دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

روش مستقیم ساختن قوانین پایستگی

پاییزه مهدوی هروانی

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

۱۳۹۴/۰۵/۰۵

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است. به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم. به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم. که هر چه آموختم در مکتب عشق شما آموخته‌ام و هرچه بکوشم قطره‌ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما را آوردی. گران سنگ‌تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید...

بوسه بر دستان پر مهرتان...

سپاس‌گزاری...

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر سید رضا حجازی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کار ساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از پدر و مادر عزیز، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان‌نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم؛ سپاس‌گزاری نمایم.
شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.
همچنین بجاست که از اساتید گرامی، آقایان دکتر ابراهیم هاشمی، دکتر حسن حسن آبادی و دکتر هادی پسندیده که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند نهایت سپاس‌گزاری را داشته و از نظرات سودمندشان کمال تشکر را دارم.

پاییزه مهدوی هروانی
۱۳۹۴/۰۵/۰۵

تعهدنامه

اینجانب **پاییزه مهدوی هروانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **روش مستقیم ساختن قوانین پایستگی** ، تحت راهنمایی **دکتر سید رضا حجازی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " University of Shahrood " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

پاییزه مهدوی هروانی
۱۳۹۴/۰۵/۰۵

چکیده

در این پایان‌نامه، روش تقارن لی را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) به منظور یافتن انواع گروه‌های تقارنی، جواب‌های ناوردا، جواب‌های دقیق و جواب‌های عمومی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین روش چگونگی ساخت قوانین پایستگی موضعی با استفاده از روش مستقیم را برای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل داده‌شده نشان می‌دهیم، و این عملیات جامع مبتنی بر پیدا کردن اولین مضارب قوانین پایستگی است که نقش اساسی در این پایان‌نامه ایفا می‌نمایند و در پایان ارتباط بین ضرایب تابعی قوانین پایستگی را با تقارن‌های نقطه‌ای PDEها مورد مطالعه قرار خواهیم داد که به کمک آن می‌توان قوانین پایستگی جدید از قوانین پایستگی قبلی به‌دست آورد.

کلمات کلیدی: *معادلات دیفرانسیل، گروه تبدیلات لی، تقارن لی، قوانین پایستگی موضعی، ضرایب موضعی*

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. S. Reza Hejazi, Elaheh Saberi and Paeezeh Mahdavi, (2015), *Lie Symmetry Method for Solutions of Differential Equations with Applications in Physics*, Cumhuriyet University Faculty of Science Journal (CSJ), Vol. 36, No: 3 Special Issue , 2223-2232.

فهرست مطالب

مقدمه

در اواخر قرن نوزدهم سوفوس لی[1] حل معادلات دیفرانسیل را توسط گروه‌های تقارنی و ناورداهای تولیدشده توسط آن‌ها مورد بررسی قرار داد، ایده این کار از آن‌جا شکل گرفته بود که گالوا[2] از گروه جبری برای حل معادلات جبری استفاده کرده بود. این روش که مبتنی بر انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل است لی را بر آن داشت تا توان اعجاب‌انگیز خود را صرف گسترش نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل بر اساس مفهوم گروه‌های لی کند. زیرا این گروه‌ها علاوه بر کاربردهایی که در ریاضیات محض و کاربردی دارند در فیزیک، مهندسی و سایر علوم پایه نیز به کار گرفته می‌شوند. شاخه‌هایی چون توپولوژی جبری، هندسه دیفرانسیل، نظریه‌ی ناورداها، نظریه‌ی انشعاب، توابع خاص، آنالیز عددی، نظریه‌ی کنترل، مکانیک کوانتوم و کلاسیک، نسبیت و ... به شدت با گروه‌های لی و کاربردهای آن سروکار دارند و هر کس که به یکی از این علوم اشراف داشته باشد جالب است که بداند که منبع اصلی کاربرد گروه‌های لی در این رشته‌ها معادلات دیفرانسیل است. البته شایان ذکر است که گروه‌های لی در بیشتر مواقع با دیدگاه محض خود در ریاضیات به کار برده نمی‌شوند، بلکه گاهی اوقات تحت عنوان گروه تقارنی یک دستگاه دینامیکی از معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند که بسیاری از ویژگی‌های ریاضی آن مثل حل‌پذیری، نیم- سادگی و ... به طور مستقیم و غیرمستقیم رفتار دستگاه را تحلیل می‌کنند.

بنیاد کاربرد گروه‌های لی بر عمل آن روی فضای حالت فیزیکی مفروض است که در بیشتر مواقع این عمل غیرخطی و موضعا حول عضو همانی گروه می‌باشد. کاربرد گروه‌های لی در معادلات دیفرانسیل نخستین بار توسط لی و نوتر[3] بنیان‌گذاری شد و الی کارتان[4] اولین بار آن را به سبک امروزی خود در هندسه دیفرانسیل معنا بخشید. از آن به بعد تلاش‌های گسترده‌ای در تعمیم کاربرد گروه‌های لی انجام شد به‌طوری که افرادی

[1] ماریوس سوفوس لی Marius Sophus Lie (دسامبر ۱۸۴۲ - ۱۸ فوریه ۱۸۹۹ میلادی) ریاضی‌دانی نروژی بود که به‌خاطر فعالیت‌هایش در زمینه تقارن و گروه لی مشهور است.

[2] اورایست گالوا Évariste Galois (۲۵ اکتبر ۱۸۱۱– ۳۱ مه ۱۸۳۲) ریاضی‌دان و انقلابی فرانسوی بود. گالوا از پیشگامان مطالعه نظریه گروه‌ها است و با کارهای او بود که نقطه عطفی در جبر ایجاد شد و محاسبات اهمیت خود را از دست دادند و به‌جای آن‌ها مفاهیم و ساختارهایی همانند گروه حلقه و میدان اهمیت پیدا کردند. از دستاوردهای مهم نظریه گالوا حل چند مساله‌ی مشهور بود که از زمان‌های دور مطرح بودند. یکی از آن‌ها اثبات این مطلب است که حل جبری کلی (به کمک رادیکال‌ها) برای چندجمله‌ای‌های درجه ۵ و بالاتر وجود ندارد.

[3] آمالی امی نوتر Amalie Emmy Noether (زاده ۲۳ مارس ۱۸۸۲ - درگذشته ۱۴ آوریل ۱۹۳۵) ریاضیدان با نفوذ آلمانی است که به‌واسطه سهم ممتازی که در جبر انتزاعی و فیزیک نظری داشت شناخته شده است. پاول الکساندروف، آلبرت انیشتین، ژان دیدونه، هرمان ویل، ونوربرت وینر از او به‌عنوان مهمترین محقق زن در تاریخ ریاضیات یاد کرده‌اند. تحقیقات و دستاوردهای او و تغییراتی بنیادین در تئوری حلقه‌ها، تئوری میدان‌ها و جبر ایجاد کرد. در زمینه مباحث فیزیک نیز، نوتر فرضیه‌ای را ارائه کرد (تئوری نوتر) که توانست ارتباط بنیادین میان تقارن و قانون پایستگی را توضیح دهد.

[4] الی جوزف کارتان Elie Joseph Cartan

همچون اووزیاناکوف مدرسه‌ای در این زمینه در اتحاد جماهیر شوروی بنا نهاد.

اگر خواسته باشیم به‌طور اجمالی در مورد گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل صحبت کنیم، می‌توان گفت که این گروه‌ها شامل تبدیلاتی هستند که جواب‌های دستگاه را به هم تبدیل می‌کنند. از دیدگاه لی تقارن‌ها، تبدیلاتی هندسی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل کرده و روی جواب‌های دستگاه با تبدیلاتی که روی گراف آن‌ها اعمال کرده، عمل می‌کند.

داشتن گروه‌های تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیت‌های بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان به طبقه‌بندی جواب‌های معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. این رده‌بندی این‌گونه است که هر دو جوابی را در یک دسته در نظر می‌گیریم که به وسیله برخی از مولدهای گروه تقارن قابل تبدیل به هم باشند. از دیگر استفاده‌هایی که از این گروه‌ها می‌شود آن است که معادلات دیفرانسیل را می‌توان بر اساس پارامترها یا تابعی دلخواه طبقه‌بندی کرد.

از دیگر کاربردهای گروه تقارن، قوانین پایستگی در فیزیک است. نوتر در سال ۱۹۱۸ دو قضیه مهم را ارائه داد که ارتباط بین گروه‌های تقارن یک انتگرال تغییرات با ویژگی‌های معادلات اویلر-لاگرانژ را نشان می‌داد. او در قضیه اول نشان داد که چگونه گروه‌های تقارن تغییرات یک-پارامتری منجر به تولید قوانین پایستگی برای معادلات اویلر-لاگرانژ می‌شود. مثلا قوانین پایستگی انرژی یک مسئله ناوردایی تحت تقارن انتقال نسبت به زمان است در حالی که پایستگی گشتاور خطی و زاویه‌ای یک مسئله ناوردایی تحت تبدیلات انتقال و دوران است [۲۷].

در مطالعه معادلات دیفرانسیل قوانین پایستگی دارای فواید زیادی می‌باشند. آن‌ها کمیت‌های فیزیکی از قبیل، جرم، انرژی، تکانه، تکانه زاویه‌ای، همچنین بار الکتریکی و ثابت‌های حرکت را توضیح می‌دهند. آن‌ها برای تحقیق انتگرال‌پذیری نگاشت‌های خطی و برای اثبات وجود و یکتایی جواب‌ها مهم هستند، همچنین برای آنالیز پایداری و رفتار عمومی جواب‌ها استفاده می‌شوند. به‌علاوه، آن‌ها نقش اساسی در توسعه روش‌های عددی دارند و نقش مهمی در نقطه شروع یافتن دستگاه‌های وابسته غیرموضعی و متغیرهای پتانسیلی برعهده دارند.

قانون پایستگی یک معادله ریاضی است که چگونگی تاثیر یک کمیت توسط شار را بیان می‌کند. دلایل زیادی برای محاسبه چگالی و شارهای یک دستگاه PDE وجود دارد. اول این‌که، کدامیک از کمیت‌های فیزیکی در یک دستگاه که به کمک PDE بیان شده است، ثابت می‌ماند. قوانین پایستگی در مطالعه خواص کیفی PDEها، مانند ساختار همیلتنی و عملگرهای کاهشی مفید هستند [۵]. وجود تعداد قابل توجهی قانون پایستگی بیانگر انتگرال‌پذیری کامل دستگاه می‌باشد [۲۰].

روش‌های مختلفی برای یافتن قوانین پایستگی وجود دارد از قبیل قضیه نوتر، روش ضرایب تابعی، روش مستقیم (که در این پایان‌نامه از این روش استفاده شده است)، رابطه بین مولدهای تقارن لی-بکلاند و PDEها و ... که علاقه‌مندان می‌توانند به مراجع [۲۷، ۱۵، ۱۱، ۲۴] رجوع کنند.

در این پایان‌نامه در فصل اول سعی بر آوردن مفاهیم اساسی هندسه از قبیل منیفلدها، گروه‌های لی و نحوه‌ی عمل آن‌ها، جبرهای لی و ... شده است. در فصل دوم مفهوم فضای جت و دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان شده و همچنین نحوه‌ی چگونگی یافتن تقارن‌ها به همراه چند مثال آورده شده است. در فصل سوم روش اساسی چگونگی ساخت قوانین پایستگی موضعی را برای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل داده

شده را همراه چند مثال می‌آوریم که این عملیات جامع مبتنی بر پیدا کردن اولین مضارب قوانین پایستگی است که نقش اساسی در این پایان‌نامه ایفا می‌نمایند و در پایان ارتباط بین ضرایب تابعی قوانین پایستگی را با تقارن‌های نقطه‌ای PDEها مورد مطالعه قرار خواهیم داد که به کمک آن می‌توان قوانین پایستگی جدید از قوانین پایستگی قبلی به‌دست آورد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ منیفلد

منیفلدها کاربرد زیادی در ریاضیات دارند. اطلاعات زیبا و ژرفی از ساختار و خواص بسیاری از فضاهای هندسی را می‌توان با بهره‌گیری از تعداد ناچیز از ابزارهای ساخته شده در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به‌صورت شهودی به‌دست آورد.

تعریف ۱.۱.۱. فضای توپولوژیک M را یک منیفلد توپولوژیکی n-بعدی گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$ به‌ترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز $U, V \subset M$ باشند، به‌طوری که $U \cap V = \varnothing$
- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ای شمارا داشته باشد.
- M به‌طور موضعی اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشند.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ را هموار (C^∞ یا دیفرانسیل‌پذیر) می‌گوییم، هرگاه مشتقات جزئی F از هر مرتبه موجود و پیوسته باشد.
اگر $F^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ نیز هموار باشند، آن‌گاه F دیفئومورفیسم است.

فرض کنید$\{U_\alpha\}_\alpha$ گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز منیفلد M و V_α زیرمجموعه‌های باز همبند از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ همئومورفیسم باشند، آن‌گاه $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ را چارت مختصاتی روی منیفلد M می‌نامیم.
حال اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت مختصاتی روی منیفلد M باشد، نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V),$$

را نگاشت گذر از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به‌طور هموار سازگار می‌نامیم، هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه‌ی $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ متشکل از چارت‌های منیفلد توپولوژیکی n-بعدی M را یک اطلس برای منیفلد M می‌گوییم، هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به‌طور هموار سازگار باشند و دامنه اعضای $\mathcal{A}$ ، M را بپوشانند.

تعریف ۴.۱.۱. یک ساختار هموار روی منیفلد n-بعدی توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی n-بعدی مجهز به یک ساختار هموار، یک منیفلد هموار نام دارد و با $(M, \mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار n-بعدی با چارت مختصاتی همانی $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})$ می‌باشد.

مثال ۶.۱.۱ (گراف توابع پیوسته)**.** فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد و تابع $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ پیوسته باشد. گراف f را با نماد $\Gamma(f)$ نشان می‌دهند که زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset U \times \mathbb{R}^k,$$

نگاشت تصویر $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ که یک نگاشت پیوسته و پوشا است را در نظر بگیرید و $\varphi : \Gamma(f) \longrightarrow U$ تحدید نگاشت π_1 نسبت به $\Gamma(f)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(x, y) = x, \qquad (x, y) \in \Gamma(f),$$

φ پیوسته است، چون تحدید یک تابع پیوسته است. همچنین همئومورفیسم است چون $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$ پیوسته است. بنابراین $\Gamma(f)$ یک منیفلد توپولوژیکی از بعد n است و $(\Gamma(f), \varphi)$ چارت مختصاتی آن می‌باشد.

مثال ۷.۱.۱. کره S^n یک منیفلد توپولوژیکی n-بعدی است.
هاسدورف و شمارای نوع دوم بودن به S^n ارث می‌رسد چون‌که $\mathbb{R}^{n+1}$ یک منیفلد توپولوژیکی $(n+1)$-بعدی است و S^n زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^{n+1}$ است. حال تعریف می‌کنیم:

$$U_i^+ \cap S^n = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^i > 0\},$$

به‌طور مشابه $U_i^- \cap S^n$ زیرمجموعه $\mathbb{R}^{n+1}$ است که i امین مولفه‌اش منفی است یعنی $x^i < 0$. فرض می‌کنیم:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \parallel x \parallel < 1\},$$

یک گوی باز در $\mathbb{R}^n$ باشد. تابع زیر

$$f : B^n \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(u) = \sqrt{1 - \parallel u \parallel^2},$$

پیوسته است. واضح است که $u = (u^1, \ldots, u^n)$ است. پس برای هر $i = 1, 2, \ldots, n+1,$

$$\begin{aligned} x^i &= \sqrt{1-(x^1)^2-\cdots-(x^{i-1})^2-(x^{i+1})^2-\cdots-(x^{n+1})^2} \\ &= f(x^1,\ldots,\hat{x^i},\ldots,x^{n+1}) \in S^n \cap U_i^+, \\ x^i &= -f(x^1,\ldots,\hat{x^i},\ldots,x^{n+1}) \in S^n \cap U_i^-. \end{aligned}$$

است. بنابراین هر زیرمجموعه $U_i^{\mp}\cap S^n$ موضعا اقلیدسی از بعد n است، نگاشت $\phi_i^{\mp} : U_i^{\mp}\cap S^n \longrightarrow B^n$ با ضابطه $\phi_i^{\mp}(x^1,\ldots,x^{n+1}) = (x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots,x^{n+1})$، گرافی برای S^n است. چون‌که هر نقطه S^n درون حداقل یکی از چارت‌هاست، لذا $2n+2$ تا چارت دارد. لذا S^n یک منیفلد توپولوژیکی n- بعدی است.

تعریف ۸.۱.۱. نگاشت $F : M \longrightarrow N$ بین دو منیفلد هموار M و N را هموار گوییم هرگاه هر نقطه از M مانند p درون یک چارت مثل (U,φ)، و تصویر آن یعنی $F(p)$ درون یک چارت مثل (V,ψ) باشد به‌طوری که نگاشت زیر

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V),$$

هموار باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض می‌کنیم $F : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار از منیفلد m- بعدی M به منیفلد n- بعدی N باشد. رتبه F در نقطه $x=(x^1,\ldots,x^m)$ برابر با رتبه‌ی ماتریس ژاکوبین $n\times m$

$$J_F = \Big(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\Big), \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n.$$

درنقطه x که $y=F(x)$ در هر مختصات موضعی مناسب در همسایگی x بیان می‌شود. نگاشت F روی زیرمجموعه باز $S\subset M$ دارای رتبه ماکسیمال است. اگر برای هر $x\in S$ بعد F برابر بزرگترین مقدار ممکن (حداکثر n یا m) باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. نگاشت خطی $\mathbf{v} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $a\in\mathbb{R}^n$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{v}(f\cdot g)(a) = g(a)\cdot \mathbf{v}f(a) + f(a)\cdot \mathbf{v}g(a),$$

قرار می‌دهیم:

$$T_a\mathbb{R}^n = \{\mathbf{v} \mid \text{یک عملگر مشتق در } \mathbb{R}^n \text{ است.}\ \mathbf{v}\},$$

به $T_a\mathbb{R}^n$ فضای مماسی $\mathbb{R}^n$ گفته می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. عملگر خطی $\mathcal{D}_{\mathbf{v}}|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ را به شکل

$$\mathcal{D}_{\mathbf{v}}|_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} f(a+t\mathbf{v}), \tag{۱.۱}$$

تعریف می‌کنیم. به رابطه (۱.۱) مشتق جهتی در نقطه a در راستای $\mathbf{v}$ گفته می‌شود.

گزاره ۱۲.۱.۱. *نگاشت $T_a\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n_a$ با ضابطه $\mathbf{v}_a \longmapsto \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a$ یک ایزومورفیسم است.*

برهان. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\mathbf{v}_a \longmapsto \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a$ خطی است. نشان می‌دهیم که یک به یک است: فرض می‌کنیم که $\mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a$ یک مشتق صفر است. $\mathbf{v}_a = v^i e_i\big|_a$ را به‌صورت پایه‌های استاندارد نشان می‌دهیم، f تابعی هموار است که j-امین مختصاتش را به‌صورت $x^j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم که هموار است. حال داریم:

$$0 = \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a(x^j) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)\big|_{x=a} = v^i, \tag{۲.۱}$$

می‌دانیم اگر $i = j$ آن‌گاه $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = 1$ در غیر این صورت برابر صفر می‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{v}_a$ یک میدان برداری صفر است.

برای اثبات پوشایی فرض می‌کنیم که $\mathbf{w}$ یک میدان برداری دلخواهی در $T_a\mathbb{R}^n$ باشد. می‌دانیم که $\mathbf{v} = v^i e_i$ به‌صورت استاندارد نمایش می‌دهیم که $v^1, \ldots, v^n$ توابع حقیقی مقدار هستند که طبق (۲.۱)، $\mathbf{w}(x^j) = v^i$. کافی است نشان دهیم که $\mathbf{w} = \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a$.

