

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش کاربردی

## خواص طیفی گراف و بررسی بعضی از کاربردهای آن

دانشجو: الهام علیمردانی

استاد راهنما:

دکتر صادق رحیمی شعر باف

استاد مشاور:

دکتر حجت احسنی طهرانی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آبان ۱۳۸۹

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پدرم، که برای بالندگی ام خمید. مادرم، که برای  
شکوفایی ام پژمرد. آنان که توانشان رفت تا به  
توانایی برسم و مویشان سپید گشت تارویم سپید  
بماند.

در برابرشان زانوی ادب بر زمین می نهیم.

و تقدیم به همسرم

همراه همیشگی ام که وجودش برایم ارزنده است و  
همواره در قلبم جای دارد.

## قدردانی و تشکر

با حمد سپاس فراوان از خداوند منان که به من  
توفیق آموختن پرتوی از دانش هستی و آشنایی  
با گوشه‌ای از حقایق آفرینش را عطا فرمود.

حال آنچه باقی می ماند قدردانی از استادان اینجانب  
است. از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر رحیمی که  
با راهنمایی های حکیمانه خود افق های تازه ای را برایم  
ایجاد کردند و جناب آقای دکتر احسنی طهرانی،  
مشاور دلسوزم کمال قدردانی را دارم.

همچنین از دوستانی که مرا در انجام این پایان نامه یاری  
نمودند تشکر و قدردانی می کنم.

## تعهد نامه

اینجانب **الهام علیمردانی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **خواص طیفی گراف و بررسی بعضی از کاربردهای آن** تحت راهنمایی دکتر صادق رحیمی **شعرباف** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ: ۸۹/۸/۲۰

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در سال های اخیر توجه زیادی به طیف گراف ها شده است، زیرا طیف گراف ها نقش بسیار مهمی در شناختن ساختار گراف ایفا می کنند. به مجموعه مقادیر ویژه گراف، طیف گراف گفته می شود. این موضوع بخشی از نظریه جبری گراف ها محسوب می شود. از نظریه طیفی گراف ها، هم در شناخت ساختار گراف ها و هم در سایر علوم مانند شیمی، فیزیک، علوم مهندسی برق، عمران و کامپیوتر استفاده های فراوانی می شود.

در این پایان نامه سعی شده است تا موضوعات مربوط به طیف گراف ها مورد مطالعه قرار گیرد و بعضی از کاربردهای آن در سایر علوم بررسی شود. در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه ماتریس ها ارائه شده است. در فصل دوم خواص طیفی گراف و کران های مجموعه طیفی مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل سوم کاربردهای طیف گراف در مسئله نشانیدن طیفی گراف ها بیان شده است. در فصل چهارم کاربرد طیف گراف در مسئله آنالیز مولفه های اصلی مورد بررسی قرار گرفته است. و در فصل پنجم نیز کاربرد طیف گراف در مسئله تشخیص چهره بررسی شده است.

**کلمات کلیدی:** طیف گراف، هم طیفی، الگوریتم آنا لیز مولفه های اصلی، مقیاس گذاری چند بعدی، گراف شاک، گراف دلونی.

## مقالات مستخرج از پایان نامه

[1] تحقیق در کاربرد های مقادیر ویژه و تعیین چند کران برای شعاع طیفی گراف. کنفرانس ریاضی

سیستان بلوچستان اسفند ۱۳۸۸

[2] الگوریتم های ابتکاری – کنفرانس بین المللی ریاضی دانشگاه امیر کبیر اردیبهشت ۱۳۸۹

## فهرست مطالب

|    |                                                                 |
|----|-----------------------------------------------------------------|
| ۱  | مقدمه                                                           |
| ۴  | فصل اول : تعاریف و مفاهیم اولیه ماتریس ها                       |
| ۴  | ۱-۱ مقدمه                                                       |
| ۴  | ۱-۲ تعاریف اولیه                                                |
| ۴  | ۱-۳- ماتریس ها و نحوه بکارگیری آنها در تئوری گراف               |
| ۱۷ | فصل دوم : بررسی خواص طیفی گراف و کران های مجموعه طیفی           |
| ۱۷ | ۲-۱ مقدمه                                                       |
| ۱۷ | ۲-۱ چند جمله ای مشخصه ، مقادیر ویژه ، و بردارهای ویژه یک ماتریس |
| ۱۸ | ۲-۳ گراف وزن دار طیفی                                           |
| ۲۰ | ۲-۴ هم طیفی                                                     |
| ۲۳ | ۲-۵ تعیین کران بالا برای طیف گراف                               |
| ۲۷ | ۲-۶ تعیین کران بالا و پایین برای طیف گراف                       |
| ۳۲ | ۱-۷ نتیجه گیری                                                  |
| ۳۹ | فصل سوم: کاربردهای طیف گراف در مساله نشان دادن طیفی گراف ها     |
| ۳۹ | ۳-۱ مقدمه                                                       |
| ۳۹ | ۳-۲ روش های نشان دادن طیفی گراف                                 |
| ۴۳ | ۳-۳ مسئله فاصله در گراف                                         |
| ۴۷ | ۳-۴ اسکلت بندی                                                  |



|     |                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------|
| ۴۹  | ۳-۵ گراف شاخ                                                      |
| ۵۵  | ۳-۶- انطباق دو گراف                                               |
| ۵۶  | ۳-۷ نمودار ورونویی                                                |
| ۵۸  | ۳-۸ مثلث بندی                                                     |
| ۵۹  | ۳-۹ گراف دلونی                                                    |
| ۶۲  | ۳-۱۰ کاربرد طیف گراف در گراف دلونی و شاخ                          |
| ۶۹  | ۳-۱۱ نتیجه گیری                                                   |
| ۷۲  | <b>فصل چهارم : کاربرد طیف گراف در مسئله آنالیز مولفه های اصلی</b> |
| ۷۲  | ۴-۱-مقدمه                                                         |
| ۷۲  | ۴-۲ الگوریتم آنالیز مولفه های اصلی                                |
| ۷۳  | ۴-۳ استخراج ویژگی برپایه آنالیز مولفه های اصلی                    |
| ۷۷  | ۴-۴ برنامه آنالیز مولفه های اصلی                                  |
| ۸۴  | ۴-۵ نتیجه گیری                                                    |
| ۸۷  | <b>فصل پنجم : کاربرد طیف گراف در مسأله تشخیص چهره</b>             |
| ۸۷  | ۵-۱-مقدمه                                                         |
| ۸۷  | ۵-۲ تشخیص الگو                                                    |
| ۹۱  | ۵-۳ مراحل تشخیص الگو                                              |
| ۹۳  | ۵-۴ تشخیص چهره                                                    |
| ۹۳  | ۵-۵ تشخیص چهره با کمک طیف گراف                                    |
| ۹۸  | ۵-۶ نتیجه گیری                                                    |
| ۱۰۰ | مراجع                                                             |
| ۱۰۷ | واژه نامه فارسی به انگلیسی                                        |

## فهرست اشکال و جداول

|    |                                                                     |
|----|---------------------------------------------------------------------|
| ۶  | شکل ۱-۱- گراف $G$ و ماتریس مجاورت مربوط به آن                       |
| ۱۰ | شکل ۲-۱- گراف $G$                                                   |
| ۱۳ | شکل ۳-۱- گراف $G$ و ماتریس مسیر مربوط به آن                         |
| ۲۳ | شکل ۱-۲- گراف های غیر یکریخت و هم طیف با ماتریس مجاورت              |
| ۲۵ | شکل ۲-۲- هم طیفی درخت ها با ماتریس های مجاورت، لاپلاس، نرمال لاپلاس |
| ۲۶ | جدول ۱-۲- نتایج به دست آمده از گراف های هم طیف                      |
| ۲۶ | جدول ۲-۲- نتایج به دست آمده از درخت های هم طیف                      |
| ۲۷ | شکل ۱-۳- ویرایش در گراف                                             |
| ۴۵ | شکل ۲-۳- اهمیت نقاط انشعابی در صورت حذف قسمتی از شکل                |
| ۴۹ | شکل ۳-۳- شاخ                                                        |
| ۵۰ | شکل ۴-۳- انواع نقاط مهم شاخ                                         |
| ۵۲ | شکل ۵-۳- دو شکل با اسکلت شان و درخت شاخ آنها                        |
| ۵۴ | شکل ۶-۳- گراف شاخ                                                   |

- شکل ۳-۷ نمودار ورونویی ۵۵
- شکل ۳-۸ گراف دلونی  $Dg(p)$  ۵۷
- شکل ۳-۹ تأثیر وارد کردن  $p_r$  بر مثلث  $\Delta_1$  و تأثیر آن روی ساختار ۶۲
- شکل ۳-۱۰ یال های مرکزی وواقع بر  $p_r$  ۶۵
- شکل ۳-۱۱ شکلها واسکلت شان با استفاده از داده ها از شکل ۶۶
- جدول ۳-۱ خوشه بندی وکلاس بندی طیف گراف با استفاده از درخت شکل ۶۷
- شکل ۳-۱۲ تصویر هایی از اشیا وگراف دلونی شان ۶۷
- جدول ۳-۲ خوشه بندی وکلاس بندی طیف گراف ۶۸
- شکل ۴-۱ نمودار خطی PCA ۶۹
- شکل ۵-۱ تشخیص چهره با کمک گراف وطیف ۷۳
- شکل ۵-۳ تشخیص چهره با کمک گراف دلونی ۹۴
- شکل ۵-۳ تشخیص چهره با کمک گراف دلونی ۹۴
- شکل ۵-۲ کاهش ابعاد درتشخیص چهره باکمک PCA ۹۵



## مقدمه

نظریه طیفی گراف در سال های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ مطرح شد. در چهل سال اخیر نظریه ی طیفی گراف بر اساس مطالعه بر ماتریس لاپلاس<sup>۱</sup> از یک گراف توسعه یافت. در گذشته، نظریه ماتریس و جبر خطی برای تجزیه و تحلیل ماتریس های گرافها مورد استفاده قرار می گرفت. یکی از اهداف اصلی در نظریه گراف، استنباط خواص اصلی وساختار یک گراف از طیف گراف مربوط به خود می باشد. مقادیر مشخصه یک نقش اصلی در دانسته های بنیادی گراف ها دارند. روشهای طیفی جدیدی پدیدار شده است که توانایی و انطباق خوبی برای بررسی گراف ها را دارند. در این زمینه مقالاتی از افرادی چون بیگ<sup>۲</sup>، داگ<sup>۳</sup>، ساچ<sup>۴</sup>، سایدال<sup>۵</sup> ارائه شده است [۱] و [۲].

در ده سال گذشته، بسیاری از پیشرفت ها در نظریه طیفی گراف، اغلب به صورت هندسی بوده است. به عنوان مثال ساختارهای گراف های گسترده بر پایه مقادیر مشخصه و خواص متساوی المحيط بودن گراف ها بررسی می شود. روش های طیفی جدیدی نیز ارائه شده است که توانایی و انطباق خوبی برای بررسی گرافهای معمولی را دارند. بدین ترتیب نظریه طیفی گراف وارد یک دوران جدید شده است. از دیدگاه تاریخی در ابتدا نظریه گراف کاربرد هایی در علم شیمی و در شمارش هیدرو کربن ها داشته است [۱]. همچنین از مقادیر ویژه در مسئله بررسی پایداری مولکول ها استفاده شده است. از سایر کاربردها، تحقیق در خواص جبری گراف ها و کاربرد آن در شبکه ها و در مسئله پیچیدگی الگوریتم ها در علوم کامپیوتر است. کاربرد در فیزیک کوانتوم و تشخیص چهره و پردازش تصویر در کامپیوتر از دیگر کاربرد های طیف گراف است [۱ و ۳].

---

<sup>1</sup> Laplacian matrix

<sup>2</sup> Biggs

<sup>3</sup>Doob

<sup>4</sup> Sachs

<sup>5</sup> Seidel

در سال ۱۹۹۸ نظریه ی طیفی تغییرات جدیدی پیدا کرد و نتایج جدیدی در نظریه گراف های طیفی به دست آمد [۴]. در سال ۱۹۹۷ شخصی به نام چانگ<sup>۶</sup> تحقیقاتی در مورد گراف های طیفی را منتشر کرد. تعیین گراف ها توسط طیف شان توسط شخصی بنام هیمر<sup>۷</sup> در سال ۲۰۰۳ مورد بررسی قرار گرفت. نظریه ی طیفی گراف ها بیشتر طیف را روی ماتریس های معین که بیشتر شامل لاپلاس و مجاورت است مطالعه می شود [۵]. در سال ۲۰۰۸ نظریه ی طیفی توسط ویلسون<sup>۹</sup> و پینگ<sup>۱۰</sup> مورد بررسی قرار گرفت.

همچنین نوشته های زیادی روی وضعیت جبری از تئوری گراف های طیفی وجود دارد. از دیگر موارد کاربرد طیف در شبکه ها و در هم آمیختن الگوریتم در علوم کامپیوتر است. نظریه ی طیفی گراف یک مهارت مفید برای بیشتر گراف ها بیان می شود [۶]. از دیگر کاربردهای آن در شیمی، مقادیر ویژه وابسته به پایداری مولکول است [۷]. در فیزیک مربوط به کوانتوم در کامپیوتر تشخیص چهره، الگو، پردازش تصویر بکار برده می شود. نظریه ی طیفی گراف روشی است که بزرگترین مسئله قطعه قطعه کردن تصاویر را نشان می دهد [۵].

در این پایان نامه سعی شده است تا نتایج مقالات و تحقیقات ذکر شده برای گراف های مختلف مورد بررسی قرار گیرد. مطالب اصلی این پایان نامه شامل، تعیین کران هایی برای شعاع طیفی گراف (بزرگترین مقدار ویژه)، بررسی روش های نشان دادن طیفی یک گراف برای کاهش ابعاد با استفاده از دو روش آنالیز مولفه های اصلی و مقیاس گذاری چند بعدی می باشد. همچنین نحوه استفاده نظریه طیفی گراف در مسئله تشخیص چهره و بررسی گراف های شاک و دلونی می باشد. امید است مطالب این پایان نامه مورد استفاده محققان و دانشجویان قرار گیرد.

---

<sup>6</sup> Chang

<sup>7</sup> Himer

<sup>9</sup> Vilson

<sup>10</sup> Ping

فصل اول:

تعاریف ومفاهیم اولیه ماتریس ها

## ۱-۱ مقدمه

بکارگیری ماتریس ها در نظریه گراف امری غیر قابل انکار است. این موضوع از دو دیدگاه قابل بررسی می باشد. یک دیدگاه، جنبه تئوری مسئله است که شامل بکارگیری احکام و قضیه ها و مسائل مطرح شده مربوط به ماتریس ها در جبر خطی است که قابل استفاده در تئوری گراف می باشد و بالعکس. دیدگاه دوم آن است که از لحاظ عملی می توان از ماتریس ها برای انجام محاسبات در جهت کاربرد تئوری گراف در سایر رشته ها استفاده نمود. در این رابطه ماتریس ها ساده ترین ابزار برای انتقال اطلاعات گراف ها به رایانه می باشند. بدین ترتیب رابطه تئوری گراف با علوم کامپیوتر نیز روشن می شود. شرح هر یک از این دو مبحث در کتاب ها و مقالات مربوط به نظریه گراف و کاربردهای آن آمده است [۹ و ۵۷، ۱۰]. در اینجا ابتدا، تعاریف اولیه و مفهوم گراف مطرح می شود و سپس چند ماتریس مهم و نحوه ی به کار گیری آنها در تئوری گراف همراه با چند قضیه مطرح می شود.

## ۱-۲- تعاریف اولیه [۱۱]:

یک گراف  $G = (V, E)$  زوج مرتبی چون  $(V, E)$  است که در آن  $V$  مجموعه ای متناهی و ناتهی و  $E$  زیر مجموعه ای از تمام زیر مجموعه های دو عضوی  $V$  است. مجموعه  $V$  را مجموعه رئوس گراف  $G$  و مجموعه  $E$  را مجموعه یال های گراف  $G$  می نامند.

مجموعه رئوس گراف  $G$  را با  $V(G)$  یا  $V$  نمایش می دهند. تعداد رئوس گراف  $G$  را مرتبه گراف می نامند و آن را با  $|V|$  یا  $P$  نمایش می دهند.

## ۱-۳- ماتریس ها و نحوه بکارگیری آنها در تئوری گراف [۱۰]:

همان طور که گفته شد ماتریس ها، ساده ترین ابزار برای انتقال اطلاعات گراف ها، به رایانه می باشند. همچنین برای انجام محاسبات در مسائل کاربردی تئوری گراف که بوسیله رایانه انجام می گیرد، می توان از ماتریس ها استفاده نمود. بعضی از کاربردهای کلی ماتریس ها عبارتند از:



۱. حل الگوریتمی مسائل کلاسیک مانند: مسئله کوتاه ترین مسیر، مسئله ارتباط دهی، تور

اویلری، درخت های مولد مینیمال و غیره.

۲. بررسی مسائل طیفی گراف که مرتبط با مقادیر ویژه می باشد.

۳. بررسی نوع گراف ها و مقایسه گراف ها با یکدیگر از لحاظ یکریختی. (دو گراف یکریخت

دارای ماتریس های مجاورت یکسانی هستند).

اکنون به تعریف انواع ماتریس های مورد استفاده در جبر خطی و تئوری گراف می پردازیم.

ساده ترین و مهم ترین ماتریس توصیف کننده گراف، ماتریس مجاورت است که به صورت زیر تعریف می شود.

### ۱-۳-۱ ماتریس مجاورت<sup>۱۱</sup>، یک گراف

فرض شود  $G=(V,E)$  یک گراف ساده، بدون جهت و بدون وزن باشد. به طوری که مجموعه

رئوس گراف  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  باشد. ماتریس مجاورت یک ماتریس مربعی  $p \times p$  بصورت

$A=[a_{ij}]$  با مقادیر تعیین شده در رابطه (۱-۱) است.  $i=1,2,\dots,p$  و  $j=1,2,\dots,p$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E \\ 0 & v_i v_j \notin E \end{cases} \quad (1-1)$$

ماتریس مجاورت دارای خواص زیر است:

الف - قطر اصلی آن صفر است.

ب - جمع درایه های هر سطر ( هر ستون ) برابر درجه رأس نظیر آن سطر است.

ج-ماتریس مجاورت متقارن است .

---

<sup>11</sup> Adjacency matrix

د- هر ماتریس با درایه های صفر و یک و متقارن که درایه های قطر اصلی آن صفر باشد ماتریس مجاورت یک گراف است.

**مثال ۱-۳:** گراف  $G$  با چهار رأس و چهار یال به همراه ماتریس مجاورت آن در شکل (۱-۱) ترسیم شده است.



شکل ۱-۱- گراف  $G$  و ماتریس مجاورت مربوط به آن

### ۱-۳-۱- کاربردهای ماتریس مجاورت

ساده ترین شکل خواندن اطلاعات مربوط به یک گراف از طریق ماتریس مجاورت قابل انجام است. علاوه بر کاربردهای محاسباتی که در فوق به آن اشاره شد، کاربردهای استدلالی نیز دارد که دو نمونه از آن در قالب قضیه در ذیل آورده می شود.

**قضیه ۱-۳-۱:** اگر  $A$  ماتریس مجاورت گراف  $G = (V, E)$  با  $n$  رأس باشد. در این صورت گراف  $G$  همبند است اگر و تنها اگر هر ماتریس  $C$  به صورت زیر دارای هیچ عنصر صفر خارج از قطر اصلی نباشد.

$$C = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1} \quad (۲-۱)$$

**برهان:** اگر  $A$  همبند باشد، از هر رأس به رأس دیگر مسیری وجود دارد. در این صورت عنصر  $a_{ij}$  حداقل در یکی از  $A, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}$  دارای مقدار غیر صفر می باشد. در نتیجه عنصر  $c_{ij}$  برای  $i \neq j$  در ماتریس  $C$  مخالف صفر خواهد بود.

### ۱-۳-۲ ماتریس جایگشت<sup>۱۲</sup>:

یک ماتریس مربعی مخالف صفر مانند  $P$  یک ماتریس جایگشت نامیده می شود اگر تنها یک عنصر مخالف صفر در هر سطر و ستون یافت شود و بقیه همگی برابر صفر باشند. بنابراین اگر  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  یک جایگشت از  $(1, 2, \dots, n)$  باشد آنگاه:

$$p = \begin{bmatrix} e_{a_1}^T \\ \vdots \\ e_{a_n}^T \end{bmatrix}$$

که در آن  $e_i$ ،  $i$  امین ستون ماتریس واحد  $I$  از مرتبه  $n \times n$  می باشد [۵۷].

**قضیه ۱-۳-۳:** یک ماتریس متقارن  $A$  نیمه معین و مثبت است اگر و فقط همه مقادیر ویژه آن بزرگتر یا مساوی صفر باشد [۱۳].

### ۱-۳-۳ ماتریس نرمال لاپلاس<sup>۱۳</sup>

این ماتریس توسط فرمول (۴-۱) به دست می آید

$$\widehat{L}_{uv} = \begin{cases} 1 & u = v \\ -\frac{1}{\sqrt{d_u d_v}} & \text{اگر } u, v \text{ مجاور} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۳-۱)$$

همین طور از رابطه  $\hat{L} = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$  حاصل می شود ، یک ماتریس نیمه معین و مثبت می باشد.

مقادیر ویژه آن بزرگتر یا مساوی صفر می باشد [۷، ۱۴، ۱۲، ۵۸].

<sup>12</sup> Permutation matrix

<sup>13</sup> Normal laplacian matrix

### ۱-۳-۴ ماتریس هت کرنل<sup>۱۴</sup>

این ماتریس اطلاعات گراف را در رابطه با زمان ارائه می دهد، این ماتریس وابسته به ماتریس نرمال لاپلاس می باشد. یعنی

$$\frac{\delta H_t}{\delta t} = -\hat{L} H_t \quad (۴-۱)$$

که  $H_t$  هت کرنل و  $t$  زمان می باشد. هت کرنل یک ماتریس  $|V| \times |V|$  و  $D$  یک ماتریس قطری می باشد.  $H_t = \Phi \exp[-tD] \Phi^T$  برای رأس های  $u, v$  از گراف  $G$ ، مولفه های آن را بطه زیر را نتیجه می دهند.

$$H_t(u, v) = \sum_{i=1}^{|V|} \exp[-\lambda_i t] \phi_i(u) \phi_i(v) \quad (۵-۱)$$

وقتی که  $t$  به صفر میل می کند، سپس  $H_t \cong I - \hat{L}t$ ، یعنی کرنل روی اتصال ساختار گراف از لحاظ هندسی وابسته است. از طرف دیگر اگر  $t$  بزرگ باشد، سپس

$$H_t \cong \exp[-t\lambda_m] \Phi_m(u) \Phi_m^T(v) \quad (۶-۱)$$

که  $\lambda_m$  کوچکترین مقدار ویژه غیر صفر است و  $\Phi_m$  بردار ویژه می باشد. و هنگامی که زمان بزرگ باشد می تواند روی ساختار کلی گراف اثر بگذارد.

### ۱-۳-۵ ماتریس توزیع طول مسیر

هت کرنل به توزیع طول مسیر در گراف وابسته است. اگر  $D_K(u, v)$  تعدادی از مسیر های به طول  $K$  بین رأس های  $u, v$  باشد سپس

$$H_t(u, v) = \exp[-t] \sum_{k=1}^{|V|^2} D_k(u, v) \frac{t^k}{K!} \quad (۷-۱)$$

<sup>14</sup> Heat kernel

توزیع طول مسیر به طیف ماتریس نرمال لاپلاس وابسته است.

$$D_K(u, v) = \sum_{i=1}^{|V|} (1 - \lambda_i)^K \Phi_i(u) \Phi_i(v) \quad (۸-۱)$$

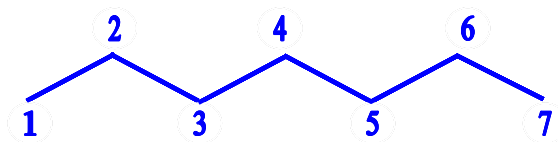
بنابراین  $D_K(u, v)$  مجموعه ای از وزن های همه گردش های به طول  $K$  از اتصال گره های  $u, v$  است [۷].

### ۱-۳-۶- ماتریس فاصله<sup>۱۵</sup>، یک گراف

فاصله  $d(u, v)$  بین رئوس  $u, v$  در گراف  $G$ ، کوتاه ترین مسیری است که رئوس  $u, v$  را به هم متصل می کند. بر مبنای این مفهوم و مشابه ماتریس مجاورت، یک ماتریس مربعی بر حسب تعداد رأس های گراف به صورت  $D(G) = [d_{ij}]$  است بطوریکه:

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & \text{مسیر وجود دارد} \\ 0 & \text{مسیر وجود ندارد} \end{cases} \quad (۹-۱)$$

مثال ۱-۳-۷ گراف  $G$  با هفت رأس و شش یال در شکل شماره ۱-۲ ترسیم شده است.



شکل ۱-۲- گراف  $G$

<sup>15</sup> Distance matrix

$$D(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

### ۱-۳-۷- کاربردهای ماتریس فاصله:

ماتریس فاصله  $D(G)$  یک ماتریس متقارن است که شامل اطلاعاتی در مورد فاصله ها در گراف  $G$  است. می توان پارامترهای کمی را در گراف تعریف نمود که در توصیف گراف بسیار موثرند. این پارامترها توسط ماتریس فاصله قابل محاسبه می باشند. بعضی از این پارامترها عبارتند از مرکز گراف، شعاع، قطر و خروج از مرکز گراف می باشد. تعریف این مفاهیم با استفاده از مفهوم فاصله به شرح ذیل می باشد.

مرکز گریزی<sup>16</sup> گراف  $G$  رأسی مانند  $u$  است به طوری که  $\max_{v \in V} d(u, v)$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در حقیقت ماکزیمم فاصله هر رأس را از سایر رئوس اندازه گرفته، و از میان مجموعه ماکزیمم ها، مینیمم انتخاب می شود.

$$e(v) = \max\{d(v \cdot u) \mid u \in V(G)\} \quad (10-1)$$

شعاع گراف<sup>17</sup> همبند  $G$ ، را به صورت رابطه (۱۱-۱) تعریف می کنیم.

$$radG = \min\{e(v) \mid v \in V(G)\} \quad (11-1)$$

قطر گراف<sup>18</sup> همبند  $G$ ، را با  $diamG$ ، نشان داده و به صورت رابطه (۱۲-۱) تعریف می شود.

