \qquad (۳۰.۵)$$

معادله‌ی (۳۰.۵) معادله‌ای از نوع معادله (۲۷.۵) است با این تفاوت که N با $T^{-1}NT$ و M با $T^{-1}M$ عوض شده است. قرار می دهیم :

$$T^{-1}NT = \hat{N}, \quad T^{-1}M = \hat{M},$$

به این ترتیب معادله‌ی حالت زیر را در فضای تبدیل یافته بدست می‌آوریم :

$$\hat{z}(i+1) = \hat{N}\hat{z}(i) + \hat{M}w(i). \qquad (۳۱.۵)$$

اگر هدف، کنترل حالت سیستم و رساندن آن به حالت تعادل باشد با توجه به رابطه (۲۸.۵) می توان در فضای حالت جدید بردار حالت $\hat{z}(i)$ را به تعادل رساند. در این صورت بدیهی است که بردار حالت $z(i)$ در فضای اولیه است نیز به تعادل خواهد رسید. با این بیان، حل مسئله مورد نظر با زوج (M, N) با حل مسئله با زوج $(\hat{M}, \hat{N})$ هم ارز می‌باشد.
ماتریس T را از روی ماتریس کنترل پذیری بصورت منحصر به فرد به دست می‌آوریم. در اینصورت زوج $(\hat{M}, \hat{N})$ که از روی (M, N) و T به دست می‌آید، به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود. فرم $(\hat{M}, \hat{N})$ را فرم استاندارد اشلون می‌نامند.

۶.۵ طریقه به دست آوردن ماتریس تبدیل T

فرض می‌کنیم $m_1, m_2, \ldots, m_m$ به ترتیب ستون‌های اول تا mام ماتریس M باشند، با این قرار داد می‌توان ماتریس کنترل پذیر Q را برای سیستم (۲۷.۵) بصورت زیر نشان داد :

$$Q = \left[M, NM, \ldots, N^{n(k+1)-1}M\right] \qquad (۳۲.۵)$$

$$\bar{Q} = \left[m_1, \ldots, m_M, Nm_1, \ldots, Nm_m, \ldots, N^{n(k+1)-1}m_1, \ldots, N^{n(k+1)-1}m_m\right], \qquad (۳۳.۵)$$

از آنجاکه سیستم کنترل پذیر است، پس می‌توان $n(k+1)$ ستون اول از ستون‌های Q را طوری بدست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان تر، ستون‌های ماتریس Q را در یک بلوک مستطیلی که $n(k+1)$ سطر و m ستون دارد، بصورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$Q = \begin{bmatrix} N^0m_1 & N^0m_2 & \ldots & N^0m_m \\ N^1m_1 & N^1m_2 & \ldots & N^1m_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N^{n(k+1)-1}m_1 & N^{n(k+1)-1}m_2 & \ldots & N^{n(k+1)-1}m_m \end{bmatrix} \qquad (۳۴.۵)$$

که هر عضو واقع در بلوک یک بردار از فضای $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ می‌باشد. به دست آوردن ماتریس از روی بلوک (۳۲.۵) بصورت زیر خواهد بود :
با شروع از گوشه‌ی چپ بالای بلوک (۳۲.۵) به طرف راست و پائین بردارهایی که با بردارهای ماقبل وابسته خطی‌اند، از بلوک حذف می‌کنیم و اگر برداری حذف شد، همه‌ی بردارهای واقع در زیر آن نیز از بلوک حذف می‌شوند و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی به دست آمده برابر n باشد و در این حالت همه بردارهای باقی مانده غیر از n بردار بدست آمده را از بلوک حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون‌های ماتریس T قرار دهیم، آنگاه T معکوس پذیر حواهد بود و تبدیل مورد نظر به دست می‌آید.
در فرآیند فوق، وقتی عضوی از بلوک حذف می‌شود، اشاره کردیم که عناصر زیر آن نیز باید حذف شود. دلیل این کار در گزاره زیر آمده است.

گزاره ۱.۶.۵. *اگر بردار A^kb_i با بردارهای ماقبل خودش وابسته خطی باشد، آنگاه بردارهای A^jb_i ترکیب خطی از بردارهای ماقبل خود هستند، اگر j هر عدد صحیح بزرگتر از k باشد.*

برهان. بلوک (۳۲.۵) را دوباره در نظر می‌گیریم و سه سطر متوالی آن را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{aligned}
&A^{k-1}b_1, \dots, A^{k-1}b_{i-1}, A^{k-1}b_i, A^{k-1}b_{i+1}, \dots, A^{k-1}b_m,\\
&A^{k}b_1, \dots, A^{k}b_{i-1}, A^{k}b_i, A^{k}b_{i+1}, \dots, A^{k}b_m,\\
&A^{k+1}b_1, \dots, A^{k+1}b_{i-1}, A^{k+1}b_i, A^{k+1}b_{i+1}, \dots, A^{k+1}b_m,
\end{aligned}$$

طبق فرض می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned}
&A^kb_i = [(c_{0,1}A^0b_1 + c_{0,2}A^0b_2 + \dots + c_{0,m}A^0b_m)\\
&+ (c_{1,1}A^1b_1 + c_{1,2}A^1b_2 + \dots + c_{1,m}A^1b_m)\\
&\dots\\
&+ (c_{k-1,1}A^{k-1}b_1 + c_{k-1,2}A^{k-1}b_2 + \dots + c_{k-1,m}A^{k-1}b_m)\\
&+ (c_{k,1}A^kb_1 + c_{k,2}A^kb_2 + \dots + c_{k,m}A^kb_m)]
\end{aligned}$$

حال طرفین این رابطه را در A ضرب می‌کنیم :

$$\begin{aligned}
&A^{k+1}b_i = [(c_{0,1}A^1b_1 + c_{0,2}A^1b_2 + \dots + c_{0,m}A^1b_m)\\
&+ (c_{1,1}A^2b_1 + c_{1,2}A^2b_2 + \dots + c_{1,m}A^2b_m)\\
&\dots\\
&+ (c_{k-1,1}A^kb_1 + c_{k-1,2}A^kb_2 + \dots + c_{k-1,m}A^kb_m)\\
&+ (c_{k,1}A^{k+1}b_1 + c_{k,2}A^{k+1}b_2 + \dots + c_{k,m}A^{k+1}b_m)]
\end{aligned}$$

این رابطه بوضوح نشان می‌دهد که بردار $A^{k+1}b_i$ بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای ماقبل خود است و باید از بلوک حذف گردد.

□

به همین روش می‌توان نشان داد که باید همه بردارهای $N^j m_i$ که در آن $j > k$ از بلوک (۳۲.۵) حذف گردند، بلوک باقی مانده یعنی بلوکی که فرآیند فوق روی آن اعمال شده است، بصورت زیر خواهد بود :

$$\begin{array}{llll} N^{\circ}m_1 & N^{\circ}m_2 & \ldots N^{\circ}m_i \ldots N^{\circ}m_m \\ \vdots & & \\ N^{p_1-1}m_1 & N^{\circ}m_2 & \ldots N^{p_2-1}m_i \ldots N^{p_m-1}m_m \end{array}$$

که تعداد بردار های واقع در این بلوک n است.

۷.۵ ناورداهای کرونکر

در بخش قبلی به هر ستون از بلوک که متناظر ستونی از ماتریس M است عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند :

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq p_i \leq n. \tag{۳۵.۵}$$

از طرفی p_i تعداد بردارهای باقی مانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد کل بردارهای واقع در ستون های بلوک برابر است با :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m,$$

و از طرفی این تعداد برابر n است، لذا :

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_m \tag{۳۶.۵}$$

که این رابطه توسط (پوپوف–۱۹۷۲)[1] بدست آمده است.

تعریف ۱.۷.۵. اندیس کنترل پذیری به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$v = max\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}. \tag{۳۷.۵}$$

v را اندیس کنترل پذیری سیستم می‌نامند، زیرا هر بردار غیر صفری از فضای حالت را می‌توان در حداکثر v تکرار به حالت تعادل رساند.(یعنی کوچکترین توانی که ماتریس حلقه بسته صفر شود.)[۳۴]

تعریف ۲.۷.۵. اعداد p_i که برای هریک از ستون های $m_i \quad i = \circ, 1, \ldots, m$ از ماتریس M مربوط می‌شوند، ناورداهای کرونکر زوج (M, N) نامیده می‌شوند.