فرض می‌کنیم که f تابع حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}^n$ باشد. طبق قضیه تیلور داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) \\ &+ \textstyle\sum_{i,j=1}^n (x^i - a^i)(x^j - a^j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a + t(x-a))dt. \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

در (۳.۱) چون دو تابع هموار $(x^i - a^i)$ و $(x^j - a^j)$ در نقطه $x = a$ به صفر میل می‌کنند بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}f &= \mathbf{w}\left(f(a)\right) + \textstyle\sum_{i=1}^n \mathbf{w}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i)\right) \\ &= 0 + \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\left(\mathbf{w}(x^i) - \mathbf{w}(a^i)\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) v^i = \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a f. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱۳.۱.۱ *فرض می‌کنیم* $(x^1, \ldots, x^n)$ *مختصات استاندارد بر* $\mathbb{R}^n$ *باشد و* a *نقطه‌ای در* $\mathbb{R}^n$ *باشد. در این صورت بردارهای مماس* $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_a\}$ *پایه‌ای برای فضای مماس* $T_p\mathbb{R}^n$ *می‌باشد.*

برهان. اگر قرار دهیم $\mathbf{v}_a = \sum_{i=1}^n v^i e^i|_a$ آن‌گاه طبق رابطه (۱.۱) داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}\big|_a f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big|_{t=0} f(a + t\mathbf{v}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big|_{t=0} f(a^1 + tv^1, \ldots, a^n + tv^n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(a)\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{dt}} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(a)\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{dt}} \\ &= v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \cdots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a), \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(a) \longmapsto \sum_{i=1}^n v^i e^i|_a$. بنابراین مجموعه $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_a\}$ یک پایه استاندارد برای $T_a\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهد. □

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و $p \in M$ باشد. عملگر خطی $\mathbf{v} : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه p می‌گوییم هرگاه در شرط زیر صدق کند.

$$\mathbf{v}(f \cdot g)(p) = g(p) \cdot \mathbf{v}(f)(p) + f(p) \cdot \mathbf{v}(g)(p).$$

قرار می‌دهیم

$$T_pM = \{\mathbf{v} : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{است.}\ p \in M\ \text{عملگر مشتق در نقطه}\ \mathbf{v}\}$$

در این صورت به T_pMفضای مماسی منیفلد M در نقطه $p \in M$ گفته می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض می‌کنیم M ، N منیفلدهای هموار و $F : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار بین آن‌ها باشد. به ازای هر $p \in M$ نگاشت

$$\mathrm{d}F_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,$$

را نگاشت دیفرانسیل F می‌نامیم که به ازای هر $f \in C^{\infty}(N), \mathbf{v} \mid_p \in T_pM,$ با ضابطه

$$\mathrm{d}F(\mathbf{v} \mid_p) f(y) = \mathbf{v}\big(f \circ F\big)(p), \qquad y = F(p),$$

تعریف می‌شود. نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نمایش می‌دهند و آن را نگاشت پیش‌برنده می‌نامند.

گزاره ۱۶.۱.۱. *اگر M ، N ، $p \in N$ و $F : N \longrightarrow M$ و $G : M \longrightarrow P$ نگاشت‌های هموار بین منیفلدها و $p \in N$ ، آن‌گاه:*

الف) $\mathrm{d}(G \circ F)_p = \mathrm{d}G_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p$

ب) *دیفرانسیل نگاشت همانی $\mathrm{Id}_M : M \longrightarrow M$ در هر نقطه $p \in M$ ای، نگاشت همانی $\mathrm{Id}_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_pM$ است.*

پ) *اگر F دیفئومورفیسم باشد، بنابراین $\mathrm{d}F_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ ایزومورفیسم است و*
$$\mathrm{d}(F^{-1})_{F(p)} = (\mathrm{d}F_p)^{-1}.$$

برهان. [۲۵]. □

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد و U یک زیرمجموعه باز آن باشد. به U یک زیرمنیفلد باز M گوییم، هرگاه U با ساختار هموار M یک منیفلد باشد.

قضیه ۱۸.۱.۱. *اگر M یک منیفلد هموار، U یک زیرمجموعه باز M و $i : U \longrightarrow M$ نگاشت شمول باشد. آن‌گاه برای هر p نگاشت $\mathrm{d}i : T_pU \longrightarrow T_pM$ ایزومورفیسم است.*

برهان. [۲۵]. □

گزاره ۱۹.۱.۱. *اگر M یک منیفلد m- بعدی باشد آن‌گاه فضای مماسی T_pM نیز m- بعدی است.*

برهان. نقطه $p \in M$ را در نظر می‌گیریم. چارت مختصاتی (U,φ) شامل نقطه p را در نظر می‌گیریم. چون که φ یک دیفئومورفیسمی از U به زیرمجموعه باز $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ است. طبق قسمت سوم گزاره ۱.۱.۱۶، $d\varphi_p$ ایزومورفیسمی بین T_pU و $T_{\varphi(p)}\tilde{U}$ است. طبق قضیه ۱.۱.۱۸ داریم: $T_pM \cong T_pU$ و $T_{\varphi(p)}\tilde{U} \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ و لذا

$$\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n.$$

□

تعریف ۱.۱.۲۰. اجتماع مجزای

$$\bigsqcup_{p\in M} T_pM = TM,$$

را کلاف مماسی منیفلد M می‌گوییم.

قضیه ۱.۱.۲۱. *اگر M یک منیفلد هموار m-بعدی باشد آن‌گاه TM یک منیفلد هموار $2m$-بعدی است به‌طوری که نگاشت $\pi : TM \longrightarrow M$ با ضابطه $p \longmapsto (p,x)$ هموار است.*

برهان. فرض می‌کنیم (U,φ) با مختصات $x = (x^1,\cdots,x^m)$ یک چارت برای M باشد. نگاشت $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^m$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i|_p}\Big) = \Big(x^1(p),\cdots,x^m(p),X^1,\cdots,X^m\Big)$$

می‌توان دید که:

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x^1,\cdots,x^m,X^1,\cdots,X^m) = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}$$

پس $\tilde{\varphi}$ دوسویی است. بنابراین $\Big(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi}\Big)$ یک چارت روی TM تعریف می‌کند. اگر (V,ψ) یک چارت روی M باشد آن‌گاه مطابق تعریف بالا $\Big(\pi^{-1}(V),\tilde{\psi}\Big)$ نیز یک چارت روی TM است.

$$\tilde{\varphi}\left(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\right) = \varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m},$$
$$\tilde{\psi}\Big(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\Big) = \psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m},$$

اگر $\tilde{x} = (\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^m)$ مختصات ψ باشد داریم:

$$\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^m,$$
$$\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}(x^1,\cdots,x^m,X^1,\cdots,X^m) = \Big(\tilde{x}^1(x),\cdots,\tilde{x}^m(x)$$
$$,\textstyle\sum_{j=1}^m \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^j}(x)X^j,\cdots,\sum_{j=1}^m \frac{\partial\tilde{x}^m}{\partial x^j}(x)X^j\Big).$$

چون مولفه‌های آن هموار است پس $\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ هموار است

چون M شمارای نوع دوم است بنابراین اگر $\{U_i\}$ یک پوشش شمارا برای M باشد آن‌گاه $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ نیز یک پوشش شمارا برای TM است، اگر X_p و Y_q دو عضو شمول در یک تار از TM باشد چون M هاسدورف است بازهایی مجزا مانند U و V بر M شامل p و q وجود دارند به‌طوری که $\pi^{-1}(U)$ و $\pi^{-1}(V)$ دو همسایگی مجزا در TM شامل X_p و Y_q هستند. حال طبق رابطه

$$\varphi\circ\pi\circ\tilde{\varphi}^{-1}\Big(x^1,\cdots,x^m,X^1,\cdots,X^m\Big) = (x^1,\cdots,x^m)$$

نتیجه می‌شود که TM یک منیفلد هموار $2m$ -بعدی است.

$\square$

تعریف ۲۲.۱.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد. یک خم (منحنی) هموار در M نگاشتی مانند $\alpha:[a,b]\longrightarrow M$ است به‌طوری که α تابعی هموار است.

لم ۲۳.۱.۱. *فرض کنید M یک منیفلد هموار و $p\in M$ باشد. اگر $X\in T_pM$ ، آن‌گاه X مماس بر یک خم هموار در M مانند*

$$\alpha:[-a,a]\longrightarrow M,$$

است به‌طوری که در شرط زیر صدق کند.

$$\alpha(0)=p, \qquad\qquad \alpha'(0)=X.$$

برهان. [۲۵]. $\square$

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض می‌کنیم $\pi:M\longrightarrow N$ یک نگاشت پیوسته باشد. یک برش از نگاشت π ، یک وارون راست پیوسته آن مانند $\delta:N\longrightarrow M$ است به‌طوری که:

$$\pi\circ\delta=\mathrm{Id}_N.$$

تعریف ۲۵.۱.۱. منظور از میدان برداری $\mathbf{v}$ بر منیفلد M ، نگاشتی است که به هر نقطه $p\in M$ یک بردار مماس $\mathbf{v}_p\in T_pM$ متناظر می‌سازد. یا به‌عبارت دیگر، میدان برداری بر M ، یک برش از کلاف مماس TM است.

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید M یک منیفلد هموار m-بعدی و p نقطه‌ای در آن باشد. برای هر چارت هموار (U,φ) شامل نقطه p که $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$ می‌باشد، $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ یک پایه برای T_pM تشکیل می‌دهد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p=\mathrm{d}(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right).$$

برهان. طبق قضیه ۱۸.۱.۱ می‌توان به‌سادگی نشان داد [۲۵]. $\square$

مثال ۲۷.۱.۱. فرض کنید $F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ نگاشتی هموار و p نقطه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشند و بردارهای مماس $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ و $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_{F(p)},\dots,\frac{\partial}{\partial y^m}|_{F(p)}\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ باشد. در این صورت نگاشت خطی

$$\mathrm{d}F:T_p\mathbb{R}^n\longrightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m,$$

نسبت به این دو پایه با ماتریس $[a^i_j]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ نشان داده می‌شود، که در آن

$$\mathrm{d}F\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big)=\sum_{k=1}^m a^k_j\frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)}. \qquad (۴.۱)$$

گیریم $F^i := y^i \circ F$ مقدار i-ام نگاشت F باشد. در واقع $F = (F^1, \ldots, F^m)$. در این صورت، با تاثیر دادن هر دو طرف فرمول (۳۱.۱.۱) بر توابع مختصاتی y^i می‌توانیم a_j^i را محاسبه کنیم. سمت راست فرمول (۳۱.۱.۱) برابر است با:

$$\sum_{k=1}^{m} a_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} |_{F(p)} \, y^i = \sum_{k=1}^{m} a_j^k \partial_k^i = a_j^i.$$

و سمت چپ فرمول (۳۱.۱.۱) برابر است با:

$$\mathrm{d}F\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big)y^i = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p(y^i \circ F) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p).$$

بنابراین، ماتریس نمایش نگاشت خطی $\mathrm{d}F$ نسبت به پایه‌های استاندارد $\frac{\partial}{\partial x^i} |_p$ و $\frac{\partial}{\partial y^j} |_{F(p)}$ عبارت است از ماتریس ژاکوبی نگاشت F درنقطه p .

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنید $F : N \longrightarrow M$ یک نگاشت هموار باشد. اگر به ازای هر $p \in N$ رتبه نگاشت F برابر با k باشد، آن‌گاه گوییم رتبه F ثابت است.

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم M یک منیفلد هموار و f یک تابع هموار باشد. عملگر کروشه‌لی را روی مجموعه میدان‌های برداری M به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}, \mathbf{w}] \quad &: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \\ [\mathbf{v}, \mathbf{w}]f &= \mathbf{v}\mathbf{w}f - \mathbf{w}\mathbf{v}f, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in (M). \end{aligned}$$

لم ۳۰.۱.۱ *اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو میدان برداری روی M باشند، آن‌گاه $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ میدان برداری است.*

برهان. برای توابع هموار و دلخواه $f, g \in C^\infty(M)$ داریم:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}, \mathbf{w}](af + bg) \quad &= \mathbf{v}\mathbf{w}(af + bg) - \mathbf{w}\mathbf{v}(af + bg) \\ &= \mathbf{v}(a\mathbf{w}f + b\mathbf{w}g) - \mathbf{w}(a\mathbf{v}f + b\mathbf{v}g) \\ &= a\mathbf{v}\mathbf{w}f + b\mathbf{v}\mathbf{w}g - a\mathbf{w}\mathbf{v}f - b\mathbf{w}\mathbf{v}g \\ &= a(\mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v})f + b(\mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v})g \\ &= a[\mathbf{v}, \mathbf{w}]f + b[\mathbf{v}, \mathbf{w}]g, \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

از رابطه (۵.۱) نتیجه می‌گیریم که کروشه‌لی خطی است.

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}, \mathbf{w}](f \cdot g) \quad &= \mathbf{v}\mathbf{w}(f \cdot g) - \mathbf{w}\mathbf{v}(f \cdot g) \\ &= \mathbf{v}(g \cdot \mathbf{w} \cdot f + f\mathbf{w} \cdot g) - \mathbf{w}(g \cdot \mathbf{v} \cdot f + f\mathbf{v} \cdot g) \\ &= \mathbf{v}(g \cdot \mathbf{w} \cdot f) + \mathbf{v}(f \cdot \mathbf{w} \cdot g) - \mathbf{w}(g \cdot \mathbf{v} \cdot f) - \mathbf{w}(f \cdot \mathbf{v} \cdot g) \\ &= \mathbf{w}f\mathbf{v}g + g\mathbf{v}\mathbf{w}f + \mathbf{w}g\mathbf{v}f + f\mathbf{v}\mathbf{w}g - \mathbf{v}f\mathbf{w}g - g\mathbf{w}\mathbf{v}f - \mathbf{v}g\mathbf{w}f - f\mathbf{w}\mathbf{v}g \\ &= f(\mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v})g + g(\mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v})f \\ &= f[\mathbf{v}, \mathbf{w}]g + g[\mathbf{v}, \mathbf{w}]f, \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

و هم‌چنین از (۶.۱) نتیجه می‌گیریم که کروشه‌لی در قاعده لایپ‌نیتس صدق می‌کند. بنابراین کروشه‌لی یک عملگر مشتق و میدان برداری است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] \quad &: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto [\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

$\square$

گزاره ۳۱.۱.۱. *میدان‌های برداری $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ روی M و ثابت‌های c, c' را در نظر می‌گیریم، کروشه‌لی آن‌ها در خواص زیر صدق می‌کند:*

- $[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}', \mathbf{w}]$
- $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}]$
- $\big[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]\big] + \big[\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]\big] + \big[\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]\big] = 0$

برهان. با توجه به تعریف کروشه‌لی ثابت می‌شود [۲۵]. $\square$

تعریف ۳۲.۱.۱. نگاشت $F : M \longrightarrow N$ یک سابمرژن نام دارد هرگاه $\mathrm{rank}F = \dim N$. یا به عبارتی dF پوشا باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱. نگاشت $F : M \longrightarrow N$ یک ایمرژن نام دارد هرگاه $\mathrm{rank}F = \dim M$. یا به عبارتی dF یک به یک باشد.

مثال ۳۴.۱.۱ (نگاشت مارپیچ)**.** نگاشت $\mathbf{R}^3 \longrightarrow (0, 2\pi) : \alpha$ با ضابطه $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ مفروض است. ژاکوبین آن به‌صورت زیر است:

$$j_F = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

که رتبه آن در تمامی نقاط دامنه برابر با ۱ است. بنابراین این نگاشت ایمرژن است.

مثال ۳۵.۱.۱ (نگاشت تصویر)**.** نگاشت $\pi^i : M^1 \times \cdots \times M^k \longrightarrow M^i$ با ضابطه $(p^1, \ldots, p^k) \longmapsto p^i$ مفروض است. رتبه این تابع در تمامی نقاط برابر بعد برد است بنابراین این نگاشت سابمرژن است.

قضیه ۳۶.۱.۱ (تابع معکوس در منیفلدها)**.** *فرض کنیم $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد همبعد M و N باشند. هرگاه به ازای هر $p \in M$، $\mathrm{d}F_p : T_pM \longleftarrow T_{F(p)}N$ ایزومورفیسم باشند، آن‌گاه یک همسایگی از p مانند U و یک همسایگی از $F(p)$ مانند V موجود است که $F\big|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$ دیفئومورفیسم است.*

برهان. [۲۵]. $\square$

قضیه ۳۷.۱.۱ (رتبه در منیفلدها)**.** *فرض کنید M و N به ترتیب دو منیفلد هموار m-بعدی و n-بعدی و $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد، به ازای هر $p \in M$ یک چارت مختصاتی مانند $(x^1, \ldots, x^m)$ به مرکز p و یک چارت مختصاتی مانند $(y^1, \ldots, y^n)$ به مرکز $F(p)$ موجود است به‌طوری که :*

$$F(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0),$$

به‌ویژه اگر F سابمرژن باشد، آن‌گاه :

$$F(x^1,\dots,x^k,\dots,x^m)=(x^1,\dots,x^n),$$

و اگر F ایمرژن باشد، آن‌گاه :

$$F(x^1,\dots,x^m)=(x^1,\dots,x^m,0,\dots,0).$$

برهان. به‌جهت موضعی بودن قضیه به‌جای M و N قضیه را با زیرمجموعه‌های باز $U\subseteq\mathbb{R}^m$ و $V\subseteq\mathbb{R}^n$ اثبات می‌کنیم. چون $J_{F(p)}$ از رتبه k است. بنابراین شامل یک زیرماتریس $k\times k$ غیرتکین است (دترمینان غیرصفر). با استفاده از عملیات مقدماتی این زیرماتریس را به سمت چپ و بالای ماتریس ژاکوبین انتقال می‌دهیم. دو چارت $(x,y)=(x^1,\dots,x^k,y^1,\dots,y^{m-k})$ و $(v,w)=(v^1,\dots,v^k,w^1,\dots,w^{n-k})$ را به‌ترتیب در $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $p=(0,0)$ و $F(p)=(0,0)$ (در غیر این صورت چارت‌ها به مرکز مبدا انتقال می‌دهیم). قرار می‌دهیم $F(x,y)=(Q(x,y),R(x,y))$ به‌طوری که $Q:U\longrightarrow\mathbb{R}^k$ و $R:U\longrightarrow\mathbb{R}^{n-k}$ هموارند. با توجه به اینکه رتبه F برابر با k است پس ماتریس $\left(\frac{\partial Q^i}{\partial x^j}\right)_{ij}$ در نقطه $(0,0)$ وارون‌پذیر است. نگاشت $\varphi:U\longrightarrow\mathbb{R}^m$ را به‌صورت $\varphi(x,y)=(Q(x,y),y)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$J_{\varphi(0,0)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0,0) & \dfrac{\partial Q^i}{\partial y^j}(0,0)\\ 0 & \delta_{ij}\end{pmatrix}_{m\times m}$$

واضح است که ماتریس بلوکی فوق وارون‌پذیر است (زیرا Q وارون‌پذیر است). با استفاده از این قضیه تابع معکوس یک همسایگی از $(0,0)$ مانند U_0 و یک همسایگی از $(0,0)=\varphi(0,0)$ مانند $\tilde{U}_0$ وجود دارد به‌طوری که $\varphi:U_0\longrightarrow\tilde{U}_0$ دیفئومورفیسم است. قرار می‌دهیم $\varphi^{-1}(x,y)=(A(x,y),B(x,y))$ به‌طوری که $A:\tilde{U}_0\longrightarrow\mathbb{R}^k$ و $B:\tilde{U}_0\longrightarrow\mathbb{R}^{m-k}$ هموارند. در این صورت

$$\begin{aligned}(x,y)&=\varphi\left(A(x,y),B(x,y)\right)\\&=\left(Q\left(A(x,y),B(x,y)\right),B(x,y)\right),\end{aligned}$$

از تساوی فوق نتیجه می‌شود که $y=B(x,y)$. بنابراین $\varphi^{-1}(x,y)=(A(x,y),y)$ اما

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(x,y)\right)=\varphi\left(A(x,y),y\right)=\left(Q\left(A(x,y),y\right),y\right)=(x,y),\Longrightarrow Q(A(x,y),y)=x,$$

بنابراین

$$F\circ\varphi^{-1}(x,y)=F(\varphi^{-1}(x,y))=F(A(x,y),y)=(Q(A(x,y),y),R(A(x,y),y)),$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که

$$J_{F\circ\varphi^{-1}(x,y)}=\begin{pmatrix}\delta_{ij} & 0\\ \dfrac{\partial R^i}{\partial x^j} & \dfrac{\partial R^i}{\partial y^j}\end{pmatrix},$$

از طرفی چون φ دیفئومورفیسم است بنابراین
$$\text{rank}F\circ\varphi^{-1}(x,y)=\text{rank}F(x,y)=k,$$
بنابراین k سطر اول ماتریس فوق مستقل خطی هستند. بنابراین رتبه ماتریس ژاکوبین فوق وقتی k است که مشتقات جزیی R مستقل از y^jها باشند. حال اگر قرار دهیم $S(x)=R(x,0)$ آن‌گاه
$$F\circ\varphi^{-1}(x,y)=(x,S(x)).$$
مجموعه باز V_0 مشمول در V را به‌صورت
$$V_0=\left\{(v,w)\in V\quad \Big|(v,0)\in\tilde{U}_0\right\},$$
تعریف می‌کنیم که شامل نقطه $(0,0)$ نیز می‌باشد. داریم $F\circ\varphi^{-1}(\tilde{U}_0)\subseteq V_0$ بنابراین $F(U_0)\subseteq V_0$ و نگاشت $\psi:V_0\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را به‌صورت
$$\psi(v,w)=(v,w-S(v)),$$
تعریف می‌کنیم که هموار است و $\psi^{-1}(s,t)=(s,t+S(s))$ ، بنابراین ψ دیفئومورفیسم است و
$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(x,y)=\psi(x,S(x))=(x,S(x)-S(x))=(x,0).$$

$\square$

تعریف ۳۸.۱.۱. نگاره $f(N)$ یک ایمرژن یک به یک $f:N\longrightarrow M$ را اصطلاحا زیر منیفلد ایمرژن M گویند. از این پس فرض بر این است که توپولوژی بر $f(N)$ توسط f فراهم می‌شود. به این معنی، $U\subseteq f(N)$ باز است اگر و تنها اگر $f^{-1}(U)$ باز باشد.