<sup>16</sup> Eccentricity

<sup>17</sup> radius

<sup>18</sup> Diameter graph

$$\max\{e(v) \mid v \in V(G)\} \quad (12-1)$$

$e(v)$  برای رأس  $v$  گراف  $v$  (یا گراف وزن دار)  $G$  فاصله رأس  $v$  تا دورترین رأس از  $v$  است که به صورت رابطه (۱۰-۱) می باشد.

### ۱-۳-۸- ماتریس درجه <sup>۱۹</sup> یک گراف

فرض شود که  $A = [a_{ij}]$  ماتریس مجاورت گراف  $G = (V, E)$  باشد. اگر به جای هر یک از درایه های قطر اصلی در ماتریس  $A$ ، مقدار درجه رأس متناظر را قرار دهیم، ماتریس حاصل را ماتریس درجه گراف  $G$  نامیم. ماتریس درجه گراف شکل (۱-۳)، به صورت ماتریس زیر می باشد.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از ماتریس درجه می توان برای تعیین درجه رؤس گراف، تعیین کوچکترین و بزرگترین درجه رأس گراف و محاسبه مجموع و میانگین درج های گراف استفاده کرد.

### ۱-۳-۹- ماتریس لاپلاسیان <sup>۲۰</sup> یک گراف

فرض شود که  $A = [a_{ij}]$  ماتریس مجاورت و  $D$  ماتریس درجه گراف  $G = (V, E)$  باشد. ماتریس حاصل از رابطه  $L = D - A$  را ماتریس لاپلاسیان گراف  $G = (V, E)$  نامیم. بنابراین ماتریس لاپلاسیان یک ماتریس مربعی  $p \times p$  بصورت  $L = [a_{ij}]$  است که با رابطه (۱-۱۴) تعریف شده است.

$$a_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & i = j \\ -1 & v_i v_j \in E \\ 0 & v_i v_j \notin E \end{cases} \quad (13-1)$$

<sup>19</sup> Degree matrix

<sup>20</sup> Laplacian matrix

ماتریس لاپلاسین گراف شکل (۳-۱)، به صورت ماتریس  $L$  می‌باشد.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یک خاصیت جالب در ماتریس لاپلاسین این است که مجموع درایه های هر سطر و هر ستون آن صفر است.

از ماتریس لاپلاسین می‌توان برای داشتن تمام خواص و کاربردهای ماتریس مجاورت و ماتریس درجه، تعیین مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین و استفاده از آن برای مقایسه و بررسی گراف و تعیین ماتریس سختی سازه های فلزی استفاده نمود. ماتریس لاپلاسین و گراف با رأس های معمولی در بسیاری از مسایل کاربردی، به کار گرفته شده است [۷ و ۱۶، ۱۰].

### ۱-۳-۱۰ ماتریس مسیر<sup>۲۱</sup> یک گراف

فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف با  $m$  مسیر  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$  و  $n$  یال  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  باشد.

برای هر دو رأس  $u$  و  $v$  از این گراف، ماتریس مسیر ماتریسی به صورت  $P_{uv} = [P_{ij}]$  می‌باشد.

به طوری که

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j \in p_i \\ 0 & e_j \notin p_i \end{cases} \quad (۱۴-۱)$$

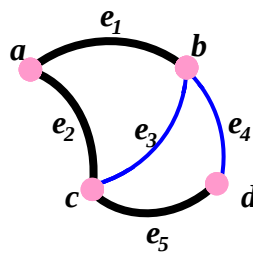
یکی از کاربردهای ماتریس مسیر تعیین مسیرهای مختلف بین هر دو رأس گراف است.

---

<sup>21</sup> Path matrix



ماتریس مسیر گراف شکل (۳-۱)، به صورت ماتریس زیر می‌باشد و به عنوان مثال، مسیر  $P_1 = be_1ae_2ce_3d$  که از رأس  $b$  شروع می‌شود و با عبور از رأس های  $a, c$  و یالهای  $e_1, e_2, e_3$  و  $e_5$  به رأس  $d$  ختم می‌شود با خطوط مشکی پررنگ نشان داده شده است.



$$P = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

شکل ۳-۱- گراف  $G$  و ماتریس مسیر مربوط به آن

گراف همبند، گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. رابطه وجود مسیر بین دو رأس یک گراف، یک رابطه هم‌ارزی است یعنی:

- هر رأس با مسیری (به طول صفر) با خودش رابطه دارد. (خاصیت بازتابی)
- اگر بین  $a, b$  مسیری وجود داشته باشد، آنگاه بین  $a, b$  نیز مسیری وجود دارد. (خاصیت تقارنی)

- اگر از  $a$  به  $b$  و از  $b$  به  $c$  مسیری وجود داشته باشد آنگاه از  $a$  به  $c$  نیز مسیری وجود دارد.

( خاصیت تراگذاری یا تعدی )

رابطه وجود مسیر، رأس های هر گراف را به چند کلاس افراز می کند. در هر یک از این کلاس ها، رأس های یک کلاس به رأس های کلاس دیگر متصل نیستند.

پس می توان گفت، گراف ناهمبند همانند گرافی است که شامل چند کلاس باشد.

**تعریف ۱-۲-۱:** ماتریس  $A$  که دارای تعداد یکسان سطر و ستون باشد یک ماتریس مربعی نامیده می شود.

**تعریف ۲-۲-۱:** ماتریس  $A$  متقارن نامیده می شود اگر  $A = A^T$  [۵۹].

**تعریف ۳-۲-۱:** دو ماتریس مشابه هستند در صورتی که دارای مقادیر ویژه یکسان باشند [۵۹].

**قضیه ۳-۳-۱:** بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه متمایز یک ماتریس مستقل خطی هستند [۵۹].

**قضیه ۴-۳-۱:** دو ماتریس مشابه دارای مقادیر ویژه یکسان هستند. یعنی مقادیر ویژه  $A$  ,  $TAT^{-1}$  برای همه ماتریس های منفرد  $T$  یکسان هستند [۵۹].

**اثبات :** نشان می دهیم که  $A$  و  $TAT^{-1}$  دارای چند جمله ای های مشخصه یکسان هستند و در نتیجه دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

$$\begin{aligned}
\det(TAT^{-1} - \lambda I) &= \det(T(A - \lambda I)T^{-1}) \\
&= \det T \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(T^{-1}) \\
&= \det T \cdot \det(T^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) = \det(T \cdot T^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \\
&= \det(A - \lambda I)
\end{aligned}$$

بنابراین  $TAT^{-1}$  و  $A$  دارای چند جمله ای های مشخصه یکسان هستند و در نتیجه دارای مقادیر ویژه یکسان می باشند.

**قضیه ۱-۳-۵:** ماتریس متقارن  $A$  معین و مثبت است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشد [۱۳].



فصل دوم:

بررسی خواص طیفی گراف وکران های

مجموعه طیفی

## ۲- ۱ مقدمه:

در این فصل با توجه به اهمیت طیف گراف ابتدا طیف گراف را تعریف نموده و نمایش طیفی گراف را در گرافهای بدون وزن و وزن دار بررسی می کنیم. با بررسی طیف هر گراف می توان به بعضی از خواص آن از قبیل، تعداد رأس های مجزا، دو بخشی بودن و غیره پی برد. همچنین در این فصل بعضی از قضایا و لم های مرتبط با کران بالا و کران پایین طیف گراف ارائه می گردد.

**تعریف ۱-۲:** اگر  $A(G)$  ماتریس مجاورت گراف  $G$  باشد آنگاه چند جمله ای مشخصه  $G$  به صورت

زیر تعریف می شود:

$$P(G, X) = \det(xI - A(G))$$

ریشه های این چند جمله ای را مقادیر ویژه ماتریس می نامند.

**تعریف ۱-۲-۲:** طیف<sup>۲۲</sup> گراف  $G$  مجموعه مقادیر ویژه ماتریس گراف همراه با مرتبه تکرار هر یک

از این مقادیر ویژه می باشد. حال اگر مقادیر ویژه را با  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$  و مرتبه تکرار هر یک را

با  $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_K)$  به ترتیب نمایش دهیم آنگاه طیف گراف  $G$  را به شکل

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_K \\ m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_K) \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

نمایش می دهیم [۱۶].

مثال ۱-۲: برای گراف کامل  $K_4$  داریم:

---

<sup>22</sup> Spectral

$$A(K_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Spec}(K_4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## ۲-۱ چند جمله ای مشخصه، مقادیر ویژه، و بردارهای ویژه یک ماتریس

فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد. همان گونه که در تعریف آمد، صفرهای چند جمله ای مشخصه  $p_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  مقادیر ویژه  $A$  نامیده می شود. که این تعریف معادل این عبارت است که،  $\lambda$  یک مقدار ویژه  $A$  است اگر و فقط اگر یک بردار مخالف صفر  $X$  یافت شود بطوری که  $AX = \lambda X$ . که  $X$  یک بردار ویژه نامیده می شود [۵۷].

### ۲-۱-۱ نمایش طیفی گراف:

در گراف  $G = (V, E)$  که  $V$  مجموعه رأس ها و  $E \subseteq V \times V$  مجموعه یال ها، می باشد. اگر ماتریس دلخواهی از یک گراف،  $X$  باشد بطوریکه عناصر  $x_{ij}$  اطلاعاتی در مورد رأس های  $i, j$  را نشان دهد، تجزیه  $X = \Phi D \Phi^T$  به صورت  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{|V|})$  که یک ماتریس قطری با مقادیر ویژه می باشد و  $\Phi = (\Phi_1 | \Phi_2 | \dots | \Phi_{|V|})$  ماتریس بردارهای ویژه است که به صورت ستونی نمایش داده می شود. از تجزیه ماتریس  $X$  به صورت بالا طیف حاصل می شود و به صورت یک مجموعه مرتب زیر نمایش می دهند.

$$S = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{|V|}\}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{|V|}$$

در تئوری گراف از طیف گراف به طور گسترده استفاده می شود. طیف گراف جهت متمایز کردن ویژگی های گراف و کسب اطلاعات از ساختار گراف بکار می رود. تنوع نسبتاً گسترده ای برای بیان و ارائه ماتریس های گراف وجود دارد که از آنها طیف حاصل می شود. ماتریس هایی که از آنها طیف

گراف حاصل می شود عبارتند از: لاپلاس، مجاورت، نرمال لاپلاس، هت کرنل و توزیع طول مسیر می باشند. انتخاب ماتریس تأثیر زیادی روی طیف گراف دارد [۸، ۱۷ و ۷].

تئوری گراف روش دیگری را برای مسأله شباهت گراف فراهم می آورد. این روش بر مبنای شاخه ای از ریاضیات است که دقیقاً مرتبط با متمایز کردن ویژگی های ساختاری گراف با استفاده از بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس مجاورتی یا ماتریس لاپلاسی می باشد. یکی از موفقیت های تئوری طیفی گراف در تصویر کامپیوتری استفاده از روش های برداری ویژه برای گروه بندی از طریق طبقه بندی دو به دو می باشد [۷].

یک مسئله اساسی در مقایسه گراف این است که رأس ها علامت گذاری یا مرتب شده نمی باشند. در نتیجه رأس ها ممکن است در ترتیب های مختلفی در دو گراف تحت مقایسه به نظر رسند حتی اگر یکرخت باشند. معمولاً انطباق بین رأس ها در دو گراف بایستی قبل از ارزیابی شباهت تعیین شود. به وضوح مرتب کردن رأس ها برای ارائه و نمایش ماتریس در مسئله هم طیفی گراف تأثیر می گذارد، اگر  $P$  ماتریس جایگشت باشد دو گراف یکرخت دارای طیف یکسان می باشند که  $\bar{L} = PLP^T$  است. ولی عکس آن درست نمی باشد زیرا دو گراف غیر یکرخت ممکن است در طیف مشابهی سهیم باشند [۷].

فاصله طیفی بین گراف ها فاصله اقلیدسی بین طیف ها می باشد.

$$D_{\lambda}(G_1, G_2) = \sqrt{\sum_i (\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)})^2} \quad (2-2)$$

روش های طیفی گراف برای آنالیز کردن مورد استفاده قرار می گیرد. برای مثال منطبق کردن دو گراف با اندازه برابر از تجزیه ماتریس های مجاورت استفاده می شود.

**معایب طیف:**



۱- دو گراف متمایز ممکن است دارای طیف یکسان باشند.

۲- طیف ممکن است با تغییر کوچک ساختار گراف تغییر کند.

۳- طیف یک گراف به طور کلی جهت اینکه تنها ابزار مؤثر برای تحلیل گراف ها باشند، کارآمد نخواهد بود، مثلاً نتایجی که در بخش های بعدی از درختان حاصل می شود. تقریباً همیشه یک همتا با طیف مشابه در درختان وجود دارد. بنابراین درختان به طور منحصر بفرد با طیف نمی توانند تعریف شوند [۷].

**قضیه ۲-۱-۱:** فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1K} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{KK} \end{bmatrix}$$

که در آن  $A_{ii}$  یک ماتریس مربعی است. آنگاه طیف  $A$  برابر اجتماع طیف های  $A_{11}, \dots, A_{KK}$  می باشد.

**اثبات:** داریم

$$\det(A - \lambda I) = \det(A_{11} - \lambda I) \det(A_{22} - \lambda I) \dots \det(A_{kk} - \lambda I)$$

بنابراین مجموعه صفرهای چند جمله ای مشخصه  $A$  برابر اجتماع مجموعه های صفرهای چند جمله ای مشخصه  $A_{11}, \dots, A_{kk}$  می باشد [۵۷].

## ۲-۳ گراف وزن دار طیفی

گراف بدون جهت  $\varphi = (V, E, w)$  را در نظر بگیرید که در آن  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$E = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V \times V$  و تابع وزن  $w: E \rightarrow (0,1]$  می باشند. آنگاه ماتریس مجاورت  $A$  برای گراف  $\varphi$  یک ماتریس متقارن  $n \times n$  با عناصر رابطه (۱۲-۲) می باشد:

$$A_{ab} = \begin{cases} 1 & (v_a, v_b) \in E \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases} \quad (12-2)$$

به عبارت دیگر ماتریس فوق فقط، ساختار گراف را بیان می کند، حال اگر یال ها وزن دار باشند ماتریس مجاورت به صورت رابطه (۱۳-۲) تعریف می شود.

$$A_{ab} = \begin{cases} \omega(v_a, v_b) & (v_a, v_b) \in E \\ 0 & \text{در غیراین صورت} \end{cases} \quad (13-2)$$

ماتریس لاپلاس حاصل از تفاضل ماتریس های  $L = D - A$  به دست می آید که در آن  $D$  یک ماتریس قطری با عناصر  $D_{aa} = \sum_{b=1}^n A_{ab}$  که عناصر آن شامل درجه رأس ها می باشد.

آنالیز طیفی ماتریس لاپلاس مناسب تر از ماتریس مجاورت است، زیرا نیمه معین مثبت<sup>۲۳</sup> بوده و مقادیر ویژه آن بزرگتر مساوی صفر می باشد. مقایسه دو گراف  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  بوسیله تناظر بین رأس ها با استفاده از نگاشت می باشد.

$$f: V_1 \cup \emptyset \rightarrow V_2 \cup \emptyset \quad (14-2)$$

برای اینکه نگاشت  $f$  بهبود یابد، به حداقل رساندن خطا در یک مقیاس مطرح می شود. در اینجا مقدار مینیمم برای دو گراف شبیه به هم در نظر گرفته می شود. رأس های افزوده با  $\Phi$  نمایش داده می شود. تطابق رأس غیر اصلی<sup>۲۴</sup> یا افزوده، تهی می شود که برای حل مسئله، روش بهینه سازی توسعه داده می شود. با استفاده از مسئله نگاشت تناظر بین رأس ها مشخص می شود. جایگشت رأس

---

<sup>2</sup> Semidefinite  
<sup>24</sup> Extraneous vertex

ها در گراف دوم نسبت به گراف اول در مرتبه یکسانی قرار دارد، که از ماتریس لاپلاس به دست می آید. اگر دو گراف یکرخت باشند ماتریس جایگشت در شرط (۱۵-۲) صدق می کند.

$$L_1 = PL_2P^T \quad (۱۵-۲)$$

در صورتی که این شرط برقرار نباشد دو گراف غیر یکرختند. از فاصله فریبنیوس بین ماتریس برای معیار درجه شباهت دو گراف استفاده می شود. نرم فریبنیوس<sup>۲۵</sup> که به صورت  $\|L_1 - PL_2P^T\|$  و ماتریس جایگشت  $P_u$  که مینیمم کننده است، به وسیله رابطه (۱۶-۲) به دست می آید. و  $J(P_u)$  مینیمم کننده است.

$$J(P_u) = \|P_u A_1 P_u^T - A_2\| \quad (۱۶-۲)$$

که در آن  $A_2 = U_2 D_2 U_2^T$ ،  $A_1 = U_1 D_1 U_1^T$  که  $U$  ماتریس متعامد و  $D$  ماتریس قطری است و ماتریس جایگشت را توسط  $U_2 U_1^T$  تقریب می زنند [۱۸].

### ۲-۳-۱ ماتریس طیف گراف:

طیف گراف با ماتریس مجاورت یا ماتریس های وابسته طیفی مطرح می شود. در صورتی که عناصر روی قطر اصلی صفر باشند تجزیه طیفی ماتریس مجاورت دارای تعدادی مقادیر ویژه منفی می باشد. ماتریس طیفی برای یک گراف از تجزیه ماتریس مجاورت به دست می آید یعنی:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i e_i^T \quad (۱۷-۲)$$

که در آن  $\lambda_i$ ،  $i$  امین مقدار ویژه و  $e_i$  بردار ویژه متناظر با آن می باشد که از ماتریس مقارن  $A$  حاصل می شوند. بردارهای ویژه نرمال شده هستند و طول آن ها واحد می باشد. یعنی  $e_i^T e_i = 1$ . بردار ویژه ماتریسی طیفی توسط رابطه (۱۸-۲) به دست می آید.

---

<sup>25</sup>Norm frobenius

$$\Phi = (\sqrt{\lambda_1}e_1^T, \sqrt{\lambda_2}e_2^T, \dots, \sqrt{\lambda_n}e_n^T) \quad (18-2)$$

ماتریس  $\Phi$  یک نمایش کامل از گراف در صورتی که مقادیر ویژه نا منفی باشند. ماتریس مجاورت اصلی مجدداً توسط تابع (۱۹-۲) ساخته می شود.

$$A = \Phi\Phi^T \quad (19-2)$$

## ۲-۴ هم طیفی:

به دو گراف هم طیف گفته می شود، در صورتی که دارای مجموعه مقادیر ویژه (مجموعه طیفی) یکسان باشند. ارائه و نمایش ماتریس انتخاب شده برای گراف تأثیر زیادی برای گراف های هم طیف دارد. یکی از مسائل طیف گراف بررسی مسئله هم طیفی گراف است.



شکل ۲-۱ گراف های غیر یکرخت و هم طیف با ماتریس مجاورت

در اینجا به بررسی هم طیفی در مجموعه های درختی و گرافی بزرگ در شکل (۲-۲)، جدول (۱-۲) و (۲-۲) می پردازیم. بررسی هم طیفی گراف ها با بیش از ۱۱ رأس نشدنی است. ماتریس مجاورت بدترین نمایش برای گراف های هم طیف دارد و ماتریس لاپلاس مناسب تر است که در یک بررسی برای گراف های ارائه شده در شکل (۲-۲) نمودار (۳) ، به این نتایج دست می یابیم. در نتیجه با توجه به نمودار (۳) ماتریس لاپلاس نرمال ۰/۲ در صدد گراف های هم طیف با ۱۱

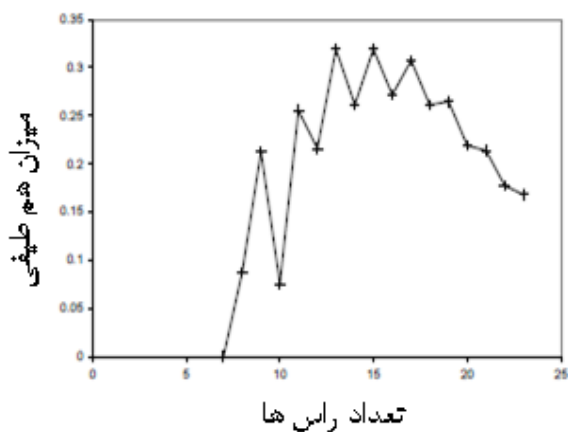
رأس را بوجود می آورد. ماتریس های لاپلاس منحصر بفرد، لاپلاس، مجاورت به ترتیب  $3/8$  در صد،  $9$  درصد،  $21$  در صد هم طیفی را بوجود می آورد. مسئله هم طیفی با ترکیب کردن<sup>26</sup> بیشتر از یک طیف عملی می باشد. جدول (2-1) نتایج ترکیب طیفی برای گراف ها نشان می دهد. که این ترکیب منجر به کاهش بزرگی در تعداد مجموعه های هم طیفی در مقایسه با طیف های خاص برای اندازه های کمتر از  $10$  رأس می شود. با توجه به جدول (2-1) و (2-2) به این نتیجه می رسیم که، ترکیب طیف نرمال لاپلاس با طیف دیگر برای گراف های کمتر از  $10$  رأس کما بیش تعداد گراف های هم طیف را نصف می کند [7]. شبیه سازی محاسباتی نشان داده است که هم طیفی<sup>27</sup> گراف ها به  $21$  درصد در  $10$  رأس در ماتریس مجاورت می رسند و برای  $11$  رأس کمتر می باشد با توجه به نتایجی که از نمودار (3) به دست آمده است ساختارهای گراف جهت ارائه ارتباطات ساختاری، در ساختار گراف مورد استفاده قرار می گیرد. برای مثال اخیراً گراف های شاخ<sup>28</sup> جهت ارائه شکل مورد استفاده قرار می گیرد [7].

به منظور ارائه مسئله هم طیفی به بیان ماتریس های مختلف در مجموعه های گرافی و درختی بزرگ می پردازیم. از طیف جهت دسته بندی و طبقه بندی گراف ها استفاده می گردد و تأثیر فرمول بندی ماتریس ها برای نشان دادن میزان خطا بکار برده می شود. نظریه طیفی گراف روش دیگری برای مسأله شباهت گراف است. برای درختان طیف مشابه وجود دارد بنابراین نمی توان به طرز منحصر بفردی با طیف تعریف شوند. برای گراف های کوچک هم طیفی کمتر از  $11$  رأس رو به کاهش می رود [7].