در زیر دو حالت از ناورداهای کرونکر را بحث می‌کنیم :

[1] popof

الف وقتی که ناوردهای کرونکر زوج (M, N) همگی باهم برابر باشند :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_m = v = \frac{n}{m}, \tag{۳۸.۵}$$

آنگاه ماتریس پسخورد حالت منحصر به فرد خواهد بود[۳۴] :

ب وقتی ناوردهای کرونکر زوج (M, N) با هم برابر نباشند، آنگاه ماتریس حالت و ماتریس پسخورد حالت منحصر به فرد نخواهد بود.

۸.۵ ناوردهای کرونکر منظم و نامنظم

تعریف ۱.۸.۵. ناوردهای کرونکر زوج کنترل پذیر (M, N) را منظم می‌نامند، هرگاه اختلاف بین ماکزیمم و مینیمم آنها حداکثر برابر واحد باشد :

$$p_{max} - p_{min} \leq 1. \tag{۳۹.۵}$$

اگرناوردهای کرونکر زوج کنترل پذیر (M, N) منظم نباشند، آنها را نامنظم می‌نامند [۳۴] .

ملاحظه می‌شود که حالتی که ناوردهای کرونکر باهم برابرند، حالت خاصی از ناوردهای کرونکر منظم می‌باشد.

۹.۵ فرم استاندارد اشلون

فرض کنید که T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده‌است. معادله حالت دستگاه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۴۰.۵}$$

حال فرض می‌کنیم بردار حالت دستگاه توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی:

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad \text{یا} \quad x(t) = T\hat{x}(t) \tag{۴۱.۵}$$

با جایگذاری (۴۱.۵) در معادله حالت (۴۰.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T\dot{\hat{x}}(t) &= AT\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \end{aligned} \tag{۴۲.۵}$$

با در نظر گرفتن $\hat{A} = T^{-1}AT$ و $\hat{B} = T^{-1}B$ در معادله (۴۲.۵) داریم:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \tag{۴۳.۵}$$

ماتریس تبدیل T را می‌توان به‌صورت منحصربه‌فردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد. به‌این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس Q را ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم. در این صورت فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$T = [b_1\ b_2 \dots b_m \dots A^{q-1}b_1 \dots A^{q-1}b_r\ A^{q-1}b_{r+1} \dots A^{q-1}b_m\ A^q b_1 \dots A^q b_r]$$

ماتریس افزوده $[B, A]$، که دارای n سطر و $n+m$ ستون است را تشکیل می‌دهیم. اگر ماتریس $[T^{-1}B, T^{-1}AT]$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-1}[B, AT] &= T^{-1}[b_1\ b_2 \dots b_m\ Ab_1 \dots A^q b_1 \dots A^q b_r\ A^q b_{r+1} \dots A^q b_m\ A^{q+1}b_1 \dots A^{q+1}b_r] \\ &= T^{-1}[T, A^q b_{r+1} \dots A^{q+1}b_r] = [I, T^{-1}A^q b_{r+1} \dots T^{-1}A^{q+1}b_r] = [I_{n\times n}, V_{n\times m}] \end{aligned} \tag{۴۴.۵}$$

اکنون تبدیلات تشابهی سطری و ستونی نظیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱.

$$r(i) \longleftrightarrow r(j) \quad , \quad c(i) \longleftrightarrow c(j)$$

۲.

$$r(i) \longleftrightarrow ar(i) \quad , \quad c(i) \longleftrightarrow \frac{1}{a}c(i)$$

۳.

$$r(i) \longleftrightarrow r(i) + kr(j) \quad , \quad c(j) \longleftrightarrow c(j) - kc(i)$$

در صورتی که بخواهیم زوج (B, A) را به فرم استاندارد اشلون $[I, V]$ تبدیل نماییم، ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I]$ را تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس Q و ستونی مقدماتی نظیر روی ماتریس A حاصل در هر مرحله، n ستون اول ماتریس Q را به I تبدیل می‌کنیم. در این‌صورت ماتریس افزوده $\hat{Q}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n\times m}, T^{-1}] \tag{۴۵.۵}$$

که ماتریس های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به صورت زیر هستند :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & 0 & \dots & 0_{m\times r} & {v^{(1)}}_{m\times m} \\ I_m & 0 & \dots & 0 & {v^{(2)}}_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & I_m & \dots & 0 & {v^{(3)}}_{m\times m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & {v^{(q)}}_{m\times m} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times m} & \dots & I_r & {v^{(q+1)}}_{r\times m} \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} \\ \vdots \\ 0_{m\times m} \\ 0_{r\times m} \end{bmatrix} \tag{۴۶.۵}$$

۱۰.۵ به دست آوردن فرم استاندارد اشلون به روش عددی

فرض کنیم که زوج (M, N) کنترل پذیر باشند و S تبدیل خطی معکوس پذیر دلخواه باشد.

اول ناورداهای کرونکر زوج (M, N) با ناورداهای کرونکر زوج $(S^{-۱}M, S^{-۱}NS)$ برابر هستند. زیرا :

اگر ماتریس کنترل پذیری زوج (M, N) بصورت زیر باشد :

$$Q = [M, NM, \dots, N^{n(k+۱)-۱}M],$$

آنگاه ماتریس کنترل پذیری زوج $(S^{-۱}M, S^{-۱}NS)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$\begin{aligned} Q &= [S^{-۱}M, (S^{-۱}NS)S^{-۱}M, \dots, (S^{-۱}NS)^{n(k+۱)-۱}S^{-۱}M] \\ &= [S^{-۱}M, (S^{-۱}NS)S^{-۱}M, \dots, (\underbrace{(S^{-۱}NS)\dots(S^{-۱}NS)}_{n(k+۱)-۱})S^{-۱}M] \\ &= [S^{-۱}M, S^{-۱}NM, \dots, S^{-۱}N^{n(k+۱)-۱}M] \\ &= S^{-۱}[M, NM, \dots, N^{n(k+۱)-۱}M] \\ &= S^{-۱}Q. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که ماتریس کنترل پذیری زوج $(S^{-۱}M, S^{-۱}NS)$ برابر است و چون $S^{-۱}$ معکوس پذیر است، لذا تعیین $n(k+۱)$ ستون اول مستقل خطی از Q با تعیین $n(k+۱)$ ستون اول مستقل خطی از $S^{-۱}Q$ فرقی نمی‌کند. به این ترتیب ثابت می‌شود که ناورداهای کرونکر باهم برابر خواهند بود.

دوم اگر $n(k+۱)$ ستون از اولین ستون‌های مستقل خطی از Q را با T نشان دهیم و $n(k+۱)$ ستون از اولین ستون‌های مستقل خطی از $S^{-۱}Q$ را با T_s نشان دهیم، بدیهی است که :

$$T_s = S^{-۱}T$$

حال اگر S را طوری به دست آوریم که ماتریس T_s ماتریس همانی مرتبه $n(k+۱)$ باشد، آنگاه S همان T خواهد بود، به بیان دیگر، اگر ماتریس معکوس پذیری مانند S بدست آوریم که وقتی $n(k+۱)$ ستون مستقل خطی از اولین ستون‌های ماتریس کنترل پذیری زوج $(S^{-۱}M, S^{-۱}NS)$ را انتخاب می‌کنیم اگر این $n(k+۱)$ ستون به ترتیب همان $n(k+۱)$ ستون $I_{n(k+۱)}$ باشند، آنگاه خواهیم داشت :

$$S = T$$

و علاوه براین، فرم استاندارد اشلون نیز بدست آمده است، زیرا :

$$S^{-۱}M = T^{-۱}M, \quad S^{-۱}NS = T^{-۱}NT,$$

روش به اینصورت خواهد بود که S را بصورت حاصلضربی از ماتریس های مقدماتی به دست می‌آوریم.