تعریف ۳۹.۱.۱. نگاشت $\pi:TM\longrightarrow M$ که به‌صورت $\pi(p,X)=p$ تعریف می‌گردد، نگاشت تصویر طبیعی TM نامیده می‌شود. با این تعریف ساختار جدیدی بر کلاف مماس ظاهر می‌شود که در زیر به تعریف آن می‌پردازیم:

تعریف ۴۰.۱.۱. فرض کنید $\pi:E\longrightarrow M$ نگاشتی دلخواه باشد. تصویر معکوس $\pi^{-1}(p):=\pi^{-1}(\{p\})$ هر نقطه $p\in M$ را تار در p می‌نامیم. اغلب تار در p را با نماد E_p نشان می‌دهیم. به‌ازای هر دو نگاشت مفروض $\pi:E\longrightarrow M$ و $\pi':E'\longrightarrow M$ ، نگاشت $\phi:E\longrightarrow E'$ را در صورتی حافظ تار گوییم که به ازای هر $p\in M$ ای:
$$\phi(E_p)\subseteq E'_p.$$

تعریف ۴۱.۱.۱. نگاشت هموار و پوشای $\pi:E\longrightarrow M$ را در صورتی موضعا بدیهی گوییم که:

- هر تاری $\pi^{-1}(p)$ دارای ساختار فضای برداری با بعد r است.
- به ازای هر $p\in M$، همسایگی باز U از p ، دیفئومورفیسم حافظ تاری $\phi:\pi^{-1}(U)\longrightarrow U\times\mathbb{R}^r$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $q\in U$ ، تحدید $\phi\mid_{\pi^{-1}(q)}:\pi^{-1}(q)\longrightarrow\{q\}\times\mathbb{R}^r$ ایزومورفیسمی بین فضاهای برداری است. چنین مجموعه بازی را مجموعه باز بدیهی‌ساز برای E و ϕ را بدیهی‌سازی برای E روی U می‌نامند.

منظور از کلاف برداری هموار از رتبه r، یک سه تایی (E, M, π) متشکل از منیفلدهای هموار E، M و نگاشت هموار پوشای $\pi : E \longrightarrow M$ است که موضعا بدیهی از رتبه r می‌باشد. منیفلد E را فضای کلی، M را فضای پایه برای کلاف مماس می‌نامند.

تعریف ۴۲.۱.۱. فرض کنیم E یک کلاف برداری روی M ، U باز باشد، به ازای هر $p \in U$، مجموعه‌ی برش‌های $\{\delta^1(p), \dots, \delta^k(p)\}$ مستقل خطی هستند، هرگاه به‌عنوان اعضایی از تار E_p استقلال خطی داشته باشند.
یک کنج موضعی برای M یک k تایی از برش‌های هموار مانند $\{\delta^1, \dots, \delta^k\}$ که $\delta^i : U \longrightarrow E$ است، به‌طوری که یک پایه برای E_p بسازد. کنج را در صورتی هموار گوییم که برش‌های معرف آن هموار باشند. اگر U کل M باشد به این کنج، کنج فراگیر می‌گویند.

مثال ۴۳.۱.۱. کلاف مماسی یک کلاف برداری است. چون‌که نگاشت $\pi : TM \longrightarrow M$ با ضابطه $p \longmapsto \mathbf{v}_p$ هموار و پوشاست و $\pi^{-1}(p) = T_pM \simeq \{p\} \times \mathbb{R}^k$.

مثال ۴۴.۱.۱. مجموعه میدان‌های برداری $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ یک کنج موضعی برای TM و یک پایه برای تار T_pM است.

تعریف ۴۵.۱.۱. منیفلد هموار M توازی پذیر نام دارد هرگاه یک کنج فراگیر بپذیرد.

تعریف ۴۶.۱.۱. فرض کنید M یک زیر منیفلد k- بعدی از $\mathbb{R}^n$ با دستگاه مختصات $x = (x^1, \dots, x^n)$ باشد. در این صورت یک چارت برای M به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\{(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) \quad | \ x^{k+1} = c_{n+1}, \dots, x^n = c_n\},$$

اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد. یک k- برش U در M زیرمجموعه‌ای از M مانند S به شکل زیر است:

$$S = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \quad | \ x^{k+1} = c_{n+1}, \dots, x^n = c_n\} \overset{\text{همئومورف}}{\simeq} \mathbb{R}^k.$$

تعریف ۴۷.۱.۱. زیر منیفلد S از M را یک زیرمنیفلد k- بعدی ایمبد شده از M است هرگاه هر نقطه آن مانند $p \in S$ درون یک چارت از M مانند (U, φ) باشد به‌طوری که $U \cap S$ یک k- برش از U باشد و

$$\dim M - \dim S = k.$$

تعریف ۴۸.۱.۱. فرض کنیم $F : N \longrightarrow M$ هموار است، c نقطه‌ای در M باشد. مجموعه

$$F^{-1}(c) = \{p \in N | F(p) = c\},$$

یک مجموعه تراز نگاشت F است.

قضیه ۴۹.۱.۱. *فرض کنیم $F : N \longrightarrow M$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد. در این صورت هر مجموعه تراز F یک زیرمنیفلد بسته ایمبد شده N از بعد نقصان k است. یعنی:*

$$\dim F^{-1}(c) = \dim M - k.$$

برهان. مجموعه تراز $F^{-1}(c)$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $F^{-1}(c)$ در M بسته است. حال فرض می‌کنیم $p \in F^{-1}(c)$ باشد. طبق قضیه ۳۷.۱.۱، اگر (U,φ) چارت شامل p و (V,ψ) چارت شامل $F(p)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$F(x^1,\dots,x^k,x^{k+1},\dots,x^m)=(x^1,\dots,x^k,0,\dots,0),$$

بنابراین $F^{-1}(c)$ را می‌توان به‌صورت اجتماع $F^{-1}(c)\cap U$ به ازای Uهای مختلف نوشت:

$$F^{-1}(c)\cap U=\big\{(x^1,\dots,x^m) \quad | \quad x^1=0,\dots,x^m=0\big\},$$

بنابراین داریم:

$$\dim F^{-1}(c)=m-k.$$

□

۲.۱ فرم‌های دیفرانسیلی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $V_1,\dots,V_k,W$ فضاهای برداری باشند. نگاشت $F:V_1\times\cdots\times V_k\longrightarrow W$ را یک نگاشت k-خطی (چندخطی) می‌گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$F(\mathbf{v}_1,\dots,a\mathbf{v}_i+b\mathbf{v}_i',\dots,\mathbf{v}_k)=aF(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)+bF(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k).$$

تعریف ۲.۲.۱. نگاشت k-خطی $F:V_1\times\cdots\times V_k\longrightarrow\mathbb{R}$ یک k-تانسور کواریان روی فضای برداری V نام دارد.

مجموعه تمام k-تانسورهای کواریان روی فضای برداری V را با $T^k(V)$ نشان می‌دهیم و به‌طور نمادین $T^k(V)$ را به شکل

$$T^k(V)=V^*\otimes\cdots\otimes V^*.$$

نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۲.۱. اگر V یک فضای برداری و $T\in T^k(V), S\in T^l(V)$ آن‌گاه ضرب تانسوری T,S به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T\otimes S:V\times\cdots\times V\times V\times\cdots\times V\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(T\otimes S)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1},\dots,\mathbf{v}_{k+l})=T(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)\cdot S(\mathbf{v}_{k+1},\dots,\mathbf{v}_{k+l}).$$

تعریف ۴.۲.۱. اگر $V=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}_{i=1}^n$ یک فضای برداری باشد، دوگان این فضا یک فضای برداری به شکل $V^*=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ است که پایه‌های آن با یکدیگر به‌صورت $\varphi^i(e_j)=\delta_{ij}$ در رابطه هستند.

لم ۵.۲.۱. *اگر $V=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}_{i=1}^n$ یک فضای برداری n- بعدی و $V^*=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ دوگان آن باشد آن‌گاه $T^k(V)$ یک فضای برداری n^k- بعدی تولیدشده توسط پایه*

$$\left\{\varphi^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi^{i_k}\middle|1\le i_1,\dots,\dots,i_k\le n\right\},$$

است.

برهان. [۲۵]. □

تعریف ۶.۲.۱. اگر V یک فضای برداری n-بعدی باشد، به نگاشت k- خطی $T : V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ یک k-تانسور کنتراواریان روی فضای برداری V می‌گوییم.

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه تمام k-تانسورهای کنتراواریان را با $T_k(V)$ نشان می‌دهیم و به‌طور نمادین $T_k(V)$ را به شکل

$$T_k(V) := V \otimes \cdots \otimes V.$$

نشان می‌دهند.

تعریف ۸.۲.۱. k-تانسور کواریان $T : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری V متقارن است هرگاه :

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

فضای تمام k-تانسورهای متقارن روی فضای برداری V را با $\Sigma^k(V^*)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. k-تانسور کواریان $T : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری V متناوب است هرگاه :

$$T(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_i}, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = -T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فضای تمام k-تانسورهای متناوب روی فضای برداری V را با $\Lambda^k(V^*)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. هرگاه M یک منیفلد هموار باشد. مجموعه تمام k-تانسورهای کوواریان روی M در نقطه p را با $T^k(T_p^*M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر $\pi : T^K(TM) \longrightarrow M$ کلاف k -تانسورها کواریان روی M باشد به نگاشت $\delta : M \longrightarrow T^k(T^*M)$ یک برش از $T^k(T^*M)$ می‌گوییم هرگاه:

$$\pi \circ \delta = \mathrm{Id}_M.$$

تعریف ۱۳.۲.۱. اجتماع مجزای $T^k(T_p^*M)$ را کلاف k-تانسورهای متناوب روی M می‌نامند که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M).$$

تعریف ۱۴.۲.۱. یک برش از$\Lambda^k(T^*M)$ یک k- فرم دیفرانسیلی روی M نام دارد مجموعه تمام k- فرمهای دیفرانسیلی روی M را با

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M)),$$

نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. اگر V یک میدان برداری با بعد متناهی باشد، نگاشت $\mathrm{Alt} : T^k(V^*) \longrightarrow \Lambda^k(V^*)$ را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\delta}(\mathrm{sgn}\delta)T(\mathbf{v}_{\delta(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\delta(k)}).$$

که δ تمام جایگشتهای ممکن روی k- تایی $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ است.

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد و $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ و $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ باشد ضرب وج به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

گزاره ۱۷.۲.۱ (ویژگی‌های ضرب وج)**.** *فرض کنید ω ، ω' ، η ، η' و ξ چند فرم دیفرانسیلی روی فضای برداری با بعد متناهی V و $a, a' \in R$ باشند، آن‌گاه :*

- *دوخطی است:*

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$
$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

- *شرکت‌پذیر است:*

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

- *تعویض‌ناپذیر است : یعنی اگر $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ و $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ آن‌گاه:*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega.$$

برهان. [۲۵]. □

تعریف ۱۸.۲.۱. اگر $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد، به ازای هر $p \in M$ نگاشت پولبک را به‌صورت زیر تعریف می کنبم:

$$F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$$
$$\big(F^*(\omega)\big)(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k) = \omega\big(F_*(\mathbf{v}_1) \cdots F_*(\mathbf{v}_k)\big), \qquad (\forall_i \quad \mathbf{v}_i \in T_pM)$$

گزاره ۱۹.۲.۱ (ویژگی‌ها)**.** *فرض می کنیم $F : M \longrightarrow N$ هموار باشد، آن‌گاه:*

۱. *$F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$ خطی است.*

۲. $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$

برهان. [۲۵]. □

۳.۱ گروه لی

تعریف ۱.۳.۱. اگر G یک گروه جبری با یک ساختار هموار باشد (G یک منیفلد هموار باشد) به‌طوری که نگاشت‌های زیر

$$m : G \times G \longrightarrow G \qquad i : G \longrightarrow G$$
$$m(a,b) = a \cdot b, \qquad i(a) = a^{-1},$$

هموار باشند آن‌گاه G یک گروه لی نام دارد.

برای$a \in G$ عمل ضرب از طرف چپ و از طرف راست توسط a را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$L_a : G \longrightarrow G \qquad R_a : G \longrightarrow G$$
$$L_a(x) = m(a,x), \qquad R_a(x) = m(x,a),$$

تعریف ۲.۳.۱. یک نگاشت $F : H \longrightarrow G$ بین گروه‌های لی H و G یک همومورفیسم گروه‌های لی می‌نامیم، هرگاه این نگاشت، یک همومورفیسم گروهی و هموار باشد. شرط همومورفیسم گروهی بدان معنی است که:

$$F(h \cdot x) = F(h) \cdot F(x), \qquad \forall h, x \in H.$$

مثال ۳.۳.۱. ۱. $G = \mathbb{R}^r$ که دارای ساختارمنیفلدی است را در نظر بگیرید. عمل گروه آن را جمع برداری $(x,y) \longmapsto x+y$ و نگاشت وارون آن را، وارون معمولی نسبت به عمل جمعی $(-x)$ در نظر می‌گیریم. این دو عمل گروه به‌وضوح هموارند، بنابراین $\mathbb{R}^r$ گروه لی آبلی r-بعدی می‌باشد.

۲. $GL(1,\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^*, .)$که یک منیفلد هموار است و با عمل ضرب نیز گروه است که نگاشت ضرب و وارون آن به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که هموار بودن آن‌ها بدیهی است.

$$m : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \qquad i : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$(x,y) \longmapsto x \cdot y, \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

۳. دایره S^1 یک گروه لی یک-بعدی است. به وضوح طبق مثال ۷.۱.۱ منیفلد S^1 یک منیفلد هموار یک-بعدی است، از طرفی $(S^1, +)$ یگ گروه است. عمل جمع و ضرب به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که هموار هستند.

$$m : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \qquad i : S^1 \longrightarrow S^1$$
$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_1 + \theta_2 \mod 2\pi, \qquad \theta \longmapsto -\theta \mod 2\pi.$$

۴. $GL(n,\mathbb{R}) = \{x \mid \det X \neq 0\}$ ماتریس‌های حقیقی وارون‌پذیر از مرتبه n یک گروه لی n^2-بعدی است.

۵. $SL(n,\mathbb{R}) = \{X \mid \det X = 1\}$ مجموعه ماتریس‌های حقیقی وارون‌پذیر خاص از مرتبه n یک گروه لی (n^2-1)-بعدی است.

۶. $O(n,\mathbb{R}) = \{X \in GL(n) \mid X \cdot X^T = I_n\}$ مجموعه ماتریس‌های متقارن از مرتبه n یک گروه لی $\frac{1}{2}(n)(n-1)$-بعدی است.

۴.۱ زیرگروه لی

تعریف ۱.۴.۱. یک زیرگروه لی از یک گروه لی G، یک زیرگروه مجرد مانندH است که یک زیرمنیفلد ایمرژن بوده به‌طوری که عمل‌های گروه بر H، نیز هموار باشند.

قضیه ۲.۴.۱. *اگر H یک زیرگروه مجرد و یک زیرمنیفلد منظم (ایمبدشده) از گروه لی G باشد، آن‌گاه H یک زیرگروه لی بسته G است.*

برهان. چون H یک زیرمنیفلد است کافی است نشان دهیم در G بسته و نگاشت‌های $m : H\times H \longrightarrow H$ و $i : H \longrightarrow H$ هموار هستند. چون G یک گروه لی است بنابراین $\bar{m} : G\times G \longrightarrow G$ هموار است و لذا $\bar{m}\big|_H : H \times H \longrightarrow G$ با ضابطه $(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2 \in H \leq G$ هموار است، بنابراین $\bar{m}\big|_H = m$ و همچنین نتیجه برای i نیز برقرار است یعنی $\bar{i} : G \longrightarrow G$ هموار است و $\bar{i}\big|_H : H \longrightarrow G$ هموار است بنابراین $\bar{i}\big|_H = i$. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که $H = \bar{H}$. برای این‌کار می‌دانیم $H \subseteq \bar{H}$. حال باید ثابت کنیم که $\bar{H} \subseteq H$. فرض می‌کنیم $g \in \bar{H}$. چون H موضعا اقلیدسی است پس دنباله‌ای مانند $\{h_n\}$ از اعضای H وجود دارد که $h_n \longrightarrow g$. چون H ایمبد شده است لذا یک چارت برشی با دامنه U از H شامل عضو e(عضو همانی) در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم W همسایگی دیگری از e باشد به‌طوری که $\bar{W} \subset U$. نگاشت $\mu : G \times G \longrightarrow G$ را با ضابطه $\mu(g_1, g_2) = g_1^{-1}g_2$ تعریف می‌کنیم. واضح است که μ پیوسته است. (زیرا μ را می‌توان از ترکیب $\bar{i}$ و $\bar{m}$ که هموار و پیوسته هستند به‌دست آورد.) بنابراین همسایگی مانند V از e در G موجود است که

$$V \times V \subset \mu^{-1}(W) \Longrightarrow \mu(V \times V) \subset W \Longrightarrow g_1^{-1}g_2 \in W,$$

اما از طرفی $g^{-1}h_n \longrightarrow e$ و لذا

$$h_m^{-1}h_n = (g^{-1}h_m)^{-1}(g^{-1}h_n) \in W,$$

حال فرض می‌کنیم m ثابت باشد و $n \longrightarrow \infty$ آن‌گاه

$$h_m^{-1}h_n \longrightarrow h_m^{-1}g \in \bar{W} \subset U,$$

چون $H \cap U$ یک برش است بنابراین در U بسته است لذا

$$h_m^{-1}g \in H \Longrightarrow g \in H \Longrightarrow H = \bar{H}.$$

□

قضیه ۳.۴.۱. *یک زیرگروه بسته از یک گروه لی، یک زیرگروه لی ایمبدشده است.*

برهان. [۲۵]. □

مثال ۴.۴.۱. گروه خطی خاص $SL(n, \mathbb{R})$ و گروه متعامد $O(n, \mathbb{R})$ زیرگروه‌های بسته‌ی $GL(n, \mathbb{R})$ هستندکه ایمبدشده هستند، بنابراین یک زیرگروه لی می‌باشد.

تعریف ۵.۴.۱. یک گروه تبدیل مثل G که روی یک منیفلد هموار مانند M عمل می‌کند، یک گروه لی می‌باشد. با این شرط که نگاشت $\phi : G \times M \longrightarrow M$ با ضابطه $g \cdot p \longmapsto (g, p)$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$

۲. $e \cdot p = p$

- در این حالت می‌گوییم G از چپ روی M عمل می‌کند. به همین شکل می‌توان عمل از سمت راست را تعریف کرد.
هرگاه G یک گروه تبدیل روی M و $g \in G$ باشد آن‌گاه g را یک تبدیل گویند. به‌طوری که $\phi_g : M \longrightarrow M$ یک دیفئومورفیسم است، زیرا $\phi_{g^{-1}} = (\phi_g)^{-1}$. فرض کنیم $p \in M$ باشد در این صورت مجموعه تمام تبدیلات p تحت گروه تبدیل G یعنی
$$G \cdot p = \{g \cdot p \ \mid g \in G\},$$
را مدار p تحت تبدیل G می‌نامند.

- آن دسته از اعضای G که به‌صورت عضو همانی عمل می‌کند را به ازای $p \in M$ به‌صورت
$$G_p = \{g \ \mid g \cdot p = p\},$$
نمایش می‌دهیم. G_p یک زیرگروه G می‌باشد که به آن زیرگروه پایدارساز p می‌گویند. زیرا

۱.
$$G_p \neq \varnothing, \quad e \in G_p \ , \qquad e \cdot p = p \Longrightarrow e \in G_p.$$

۲.
$$g, h \in G_p, \qquad (g \cdot h)x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x \Longrightarrow g \cdot h \in G_p.$$

۳.
$$g \in G_p, \qquad g^{-1}(g \cdot p) = (g^{-1} \cdot g) \cdot p = e \cdot p = p \Longrightarrow g^{-1} \in G_p.$$

- گروه تبدیلات G به‌طور آزاد روی M عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر $p \in M$، $G_p = \{e\}$ ، و به‌طور موضعا آزاد عمل می‌کند، اگر زیرگروه‌های ایزوتروپیک در یک همسایگی هر عضو $g \neq e$ بدیهی شوند. قرار می‌دهیم :
$$G_M = \bigcap_{p \in M} G_p,$$
آن‌گاه G_M را زیرگروه پایدارساز فراگیر G می‌گویند. هرگاه $G_M = \{e\}$ باشد، آن‌گاه گوییم G به‌طور موثر عمل می‌کند، اگر ساختار G_M گسسته باشد، می‌گوییم G به‌طور موضعا موثر عمل می‌کند.

- هرگاه عمل G تنها یک مدار تولید کند، عمل را متعدی گوییم در نهایت، عمل G را نیم‌منظم گوییم هرگاه کلیه مدارات G هم‌بعد باشند و منظم نامیم اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی به دلخواه کوچک باشد به‌طوری که اشتراک آن با مدار p همبند باشد.