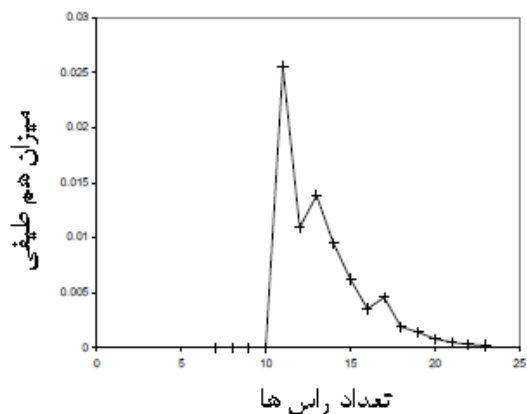
<sup>26</sup>Combining

<sup>27</sup>cospectral

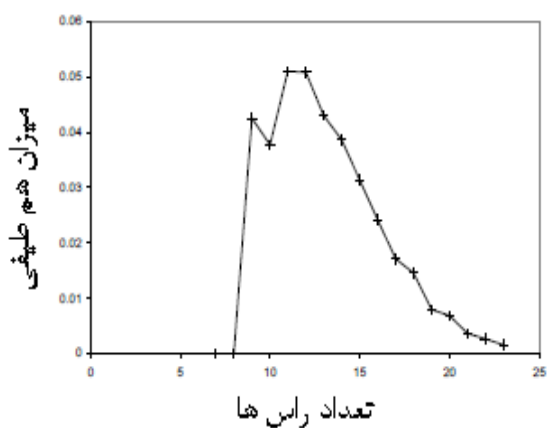
<sup>28</sup>Shock



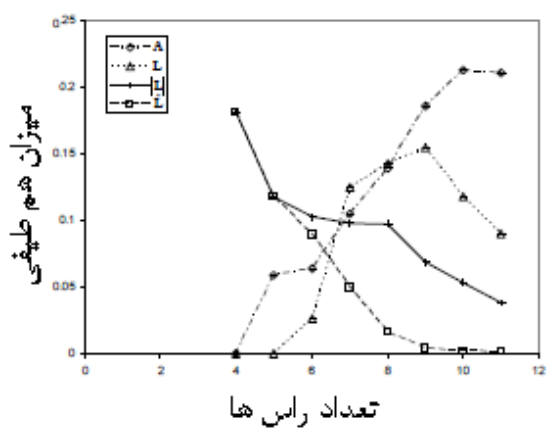
نمودار ۲: درخت های هم طیف ماتریس مجاورت  $A$



نمودار ۱: درخت های هم طیف ماتریس لاپلاس  $L$



نمودار ۴: درخت های هم طیف ماتریس نرمال لاپلاس



نمودار ۳: گراف های هم طیف

$$\hat{L}$$

شکل (۲-۲) هم طیفی درخت ها با ماتریس های مجاورت، لاپلاس، نرمال لاپلاس

| کل    | $\hat{L}\&L$ | $\hat{L}\&A$ | $ L \&A$ | $L\& L $ | $A\&L$ | تعداد گراف ها | تعداد<br>رأس ها |
|-------|--------------|--------------|----------|----------|--------|---------------|-----------------|
| ۰     | ۰            | ۰            | ۰        | ۰        | ۰      | ۱۱۲           | ۶               |
| ۰     | ۰            | ۰            | ۰        | ۱۶       | ۰      | ۸۵۳           | ۷               |
| ۰     | ۰            | ۶            | ۰        | ۲۳۲      | ۰      | ۱۱۱۱۷         | ۸               |
| ۲     | ۶            | ۱۴           | ۸        | ۴۱۳۹     | ۸۲     | ۲۶۱۰۸۰        | ۹               |
| ۱۰۱۲۴ | ۱۰۲۵۶        | ۱۰۲۸۱        | ۱۰۷۱۶    | ۱۰۷۸۳۵   | ۱۳۸۶۴  | ۱۱۷۱۶۵۷۱      | ۱۰              |

جدول ۱-۲ گراف های هم طیف

| $A\&L$ | $\hat{L}$ | $L$    | $A$   | تعداد درخت ها | تعداد رأسها |
|--------|-----------|--------|-------|---------------|-------------|
| ۰      | ۰         | ۰      | ۰/۰۸۷ | ۲۳            | ۸           |
| ۰      | ۰/۰۴۲۶    | ۰      | ۰/۲۱۳ | ۴۷            | ۹           |
| ۰      | ۰/۰۳۷۷    | ۰      | ۰/۰۷۵ | ۱۰۶           | ۱۰          |
| ۲      | ۰/۰۵۱۱    | ۰/۰۲۵۵ | ۰/۲۵۵ | ۲۳۵           | ۱۱          |
| ۲      | ۰/۰۵۰۸    | ۰/۰۱۰۹ | ۰/۲۱۶ | ۵۵۱           | ۱۲          |
| ۲      | ۰/۰۴۳۰    | ۰/۰۱۳۸ | ۰/۳۱۹ | ۱۳۰۱          | ۱۳          |
| ۱۰     | ۰/۰۳۸۶    | ۰/۰۰۹۵ | ۰/۲۷۲ | ۳۱۵۹          | ۱۴          |
| ۲      | ۰/۰۳۱۴    | ۰/۰۰۶۲ | ۰/۳۰۷ | ۷۷۴۱          | ۱۵          |
| ۱۴     | ۰/۰۲۴۱    | ۰/۰۰۳۵ | ۰/۲۶۱ | ۱۹۳۲۰         | ۱۶          |
| ۴۰     | ۰/۰۱۷۱    | ۰/۰۰۴۵ | ۰/۲۶۵ | ۴۸۶۲۹         | ۱۷          |

|    |           |       |         |        |     |
|----|-----------|-------|---------|--------|-----|
| ۱۸ | ۱۲۳۸۶۷    | ۰/۲۱۹ | ۰/۰۰۱۹  | ۰/۰۱۴۵ | ۳۸  |
| ۱۹ | ۳۱۷۹۵۵    | ۰/۲۱۳ | ۰/۰۰۱۴  | ۰/۰۰۷۹ | ۶۴  |
| ۲۰ | ۸۲۳۰۶۵    | ۰/۱۷۷ | ۰/۰۰۰۸  | ۰/۰۰۶۸ | ۱۴۸ |
| ۲۱ | ۲۱۴۴۵۰۵   | ۰/۱۶۸ | ۰/۰۰۰۵  | ۰/۰۰۳۶ | ۱۳۴ |
| ۲۲ | ۵۶۲۳۷۵۶   | –     | ۰/۰۰۰۲۸ | ۰/۰۰۲۶ | ۱۳۴ |
| ۲۳ | ۱۴۸۲۸۰۷۴  | –     | ۰/۰۰۰۱۹ | ۰/۰۰۱۵ | ۱۳۴ |
| ۲۴ | ۳۹۲۹۹۸۹۷  | –     | ۰/۰۰۰۰۹ | –      | –   |
| ۲۵ | ۱۰۴۶۳۶۸۹۰ | –     | ۰/۰۰۰۰۷ | –      | –   |
| ۲۶ | ۲۷۹۷۹۲۸۹۱ | –     | ۰/۰۰۰۰۵ | –      | –   |

جدول ۲-۲ نتایجی از درخت های هم طیف

## ۲-۵ تعیین کران بالا برای طیف گراف

اولین لم این بخش توسط بیگز<sup>۲۹</sup> در سال ۱۹۷۴ در کتاب نظریه جبری گراف ها<sup>۳۰</sup> ارائه شده است [۱۹].

لم ۲-۴-۱: اگر بزرگترین مقدار ویژه گراف  $G$ ,  $\lambda_1(G)$  باشد آنگاه [۱۹]

$$\lambda_1(G) \leq \left(\frac{2m(n-1)}{n}\right)^{1/2}. \quad (2-20)$$

اثبات:  $m$  تعداد یال ها می باشد. فرض کنیم  $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$  مقادیر ویژه گراف  $G$  باشند که به شکل نزولی مرتب شده اند. چون  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  و  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m$  است، با

<sup>29</sup> Biggs

<sup>30</sup> Algebraic graph theory



در نظر گرفتن نامساوی کوشی-شوارتز<sup>۳۱</sup> برای بردارهای  $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  و  $(1, 1, \dots, 1)$  به تعداد  $n - 1$  خواهیم داشت:

$$\lambda_1(G) \leq \left( \frac{2m(n-1)}{n} \right)^{1/2}$$

و حکم ثابت است.

اکنون کران هایی که در سال ۲۰۰۲ توسط کینکار داس<sup>۳۲</sup> و همکاران او ارائه شده است را بیان می کنیم [۱۹].

**قضیه ۲-۵-۱:** اگر  $G$  گراف همبند و  $\lambda_1$  بزرگترین مقدار ویژه آن باشد آنگاه [۱۹، ۵۸]

$$\lambda_1(G) \leq \max \left\{ \sqrt{\frac{TT_i}{d_i}} : 1 \leq i \leq n \right\}. \quad (21-2)$$

که در آن داریم:

$$T_i = \sum_j \{d_j : v_i v_j \in E(G)\} = d_i m_i \quad (22-2)$$

$$TT_i = \sum_j \{T_j : v_i v_j \in E(G)\} = \sum_j \{d_j m_j : v_i v_j \in E(G)\} \quad (23-2)$$

و  $d_i$  درجه راس  $v_i$  و  $m_i$  میانگین درجه رأس های مجاور با  $v_i$  می باشند .

**اثبات:** ماتریس  $D(G)^{-1}A(G)D(G)$  را در نظر بگیرید که  $D(G)$  ماتریس قطری از درجه رؤس  
است. عنصر  $(i, j)$  ام از ماتریس  $D(G)^{-1}A(G)D(G)$  به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \frac{d_j}{d_i} & \text{اگر } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

<sup>31</sup> Cauchy-Schwartz

<sup>32</sup> Kinkar ch. Das

اگر  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda_1$  از ماتریس  $D(G)^{-1}A(G)D(G)$  باشد. می توان فرض کرد که یک مولفه از بردار ویژه یک باشد و دیگر مولفه ها کمتر یا مساوی یک باشند. به عبارت دیگر  $x_i = 1$  و  $x_k \leq 1$  برای هر  $k$  است. داریم:

$$\{D(G)^{-1}A(G)D(G)\}X = \lambda_1 X. \quad (24-2)$$

$i$  امین معادله از تساوی (24-2) عبارت است از:

$$\lambda_1(G)x_i = \sum_j \left\{ \frac{d_j x_j}{d_i} : v_i v_j \in E(G) \right\}, \quad (25-2)$$

به عبارت دیگر

$$\lambda_1(G) = \sum_j \left\{ \frac{d_j x_j}{d_i} : v_i v_j \in E(G) \right\}$$

است.  $j$  امین معادله تساوی از (24-2) عبارت است از:

$$\lambda_1(G)x_j = \sum_k \left\{ \frac{d_k x_k}{d_j} : v_j v_k \in E(G) \right\} \quad (26-2)$$

با ضرب طرفین تساوی (26-2) در  $\frac{d_j}{d_i}$  و جمع بندی روی  $j$  خواهیم داشت:

$$\lambda_1(G)^2 = \sum_j \left\{ \frac{1}{d_i} \sum_k \{d_k x_k : v_j v_k \in E(G)\} : v_i v_j \in E(G) \right\}$$

اکنون با توجه به  $x_k \leq 1$  است داریم:

$$\leq \sum_j \left\{ \frac{1}{d_i} \sum_k \{d_k : v_j v_k \in E(G)\} : v_i v_j \in E(G) \right\} \quad (27-2)$$

با استفاده از روابط (21-2) و (22-2) خواهیم داشت:

$$= 1/d_i \sum_j \{d_j m_j : v_i v_j \in E(G)\} = \frac{TT_i}{d_i} \quad (28-2)$$

بنابراین حکم برقرار است. ■

نتیجه ۲-۵-۱: اگر  $G$  گراف همبند و  $\lambda_1(G)$  بزرگترین مقدار ویژه آن باشد آنگاه

$$\lambda_1(G) \leq \max\{\sqrt{d_k m_k} : 1 \leq k \leq n\} \quad (29-2)$$

است [۲۰].

اثبات: اگر  $d_k m_k = \max_j \{d_j m_j : v_i v_j \in E(G)\}$  و  $v_k \in V(G)$  باشد آنگاه از معادله

۲۹-۲ داریم:

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{d_k m_k}$$

بنابراین نتیجه حاصل می شود. ■

قضیه ۲-۵-۲: اگر  $G$  گراف ساده و  $\lambda_1(G)$  بزرگترین مقدار ویژه آن باشد آنگاه [۱۸]

$$\lambda_1(G) \leq \max_i \left\{ \min_k \left\{ \frac{k}{2} + \sqrt{T'_{ik} + \frac{k^2}{4}} : k \geq 0, D_k > 0 \right\} : 1 \leq i \leq n \right\} \quad (30-2)$$

است که در آن  $T'_{ik} = T'_{i(k-1)} - D_k$  و  $k = 1, \dots, (d_i - 1)$  است.  $T'_{i0} = d_i m_i$  و  $D_k$

نیز تعداد همسایگی های رأس  $v_i$  است که بیشتر یا مساوی  $k$  همسایگی از رأس  $v_i$  است.

اثبات: اگر  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  بردار ویژه از مقدار ویژه  $\lambda_1(G)$  باشد. می توان فرض کرد که یک

مولفه از بردار ویژه یک باشد و دیگر مولفه ها کمتر یا مساوی یک باشد. به عبارت دیگر  $x_i = 1$  و

$x_k \leq 1$  برای هر  $k$  است. داریم:

$$A(G)X = \lambda_1(G)X. \quad (31-2)$$

$\bar{t}$  امین معادله از تساوی (۳۱-۲) عبارت است از:

$$\lambda_1(G)x_i = \sum_j \{x_j: v_i v_j \in E(G)\}$$

به عبارت دیگر

$$\lambda_1(G) = \sum_j \{x_j: v_i v_j \in E(G)\}. \quad (32-2)$$

است.  $j$  امین معادله از تساوی (32-2) عبارت است از:

$$\lambda_1(G)x_j = \sum_k \{x_k: v_i v_k \in E(G)\}. \quad (33-2)$$

با جمع بندی بر دو طرف تساوی (33-2) روی  $j$  خواهیم داشت:

$$\lambda_1(G)^2 = \sum_j \{\sum_k \{x_k: v_i v_k \in E\}: v_i v_j \in E(G)\}.$$

$$(\lambda_1(G) - k) \lambda_1(G) = \sum_j \{\sum_k \{x_k: v_i v_k \in E\}: v_i v_j \in E(G)\}$$

$$-k \sum_j \{x_j: v_i v_j \in E(G)\}.$$

به عبارت دیگر

$$(\lambda_1(G) - k) \lambda_1(G) \leq T'_{ik} \quad (34-2)$$

که  $k$  عدد صحیح غیر منفی و  $T'_{ik}$  به شکل زیر داده شده است:

$$T'_{i0} = d_i m_i$$

$$T'_{i1} = T'_{i0} - D_1$$

$$T'_{i2} = T'_{i1} - D_2$$

.....

$$T'_{i(d_i-1)} = T'_{i(d_i-2)} - D_{(d_i-1)}$$

و  $D_k$  تعداد همسایگی های رأس  $v_i$  است که بیشتر یا مساوی  $k$  همسایگی از رأس  $v_i$  است. بنابراین

$$\lambda_1(G) \leq \frac{k}{2} + \sqrt{T'_{ik} + k^2/2}, \quad (35-2)$$

$$\lambda_1(G) \leq \min_k \left\{ \frac{k}{2} + \sqrt{T'_{ik} + \frac{k^2}{4}} : k \geq 0, D_k > 0 \right\}$$

لذا نتیجه حاصل می شود. ■

نتیجه ۲-۵-۲: اگر  $G$  گراف ساده و  $\lambda_1(G)$  بزرگترین مقدار ویژه آن باشد آنگاه داریم  $[20]$ :

$$\lambda_1(G) \leq \max\{\sqrt{d_i m_i} : 1 \leq i \leq n\}. \quad (36-2)$$

اثبات: با قرار دادن  $k = 0$  در معادله (۱۷-۱)،  $\lambda_1(G) \leq \sqrt{d_i m_i}$  حاصل می شود. بنابراین به

راحتی حکم نتیجه می شود. ■

## ۲-۶ تعیین کران پایین برای طیف گراف

لم ۲-۶-۱: اگر گراف  $G$  دارای رأس وابسته باشد. رأس های وابسته را به گروه هایی تقسیم می کنیم

به طوری که رأس های هر گروه دارای همسایگی های مشترک باشند. در هر گروه مولفه های بردار

ویژه متناظر با مقدار ویژه های غیر صفر برابر می باشند  $[22]$ .

اثبات: اگر  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  بردار ویژه از مقدار ویژه  $\lambda(G)$  باشد. همچنین اگر  $v_1, \dots, v_r$

رأس های وابسته از مجموعه رأس  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  با  $r < n$  باشد که مجاور با رأس  $v_i$

باشند. داریم:

$$A(G)X = \lambda(G)X$$

$$\lambda(G)x_k = \sum_j \{x_j : v_k v_j \in E(G)\} \quad k = 1, \dots, n.$$

برای  $k = 1, \dots, r$  داریم :

$$\lambda(G)x_k = x_i. \quad (37-2)$$

چون  $\lambda(G)$  غیر صفر است لذا از معادله (37-2) دیده می شود که  $x_k$  با  $k = 1, \dots, r$ ، حقیقی هستند. ■

لم 2-6-1: فرض کنیم  $d_1, d_2, \dots, d_n$  اعداد صحیح مثبت باشند و  $x_1, x_2, \dots, x_n$  اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر  $d_i$  به  $x_i$  افزایش یابد آنگاه داریم [19]:

$$\frac{d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \geq \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}. \quad (38-2)$$

لم 2-6-2: فرض کنیم  $T$  درخت  $n$  رأسی باشد و راس  $v \in V$  باشد که  $e(v) \leq 2$ ، آنگاه

$$\lambda_1(T) \geq \sqrt{d + m - 1} \quad (39-2)$$

که  $d$  درجه رأس  $v \in V(G)$  است و  $m$  میانگین درجه راس های مجاور با  $v \in V(G)$  است [21].

اثبات: فرض کنیم  $v_1, v_2, \dots, v_d$  راس های مجاور با  $v$  باشند و درجه متناظر هر یک  $d_1, d_2, \dots$

و  $d_d$  باشد. چون  $e(v) \leq 2$  است بنابراین  $v_1, v_2, \dots, v_d$  مجاور با  $(d_1 - 1), (d_2 - 1), \dots$

و  $(d_d - 1)$  رأس وابسته هستند. با استفاده از لم (1-2-1) می توان گفت که همه مولفه های

بردار ویژه متناظر با رأس های وابسته ی مجاور با  $v_i$  برابر با  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) هستند. بنابراین

مولفه های ویژه رأس های  $v_1, v_2, \dots, v_d$  متناظر با بزرگترین مقدار ویژه به ترتیب عبارت است از:

$$\lambda_1x_1, \lambda_1x_2, \dots, \lambda_1x_d$$

برای رأس  $v$  ( فرض کنیم  $\mathcal{Y}$  مولفه ویژه متناظر با رأس  $v$  باشد). داریم:

$$\lambda_1y = \lambda_1x_1 + \lambda_1x_2 + \dots + \lambda_1x_d, \quad y = \sum_{i=1}^d x_i \quad (40-2)$$

همچنین

$$\lambda_1^2 x_i = y + (d_i - 1)x_i \quad i = 1, 2, \dots, d$$

$$y = (\lambda_1^2 - d_i + 1)x_i \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (41-2)$$

با جمع بندی طرفین تساوی اخیر روی  $i$  و استفاده از معادله (39-2) داریم:

$$d \sum_{i=1}^d x_i = \lambda_1^2 \sum_{i=1}^d x_i - \sum_{i=1}^d d_i x_i + \sum_{i=1}^d x_i$$

$$\lambda_1^2 = d + \frac{\sum_{i=1}^d d_i x_i}{\sum_{i=1}^d x_i} - 1. \quad (42-2)$$

از معادله (41-2)،  $d_i$  متناسب با  $x_i$  است. پس با توجه به رابطه (40-2) حکم نتیجه می شود. ■

**تعریف 2-6-1:** رتبه  $^{33}$  و هم رتبه  $^{34}$  از گراف  $G$  عبارت است از [19]:

$$r(G) = n - c, \quad s(G) = m - n + c$$

که در آن  $c$  تعداد دورهای موجود در  $G$  است.

**تعریف 2-6-2:** فرض کنیم  $(x, y)$  نشان دهنده ضرب داخلی دو بردار ستونی  $x$  و  $y$  باشد. برای

هر ماتریس حقیقی  $n \times n$  متقارن  $X$  و هر بردار غیر صفر  $1 \times n$  ستونی  $z$  تعریف می کنیم

$(z, Xz)/(z, z)$  و آن را خارج قسمت ریلی می نامیم. همچنین برای هر  $z \neq 0$  رابطه

$$\lambda_{\max}(X) \geq R(X; z) \geq \lambda_{\min}(X)$$

برقرار است [19].

**قضیه 2-6-1:** [19]

**(1)** اگر  $H$  زیر گراف رأسی از  $G$  باشد آنگاه

$$\lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(G) ; \quad \lambda_{\min}(H) \geq \lambda_{\min}(G).$$

<sup>33</sup> Rank

<sup>34</sup> Co-Rank

(۲) اگر بزرگترین و کوچکترین مقدار درجه رأسی از گراف  $G$  عبارت باشد از  $k_{\max}(G)$  و

$$k_{\min}(G), \text{ آنگاه } k_{\max}(G) \geq \lambda_{\max}(G) \geq k_{\min}(G)$$

اثبات: (۱) فرض کنیم راس های  $G$  برچسب گذاری شده اند. بنابراین ماتریس مجاورت  $A(G)$  دارای

زیر ماتریس  $A_0$  است که ماتریس مجاورت  $H$  است.  $\mathbf{z}_0$  را طوری انتخاب می کنیم که  $A_0 \mathbf{z}_0 =$

$\lambda_{\max}(A_0) \mathbf{z}_0$  و  $(z_0, z_0) = 1$ . اگر  $\mathbf{z}$  بردار ستونی با سطرهای  $|V(G)|$  از صفرهای مجاور

تشکیل شده باشد که به  $z_0$  وارد می شوند آنگاه داریم:

$$\lambda_{\max}(A_0) = R(A_0; \mathbf{z}_0) = R(A(G); \mathbf{z}) \leq \lambda_{\max}(A(G))$$

که نشان می دهد  $\lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(G)$  برای نامساوی دیگر نیز به همین روش عمل می کنیم.

(۱) اگر  $\mathbf{u}$  بردار ستونی که هر مولفه آن  $+1$  است باشد. اگر  $n = |V(G)|$  و  $k^{(i)}$  ظرفیت هر

رأس  $v_i$  باشد، آنگاه داریم:

$$R(A(G); \mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} a_{i,j} = 1/n \sum_i k^{(i)} \geq k_{\min}(G),$$

از اینکه خارج قسمت ریلی  $R(A(G); \mathbf{u})$  حداکثر  $\lambda_{\max}(A(G))$  است بنابراین

$$\lambda_{\max}(G) \geq k_{\min}(G).$$

حال اگر  $X$  یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda_0 = \lambda_{\max}(G)$  باشد و  $x_j$  بزرگترین مولفه مثبت

از  $x$  باشد آنگاه چون  $A(G)X = \lambda_0 X$  است قرار می دهیم  $\sum x'_i = \lambda_0 x_j$  پس داریم:

$$\lambda_0 x_j = (\lambda_0 X)_j = \sum x'_i \leq k^{(j)} x_j \leq k_{\max}(G) x_j$$

که جمع بندی روی رؤس  $v_i$  مجاور با  $v_j$  است. بنابراین  $\lambda_0 \leq k_{\max}(G)$  است. ■



لم ۲-۶-۳: فرض کنیم  $G$  گرافی با عدد رنگی  $l \geq 2$  باشد. آنگاه  $G$  دارای یک زیرگراف رأسی  $l$ -بحرانی به نام  $H$  است و هر رأس  $H$  دارای درجه حداقل  $l - 1$  است [۸].

اثبات: مجموعه همه زیرگراف های رأسی از  $G$  غیر تهی است و شامل گراف هایی است که بعضی دارای عدد رنگی  $l$  می باشند (مانند خود  $G$ ) و بعضی دارای عدد رنگی ای غیر از  $l$  هستند (مانند یک رأسی ها). اگر  $H$  یک زیرگراف رأسی با عدد رنگی  $l$  باشد و کمترین رابطه با تعداد رأس ها داشته باشد. پس  $H$   $l$ -بحرانی است. اگر  $v \in V(G)$  آنگاه  $V(G) - v$  یک زیرگراف رأسی از  $H$  است و دارای عدد رنگی  $l - 1$  است. اگر درجه  $v$  در  $H$  کمتر از  $l - 1$  باشد آنگاه می توان رنگ آمیزی را برای  $H$  توسعه داد و لذا  $\chi(H) = l$  است. بنابراین درجه  $v$  حداقل  $l - 1$  است.

قضیه ۲-۶-۲: اگر  $T$  درخت  $n$  رأسی و  $\lambda_1(T)$  بزرگترین مقدار ویژه آن باشد داریم [۲۱]:

$$\lambda_1(T) \geq \sqrt{d + m - 1}$$

که  $d$  بزرگترین درجه رأس  $v \in V(G)$  است و  $m$  میانگین درجه رأس های مجاور با  $v$  است.

اثبات: با استفاده از لم های (۱-۲-۳) و قضیه (۱-۲-۱) به سادگی نتیجه حاصل می شود.

## ۱-۷ نتیجه گیری :

مجموعه مقادیر ویژه به دست آمده از ماتریس های وابسته گراف ، طیف گراف نامیده می شود. برای به دست آوردن طیف گراف بیشتر از ماتریس های لاپلاس و مجاورت استفاده می کنیم. دو گراف یکرخت دارای طیف یکسان می باشند و عکس آن برقرار نمی باشد. زیرا ممکن است دو گراف دارای طیف مشابه باشند اما یکرخت نباشند. درختان به طور منحصر بفرد با طیف نمی توانند تعریف شوند. از طیف برای دسته بندی و طبقه بندی گراف ها استفاده می کنیم.

در این فصل کران های ارائه شده به قرار زیر است:

- i.  $\lambda_1(G) \leq \left(\frac{2m(n-1)}{n}\right)^{1/2}$
- ii.  $\lambda_1(G) \leq \max_i \left\{ \min_k \left\{ \frac{k}{2} + \sqrt{T'_{ik} + \frac{k^2}{4}} : k \geq 0, D_k > 0 \right\} : 1 \leq i \leq n \right\}$
- iii.  $\lambda_1(T) \geq \sqrt{d+m-1}$

iv.  $\lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(G) ; \lambda_{\min}(H) \geq \lambda_{\min}(G)$

v.  $k_{\max}(G) \geq \lambda_{\max}(G) \geq k_{\min}(G)$

که در آن  $k$  درجه رأس است.



فصل سوم:

کاربردهای طیف گراف در مساله نشانیدن

طیفی گراف ها

### ۳-۱: مقدمه

در این فصل به بررسی کاربرد روش های نشانند طیفی گراف در یک فضای برداری می پردازیم. این فصل به چهار بخش تقسیم می شود: بخش اول روش های نشانند طیفی گراف می باشد. بخش دوم فاصله در گراف را مورد بررسی قرار می دهیم. بخش سوم به معرفی گراف شک می پردازیم و در بخش آخر به معرفی گراف دلونی و کاربردهای طیف گراف می پردازیم.

در اینجا دو روش را برای نشانند گراف معرفی می کنیم:

### ۳-۲ روش های نشانند طیفی گراف

روش های مختلفی برای نشانند طیفی گراف توسط بردارهای ویژگی<sup>۳۵</sup> در یک فضای برداری<sup>۳۶</sup> وجود دارد. در این روش رأس هایی از یک گراف در یک فضای اقلیدسی، با ابعاد کمتر نشانده می شوند. توسط تجزیه ماتریس های وابسته طیفی گراف، از گراف هایی که دارای  $N$  بعد می باشند بردارهای الگو طیفی استخراج می شود. این بردارهای الگو طیفی  $N$  بعدی با کمک دو روش زیر در یک فضای برداری در ابعاد کمتر نشانده می شوند. [۱۹].