۵.۱۰.۱ مثال عددی

مثال ۵.۱۰.۱. فرم استاندارد اشلون زوج (B, A)، در دستگاه خطی زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل.

$$Q = \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c(1)+c(2)\to c(1)\ on A]{r(2)-r(1)\to r(2)\ on(Q)} \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2c(2)\to c(2)\ on A]{-\frac{1}{2}r(2)\to r(2)\ on(Q)} \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c(2)+2c(1)\to c(2)\ on A]{r(1)-2r(2)\to r(1)\ on(Q)} \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3c(3)\to c(3)\ on A]{-\frac{1}{3}r(3)\to r(3)\ on(Q)} \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -4 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c(3)+2c(1)\to c(3)\ on A]{r(1)-2r(3)\to r(1)\ on(Q)} \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 4 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] = \hat{Q} = [I, V, T^{-1}]$$

۱۱.۵ فرم همدم برداری

یک تبدیل خطی تشابهی مانند S که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده‌است را در نظر می‌گیریم. اکنون بردار حالت دستگاه که در بخش۹.۵ آن را به فرم استاندارد اشلون در آوردیم، توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل می‌گردد :

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t) \tag{۴۷.۵}$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۴۳.۵) داریم:

$$\begin{aligned} S\dot{\tilde{x}}(t) &= \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ \Rightarrow\ \dot{\tilde{x}}(t) &= S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \end{aligned} \tag{۴۸.۵}$$

با در نظر گرفتن $\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$ و $\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B$ در معادله (۴۸.۵) داریم:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \tag{۴۹.۵}$$

زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$، فرم همدم برداری زوج (B, A) می‌باشد. از آن‌جایی که معادلات (۴۰.۵) و (۴۹.۵) هم‌ارز یکدیگر هستند، جواب آن‌ها نیز یکسان است.

۱.۱۱.۵ به‌دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی

اگر ناورداهای کرونکر نامنظم باشد، با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس $\hat{A}$ و سطری مقدماتی نظیر آن روی کل ماتریس $\hat{Q}$، می‌توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آن را به صورت زیر به‌دست آورد :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{0\,m\times m} \\ \cdots\cdots \\ 0_{(n-m)\times m} \end{bmatrix} \tag{۵۰.۵}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_{0\,m\times n} & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I_{(n-m)} & & 0_{(n-m)\times m} \end{bmatrix} \tag{۵۱.۵}$$

مثال ۱.۱۱.۵. برای مثال (۱.۱۰.۵)، فرم همدم برداری را به‌دست آورید.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[onA]{c(3)-4c(1)\to c(3)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[on\hat{Q}]{r(1)+4r(2)\to r(1)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & 0 & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[onA]{c(2)-\frac{4}{3}c(1)\to}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[on\hat{Q}]{r(1)+\frac{4}{3}r(2)\to r(1)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 4 & -\frac{8}{3} & -5 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{8}{3} & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

برای معادله (۴۰.۵)، قانون کنترل را به صورت $U(t) = Kx(t)$ تعریف می‌کنیم و به طور مشابه برای معادله (۴۳.۵)، قانون کنترل به صورت $U(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t)$ تعریف می‌شود که $\tilde{K}$ ماتریس پسخورد حالت معادله دستگاه تبدیل شده به فرم همدم برداری است. با جایگذاری $S^{-1}T^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}$ خواهیم داشت :

$$U(t) = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}x(t) \qquad (۵۲.۵)$$

در نظر می‌گیریم :

$$K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1} \qquad (۵۳.۵)$$

که آن را ماتریس پسخورد اولیه زوج (A, B) می‌نامیم.

در صورتی که $\tilde{K}$ را به صورت $-B_0{}^{-1}G_0$ تعریف نماییم، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}_p = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ صفر است.

$$\tilde{\Gamma}_p = \begin{bmatrix} G_{\circ_{m,n}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ I_{n-m} \quad\quad \circ_{n-m,m} \end{bmatrix}_{n\times n} + \begin{bmatrix} B_{\circ_{m,m}} \\ \cdots\cdots \\ \circ_{n-m,m} \end{bmatrix}_{n\times m} (-B_\circ^{-1} G_\circ)$$
$$= \begin{bmatrix} \circ_{m\times n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ I_{(n-m)} \quad\quad \circ_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

نتیجه ۲.۱۱.۵. *چون Γ و $\tilde{\Gamma}$ متشابه‌اند، تمامی مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته $\Gamma = A + BK$ نیز صفر می باشند.*

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}BKTS = S^{-1}T^{-1}(A+BK)TS \\ &= (TS)^{-1}(A+BK)TS = (TS)^{-1}\Gamma TS \end{aligned} \tag{۵۴.۵}$$

۱۲.۵ عملیات سطری و ستونی مقدماتی روی زوج (M,N)

الف فرض می‌کنیم که عمل سطری زیر روی ماتریس (M,N) انجام شود :

سطر iام ماتریس (M,N) رابا سطر jام جابجا کنید.

دراینصورت در واقع یک ماتریس مقدماتی که معکوس پذیر می‌باشد، از چپ در ماتریس $[M,N]$ ضرب می‌شود. اگر این ماتریس را P_1^{-1} بنامیم، ماتریس حاصل عبارت است از :

$$P_1^{-1}[M,N] = [P_1^{-1}M, P_1^{-1}N]$$

اگر بلافاصله عمل ستونی زیر راروی ماتریس $P_1^{-1}N$ اعمال کنیم :

ستون iام ماتریس $P_1^{-1}N$ را با ستون jام آن جابجا کنیم.

در اینصورت درواقع یک ماتریس مقدماتی که همان P_1 است، از راست در $P_1^{-1}N$ ضرب می‌شود و ماتریس حاصل عبارت است از :

$$P_1^{-1}NP_1$$

به این ترتیب با یک عمل سطری مقدماتی روی $[M,N]$ و بلافاصله با عمل ستونی متناظر آن روی ماتریس تغییر یافته N ماتریس زیر به دست می‌آید :

$$[P_1^{-1}M, P_1^{-1}NP]$$

ب فرض کنید عمل سطری مقدماتی زیر روی ماتریس $[M,N]$ اعمال شود :

سطر iام آن در عدد غیر صفر a ضرب شود

در واقع یک ماتریس معکوس پذیر از چپ در $[M,N]$ ضرب می‌شود که اگر آن را P_2^{-1} بنامیم، ماتریس حاصل عبارت است از :

$$P_2^{-1}[M,N] = [P_2^{-1}M, P_2^{-1}N]$$

اگر بلافاصله عمل ستونی زیر را روی ماتریس $P_۲^{-۱}N$ اعمال کنیم :
ستون iام آن را در $a^{-۱}$ ضرب کنیم.
در واقع یک ماتریس معکوس پذیر که همان $P_۲$ است، از راست در $P_۲^{-۱}N$ ضرب می‌شود و ماتریس حاصل عبارت است از :

$$P_۲^{-۱}NP_۲$$

به این ترتیب با یک عمل سطری مقدماتی روی $[M,N]$ و بلافاصله با عمل ستونی متناظر آن روی ماتریس تغییر یافته N ماتریس زیر بدست می‌آید :

$$[P_۲^{-۱}M, P_۲^{-۱}NP].$$

ج فرض کنید که عمل سطری زیر روی ماتریس $[M,N]$ اعمال شود.
سطر iام را در عدد a ضرب کرده با سطر jام جمع می‌کنیم و حاصل را در سطر jام جایگزین می‌کنیم.
در واقع یک ماتریس معکوس پذیر از چپ در $[M,N]$ ضرب می‌شود که اگر آن را $P_۳^{-۱}$ بنامیم، ماتریس حاصل عبارت است از :

$$P_۳^{-۱}[M,N] = [P_۳^{-۱}m, P_۳^{-۱}N]$$

اگر بلافاصله عمل ستونی زیر را روی ماتریس $P_۳^{-۱}N$ اعمال کنیم
ستون jام ماتریس $P_۳^{-۱}N$ را در $a^{-۱}$ ضرب کرده و با ستون iام آن جمع می‌کنیم و حاصل را در ستون iام جایگزین می‌کنیم
در واقع یک ماتریس معکوس پذیر که همان $P_۳$ است، از راست در $P_۳^{-۱}N$ ضرب می‌شود و ماتریس حاصل عبارت است از :

$$P_۳^{-۱}NP_۳$$

به این ترتیب با یک عمل سطری روی $[M,N]$ و بلافاصله با عمل ستونی متناظر آن روی ماتریس تغییر یافته N ماتریس زیر بدست می‌آید :

$$[P_۳^{-۱}M, P_۳^{-۱}NP]$$

ماتریس هایی که در بندهای «الف»، «ب» و «ج» بیان شدند یعنی ماتریس های $P_۱, P_۲, P_۳$ ماتریس های مقدماتی هستند، یعنی از روی ماتریس همانی تنها با یک عمل مقدماتی به دست آمده‌اند.
حال فرض کنید که برای زوج مفروض (M,N) دنباله‌ای متناهی از عملیات سطری و ستونی که در بند های «الف»، «ب» و «ج» توضیح داده شده‌اند، موجود باشند که با اعمال این عملیات بطور متوالی روی سطرهای ماتریس $[M,N]$ و ستون های N به روشی که توضیح داده شد، ماتریس های تغییر یافته M

و N به ترتیب دارای فرم زیر باشند :

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \end{bmatrix} \tag{۵۵.۵}$$

$$N = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & I & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & I & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ ۰ & \dots & ۰ & I & ۰ \end{bmatrix}$$

علامت $\times$ نشانگر عناصری از ماتریس است که غیر صفر هستند.