۵.۱ گروه تبدیلات یک-پارامتری

تعریف ۱.۵.۱. در صفحه (x, y) تبدیلات

$$x_1 = f(x, y, \varepsilon), \qquad y_1 = f(x, y, \varepsilon),$$

را تبدیلات یک-پارامتری می‌نامیم هرگاه در خاصیت‌های زیر صدق کند:

۱) (همانی):مقدار $\varepsilon = 0$ تبدیل همانی را به‌دست می‌دهد.

$$x = f(x, y, 0), \qquad y = f(x, y, 0),$$

۲) (وارون):پارامتر $-\varepsilon$ تبدیل وارون را به‌دست می‌دهد.

$$x = f(x_1, y_1, -\varepsilon), \qquad y = f(x_1, y_1, -\varepsilon),$$

۳) (بسته بودن): اگر $x_2 = f(x_1, y_1, \delta)$ و $y_2 = g(x_1, y_1, \delta)$، آن‌گاه آن نیز دوباره عضوی از گروه باشد و علاوه بر آن بتوان نتیجه گرفت که پارامتر $\varepsilon + \delta$ آن را به‌دست می‌دهد. یعنی،

$$x_2 = f(x, y, \varepsilon + \delta), \qquad y_2 = g(x, y, \varepsilon + \delta),$$

دوباره یادآور می‌شویم که خاصیت شرکت‌پذیری معمولی را می‌توان از خاصیت بسته بودن گروه نتیجه گرفت. مثال‌های ساده‌ای از گروه‌های یک-پارامتری بدین قرارند:

الف) گروه انتقال:

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y + \varepsilon,$$

ب) گروه امتدادی:

$$x_1 = \mathrm{e}^{\varepsilon} x, \qquad y_1 = \mathrm{e}^{\varepsilon} y,$$

ج) گروه دوران :

$$x_1 = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, \qquad y_1 = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon,$$

مثال ۲.۵.۱. نشان می‌دهیم که گروه دورانی تعریف‌شده در قسمت (ج) یک گروه یک-پارامتری است. اگر $\varepsilon = 0$ آن‌گاه $x_1 = x$ و $y_1 = y$، در نتیجه آن در خاصیت اول صدق می‌کند. حال برای وارون آن

$$x = x_1\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon, \qquad y = -x_1\sin\varepsilon + y_1\cos\varepsilon,$$

را به‌دست می‌آوریم، بنابراین $-\varepsilon$ وارون آن را مشخص می‌کند و از آن‌جا نتیجه می‌شود که (ج) در خاصیت دوم نیز صدق می‌کند. برای قسمت سوم می‌بینیم که اگر $x_2 = x_1\cos\delta - y_1\sin\delta$ و $y_2 = x_1\sin\delta + y_1\cos\delta$ ، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} x_2 &= (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon)\cos\delta - (x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)\sin\delta \\ &= x\cos(\varepsilon+\delta) - y\sin(\varepsilon+\delta), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} y_2 &= (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon)\sin\delta - (x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)\cos\delta \\ &= x\sin(\varepsilon+\delta) - y\cos(\varepsilon+\delta), \end{aligned}$$

و بنابراین آن در خاصیت سوم نیز صدق می‌کند.

قضیه ۱.۵.۳. *مدارات همگی زیرمنیفلد هستند.*

برهان. [۲۵]. □

مثال ۱.۵.۴. عمل گروه تبدیلات $GL(n,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید که با ضابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} GL(n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (A,a) &\longmapsto Aa, \end{aligned}$$

این عمل دو مدار تولید می‌کند، یکی مبدا و دیگری $\mathbb{R}^n - \{0\}$ بنابراین عمل فوق متعدی نمی‌باشد، همچنین عمل آزاد هم نیست. حال اگر $GL(n)$ روی $\mathbb{R}^n - \{0\}$ عمل کنند. آن‌گاه عمل متعدی و آزاد خواهد بود زیرا تنها مدار تولیدشده خود $\mathbb{R}^n - \{0\}$ است.

تعریف ۱.۵.۵. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. یک تابع G-ناوردا تابعی حقیقی مانند $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ است به‌قسمی که برای هر $p \in M$ ، $g \in G$ ،

$$I(g \cdot p) = I(p).$$

مثال ۱.۵.۶. فرض می‌کنیم $M = \mathbb{R}^2$ باشد:

۱. اگر G_c یک گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشد به‌طوری که:

$$(x,y) \longmapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

که c یک ثابت است. بنابراین تابع

$$\zeta(x,y) = x - cy,$$

یک تابع ناورداست. چون‌که

$$\zeta(x + c\varepsilon, y + \varepsilon) = \zeta(x,y).$$

برای تمامی ε برقرار است.

۲. اگر G^1 یک گروه تجانس باشد به‌طوری که:

$$G^1 : (x,y) \longmapsto (\lambda x, \lambda y), \qquad \lambda > 0,$$

بنابراین تابع

$$\zeta(x,y) = \frac{x}{y},$$

یک تابع ناوردا روی تمام $\mathbb{R}$ بجز در نقطه $y = 0$ است.

۱.۶ جبر لی

اگر G یک گروه لی باشد، میدان‌های برداری خاصی روی آن وجود دارند که تحت عمل گروه ناوردا هستند. این میدان‌های برداری ناوردا یک فضای برداری با بعد نامتناهی می‌سازند که از آن به جبر لی G با مجموعه مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه G یاد می‌شود.

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد، میدان برداری $\mathbf{v}$ روی M را G-ناوردا گوییم هرگاه:

$$\mathrm{d}\phi_g(\mathbf{v}_p) = \mathbf{v}_{g\cdot p}, \qquad \forall g \in G, \;\; p \in M,$$

تعریف ۲.۶.۱. جبر لی راست $\mathcal{G}$ از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد. به‌طور کلی، جبر لی، فضای برداری $\mathcal{G}$ با عملگر دو خطی $[,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ است که کروشه‌لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه‌لی صدق می‌کند.

تعریف ۳.۶.۱. فرض کنیم G روی خودش از چپ (راست) عمل کند. مجموعه تمام میدان‌های برداری ناوردای چپ (راست) را جبرلی چپ (راست) G گویند. ثابت می‌شود جبر لی چپ و جبر لی راست با هم یکی هستند. در همه جا جبر لی گروه لی G را با $\mathcal{G}$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴.۶.۱. *اگر G یک گروه لی باشد، آن‌گاه* $\mathcal{G}_L \simeq \mathcal{G}_R$

برهان. فرض کنیم که R_g و L_g به‌ترتیب ضابطه عمل راست و چپ گروه G روی خودش و

$$i : G \longrightarrow G,$$

نگاشت وارون‌ساز G باشد، ثابت می‌کنیم که

$$\mathrm{d}i : \mathcal{G}_R \longrightarrow \mathcal{G}_L,$$

ایزومورفیسم است. ($\mathcal{G}_R$ و $\mathcal{G}_L$ نمایش‌دهنده جبرهای لی راست و چپ G هستند.) هرگاه $h \in G$ باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}(R_g \circ i)h &= R_g(i(h))\\ &= R_g(h^{-1})\\ &= h^{-1}g\\ &= (g^{-1}h)^{-1}\\ &= (i \circ L_{g^{-1}})h.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\mathbf{v} \in \mathcal{G}_L$ و $f \in C^{\infty}(G)$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R_g(\mathrm{d}i\mathbf{v}_h)f &= (\mathrm{d}R_g \circ \mathrm{d}i)\,(\mathbf{v}_h)f\\ &= \mathrm{d}\,(R_g \circ i)\,(\mathbf{v}_h)f\\ &= \mathrm{d}\,(i \circ L_{g^{-1}})\,(\mathbf{v}_h)f\\ &= (\mathrm{d}i \circ \mathrm{d}L_{g^{-1}})\,(\mathbf{v}_h)f\\ &= \mathrm{d}i\,(\mathrm{d}L_{g^{-1}}\mathbf{v}_h)\,f\\ &= \mathrm{d}i(\mathbf{v}_{g^{-1}h})f\\ &= \mathbf{v}f\,(i(g^{-1}h))\\ &= \mathbf{v}f\,(h^{-1}g)\\ &= \mathbf{v}_{h^{-1}g}f.\end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۶.۱. *هرگاه G یک گروه لی باشد در این صورت* $\mathcal{G} \simeq T_eG$.

برهان. ثابت می‌کنیم نگاشت $\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow T_eG$ ایزومورفیسم است. فرض کنیم $X \in T_eG$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{X}_g = \mathrm{d}L_gX,$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\tilde{X}$ هموار است. برای این‌کار ثابت می‌کنیم اگر $U \subseteq G$ باز و $f \in C^\infty(U)$ باشد. آن‌گاه $\tilde{X}f$ هموار است. خم هموار $\alpha : (-a,a) \longrightarrow G$ به‌گونه‌ای موجود است که $\alpha(0) = e$ و $\alpha'(0) = X$ باشد.

$$\begin{aligned}(\tilde{X}f)_g &= \tilde{X}_gf = (\mathrm{d}L_gX)f = X(f\circ L_g) = \alpha'(0)(f\circ L_g)\\ &= \left(\mathrm{d}\alpha\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\right)(f\circ L_g) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}(f\circ L_g\circ\alpha)(t),\end{aligned}$$

تابع $\psi : (-a,a)\times G \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $\psi(t,g) = f\circ L_g\circ\alpha(t)$ تعریف می‌کنیم. که

$$(\tilde{X}f)_g = \frac{\partial\psi}{\partial t}(0,g),$$

چون ψ ترکیب سه نگاشت هموار است بنابراین خود و مشتقاتش از جمله $\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,g)$ هموار است و این همواری، هموار بودن $(\tilde{X}f)_g$ را نتیجه می‌دهد.

$$(\mathrm{d}L_{g'})(\tilde{X}_g) = (\mathrm{d}L_{g'})(\mathrm{d}L_gX) = (\mathrm{d}L_{g'}\circ\mathrm{d}L_g)X = (\mathrm{d}L_{gg'})X = \tilde{X}_{gg'},$$

بنابراین $\tilde{X}$ یک میدان برداری ناوردای چپ است. پس $\tilde{X} \in \mathcal{G}$. حال نگاشت $\eta : T_eG \longrightarrow \mathcal{G}$ با ضابطه $\eta(X) = \tilde{X}$ را تعریف می‌کنیم که η وارون راست φ است چون‌که

$$\varphi(\eta(X)) = \varphi(\tilde{X}) = (\mathrm{d}L_e)X = X_e = X,$$

و η وارون چپ φ است، چون که

$$\eta(\varphi(X))_g = \eta(X_e)_g = \tilde{X}_e|_g = (\mathrm{d}L_g)X_e = X_{eg} = X_g,$$

بنابراین φ ایزومورفیسم است. □

مثال ۱.۶.۶. در این مثال بدون محاسبه تنها به ارائه چند جبر لی می‌پردازیم.

۱. جبر لی گروه لی خطی عام $GL(n,\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های مربعی $n\times n$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر

$$T_{I_n}GL(n,\mathbb{R}) = M(n\times n,\mathbb{R}).$$

۲. جبر لی گروه لی خطی خاص $SL(n,\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های $n\times n$ با اثر صفر می‌باشد یعنی:

$$T_ISL(n,\mathbb{R}) = \{A\in M(n\times n,\mathbb{R}) \ | \ trA = 0\}.$$

۳. جبر لی دایره S^1 اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۴. جبر لی فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ خود $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

۷.۱ زیرگروه یک- پارامتری

یک زیرگروه یک- پارامتری G، یک همومورفیسم گروه لی مانند $F : \mathbb{R} \longrightarrow G$ است که $\mathbb{R}$ به‌عنوان یک گروه لی در نظر گرفته می‌شود. طبق این تعریف یک زیرگروه یک- پارامتری، یک زیرگروه لی G نیست بلکه همومورفیسمی به G است.

۸.۱ نگاشت نمایی

تعریف ۱.۸.۱. گروه لی G با جبر لی $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت نگاشت $\exp : \mathcal{G} \longrightarrow G$ با ضابطه $\exp(\mathbf{v}) = F(1)$ را نگاشت نمایی گوییم که F یک زیرگروه یک-پارامتری نظیر میدان برداری $\mathbf{v}$ است. اگر $\mathbf{V}$ یک همسایگی $0 \in \mathcal{G}$ ، U یک همسایگی $e \in G$ باشند، آن‌گاه $\exp$ یک دیفئومورفیسم بین U ، $\mathbf{V}$ برقرار می‌کند.

قضیه ۲.۸.۱. *فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathcal{G}$ باشد. در این صورت برای هر $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{G}$ هر عضو G مانند g قابل بیان به‌صورت ترکیب نگاشت‌های نمایی می‌باشد، بدین معنا که:*

$$g = \exp(\mathbf{v}_1) \circ \cdots \circ \exp(\mathbf{v}_k).$$

تعبیر قضیه فوق آن است که با داشتن اعضای یک جبر لی می‌توان با محاسبه نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ضرب آن‌ها در هم ضابطه تبدیل گروه را به‌دست آورد. اثبات این قضیه در [۲۳] آمده است.

۹.۱ عمل گروه بی‌نهایت کوچک

تعریف ۱.۹.۱. هرگاه G یک گروه لی $\mathcal{G}$ باشد که روی M عمل می‌کند آن‌گاه به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ مولد بی‌نهایت کوچک $\hat{\mathbf{v}}$ متناظر با $\mathbf{v}$ در نقطه $p \in M$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{v}}_p = \mathrm{d}\phi_p(\mathbf{v}_e),$$

نگاشت ϕ به‌صورت $\phi_p : G \longrightarrow M$ تعریف می‌شود به‌طوری که $g \longmapsto g \cdot p$.

تعریف ۲.۹.۱. منحنی انتگرال از یک میدان برداری $\mathbf{v}$ منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به‌طوری که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار $\mathbf{v}$ در آن نقطه برابر باشد یعنی:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v} \mid_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی، بایستی $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \ldots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi^i(x), \quad i = 1, 2, \ldots .m.$$

باشد که $\xi^i(x)$ها ضرایب $\mathbf{v}$ در x می‌باشند.

تعریف ۳.۹.۱. اگر $\mathbf{v}$ میدان برداری باشد، منحنی انتگرال ماکسیمال، پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon.x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را فلوی تولیدشده به‌وسیله $\mathbf{v}$ می‌نامیم، بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل 0 ، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. فلوی میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

۱. $\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad \forall x \in M$

۲. $\Psi(0, x) = x$

۳. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Psi(\varepsilon,x)=\mathbf{v}\mid_{\Psi(\varepsilon,x)}$

با مقایسه دو خاصیت ۱،۲ و خاصیت گروه تبدیلات موضعی می‌بینیم که فلوی تولیدشده به وسیله میدان برداری با عمل گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است و اغلب گروه یک-پارامتری از تبدیلات و میدان‌برداری $\mathbf{v}$، مولد بی‌نهایت کوچک عمل نامیده می‌شود. از این رو به‌وسیله قضیه تیلور در مختصات موضعی داریم:

$$\Psi(\varepsilon,x)=x+\varepsilon\xi(x)+O(\varepsilon^2),$$

که $\xi=(\xi^1(x),\dots,\xi^m(x))$ ضرایب $\mathbf{v}$ هستند. اگر $\Psi(\varepsilon,x)$ گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشند که روی M عمل می‌کند، سپس مولد بی‌نهایت کوچک آن به‌وسیله ویژگی سوم تعریف ۳.۹.۱ با قراردادن $\varepsilon=0$ به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{v}\big|_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Psi(\varepsilon,x),$$

تناظری یک به یک بین گروه یک-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بی‌نهایت کوچک وجود دارد. اغلب محاسبه فلو یا گروه یک-پارامتری تولیدشده به‌وسیله میدان برداری $\mathbf{v}$ به‌عنوان نگاشت نمایی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x\equiv\Psi(\varepsilon,x),$$

را برای زیرگروه یک-پارامتری یا فلوی تولید شده به‌وسیله میدان برداری $\mathbf{v}$ به‌کار می‌بریم.

مثال ۴.۹.۱. فرض کنید $\mathbf{v}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ یک خم انتگرال باشد که به‌صورت استانداردشده $\psi(t)=(x(t),y(t))$ نوشته شده باشد. طبق تعریف $\psi'(t)=\mathbf{v}_{\psi(t)}$ داریم:

$$x'(t)\frac{\partial}{\partial x}\mid_{\psi(t)}+y'(t)\frac{\partial}{\partial y}\mid_{\psi(t)}=x(t)\frac{\partial}{\partial y}\mid_{\psi(t)}-y(t)\frac{\partial}{\partial x}\mid_{\psi(t)},$$

با مساوی قرار دادن مولفه‌ها نظیر به نظیر داریم:

$$\begin{aligned}x'(t)&=-y(t)\\ y'(t)&=x(t),\end{aligned}\tag{۷.۱}$$

با حل معادلات (۷.۱) داریم:

$$x(t)=a\cos t-b\sin t,\qquad y(t)=a\sin t+b\cos t,$$

که $\psi(t)=(a\cos t-b\sin t,a\sin t+b\cos t)$ خم انتگرال میدان برداری $\mathbf{v}$ است.

قضیه ۵.۹.۱. *فرض کنید $\mathbf{v},\mathbf{w}$ دو میدان برداری هموار روی منیفلد M باشند. برای هر $x\in M$ ، خم انتگرال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\Psi(\varepsilon,x)=\exp(-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w})\exp(-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v})\exp(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w})\exp(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v})(x),$$

کروشه‌لی $[\mathbf{v},\mathbf{w}]\mid_x$ میدان برداری مماس برخم انتگرال در نقطه $\Psi(0,x)=x$. یعنی:

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}]\big|_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Psi(\varepsilon,x).\tag{۸.۱}$$

برهان. [۲۷]. □

مثال ۶.۹.۱. عمل گروه $SL(2)$ روی $\mathbb{RP}^1$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$p \mapsto \frac{ap+b}{cp+d}, \qquad p \in \mathbb{RP}^1, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2).$$

جبر لی $SL(2)$ ماتریس‌های 2×2 با اثر صفر است. بنابراین این جبر با ماتریس‌های زیر تولید می‌شود.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

بنابراین اگر $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ مولدهای بی‌نهایت کوچک متناظر با هر یک از ماتریس‌های A_1, A_2, A_3 باشند، آن‌گاه

$$\mathbf{v}_1 = \partial p, \qquad \mathbf{v}_2 = 2p\partial p, \qquad \mathbf{v}_3 = -p^2 \partial p.$$

قضیه ۷.۹.۱ (مختصات اصلاح شده). *فرض کنیم G یک گروه لی باشد که روی منیفلد n- بعدی M عمل کرده، $\mathcal{G}$ جبر لی و $\mathbf{v}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک از آن باشد به‌طوری که در نقطه $x_0 \in M$ غیرصفر باشد. آن‌گاه یک دستگاه مختصات مانند $y = (y^1, \ldots, y^n)$ در x_0 موجود است به‌طوری که در این مختصات $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial y^1}$.*

برهان. [۲۵]. □

۱۰.۱ ناورداهای بی‌نهایت کوچک

تعریف ۱.۱۰.۱. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات همبند باشد که روی M عمل کند. تابع حقیقی $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G- ناورد است اگر و تنها اگر برای هر $p \in M, \mathbf{v} \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{v}_p(I) = 0, \qquad (۹.۱)$$

هرگاه $u = I(x)$ یک تابع یک- پارامتری و $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک باشد. برای آن‌که I یک ناوردا تحت G باشد، باید $\mathbf{v}(I) = 0$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial I}{\partial x^i} = 0,$$

حال برای یافتن I دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1(x)} = \frac{\mathrm{d}x^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x^n}{\xi^n(x)}.$$

تعریف ۲.۱۰.۱. مجموعه $\{f_1, \cdots, f_k\}$ از توابع هموار حقیقی مقدار روی منیفلد M وابسته تابعی نامیده می‌شوند، اگر برای هر نقطه $x_0 \in M$ همسایگی U و تابع هموار $H(x_1, \cdots, x_k)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای همه $x \in U$ داشته باشیم:

$$H(f_1(x), \cdots, f_k(x)) = 0,$$

این توابع مستقل تابعی نامیده می‌شوند اگر این شرط برقرار نباشد.

گزاره ۳.۱۰.۱. *اگر $f_1, \cdots, f_k$ در شرط $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \neq 0$ صدق کنند آن‌گاه مستقل تابعی هستند در غیر این صورت وابسته تابعی می‌باشند.*

برهان. [۲۷]. □

مثال ۴.۱۰.۱. عمل گروه $SO(2)$ را روی فضای سه متغیره به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$SO(2) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto \left(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, \frac{\sin t + z\cos t}{\cos t - z\sin t}\right),$$

مولد بی‌نهایت کوچک حاصل از این عمل به فرم

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

می‌باشد. دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2},$$

با حل دستگاه بالا به ناورداها می‌رسیم. معادله اول $\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x}$ یک معادله دیفرانسیل جداشدنی است که جواب عمومی آن $x^2 + y^2 = c_1$ است که c_1 ثابت انتگرال است. بنابراین $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ناورداست. برای حل معادله دوم به جای x قرار می‌دهیم $\sqrt{r^2 - y^2}$. جواب به‌صورت $\tan^{-1} z - \sin^{-1}(\frac{y}{r}) = \tan^{-1} z - \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = c_2$ است بنابراین $\tan^{-1} z - \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ ناوردای دوم است در نتیجه برای $yz + x \neq 0$ تابع $w = (xz - y)/(yz + x)$ و $r = \sqrt{x^2+y^2}$ مجموعه کاملی از ناوردای مستقل تابعی را نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۱۰.۱. *فرض کنیم که G یک گروه لی موضعا همبند از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. فرض کنید $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ، $l \leq m$ ، یک دستگاه معادلات جبری است که*

$$F_\nu(x) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, l, \tag{۱۰.۱}$$

و در شرایط رتبه ماکسیمال صدق می‌کند(به این معنی که ژاکوبین ماتریس $(\frac{\partial F_\nu}{\partial x^k})$ در تمامی نقاط این تابع برابر l باشد). بنابراین به G گروه تقارن دستگاه می‌گویند اگر و تنها اگر

$$\mathbf{v}(F_\nu(x)) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, l, \qquad \text{هرگاه} \qquad F(x) = 0. \tag{۱۱.۱}$$

که $\mathbf{v}$ مولد بی‌نهایت کوچک G است.