روش اول : آنالیز مؤلفه های اصلی<sup>۳۷</sup>

روش دوم : مقیاس گذاری چند بعدی<sup>۳۸</sup>

### ۳-۲-۱ تعریف کوواریانس و ماتریس لاپلاس

---

<sup>35</sup> Feature vector

<sup>36</sup> Space vector

<sup>37</sup> Principal component analysis

<sup>38</sup> Multidimensional scaling

کوواریانس همیشه بین دو بعد اندازه گیری می شود. اگر کوواریانس را بین یک بعد و خودش حساب کنید در واقع شما واریانس را حساب کرده اید. اگر شما یک سری داده سه بعدی  $(X, Y, Z)$  داشته باشید. می توانید کوواریانس را بین دو بعد  $X, Y$  دو بعد  $X, Z$  و دو بعد  $Y, Z$  حساب کنید. اندازه گیری کوواریانس بین  $X, X$  یا  $Y, Y$  و یا  $Z, Z$  به ترتیب واریانس ابعاد را می دهد فرمول محاسبه کوواریانس بسیار شبیه فرمول محاسبه واریانس است. فرمول محاسبه واریانس را نیز می توان مشابه این عبارت نوشت: جمله درجه دوم نشان داده شده را به دو بخش بسط داده ایم زیرا اطلاعاتی برای محاسبه کردن کوواریانس به ما می دهد [۳۰].

$$C = \begin{pmatrix} COV(X, X) & COV(X, Y) \\ COV(Y, X) & COV(Y, Y) \end{pmatrix} \quad (۱-۴)$$

$$COV(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1} \quad (۲-۴)$$

### ۳-۲-۱ آنالیز مؤلفه های اصلی

آنالیز مؤلفه های اصلی یکی از روشهای نشان دادن بردارهای الگو<sup>۳۹</sup> طیفی گراف در یک فضای برداری برای کاهش ابعاد می باشد.  $B_N$  ها بردارهای الگو طیفی به دست آمده که به صورت ستونی می باشند، عبارتند از:

$$S = [B_1 | B_2 | \dots | B_K | \dots | B_N] \quad (۱-۳)$$

و ماتریس  $X$  طبق رابطه (۲-۳) به دست می آید.

$$X = |B_1 - \bar{B}| |B_2 - \bar{B}| \dots |B_N - \bar{B}| \quad (۲-۳)$$

<sup>39</sup> pattern

در این جا  $\bar{B}$  میانگین بردار ویژگی برای سری داده هاست سپس ماتریس کوواریانس را برای عناصر بردارهای ویژگی با بکارگیری ماتریس  $C = XX^T$  محاسبه می کنیم. مولفه های اصلی را با تجزیه بر روی ماتریس کوواریانس  $C$  به دست می آوریم.

$$C = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i e_i^T \quad (3-3)$$

در معادله (3-3) مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه  $e_i$  می باشد،  $S$  بردار ویژه جهت نمایش گراف های استخراج شده از تصاویر بکار برده می شود ( $S \leq N$ )، که این بردارها متعامد می باشد و به صورت  $e = (e_1, \dots, e_S)$  نمایش داده می شوند. حال برای به دست آوردن مختصات جدید داده ها با ابعاد کمتر از رابطه (3-4) استفاده می شود که  $k = 1, 2, \dots, N$  می باشد [۸، ۲۲، ۱۹، ۲۳، ۲۴].

$$y_k = e^T (B_K - \bar{B}) \quad (3-4)$$

### ۳-۲-۲ مقیاس گذاری چند بعدی:

مقیاس گذاری چند بعدی روشی است که مجموعه داده های به دست آمده در یک ماتریس فاصله با فاصله های دو به دو تعیین می شود، برای نشان دادن گراف در یک فضای اقلیدسی با ابعاد کمتر از این روش استفاده شده است. در ابتدا به فاصله دو به دو بین گراف ها نیازمند هستیم. با محاسبه نرم بین طیف، بردارهای الگو این فاصله به دست می آید. برای دو گراف  $i_1$  و  $i_2$  فاصله آنها به صورت رابطه (3-5) محاسبه می شود:

$$d_{i_1, i_2} = (B_{i_1} - B_{i_2})^T (B_{i_1} - B_{i_2}) \quad (3-5)$$

از فاصله های دوتایی به دست آمده توسط  $d_{i_1, i_2}$  عنصر های ماتریس  $N \times N$  که عناصر آن به صورت رابطه (3-6) تعریف می شود به دست می آید.

$$R_{i_1, i_2} = \begin{cases} d_{i_1, i_2} & \text{اگر } i_1 \neq i_2 \\ 0 & i_1 = i_2 \end{cases} \quad (۶-۳)$$

در این مرحله برای نشان دادن در یک فضای اقلیدسی با ابعاد کمتر ماتریس  $T$  را که عناصر آن با سطر  $r$  و ستون  $c$  مشخص شده توسط فرمول (۷-۳) حاصل می شود.

$$T_{rc} = -\frac{1}{2} [d_{rc}^2 - \hat{d}_{r.}^2 - \hat{d}_{.c}^2 + \hat{d}_{..}^2] \quad (۷-۳)$$

که در آن

$$\hat{d}_{r.} = \frac{1}{N} \sum_{c=1}^N d_{rc} \quad (۸-۳)$$

مقدار میانگین در  $r$  امین سطر و مقدار میانگین در  $c$  امین ستون، قرار دارد.

$$d_{..} = \frac{1}{N^2} \sum_{r=1}^N \sum_{c=1}^N d_{rc} \quad (۹-۳)$$

میانگین سطرها و ستون ها از ماتریس  $R$  به دست می آید.

با آنالیز کردن ماتریس  $T$  بردارهای ویژه آن به دست می آید. با نشان دادن مختصات  $y$ ، اگر مرتبه  $K, T$  باشد  $K \leq N$ ، سپس  $K$  مقدار ویژه غیر صفر وجود دارد که به صورت نزولی آن را مرتب می شود.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K > 0$  و بردار ویژه ها را توسط  $e_i$  نشان داده می شود که  $\lambda_i$   $i$  امین مقدار ویژه است و مختصات نشان دادن برای گراف به صورت رابطه (۱۰-۳) می باشد [۲۷، ۲۵، ۲۶ و ۱۸].

$$y = [\sqrt{\lambda_1} e_1, \sqrt{\lambda_2} e_2, \dots, \sqrt{\lambda_s} e_s] \quad (۱۰-۳)$$

نشان دادن گراف با شاخص  $j$  به صورت رابطه (۱۱-۳) می باشد: [۲۸، ۲۹]

$$y_j = (y_{j_1}, \dots, y_{j_s})^T \quad (۱۱-۳)$$



### ۳-۳ مسأله فاصله در گراف

روش های متعددی برای مشخص کردن فاصله بین دو گراف وجود دارد، فاصله گراف در واقع برابر با منیمم وزن بین دو رأس می باشد و بهترین روش، فاصله ویرایش<sup>۴۰</sup> می باشد. فاصله ویرایش توسط دنباله ای از عملگر ها تعریف می شود که شامل یال و رأس حذف شده و الحاقی می باشند، که باعث می شوند یک گراف را به گراف دیگری تبدیل کنند. این روش بیشتر برای تطابق و خوشه بندی گراف ها استفاده می شود. این عملگر ها وابسته به هزینه می باشند و هزینه کل از مجموع یک دنباله ویرایش حاصل می شود.

فاصله ویرایش بین دو گراف دنباله ای از هزینه مینیمال است که از تبدیل یک گراف به گراف دیگر حاصل می شود. در فاصله طیفی رأس هایی که هزینه ندارند، گراف هایی را با اندازه یکسان بوجود می آورند و هزینه فاصله طیفی صفر می باشند. فاصله طیفی فقط برای تغییر در ساختار یال اهمیت دارد زیرا فاصله طیفی متقارن با جانشین کردن گراف ها است. هزینه ای برابر با یک برای یال های الحاقی و حذف شده تعیین می شود، در واقع اگر طیف یک نمایش خوب از گراف باشد به یک فاصله طیفی وابسته به فاصله ویرایش بین گراف ها نیاز داریم. فاصله ویرایش را روی مجموعه داده های حاصل برای مقایسه فاصله طیفی استفاده می شود، در این مجموعه داده ها یک تطابق واقعی بین گراف ها وجود دارد. فاصله گراف برای تطابق بین دو گراف و تشخیص الگو بکار می رود [۳۲،۳۱].

[۳۳،۶۱].

### ۳-۳-۱ فاصله ویرایش:

---

<sup>40</sup> Edite distance

فاصله ویرایش بین دو گراف مدل  $G_M = (V_M, E_M)$  و گراف داده  $G_D = (V_D, E_D)$  می باشد. فاصله ویرایش بین دو گراف کوتاه ترین طول دنباله ای از عملگرهای ویرایش است که یک گراف را به گراف دیگر تبدیل می کند. عملگرهای ویرایش بیشتر شامل: حذف یا جانشین کردن رأس و یال در گراف می باشد، که بیشتر در مسأله کلاس بندی گراف با روش های مختلف است. به عنوان مثال از طبقه بندی  $k$ -نزدیکترین همسایگی<sup>۴۱</sup> برای نشان دادن گراف استفاده می شود [۱۷]. ترتیب گره ها یا رأس ها دو گراف توسط یک گراف مدل، به صورت رابطه (۳-۱۲) می باشد.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|v_M|}\} \quad (۳-۱۲)$$

و گراف داده به صورت رابطه (۳-۱۳) می باشد.

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{|v_D|}\} \quad (۳-۱۳)$$

می باشد. در مسئله تطبیق گراف بین دو گراف  $G_D$  و  $G_M$  در واقع می خواهیم نگاشت  $f$  از رأس های  $G_D$  به رأس های  $G_M$  را طوری پیدا کنیم که یک معیار به نام فاصله دوگراف را حداقل نماید. هر اندازه که فاصله دو گراف کمتر باشد دو گراف مطابقت بیشتری با هم دارند. سیستم تشخیص معمولاً دارای تعدادی مدل ذخیره شده است که گراف های آنها موجود است. پس از ورود تصویر شی داده<sup>۴۲</sup> و تشکیل گراف آن، مقدار مطابقت گراف داده و با گراف های مدل موجود در آرشیو محاسبه می گردد. سپس گراف مدلی را که دارای بیشترین مطابقت می باشد، در صورتی که مقدار مطابقت آن از یک مقدار معین بیشتر باشد بعنوان مدل تشخیص داده شده، برای شی داده تعیین می کند. مطابقت نسبت معکوس با فاصله دو گراف دارد. در دو گراف داده و مدل با استفاده از ویرایش گراف داده، آن را شبیه زیرگرافی از گراف مدل می کنند. با تشکیل ماتریس طیفی گراف مدل و گراف داده ویرایش شده بردارهای طیفی از ماتریس استخراج می شود و فاصله بین بردارهای طیفی گراف مدل

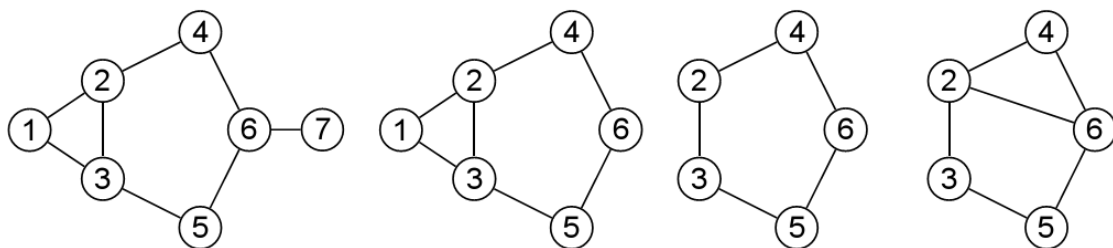
<sup>۴۱</sup> K -nearest neighbor

<sup>۴۲</sup> Data

وگراف ویرایش شده را محاسبه می کنیم و یا با کمک پیدا کردن کوتاه ترین مسیر بین دو رأس در گراف داده و مدل با استفاده از الگوریتم دایجسترا<sup>۴۳</sup> به این نتیجه می رسیم که در صورتی که دارای منیمم فاصله ویا فاصله برابر باشد سیستم تشخیص می دهد که گراف داده ویرایش شده همان گراف مدل است. ویرایش در گراف داده بعضی از گراف ها در اثر اعوجاج<sup>۴۴</sup> تغییراتی در آنها صورت می گیرد برای رفع این مشکل در مسأله تطابق دو گراف از عملگرهای ویرایش روی گراف داده انجام می دهیم تا گراف داده شبیه به بخشی از گراف مدل شود، در اینجا ما دنبال ماکسیمم زیرگرافی از گراف داده هستیم که شبیه گراف مدل باشد .

**۳-۳-۱ مثال:** فاصله ویرایش گراف زیر با استفاده از حذف کردن وجانشین کردن یال به دست

می آید [۳۳].

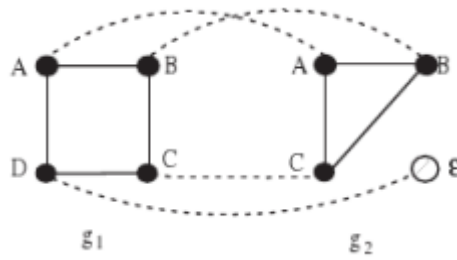


مسئله ای از فاصله ویرایش را مطرح می کنیم برای اینکه یک مسیر  $T = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_L \rangle$  از گراف پیدا کنیم. هر عنصر به صورت رابطه (۳-۱۴) بیان می کنیم.

$$\gamma_K \in (V_D \cup \varepsilon) \times (V_M \cup \varepsilon) \quad (۳-۱۴)$$

<sup>۴۳</sup> Dajestra

<sup>۴۴</sup> Noise



۳-۱ ویرایش در گراف

که یک مسیر همبند روی ویرایش گراف می باشد و اتصال روی شبکه<sup>۴۵</sup> گراف ویرایش از مرحله  $\gamma_k$  به  $\gamma_{k+1}$  که حرکت روی شبکه گراف می باشد.

هزینه مسیر ویرایش را با توسعه رابطه (۳-۱۵) بیان می کنیم.

$$d(X, Y) = c(T) = \sum_{\gamma_k \in T} n(\gamma_k \rightarrow \gamma_{k+1}) \quad (۳-۱۵)$$

که  $n(\gamma_k \rightarrow \gamma_{k+1})$  هزینه گذر بین مرحله های  $\gamma_k = (a, b)$  ,  $\gamma_{k+1} = (c, d)$  می باشد. بنابراین فاصله ویرایش

$d(X, Y) = c(T)$  دنباله ویرایش با استفاده از الگوریتم دایجسترا جستجوی کوتاه ترین مسیر به دست می آید [۸ و ۳۴، ۳۵، ۱۸].

گراف های شاخ و دلونی گراف های به دست آمده از تصویر می باشند، با کمک تجزیه ماتریس های وابسته طیفی این دو گراف بردارهای الگو طیفی به دست می آیند.

**تعریف ۳-۳-۱:** اسکلت شکل<sup>۴۶</sup>، مجموعه ای از خطوط میانی همبند می باشد که یک روش اصلی برای تشخیص شکل است و همچنین مجموعه ای از نقاط میانی (نماینده) بخش های مختلف شکل می باشد. برای داشتن اسکلت یک شکل، اول مرز یا یالهایی از شکل استخراج می شود [۳۷ و ۶۲].

<sup>45</sup> lattice

<sup>46</sup> Shap skeleton

اسکلت شکل بیشتر با استفاده از الگوریتم باریک سازی<sup>۴۷</sup> به دست می آید. در بحث های بعدی نشان می دهیم با استفاده از تئوری شاخ نقاط اصلی موجود در اسکلت به دست می آید و با داشتن نقاط اصلی می توانیم نقاط انشعابی و انتهایی مشخص نمود و درخت شاخ را ترسیم کرد [۱۸]. اسکلت اطلاعاتی از نقاط اتصال شکل به ما می دهد، فرض کنید که  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  نقاط همبند اسکلت می باشد، که  $N$  تعداد نقاط در اسکلت و  $S_i = (x_i, y_i)$  نمایش مختصات نقطه  $i$  در اسکلت می باشد. گراف  $G = (V, E)$  با توجه به نقاط  $S_i \in S$  که یک رأس در گراف  $G$  ( $V$ ) و  $e_{ij} \in E$  به حساب می آید ساخته می شود. برای هر جفت از رأس های  $(V_i, V_j)$  یک یال غیر جهت دار که ترکیب همبند رأس ها می باشد ایجاد می شود. وزن یال ها را توسط فاصله اقلیدسی بین هر جفت از نقاط اسکلت محاسبه می شود.

$$d(s_i, s_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (۱۴-۳)$$

$W$  وزن یال های بین رأس ها را نشان می دهد [۳۹, ۳۷].

$$W(i, j) = \omega_{ij} = d(s_i, s_j) \quad (۱۵-۳)$$

### ۳-۴ اسکلت بندی<sup>۴۸</sup>:

اسکلت بندی یک شکل، خصوصیات توپولوژی آن را از جمله: زیر بخش ها و اتصالات بین آن ها را حفظ کرده و همچنین خصوصیات هندسی شکل را نیز نمایش می دهد. علاوه بر این اسکلت در مقابل تغییرات جزئی شکل مانند: حذف یا اضافه شدن قسمت کوچکی در آن پایدار بوده و با چرخش یا تغییر اندازه شکل توپولوژی آن تغییر نمی کند. یکی از انواع اسکلت "محور میانی"<sup>۴۹</sup> است.

<sup>47</sup> thinning algorithm

<sup>48</sup> Skeleton

<sup>49</sup> Medial Axis

**تعریف ۳-۴-۱:** محور میانی یک شکل، مرکز بزرگترین دایره هایی است که در شکل محاط می شود و اسکلت شکل را تبدیل به محور میانی می کند [۶۴, ۶۳].

الگوریتم های تشخیص اسکلت شکل بطور کلی به ۴ دسته تقسیم می گردند:

(۱) باریک سازی<sup>۵۰</sup>

(۲) فاصله نگاشت<sup>۵۱</sup>

(۳) ریخت شناسی ریاضیاتی<sup>۵۲</sup>

(۴) روش های هندسی و نمودار ورونویی

(۵) الگوریتم های متعددی برای افزایش بازده محاسبات این تبدیل پیشنهاد شده اند که اغلب

این الگوریتم ها از نوع الگوریتم های باریک ساز هستند [۶۲, ۴۰].

(۶) اسکلت هر شکل باید دارای سه شرط زیر باشد:

(۷) ۱. مرکزی باشد، یعنی تا جایی که ممکن است فاصله یکسانی از لبه های شکل داشته باشد.

۲. به لحاظ همبندی با شکل اولیه یکسان باشد.

۳. شامل کمترین تعداد پیکسل<sup>۵۳</sup> ممکن باشد.

### **۳-۴-۱- نقاط اصلی در اسکلت شکل:**

بعد از به دست آوردن اسکلت شکل باید آن را به ساختمان داده ای تبدیل نمود که به راحتی قابل پیمایش، جستجو و مقایسه باشد. به این منظور ابتدا نقاط اصلی را در اسکلت تشخیص داده سپس آنها را در ساختمان داده مناسبی ذخیره می شود. علاوه بر نقاط اسکلتی که از طریق تئوری شاخ تعیین می گردند که در بخش بعدی به آن ها پرداخته می شود، دو دسته از نقاط از اهمیت بالایی برخوردارند:

---

<sup>50</sup> Thinning

<sup>51</sup> Distance map

<sup>52</sup> Morphology

<sup>53</sup> pixel

۱-نقاط پایانی<sup>۵۴</sup>: رأس هایی از اسکلت که نزدیک به لبه یا حاشیه شکل می باشند.

۲-نقاط انشعابی<sup>۵۵</sup>: شاخه های اسکلت را تشکیل می دهند.

نقاط انشعابی را نقاط اساسی اسکلت شکل می نامند، زیرا اکثر این نقاط در نواحی حاشیه ای و لبه ای<sup>۵۶</sup> قرار ندارند و همان طور که در شکل (۲-۳) مشخص است در بسیاری از موارد حذف برخی قسمت ها ی شکل، روی این نقاط تأثیری نداشته و کلیت اسکلت را دچار خلل نمی کند [ ۶۳، ۳۹].



شکل ۲-۳ اهمیت نقاط انشعابی در صورت حذف قسمتی از شکل

### ۳-۴-۲- الگوریتم اسکلت بندی:

اسکلت شکل مجموعه ای از نقاط میانی بخش های مختلف شکل است. اسکلت بندی یک شکل خصوصیات توپولوژی آن است از جمله: زیر بخش ها و اتصالات بین آن ها و همچنین خصوصیات هندسی شکل را نیز نمایش می دهد. علاوه بر این اسکلت در مقابل تغییرات جزئی شکل مانند: حذف یا اضافه شدن قسمت کوچکی در آن پایدار بوده و با چرخش یا تغییر اندازه شکل توپولوژی آن تغییر نمی کند [ ۶۲، ۳۹].

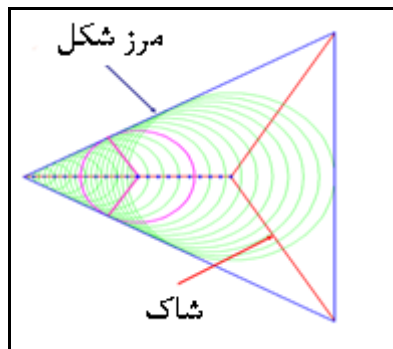
### ۳- ۵ گراف شاخ:

<sup>16</sup> end

<sup>17</sup>branch

<sup>56</sup> Adje

گراف شاک یک نمایش فشرده از شکل مرزی منحنی وار می باشد. راه های مختلفی برای محاسبه شکل گراف وجود دارد. اسکلت مجموعه ای منحصر بفردی می باشد که در حرکت مرزی بوجود می آید. روش های زیادی برای این منظور وجود دارد. برای مثال از شاخه ها و اتصالات اسکلتی به عنوان رأس ها و یال های یک درخت استفاده می کنند. ریشه درخت در عمیق ترین نقطه ی شکل قرار می گیرد. و رأس های انتهایی بسیار به مرز نزدیک هستند. به محض دسترسی به درخت می توان آن را با تعدادی از خصوصیات مرز مرتبط نمود. این شامل دایره مماس یا نسبت تغییر طول اسکلت یا طول مرز است که در شکل (۳-۳) دیده می شود.



شکل ۳-۳ شاک

این ساختار تفکیکی، مرز را در نظر می گیرد و شعاع دایره مماس را ثابت، افزایش، کاهش، حداقل یا حداکثر به لحاظ مکانی می توان در نظر گرفت. فاصله ها و زوایای مختلف شکل را می توانیم مستقیماً با هم مقایسه کنیم. همچنین ممکن است درخت حاصل از اسکلت به برچسب های شاک مرتبط شود. رأس درخت با هر اتصال نقاط در اسکلت مشخص می شود. رأس هایی از یک درخت با استفاده از شعاع  $\gamma_r(a)$  از کوچکترین دایره مماس از اتصال مرزها توصیف می شوند. برای یال  $(a, b)$ ،  $\gamma_{a,b}$  زاویه بین نقاط  $a, b$  یعنی  $\gamma_{a,b} = \theta(a, b)$  چون بیشترین شاخه های اسکلت نسبتاً مستقیم هستند این یک تقریب برای زاویه متناظر شاخه اسکلت است.



بعد از به دست آوردن درخت از اسکلت شکل با روش های نشانیدن طیفی آنها را در یک فضای برداری با ابعاد کمتر طبقه بندی می شود. [ ۴۰ و ۴۱، ۴۲ ] .

درخت شاخ از فرایند تغییر شکل منحنی گراف ایجاد می شود. که با  $SG$  نمایش داده می شود و از گراف های جهت دار روی محور میانی استفاده شده است. ساختار مؤلفه های درخت شاخ همبند می باشند.  $t_i$  زمان تشکیل شعاع درخت شاخ را نمایش می دهد،  $\#$  به عنوان نقطه شروع می باشد. گراف شاخ از یک شکل ۲ بعدی،  $SG$  گراف برچسب گذاری می شود با  $G = (V, E)$  نمایش می دهیم.

$$V = \{1, 2, \dots, n\} \text{ ها } 1\text{-رأس}$$

۲- یال های  $(i, j) \in E \subseteq V \times V$  رأس جهتدار  $i$  توسط رأس  $j$   $i \neq j, t_i \geq t_j$   $i \cup j$  صفحه همبند می باشند.

۳- برچسب ها  $\gamma: V \rightarrow L$  که  $L \in \{1, 2, \dots, \#\Phi\}$

۴- توپولوژی  $\forall j \in V$  با  $\gamma(i) \neq \#$  ،  $(i, j) \in E$  با  $i \in V$   $\exists i \in V$

اسکلت یابی فرایندی است که یک الگو تصویری را به مجموعه ای از خطوط و منحنی های باریک به نام اسکلت که همان درخت گراف است تبدیل می کند. اسکلت به صورت مجموعه ای از نقاط متعلق به شکل تعریف می شود که دست کم با دو نقطه از یال آن فاصله همبند داشته باشد. اسکلت یابی یکی از مراحل مهم در بسیاری کاربردهای پردازش تصویر و شناسایی الگو است و برای فشرده سازی داده ها بکار می رود [ ۳۷ و ۴۳، ۴۰ ] .

گراف شاخ  $SG$  خصوصیات هندسی و توپولوژی شکل را به خوبی حفظ نموده و قادر به بازنمایی شکل اصلی می باشد.

در تئوری شاخ نقاط اسکلتی به ۴ دسته تقسیم می گردند:

نقاط نوع ۱: نقاطی هستند که شعاع بزرگترین دایره محاط در شکل در همسایگی‌شان در حال کاهش یا افزایش می باشد.

نقاط نوع ۲: شعاع بزرگترین دایره محاط در شکل ، در این نقاط به نسبت همسایگانش به حداقل می رسد.

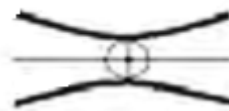
نقاط نوع ۳: شعاع بزرگترین دایره محاط در شکل در این نقاط و نقاط مجاورشان یکسان است.

نقاط نوع ۴: شعاع بزرگترین دایره محاط در شکل، در این نقاط به نسبت همسایگانش به حداکثر می رسد [۴۱، ۶۰].