فرض کنید که زوج (M, N) با دنباله متناهی از عملیات سطری و ستونی مقدماتی $P_۱, P_۲, \dots, P_k$ به فرم فوق در آمده‌اند. در اینصورت این دو ماتریس را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned} &P_k^{-۱} \dots P_۲^{-۱} P_۱^{-۱} M = \hat{M}, \\ &P_k^{-۱} \dots P_۲^{-۱} P_۱^{-۱} N P_۱ P_۲ \dots P_k = \hat{N}. \end{aligned}$$

اکنون با نامگذاری

$$P_۱ P_۲ \dots P_k = S$$

بدیهی است خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} &P_k^{-۱} \dots P_۲^{-۱} P_۱^{-۱} = S^{-۱}, \\ &S^{-۱} M = \hat{M}, \\ &S^{-۱} N S = \hat{N}, \end{aligned}$$

پس $\hat{M}$ به فرم مذکور می‌باشد و S حاصلضربی از ماتریس های مقدماتی است و می‌توان برای به دست آوردن S و $S^{-۱}$ به این صورت عمل کرد :

عملیات ستونی را به طور متوالی روی $I_{n(k+1)}$ اعمال کرده و عملیات سطری را نیز جداگانه روی $I_{n(k+1)}$ بطور متوالی اعمال می‌کنیم و وقتی M و N به دست آمدند، ماتریسی که با اعمال عملیات ستونی روی $I_{n(k+1)}$ به دست آمده است، ماتریس S و ماتریسی که با عملیات سطری روی $I_{n(k+1)}$ به دست آمده است، ماتریس S^{-1} خواهد بود.

در انتهای این بخش الگوریتم به دست آوردن S و S^{-1} و $S^{-1}M$ و $S^{-1}NS$ را ارائه خواهیم کرد. در این الگوریتم ابتدا ماتریس S_0 را که ماتریسی پائین مثلثی است به دست می‌آوریم و همزمان با ماتریس های S_0^{-1} و $S_0^{-1}M$ و $S_0^{-1}NS$ به دست می آیند و سپس از روی زوج $(S_0^{-1}M, S_0^{-1}NS_0)$ ماتریس بالا مثلثی S_1 را به دست می‌آوریم و همزمان با آن ماتریس های S_1^{-1} و $S_1^{-1}S_0^{-1}M$ و $S_1^{-1}S_0^{-1}NS_0S_1$ به دست می‌آیند، کافی است قرار دهیم

$$S = S_0S_1, \quad S^{-1} = S_1^{-1}S_0^{-1}$$

مزیت این روش در این است که بلافاصله پس از به دست آوردن ماتریس های S_1^{-1} و $S_1^{-1}S_0^{-1}M$ و $S_1^{-1}S_0^{-1}NS_0S_1$ شرط کنترل پذیری زوج (M, N) بررسی می‌شود و در صورت کنترل پذیر بودن زوج (M, N) قسمت های بعدی الگوریتم که مربوط به محاسبه S_2^{-1} و $S_2^{-1}S_1^{-1}M$ و $S_2^{-1}S_1^{-1}NS_1S_2$ می‌شود اجرا خواهد شد.

الگوریتم (الف)

قراردهید $H = [M, N]$ و $X = Y = I_{n(k+1)}$ و شروع کنید

گام اول قرار دهید $i = 1$؛

گام دوم قرار دهید $j = 1$؛

گام سوم قرار دهید $M = max\{||H_{i,j}||; i, j = 1, \dots, n(k+1)\}$
اگر $M = |H_{k,j}|$ آنگاه $j = j + 1$؛

گام چهارم اگر $M = 0$ آنگاه $j = j + 1$؛
در غیر اینصورت برو به گام ششم

گام پنجم اگر $j \leq n(k+1) + m$ برو به گام سوم
در غیر اینصورت برو به پایان

گام ششم اگر $k \neq i$ آنگاه

$Row(i) \longleftrightarrow Row(k_0),$ $\quad on\ H\ and\ X$

$Column(i) \longleftrightarrow Column(k_0)$ $\quad on\ Y$

$Column(i+m) \longleftrightarrow Column(k_0+m)$ $\quad on\ H$

گام هفتم اگر $H_{i,j} \neq ۱$ آنگاه

$$
\begin{array}{ll}
Row(i) \longleftrightarrow Row(k_\circ)/H_{i,j}, & on\ H\ and\ X \\
Column(i) \longleftrightarrow Column(k_\circ) \times H_{i,j} & on\ Y \\
Column(i+m) \longleftrightarrow Column(k_\circ + m)H_{i,j} & on\ H
\end{array}
$$

گام هشتم اگر $i < n$ آنگاه
برای $k = i + ۱, \dots, n$

$$
\begin{array}{ll}
Row(i) \longleftrightarrow Row(k) - H_{k,j} \times Row(i), & on\ H\ and\ X \\
Column(i) \longleftrightarrow Column(i) + H_{k,j} \times Column(k) & on\ Y \\
Column(i+m) \longleftrightarrow Column(i+m)H_{k,j} \times Column(k+m) & on\ H
\end{array}
$$

گام نهم $j = j + ۱; i = i + ۱;$

گام دهم اگر $i \leq n(k+۱) + m$ برو به گام سوم
پایان.

بعد از اجرای الگوریتم (الف) ماتریس های $H_۱ = [S_\circ^{-۱}M, S_\circ^{-۱}N]$ و $X_۱ = S_\circ^{-۱}$ و $Y_۱ = S_\circ$ به دست می‌آیند.
فرض کنید عناصر محوری در فرآیند الگوریتم (الف) به ترتیب در محل‌های

$$(i(۱), j(۱)), \dots, (i(n_\circ), j(n_\circ))$$

از ماتریس H قرارگرفته باشند($(n_\circ \leq n(k+۱)$).
اکنون الگوریتم (ب) را بصورت زیر روی ماتریس های $H_۱ = [S_\circ^{-۱}M, S_\circ^{-۱}N]$ و $X_۱ = S_\circ^{-۱}$ و $Y_۱ = S_\circ$ اجرا می‌کنیم.

الگوریتم (ب)

برای $i = i(۲), \dots, i(n_\circ)$
برای $j = j(۲), \dots, j(n_\circ)$
انجام بده
برای $k = i - ۱, \dots, ۱$

$$
\begin{array}{ll}
Row(i) \longleftrightarrow Row(k) - H_{i,j} \times Row(i), & on\ H\ and\ X \\
Column(i) \longleftrightarrow Column(i) + H_{i,j} \times Column(k) & on\ Y \\
Column(i+m) \longleftrightarrow Column(i+m)H_{i,j} \times Column(k+m) & on\ H
\end{array}
$$

بعد از اجرای الگوریتم ماتریس های $H_۲ = [S_۱^{-۱}S_\circ^{-۱}M, S_۱^{-۱}S_\circ^{-۱}NS_\circ S_۱]$ و $X_۲ = S_۱^{-۱}S_\circ^{-۱}$ و $Y_۲ = S_\circ S_۱$ به دست می‌آیند و به این ترتیب فرم استاندارد اشلون برای زوج (M, N) به همراه ماتریس

های $S = S_{\circ}S_{۱}$ و $S^{-۱} = S_{۱}^{-۱}S_{\circ}^{-۱}$ محاسبه می‌شود.
بعد از اجرای الگوریتم (الف) دو حالت زیر را ممکن است داشته باشیم.

حالت ۱- ماتریس $S_{\circ}^{-۱}NS_{\circ}$ که همان $n(k+۱)$ ستون آخر ماتریس H است دارای عناصر واحد محوری (عناصری که به عنوان عناصر محوری در الگوریتم بوده‌اند) در روی قطر اصلی یا بالای آن باشد. در اینصورت زوج (M, N) کنترل پذیر نیست و قسمت بعدی حل مسئله را دنبال می کنیم.