برهان. [۲۵]. □

فصل ۲

تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

۱.۲ تبدیلات و توابع

تعریف ۱.۱.۲. یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل مانند $\Delta = 0$ با p متغیر مستقل $x = (x^1, \ldots, x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1, \ldots, u^q)$ را در نظر می‌گیریم. جواب چنین دستگاهی تابعی به فرم $u = f(x)$ می‌باشد که در آن

$$u^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^p), \qquad \alpha = 1, \ldots, q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^1, \ldots, x^p)$ است. حال فرض می‌کنیم x یک دستگاه مختصات روی $X \simeq \mathbb{R}^p$ و u یک دستگاه مختصات روی $U \simeq \mathbb{R}^q$ باشد.

تعریف ۲.۱.۲. فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ متشکل از متغیرهای مستقل و وابسته‌ی X, U فضای کامل برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۲. یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G است که روی یک زیرمجموعه باز از E مانند O عمل کرده، به‌طوری که هر جواب از دستگاه $\Delta = 0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌کند. در ادامه‌ی مطلب به بیان نحوه‌ی عمل یک تبدیل مانند $g \in G$ روی یک تابع می‌پردازیم، از این پس گروه تبدیلات G یک گروه لی فرض می‌شود. تابع $u = f(x)$ را با گراف

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \quad | \; x \in \Omega\},$$

تعریف می‌کنیم که البته لزومی ندارد $g \cdot \Gamma_f$ خود، گراف تابعی جدید باشد. اما هرگاه G به‌طور هموار عمل کرده و عنصر همانی G، گراف f را ثابت نگه دارد، با انتخاب مناسب دامنه‌ی Ω می‌توان دید که تبدیل g موضعاً حول عنصر همانی G گراف تابع f را ناوردا نگه می‌دارد، به این معنا که

$$g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\bar{f}}, \qquad (۱.۲)$$

البته باید توجه داشت که منظور از $\bar{f}$ در (۱.۲) همان تبدیل‌یافته گراف تابع f تحت تبدیل g است.

مثال ۴.۱.۲. فرض کنیم $p = q = 1$ و بنابراین $X \simeq U \simeq \mathbb{R}$. اگر $G = SO(2)$ گروه دوران‌های روی $E \simeq \mathbb{R}^2$ باشد، آن‌گاه اگر θ عضوی از G باشد داریم:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \cdot (x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta), \tag{۲.۲}$$

اما اگر فرض کنیم $u = f(x)$ یک تابع روی $\mathbb{R}^2$ با گراف Γ_f باشد واضح است که عمل $SO(2)$ روی تابع چیزی نیست جز دوران گراف آن به اندازه‌ی زاویه‌ی θ. بنابراین اگر f روی یک بازه‌ی متناهی مانند $[a, b]$ تعریف شده و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد آن‌گاه $\theta \cdot \Gamma_f$ خود، گراف دوران‌یافته‌ی گراف تابع f می‌باشد. یک روش کلی برای یافتن گراف تبدیل‌یافته‌ی تابع f موجود است که در زیر به‌طور اجمالی به آن اشاره می‌کنیم. تبدیل g را به شکل

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\varphi_g(x, u), \psi_g(x, u)), \tag{۳.۲}$$

در نظر می‌گیریم که در آن φ_g, ψ_g دو تابع هموار می‌باشند. آن‌گاه مختصات گراف تابع $\bar{f}$ به صورت

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varphi_g(x, f(x)) = \varphi_g \circ (I\mathrm{d} \times f)(x), \\ \bar{u} &= \psi_g(x, f(x)) = \psi_g \circ (I\mathrm{d} \times f)(x), \qquad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

تعریف می‌شود که $I\mathrm{d}$ تابع همانی روی X است. برای یافتن $\bar{f}$ باید x را از (۴.۲) حذف کرد. به ازای $g = e$ واضح است که

$$\varphi_e \circ (I\mathrm{d} \times f) = I\mathrm{d},$$

به‌ازای یک g نزدیک عضو همانی e، ژاکوبین $\varphi \circ (I\mathrm{d} \times f)$ غیرتکین است و بنابراین با استفاده از قضیه تابع ضمنی

$$x = [\varphi_g(I\mathrm{d} \times f)]^{-1}(\bar{x}), \tag{۵.۲}$$

حال با جایگزینی (۵.۲) در $\bar{f}$ داریم:

$$\bar{f} = g \cdot f = [\psi_g \circ (I\mathrm{d} \times f)] \circ [\varphi_g \circ (I\mathrm{d} \times f)]^{-1},$$

لذا با حذف x و وارون‌کردن φ_g ضابطه $\bar{f}$ به شکل

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = f(\varphi_g^{-1}(\bar{x})) = f(\varphi_{g^{-1}}(\bar{x})), \tag{۶.۲}$$

ساخته می‌شود. به مثال (۲.۲) برمی‌گردیم. تابع

$$f(x) = ax + b, \tag{۷.۲}$$

مفروض است. در این حالت واضح است که

$$(\bar{x}, \bar{u}) = (x\cos\theta - (ax + b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax + b)\cos\theta), \tag{۸.۲}$$

حال با حذف x از دستگاه (۸.۲) خواهیم داشت:

$$x = \frac{\bar{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}, \tag{۹.۲}$$

برای یافتن، تبدیل‌یافته تابع (۵.۲) تحت زاویه θ، x را از (۹.۲) در $\bar{f}$ جایگذاری کرده و بنابراین $\bar{f}$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\bar{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\sin\theta}, \tag{۱۰.۲}$$

در مثالی که تحلیل شد می‌توان مفهوم تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را تا حدودی بررسی کرد. طبق تعریف ۳.۱.۲ تبدیل g از گروه لی G یک تقارن برای دستگاه معادلات $\Delta = 0$ است، هرگاه اگر $u = f(x)$ یک جواب برای دستگاه باشد آن‌گاه $g \cdot u$ خود یک جواب است.
حال معادله دیفرانسیل $u_{xx} = 0$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که کلیه‌ی خطوط در $\mathbb{R}^2$ یعنی توابع به شکل (۷.۲) یک جواب برای این معادله می‌باشند. بنابراین به‌راحتی می‌توان دید که چون دوران هرخط راست در $\mathbb{R}^2$ خود یک خط راست است، لذا گروه دوران‌های $SO(2)$ یک گروه تقارن برای این معادله است.

۲.۲ امتداد دهی

در این بخش، قصد داریم که به معرفی فضای جت که نقش اساسی در تبیین هندسی معادلات دیفرانسیل ایفا می‌نماید بپردازیم:
یک تابع حقیقی هموار مانند $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه $f(x) = f(x^1, \ldots, x^p)$ تعریف می‌شود، دارای تعداد

$$P_k = \binom{p+k-1}{k},$$

مشتق جزئی متمایز از مرتبه k نسبت به متغیرهایش می‌باشد. هرگاه $J = (j_1, \ldots, j_k)$ یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد، آن‌گاه مشتق جزئی تابع f نسبت به J به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_k}},$$

توجه نمایید که مرتبه اندیس چندگانه J که با نماد $\sharp J = k$ نمایش داده می‌شود، نشان‌دهنده مراتب مشتق‌گیری از تابع فوق است. اکنون بحث را کمی گسترده‌تر می‌نماییم. فرض کنید که $f : X \longrightarrow U$ یک تابع p متغیره، q مقداری با ضابطه‌ی $u = f(x) = (f^1(x), \ldots, f^q(x))$ باشد. در این صورت، فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه n-ام را با

$$U^{(n)} := U \times U_1 \times \cdots \times U_n, \tag{۱۱.۲}$$

نمایش می‌دهیم، به‌طوری که U_iها به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ نماینده فضای مشتقات جزئی از مرتبه‌ی i-ام می‌باشند. می‌توان مشاهده نمود که بعد فضای (۱۱.۲) برابر است با

$$q + qp_1 + qp_2 + \cdots + qp_k = q\binom{p+n}{n} := qp^{(n)},$$

توجه نمایید که از این به بعد هر نقطه در $U^{(n)}$ را به‌صورت $u^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. درنتیجه، $u^{(n)}$ دارای $qp^{(n)}$ متغیر متمایز به شکل $u_J^\alpha, \alpha = 1, \ldots, q$ می‌باشد و $J = (j_1, \ldots, j_k)$ یک اندیس چندگانه با شرایط $0 \leq k \leq p, 1 \leq j^k \leq p$ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۲. با اضافه نمودن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$، به فضای

$$J^{(n)} = X \times U^{(n)}, \tag{۱۲.۲}$$

دست می‌یابیم که به آن فضای جت مرتبه n-ام تابع $u = f(x)$ گفته و آن را با نماد $J^{(n)}f$ نشان می‌دهیم. واضح است که بعد فضای (۱۲.۲) برابر با $p + qp^{(n)}$ می‌باشد.

با بررسی ساده‌ای می‌توان ملاحظه نمود که $J^{(n)}$ دارای ساختار هندسی می‌باشد و این ساختار چیزی نیست جز یک کلاف برداری روی منیفلد X که بعد تارهای آن برابر با $qp^{(n)}$ می‌باشد. در حقیقت، این فضا دقیقا فضای لازم برای نشان دادن بسط تیلور تابع f به همراه متغیرهایش می‌باشد.

مثال ۲.۲.۲. تابع $u = f(x, y, z)$ را که شامل سه متغیر مستقل و یک متغیر وابسته می‌باشد را در نظر بگیرید. به منظور یافتن $J^{(2)}$ کافی است که مشتقات جزئی تابع فوق را تا مرتبه دوم بنویسیم، در این صورت داریم:

$$J^{(2)} = \{(x, y, z; u; u_x, u_y, u_z; u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{yz}, u_{xz})\} \simeq \mathbb{R}^8.$$

تعریف ۳.۲.۲. به فضای جت مرتبه n-ام یک تابع به غیر از متغیرهای مستقل آن، امتداد مرتبه n-ام آن تابع گفته می‌شود و آن را با نماد $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ معرفی می‌نماییم. بنابراین، با توجه به تعریف فوق امتداد مرتبه دوم تابع $u = f(x, y, z)$ عبارت است از:

$$f^2(x, y, z) = (f; f_x, f_y, f_z; f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xz}, f_{xy}, f_{yz}).$$

۳.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل

اکنون، با توجه به تعریف که برای فضای جت ارائه نمودیم، قادر خواهیم بود که به بیان دقیق‌تر مفهوم یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل بپردازیم.

تعریف ۱.۳.۲. منظور از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مانند Δ که شامل m معادله مرتبه n-ام با فضای کلی E می‌باشد، تابعی به‌صورت

$$\Delta : J^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \tag{۱۳.۲}$$

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, m, \tag{۱۴.۲}$$

می‌باشد.

شایان ذکر است که با بازنویسی (۱۴.۲) به صورت $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \ldots, \Delta_m(x, u^{(n)}))$ به ازای هرتابع هموار $\Delta_i(x, u^{(n)})$ ، به این نتیجه می‌رسیم که (۱۳.۲) یک دستگاه شامل m-معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) با p-متغیر مستقل و q-متغیر وابسته خواهد بود. بدیهی است که به ازای $p = 1$ دستگاه (۱۳.۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۲. منظور از یک جواب هموار از دستگاه معادلات (۱۴.۲) تابعی هموار مانند $u = f(x)$ است، به‌طوری که:

$$\Delta_\nu(x, f^{(n)}(x)) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

۴.۲ امتداد دهی عمل گروه

تعریف ۱.۴.۲ (امتداددهی عمل گروه)**.** فرض کنید که G یک گروه از تبدیلات باشد که روی یک زیرمجموعه باز فضای کامل E مانند $\mathcal{O}$ عمل می‌کند. این عمل را می‌توان به فضای جت مرتبه n-ام $\mathcal{O}$ یعنی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ ترفیع داد، که به آن امتداد مرتبه n-ام عمل گروه G روی $\mathcal{O}$ گفته و آن را با $G^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارتی دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه n-ام تابع $u = f(x)$ می‌باشد. قابل ذکر است که این فرآیند بدین گونه است که هرگاه g یک تبدیل از گروه G باشد، آن‌گاه با در نظر گرفتن g به‌عنوان یک تابع به‌صورت $g : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ ، امتداد آن روی $\mathcal{O}$ به‌صورت:

$$g^{(n)} : J^{(n)}(\mathcal{O}) \longrightarrow J^{(n)}(\mathcal{O}),$$

با ضابطه‌ی $g^{(n)} \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x_0}, \tilde{u_0}^{(n)})$ به ازای نقطه دلخواه $(x_0, u_0^{(n)}) \in J^{(n)}(\mathcal{O})$ تعریف می‌شود.

قضیه ۲.۴.۲. *فرض کنید که M یک زیرمجموعه باز $X \times U$ باشد و $\Delta(x, u^{(n)})$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از رتبه m روی M به‌طوری که $\varphi(\Delta) \subset M^{(n)}$ است. در این صورت G گروه موضعی از تبدیلات روی M است که امتداد میدان برداری آن روی $\varphi(\Delta)$ ناوردا باشد. به این معنی که به ازای هر $(x, u^{(n)}) \in \varphi(\Delta)$ و تمام $g \in G$ ، $g^{(n)}(x, u^{(n)}) \in \varphi(\Delta)$ باشد، آن‌گاه G یک گروه تقارن دستگاه معادلات فوق است.*

برهان. [۲۵]. □

۵.۲ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌ها

همان‌طور که در بخش گذشته اشاره شد، عمل یک گروه قابل امتداد به روی فضای جت می‌باشد. در این بخش، نشان می‌دهیم که میدان‌های برداری را نیز می‌توان امتداد داد که از آن‌ها به‌عنوان مولدهای بی‌نهایت کوچک یاد می‌گردد. قابل ذکر است که این فرآیند نخستین گام در راستای یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود.

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنید که $\mathcal{O} \subset E$ مجموعه‌ای باز بوده و $F(x, u^{(n)})$ تابعی هموار روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ باشد. منظور از مشتق کامل F نسبت به x^i که آن را با $D_iF(x, u^{(n+1)})$ نمایش می‌دهیم، تابعی هموار است که روی $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ تعریف شده و دارای این ویژگی مهم می‌باشد که هرگاه $u = f(x)$ تابعی هموار باشد، آن‌گاه:

$$D_iF(x, f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}[F(x, u^{(n)})],$$

شایان ذکر است که لم زیر که به‌طور متوسط از قاعده مشتق زنجیری حاصل می‌گردد، فرمول صریحی به منظور محاسبه مشتق کامل در قالب یک عملگر مشتق ارائه می‌نماید [۲۷].

لم ۲.۵.۲. *تابع $F(x,u^{(n)})$ را روی فضای جت $J^{(n)}(\mathcal{O})$ در نظر بگیرید. هرگاه $J=(j_1,\ldots,j_k)$ یک اندیس چندگانه بوده و $u^\alpha_{J,i}=\frac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i}$ باشد. آن‌گاه:*

$$D_iF=\frac{\partial F}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u^\alpha_{J,i}\frac{\partial F}{\partial u^\alpha_J}, \tag{۱۵.۲}$$

به‌عنوان مثال، هرگاه $E\simeq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ با مختصات (x,y,u) باشد، آن‌گاه:

$$D_xF=\frac{\partial F}{\partial x}+u_x\frac{\partial F}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_x}+u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_y}+u_{xxx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}+\ldots,$$
$$D_yF=\frac{\partial F}{\partial y}+u_y\frac{\partial F}{\partial u}+u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_x}+u_{yy}\frac{\partial F}{\partial u_y}+u_{xxy}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}+\ldots,$$

به ترتیب مشتق کامل F نسبت به x,y می‌باشند. به همین ترتیب، مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه $J=(j_1,\ldots,j_k)$ به‌صورت

$$D_J=D_{j_1}\cdot D_{j_2}\cdots D_{j_k},$$

بیان نمود.

اکنون شرایط مهیا می‌باشد تا به ارائه قضیه‌ای بپردازیم که نحوه‌ی محاسبه امتداد میدان‌های برداری را به‌دست می‌دهد.

تعریف ۳.۵.۲. گیریم $\mathcal{O}$ یک زیرمجموعه باز از $E=X\times U$ و $\mathbf{v}$ یک میدان برداری روی $\mathcal{O}$ با گروه یک-پارامتری $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ باشد. امتداد مرتبه n-ام $\mathbf{v}$ را با $\mathbf{v}^{(n)}$ نشان می‌دهیم، یک میدان برداری روی $J^{(n)}\mathcal{O}$ بوده که به آن مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک-پارامتری $\left[\exp(\varepsilon\mathbf{v})\right]^{(n)}$ می‌گویند. بدین معنا که:

$$\mathbf{v}^{(n)}\Big|_{(x,u^{(n)})}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left[\exp(\varepsilon\mathbf{v})\right]^{(n)}(x,u^{(n)}),\qquad (x,u^{(n)})\in J^{(n)}(\mathcal{O}), \tag{۱۶.۲}$$

مثال ۴.۵.۲. عمل گروه $SO(2)$ روی $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v}=-u\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial u},$$

نظیر عمل گروه یک-پارامتری

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x,u)=(x\cos\varepsilon-u\sin\varepsilon,x\sin\varepsilon+u\cos\varepsilon),$$

می‌باشد. مطابق رابطه (۱۶.۲) داریم :

$$[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]^{(n)}(x,u,u_x)=\left(x\cos\varepsilon-u\sin\varepsilon,x\sin\varepsilon+u\cos\varepsilon,\frac{\sin\varepsilon+u_x\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon-u_x\sin\varepsilon}\right),$$

به کمک فرمول (۱۶.۲) می‌توان دید که تبدیل برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(1)}=-u\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial u}+(1+u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x}. \tag{۱۷.۲}$$

تعریف ۵.۵.۲. دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta:J^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ از رتبه‌ی ماکسیمال است هرگاه ماتریس ژاکوبین آن

$$J_\Delta(x,u^{(n)})=\left(\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial x^i},\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial u^\alpha_J}\right)_{m\times(p+qp^n)},$$

از رتبه m باشد.

قضیه ۶.۵.۲. *فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبه‌ی ماکسیمال تعریف‌شده در یک زیرمجموعه باز از E مانند $\mathcal{O}$ باشد، اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و $\mathbf{v}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، آن‌گاه $\Delta = 0$، G را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد. اگر:*

$$\mathbf{v}^{(n)}(\Delta) = 0, \qquad \text{هرگاه} \qquad \Delta = 0. \tag{۱۸.۲}$$

برهان. با استفاده از قضایای ۲.۴.۲ و ۵.۱۰.۱ ثابت می‌شود. □

روش به کارگیری قضیه فوق مستلزم ارائه فرمول صریحی برای محاسبه امتداد یک میدان برداری است. در مباحث آینده این موضوع را جست و جو می‌کنیم. قضیه ۶.۵.۲ نحوه ارتباط بین گروه‌های تقارن و ناوردایی یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تحت مولدهای بی‌نهایت کوچک را بیان می‌دارد. محاسبه امتداد یک میدان برداری برخلاف امتداد عمل گروه نظیر آن سرراست‌تر است. برای روشن شدن این موضوع از حالت‌های ساده‌تر آغاز می‌کنیم. ابتدا به امتداد عمل گروه یک-پارامتری که تنها روی متغیرهای مستقل عمل می‌کند، می‌پردازیم. به بیان دیگر میدان برداری

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

را روی مجموعه $\mathcal{O} \subset E = X \times U$ در نظر می‌گیریم. گروه تبدیل نظیر این میدان برداری به‌صورت

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon(x, u) = (\chi_\varepsilon(x), u), \qquad g_\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v}),$$

می‌باشد به‌طوری که χ یک دیفئومورفیسم روی X است. اگر قرار دهیم $\tilde{x} = \chi^i_\varepsilon(x)$ در این صورت داریم:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\chi^i_\varepsilon(x)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \xi^i(x), \tag{۱۹.۲}$$

در ادامه فرض می‌کنیم $U \simeq \mathbb{R}$، سپس محاسبات را به حالت کلی $U \simeq \mathbb{R}^q$ تعمیم می‌دهیم. طبق تعریف فضای جت،

$$J^1(\mathcal{O}) = \{(x, u^{(1)}) = (x, u, u_j) | x \in X, u \in U\},$$

به‌طوری که $u_j = \dfrac{\partial u}{\partial x^j}$. حال اگر $(x, u^{(1)})$ نقطه‌ای دلخواه از $J^1(\mathcal{O})$ بوده و $u = f(x)$ تابعی هموار روی X باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} g^{(1)}_\varepsilon \cdot (x, u^{(1)}) &= (\tilde{x}, \tilde{u}^{(1)}) \\ &= (\tilde{x}, \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})) \\ &= (\tilde{x}, f(\chi^{-1}_\varepsilon(\tilde{x}))) \\ &= (\tilde{x}, f(\chi_{-\varepsilon}(\tilde{x}))), \qquad \bar{f}_\varepsilon = g_\varepsilon \cdot f, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{u}_j = \frac{\partial \bar{f}_\varepsilon}{\partial \bar{x}^j}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^k}(\chi_{-\varepsilon}(\bar{x})) \cdot \frac{\partial \chi^k_\varepsilon}{\partial \bar{x}^j}(\bar{x}), \tag{۲۰.۲}$$

اما بنابر وارون‌پذیر بودن χ، $\chi_{-\varepsilon}(\bar{x}) = x$ ، پس

$$\bar{u}_j = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \chi^k_{-\varepsilon}}{\partial \bar{x}^j}(\chi_\varepsilon(x))u_k,$$

فرمولی صریح برای محاسبه‌ی عمل امتدادیافته روی مشتقات مرتبه اول به‌دست می‌دهد. برای یافتن مولد بی‌نهایت کوچک نظیر عمل $g^{(1)}$، با مشتق‌گیری از فرمول‌های امتداد نسبت به ε در نقطه $\varepsilon = 0$ مولد بی‌نهایت کوچک ساخته‌شده به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{q} \phi^j(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^j}, \tag{۲۱.۲}$$

به‌دست می‌آید، به‌طوری که:

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \chi^k_{-\varepsilon}}{\partial \bar{x}^j}\big(\chi_\varepsilon(x)\big)u_k,$$

به جهت هموار بودن توابع با تغییر مراتب مشتق‌گیری دو نوع ضریب برای u_k به‌دست می‌آید: یکی آن‌هایی که با استفاده از رابطه‌ی (۱۹.۲) و فرض $\chi_0(x) = x$ به شکل

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\left[\frac{\mathrm{d}\chi^k_{-\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right]\big(\chi_\varepsilon(x)\big)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\mathrm{d}\chi^k_{-\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\right](x) = -\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x),$$

می‌باشد و دومی که با دو بار مشتق گیری نسبت به مولفه‌های x به فرم

$$\sum_l \frac{\partial^2 \chi^k_{-\varepsilon}}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^{-l}}\big(\chi_{-\varepsilon}(x)\big)\frac{\mathrm{d}\chi^l_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}(x)\Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

بیان می‌شود. پس

$$\phi^j = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \cdot u_k, \tag{۲۲.۲}$$

ضرایب فرمول امتداد در (۲۱.۲) را مشخص می‌کند.