### ۳-۵-۱ انواع نقاط مهم شاخ



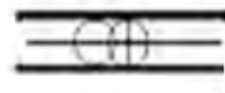
نوع ۲



نوع ۱



نوع ۴



نوع ۳

شکل ۳-۴ انواع نقاط مهم شاخ

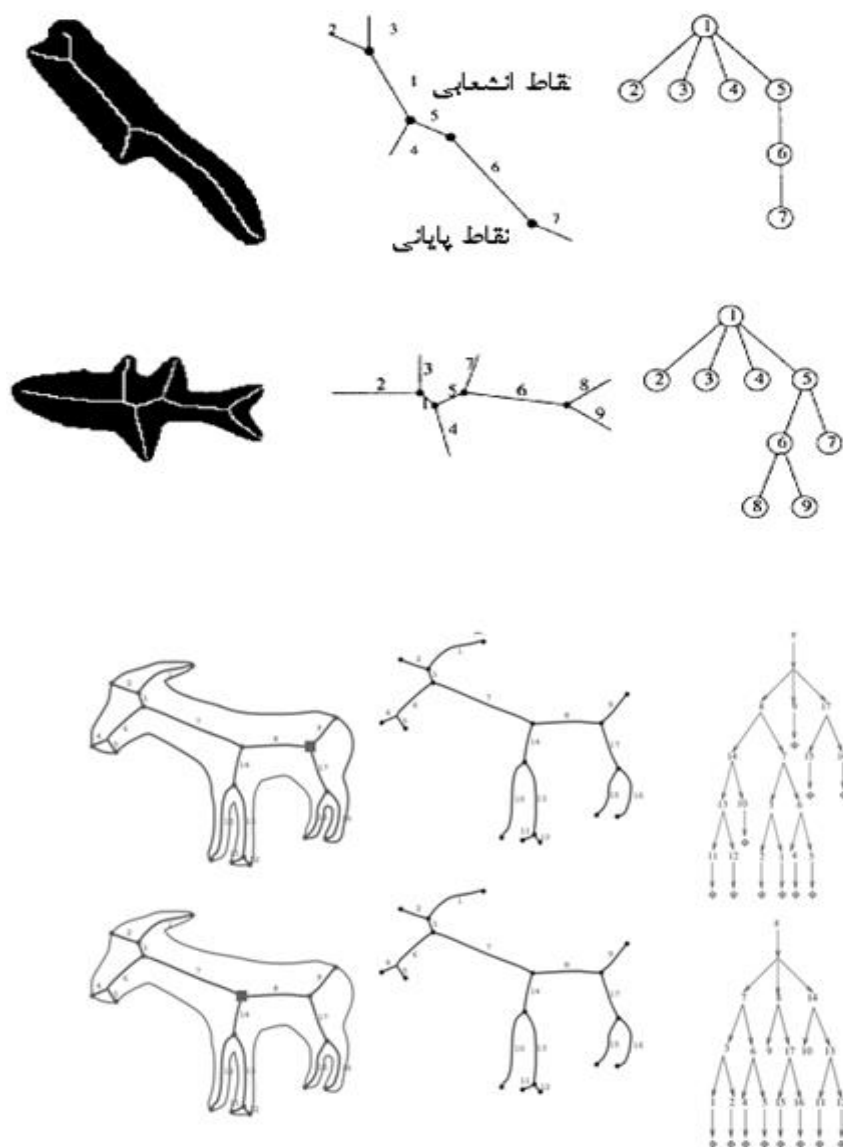
### ۳-۵-۲ تشکیل گراف براساس اسکلت

با استفاده از الگوریتم زیر گراف شاخ از اسکلت شکل استخراج می گردد

۱. نقاط پایانی و انشعابی اسکلت در صف های جداگانه ای ذخیره می شوند.
۲. در این مرحله نوع نقاط شاخ در اسکلت تعیین می گردد. با وجود اینکه در تئوری شاخ چهار نوع نقطه وجود دارد ولی در این الگوریتم عملاً تنها از دو نوع آنها استفاده می شود، نوع ۱ و ۳، دو نوع دیگر اهمیت چندانی ندارند. برای به دست آوردن نوع این نقاط به این صورت عمل می شود که با شروع از یک نقطه پایانی روی اسکلت، شعاع بزرگترین دایره ای را که می توان به مرکز آن نقطه طوری رسم نمود که از محدوده شکل تجاوز نکند را به دست می آوریم و سپس همین عمل را برای نقاط مجاور آن انجام می دهیم. اگر شعاع این دایره یکسان بود این نقطه را به عنوان نوع ۳ علامت زده و در غیر این صورت شعاع بزرگترین دایره مجاز در شکل در حال افزایش یا کاهش است و این نقطه یک نقطه گلوگا می از نوع ۱ می باشد.
- برای به دست آوردن شعاع بزرگترین دایره ای که به مرکز نقطه ای روی اسکلت با مختصات  $(i, j)$  و در داخل شکل محاط شده باشد از فرمول (۳-۱۶) استفاده می شود. در این فرمول  $R$  حداکثر مقداری است که به ازای آن تمامی نقاط  $(X, Y)$  که در این نا معادله صدق می کنند، داخل شکل قرار گیرند.
$$(X - i)^2 + (Y - j)^2 \leq R^2 \quad (۳-۱۶)$$
۳. نقاط مجاوری که از یک نوع هستند گروه بندی شده و برای آنها تنها یک نماینده در گراف در نظر گرفته می شود.
۴. از آنجا که بررسی و مقایسه یک درخت بسیار سهل تر از گراف است، نقاط اصلی اسکلت را در یک درخت ذخیره می نماییم، گره ای به نام # را به عنوان ریشه درخت قرار می گیرد که تنها فرزندان آن نقاط انشعابی باشند.

۵. صف مربوط به نقاط انشعابی را پیمایش می شود تا زمانی که کل صف خالی شود و هر بار نقطه ای را که از لیست خارج می شود در جای مناسب خود در گراف درج می شود، نقاط مجاور آن در اسکلت، اگر قبلاً به گراف اضافه نشده اند به صف انتقال داده می شود [۶۲].

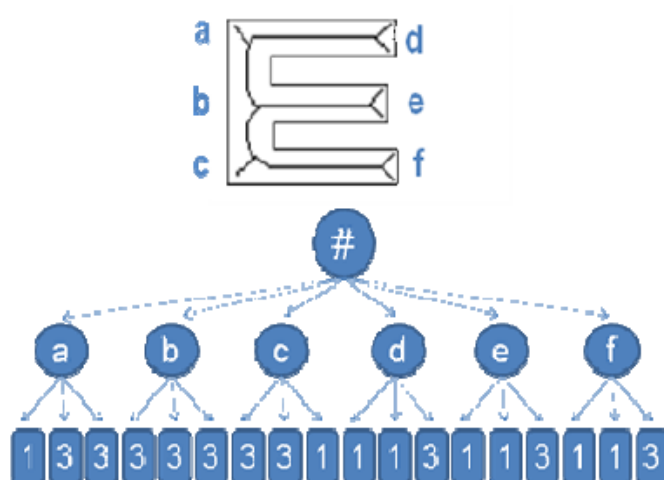
در شکل (۳-۵) تشکیل درخت شاخ را با استفاده از اسکلت شکل نشان داده می شود [۴۰].



شکل ۳-۵ دو شکل با اسکلت شان و درخت شاخ آنها

نکته ای که بسیار حائز اهمیت است این است که تمام نقاط انشعابی قطعاً باید به صورت همزمان پردازش شوند و به همین علت از صف استفاده می شود تا در هر مرحله یک نقطه ی انشعابی را بررسی کنیم، این گونه نیست که تمام شاخه های متصل به یک نقطه انشعابی را تا انتها بررسی کنیم و بعد به انشعاب بعدی پردازیم. ریشه درخت شاخ دارای ماکسیمم درجه می باشد.

در شکل (۳-۶) می توانید نمونه ای از گراف شاخ که از اسکلت علامت مورد نظر به دست آمده را مشاهده نمایید، همان طور که در شکل پیداست ۶ نقطه انشعاب وجود دارد که آنها را به عنوان فرزندان ریشه قرار داده و سپس با الگوریتمی که در بالا بیان شد گره هایی که به آنها متصل اند را مشخص می شود. در گره هایی که فرزند نقاط انشعابی هستند نوع آنها (۱) یا (۳) مشخص می شود [۴۱، ۶۲].



شکل ۳-۶ گراف شاخ

### ۳-۶ انطباق دو گراف:

یکی از راه های مؤثر در توصیف اشکال دو بعدی استفاده از گراف متصلی به نام اسکلت شکل است، اسکلت شکل خواص مهم را به خوبی حفظ نموده و در مقابل تبدیلات هندسی مانند اتصال، چرخش، تغییر اندازه پایدار است. نتایج تجربی نشان می دهد که روش پیشنهادی براساس اسکلت شکل سریع تر و ساده تر بوده و در مقابل اختلالات مانند انحراف زاویه دید، سایه روشن بودن تصویر، ریاضی و تغییر اندازه علائم و سایر اعوجاج های احتمالی که ممکن است در محیط واقعی اتفاق بیفتد پایدار

است به منظور استخراج اسکلت یک شکل می بایست نواحی مرزی شکل مشخص شود با استفاده از الگوریتم شک تصویر می توان این مرز ها را مشخص نمود [۴۱].

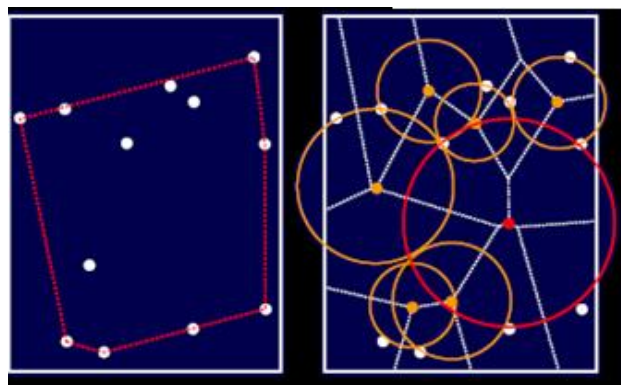
### ۷-۳ نمودار ورونوی

نمودار ورونوی مکان هندسی نقاطی است که در فاصله یکسان از دو یا چند مانع قرار دارند. گراف حاصل فضا را به نواحی ای تقسیم می نماید بطوری که هر مانع در مرکز یکی از ناحیه ها واقع است همچنین جهت یافتن کوتاه ترین مسیر می توان از یک جستجوی گراف مثلاً دایجسترا استفاده نمود. علیرغم کاربرد نمودار ورونوی در مسائل برنامه ریزی مسیر، به علت پیچیدگی آن در فضای بالاتر عموماً در فضاهای دو بعدی از آن استفاده می شود. مثلث بندی دلونی نوع خاصی از تجزیه سلولی است که در آن فضا به گونه ای مثلث بندی می شود که دایره محیطی هر مثلث رأس دیگری را در بر نگیرد می توان نشان داد که مثلث بندی دلونی دوگان نمودار ورونوی می باشد و با داشتن یکی از آنها دیگری قابل به دست آمدن است. شکل (۷-۳) ارتباط میان نمودار ورونوی و مثلث بندی دلونی را نشان می دهد. رأس های ورونوی محل برخورد عمود منصف های مثلث دلونی متناظر با آن و مرکز نواحی ورونوی همان رئوس مثلث های دلونی می باشد [۴۴].

۷-۳-۱ تعریف ورونوی: پیدا کردن دور ترین نقطه از رأس ورونوی<sup>۵۷</sup> (بزرگترین دایره که مرکزش روی رأس ورونوی است و هیچ رأس دیگری درون آن قرار ندارد) [۴۵].

---

<sup>57</sup> Veronoi



شکل ۳-۷ نمودار ورونویی

### ۳-۷-۲ تعریف مثلث بندی

تقسیم کردن یک چند ضلعی تنها با استفاده از قطرهایش به مثلث هایی که هم پوشانی ندارند. به بیان دیگر رسم بیشترین قطر ممکن در چند ضلعی که قطرهای همدیگر را قطع نکنند.

در تعریف مثلث بندی ، قطر پاره خط واصل بین  $a$  و  $b$  است ، به طوری که رئوس  $a$  و  $b$  برای یکدیگر رویت پذیر واضح باشند.

دو رأس چند ضلعی در صورتی برای یکدیگر رویت پذیر واضح هستند که پاره خط واصل آنها در هیچ نقطه ای چند ضلعی را قطع نکند یا بر آن مماس نباشد.

چند ضلعی ها در حقیقت به دلایل زیر بلوک های سازنده بسیاری از مسائل هندسه می باشند:

**انعطاف پذیری:** می توانند بسیاری اشکال پیچیده را مدل سازی کنند [۴۶].



### ۳-۸ مثلث بندی

#### ۱. نحوه مثلث بندی چند ضلعی های ساده (یک روش ابتدایی):

پیدا کردن یک گوشه<sup>۵۸</sup> در چند ضلعی: گوشه به مثلی گویند که ۲ ضلع آن کاملاً بر روی اضلاع چند ضلعی منطبق بوده و ضلع دیگر آن درون چند ضلعی قرار می گیرد. هر چند ضلعی حداقل ۲ گوشه دارد. برداشتن گوشه از یک چند ضلعی (چند ضلعی حاصل همچنان یک چند ضلعی ساده است) تا زمانی که شکل حاصل یک مثلث شود مراحل ۱ و ۲ ادامه پیدا می کنند. در آخر اضلاع درونی گوشه ها خطوط مثلث بندی تلقی می شوند.

#### ۲. نحوه مثلث بندی چند ضلعی های محدب:

از یک رأس به تمام رئوس دیگری که روی ضلع مشترک این رأس قرار دارند پاره خطی می کشیم، پیچیدگی زمانی این کار  $O(n)$  می باشد.

روش دیگری برای مثلث بندی چند ضلعی های ساده بوسیله مفهوم چند ضلعی های یکنوا وجود دارد که از پیچیدگی زمانی  $O(n \log n)$  برخوردار است.

مینیمم وزن مثلث بندی: وزن مثلث بندی برابر طول همه ی یال های آن است. در این مسئله نقاط داده شده طوری مثلث بندی می شوند که مجموع طول یال های مثلث بندی مینیمم شود [46].

### ۳-۸-۱ مثلث بندی دلونی<sup>۵۹</sup>

یکی از مسائل قدیمی و کلاسیک هندسه محاسباتی مثلث بندی دلونی می باشد که روش های مختلفی توسط محققان برای آن ارائه گردیده است. مثلث بندی دلونی، نوعی مثلث بندی است که در

<sup>58</sup> ear

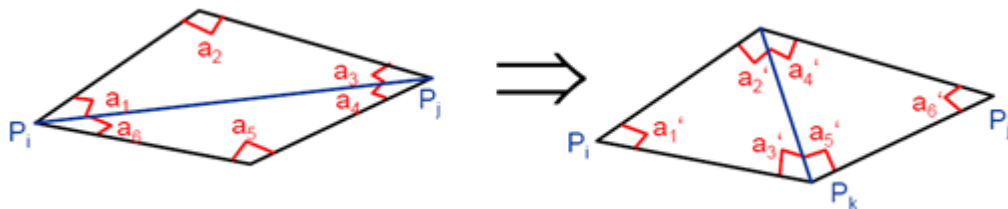
<sup>59</sup> Delauny Triangulation

آن دایره محیطی هر مثلث شامل هیچ رأسی از رئوس مثلث های دیگر نباشد (شرط دایره محیطی)، واضح است که این نوع مثلث بندی یکتا خواهد بود.

قضیه: پیچیدگی زمانی مثلث بندی دلونی  $O(n \log n)$  می باشد.

### ۳-۸ تعاریف

#### ۳-۸-۱ تعریف یال غیرمجاز در مثلث بندی دلونی



یال  $P_i P_j$  غیرمجاز است اگر:

$$\min a_i < \min a'_i \quad 1 \leq i \leq 6$$

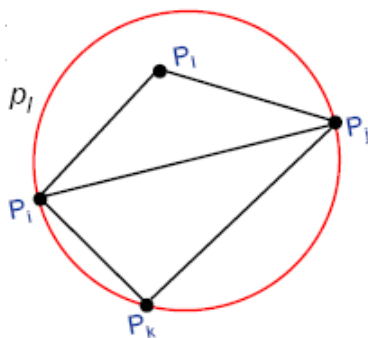
#### ۳-۸-۲ مثلث بندی مجاز دلونی<sup>۶۰</sup>

یک مثلث بندی از چند ضلعی  $P$  با نام گذاری  $T(P)$  زمانی مجاز است که  $T(P)$  فاقد هرگونه یال غیرمجاز باشد [۴۶, ۴۸, ۴۷].

<sup>60</sup> Legal Triangulation

### ۳-۸-۳ آزمایش مجاز یا غیرمجاز بودن مثلث بندی دلونی:

فرض کنید  $P_i P_j$  یک ضلع مشترک بین دو مثلث  $P_i P_j P_k$  و  $P_i P_j P_l$  باشد و همچنین دایره  $C$  از رئوس  $P_i$  و  $P_j$  و  $P_k$  عبور می کند، یال  $P_i P_j$  غیرقانونی است اگر و تنها اگر رأس  $P_l$  داخل دایره بیفتد، به عبارت دیگر اگر رئوس  $P_i$  و  $P_j$  و  $P_k$  و  $P_l$  یک چهارضلعی محدب را تشکیل دهند و بر روی محیط یک دایره قرار نگیرند، در این صورت دقیقاً یکی از یال های  $P_i P_j$  یا  $P_k P_j$  غیرقانونی است.



راه حل های مختلف، برای مثلث بندی دلونی بصورت مستقیم عموماً در دسته های زیر قرار می گیرند:

**الف) روش بهینه سازی محلی:** در این روش ابتدا یک مثلث بندی دلخواه بر روی نقاط انجام می گیرد و بعد در جهت برقرار بودن شرط دایره تهی محل یال هایی که غیر مجاز هستند تغییر داده می شوند.

**ب) روش برخط:** در این نوع روش در هر لحظه یک نقطه به مجموعه نقاط افزوده می گردد، این نقطه جدید احتمالاً در یکی از چندضلعی های ساخته شده قبلی قرار خواهد گرفت، چند ضلعی که آن را دربرگرفته است، تقسیم شده و چند ضلعی جدید بوجود می آید، شرط دایره تهی برای هر چند ضلعی جدید بدست آمده کنترل می گردد.

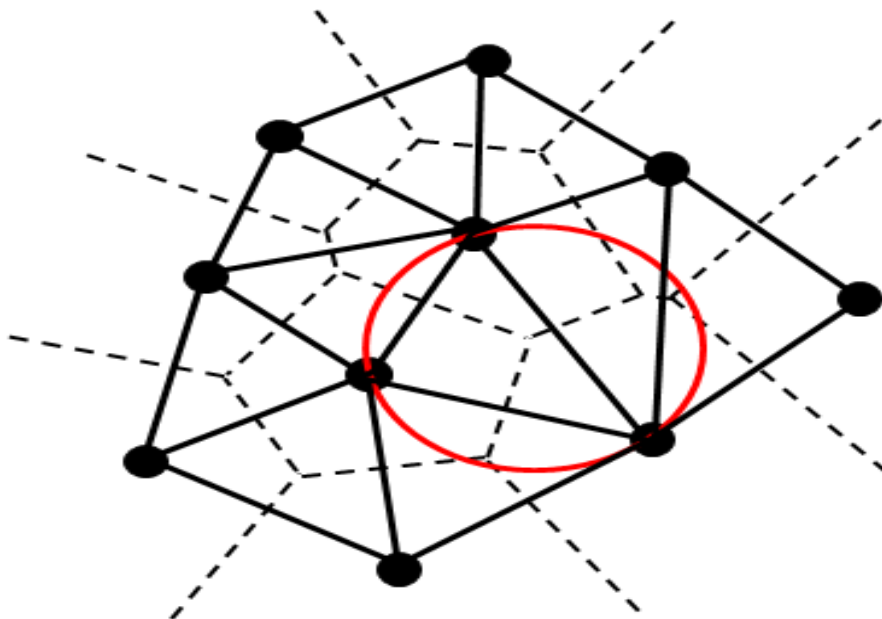
**پ) روش افزایشی:** در این نوع روش ها از یک چند ضلعی شروع کرده، در هر مرحله بر روی یکی از یال های چند ضلعی قبلی یک چند ضلعی جدید اضافه می کنیم، به اینصورت که چند ضلعی جدید شرط دایره تهی را ارضاء نماید.

**ت) روش تعبیه با ابعاد بیشتر:** این الگوریتم ها نقاط را به فضای  $E^{d+1}$  منتقل می کند و سپس پوش محدب نقاط را اضافه کرده محاسبه کرده و مثلث بندی دلونی را با استفاده از تصویر این نقاط محاسبه شده بر روی  $E^d$  به دست می آورند، الگوریتم بلوچی و ... دسته ای از این نوع الگوریتم ها می باشد.

**ج) روش تقسیم و تکرار:** این الگوریتم ها برگرفته از روش تقسیم و حل عادی می باشند، به این صورت که مجموعه نقاط به دسته های کوچکتر تقسیم شده و مثلث بندی برای هر یک از این دسته ها انجام می شود و سپس راه حل ها با یکدیگر ترکیب شده و مثلث بندی نهایی حاصل می شود، تنها مشکل این روش ترکیب راه حل ها می باشد چراکه در زمان ترکیب ممکن است مثلث بندی مرزها تغییر نماید [46].

### ۳-۸-۴ روش تشخیص مثلث بندی دلونی:

کوچکترین دایره محیطی تک تک مثلث ها را رسم می کنیم. اگر هیچ نقطه دیگری در هیچ کدام از این دایره ها واقع نشود، مثلث بندی دلونی است [30].



شکل ۳-۸ گراف دلونی  $Dg(p)$

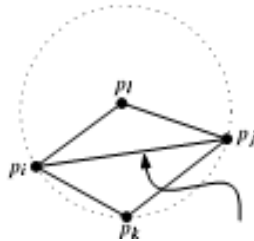
### ۳-۹ گراف دلونی

گرافی که مجموعه خطوط در فضای آزاد است که گوشه های رأس ها را به یکدیگر متصل می کند و می توان از طریق روش های جستجوی گراف به تعیین کوتاه ترین مسیر گذرنده از گراف از نقطه شروع به نقطه هدف پرداخت، مسیر حاصل، کوتاه ترین مسیر از نقطه شروع به نقطه هدف است [۴۶ و ۴۸].

لم ۳-۱:

فرض کنید یال  $\overline{p_i p_j}$  شامل مثلث  $p_i p_j p_k$  و  $p_i p_j p_L$  و فرض کنید  $C$  دایره محیطی  $p_k, p_j, p_i$  می باشد یال  $\overline{p_i p_j}$  غیر مجاز می باشد اگر و فقط اگر نقطه  $p_L$  غیر مجاز و درون  $C$

باشد. اگر نقاط  $p_k, p_j, p_i$  نادرست روی دایره یکی از یال های  $\overline{p_i p_j}$  و  $\overline{p_k p_L}$  یال غیر مجاز می باشد. [ ۴۸ و ۴۶ ].



یال غیر مجاز

### قضیه ۳-۱

فرض کنید  $p$  یک مجموعه نقاط در صفحه

(i) سه نقطه  $p_i, p_j, p_k \in p$  رأس هایی از گراف دلونی  $Dg(p)$  اگر فقط اگر دایره شامل  $p_i, p_j, p_k$  و هیچ نقطه درونی نباشد.

(ii) دو نقطه  $p_i, p_j \in p$  ترکیب یک یال گراف دلونی  $Dg(p)$  اگر و فقط اگر وجود داشته باشد دایره ای که شامل  $p_i, p_j$  روی کران های آن باشد و شامل نقاط دیگر  $p$  نباشد.

### ۳-۹-۱۱ الگوریتم مثلث بندی دلونی

یک مجموعه از  $p$  که  $p + 1$  نقطه روی صفحه را وارد می کنیم و خروجی مثلث بندی دلونی می باشد.

۱- فرض می کنیم  $p_0$  بزرگترین نقطه از  $p$  باشد.

۲- فرض می کنیم  $p_{-1}$  و  $p_{-2}$  دو نقطه در  $R^2$  و کافی است مثلث  $p_0 p_{-1} p_{-2}$  شامل  $p$ ، به دست آوریم.

۳- مثلث بندی  $T$  شامل مثلث  $p_0 p_{-1} p_{-2}$  می شود

۴- با یک جایگشت تصادفی  $p_1, \dots, p_n$  از  $\{p_0\}$ ،  $p$  را محاسبه می کنیم.

۵- برای  $n$  تا  $1 \rightarrow r$

۶-  $p_r$  در  $T$  وارد می کنیم .

۷- یک مثلث  $p_i p_j p_k \in T$  پیدا می کنیم که شامل  $p_r$  می باشد.

۸- اگر  $p_r$  غیر مجاز باشد و درون مثلث  $p_i p_j p_k$  می باشد.

۹- سپس یال های  $p_r$  اضافه می کنیم به سه رأس  $p_i p_j p_k$  و تقسیم به سه مثلث می شود.

۱۰- یال های مجاز  $(p_r, \overline{p_i p_j}, T)$

۱۱- یال های مجاز  $(p_r, \overline{p_j p_k}, T)$

۱۲- یال های مجاز  $(p_r, \overline{p_k p_i}, T)$

۱۳- وگرنه  $p_r$  غیر مجاز روی یال  $\overline{p_i p_j}$

۱۴- یالی از  $p_r$  به  $p_n$  اضافه می کنیم و سومین رأس  $p_L$  از مثلث دیگر واقع بر  $\overline{p_i p_j}$  دو

مثلث واقع بر  $\overline{p_i p_j}$  در نتیجه دو نیم می کنیم و مثلث چهارم بوجود می آید.