حالت ۲- اگر عناصر واحد محوری در زیر قطر اصلی ماتریس $S_{\circ}^{-۱}NS_{\circ}$ واقع شوند، در اینصورت زوج (M, N) کنترل پذیر است و الگوریتم (ب) را روی آن اجرا می‌کنیم تا فرم استاندارد اشلون زوج (M, N) را به دست آوریم. اگر در این حالت سطرهای صفر در $n-m$ ستون آخر ماتریس ظاهر شوند، نتیجه می‌گیریم که ماتریس کنترل پذیری سیستم دارای رتبه کامل نیست که می‌توان با محاسبه ماتریس کنترل پذیری برای زوج $(S_{\circ}^{-۱}M, S_{\circ}^{-۱}NS_{\circ})$ این واقعیت را نشان داد. وقتی که زوج (M, N) کنترل پذیر باشد، ماتریس $N'_{n\times n}$ را از روی ماتریس $S_{\circ}^{-۱}NS_{\circ}$ بصورت زیر به دست می‌آوریم
همه عناصر N' را به جز عناصری که در محل متناظر با عناصر محوری ماتریس $S_{\circ}^{-۱}NS_{\circ}$ قرار دارند، برابر صفر گرفته و درایه‌هایی از N' که در محل متناظر با عناصر محوری ماتریس $S_{\circ}^{-۱}NS_{\circ}$ قرار ندارند، برابر واحد قرار می‌دهیم.

محاسبه ناورداهای کرونکر زوج $(S_{\circ}^{-۱}M, N')$ خیلی ساده خواهد بود. به این ترتیب می‌توانیم ناورداهای کرونکر زوج (M, N) که با ناورداهای کرونکر زوج $(S_{\circ}^{-۱}M, N')$ برابر هستند را به دست آوریم. اگر N' دارای سطر یا سطرهای صفری در $n-m$ سطر آخر باشد، آنگاه ناورداهای کرونکر قابل تعریف نبوده و در نتیجه قابل محاسبه نیستند. در اینصورت، اندیس کنترل پذیری زوج (M, N) را نیز نمی‌توان تعیین کرد، به این علت اندیس کنترل پذیری زوج (M, N) را اندیس پوچ توان ماتریس N' تعریف می‌کنیم.

۱۳.۵ تبدیلات تشابهی فضای حالت و تخصیص مقادیر ویژه به وسیله ماتریس پس خورد حالت

در این بخش، ابتدا صورت خاصی از (M, N) را که محاسبه ماتریس پسخورد برای این فرم به آسانی امکانپذیر است را بیان می‌کنیم و قاعده به دست آوردن ماتریس پسخورد را برای این فرم بیان می‌کنیم و سپس به دست آوردن این فرم را برای زوج کنترل پذیر (M, N) که به فرم دلخواه باشد، توضیح می‌دهیم. این فرم از (M, N) که آن را فرم همدم برداری می‌نامند از روی فرم استاندارد اشلون زوج (M, N) قابل محاسبه است. پس فرض خواهیم کرد که زوج مفروض (M, N) خود به فرم استاندارد اشلون باشد و بالاخره قاعده‌ای به دست می‌آوریم که به کمک آن ماتریس پسخورد بصورت پارامتری به سادگی قابل محاسبه باشد.

هدف از کنترل یک سیستم، یافتن ماتریس پس خورد حالت K در فضای تبدیل (B, A) است، به‌گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته

$$\Gamma = A + BK \tag{۵۶.۵}$$

در مجموعه از پیش تعریف شده $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ موسوم به طیف مقادیر ویژه [۲] با این خاصیت که، λ_i ها یا حقیقی‌اند و یا به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند، قرار گیرند. این مساله را تخصیص مقادیر ویژه گویند.

برای یافتن K ی که در رابطه

$$P_n(s) = det(sI - A - BK) \tag{۵۷.۵}$$

صدق کند، به گونه ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته Γ در مجموعه فوق باشد، روش زیر را داریم:

ساده ترین راه آن است که در فضای تبدیل یافته $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ماتریس $\tilde{K}$ را به گونه‌ای بیابیم که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته

$$\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} \tag{۵۸.۵}$$

همان مقادیر ویژه مورد نظر باشد. بدین سان ماتریس

$$\tilde{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} & O_{m,n} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \tag{۵۹.۵}$$

را در نظر بگیرید. در واقع

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} \tag{۶۰.۵}$$

اگر ماتریس قطری

$$D = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \tag{۶۱.۵}$$

D با $\tilde{\Gamma}_0$ جمع شود، بدیهی است که مقادیر ویژه ماتریس مجموع همان مقادیر ویژه D خواهد بود، زیرا

$$\tilde{V} = \tilde{\Gamma}_0 + D \tag{۶۲.۵}$$

ماتریس (۶۲.۵) یک ماتریس پایین مثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن همان طیف(مقادیر ویژه) λ_i می تواند باشد. بنابراین، مقادیر ویژه $\tilde{V}$ نیز در مجموعه $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ می باشند. حال اگر عملیات تشابهی

$$Column(j) = Column(j) - \lambda_j Column(i) \tag{۶۳.۵}$$

و به دنبال آن،

$$Row(i) = Row(i) + \lambda_j Row(j) \tag{۶۴.۵}$$

را به ازای $i = j - m \quad j = n, n-1, \dots, m$ در $\tilde{V}$ انجام دهیم، به $\tilde{A}_\lambda$ تبدیل می شود که از نظر ساختاری هم ارز $\tilde{A}$ است. بدین معنی که :

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} & G_\lambda & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \tag{۶۵.۵}$$

[۲] eigenvalue spectrum

است. چون ماتریس $\tilde{A}_\lambda$ از ماتریس $\tilde{V}$ با استفاده از عملیات تشابهی به دست آمده است، بدیهی است که مقادیر ویژه تغییر نمی کنند. بنابراین، مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ برابر با مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{V}$ است. از این رو،

$$\tilde{K} = B_\circ^{-۱}(-G_\circ + G_\lambda) \qquad (۶۶.۵)$$

ماتریس پس خورد حالت در فضای $(\tilde{B}, \tilde{A})$ است.

برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت در فضای (B, A) داریم،

$$K_p = \tilde{K}T^{-۱} = B_\circ^{-۱}(-G_\circ + G_\lambda)T^{-۱} \qquad (۶۷.۵)$$

که آن را ماتریس پس خورد حالت اولیه، [۳] می نامیم، زیرا از فضای تبدیل یافته ای که در مبنای پایه است، موسوم به فضای حالت اولیه به دست آمده است.

۱۴.۵ مثال عددی

کارایی روش پیشنهادی فوق را در مثال زیر می‌توان دید.

مثال ۱.۱۴.۵. سیستم (۱.۵) را با $\alpha = ۰/۵$ با ماتریس های زیر در نظر بگیرید :

$$E = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

در این مثال قطب‌های حلقه بسته مناسب، برای کنترل پذیری از مجموعه $\{-۰/۵, -۰/۴, -۰/۳, -۰/۲\}$ انتخاب شده‌اند. با توجه به فرمی که در این فصل برای $\bar{A}, \bar{B}, \bar{E}$ و ضرایب $\mathrm{C_i}$ گفته شده داریم :

$$c_i = (-۱)^{i+۱}\binom{\alpha}{i}$$

لذا داریم :

$$c_۱ = (-۱)^۲\binom{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱!} = \frac{۱}{۲}$$

بطور مشابه $c_۲ = \frac{۱}{۸}$، $c_۳ = \frac{۳}{۴۸}$ و $c_۴ = \frac{۱۵}{۳۸۴}$ بدست می آید. (در محاسبات از این سه ضریب بدلیل کوچک بودن، صرف نظر می کنیم.)