قضیه ۷.۵.۲. *گیریم*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $\mathcal{O} \subset E$ باشد. امتدادمرتبه n-ام میدان برداری $\mathbf{v}$ یک میدان برداری به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J \phi^J_\alpha(x, u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \tag{۲۳.۲}$$

روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ می‌باشد که ضرایب ϕ^J_α در (۲۳.۲) با فرمول

$$\phi^j_\alpha(x, u^{(n)}) = D_J\big(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^\alpha_i\big) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^\alpha_{J,i}; \tag{۲۴.۲}$$

ساخته می‌شوند. شایان ذکر است عبارت

$$Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^\alpha_i,$$

در (۲۴.۲) را مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$ می‌نامیم.

برهان. قضیه را به ازای $n = 1$ ثابت می‌کنیم. گیریم $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v})$ گروه یک-پارامتری نظیر میدان برداری $\mathbf{v}$ باشد که تبدیل آن با فرمول زیر است:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\phi_\varepsilon(x, u), \psi_\varepsilon(x, u)),$$

و

$$\xi^i(x,u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\phi^i_\varepsilon(x,u), \qquad i = 1,2,\dots,p,$$
$$\phi_\alpha(x,u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\psi^\alpha_\varepsilon(x,u), \qquad \alpha = 1,2,\dots,q, \tag{۲۵.۲}$$

به‌طور کلی $\phi^i_\varepsilon, \psi^\alpha_\varepsilon$ مولفه‌های $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ هستند. به ازای $(x,u) \in E$ و $(x,u^{(1)}) \in J^1(\mathcal{O})$ تابع $u = f(x)$ با امتداد مرتبه $u^{(1)} = f^{(1)}(x)$ و مولفه‌های

$$u^\alpha = f^\alpha(x), \qquad u^\alpha_i = \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^i}.$$

مفروض است. با انتخاب ε به اندازه کافی کوچک تبدیل f تحت g_ε خوش‌تعریف است و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\bar{u} = \bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\bar{x}) = \big[\psi_\varepsilon \circ (I\mathrm{d} \times f)\big] \circ \big[\phi_\varepsilon \circ (I\mathrm{d} \times f)^{-1}(\bar{x})\big],$$

با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیری ماتریس ژاکوبین

$$J\bar{f}_\varepsilon(x) = \left(\frac{\partial \bar{f}^\alpha_\varepsilon}{\partial \bar{x}^i}\right),$$

با فرض $x = [\phi_\varepsilon \circ (I\mathrm{d} \times f)]^{-1}(\bar{x})$ به شکل

$$J\bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) = J[\psi_\varepsilon \circ (I\mathrm{d} \times f)](x) \cdot \{J[\phi_\varepsilon \circ (I\mathrm{d} \times f)(x)\}, \tag{۲۶.۲}$$

نوشته می‌شود. بسط فرمول (۲۶.۲) امتداد مرتبه اول $g^{(1)}_\varepsilon$ را به‌دست می‌دهد. برای یافتن مولد بی‌نهایت کوچک $\mathbf{v}^{(1)}$، باید از (۲۶.۲) نسبت به ε مشتق بگیریم و در نهایت قرار دهیم $\varepsilon = 0$ و اگر $\Xi(\varepsilon)$ یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع وابسته به ε باشد، آن‌گاه

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[\Xi(\varepsilon)^{-1}] = -\Xi(\varepsilon)^{-1}\frac{\mathrm{d}\Xi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\Xi(\varepsilon)^{-1},$$

هرگاه $\varepsilon = 0$ باشد داریم:

$$\phi_0(x, f(x)) = x, \qquad \psi_0(x, f(x)) = f(x), \tag{۲۷.۲}$$

بنابراین اگر I ماتریس همانی $p \times p$ باشد، آن‌گاه:

$$J[\phi_0 \circ (I\mathrm{d} \times f)](x) = I\mathrm{d}, \qquad J[\psi_0 \circ (I\mathrm{d} \times f)](x) = Jf(x),$$

حال با مشتق‌گیری از (۲۶.۲) در نقطه $\varepsilon = 0$، و استفاده از قاعده لایپ‌نیتس روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J\bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J[\psi_\varepsilon \circ (I\mathrm{d} \times f)](x) - Jf(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} J[\phi_\varepsilon \circ (I\mathrm{d} \times f)](x) \\ &= J[\phi \circ (I\mathrm{d} \times f)](x) - Jf(x) \cdot J[\xi \circ (I\mathrm{d} \times f)](x),\end{aligned} \tag{۲۸.۲}$$

توجه شود که در تساوی دوم عبارت بالا $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^p)^T$ و $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_q)^T$ دو بردار ستونی هستند. درایه‌های ماتریس رابطه (۲۸.۲) ضرایب ϕ^k_αی عبارت $\frac{\partial}{\partial u^\alpha_k}$ را در $\mathbf{v}^{(1)}$ مشخص می‌کند، به‌عنوان مثال درایه‌ی (a,k)-ام برابر است با:

$$\phi^k_\alpha(x, u^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial x^k}\big[\phi_\alpha(x, f(x))\big] - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}\big[\xi^i(x, f(x))\big],$$

لذا اگر قرار دهیم $u^\alpha_{k,i} = \dfrac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^k \partial x^i}$ ، با به‌کارگیری مشتق کامل رابطه بالا به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \phi^k_\alpha(x, u^{(1)}) &= D_k\big[\phi_\alpha(x,u)\big] - \sum_{i=1}^{p} D_k\big[\xi^k(x,u)\big]u^k_i \\ &= D_k\big[\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i\big] + \sum \xi^i u^\alpha_{ki}, \end{aligned} \tag{۲۹.۲}$$

حال قضیه را در حالت عمومی اثبات می‌کنیم. ابتدا باید توجه کنیم که $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ را می‌توان به‌عنوان زیرفضایی از $J^1(J^n(\mathcal{O}))$ در نظر گرفت (زیرا مشتق مرتبه $(n+1)$-ام u^α_J را می‌توان به‌عنوان مشتق مرتبه اول مشتقات مرتبه اول n-ام در نظر گرفت). پس به کمک استقرا می‌توان $\mathbf{v}^{(n)}$ را از روی $\mathbf{v}^{(n-1)}$ بدین صورت ساخت. فرض کنیم $\mathbf{v}^{(n-1)}$ یک میدان برداری روی $J^{(n-1)}(\mathcal{O})$ باشد، بنابراین با یک بار امتداد دادن آن یک میدان برداری در $J^1(J^{(n-1)}(\mathcal{O}))$ می‌رسیم، که ضرایب آن به ازای اندیس چندگانه $1 \le k \le p$ ، $J = (j^1, \ldots, j^k)$ ، $\alpha = 1, \ldots, q$ برابر با $u^\alpha_{J,k} = \dfrac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^k}$. حال با توجه به (۲۹.۲) ضرایب $\dfrac{\partial}{\partial u^\alpha_{j,k}}$ در امتداد مرتبه اول $\mathbf{v}^{(n-1)}$ برابر خواهند بود با:

$$\phi^{J,k}_\alpha = D_k\phi^J_\alpha - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^k \cdot u^\alpha_{J,i}, \tag{۳۰.۲}$$

حال کافی است نشان دهیم فرمول (۲۴.۲) در (۳۰.۲) صدق کند. این امر در محاسبات زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \phi^{J,k}_\alpha &= D_k\{D_J(\phi_\alpha - \textstyle\sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_{J,i}\} - \sum_{i=1}^p D_k\xi \cdot u^\alpha_{J,i} \\ &= D_kD_J(\phi_\alpha - \textstyle\sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^p (D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} + \xi^i u_{J,i,k}) - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u^\alpha_{J,i} \\ &= D_kD_J(\phi_\alpha - \textstyle\sum_{i=1}^p \xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i,k}. \end{aligned}$$

□

تعریف ۸.۵.۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات نقطه‌ای یا برخوردی باشد. یک ناوردای دیفرانسیلی تابعی دیفرانسیلی مانند $I : J^{(n)}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوری که:

$$I(g^{(n)} \cdot (x, u^{(n)})) = I(x, u^{(n)}).$$

مثال ۹.۵.۲. گروه دوران‌های $G = SO(2)$ که روی $X \times U$ با مولد $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$ عمل می‌کنند را در نظر می‌گیریم:

ناوردای دیفرانسیلی مرتبه اول در واقع ناوردای معمولی از امتداد اول $SO(2)^{(n)}$ با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v}^{(1)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

می‌باشد. اگر متغیرهای (x, u, u_x) را با (x, y, z) نشان دهیم، داریم:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}^{(1)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

توجه کنید که میدان برداری $\mathbf{w}$ روی $\mathbb{R}^3$ هرگز صفر نمی‌شود بنابراین در همسایگی‌ای از هر نقطه در $\mathbb{R}^3$ دو ناوردای مشتق تابعی از گزوه یک-پارامتری تولیدشده به‌وسیله‌ی $\mathbf{w}$ وجود دارد. سیستم مشخصه در این

مورد به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2},$$

با انتگرال گرفتن از تساوی اول ناوردا $r = \sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد. برای پیدا کردن ناوردای دیگر x را با $\sqrt{r^2-y^2}$ جایگزین می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2-y^2}} = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2},$$

جواب آن $\arcsin\frac{y}{r} = \arctan z + k$ برای ثابت دلخواه k می‌باشد. بنابراین

$$\arctan z - \arcsin\frac{y}{r} = \arctan z - \arctan\frac{y}{x},$$

ناوردای دیفرانسیلی دوم برای $\mathbf{w}$ می‌باشد. بیان ساده‌تری از این ناورداها با گرفتن تانژانت به‌دست می‌آید. $\frac{xz-y}{yz+x}$ ، بنابراین با توجه به تغییر متغیر اولیه

$$\frac{xu_x-u}{x+uu_x}, \qquad \sqrt{x^2+u^2}.$$

مجموعه کاملی از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه اول برای $SO(2)$ تشکیل می‌دهند.

قضیه ۱۰.۵.۲. *فرض کنیم $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ میدان‌های برداری روی $M \subset X \times U$ باشند. بنابراین امتداد آن‌ها شرایط زیر را دارد:*

۱. $(c\mathbf{v}+c'\mathbf{w})^{(n)} = c\mathbf{v}^{(n)} + c'\mathbf{w}^{(n)},$

۲. $[\mathbf{v},\mathbf{w}]^{(n)} = [\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{w}^{(n)}],$

برهان. [۲۷]. □

مثال ۱۱.۵.۲. معادله برگر

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{۳۱.۲}$$

معادله‌ای است غیرخطی که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف شده و به معادله پتانسیل برگر معروف است. چون معادله مرتبه دو است، بنابراین لازم است که امتداد مرتبه دوم میدان برداری

$$\mathbf{v} = \xi^1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

را که روی E تعریف می‌شود تا مرحله دو امتداد داده و با استفاده از قضیه ۷.۵.۲ تقارن‌ها را بیابیم. امتداد مرتبه دوم $\mathbf{v}$ برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

و با استفاده از فرمول (۲۴.۲) و این‌که مشخصه میدان برداری $\mathbf{v}$ ، $Q = \phi - \xi_1 u_x - \xi_2 u_t$ است، ضرایب

$\mathbf{v}^2$ یعنی $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{xt}, \phi^{tt}$ را در زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
\phi^x &= D_xQ+\xi^1u_{xx}=\phi_x+(\phi_u-\xi^1_x)u_x-\xi^2_xu_t-\xi^1_uu_x^2-\xi^2_uu-xu_t,\\
\phi^t &= D_tQ+\xi^1u_{xt}+\xi^2u_{tt}=\phi_t-\xi^1_tu_x+(\phi_u-\xi^2_t)u_t-\xi^1_uu_xu_t-\xi^2_uu_t^2,\\
\phi^{xx} &= D_x^2Q+\xi^1u_{xxx}+\xi^2u_{xxt}=\phi_{xx}+(2\phi_{xu}\xi^1_{xx})u_x-\xi^2_{xx}u_t+(\phi_{uu}-2\xi^1_{xu})u_x^2\\
&-2\xi^2_{xu}u_xu_t-\xi^1_{uu}u_x^3-\xi^2_{uu}u_x^2u_t+(\phi_u-2\xi^1_x)u_{xx}-2\xi^2_xu_{xt}-3\xi^1_uu_xu_{xx}-2\xi^2_uu_xu_{xt},\\
\phi^{xt} &= D_xD_tQ+\xi^1u_{xxt}+\xi^2u_{xtt}=\phi_{xt}+(\phi_{ut}-\xi^1_{xt})u_x+(\phi_{xu}-\xi^2_{xt})u_t\\
&-\xi^1_{ut}u_x^2-\xi^2_{xu}u_t^2+(\phi_{uu}-\xi^1_{xu}-\xi^1_{ut})u_xu_t-\xi^1_{uu}u_x^2u_t-\xi^2_{uu}u_xu_t^2-\xi^1_tu_{xx}\\
&+(\phi_u-\xi^1_x-\xi^2_t)u_{xt}-\xi^1_uu_{xx}u_t-2\xi^1_uu_xu_{xt}-2\xi^2_uu_tu_{xt}-\xi^2_xu_{tt}-\xi^2_uu_xu_{tt},\\
\phi^{tt} &= D_t^2Q+\xi^1u_{ttt}+\xi^2u_{xtt}=\phi_{tt}+(2\phi_{ut}-\xi^1_{tt})u_t-\xi^1_{tt}u_x\\
&+(\phi_{uu}-2\xi^2_{ut})-2\xi^1_{ut}u_xu_t-\xi^2_{uu}u_t^3-\xi^1_{uu}u_xu_t^2+(\phi_u-2\xi^2_t)u_{tt}\\
&-2\xi^1_tu_{xt}-3\xi^2_uu_tu_{tt}-\xi^1_uu_xu_{tt}-2\xi^1_uu_tu_x.
\end{aligned}$$

حال بر اثر $\mathbf{v}^{(2)}$ بر معادله برگر داریم:

$$\phi^t=\phi^{xx}+2u_x\phi^x, \tag{۳۲.۲}$$

با جایگذاری ضرایب امتداد در (۳۱.۲) به دستگاه PDE خطی

$$\begin{aligned}
\phi_t-\xi^1_tu_x+(\phi_u-\xi^2_t)u_t-\xi^1_uu_xu_t-\xi^2_uu_t^2 &= \phi_{xx}+(2\phi_{xu}-\xi^1_{xx})u_x-\xi^2_{xx}u_t\\
&+(\phi_{uu}-2\xi^1_{xu})u_x^2-2\xi^2_{xu}u_xu_t\\
&-\xi^1_{uu}u_x^3-\xi^2_{uu}u_x^2u_t+(\phi_u-2_x)u_{xx}\\
&-2\xi^2_xu_{xt}-3\xi^1_uu_xu_{xx}-\xi^2_uu_tu_{xx}\\
&-2\xi^2_uu_xu_{xt}+2\phi_xu_x+2(\phi_u-\xi^1_x)u_x^2\\
&-2\xi^2_xu_tu_x-2\xi^1_uu_x^3-2\xi^2_uu_x^2u_t,
\end{aligned}$$

با جایگذاری $u_t=u_x^2+u_{xx}$ در بالا داریم:

$$\begin{aligned}
\phi_t-\xi^1_tu_x+(\phi_u-\xi^2_t)u_t-\xi^1_uu_xu_t-\xi^2_uu_t^2 &= \phi_{xx}+(2\phi_{xu}-\xi^1_{xx})u_x-\xi^2_{xx}u_t\\
&+(\phi_{uu}-2\xi^1_{xu})u_t-(\phi_{uu}-2\xi^1_{xu})u_{xx}\\
&-2\xi^2_{xu}u_xu_t-\xi^1_{uu}u_x^3-\xi^2_{uu}u_t^2+\xi^2_{uu}u_tu_{xx}\\
&+(\phi_u-2\xi^1_x)u_{xx}-2\xi^2_xu_{xt}-3\xi^1_uu_xu_{xx}\\
&-\xi^2_uu_tu_{xx}-2\xi^2_uu_xu_{xt}+2\phi_xu_x\\
&+2(\phi_u-\xi^1_x)u_t-2(\phi_u-\xi^1_x)u_{xx}\\
&-2\xi^2_xu_tu_x-2\xi^1_uu_x^3-2\xi^2_uu_t^2+2\xi^2_uu_tu_{xx},
\end{aligned}$$

حال با مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات تابع u در دو طرف تساوی بالا به جدول زیر می‌رسیم:

تک جمله‌ایها	ضرایب		
۱	ϕ_{xx}	$=\phi_t$	(۱)
u_x	$2\phi_{xu}-\xi^1_{xx}+2\phi_x$	$=-\xi^1_t$	(۲)
u_t	$\xi^2_{xx}+\phi_{uu}-2\xi^1_{xu}+2\phi_u-2\xi_x$	$=\phi_u-\xi^2_t$	(۳)
u_xu_t	$-2\xi^2_{xu}-2\xi^2_x$	$=\xi^1_u$	(۴)
u_t^2	$-\xi^2_{uu}-2\xi^2_u$	$=\xi^2_u$	(۵)
u_{xx}	$2\xi^1_{xu}-\phi_{uu}+\phi_u-2\xi^1_x-2\phi_u+2\xi^1_x$	$=0$	(۶)
u_x^3	$\xi^1_{uu}-2\xi^1_u$	$=0$	(۷)
u_tu_{xx}	$\xi^2_{uu}-\xi^2_u-2\xi^2_u$	$=0$	(۸)
u_{xt}	$-2\xi^2_x$	$=0$	(۹)
u_xu_{xx}	$-3\xi^1_u$	$=0$	(۱۰)
u_xu_{xt}	$-2\xi^2_u$	$=0$	(۱۱)

از معادله‌ی (۹) و (۱۱) مشخص می‌شود که ξ^2 نسبت به x و u مستقل است. هم‌چنین از معادله‌ی (۱۰) مشخص می‌شود که ξ^1 نسبت به u مستقل است. از معادله‌ی (۶) نتیجه می‌شود $\phi_u = -\phi_{uu}$ بنابراین $\phi=\alpha(x,t)e^{-u}+\beta(x,t)$. پس از معادله‌ی (۳) نتیجه می‌شود که $\xi^2_t=2\xi^1_x$ پس ξ^1 نسبت به x از درجه اول است یعنی $\xi^1_{xx}=0$ پس با توجه به معادله‌ی (۲) نتیجه می‌شود $\xi^1_t=-2\phi_{xu}-2\phi_x$ و در این صورت:

$$\xi^1_t=-2\phi_{xu}-2\phi_x=-2\beta_x\Rightarrow\beta=-\tfrac{1}{8}\xi^2_{tt}x^2-\tfrac{1}{2}\sigma_tx+\rho(t).$$

و $\phi_t=\phi_{xx}$ که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&\xi^1=c_1+c_4x+2c_5+4c_6xt,\\
&\xi^2=c_2+2c_4t+4c_6t^2,\\
&\phi=\alpha(x,t)e^{-u}+c_3-c_5x-2c_6t-c_6x^2.
\end{aligned}$$

که $c_1,\dots,c_6$ ثابت‌هایی دلخواه هستند و $\alpha(x,t)$ جواب دلخواهی از معادله حرارت است: $\alpha_t=\alpha_{xx}$
بنابراین فضای جبر لی تقارن‌ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v_1}=\partial_x, && \mathbf{v_2}=\partial_t,\\
&\mathbf{v_3}=\partial_u, && \mathbf{v_4}=x\partial_x+2t\partial_t,\\
&\mathbf{v_5}=2t\partial_x-x\partial_u, && \mathbf{v_6}=4tx\partial_x+4t^2-(x^2+2t)\partial_u,\\
&\mathbf{v_\alpha}=\alpha(x,t)e^{-u}\partial_u.
\end{aligned}$$

در نهایت با محاسبه تابع نمایی نظیر این میدان‌های برداری داریم:

$$\begin{aligned}
g_1 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_1)(x,t,u) = (x+\varepsilon, t, u),\\
g_2 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_2)(x,t,u) = (x, t+\varepsilon, u),\\
g_3 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_3)(x,t,u) = (x, t, u+\varepsilon),\\
g_4 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_4)(x,t,u) = (e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}t, u),\\
g_5 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_5)(x,t,u) = (x+2\varepsilon t, t, -y\varepsilon^2 - x\varepsilon + u),\\
g_6 &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_6)(x,t,u) = \left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}, u\sqrt{1+4\varepsilon t}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}\right),\\
g_\alpha &:= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_\alpha)(x,t,u) = (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}$$

اگر $u = f(x,t)$ یک جواب برای معادله‌ی مذکور باشد و تقارن‌ها را روی آن اثر دهیم، در این صورت یک جواب جدید برای معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
u^1 &= f(x-\varepsilon, t),\\
u^2 &= f(x, t-\varepsilon),\\
u^3 &= f(x, t-\varepsilon),\\
u^4 &= f(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t),\\
u^5 &= f(x-2\varepsilon t, t) + \varepsilon x - \varepsilon^2 t,\\
u^6 &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\} f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right),\\
u^\alpha &= f(x,t) + +\varepsilon\alpha(x,t).
\end{aligned}$$

به‌عنوان مثال بدیهی است که $u = c$ یک جواب از معادله (۳۱.۲) است. لذا با توجه به u^6 یک جواب جدید به شکل $u = \dfrac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\dfrac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}$ به‌دست می آید.