۱۵- یال های مجاز  $(p_r, \overline{p_i p_L}, T)$

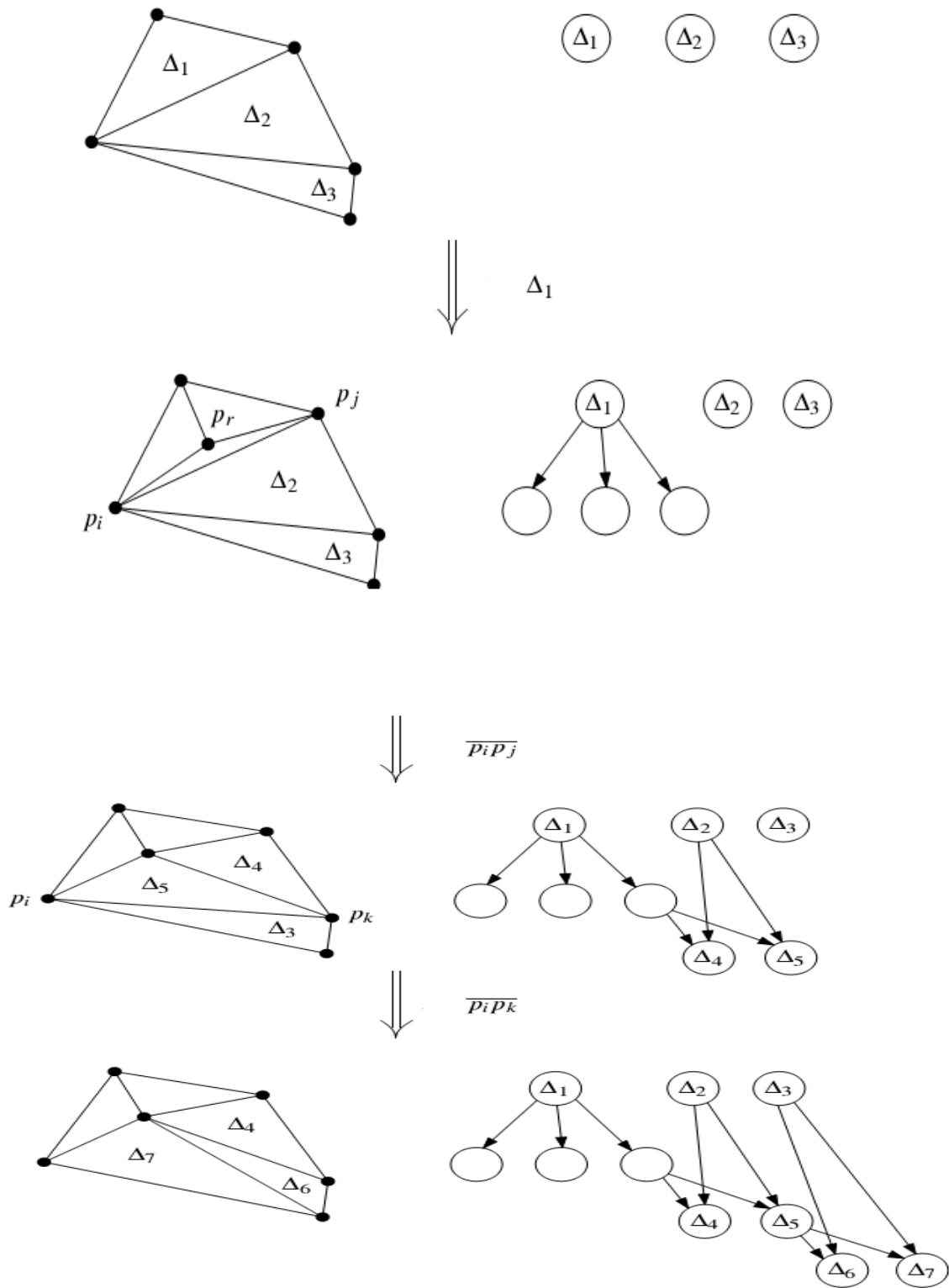
۱۶- یال های مجاز  $(p_r, \overline{p_L p_j}, T)$

۱۷- یال های مجاز  $(p_r, \overline{p_j p_k}, T)$

۱۸- از  $p_{-1}, p_{-2}$  با همه یال های واقع از  $T$  دست می کشیم .

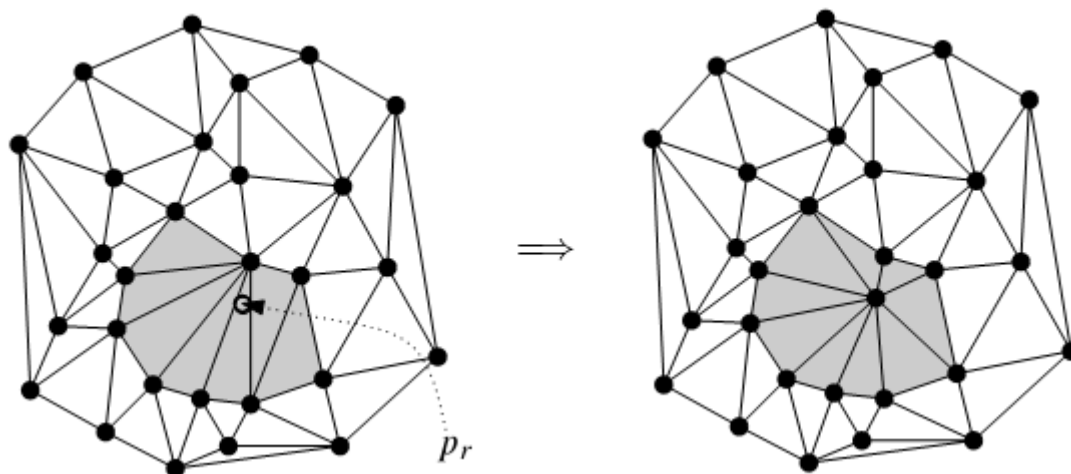
۱۹- برمی گردیم به  $T[48]$  .

### ۳-۹-۲ محاسبه مثلث دلونی





شکل ۳-۹ تأثیر وارد کردن  $p_r$  بر مثلث  $\Delta_1$  و تأثیر آن روی ساختار

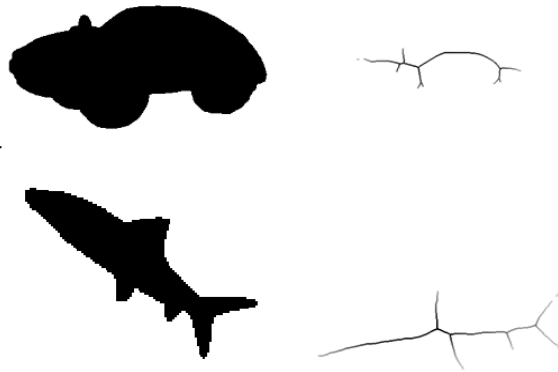


شکل ۳-۱۰ یالهای مرکزی و واقع بر  $p_r$

### ۳-۱۰ کاربرد طیف گراف در گراف دلونی و شاخ

از طیف برای دسته بندی و طبقه بندی کردن گراف ها استفاده می کنیم و تأثیر فرمول بندی ماتریس گراف را بر میزان خطا نشان می دهیم. در جدول (۳-۱) و (۳-۲) با استفاده از درخت ها، و گراف های حاصل شده از شکل و داده ها به این نتایج می رسیم. با استفاده از استخراج اسکلت اشکال و تغییر شکل آنها بوسیله محور میانی، درخت شاخ شکل ها به دست می آید و رأس های گراف در نقاط اتصال می باشد. وزن های یال توسط طول اسکلت تعیین می شوند. با استفاده از کلاس بندی بر اساس مقادیر ویژه در یک فضای ویژگی گراف حاصل، با ماتریس های وابسته طیفی طبقه بندی می شود. از روش ۳ - نزدیکترین همسایگی برای کلاس بندی استفاده شده است. به عنوان مثال در شکل (۳-۱۱) درخت شاخ بررسی می شود. در جدول (۳-۱) نتایج به دست آمده بیان کننده این

است که خطا کلاس بندی لاپلاس کمتر می باشد و در نتیجه ماتریس لاپلاس بهتر از روش های دیگر است [۷ و ۸، ۴۹، ۶۵].

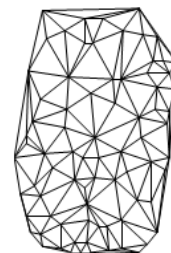
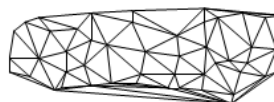
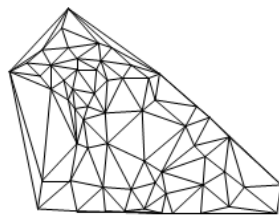
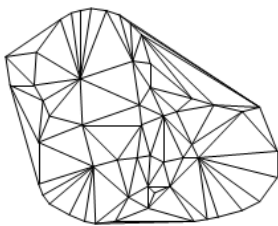
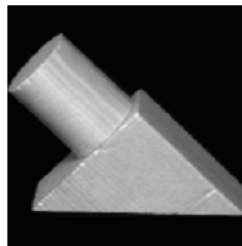
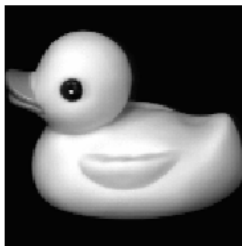


شکل ۳-۱۱ شکل ها و اسکلت شان با استفاده از داده هایی از شکل

| ماتریس         | مرتبه خطا کلاس بندی | تراکم خوشه ای |
|----------------|---------------------|---------------|
| $L$            | ۰/۵۶۴۶۳             | ۰/۵۶۶۱۵       |
| $A$            | ۰/۶۳۲۶۵             | ۰/۵۶۴۸۷       |
| $\hat{L}$      | ۰/۶۷۳۴۶             | ۰/۴۹۰۲۸       |
| $H_t(t = 0.1)$ | ۰/۶۷۳۴۶             | ۰/۴۹۰۲۶       |
| $D_k(k = 4)$   | ۰/۶۹۳۸۷             | ۰/۵۹۶۴۲       |

جدول ۳-۱ خوشه بندی و کلاس بندی طیف گراف با استفاده از درخت شکل

برای هر تصویر از اشیاء، نقاط ویژگی تصاویر استخراج می شود و گراف از این نقاط به دست می آید. توسط ساختن ورونوی از نقاط ویژگی، گراف ناحیه مجاور از مثلث بندی دلونی حاصل می شود گراف دلونی یک درخت پوشا است که شامل همه نزدیکترین همسایگی یال ها می باشد. با استخراج نقاط گوشه ای تصویر از الگوریتم گوشه یاب، نقاط تبدیل به گراف دلونی می شوند. برای خوشه بندی طیفی، از گراف دلونی وشاک استفاده می کنند. از تصاویر شکل (۳-۱۲) نقاط گوشه ای توسط الگوریتم گوشه یاب استخراج می شود و سپس نمودار ورونوی نقاط را به دست می آوریم باکمک نزدیکترین همسایگی مجاور والگوریتم دلونی شروع به مثلث بندی می کنیم. منیمم درخت فراگیر گراف دلونی با کمک حذف کردن یال ها به دست می آید. از جدول (۳-۲) نتیجه می گیریم که ماتریس لاپلاس از ماتریس های دیگر برای طبقه بندی گراف دلونی بهتر است [ ۸۷ ] .



شکل ۳-۱۲ تصویر هایی از اشیاء و گراف دلونی آنها

| تراکم خوشه ای | مرتبه خطا کلاس بندی | ماتریس         |
|---------------|---------------------|----------------|
| ۰/۹۲۵۷۷       | ۰/۳۵۷۶۳             | $L$            |
| ۰/۹۴۲۸۲       | ۰/۳۹۹۳۱             | $ L $          |
| ۰/۹۴۴۰۷       | ۰/۴۴۰۹۷             | $D_k(k = 2)$   |
| ۰/۹۴۴۹۹       | ۰/۴۶۵۲۸             | $\hat{L}$      |
| ۰/۹۴۵۲۳       | ۰/۴۶۵۲۸             | $H_t(t = 0.1)$ |
| ۰/۹۹۶۱۴       | ۰/۶۳۵۴۲             | $A$            |

جدول ۳-۲ خوشه بندی و کلاس بندی طیف گراف دلونی

### ۳-۱۱ نتیجه گیری:

از دو روش آنالیز مولفه های اصلی و مقیاس گذاری چند بعدی برای نشان دادن طیفی گراف و کاهش ابعاد استفاده می کنیم. فاصله گراف شامل فاصله طیفی و فاصله ویرایش می باشد که برای تطابق و دسته بندی دوگراف به کار می رود. عملگرهای ویرایش بیشتر برای گراف هایی که در اثر اعوجاج تغییر شکل داده اند در مسئله تطابق بکار می روند. هزینه مسیر ویرایش با فرمول زیر به دست می آید.

$$d(X, Y) = c(T) = \sum_{\gamma_k \in T} n(\gamma_k \rightarrow \gamma_{k+1})$$

گراف شاك را با به دست آوردن اسكلت شكل و تشخيص محور مياني با استخراج درخت از آن به دست مي آوريم . در تئوري شاك نقاط اسكلتي به ۴ دسته تقسيم مي گردند كه ما بيشتر از نوع اول وسوم استفاده مي كنيم. گراف دلوني از به دست آوردن نقاط گوشه اي به طور تصادفي حاصل مي شود. گراف شاك ودلوني از تصاوير استخراج مي شوند براي كمتر شدن ابعاد، محاسبات و نشان دادن تصاوير در يك صفحه بكار مي روند. براي خوشه بندي وكلاس بندي گراف هاي شاك ودلوني از ماتريس هاي وابسته طيفي استفاده مي كنيم.



فصل چهارم:

کاربرد طیف گراف در مسئله آنالیز مولفه های

اصلی

## ۴-۱ مقدمه

در این فصل به بیان الگوریتم آنالیز مولفه های اصلی و بررسی کاربرد طیف گراف در آن می پردازیم. این فصل به دو بخش تقسیم بندی شده است. بخش اول ارائه الگوریتم آنالیز مولفه های اصلی به همراه مثال بخش دوم کاربرد الگوریتم در گراف و استخراج ویژگی از داده ها می باشد.

برای مقایسه دو گراف و نشان دادن آن در یک فضای با ابعاد کمتر از الگوریتم آنالیز مولفه های اصلی استفاده می شود. بردارهای طیفی که از ماتریس طیفی گراف ها استخراج شده است را با کمک آنالیز مولفه های اصلی به یک فضای برداری با ابعاد کمتر به صورت خطی نگاشت داده می شود.

## ۴-۲ تعاریف

**تعریف ۴-۱-۱:** آنالیز مولفه های اصلی یک تبدیل در فضای برداری است. این تبدیل، یک تبدیل متعامد خطی است که داده ها را به دستگاه مختصات جدید می برد و غالباً برای کاهش ابعاد مجموعه داده ها مورد استفاده قرار می گیرد. آنالیز مولفه های اصلی شامل تجزیه مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس می باشد [۳۰].

## ۴-۲ الگوریتم آنالیز مولفه های اصلی:

**گام اول:** دریافت اطلاعات از گراف ها.

**گام دوم:** محاسبه میانگین داده های هر بعد.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$



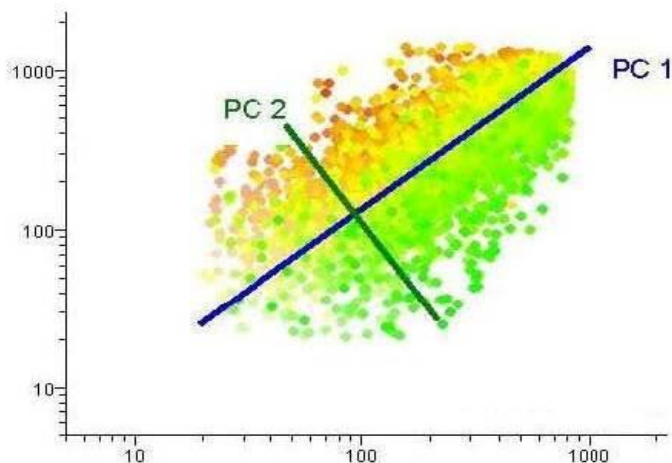
**گام سوم:** محاسبه ماتریس کوواریانس داده های دو بعدی.

$$C = \begin{pmatrix} \text{cov}(x, x) & \text{cov}(x, y) \\ \text{cov}(y, x) & \text{cov}(y, y) \end{pmatrix} \quad (۱-۴)$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1} \quad (۲-۴)$$

**گام چهارم:** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس را محاسبه می کنیم.

از آن جا که ماتریس کوواریانس مربعی است ما می توانیم بردار های مشخصه و مقادیر ویژه را برای این ماتریس حساب کنیم. بردار های مشخصه و مقادیر ویژه اطلاعات مفیدی درباره داده هایمان به ما می دهند. بردار مشخصه به ما نشان می دهد که چگونه این دو مجموعه اطلاعات در امتداد خطوط به هم وابسته هستند. بردار مشخصه دوم به ما راستای دیگری را می دهد که اهمیت کمتری دارد.



شکل ۱-۴ نمودار خطی PCA

$$CX = \lambda X \quad , \quad \det(C - \lambda I) = 0 \quad (۳-۴)$$

**گام پنجم:** متراکم سازی

اگر به بردار های ویژگی و مقادیر ویژه در بخش قبلی توجه شود. به این نکته می رسیم که بردار های ویژگی ارزش های کاملاً متفاوتی دارند. در واقع، این نتیجه حاصل می شود که بردار ویژگی با بزرگترین مقدار ویژه جز اساسی مجموعه داده ها است. زیرا در این حالت داده ها دارای بیشترین واریانس و کمترین پراکندگی می باشند. اگر از تعداد کمی از اجزا صرف نظر شود، سرانجام مجموعه داده ها ابعاد کمتری نسبت به داده های اصلی پیدا می کند. اگر ابعاد اصلی داده ها  $n$  بعدی باشد باید  $n$  بردار مشخصه و مقدار ویژه حساب شود. حال اگر  $p$  بردار مشخصه اول را انتخاب کنیم، سرانجام مجموعه داده ها فقط  $p$  بعد دارند.

شکل گیری بردار ویژگی به صورت زیر می باشد.

$$\text{بردار ویژگی} = (eig_1, eig_2, eig_3, \dots, eig_n)$$

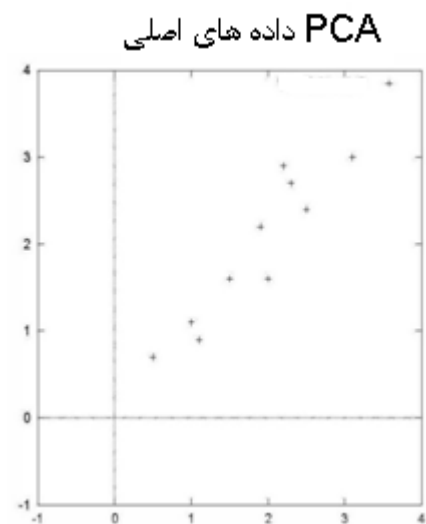
**گام ششم :** به دست آوردن مجموعه داده های جدید.

این مرحله نهایی در آنالیز مولفه های اصلی است و هم چنین آسان ترین قسمت است. وقتی که مولفه های اصلی انتخاب شدند، (بردار های ویژگی) برای حفظ داده ها آنها را به شکل یک بردار ویژگی نشان می دهیم و به سادگی ترانهاده بردار را به دست آورده و آن را در سمت چپ ترانهاده مجموعه داده های که از میانگین کم شده اند ضرب می کنیم. بردار ویژگی سطری، ترانهاده ماتریس ستونی از بردار های ویژگی است. پس یک ماتریس سطری از بردار های مشخصه می باشد، که در آن بردار های مشخصه ی پر اهمیت تر در قسمت بالا قرار دارند. مجموعه داده های نهایی با مجموع داده ها در ستون ها و همراه ابعاد سطرها است و منحصرأً داده های اصلی را به ازای بردار های اصلی به ما خواهد داد [ ۵۱،۳۱].

#### ۴-۲-۱ مثال:

گام اول: یک مجموعه دو بعدی داده را معرفی می کنیم

|        | X   | Y   |
|--------|-----|-----|
| داده = | ۲/۵ | ۲/۴ |
|        | ۰/۵ | ۰/۷ |
|        | ۲/۲ | ۲/۹ |
|        | ۱/۹ | ۲/۲ |
|        | ۳/۱ | ۳   |
|        | ۲/۳ | ۲/۷ |
|        | ۲   | ۱/۶ |
|        | ۱   | ۱/۱ |
|        | ۱/۵ | ۱/۶ |
|        | ۱/۱ | ۰/۹ |
|        |     |     |



گام دوم: هر داده را از میانگین کم می کنیم \*

|        | X   | Y   |
|--------|-----|-----|
| داده = | ۲/۵ | ۲/۴ |
|        | ۰/۵ | ۰/۷ |
|        | ۲/۲ | ۲/۹ |
|        | ۱/۹ | ۲/۲ |
|        | ۳/۱ | ۳   |
|        | ۲/۳ | ۲/۷ |
|        | ۲   | ۱/۶ |
|        | ۱   | ۱/۱ |
|        | ۱/۵ | ۱/۶ |
|        | ۱/۱ | ۰/۹ |
|        |     |     |

=داده هایی که از  
میانگین کم شده است

۷۹

| X     | Y     |
|-------|-------|
| ۰/۶۹  | ۰/۴۹  |
| -۱/۳۱ | -۱/۲۱ |
| ۰/۳۹  | ۰/۹۹  |
| ۰/۰۹  | ۰/۲۹  |
| ۱/۲۹  | ۱/۰۹  |
| ۰/۴۹  | ۰/۷۹  |
| ۰/۱۹  | -۰/۳۱ |
| -۰/۸۱ | -۰/۸۱ |
| -۰/۳۱ | -۰/۳۱ |
| -۰/۷۱ | -۱/۰۱ |

گام سوم : ماتریس کوواریانس را به دست می آوریم

$$\text{COV} = \begin{bmatrix} 0.61655556 & 0.61544444 \\ 0.61544444 & 0.71655556 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 1.81 \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 1.91$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{9} ((0.69 \cdot 0.49) + (-1.31 \cdot (-1.21)) + (0.39 \cdot 0.99) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(0.09 \cdot 0.29) + (1.29 \cdot 1.09) + (0.49 \cdot 0.79) + (0.19 \cdot (-0.31)) \\ &+ (-0.81 \cdot (-0.81)) + \end{aligned}$$

$$(-0.31 \cdot (-0.31))(-0.71 \cdot (-1.01))) = 0.61544$$

گام چهارم : مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس را محاسبه می کنیم

$$\text{مقدار ویژه} = \begin{bmatrix} 0.490833989 \\ 1.28102771 \end{bmatrix}$$

$$\text{بردار ویژه} = \begin{bmatrix} -0.73517856 & -0.67787339 \\ 0.67787339 & -0.67787339 \end{bmatrix}$$

به این نکته توجه کنید که این بردار های ویژگی، طول هر دو آنها یک می باشد. این برای آنالیز اجزای اصلی بسیار مهم است، و در نهایت بردار های ویژگی بر هم عمود هستند.

گام پنجم: مقادیر ویژه را از بزرگ به کوچک مرتب می کنیم. بدین ترتیب مؤلفه داده ها از پراهمیت به کم اهمیت مرتب می شوند. که برای کاهش ابعاد، مولفه های کم اهمیت را حذف می کنیم.

$$\text{بردار ویژگی} = \begin{bmatrix} -0.677873399 \\ -0.735178656 \end{bmatrix}$$

گام ششم: ترانهاده بردار ویژگی را در ترانهاده داده های نرمال شده ضرب می کنیم [۵۱].

ترانهاده داده های نرمال شده  $\times$  ترانهاده بردار ویژگی = داده نهایی

$1 \times 10$

$1 \times 2$

$2 \times 10$

داده های تغییر شکل یافته:

$X =$

[ ۱۲۲۲۸۲۰ -۰۳۲۸۰۴۶ ۱/۴۴۵۷۱ ۰/۹۱۱۰۹۴ -۰/۹۱۲۹۴۱ -۱/۶۷۵۸۰۱ -۰/۲۷۴۴۱ -۰/۹۹۲۱۹ ۱/۷۷۷۵۸ ۱/۲۷۹۷۰ ]

## ۳-۴ استخراج ویژگی برپایه آنالیز مولفه های اصلی

تحلیل عناصر اصلی آنالیز مولفه های اصلی براساس کارهای پیرسن<sup>۶۱</sup> پایه گذاری شده است. هدف از آنالیز مولفه های اصلی تولید متغیرهای جدید (مرتب شده براساس درجه اهمیت) به گونه ای است که ترکیب خطی از متغیرهای اولیه و بدون همبستگی باشند. به صورت هندسی، آنالیز مولفه های اصلی را می توان دوران محورهای مختصات اولیه به محورهای عمودی جدید دانست به صورتی که براساس واریانس متغیرهای اولیه مرتب شده اند.

<sup>61</sup> pirson

یکی از اهداف انجام آنالیز مولفه های اصلی پیدا کردن گروه های کوچک تری از متغیرهای اساسی است که بتوانند داده ها را توصیف کنند. برای انجام این کار، باید چند عنصر اصلی اول بتوانند پراکندگی زیادی از داده های اولیه را تشکیل دهند. کم کردن ابعاد داده ها به دلایلی که گفته شد اهمیت ویژه ای دارد. البته نمایش داده ها در ابعاد کوچکتر لزوماً به معنی رسیدن به داده های قابل تفسیر نیست.

حداقل سه مشکل وجود دارد که برای حل آن ناچاریم به مسأله عناصر اصلی رجوع کنیم [۶۶،۶۵].

۱. ممکن است به دنبال تبدیل متعامد<sup>۶۲</sup>  $A$  برای تولید متغیرهای جدیدی باشیم، به گونه ای که این متغیرها دارای مقادیر ایستا<sup>۶۳</sup> از واریانس باشند. این روش براساس کار هتلینگ<sup>۶۴</sup> در سال ۱۹۳۳ می باشد.

۲. ممکن است به دنبال تبدیل متعامدی باشیم که متغیرهای نا همبسته تولید کند.

۳. ممکن است نگاه هندسی به مساله داشته باشیم و به دنبال خطی باشیم که مجموع مربعات فاصله های عمودی را کمینه کند.

فرض کنید  $X$  ماتریس داده ها و  $X_1, X_2, \dots, X_m$  مجموعه متغیرهای (ویژگی های) اولیه  $i = 1, 2, \dots, m, y_i$  ترکیب خطی از این متغیرها باشند.

$$y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j$$

(۶-۴) یا

$$y = A^T X$$

<sup>62</sup> Orthogonal

<sup>63</sup> stationary

<sup>64</sup> Hotelling

که در آن  $X, Y$  برداری از متغیرهای تصادفی ( با میانگین صفر و  $A$  ماتریس ضرایب هستند).  
متغیر اول را ملاحظه کنید.

$$y_{ij} = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij} = a_1^T X \quad (۷-۴)$$

بردار  $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})^T$  را به گونه ای انتخاب می کنیم که با قید

$$\|a_1\|^2 = a_1^T a_1 = 1$$

$y_1$  را بیشینه کند. واریانس  $y_1$  برابر:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_1) &= E[y_1^2] - E[y_1]^2 \\ &= E[a_1^T x x^T a_1] - E[a_1^T x] E[x^T a_1] \end{aligned} \quad (۸-۴)$$

$$= a_1^T (E[xx^T] - E[x] E[x^T]) a_1$$

$$= a_1^T C a_1$$

که در  $C$ ، ماتریس کوواریانس  $X$  و  $E[X]$  نشانگر امید ریاضی می باشد. پیدا کردن مقدار ایستا برای

$$\|a_1\|^2 = a_1^T a_1 = 1 \quad \text{معادل پیدا کردن مقدار ایستای بدون قید برای}$$

$$F(a_1) = a_1^T C a_1 - v a_1^T a_1 \quad (۹-۴)$$

می باشد که در آن  $v$  ضریب لاگرانژ می باشد.