با توجه به ساختار ماتریس های $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\bar{E}$ داریم :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A+\alpha E & c_۱E & c_۲E & \dots & c_{k-L+۱}E \\ I & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & I & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \vdots & I & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

[۳] primary state feedback matrix

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}B\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{E}=\begin{bmatrix}E&0&0&\dots&0\\0&I&0&\dots&0\\\vdots&\dots&\ddots&\dots&\vdots\\0&0&\dots&0&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

حال فرم استاندارد اشلون را بدست می آوریم. نخست ماتریس $Q=(\bar{B},\bar{A},I_{n(k+1)})$ را تشکیل داده و سپس با استفاده از تبدیلات تشابهی به ماتریس $\hat{Q}=(\hat{M},\hat{N},T^{-1})$ می رسیم.

$$Q=(\bar{B},\bar{A},I_{n(k+1)})=\begin{bmatrix}1&0.5&0&0.5&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

حال در ماتریس Q سطر سوم را از سطر اول کم می کنیم :

$$\begin{bmatrix}1&0.5&0&0.5&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&0&0\\0&-0.5&0&-0.5&0&-1&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

اکنون بر روی ماتریس A ستون اول و سوم را با هم جمع می کنیم :

$$\begin{bmatrix}1&0.5&0&0.5&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&0&0\\0&-0.5&0&-0.5&0&-1&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

حال اگر در ماتریس فوق طبق تبدیل تشابهی پیش برویم به ماتریس نهایی $\hat{Q}=(\hat{\bar{B}},\hat{\bar{A}},T^{-1})$ می رسیم و داریم :

$$\hat{Q}=(\hat{\bar{B}},\hat{\bar{A}},T^{-1})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0.5&1&-0.5&0&1\\0&1&0&0&0&1&0&0&-0.5\\0&0&1&0&0&0&1&0&2\\0&0&0&1&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T^{-1} به صورت زیر می باشد :

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -0.5 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -0.5\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

حال برای بدست آوردن فرم همدم برداری اقدام می کنیم. برای این منظور همانگونه که ماتریس Q توسط تبدیل تشابهی خطی T به فرم اشلون تبدیل شد، به همین صورت ماتریس $\hat{Q}$ را توسط تبدیل تشابهی خطی S به فرم همدم برداری $\tilde{Q}$ تبدیل می کنیم. لذا داریم :

$$\tilde{Q}=(\tilde{\bar{B}},\tilde{\bar{A}},S^{-1}T^{-1})=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.25 & -0.5 & 0\end{bmatrix}$$

لذا تبدیل تشابهی $S^{-1}T^{-1}$ بصورت زیر است :

$$S^{-1}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.5 & 2\\ 0 & 0 & -0.5 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0.25 & -0.5 & 0\end{bmatrix}$$

حال ماتریس های B_0 و G_0 را بصورت زیر داریم :

$$B_0=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\qquad G_0=\begin{bmatrix}-1 & 0.5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن ماتریس $\tilde{k}$ داریم :

$$\tilde{k}=-B_0^{-1}G_0=\begin{bmatrix}1 & -0.5 & 0 & -1\end{bmatrix}$$
$$k_p=\tilde{k}S^{-1}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1.75 & -2\end{bmatrix}$$

می‌دانیم که سیستم در این مثال از راهنمایی کنترلی (۲۷.۵) استفاده می‌کند. با مفروضات $\bar{A},\bar{B}$ واز (۲۲.۵) داریم :

$$N=(\bar{A}+\bar{B}k_p)^{-1}\bar{E}=$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1.75 & -2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲/۱۵ & -۶/۷۵ & -۱/۷۸ \\ ۰ & ۲/۰۹ & -۴/۲ & -۱/۰۵ \end{bmatrix}$$

$M = (\bar{A} + \bar{B}k_p)^{-۱}\bar{B} =$

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱/۷۵ & -۲ \end{bmatrix} \right)^{-۱} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ - ۲/۹۸ \\ -۲/۰۹ \end{bmatrix}$$

از قضیه (۱.۴.۵) قطب‌هایی برای سیستم حلقه بسته جدید با پسخورد حالت (۲۳.۵) و (۲۴.۵) با M, N داده شده در (۲۲.۵) هستند

$$\lambda_۱^{-۱} = -۵,\ \lambda_۲^{-۱} = -۳/۳۳,\ \ \lambda_۳^{-۱} = -۲/۲۵,\ \ \lambda_۴^{-۱} = -۲$$

ماتریس Γ که مقادیر ویژه را به صفر می برد بصورت زیر است :

$$\Gamma = N + Mk_p = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۲/۹۸ & ۲/۱۵ & -۱۱/۹۶ & ۴/۱۸ \\ -۲/۰۹ & ۲/۰۹ & -۷/۸۵ & ۱۱/۹۶ \end{bmatrix}$$

$$F = B_۰^{-۱}G_۰S^{-۱}T^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰/۵۹۸۴ & -۰./۳۷۵۵ & ۱/۱۴۵۲ & ۰/۰۳۰۵ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{N} + \tilde{M}\tilde{k} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس D را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$D = \begin{bmatrix} -۵ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳/۳۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲/۲۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

داریم :

$$\tilde{V} = \tilde{\Gamma} + D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3.33 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش تبدیلات تشابهی مذکور داریم :

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} -8.33 & -16.65 & -36.5625 & 73.125 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -8.33 & -16.65 & -36.5625 & 73.125 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k_\lambda} = B_0^{-1} G_\lambda =$$

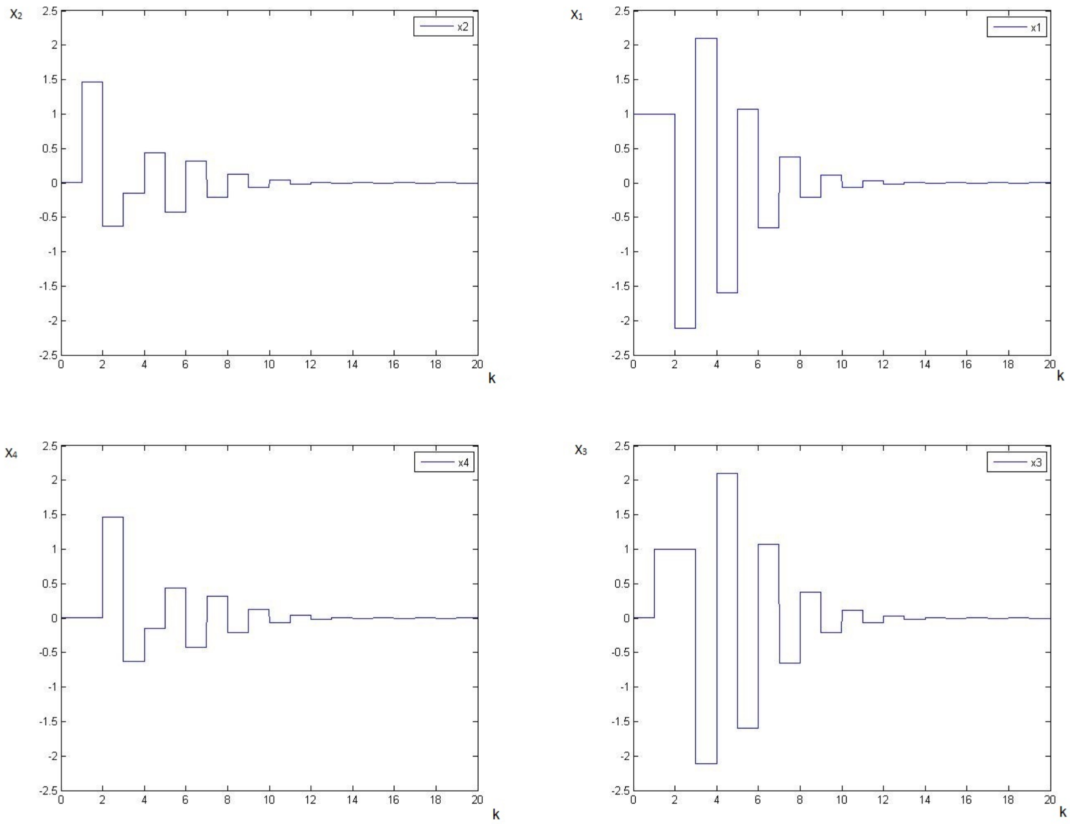
$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.33 & -16.65 & -36.5625 & 73.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.33 & -16.65 & -36.5625 & 73.125 \end{bmatrix}$$

$$k_\lambda = \tilde{k_\lambda} S^{-1} T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0237 & 0.1755 & -0.09305 & 0.0099 \end{bmatrix}$$

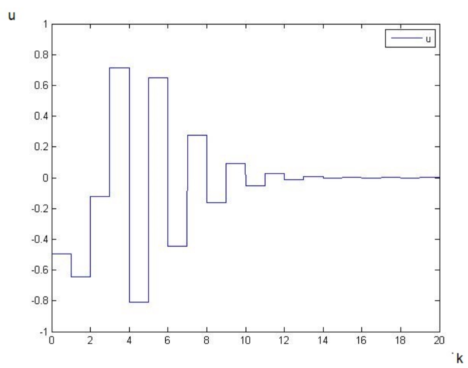
و در نهایت k_d برابر خواهد بود با :

$$k_d = F + k_\lambda = [0.5747 \;\; -0.2 \;\; 0.2147 \;\; 0.0404]$$

تصاویر صفحه بعد نتایج شبیه سازی سیستم کنترل شده (۲۰.۵) با شرط اولیه $x(0) = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$ می‌باشند. قوت و سادگی در این مثال نمایان است. در نمودار ها پایداری به وضوح قابل مشاهده می باشد بطوریکه از مرحله ای به بعد سیستم همگرا می گردد.