مثال ۱۲.۵.۲. گروه تقارن معادلات گرما را در یک منیفلد یک-بعدی تحلیل می‌کنیم. معادله گرما

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

را در نظر می‌گیریم. در این معادله دو متغیر مستقل x و t و یک متغیر وابسته u داریم، بنابراین $p = 2$ و $q = 1$ و $E = X \times U^{(2)}$. حال میدان برداری متناظر به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۳۳.۲}$$

امتداد دوم آن به‌صورت

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

می‌باشد. طبق محک بی‌نهایت کوچک ناوردایی باید

$$0 = \mathbf{v}^{(2)}(u_t - u_{xx})|_{u_t - u_{xx}=0} = (\varphi^t - \varphi^{xx})|_{u_t - u_{xx}=0}, \tag{۳۴.۲}$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi^t &= D_t\varphi - u_xD_t\xi - u_tD_t\tau\\
&= \varphi_t - \xi_tu_x + (\varphi_u-\tau_t)u_t - \xi_uu_xu_t - \tau_uu_t^2,\\
\varphi^x &= D_x\varphi - u_xD_x\xi - u_tD_x\tau\\
&= \varphi_{x-1}(\varphi_u-\xi_x)u_x - \tau_xu_t - \xi_uu_x^2 - \tau_uu_xu_t,\\
\varphi^{xx} &= D_x\varphi^x - u_{xx}D_x\xi - u_{xt}D_x\tau\\
&= \varphi_{xx} + 2(\varphi_{xu}-\xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu}-2\xi_{\tau u})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_xu_t\\
&-\xi_{uu}u_x^3 - \xi_{uu}u_x^2u_t + (\varphi_u-2\tau_x)u_{xx} - 2\xi_xu_{xt} - 3\xi_uu_xu_{xx}\\
&-\tau_uu_tu_{xx} - 2\xi_uu_xu_{xt}.
\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۳۴.۲) و رابطه محاسبه‌شده برای φ^t و φ^{xx} بایستی

$$\begin{aligned}
0 =&\varphi_t - \xi_tu_x + (\varphi_u-\tau_t)u_t - \xi_xu_xu_t - \tau_uu_t^2 - \varphi_{xx} - (2\varphi_{xu}-\xi_{xx})u_x\\
&+\tau_{xx}u_t - (\varphi_{uu}+2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_xu_t + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2u_t\\
&-(\varphi_u-2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_xu_{xt} + 3\xi_uu_xu_{xx} + \tau_uu_tu_{xx} + 2\tau_uu_xu_{xt}.
\end{aligned}$$

با قرار دادن $u_t = u_{xx}$ داریم:

$$\begin{aligned}
0 =&\varphi_t - \xi_tu_x + (\varphi_u-\tau_t)u_{xx} - \xi_uu_xu_{xx} - \tau_uu_{xx}^2 - \varphi_{xx} - (2\varphi_{xu}-\xi_{xx})u_x\\
&+\tau_{xx}u_{xx} - (\varphi_{uu}+2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_xu_{xx} + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2u_{xx}\\
&-(\varphi_u-2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_xu_{xt} + 3\xi_uu_xu_{xx} + \tau_uu_{xx}u_{xx} + 2\tau_uu_xu_{xt}.
\end{aligned}$$

ضرایب یک جمله‌ای‌های متشابه را با هم برابر قرار می‌دهیم.

تک جمله‌ای	ضرایب		
u_xu_{xt}	$-2\tau_u$	=	0
u_{xt}	$-2\tau_x$	=	0
u_{xx}^2	$-\tau_u$	=	$-\tau_u$
$u_x^2u_{xx}$	$-\tau_{uu}$	=	0
u_xu_{xx}	$-2\tau_{xu}-3\xi_u$	=	$-\xi_u$
u_{xx}	$-\tau_{xx}+\phi_u-2\xi_x$	=	$\phi_u-\tau_t$
u_x^3	$-\xi_{uy}$	=	0
u_x^2	$\phi_{uu}-2\xi_{xy}$	=	0
u_x	$2\phi_{xu}-\xi_{xx}$	=	$-\xi_t$
۱	ϕ_{xx}	=	ϕ_t

باحل معادلات دیفرانسیل خطی قبل داریم:

$$\zeta = C_1 + C_4x + 2C_5t + 4C_6xt,$$
$$\tau = C_2 + 2C_4t + 4C_6xt^2,$$
$$\varphi = (C_3 - C_5x - 2C_6t - C_6x^2)u + \alpha(x,t),$$

که $\alpha_t = \alpha_{xx}$ جبر لی تقارن‌های بی‌نهایت کوچک به‌وسیله میدان‌های برداری زیر تولید می‌شود:

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x,$$
$$\mathbf{v}_2 = \partial_t,$$
$$\mathbf{v}_3 = u\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 2t\partial_t,$$
$$\mathbf{v}_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_6 = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2+2t)\partial_u,$$
$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x,u)\partial_u,$$

هر مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک-پارامتری از تبدیلات به شرح زیر است:

$$G_1 : (x+\varepsilon, t, u),$$
$$G_2 : (x, t+\varepsilon, u),$$
$$G_3 : (x, t, e^{\varepsilon}u),$$
$$G_4 : (e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}t, u),$$
$$G_5 : (x+2\varepsilon t, t, u\exp(-\varepsilon x - \varepsilon^2 t)),$$
$$G_6 : \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]\right),$$
$$G_\alpha : (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t)),$$

حال فرض می‌کنیم $u(x,t)$ جوابی از معادله گرما باشد بنابراین$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ جواب جدیدی از آن است. گروه یک-پارامتری

$$G_6(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u}) = \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]\right),$$

را در نظر می‌گیریم. سپس

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = u(x,t)\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]$$
$$= u\left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}\right)\frac{\exp\left[\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right]}{\sqrt{1-4\varepsilon t}},$$

نیز جوابی از معادله گرما می‌باشد. قرار می‌دهیم $u = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}$

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left[\frac{-\varepsilon\tilde{x}^2}{1+4\varepsilon t}\right]}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+4\varepsilon\tilde{t}}}, \quad (۳۵.۲)$$

$\tilde{t}$ را با $\frac{-1}{4\varepsilon}$ (با استفاده از G_2) جایگزین می‌کنیم. بنابراین

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{t}}}\exp[\frac{-\tilde{x}^2}{4\tilde{t}}], \quad t \geq 1, \quad (۳۶.۲)$$

که جواب اساسی معادله گرما می‌باشد.

جبر لی تقارن‌های معادله برگر با جبر لی تقارن‌های معادله انتقال گرما ایزومورف هستند [۳۱]، اما باید توجه داشت که جبر معادله برگر را می‌توان موضعا به یک شبه‌گروه لی با بعد نامتناهی تولیدشده توسط $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_6,\mathbf{v}_\alpha\}$ نظیر کرد.

مثال ۱۳.۵.۲ (معادلات اویلر)**.** مانند مثال‌های قبلی به تشریح روش پایه‌ای برای محاسبه گروه‌های تقارن می‌پردازیم. دستگاه معادلات اویلر برای حرکت مایعات، مایعات ایده‌آل تراکم‌ناپذیر را در نظر می‌گیریم که چهار متغیر مستقل دارد که $\mathbf{x} = (x,y,z)$ مختصات فضایی و t زمان است ، همچنین چهار متغیر وابسته دارد که $\mathbf{u} = (u,v,w)$ مختصات سرعت و p فشار است. دستگاه معادلات اویلر به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla p, \\ &\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \end{aligned} \quad (۳۷.۲)$$

$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ به‌عنوان یک عملگر دیفرانسیلی در بردارها به کار می‌رود. ضرب داخلی ∇ با $\mathbf{u}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot(u,v,w) = u_x + v_y + w_z,$$

و اثر ∇ روی p به‌صورت $\nabla p = (p_x,p_y,p_z)$ تعریف می‌شود. همچنین اثر ∇ روی $\mathbf{u}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla\mathbf{u} = \nabla(u,v,w) = ((u_x,u_y,u_z),(v_x,v_y,v_z),(w_x,w_y,w_z)),$$

با باز کردن دستگاه (۳۷.۲) به همین روند به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} p_x = u_t + uu_x + vu_y + wu_z, \\ p_y = v_t + uv_x + vv_y + wv_z, \\ p_z = w_t + uw_x + vw_y + ww_z, \\ u_x + v_y + w_z + 0 \end{cases} \quad (۳۸.۲)$$

حال میدان برداری متناظر با دستگاه به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + \tau\partial_t + \phi\partial_u + \psi\partial_v + \chi\partial_w + \pi\partial_p,$$

که $\xi, \eta, \dots, \pi$ توابعی از $\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p$ هستند. حال امتداد مرتبه اول میدان برداری نظیر دستگاه (۳۷.۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{v} + \phi^x \partial u_x + \phi^y \partial u_y + \phi^z \partial u_z + \phi^t \partial u_t \\ &+\psi^x \partial v_x + \psi^y \partial v_y + \psi^z \partial v_z + \psi^t \partial v_t \\ &+\chi^x \partial w_x + \chi^y \partial w_y + \chi^z \partial w_z + \chi^t \partial w_t \\ &+\pi^x \partial p_x + \pi^y \partial p_y + \pi^z \partial p_z + \pi^t \partial p_t,\end{aligned}$$

با اثر دادن $\mathbf{v}^{(1)}$ روی دستگاه (۳۸.۲) به دستگاه تقارن زیر می‌رسیم:

$$\phi^t + u\phi^x + v\phi^y + w\phi^z + u_x\phi + u_y\psi + u_z\chi = \ -\pi^x, \tag{۳۹.۲}$$

$$\psi^t + u\psi^x + v\psi^z + w\psi^z + v_x\phi + v_y\psi + v_z\chi = \ -\pi^y, \tag{۴۰.۲}$$

$$\chi^t + u\chi^x + v\chi^y + w\chi^z + w_x\phi + w_y\psi + w_z\chi = \ -\pi^z, \tag{۴۱.۲}$$

$$\phi^x + \psi^y + \chi^z = 0, \tag{۴۲.۲}$$

در این‌جا $\phi^t, \psi^x, \dots$ ضرایب مشتقات مرتبه اول $\dfrac{\partial}{\partial u_t}, \dfrac{\partial}{\partial v_x}, \dots$ که در امتداد مرتبه اول میدان برداری $\mathbf{v}$ ظاهر می‌شود. طبق معادله (۲۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}&\phi^t = D_t\phi - u_x D_t\xi - u_y D_t\eta - u_z D_t\zeta - u_t D_t\tau, \\ &\psi^x + D_x\psi - v_x D_x\xi - v_y D_x\eta - v_z D_x\zeta - v_t D_x\tau,\end{aligned}$$

و به همین نحو $\phi^x, \chi^x, \dots$ را به‌دست می‌آوریم. به‌عنوان نمونه معادله (۴۲.۲) را حل می‌کنیم و بقیه معادلات نیز به همین نحو حل می‌شود. ابتدا مشتقات کامل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}D_x &= \tfrac{\partial}{\partial x} + u_x \tfrac{\partial}{\partial u} + v_x \tfrac{\partial}{\partial v} + w_x \tfrac{\partial}{\partial w} + p_x \tfrac{\partial}{\partial p} \\ &+u_{xx}\tfrac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy}\tfrac{\partial}{\partial u_y} + u_{xz}\tfrac{\partial}{\partial u_z} + u_{xt}\tfrac{\partial}{\partial u_t} \\ &+v_{xx}\tfrac{\partial}{\partial v_x} + v_{xy}\tfrac{\partial}{\partial v_y} + v_{xz}\tfrac{\partial}{\partial v_z} + v_{xt}\tfrac{\partial}{\partial v_t} \\ &+w_{xx}\tfrac{\partial}{\partial w_x} + w_{xy}\tfrac{\partial}{\partial w_y} + w_{xz}\tfrac{\partial}{\partial w_z} + w_{xt}\tfrac{\partial}{\partial w_t} \\ &+p_{xx}\tfrac{\partial}{\partial p_x} + p_{xy}\tfrac{\partial}{\partial p_y} + p_{xz}\tfrac{\partial}{\partial p_z} + p_{xt}\tfrac{\partial}{\partial p_t} + \dots,\end{aligned}$$

به همین نحو D_y, D_z, D_t را به‌دست می‌آوریم. حال ϕ^x را طبق (۲۴.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\phi^x &= D_x\phi - u_x D_x\xi - u_y D_x\eta - u_z D_x\zeta - u_t D_x\tau \\ &= \phi_x + u_x\phi_u + v_x\phi_v + w_x\phi_w + p_x\phi_p \\ &-u_x[\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v + w_x\xi_w + p_x\xi_p] \\ &-u_y[\eta_x + u_x\eta_u + v_x\eta_v + w_x\eta_w + p_x\eta_p] \\ &-u_z[\zeta_x + u_x\zeta_u + v_x\zeta_v + w_x\zeta_w + p_x\zeta_p] \\ &-u_t[\tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v + w_x\tau_w + p_x\tau_p],\end{aligned}$$

به همین نحو ψ^y, χ^z نیز به‌دست می‌آید. با قرار دادن ϕ^x, ψ^y, χ^z در معادله (۴۲.۲) و ساده کردن، ضرایب چندجمله‌ای‌های متشابه را با هم برابر قرار می‌دهیم. به همین صورت سه معادله دیگر دستگاه را نیز حل

می‌کنیم. و سرانجام با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی داریم:

$$\begin{aligned}
\xi &= \delta_1 x + c_1 y - c_2 z + \alpha,\\
\eta &= -c_1 x + \delta_t y + c_3 z + \beta,\\
\zeta &= c_2 x - c_3 y + \delta_t z + \gamma,\\
\tau &= 2\delta + c_4 t + c_5,\\
\phi &= -(\delta_t + c_4)u + c_1 v - c_2 w + \alpha_t,\\
\psi &= -c_1 u - (\delta_t + c_4)v + c_3 w + \beta_t,\\
\chi &= c_2 u - c_3 v - (\delta_t + c_4)w + \gamma_t,\\
\pi &= -2(\delta_t + c_4)p - \tfrac{1}{2}\delta_u(x^2 + y^2 + z^2) - \alpha_{tt}x - \beta_{tt}y - \gamma_{tt}z + \theta,
\end{aligned}$$

که $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ توابعی از t هستند و $c_1, c_2, c_3.c_4, c_5$ ثابت هستند. ما نشان می‌دهیم که گروه تقارن معادلات اویلر توسط میدان‌های برداری زیر تولید می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
\mathbf{v}_\alpha &= \alpha\partial_x + \alpha_t\partial_u - \alpha_{tt}x\partial_p,\\
\mathbf{v}_\beta &= \beta\partial_y + \beta_t\partial_v - \beta_{tt}y\partial_P,\\
\mathbf{v}_\gamma &= \gamma\partial_z + \gamma_t\partial_w - \gamma_{tt}z\partial_p,
\end{aligned}\right\} && \text{مختصات‌های حرکت}\\
&\mathbf{v}_0 = \partial_t, && \text{تبدیلات زمان}\\
&\left.\begin{aligned}
\mathbf{d}_1 &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t,\\
\mathrm{d}_2 &= t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2p\partial_p,
\end{aligned}\right\} && \text{تجانس} \qquad (۴۳.۲)\\
&\left.\begin{aligned}
\mathbf{r}_{xy} &= y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\\
\mathbf{r}_{zx} &= x\partial_z - z\partial_x + u\partial_w - w\partial_u,\\
\mathbf{r}_{yz} &= z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w,
\end{aligned}\right\} && \text{دوران‌ها}\\
&\mathbf{v}_\theta = \theta\partial_p, && \text{تغییرات فشار}
\end{aligned}$$

گروه یک-پارامتری از تبدیلات معادلات اویلر به شکل زیر است:

(a) گروه تبدیلات مختصات‌های حرکت:

$$G_{\mathbf{a}} : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{a}(t), t, \mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{a}_t, p - \varepsilon\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_{tt} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_{tt}),$$

که $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ است.

(b) تبدیلات زمان :

$$G_0 : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, t + \varepsilon, \mathbf{u}, p).$$

(c) تبدیلات تجانس:

$$\begin{aligned}
G_1 &: (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\lambda\mathbf{x}, \lambda t, \mathbf{u}, p),\\
G_2 &: (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, \lambda t, \lambda^{-1}\mathbf{u}, \lambda^{-2}p),
\end{aligned}$$

که $\lambda = \exp^\varepsilon$ مضرب گروه پارامتری است.

(d) گروه دوران‌ها:

$$SO(3) : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (R\mathbf{x}, t, R\mathbf{u}, p),$$

در این‌جا R ماتریس متعامد 3×3 است.

(e) تغییرات فشار:

$$G_p : (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p + \varepsilon\theta(t)).$$

متناظراً اگر $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t)$ و $p = g(\mathbf{x}, t)$ جواب‌های معادلات اویلر باشد آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{a}} :&\quad \mathbf{u} = f(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{a}(t), t) + \varepsilon\mathbf{a}_t, &\quad p &= g(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{a}(t), t) - \varepsilon\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_{tt} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_{tt},\\
G_0 :&\quad \mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t - \varepsilon), & p &= g(\mathbf{x}, t - \varepsilon),\\
G_1 :&\quad \mathbf{u} = f(\lambda\mathbf{x}, \lambda t), & p &= g(\lambda\mathbf{x}, \lambda t),\\
G_2 :&\quad \mathbf{u} = \lambda f(\mathbf{x}, \lambda t), & p &= \lambda^2 g(\mathbf{x}, \lambda t),\\
SO(3) :&\quad \mathbf{u} = Rf(R^{-1}\mathbf{x}, t), & p &= g(R^{-1}\mathbf{x}, t),\\
G_p :&\quad \mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t), & p &= g(\mathbf{x}, t) + \varepsilon\theta(t).
\end{aligned}$$

جواب‌های دیگر این معادلات می‌باشد. این لیست کاملی از تقارن‌های معادلات اویلر است.

۶.۲ فرم کوشی کوالفسکی

تعریف ۱.۶.۲. دستگاه PDE داده‌شده (۱۴.۲) را به فرم حل‌شده نسبت به یک مشتق، پیشرو گوییم هرگاه:

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = u^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}} - G^\nu(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, l, \tag{۴۴.۲}$$

که به ازای هر $\nu = 1, \ldots, l$ داریم: $q \leq j_\nu \leq 1$ و $p \leq i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s} \leq 1$ در رابطه (۴۴.۲)، $\{u^{j_\nu}_{i_{\nu,1}\cdots i_{\nu,s}}\}$ مجموعه‌ای از l مشتق جزئی پیشرو از مرتبه s مستقل خطی می‌باشد. با این خاصیت که هیچ یک از آن‌ها و مشتقات نتیجه‌شده از آن‌ها در $\{G^\nu(x, u^{(n)})\}_{\nu=1}^{l}$ ظاهر نمی‌شوند.

قضیه ۲.۶.۲. *دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ به فرم کوشی-کوالفسکی نسبت به متغیر مستقل x^j است، اگر دستگاه نسبت به بیش‌ترین مرتبه مشتق هر متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل x^j قابل حل باشد، یعنی*

$$\frac{\partial^{s_\nu}}{\partial (x^j)^{s_\nu}} u^\nu = G^\nu(x, U^{(n)}), \qquad 1 \leq s_\nu \leq r,\ \nu = 1, \ldots, q, \tag{۴۵.۲}$$

که در آن همه مشتق‌ها نسبت به x^j که در سمت راست هر PDE از (۴۵.۲) ظاهر شده است دارای مرتبه کمتری از مشتق‌های سمت چپ است.