با مشتق گیری از معادله فوق نسبت به المان های  $a_1$  و مساوی صفر قرار دادن آن داریم.

$$C a_1 - v a_1 = 0 \quad (۱۰-۴)$$

یک جواب غیر بدهی ( جواب های غیر صفر برای معادله فوق ، انتخاب بردارهای ویژه  $C$  برای  $a_1$  و مقادیر ویژه آن برای  $u$  است.  $C$  دارای  $m$  مقدار ویژه  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  می باشد که بعضی از آنها

می توانند تکراری یا صفر باشند، همچنین می توان آنها را به صورت  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$  مرتب نمود.

یکی از این مقادیر را برای  $u$  انتخاب می کنیم. در این حالت چون واریانس  $y_1$  به صورت:

$$a_1^T C a_1 = v a_1^T a_1 = v \quad (۱۱-۴)$$

می باشد و ما می خواهیم این واریانس را بیشینه کنیم، بنابراین  $v$  را برابر بزرگترین مقدار ویژه  $\lambda_1$  و  $a_1$  را برابر بردار ویژه مربوط به آن قرار می دهیم. اگر مقدار  $u$  ریشه ای تکراری از معادله مشخصه  $|C - uI| = 0$  باشد، این بردار ویژه منحصر به فرد نخواهد بود. متغیر  $y_1$  اولین عنصر اصلی می باشد و بزرگ ترین واریانس را در بین ترکیب های خطی مقادیر اولیه  $x_1, x_2, \dots, x_m$  دارد. دومین عنصر اصلی،  $y_2 = a_2^T X$  با انتخاب ضرایب  $a_{2i}, i = 1, 2, \dots, m$  به صورتی که واریانس  $y_2$  با قید  $\|a_1\| = 1$  بیشینه شود و  $y_2$  با  $y_1$  ناهمبسته می باشد به دست می آید. برای برقراری دومین قید داریم:

$$E[y_2 y_1] - E[y_2]E[y_1] = 0 \quad (۱۲-۴)$$

یا

$$a_2^T C a_1 = 0$$

و چون  $a_1$  یکی از بردارهای ویژه  $C$  می باشد این رابطه معادل  $a_1 a_2^T = 0$  است که این یعنی  $a_2$  بر  $a_1$  عمود است.

با استفاده دوباره از ضرایب نامعین لاگرانژ به دنبال بیشینه سازی بدون قید برای

$$a_2^T C a_2 - \mu a_2^T a_2 - \eta a_2^T a_1 = 0 \quad (۱۳-۴)$$

هستیم با مشتق گیری نسبت به عناصر بردار  $a_2$  و برابر صفر قرار دادن آن داریم:



$$2Ca_2 - 2\mu a_2 - \eta a_1 = 0 \quad (۱۴-۴)$$

با ضرب کردن در  $a_1^T$  داریم:

$$\eta = 0 \quad (۱۵-۴)$$

با استفاده از (۱۳-۴) داریم:

$$Ca_2 = \mu a_2$$

بنابراین  $a_2$  نیز یک بردار ویژه از  $C$  و عمود بر  $a_1$  خواهد شد. چون به دنبال بیشینه کردن واریانس هستیم، باید بردار ویژه مربوط به بزرگ ترین مقدار ویژه باقی مانده را انتخاب کنیم. که دومین بزرگترین مقدار ویژه در کل است.

این بحث را می توان در مورد عناصر دیگر را نیز انجام داد.  $k$  امین عنصر اصلی  $y_k = a_k^T x$  در آن  $a_k$  بردار ویژه مربوط به  $k$  امین مقدار ویژه بزرگتر  $C$  است. واریانسی برابر  $k$  مقدار ویژه بزرگتر دارد. اگر بعضی از مقادیر ویژه برابر باشند، جواب های به دست آمده برای بردارهای ویژه منحصر به فرد نخواهد بود ولی همواره می توان به یک مجموع متعامد نرمال<sup>۶۵</sup> از بردارهای ویژه برای یک ماتریس حقیقی متقارن با مقادیر ویژه نامنفی به دست آورد. شکل معادله کلی بردارهای ویژگی به صورت رابطه (۱۶-۴) می باشد.

با نمایش ماتریسی داریم:

$$y = A^T X \quad (۱۶-۴)$$

---

<sup>65</sup> orthonormal

که در آن  $A = [a_1, \dots, a_m]$  ماتریسی است که ستون های آن بردارهای ویژه  $C$  است. تا اینجا در مورد نحوه محاسبه عناصر اصلی با انجام یک جابجایی بردارهای ویژه مربوط به ماتریس متقارن مثبت  $C$  و استفاده از این بردارهای ویژه به عنوان ضرایب ترکیب خطی از متغیرهای اصلی بحث شد. اکنون به بررسی نحوه کاهش ابعاد می پردازیم.

مجموع واریانس های عناصر اصلی را می توان از رابطه (۴-۱۷) محاسبه نمود:

$$\sum_{i=1}^m var(y_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (۴-۱۷)$$

در این رابطه مجموع مقادیر ویژه ماتریس  $C$  برابر مجموع واریانس داده های اولیه است. بنابراین نسبت واریانس  $k$  عنصر اصلی اول به کل واریانس داده ها از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (۴-۱۸)$$

حال یک معیار برای کاهش ابعاد می تواند مشخص کردن این نسبت باشد یعنی تعیین کنیم که داده های با ابعاد کمتر باید حداقل  $d$  سهم از کل واریانس را تشکیل دهند. بنابراین مقدار  $d$  یک معیار برای طراحی  $k$  ( بعد داده های جدید ) به حساب می آید.

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq d \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$$

دراین حالت داده جدید با تبدیل  $y_k = A_k^T x$

به دست می آید که در آن  $A_k = [a_1, \dots, a_k]$  و  $y_k = (y_1, \dots, y_k)$  یک ماتریس  $m \times k$

می باشد. در سال ۱۹۸۶ جولیف<sup>۶۶</sup> روشی را برای انتخاب  $d$  پیشنهاد نمود. انتخاب  $d$  بین ۷۰ تا ۹۰ درصد می تواند بخش زیادی از اطلاعات موجود در  $X$  را نگه دارد. در سال ۱۹۹۱ جکسون<sup>۶۷</sup> با توصیه

<sup>66</sup> Jolliffe

ای این روند را رد نموده است. انتخاب مقدار مناسب برای  $d$  دشوار است و تا حد زیادی به مساله بستگی دارد.

روشی دیگر برای انتخاب  $d$  استفاده از نمودار مقادیر ویژه است. (رسم نزولی مقادیر ویژه) این روش امتحان سنگریزه<sup>۶۸</sup> نام دارد و نقطه ای را که نمودار افت شدیدی دارد ولی هنوز در مقادیر کوچک ثابت نشده است را به عنوان  $d$  انتخاب می کند. در این روش عناصر اصلی را که مربوط به مقادیر ویژه قبل از نقطه قطع<sup>۶۹</sup> یا نقطه گلویی<sup>۷۰</sup> نمودار هستند نگه می داریم ولی در بیشتر موارد مقادیر ویژه تغییر کمی دارند و چند مقدار ویژه اول بخش کوچکی از واریانس را تشکیل می دهند [۶۶،۶۵].

در بحث آنالیز مولفه های اصلی نکات زیر باید مورد توجه قرار گیرد.

۱- **نمونه برداری:** در انجام آنالیز مولفه های اصلی (بخش قبل) فرض شده است که ماتریس کوواریانس  $C$  مشخص است. در حالی که در اکثر موارد عملی، تنها تخمینی از این ماتریس به کمک مجموعه ای از داده ها در دست است. در این حالت باید عناصر اصلی را با تخمین ماتریس کوواریانس به دست آوریم و در حقیقت از تخمینی از بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس استفاده نماییم. همچنین تا به حال که کاهش ابعاد نیز ملاحظه گردید، چون مدلی را برای داده فرض نکردیم تعیین مقدار خوب بودن تخمین از عناصر اصلی کار دشواری است.

۲- **نرمالیزه کردن داده ها:** عناصر اصلی به مقیاسی که متغیرهای اولیه با آن اندازه گیری شده اند بستگی دارد. حتی اگر اندازه گیری متغیرها با یک واحد انجام شده باشد اما یکی از متغیرها مقادیر خیلی بزرگتر از بقیه داشته باشد باز هم انتظار داریم اولین عنصر اصلی در امتداد این متغیر باشد.

اگر واحد اندازه گیری متغیرها متفاوت باشد (برای مثال وزن و قد) در این حالت مقادیر ویژه به واحد اندازه گیری استفاده شده در قد، سانتی متر، متر یا فوت بستگی پیدا می کنند. زیرا در تحلیل عناصر

---

<sup>67</sup> Jackson

<sup>68</sup> Scree test

<sup>69</sup> Cut off

<sup>70</sup> elbow

اصلی فاصله عمودی بین داده ها معیار قرار می گیرد. یک روش عملی برای حل این مشکل نرمالیزه کردن داده ها می باشد. این امر موجب می شود که اهمیت یکسان برای همه متغیرهای اولیه قایل شویم.

۳- میانگین صفر: معادله (۴-۱۶) رابطه عناصر اصلی  $y$  و ماتریس مشاهدات  $X$  را نشان می دهد. در حالت کلی  $y$  دارای میانگین صفر نیست. برای این که عناصر اصلی دارای میانگین صفر شوند از رابطه زیر استفاده می شود [۶۵].

$$y = A^T(X - \mu) \quad (۴-۱۹)$$

#### ۴-۴ برنامه محاسبه آنالیز مولفه های اصلی:

برنامه ارائه شده در ذیل در محیط نرم افزار متلب نوشته شده است و محاسبات مربوط به اجرای الگوریتم بخش (۴-۲) را انجام می دهد. این برنامه دارای دو ورودی  $m, n$  است که به ترتیب تعداد سطرها و ستونهای ماتریس  $A$  می باشد. خروجی برنامه داده های نهایی است که ابعاد آنها کاهش پیدا کرده است. در قسمت اول تعداد سطرها و ستونهای داده های ورودی را وارد می کنیم. در قسمت دوم داده هایی که از میانگین هر ستون کم شده است به دست می آید. در قسمت سوم ماتریس کوواریانس داده ها را محاسبه کرده و مقادیر و بردارهای متناظر را به دست می آوریم. در قسمت چهارم ماکسیمم مقادیر ویژه با بردار ویژه متناظر محاسبه می کنیم. و در آخر بردار ویژه متناظر با ماکسیمم مقدار ویژه را در ترانهاده داده هایی که از میانگین کم شده اند ضرب می کنیم.

```
function [pc]=alimardani (m,n,A)
```

```
    a=mean (A, 1)
```

```
    b=zeros (m,n) ;
```

```
    for i=1:m
```

```
        for j=1:n
```

```
            w(i,j)=A(i,j)-a(j) ;
```

```

        b(i,j)=w(i,j);
    end
end
w=b
H=w'*w
[v,d]=eig(H)
max(max(d))
[x,y]=find(d==max(max(d)))
V=v(:,y)'
pc=V*w'
g=(pc)';
pc=g
end

```

#### ۴-۵ نتیجه گیری:

هدف از آنالیز مولفه های اصلی تولید متغیرهای جدید ( مرتب شده براساس درجه اهمیت ) به گونه ای است که ترکیب خطی از متغیرهای اولیه و بدون همبستگی باشند. به صورت هندسی، آنالیز مولفه های اصلی را می توان دوران محورهای مختصات اولیه به محورهای عمودی جدید دانست به صورتی که براساس واریانس متغیرهای اولیه مرتب شده اند . باکمک آنالیز مولفه های اصلی که یکی از روش های طیفی نشان دادن گراف می باشد. می توانیم با بهینه کردن محاسبات داده هایمان را فشرده کنیم و در یک فضای برداری با ابعاد پایین نگاشت دهیم.

فصل پنجم:

کاربرد طیف گراف در مسأله تشخیص چهره

## ۵-۱ مقدمه

این فصل شامل چهار بخش می باشد. در بخش اول به تعریف الگو می پردازیم. در بخش دوم الگوها و کلاس های الگو را بیان می کنیم. در بخش سوم به بررسی مراحل تشخیص الگو<sup>۷۱</sup> می پردازیم. در بخش چهارم به بیان مسئله تشخیص چهره توسط طیف و آنالیز مولفه های اصلی پرداخته می شود. مسئله تشخیص چهره یکی دیگر از کاربردهای طیف گراف می باشد. نقاط ویژگی چهره را به دست آورده و گراف آن را استخراج می کنیم. با کمک ماتریس های وابسته، بردارهای الگو طیفی را به دست می آوریم. توسط آنالیز مولفه های اصلی تصاویر را تبدیل به بردار می کنیم [۶۶,۷].

## ۵-۲ تشخیص الگو

تشخیص الگو روشی است علمی که هدف آن دسته بندی اشیاء به تعدادی موضوع با کلاس می باشد بسته به کاربرد این اشیاء می تواند عکس، سیگنال یا هر نوع اندازه گیری باشند که به دسته بندی نیاز دارند با اینکه تشخیص الگو دارای تاریخچه طولانی است ولی تا قبل از سال ۱۹۶۰، بیشتر در حد پژوهش های تئوری در علم آمار بوده است، [۶۶,۶۵].

همانند بسیاری از علوم دیگری، پیشرفت کامپیوتر سبب افزایش نیاز به کاربردهای عملی تشخیص الگو و در نتیجه موجب گسترش پژوهش ها در این زمینه گردید. اتوماتیک کردن کارها و نقش تشخیص الگو در تحقق آن، یکی از مهم ترین دلایلی می باشد که موجب شده است تشخیص الگو

---

<sup>71</sup> pattern

جایگاه ویژه ای در پژوهش های روز داشته باشد. در طراحی سیستم های تشخیص الگو نیاز به داده هایی از اشیاء (که می خواهیم دسته بندی کنیم) است که به خوبی اشیاء را توصیف کند. برای این منظور مشخصه هایی از آن اشیاء را در نظر می گیریم که با آنها بتوانیم بین اشیاء مربوط به کلاس های مختلف تمایز قایل شویم برای مثال اگر بنا باشد از روی سیگنال های صوتی ضبط شده از صدای چند مرد، مرد بودن یا زن بودن آنها را تشخیص دهیم با توجه به زیر بودن صدای زن نسبت به مرد، این اولین مشخصه ای است که از سیگنال برای دسته بندی مفید به نظر می رسد.

به مشخصه هایی که برای تمایز کلاس ها انتخاب می شود ویژگی گفته می شود. با استخراج داده ها از اشیاء و تشکیل گراف داده ها، ماتریس مربوط به گراف را به دست آورده و با کمک تجزیه ماتریس، بردارهای الگوی طیفی استخراج می شود. در اینجا یک دسته داده در اختیار داریم که می دانیم هر کدام مربوط به کدام کلاس است. در این حالت مسئله تشخیص الگو به این صورت مطرح می شود که با داشتن این داده ها سیستمی طراحی می شود که داده ای که کلاس آن در دسترس نیست را درست دسته بندی کند.

چهره نقش اساسی را در شناسایی افراد و نمایش احساسات آنها در سطح جامعه دارد. توانایی انسان در تشخیص چهره ها قابل توجه است. ما می توانیم هزاران چهره ی یاد مانده در طول عمرمان را تشخیص دهیم و در یک نگاه چهره های آشنا را حتی پس از سال ها جدایی تشخیص دهیم. این مهارت در مقابل تغییرات در شرایط دیداری مانند حالت چهره، سن و همچنین تغییراتی در عینک، ریش یا سبک مدل موها ایستادگی می کند. تشخیص چهره یک موضوع مهم در کاربردهایی همچون سیستم امنیتی، کنترل، کارت اعتباری و شناسایی مجرمان است. برای مثال قابلیت مدل کردن یک چهره خاص و تمیز دادن آن از یک تعداد فراوان از مدل های چهره ذخیره شده، شناسایی مجرمان را به صورت گسترده ای بهبود بخشید [۶۵، ۶۶].



اگر چه درست است که انسان ها در تشخیص چهره توانا هستند اما نحوه ی شناسایی چهره ها در مغز انسان کاملاً آشکار نیست. تشخیص چهره ی انسان برای بیش از بیست سال مورد مطالعه قرار گرفته است. توسعه ی یک مدل محاسباتی برای تشخیص چهره کاملاً دشوار است و دلیل آن پیچیدگی چهره ها و ساختار چند بعدی بینایی است. بنابراین تشخیص چهره یک فعالیت سطح بالا در بینایی کامپیوتر است و می تواند بسیاری از تکنیک های بینایی اولیه را در بر گیرد. مرحله ی اول تشخیص چهره انسان استخراج ویژگی های آشکار از تصاویر چهره هاست در اینجا یک سؤال بوجود می آید که تا چه اندازه ویژگی های چهره، قابلیت اندازه گیری را دارند. بررسی های محققین در چندین سال گذشته به این موضوع اشاره دارد که ویژگی های خاصی از چهره برای شناسایی چهره ها توسط انسان تشخیص داده می شود. کلاس بندی و طبقه بندی دو کار مهم در تشخیص الگو در گراف های بزرگ می باشد [۶۶,۶۵].

## ۵-۲-۱ مفاهیم تشخیص الگو

برای آشنایی با تشخیص الگو و پیچیدگی بعضی از مسائل آن، یک مثال ساده بیان می کنیم. فرض کنیم بخش دسته بندی ماهی، بخواهد جدا کردن دو نوع ماهی روی تسمه نقاله را به صورت خودکار انجام دهد. فرض می شود این دو نوع ماهی صید شده که قرار است از هم جدا شوند ماهی سفید، کپور باشند. سیستم باید طوری طراحی شود که بر اساس تجزیه و تحلیل عکس بتواند این دو نوع ماهی را از هم جدا کند. بنابراین در اینجا باید به دنبال مشخصات فیزیکی این دو نوع ماهی باشیم که آنها را از هم متمایز نماید. این مشخصات می تواند طول، روشنی، پهنای، تعداد باله، موقعیت دهان و مانند اینها باشد. این مشخصات همان ویژگی هایی خواهند بود که سیستم تشخیص چهره بر اساس آن این دو نوع ماهی را از هم جدا می کند. در اینجا باید به اعوجاج یا تغییرات در عکس ها مانند تغییر در نور، محل ماهی ها بر روی تسمه نقاله توجه نمود [۶۵].

۷-۲ عملیات تشخیص به دو گونه ی اصلی تقسیم می شوند:

۱- تشخیص الگوهای اصلی: این فرایند تشخیص، شناسایی و دسته بندی الگوهای فضایی و الگوهای زمانی را در بر می گیرد. مثال هایی از الگوهای فضایی کارکترها، اثر انگشت، اشیاء فیزیکی و تصاویر هستند. الگوهای زمانی، سری زمانی و . . هستند. در واقع تشخیص انسان یک تخمین زدن نسبی آن است که یک داده ورودی به یکی از مجموعه های جمعیت های آماری شناخته شده که وابسته به تجربیات گذشته است می تواند مرتبط باشد. بنابراین مسئله تشخیص الگو ممکن است به عنوان یک مسئله تشخیص اختلاف داده ی ورودی با جمعیت ها به وسیله ی جستجوی ویژگی ها یا صفات ثابت در میان اعضای یک جمعیت مورد توجه قرار گیرد.

۲- الگوها و کلاس های الگوها: تشخیص الگو می تواند به عنوان دسته بندی داده های ورودی در کلاسهای شناخته شده بوسیله ی استخراج ویژگی های مهم یا صفات داده شده تعریف شود. یک کلاس الگو، یک دسته متمایز شده بوسیله ی برخی صفات و ویژگی های مشترک است. ویژگی های یک کلاس الگو صفات نوعی هستند که بین همه ی الگوهای متعلق به آن کلاس مشترک هستند. این ویژگی ها اغلب به عنوان ویژگی های اصلی شناخته می شود. ویژگی هایی که تفاوت بین کلاس های الگو را بیان می کنند یک الگو، توصیفی از یکی از اعضای دسته است که ارائه کننده ی کلاس الگو می باشد. برای راحتی ، الگوها ی طیفی معمولاً

بوسیله یک بردار نمایش داده می شود. مانند:  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  که در آن عنصر  $X_i$  یک ویژگی آن

الگو را ارائه می کند اغلب مفید است که یک بردار الگو به عنوان یک نقطه در فضای اقلیدسی  $n$  بعدی دیده می شود به طور کلی طراحی یک سیستم تشخیص الگو چندین مسئله اصلی را در بر می گیرد [۶۵].

الف) اول از همه بایستی در مورد نمایش داده های ورودی تصمیم گرفته شود. چرا که بایستی اشیایی که قرار است مورد تشخیص قرار گیرند اندازه گیری شوند. هر کمیت اندازه گیری شده یک ویژگی الگو را توصیف می کند و مجموعه ی این ویژگی ها در یک بردار قرار می گیرند. این بردار الگو که داده ی ورودی را توصیف می کند بایستی قالب بندی شود. بردارهای الگو همه یا بخشی از اطلاعات اندازه گیری شده موجود را در مورد الگو ها در بر می گیرد. مجموعه الگوهای متعلق به یک کلاس یکسان به گروهی از نقاط در یک فضای اندازه گیری شده نگاشت می شود.

ب) دومین مسئله در تشخیص الگو استخراج ویژگی ها یا صفات خاصی از داده ی ورودی یافته شده و کاهش ابعاد بردارهای الگو است. این اغلب به عنوان مسأله ی پیش پردازش و استخراج ویژگی معرفی می شود. عناصر ویژگی ها برای همه ی کلاس های الگو مشترک هستند و می توانند حذف شوند. اگر مجموعه ی کامل از ویژگی های تشخیص را برای هر کلاس از داده های اندازه گیری شده تعیین شود، تشخیص و دسته بندی الگو ها دشواری کمتری را در بر خواهد داشت. در بسیاری از مسائل تشخیص الگو در عمل تعیین یک مجموعه کامل از ویژگی های تشخیص اگر غیر ممکن نباشد دشوار است.

پ) مسئله سوم در طراحی سیستم تشخیص الگو تعیین روش های تصمیم بهینه است که در فرآیند شناسایی و دسته بندی مورد نیاز واقع می شود. اگر سیستم قادر به شناسایی کلاس های مختلف الگو باشد در این صورت فضای الگو می تواند شامل  $M$  ناحیه باشد که هر ناحیه یک کلاس را در بر می گیرد. مسئله ی تشخیص حالا می تواند به عنوان تولید کننده ی محدوده های تقسیم که  $M$  کلاس را روی بردارهای اندازه گیری از همدیگر جدا می کند، در نظر گرفته شود که به طور کلی این محدوده های تقسیم، توسط توابع تعیین می شود [۶۵].

## ۵-۳ مراحل تشخیص الگو

۱- **نرمال سازی تصویر:** در این مرحله باید اندازه ی تصویر گرفته شده به یک اندازه پیش فرض مانند  $128 \times 128$  تغییر کند. این اندازه ی تصویر همان اندازه ی تصویری است که سیستم تشخیص چهره با آن کار می کند.

۲- **یکسان سازی هیستوگرام:** این مرحله معمولاً بر روی تصاویر خیلی تاریک یا خیلی روشن و برای بهبود کیفیت تصویر و بهبود کارایی تشخیص چهره انجام می شود. این مرحله تصویر را اصلاح می کند و به عنوان نتیجه، برخی ویژگیهای مهم چهره آشکار تر می شود.

۳- **حذف کردن پس زمینه:** به منظور دست یابی به خود اطلاعات چهره پس زمینه ی چهره، قابل حذف است. این موضوع برای سیستم های تشخیص چهره ای مهمتر است که اطلاعات موجود در کل تصویر استفاده می شود همچنین توجه شود که در حذف پس زمینه قادر به تعیین محدوده ی چهره باشیم.

۴- **استخراج ویژگی<sup>۷۲</sup>:** پس از انجام پیش پردازش اگر لازم بود تصویر چهره ی نرمال شده به منظور پیدا کردن ویژگی های اصلی که قرار است برای دسته بندی از آنها استفاده شود به قسمت ویژگی فرستاده شود. یک بردار ویژگی که به خوبی تصویر چهره را ارائه کند از آن استخراج شود. این بردار ویژگی را می توان با تبدیل چهره به گراف و بوجود آوردن ماتریس گراف طیفی استخراج کرد.

۵- **دسته بندی:** با کمک یک دسته الگو، ویژگیهای استخراج شده از تصویر با آنهایی که در پایگاه داده ی چهره ذخیره شده اند مقایسه می شود. پس از انجام این مقایسه تصویر چهره به عنوان شناخته شده یا ناشناس دسته بندی می شود.

---

<sup>72</sup>Features extraction

۶- پایگاه داده ی چهره: پس از آنکه یک چهره بعنوان ناشناخته دسته بندی شد تصاویر چهره می تواند با بردارهای ویژگی برای مقایسه های بعدی به پایگاه داده اضافه شود [ ۶۷,۶۶ ].

## ۴-۵ تشخیص چهره<sup>۷۳</sup>

تشخیص چهره یک عمل تشخیص الگو است که به طور خاص بر روی چهره ها انجام می شود. این عمل عبارتست از دسته بندی یک چهره بعنوان شناخته شده و ناشناس پس از مقایسه با چهره های ذخیره شده ی افراد شناخته شده است. مدل محاسباتی تشخیص چهره بایستی پاسخگوی چندین مسئله دشوار باشد. این سختی از آنجا ناشی می شود که چهره ها، بایستی به گونه ای ارائه شوند که اطلاعات موجود در چهره را برای تشخیص یک چهره ی خاص از دیگر چهره ها به بهترین نحو بکار برند. در این مورد چهره ها باعث یک مسئله ی دشوار می شوند، چرا که همه ی چهره ها از آنجا که مجموعه ویژگی های یکسانی مانند چشمان، بینی، دهان دارند مشابه با یکدیگرند [۶۷,۵۲].