شکل ۱.۵: متغیرهای حالت x_1, x_2, x_3, x_4 برای مثال (۱.۱۴.۵)



شکل ۲.۵: تابع کنترل برای مثال (۱.۱۴.۵)

فصل ۶

نتیجه گیری

در این پایان نامه پایداری سیستم‌های توسیع یافته (منفرد) گسسته زمانی با مشتق مرتبه کسری مورد بحث قرار گرفت. در ابتدای کار این سیستم را به یک سیستم معمولی (نامنفرد) با مشتق مرتبه کسری تبدیل نمودیم. سپس با استفاده از تعریف مشتق مرتبه کسری، باز هم یک مرحله، سیستم ساده‌تر گشت. برای کنترل آن، از دو نوع قانون کنترل استفاده کردیم : قانون پسخورد پیشرو و قانون پسخورد پیشرو و گزاره ای. همانطور که خوانندگان محترم، مستحضرند، در قانون کنترل اول، نیاز به این بود که ماتریس ضرایب $\bar{A}$ رتبه کامل باشد ولی در قانون کنترل پیشرو و گزاره ای نیازی به این شرط قوی نبود که این نقطه قوت پایان نامه بود. چون که در غالب موارد ماتریس ضرایب $\bar{A}$ منفرد است. مثال عددی در فصل آخر و تصاویر مربوط به آن، گویای سادگی و قوت این روش می‌باشد.

پیشنهاد

همانطور که مطالعه نمودید، در این پایان نامه به سیستم‌های گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری پرداختیم. برای خوانندگانی که علاقمند هستند پیشنهاد می‌گردد که همین عنوان را برای سیستم‌های گسسته زمانی با مرتبه کسری دو بعدی دنبال کرده و بکار گیرند. همچنین بررسی سیستم‌های غیر خطی از همین مدل بسیار جالب است که کار کردن در این خصوص خالی از لطف نیست. همچنین در فصل‌های سوم و چهارم در مورد سیستم‌های توسیع یافته مثبت صحبت شد. به علاقمندان به این نوع از سیستم‌ها پیشنهاد می گردد که در مورد قانون کنترل آنها مشابه سیستم و روش فصل پنجم، تحقیق و جستجو نمایند.

به امید موفقیت و کامیابی

رسول تورانی

پیوست آ

برنامه‌های کامپیوتری

آ.۱ کد متلب مساله کنترل سیستم های گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری

```
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% ************************************************
t0=cputime;
disp(' This is the given plant matrix A') %line 1
disp(' ******************************') %line 2
A = [1 0;
0 1]
E = [0 1;
0 0]
B = [0;
1]
\alpha = 0.5
\bar{A} = A
```

```
% \bar{A} matrix is valueted in current example & it replace with A matrix.
A=[1.3800 -0.2077 6.7150 -5.6760;-0.5814 -4.2900 0 0.6750;
1.0670 4.2730 -6.6540 5.8930;0.0480 4.2730 1.3430 -2.1040]
%line 3
disp(' This is the given input matrix B') %line 4
disp(' *******************************') %line 5
B=[0 0; 5.6790 0;1.1360 -3.1460;1.1360 0]
%line 6
A=A'; %line 7
[V,D]=eig(A);
[V,D]
V1=V(:,[1 3 4 9])
Qp=gramsch(V1)
R=Qp'*A*Qp
E=Qp'*B
A=R'
B=-E
[n,m]=size(B);
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n); %line 10
% The Echelon form of Q
% ----------------------
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
[q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
if (q<=tol)
Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
j=j+1;
else

if i~=k
Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
```

```
Q(:,[i+m,k+m])=Q(:,[k+m,i+m]);
end

t=Q(i,j);
% if t~=0
Q(i,:)=Q(i,:)/t;
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
T1(i,:)=T1(i,:)/t;
% end

if i~=n
for k=i+1:n
t=Q(k,i);
if t~=0
Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
end
end
end
i=i+1 ;
j=j+1;
end
end
% *********************************************
% Now compute the Standard echelon form !
% ---------------------------------------------
s=1;
while s < n
i=s+1 ;
for j=i:r
if Q(i,j)~=0
for k=1:s
if Q(k,j)~=0
```

```
t=Q(k,j);
Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
end
end
break
end
end
s=s+1;
end
% *****************************************************************
for i=n:-1:m+1
for k=i:r
if Q(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Q(i,j);
Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
end
break
end
end
end
% ***************************************************************
Q
% ....................................................
disp(' This is the transformation matrix,T1')
disp(' ************************************')

T1
% ****************************************************
% The Feed-back matrix , F
```

```
B1=Q(:,[1:m]);A1=Q(:,[m+1:r])
B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
Fp=F1*T1;
% ************************************************************
disp(' This is the primdry feedback law ')
disp(' ****************************** ')

Fp
% ************************************************************
gama=A+B*Fp
%**** ******************************************************
t0=cputime;
t1=cputime-t0;
% program for assigning eigenvalues,eigen.m
% ****************************************
D=[];
for j=1:n
landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
end

for i=1:n
D(i,i)= landa(i);
end
Acap=A1;
Bcap=B1;
newF=Fp ;
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1]
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
```

```
for k=1:r
if Qc(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Qc(i,j);
Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
end
break
end
end
end
G2=Qc(1:m,m+1:r);
glanda=Qc(:,m+1:r);
Fc=bo*G2*T1;
disp(' The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
disp(' *******************************************************')
Kp=newF+Fc
F=Qp*Kp';
disp(' with the closed-loop matrix ')
disp(' *************************** ')
gamac=A+B*Kp;
disp(' checking the eigen values ')
disp(' ************************* ')
v=eig(gamac)'
[u1,v1]=eig(gamac);
c2=cond(u1)
disp(' Frobenius norm of feedback matrix ')
disp(' ********************************* ')
Normkp=norm(Kp,'fro')
F
% End of program for eigen
A=[-1.8501 -19.6291 9.5071;
0.2648 -0.8512 -11.8900;
0.2640 11.3640 -3.4170]
```

```
X0=[1;1;1]
X=[]
for t=0:0.01:1
X=[X, expm(t*A)*X0]
end
plot3(X(1,:),X(2,:),X(3,:),X(3,:), '-o')
% End of program for plot3
**********************************
A=[1.38 -0.2077 6.7150 -5.6760
-0.5719 3.3739 0 0.6750
-6.0577 54.6589 -6.6540 5.8930
0.0499 5.8069 0 -2.1040]
X0=[1;1;1;1]
X=[]
for t=0:0.01:1
X=[X expm(t*A)*X0]
end
plot(X(1,:), '-o')
hold on
plot(X(2,:), '-o')
hold on
plot(X(3,:), '-o')
hold on
plot(X(4,:), '-o')
% End of program for plot
*********************************
```

مراجع

[1] E. babamohamadi , Control of linear descriptor systems and its stability, 2013

[2] C. T. Chen ,Linear system theory and design" CBC college publishing, New York, 1984

[3] B. N. Datta, numerical linear algebra and applications, 2nd ed, siam, 2009

[4] T. Kaczorek , . Descriptor fractional linear systems with regular pencils, Asian Journal of Control 15(4): 1–14, 2012a

[5] T. Kaczorek, Positive fractional continuous-time linear systems with singular pencils, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 60(1): 9–12, 2012b

[6] T. Kaczorek, Selected Problems of Fractional System Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2012b

[7] T. Kaczorek, Positive linear systems with different fractional orders, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 58(3): 453–458, 2012a

[8] T. Kaczorek, Practical stability and asymptotic stability of positive fractional 2D linear systems, Asian Journal of Control 12(2): 200–207, 2012b

[9] T. Kaczorek, Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science 18(2): 223–228, DOI: 10.2478/v10006-008-0020-0, 2008