## ۵-۵ تشخیص چهره با کمک طیف گراف

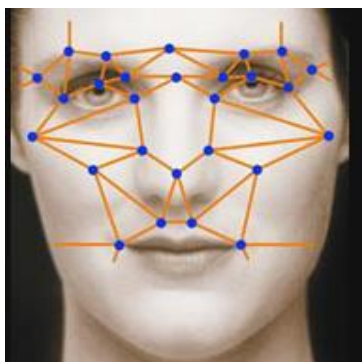
تشخیص چهره یکی از کاربردهای دیگر طیف گراف می باشد. در هر چهره مشخصات چانه، دهان، بینی، چشم و پیشانی، منحصر به فرد هستند. اما برای تشخیص هویت از روی چهره برخی عوامل مانند ریش و سبیل، عینک و زاویه تابش نور، کار را دشوار می کنند [۶۷]. از همین رو، سیستم باید این اطلاعات قابل تغییر را حذف کرده و روی ویژگی های ثابت هر چهره متمرکز شود. افزون بر این، باید هنگام پردازش به حالت چهره (شاد، غمگین و ...) نیز توجه داشت. ویژگی های کلیدی چهره با کمک گراف به دست می آید. برای این کار یک شبکه یا گراف دلونی روی چهره قرار می گیرد. از گفته های بالا به این نتایج می رسیم که هرکدام از مشخصات اصلی روی چهره را بوسیله نقاط

---

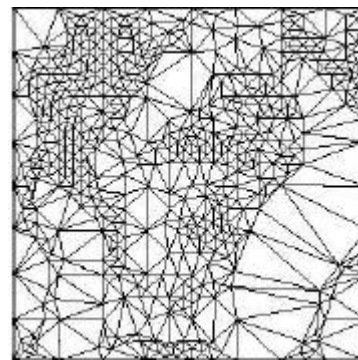
<sup>73</sup> Face Recognition

مشخص می کنیم که این نقاط رأس گراف می باشند. هر کدام از این جفت رأس ها را با کمک یال به هم وصل می کنیم که باعث می شود یک شبکه روی چهره ایجاد شود. با محاسبه فاصله بین رئوس وزن هرکدام از یال ها را به دست می آوریم. با استفاده از ماتریس های وابسته طیفی مقادیر و بردارهای ویژه وابسته طیفی متناظر محاسبه می شود. این بردارها، بردارهای الگو طیفی چهره می باشند. برای هر چهره بردارهای الگو طیفی آن را محاسبه می کنیم. به علت بالا بودن ابعاد این بردارهای طیفی و زیاد شدن محاسبات با کمک آنالیز مؤلفه های اصلی ابعاد این بردارهای الگو طیفی را کاهش می دهیم که در قسمت بعد چگونگی آن را توضیح می دهیم.

تصاویر چهره ها به خاطر شباهت در پیکر بندی کلی، به طور تصادفی در یک فضای بزرگ توزیع نمی شوند و بنابراین به وسیله ی یک زیر فضای به نسبت کم بعد قابل توصیف هستند. ایده ی اصلی آنالیز مؤلفه های اصلی پیدا کردن بردارهایی است که بهترین مقدار را برای توزیع تصاویر چهره در فضای تصویر کامل دارند. این بردارها زیر فضایی از تصاویر چهره را تعریف می کنند که ما فضای چهره می نامیم [۵۳، ۶۷].



شکل ۵- ۱ تشخیص چهره با کمک گراف و طیف



شکل ۵-۲ تشخیص چهره با کمک گراف دلونی

### ۵-۵-۱ کاهش ابعاد چهره با استفاده از آنالیز مولفه های اصلی

تصویر چهره دو بعدی را می توان به صورت یک بردار الگو طیفی نشان داد. فرض کنیم  $M$  بردار طیفی با اندازه  $N$ ، نمایانگر یک دستگاه از تصویر های نمونه گیری شده باشند.  $P_N$  ها مقادیر پیکسل را نشان می دهند، [۵۴].

$$X_i = [p_1, p_2, \dots, p_N], \quad i = 1, 2, \dots, M$$



شکل ۵-۳ کاهش ابعاد چهره با کمک PCA

می توان بردارهای الگو طیفی را با استفاده کم کردن از میانگین برای هر ستون، تصویر ها را در مرکز قرار داد. وقتی که  $m$  نشان دهنده میانگین تصویر است. داریم

$$m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \quad (۵-۱)$$

و  $W_i$  به عنوان تصویر واقع شده در مرکز تعریف می شود.

$$W_i = x_i - m$$

هدف در اینجا پیدا کردن مجموعه ای از  $e_i$  هایی است که بزرگترین تجسم ممکن را بر روی هر کدام از  $W_i$  ها داشته باشند. می خواهیم دستگاهی از  $M$  بردار متعامد  $e_i$  پیدا کنیم که برای هر کمیت

$$\lambda_i = \sum_{i=1}^M (e_i^T w_n)^2 \quad (3-5)$$

که ماکسیمم متعامد را به صورت رابطه (4-5) می باشد.

$$e_L^T e_k = \delta_{ik} \quad (4-5)$$

که در آن  $e_i$  ها و  $\lambda_i$  ها با استفاده از بردارها و مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس داده می شوند. از کنار هم قرار گرفتن  $W_i$  ها، ماتریس  $W$  تشکیل می گردد و داریم

$$C = WW^T \quad (5-5)$$

که  $W$  ماتریسی متشکل از بردارهای  $W_i$  در ستونی که کنار هم قرار دارند. اندازه ماتریس  $C$ ، یک ماتریس  $N \times N$  می باشد که می تواند بزرگ باشد. به عنوان مثال، تصویر هایی با اندازه  $64 \times 64$  یک ماتریس کوواریانس به اندازه  $4096 \times 4096$  را می سازند. حل مستقیم برای به دست آوردن بردارهای ویژه  $C$  عملی نمی باشد. با استفاده از قواعد جبر خطی نشان داد که بردارهای  $e_i$  واسکالرهایی  $\lambda_i$  یعنی بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس  $W^T W$ ، که دارای ابعاد  $M \times M$  می باشد را از رابطه

(6-5) به دست آورد.

$$W^T W d_i = \mu_i d_i \quad (6-5)$$

با ضرب  $W$  در هر دو طرف تساوی داریم:



$$WW^T(Wd_i) = \mu_i(Wd_i) \quad (۷-۵)$$

به این معنی است که اولین  $M - 1$  بردارهای ویژه  $e_i$  و مقادیر ویژه  $\lambda_i$  ماتریس  $WW^T$  به ترتیب با استفاده از  $Wd_i$  و  $\mu_i$  داده می شوند. برای مساوی شدن با  $e_i$  باید نرمال شود. تا زمانی که فقط تعداد محدودی از بردارهای تصویر،  $M$  را جمع کنیم، درجه ماتریس کوواریانس نمی تواند از  $M - 1$  تجاوز کند (مقدار منهای یک ناشی از کم کردن از بردار میانگین  $m$  می باشد) بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه غیر صفر از ماتریس کوواریانس یک پایه متعامد برای زیر فضا به اندازه ای که بیشترین اطلاعات تصویر را بتوان با مقدار خطای کمی نمایش داد، تولید می کند بردارهای ویژه از بزرگترین تا کوچکترین مقادیر ویژه متناظرشان طبقه بندی شده اند. بردار ویژه به منظور انعکاس بزرگترین واریانس در تصویر با بزرگترین مقدار ویژه می باشد. در نتیجه کوچکترین مقدار ویژه با بردار ویژه ای که حداقل واریانس را داراست همراه می شود. و بنابراین این کاهش به صورت نمایی می باشد. یعنی تقریباً ۹۰ درصد واریانس کل در ۵-۱۰ درصد اول ابعاد می باشد. بردارهای طیفی یک تصویر چهره می تواند در ابعاد  $\hat{M}$  ( $M >$ ) با محاسبه  $\Omega$  تجسم شود.

$$\Omega = [V_1, V_2, \dots, V_{\hat{M}}]^T \quad (۸-۵)$$

که  $v_i = e_i^T W_i$  است  $v_i$ ،  $i$  امین مختصات تصویر چهره در فضای جدید می باشد که یک مؤلفه اصلی است. بردارهای  $e_i$  تصویر می باشند، آنها را می توان به عنوان تصویر اطلاق نمود. بنابراین  $\Omega$  سهم هر چهره را شرح می دهد. هدف پیدا کردن  $K$  بردار مربوط به یک دسته چهره می باشد که فاصله اقلیدسی را به حداقل برساند.

$$E_k = \|(\Omega - \Omega_k)\| \quad (۹-۵)$$

در رابطه (۵-۹)  $\Omega_k$  برداری است که  $K$  امین دسته بردار چهره را نشان می دهد. اگر  $E_k$  کمتر از آستانه از پیش تعریف شده  $\theta_k$  باشد، بردارهای چهره در  $K$  دسته طبقه بندی می شود [۵۲، ۵۳، ۵۶].

## ۵-۶ نتیجه گیری

مباحث این پایان نامه شامل دو بخش اصلی، بررسی خواص طیف گراف و تعیین بعضی از کاربردهای آن بود. در این رابطه ابتدا مبانی نظری موضوع طیف گراف بررسی شد. سپس نحوه کاربرد آن در در تعیین ساختار گراف ها مطرح گردید. قسمت عمده، این پایان نامه مربوط به بررسی کاربردهای طیف گراف در مسئله آنالیز مولفه های اصلی و مسئله تشخیص چهره می باشد. اجرای مراحل الگوریتم آنالیز مولفه های اصلی و ارائه یک برنامه محاسباتی به کمک نرم افزار متلب از جمله مطالب این پایان نامه می باشد.

امید است که مطالب ارائه شده مورد استفاده علاقمندان و دانشجویان قرار گیرد.



مراجع

- [1]. A. Andries, E. Brouwer Willem, H. Haemers; (2008)." Spectral of graphs",429,2719-2723
- [2]. Fan R. K. Chung; ( 2005)." Lectures on Spectral Graph Theory".
- [3]. <http://fa.wikipedia.org/w/index.php>
- [4]. Richard C. Wilson and , Ping Zhu; (2002) " Eigenvalues and the Laplacian of a graph".
- [5]. Alberto Pinto; MIREX- (2007 ). " Graph Spectral method".
- [6]. D. M. CvetkoviE, M. Doob, H. Sachs, (1995)." Spectra of Graphs (3rd edition)", Johann Ambrosius Barth, .
- [7]. Richard C. Wilson and Ping Zhu; ( 2006). "A Study of Graph Spectra for Comparing Graphs and Trees ".
- [8]. Huaijun Qiu Submitted for the degree of Philosophy Doctor ; ( 2006). " Spectral Methods for Computer Vision Problems".
- [9]. kaveh .A . (2004)" Structural mechanics , graph and matrix method.3<sup>ed</sup>."UK, Research studies press .
- [10]. Vishveshwara sara swashi ,Brinda.K.V and Kanan .N,Protein,(2002). "structure: Insights from graph thory ", Journal of theoretical chemistry.
- [11]. Kaveh .A.Moez.H,Analysis of frames with semi-rigid.(2006). "joints, A graph theoretical approach ,Engineering structures",829-836,28
- [12]. <http://www.ehsan42001.blogfa.com/post-27.aspx>
- [13].Bojan Mohar; (1990). "The laplacian spectram of graphs".
- [14]. Steve Butler; (2005)."Cospectral graphs for both the adjacency and normalized Laplacian matrices".

- [15]. Bojan Mohar; (1990). "The laplacian spectram of graphs".
- [16]. . R. Merris, (1995) . "A Suruey of Graph Laplacians, Linear and Multi linear Algebra"39 19-31.
- [17]. Lislie HOGgen ; (2005)."spectral graph eignvalue inverse of graph".
- [18]. Richard C. Wilson, Edwin R. Hancock; ( 2008). " Pattern Vectors from Algebraic Graph Theory".
- [19]. Kinkar Ch.Das, Pawan Kumar; ( 2009) ." Bounds on The Greatest Eigenvalue Of Graphs".
- [20]. K.CH.Das , P.kumar.(2003)" Bounds on the greatest eigenvalue of graphs ", indianj ,pureappl.math ,34,917-925.
- [21]. Xiao Bai, Hang Yu, Edwin R. Hancock; (2004). " Graph Matching using Spectral Embedding and Semidefinite Programming".
- [22]. Lawrence K. Saul; Kilian Q. Weinberger; Fei Sha; Jihun Ham; Daniel D. Lee; (2005). "Spectral Methods for Dimensionality Reduction".
- [23]. Mark Steyvers, (2002);" Multidimensional Scaling".
- [24]. Xiao Bai, Richard C. Wilson, and Edwin R. Hancock; (2003). " Manifold Embedding of Graphs Using the Heat Kernel " .
- [25] Richard Wilson, Xiao Bai and Edwin R. Hancock; (2002)." Graph Clustering using Symmetric Polynomials and Local Linear Embedding".
- [26]. Daniel A. Spielman; (2007). " Spectral graph theory and its applications".
- [27]. Peng Ren Richard C. Wilson and Edwin R. Hancock;(2009)." Pattern Vectors from the Ihara Zeta Function".
- [28]. Bai Xiao a, Edwin R. Hancock b, Richard C. Wilson; (2005). "Geometric characterization and clustering of graphs using heat kernel embeddings".
- [29]. Ali Shokoufandeh Sven J. Dickinson Kaleen Siddiqi Steven W. Zucker ; (1999)

" Indexing using a Spectral Encoding of Topological Structure ".

[30]. Leslie Hegben; (2005)."Spectral Graph Theory And The Inverse Eigenvalue Problem Of A Graph".

[31]. Bin Luoa;b, Richard C. Wilsona, Edwin R. Hancocka; 10 June; ( 2003) " Spectral embedding of graphs" .

[32]. Muhammed Fatih Demirci; ( 2005)" Many-to-Many Feature Matching for Structural Pattern Recognition"

[33] Antonio Robles-Kelly and Edwin R.Hancock ; ( 2005)"Graph Edit Distance from Spectral Seriation".

[34]. Richard Myers , Richard c .wilson ,and Edwin R. Hancock;( 2000) " bayesian Graph Edit Distance ".

[35]. Andrea Torsello; Edwin R. Hancock; (2003)." Computing approximate tree edit distance using relaxation labeling".

[36] . Kaspar Riesen, Stefan Fankhauser and Horst Bunke2 ; (2006)

" Speeding up Graph Edit Distance Computation with a Bipartite Heuristic".

[37] . *André R.Backes and Odemir M.Bruno; (2004). "Shape Skeleton Graph".*

[38]. Thomas B. Sebastian, Member, IEEE, Philip N. Klein, and Benjamin B. Kimia, (2004) "Recognition of Shapes by Editing Their Shock Graphs".

[39]. Kaleem Siddiqi , Ali Shokoufandeh And Sven J.Dickinson Steven W. zucker; (1999)

" Shock Graphs and Shape Matching".

[40]. André R. Backes1 and Odemir M. Bruno2; ;(2009) " A Graph-Based Approach for Shape Skeleton Analysis".

[41]. STEVENW.ZUCKER ; (1997). *"Shock Graphs and Shape Matching".*

[42]. Nooritawati Md Tahir, Aini Hussain, Salina Abdul Samad, and Hafizah Husain; (2006)" Shock Graph for Representation and Modeling of Posture".

- [43]. Hamidreza Zaboli, Mohammad Rahmati and Abdolreza Mirzaei; ( 2008).  
" Shape Recognition by Clustering and Matching of Skeletons".
- [44]. Glynn Robinson, Lewis Griffin & Alan Colchester ; (1991)."The Delaunay Voronoi Selection Graph: a Method for Extracting Shape Information from 2-D Dot-Patterns with an Extension to 3-D".
- [45]. R. L. ogiewicz and o.k ubler. (1995). " Hierarchic Voronoi Skeletons ".
- [46]. [www.rsclass.gis.umn.edu/documents/36.%20%20Intro%20to%20GPS-6.pdf](http://www.rsclass.gis.umn.edu/documents/36.%20%20Intro%20to%20GPS-6.pdf)
- [47]. Weisheng Si and Albert Y. Zomaya; (2005)" Midpoint Routing algorithms for Delaunay Triangulations".
- [48]. Lindsay I Smith. ( 2009) , " Delaunay Triangulations"32(12) .
- [49]. Yi Xiao and Hong Yan; (2006) , "Facial Feature Location with Delaunay Triangulation/Voronoi Diagram Calculation ".
- [50]. Manuel Abellanas Prosenjit Bosez Jesus Garc<sup>3</sup>ax Ferran Hurtado Mariano Nicolas Pedro A. Ramos; (2005) . "On Properties of Higher Order Delaunay Graphs with Applications".
- [51]. Lindsay I Smith, (2002); "A tutorial on Principal Components Analysis".
- [52]. Tanaya VMandal and Q. M. Jonathan -(2008) , "Face Recognition using Curvelet Based PCA-© IEEE" .
- [53] . B. Messmer and H. Bunke, - (1999) . " Pattern Recognition "32(12), 1979
- [54]. Sirovich, L., and Kirby, M., (1987) . "Low-dimensional procedure for the characterization of human faces", J. Opt. Soc. Am. A, 4, 3 ; pp. 519-524
- [55]. Sameer A.Nene and Shree K. Nayar and Hiroshi Murase ;(2000) " Columbia Object Image Library".
- [56]. Kyungnam Kim Department of Computer Science University of Maryland, College - Park. (1997 );" Face Recognition using Principle Component Analysis Reson" .



## ب) منابع فارسی

[57] رحیمی شعرفاف - صادق، (۱۳۸۷). "اهمیت و شیوه بکارگیری ماتریسها و کاربرد آنها در

تئوری گراف"

[58] الیاسی گرجی - اعظم ، ( ۱۳۸۷ ) " کاربرد ماتریس لاپلاسین در تحلیل پایداری سازه های

با تقارن به فرم دو وسه ". دانشکده ریاضی

[59] فائزه توتونیان - کتاب داتا، ( ۱۳۸۸ ) " جبر خطی و کاربردها " - انتشارات دانشگاه فردوسی

مشهد.

[60] صادق رحیمی شعرفاف ، الهام علیمردانی ، ( ۱۳۸۸ ) " تحقیق در کاربرد های مقادیر ویژه و

تعیین چند کران برای شعاع طیفی گراف " چهارمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران - دانشگاه

زاهدان.

[61] سیدعلیرضا سیدین ، بهروزثقفی خادم ، حبیب رجبی مشهدی، ( ۱۳۸۵ ) " استفاده از الگوریتم

ژنتیک در حل مسئله تطبیق غیر دقیق زیر گراف به منظور استفاده در تشخیص شیء " چهارمین

کنفرانس ماشین بینایی و پردازش تصویر ایران - فردوسی مشهد.

[62] بنفشه اسدی ، الهام عبد نیکویی پور، ( ۱۳۸۸ ). " تشخیص شناسه مصدوم در مسابقات روبات

امدادگر خودکار با استفاده از انطباق اسکلت شکل ".

[63] محسن مشکی، محمود فتحی، ( ۱۳۸۶ ) " یک روش اسکلت یابی منعطف برای استخراج

اسکلت سطح خاکستری از تصاویر دو سطحی تفکیک پایین " سیزدهمین کنفرانس ملی انجمن

کامپیوتر ایران جزیره کیش، خلیج فارس، ایران .

[64] گلناز حبیبی . محمد تقی بهشتی و الیپس مسیحی، (۱۳۸۶) "برنامه ریزی مسیر روبات متحرک با استفاده از نامساویهای ماتریسی خطی و برنامه ریزی اعداد صحیح صفرو یک "هشتمین کنفرانس سیستمهای هوشمند-دانشگاه فردوسی مشهد.

[65] سیدمحسن محمدی تاکانی، (۱۳۸۴). "روشهای پیش پردازش داده ها و تشخیص الگو".

[66] رافائل سی . گونزالس -ریچاردای -ترجمه مرتضی خادمی - (۱۳۸۵). "پردازش تصویر"

انتشارات دانشگاه فردوسی .

[67] محمدشهرام معین.ابراهیم روزگار، (۱۳۸۶). " بهینه سازی روش SVM برای بررسی هویت با استفاده از تصویر چهره

واژه نامه

## واژه نامه فارسی به انگلیسی

طیف

.....  
spectral

..... هم طیفی  
cospectral

..... شعاع طیفی  
radius spectral

فاصله

.....  
distance

..... فاصله ویرایش  
edite distance

cost..... هزینه

positive semidefinite..... نیمه معین مثبت

bound..... کران

upper bound ..... کرن بالا

lower bound..... کران پایین

graph..... گراف

compont..... مولفه

|                            |                       |
|----------------------------|-----------------------|
| match.....                 | تطابق.....            |
| vertex.....                | رأس.....              |
| degree.....                | درجه.....             |
| edge.....                  | یال.....              |
| path.....                  | مسیر.....             |
| combination.....           | ترکیب.....            |
| laplacian matrix .....     | ماتریس لاپلاسین.....  |
| heat kernal matrix .....   | ماتریس هت کرنل.....   |
| wight.....                 | وزن.....              |
| permitation.....           | جایگشت.....           |
| Euclidean distance.....    | فاصله اقلیدسی.....    |
| Veronoi.....               | ورونویی.....          |
| graph delauny.....         | گراف دلونی.....       |
| Delauny Triangulation..... | مثلث بندی دلونی.....  |
| isomorphic.....            | یکریخت.....           |
| embedding.....             | نشانندن.....          |
| Covariance matrix.....     | ماتریس کوواریانس..... |
| Legal Triangulation.....   | مثلث بندی مجاز.....   |

|                                   |                            |
|-----------------------------------|----------------------------|
| topology.....                     | توپولوژی.....              |
| dual.....                         | دوگان.....                 |
| Adje.....                         | لبه.....                   |
| skeleton.....                     | اسکلت.....                 |
| gemetric.....                     | هندسه.....                 |
| Medial Axis.....                  | محور میانی.....            |
| nearest neighbor.....             | نزدیکترین همسایگی.....     |
| connect.....                      | همبند.....                 |
| root.....                         | ریشه.....                  |
| Tangent.....                      | مماس.....                  |
| graph shock.....                  | گراف شاخ.....              |
| pattern.....                      | الگو.....                  |
| noise.....                        | نویز.....                  |
| featur vector.....                | بردار ویژگی.....           |
| Face Recognition.....             | تشخیص چهره.....            |
| Combination.....                  | ترکیب.....                 |
| Principal component analysis..... | آنالیز مولفه های اصلی..... |
| Multidimensional scaling.....     | مقیاس گذاری چند بعدی.....  |

Branch.....انشعاب

Lattice.....شبکه

Orthogonal.....متعامد

### واژه نامه انگلیسی به فارسی

spectral.....طیف

cospectral.....هم طیفی

radius spectral.....شعاع طیفی

distance.....فاصله

edite distance.....فاصله ویرایش

cost.....هزینه

positive semidefinite.....نیمه معین مثبت

bound.....کران

upper bound.....کرن بالا

lower bound.....کران پایین

graph.....گراف

compont.....مولفه

|                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| تطابق.....           | match                 |
| کلاس بندی.....       | Classification        |
| رأس.....             | vertex                |
| درجه.....            | degree                |
| نرمال.....           | normalised            |
| مسیر.....            | path                  |
| ترکیب.....           | combination           |
| ماتریس لاپلاسین..... | matrix laplacian      |
| ماتریس هت کرنل.....  | matrix heat kernal    |
| وزن.....             | wight                 |
| جایگشت.....          | permutation           |
| فاصله اقلیدسی.....   | Euclidean distance    |
| ورونویی.....         | Veronoi               |
| گراف دلونی.....      | graph delauny         |
| مثلث بندی دلونی..... | Delauny Triangulation |
| انشعاب.....          | branch                |
| نشانندن.....         | embedding             |
| کوواریانس.....       | covarince             |



|                     |                         |
|---------------------|-------------------------|
| Legal Triangulation | ..... مثلث بندی مجاز    |
| topology            | ..... توپولوژی          |
| dual                | ..... دوگان             |
| skeleton            | ..... اسکلت             |
| gemetric            | ..... هندسه             |
| Medial Axis         | ..... محور میانی        |
| nearest neighbor    | ..... نزدیکترین همسایگی |
| connect             | ..... همبند             |
| root                | ..... ریشه              |
| Tangent             | ..... مماس              |
| graph shock         | ..... گراف شاک          |
| pattern             | ..... الگو              |
| noise               | ..... نویز              |
| Feature vector      | ..... بردار ویژگی       |
| Face Recognition    | ..... تشخیص چهره        |
| Picxel              | ..... پیکسل             |
| Adje                | ..... لبه               |

## **Abstract**

A great deal of attention has been paid to spectral graphs in recent years because spectral graphs play an important role in discovering the structure of graphs. The set of eigenvalue of graphs is named spectral graph. This subject is a part of algebraic theory of graphs and is more related to linear and matrix algebra theoretically. The theory of spectral graphs has applications in discovering the structure of graphs as well as other sciences such as chemistry, physics, electrical engineering, development and computer.

In this thesis, it has been attempted to study the subjects related to spectral graphs, and to examine their application in computer science. In the first chapter, definitions and elementary concepts are dealt. In the second chapter, spectral characteristics of graphs and bounds of spectral sets are examined. In the third chapter, applications of spectral graphs in the subject of spectral embedding of graphs are examined. In the fourth chapter, application of spectral graph in the question of analysis principal components is examined. In the fifth chapter, application of spectral graph in face recognizing is examined.

**Keywords:** spectral graph, cospectral, principal component analysis algorithm, multi dimensional scaling, shock graph, Delaunay graph



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematic

## **Study of spectral and their application**

**Elham Alimardani**

Supervisor:

**Dr.sadegh Rahimi Sharbaf**

Advisor:

**Dr. Hojat Ahsani Thehrani**

November 2010