[10] T. Kaczorek, Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory, Springer-Verlag, London, 2007a

[11] T. Kaczorek, Realization problem for singular positive continuous-time systems with delays, Control and Cybernetics 36(1): 47–57, 2007b

[12] T. Kaczorek, Infinite eigenvalue assignment by an output feedbacks for singular systems, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science 14(1): 19–23, 2004

[13] T. Kaczorek, Linear Control Systems, Vol. 1, Research Studies Press J. Wiley, New York, NY, 1992

[14] T. Kaczorek, Descriptor fractional linear systems with regular pencils, Asian Journal of Control 15(4): 1–14, 2012a

[15] T. Kaczorek, Positive fractional continuous-time linear systems with singular pencils, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 60(1): 9–12, 2012b

[16] T. Kaczorek, Positive linear systems consisting of n subsystems with different fractional orders, IEEE Transactions on Circuits and Systems 58(7): 1203–1210, 2011a

[17] T. Kaczorek, Selected Problems of Fractional System Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2011b

[18] T. Kaczorek, Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory, Springer-Verlag, London, 2007a

[19] T. Kaczorek, Realization problem for singular positive continuous-time systems with delays, Control and Cybernetics 36(1): 47–57, 2007b

[20] T. Kaczorek, Infinite eigenvalue assignment by an output feedbacks for singular systems, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science 14(1): 19–23, 2004

[21] T. Kaczorek, Linear Control Systems, Vol. 1, Research Studies Press J. Wiley, New York, NY, 1992

[22] T. Kaczorek, Checking of the positivity of descriptor linear systems with singu- lar pencils. Archives of Control Sciences, 22(1), 5-14, 2012

[23] T. Kaczorek, Infinite eigenvalue assignment by output-feedbacks for singular systems. Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science, 14(1), 19-23, 2004

[24] T. Kaczorek, Linear Control Systems. 1 Research Studies Press J. Wiley, New York, 1992.

[25] T. Kaczorek, Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory. Springer-Verlag, London, 2007.

[26] T. Kaczorek, Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London, 2002.

[27] T. Kaczorek, Positive linear systems with different fractional orders. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 58(3), 453-458, 2010

[28] T. Kaczorek, Positivity of descriptor linear systems with regular pencils. Archives of Electrical Engineering, 61(1), 101-113, 2012

[29] T. Kaczorek, Realization problem for singular positive continuous-time systems with delays. Control and Cybernetics, 36(1), 47-57, 2007

[30] T. Kaczorek, Selected Problems of Fractional Systems Theory. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[31] T. Kaczorek, Stability of descriptor positive linear systems. COMPEL, 33(3), 1-14, 2014

[32] T. Kaczorek, Positivity and asymptotic stability of descriptor linear systems with regular pencils, 2010

[33] T. Kaczorek, Checking of the positivity of descriptor linear systems by the use of the shuffle algorithm, 2011

[34] S. M. Karbassi & D.J. Bell, Parametric time-optimal control of linear discretetime systems by state feedback-part 1: Regular kronecker invariants. International journal of control, 57, 817-830, 1993

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الگوریتم .... Algorithm
اقلیدسی .... Euclidean
بلوکی .... Block
بردار ویژه .... Eigenvector
بردار ویژه راست .... Right eigenvector
بردار ویژه چپ .... Left eigenvector
پایه .... Base
پیوسته زمانی .... Continous-time
پارامتری کردن .... Parameterization
پس‌خورد حالت اولیه .... Primary state feedback
تخصیص .... Assignment
ترکیب خطی .... Linear decomposition
تبدیل تشابهی .... Similarity transaction
ترانهاده .... Transpese
تبدیل .... Transformation
چندجمله‌ای مشخصه .... Charactristic Polynomial
حذف .... Reject
حل پذیر .... Solvable
دترمینان .... Determinant
دسترس پذیری .... Reachability
زیرفضا .... Sub-space
سیستم حلقه-بسته .... Close-loop System
سیستم حلقه-باز .... Open-loop System
سیستم تاخیری .... Delay system
سیستم تعمیم یافته .... Generalized System

سیستم خطی .... Linear System
سیستم غیر خطی .... Nonlinear System
شاخص .... Index
طیف .... Spectrum
فضای پوچ .... Null space
فرم استاندار اشلون .... Standard echolen form
فرم همدم برداری .... Vector companian form
قانون کنترل .... Low control
قطب .... Pole
کنترل پذیر .... Controllability
کنترل‌گر .... Controller
کاملا پایدار .... Total stability
لیاپانوف .... Lyapunov
ماتریس افزوده .... Augmented matrix
ماتریس همانی .... Identity matrix
ماتریس مربعی .... Squre matrix
ماتریس تشابهی .... Similarity matrix
مشاهده پذیر .... Observable
محاسبه .... Computation
متغیر کنترل .... Control variable
مزدوج مختلط .... Conjugated complex
معادله دینامیکی .... Dynamic equation
مستقل خطی .... Linear independed
میدان .... Field
نرم ماتریس .... Norm or matrix
ناورداهای کرونکر .... Kronocker invariant
وجود .... Existence
وابسته خطی .... Linear depended
یکتایی .... Uniqueness

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algorithm .... الگوریتم
Assignment .... تخصیص
Asymptotically .... مجانبی
Augmented matrix .... ماتریس افزوده
Bases .... پایه
Block .... بلوکی
Characteristic-equation .... معادله مشخصه
Closed-Loop .... حلقه بسته
Control Variable .... متغیر کنترل
Conjugated Complex .... مزدوج مختلط
Companian form .... فرم همدم
Continous-time .... پیوسته زمانی
Control low .... قانون کنترل
Controllable .... کنترل پذیر
Controller .... کنترل‌گر
Column .... ستون
Computation .... محاسبه
Cayley-Hamilton theorem .... قضیه کیلی هامیلتون
Constant matrix .... ماتریس ثابت
Delay system .... سیستم تاخیری
Descrete-time .... گسسته زمانی
Description system .... توصیف سیستم
determinant .... دترمینان
Differential .... دیفرانسیل
Dynamical equation .... معادله دینامیکی

Elementary .... مقدماتی
Eigen vector .... بردار ویژه
Eigen value .... مقدار ویژه
Euelidean .... اقلیدسی
Existence .... وجود
Feedback .... پس‌خورد
Field .... میدان
Generalized .... تعمیم یافته
Horizontal .... افقی
Index .... شاخص
Inverse .... معکوس
Kronocker invariant .... ناوردای کرونکر
Left eigen vector .... بردار ویژه چپ
Linear composition .... ترکیب خطی
Linear depended .... وابسته خطی
Linear independed .... مستقل خطی
Lyapunov .... لیاپانوف
Nonlinear system .... سیستم غیر خطی
Norm of matrix .... نرم ماتریس
Null space .... فضای پوچ
Observable .... مشاهده پذیر
Operations .... عملیات
Open-Loop .... حلقه باز
Output-vector .... بردار خروجی
Orthogonal .... متعامد
Parameterization .... پارامتری سازی
Physical system .... سیستم فیزیکی
Primary state feedback .... پس‌خورد حالت اولیه
Pole .... قطب
Polynomial .... چند جمله‌ای
Reachability .... دسترس پذیری
Rejection .... حذف

Right eigenvector .... بردار ویژه راست

Sub-Space .... زیر فضا

Spectrum .... طیف

Similarity transaction .... تبدیلات تشابهی

Schur decomposition .... تجزیه شور

Squre .... میدان

Transpese .... ترانهاده

Transformation .... تبدیل

Triangler matrix .... ماتریس مثلثی

Total stability .... پایدار کلی

Vector .... بردار

Vertial .... عمودی

Abstract

The concepts of non-integer derivative and integral are the foundation of the fractional calculus. Non-integer derivative has become nowadays a precious tool, currently used in the study of the behavior of real systems in diverse fields of science and engineering. Starting from the sixties, the research in this domain of interest has progressively put to light important concepts associated with formulations using non-integer order derivative. Indeed, non-integer order derivative revealed to be a more adequate tool for the understanding of interesting properties shown by various types of physical phenomena, that is, fractality, recursivity, diffusion and/or relaxation phenomena.

Keyword Fractional, Derivative, Descriptor, Linear, Discrete time.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Control of descriptor discrete-time linear systems with fractional-order derivative

Rasul Toorani

Supervisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor

Dr. Ali Mesforoosh

january 2016