برهان. [۴]. □

تعریف ۳.۶.۲. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta(x, u^{(n)})$ ناتباهیده است اگر بتوان آن‌را در صورت وجود به کمک یک تبدیل نقطه‌ای (برخوردی) به فرم کوالفسکی نوشت. باید به این نکته توجه نمود که فرم کوشی-کوالفسکی از یک دستگاه PDE نسبت به مشتق‌های پیشرو برای تمام متغیرهای وابسته حالت خاصی از دستگاه حل‌شده است. بنابراین یک دستگاه PDE فرم کوشی-کوالفسکی می‌پذیرد اگر تعداد متغیرهای وابسته آن با تعداد PDEهای دستگاه برابر باشد.

فصل ۳

روش مستقیم ساخت قوانین پایستگی

۱.۳ مقدمه

در این فصل روش اساسی چگونگی ساخت قوانین پایستگی موضعی را برای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل داده‌شده نشان می‌دهیم. این عملیات جامع مبتنی بر پیدا کردن اولین مضارب قوانین پایستگی است.

۲.۳ معرفی

قانون پایستگی یک سیستم معادلات دیفرانسیل ناتباهیده، یک عبارت دیورژانسی است که روی همه‌ی جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل صفر می‌شود. در حالت کلی، هر عبارت دیورژانس غیربدیهی که یک قانون پایستگی موضعی از دستگاه معادلات دیفرانسیل را نتیجه می‌دهد، از ضرایب موضعی وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته به‌دست می‌آید. اثبات می‌شود که هر عبارت دیورژانس، وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته، توسط عملگرهای اویلر که وابسته به متغیرهای وابسته است پوچ می‌شود. برعکس، اگر عملگرهای اویلر مربوط به متغیرهای وابسته، ظاهر شده در عبارتی شامل متغیرهای مستقل، وابسته و مشتقات آن‌ها، عبارتی را پوچ سازند آن‌گاه آن عبارت یک عبارت دیورژانسی خواهد بود. از این گفته نتیجه می‌شود که هر دستگاه معادلات دیفرانسیل دارای قانون پایستگی است اگر و تنها اگر مجموعه‌ای از ضرایب موضعی موجود باشد که ترکیب خطی آن‌ها با هر دستگاه معادلات دیفرانسیل، توسط عملگرهای اویلر مربوط به هر متغیر وابسته پوچ شود.
بنابراین مسئله یافتن قوانین پایستگی دستگاه معادلات دیفرانسیل، به مسئله یافتن مجموعه ای از ضرایب موضعی منتهی می‌شود که ترکیب خطی آن‌ها با هر دستگاه معادلات دیفرانسیل توسط عملگرهای اویلر پوچ می‌شود. هر یک از این مجموعه از ضرایب موضعی حاصل یک قانون پایستگی موضعی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است. به‌علاوه، برای هر مجموعه‌ای از ضرایب موضعی که باعث تولید قانون پایستگی می‌شود یک فرمول انتگرالی برای به‌دست آوردن شار و چگالی‌های قوانین پایستگی وجود دارد [۱، ۲، ۳]. اغلب آن‌ها از محاسبه مستقیم بعد از مشخص شدن ضرایب موضعی به‌دست می‌آیند که معمولا از آن به‌عنوان روش

مستقیم برای محاسبه قوانین پایستگی یاد می‌کنند [۳۴].
در سال ۱۹۱۸ نوتر[۱] نشان داد که اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل یک اصل تغییراتی را بپذیرد، آن‌گاه هر گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای که عمل تابعی را پایا نگه‌دارد یک قانون پایستگی را نتیجه خواهد داد [۲۶]. در حالت خاص، نوتر فرمولی برای شار قوانین پایستگی ارائه نمود. در سال ۱۹۲۱، باسل-هاگن[۲] قضیه نوتر را توسیع دادند [۶]. در سال ۱۹۶۷ بویر[۳] نشان داد که تمام چنین قوانین پایستگی چگونه توسط گروه‌های لی از تبدیلات نقطه‌ای به فرم پیچشی حاصل می‌شوند [۱۵] .
در مطالعه دستگاه معادلات دیفرانسیل، قانون پایستگی کاربردهای مهم فراوانی دارد. آن‌ها کمیت‌های پایای فیزیکی همچون جرم، انرژی، تکانه و تکانه زاویه‌ای، همچنین بار الکتریکی و ثابت‌های حرکت را توصیف می‌کند. آن‌ها برای به‌دست آوردن نگاشت‌های خطی‌سازی و انتگرال‌پذیری و برای اثبات یکتایی و وجود جواب‌ها مهم هستند. آن‌ها همچنین برای آنالیز پایداری و رفتار عمومی جواب‌ها استفاده می‌شوند. علاوه بر این، آن‌ها نقش اساسی در توسعه روش‌های عددی دارند و نقش مهمی در نقطه شروع یافتن دستگاه‌های وابسته غیرموضعی و متغیرهای پتانسیلی بر عهده دارند.

۳.۳ روش مستقیم ساختن قوانین پایستگی

تعریف ۱.۳.۳. یک دستگاه کلی، متشکل از l معادله با مشتقات جزئی از مرتبه k با p متغیرمستقل $x=(x^1,x^2,\dots,x^p)$ و q متغیر وابسته $u(x)=(u^1(x),\dots,u^q(x))$ را که به‌صورت زیر تعریف شده است. در نظر بگیرید:

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0,\qquad \nu=1,2,\dots,l. \tag{۱.۳}$$

منظور از نمادگذاری "$\phi[u]$" این است که ϕ تابعی از یک یا چند متغیر مستقل x، متغیرهای وابسته u و مشتقات متغیرهای وابسته تا یک مرتبه مشخص می‌باشد، یعنی:

$$\phi[u]=\phi(x,u^{(n)}).$$

منظور از یک قانون پایستگی موضعی (۱.۳) یک عبارت دیورژانسی به فرم زیر است

$$\mathrm{div}\phi[u]=D_i\phi^i[u]\equiv D_1\phi^1[u]+\cdots+D_n\phi^n[u]=0 \tag{۲.۳}$$

که روی همه جواب‌های (۱.۳) برقرار است. در رابطه (۲.۳) به $\phi^i[u]$ ، $i=1,2.\dots,n$ شارهای قوانین پایستگی گفته می‌شود و بالاترین مرتبه مشتق (r) که در شارهای $\phi^i[u]$ ظاهر می‌گردند، مرتبه قانون پایستگی نامیده می‌شود.

در حالت کلی، برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ناتباهیده (۱.۳)، قانون پایستگی غیربدیهی از ترکیب خطی دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) با ضرایب تابعی خاص (فاکتورها) که عبارت دیورژانس غیربدیهی را نتیجه می‌دهد، ناشی می‌شود. برای یافتن چنین عبارت‌هایی، متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها

[۱] Emmy Noether
[۲] Bessel Hagen
[۳] Boyer

که در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) و یا در ضرایب تابعی ظاهر شده‌اند توسط توابعی دلخواهی (و مشتقات آن‌ها) جایگزین می‌شوند. با چنین عملی نمایش‌های دیورژانسی حاصل روی همه جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) به صفر میل می‌کند به شرط آن‌که ضرایب ناتکین باشند.
در حالت خاص، مجموعه‌ای از ضرایب تابعی به فرم $\{\Lambda_\nu(x,u^{(n)})\}_{\nu=1}^{l}$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) نمایش دیورژانسی را تولید می‌کند اگر اتحاد

$$\Lambda_\nu[U]\Delta^\nu[U] \equiv D_i\phi^i[U] \tag{۳.۳}$$

برای توابع دلخواه $U(x)$ برقرار باشد. دراین صورت، روی جواب $U(x)=u(x)$، اگر $\Lambda_\nu[u]$ ناتکین باشد، دارای قانون پایستگی است.

$$\Lambda_\nu[u]R^\delta[u] \equiv D_i\phi^i[u] = 0 \tag{۴.۳}$$

ضریب تابعی $\Lambda_\nu[U]$ تکین است، هرگاه روی جواب $U(x)=u(x)$ از دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) محاسبه می‌شود، تابع تکین باشد. در عمل ضرایب تابعی ناتکین مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا با در نظر گرفتن ضرایب تابعی تکین می‌توان به نمایش‌های دیورژانسی رسید که قانون پایستگی برای دستگاه نمی‌باشد.
در این حالت، یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل به یافتن مجموعه‌ای از ضرایب تابعی موضعی کاهش پیدا می‌کند.

تعریف ۲.۳.۳. عملگر دیفرانسیل اویلر نسبت به تابع U^μ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$E_{U^\mu} = \frac{\partial}{\partial U^\mu} - D_i\frac{\partial}{\partial {U^\mu}_i} + \cdots + (-1)^s D_{i_1}\cdots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial {U^\mu}_{i_1\cdots i_s}} + \cdots , \tag{۵.۳}$$

برای $\mu=1,2,\ldots,q$. با محاسبات مستقیم، می‌توان دید که عملگر اویلر (۵.۳) هر عبارت دیورژانسی $D_i\phi^i(x,U^{(n)})$ به ازای هر r را پوچ می‌کند. در حالت خاص اتحاد زیر برای هر $U(x)$ دلخواه برقرار است.

$$E_{U^\mu}(D_i\phi^i(x,U^{(n)}) \equiv 0, \qquad \mu=1,\ldots,q.$$

عکس این مطلب نیز برقرار است. در حالت خاص، تنها نمایش اسکالری که توسط عملگر اویلر پوچ می‌شود، نمایش دیورژانس است. این موضوع به قضیه زیر منتج می‌شود.

قضیه ۳.۳.۳. *معادلات* $E_{U^\mu}F(x,U^{(n)}) \equiv 0$ ، $\mu=1,\ldots,q$ *برای تابع دلخواه* $U(x)$ *برقرار است اگر و تنها اگر*

$$F(x,U,\ldots,\partial^s U) \equiv D_i\Psi^i(x,U,\ldots,\partial^{s-1}U),$$

برای توابع $\Psi^i(x,U,\ldots,\partial^{s-1}U)$ *، که درآن* $i=1,\ldots,q$ *برقرار باشد.*

برهان. [۷]. □

بنا به قضیه ۳.۳.۳ ، قضیه زیر ارتباط بین ضرایب تابعی موضعی و قوانین پایستگی موضعی را مشخص می‌کند.

قضیه ۴.۳.۳. *مجموعه‌ای از ضرایب تابعی موضعی ناتکین $\{\Lambda_\nu(x,U^{(n)})\}_{\nu=1}^{l}$ یک قانون پایستگی موضعی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل را (۱.۳) نتیجه می‌دهد اگر و تنها اگر به ازای توابع دلخواه $U(x)$ رابطه زیر برقرار باشد.*

$$E_{U^\mu}(\Lambda_\nu(x,U^{(n)})\Delta^\nu(x,u^{(n)}))=0,\qquad \mu=1,2,\ldots,q. \tag{۶.۳}$$

از مجموعه معادلات (۶.۳) ، مجموعه‌ای از معادلات مشخصه خطی برای یافتن تمام ضرایب تابعی قوانین پایستگی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) نتیجه می‌شود. چون معادلات (۶.۳) برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، می‌توان U^j و تمام مشتقات آن‌را به‌عنوان متغیرهای مستقلی نسبت به x^i در نظر گرفت، بنابراین دستگاه PDE خطی (۶.۳) به دستگاه خطی از معادلات خطی مشخصه تبدیل می‌شود که جواب‌های آن مجموعه‌هایی از ضرایب تابعی موضعی برای دستگاه PDE ، $\Delta(x,u^{(n)})$ خواهند بود.

قضیه ۵.۳.۳. *برای هر قانون پایستگی موضعی $D_i\phi^i[U]$ از دستگاه $\Delta(x,u^{(n)})$ که به فرم حل شده (۴۴.۲) بیان‌شده، قوانین پایستگی موضعی معادلی وجود دارد که می‌توان آن‌ها را به فرم مشخصه زیر نوشت:*

$$D_i\tilde{\phi}^i[U]=\tilde{\Lambda}_\nu[U]\left(U^{j_\nu}_{i_{\nu,1},\ldots,i_{nu,s}}-G^\nu[U]\right), \tag{۷.۳}$$

با جملاتی از مجموعه ضرایب موضعی ناتکین $\{\tilde{\Lambda}_\nu\}_{\nu=1}^{l}$ و شارهایی که شامل جملات $U^{j_\nu}_{i_{\nu,1},\ldots,i_{nu,s}}$ نیستند.

برهان. [۴]. □

اهمیت اصلی قضیه ۵.۳.۳ در این است که به‌طور اساسی، تمام قوانین پایستگی حاصل شده از ضرایب تابعی دستگاه $\Delta(x,u^{(n)})$ را که به فرم حل شده بیان شده، تا حد هم ارزی مشخص می‌کند.

ملاحظه ۶.۳.۳. *در این حالت، وقتی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) را نمی‌توان به فرم حل شده (۴۴.۲) نوشت، برای به‌دست آوردن قانون پایستگی (۱.۳) از روش ضرایب می‌توان استفاده کرد. اگرچه، ممکن است بعضی از قوانین پایستگی پیدا نشود و یا دچار خطا شود چون‌که عبارت دیورژانس متناظر ممکن است در (۳.۳) صدق نکند.*

۴.۳ الگوریتم روش مستقیم

قضیه‌های ۳.۳.۳ و ۵.۳.۳ روش نظام‌مندی برای یافتن قوانین پایستگی ارائه می‌دهند که به آن روش مستقیم می‌گویند و می‌توان الگوریتم آن‌را به‌صورت زیر بیان نمود:

۱. به ازای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳)، ابتدا می‌بایست به جستجوی ضرایب به فرم $\{\Lambda_\nu(x,U^{(n)})\}_{\nu=1}^{l}$ به ازای مرتبه مشخص l پرداخته شود. (در محاسبات عملی، توصیه می‌شود که حتی المقدور دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) به فرم حل شده نسبت به یک مشتق پیشرو نوشته شود. در این صورت در مرحله اول روش مستقیم، به‌راحتی می‌توان از ضرایب تکین متناظر با قوانین پایستگی با خارج کردن مشتقات پیشرو و مشتقات حاصل از آن‌ها، از وابستگی ضرایب اجتناب نمود.)

۲. معادلات مشخصه (۶.۳) را برای تابع دلخواه $U(x)$ به‌منظور یافتن تمام ضرایب تابعی حل کنید.

۳. در این مرحله باید تمامی شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\phi^i[U]$ را پیدا نمایید که در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\Lambda_\nu(x, U^{(n)})\Delta_\nu(x, u^{(n)}) \equiv D_i\phi^i(x, U^{(n)}), \tag{۸.۳}$$

۴. در نهایت، هر شار و ضرایب تابعی یک قانون پایستگی $D_i\phi^i(x, U^{(n)}) = 0$ برای تمام جواب‌های $u(x)$ نتیجه می دهد.

در حالت کلی، تناظر یک به یک بین مجموعه‌های ضرایب تابعی موضعی غیربدیهی و شارهای غیربدیهی تنها برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل که فرم کوشی- کوالفسکی می‌پذیرند برقرار است.

قضیه ۱.۴.۳. *فرض کنید دستگاه PDE فرم کوشی-کوالفسکی (۴۵.۲) بپذیرد. در این صورت تمام قوانین پایستگی موضعی غیربدیهی از ضرایب تابعی نتیجه می‌شود. به‌علاوه تناظر یک به یکی بین کلاس‌های هم ارزی از قوانین پایستگی و مجموعه‌های ضرایب تابعی مستقل از مشتق‌های u^ν نسبت به x^j وجود دارد.*

برهان. [۷]. □

روش مستقیم برای به‌دست آوردن قوانین پایستگی موضعی از طریق چند مثال مشهور بیان می‌شود.

مثال ۲.۴.۳. دستگاه تلگراف غیرخطی که به‌صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \Delta^1[u,v] &= v_t - (u^2+1)u_x - u = 0,\\ \Delta^2[u,v] &= u_t - v_x = 0. \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

دستگاه PDE فوق، به فرم کوشی- کوالسفکی مرتبه اول، با مشتقات پیشرو u_t, v_t می‌باشد. هدف یافتن تمامی ضرایب قوانین پایستگی موضعی به فرم

$$\Lambda_1 = \xi(x,t,U,V), \qquad \Lambda_2 = \phi(x,t,U,V), \tag{۱۰.۳}$$

ازدستگاه PDE، (۹.۳) می‌باشد. بر حسب عملگرهای اویلر متناظر زیر

$$E_U = \frac{\partial}{\partial U} - D_x\frac{\partial}{\partial U_x} - D_t\frac{\partial}{\partial U_t}, \qquad E_V = \frac{\partial}{\partial V} - D_x\frac{\partial}{\partial V_x} - D_t\frac{\partial}{\partial V_t},$$

معادلات تعیین‌کننده برای ضرایب (۱۰.۳) به شکل زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} E_U[\xi(x,t,U,V)(V_t - (U^2+1)U_x - U) + \phi(x,t,U,V)(U_t - V_t)] &\equiv 0\\ E_v[\xi(x,t,U,V)(V_t - (U^2+1)U_x - U) + \phi(x,t,u,v)(U_t - V_t)] &\equiv 0 \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

که در آن $U(x,t)$ و $V(x,t)$ توابعی دلخواه می‌باشند. پس از تفکیک نمودن معادلات (۱۱.۳) نسبت به U_t, V_t, U_x, U_t دستگاه PDE خطی بالا معین زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &(U^2+1)\xi_x - \phi_t - U\xi_U - \xi = 0, && \phi_x - \xi_t - U\xi_V = 0,\\ &\phi_V - \xi_U = 0, && \phi_U - (U^2+1)\xi_V = 0. \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

جواب‌های $(\xi(x,t,U,V),\phi(x,t,U,V))$ از دستگاه PDE فوق، معرف مجموعه ضرایب موضعی متناظر با تمامی قوانین پایستگی موضعی غیربدیهی از مرتبه صفر دستگاه تلگراف غیرخطی (۹.۳) می‌باشند.
جواب‌های دستگاه معادلات (۱۲.۳) تعیین‌کننده پنج مجموعه از ضرایب موضعی به فرم زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned}(\xi_1,\phi_1)&=(0,1),\\(\xi_2,\phi_2)&=(t,x-\tfrac{1}{2}t^2),\\(\xi_3,\phi_3)&=(1,-t),\\(\xi_4,\phi_4)&=(e^{x+\frac{1}{2}U^2+1},Ue^{x+\frac{1}{2}U^2+1}),\\(\xi_5,\phi_5)&=(e^{x+\frac{1}{2}U^2-V},-Ue^{x+\frac{1}{2}U^2-V}).\end{aligned} \quad (۱۳.۳)$$

هر مجموعه (ξ,ϕ) تعیین کننده یک قانون پایستگی موضعی غیربدیهی از مرتبه صفر به شکل $D_t\psi(x,t,u,v)+D_x\phi(x,t,u,v)=0$ با فرم مشخصه‌ای زیر می‌باشد.

$$D_t\psi(x,t,U,V)+D_x\phi(x,t,U,V)\equiv\xi(x,t,U,V)R^1[U]+\phi(x,t,U,V)R^2[U], \quad (۱۴.۳)$$

به‌ویژه پس از مساوی قرار دادن جملات مشتق مشابه از رابطه (۱۴.۳) ، روابط زیر نتیجه می‌گردند:

$$\begin{aligned}\phi_U&=\xi\tfrac{\partial R^1}{\partial U_x}+\phi\tfrac{\partial R^2}{\partial U_x},\\\phi_V&=\xi\tfrac{\partial R^1}{\partial V_x}+\phi\tfrac{\partial R^2}{\partial V_x}=-\phi,\\\psi_U&=E_U\psi=\phi,\\\psi_V&=E_V\phi=\xi,\\\psi_t+\phi_x&=-U\xi.\end{aligned} \quad (۱۵.۳)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات (۱۵.۳) به ازای هر مجموعه از ضرایب، پنج قانون پایستگی موضعی مستقل خطی از مرتبه صفر زیر از دستگاه (PDE)، (۹.۳) ، نتیجه می‌گردد.

$$\begin{aligned}&D_tu+D_x[-v]=0,\\&D_t[(x-\tfrac{1}{2}t^2)u+tv]+D_x[(\tfrac{1}{2}t^2-x)v-t(\tfrac{1}{3}u^3+u)]=0,\\&D_t[v-tu]+D_x[tv-(\tfrac{1}{3}u^3+u)]=0,\\&D_t[e^{x+\frac{1}{2}u^2+v}]+D_x[-ue^{x+\frac{1}{2}u^2+v}]=0,\\&D_t[e^{x+\frac{1}{2}u^2-v}]+D_x[-ue^{x+\frac{1}{2}u^2-v}]=0.\end{aligned}$$

مثال ۳.۴.۳. به عنوان مثال دوم، معادله KdV [۴] زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta[u]=u_t+uu_x+u_{xxx}=0. \quad (۱۶.۳)$$

چون‌که PDE، (۱۶.۳) می‌تواند مستقیما به شکل حل‌شده $u_t=g[u]=-(uu_x+u_{xxx})$ بیان شود، بدون از دست دادن کلیت، ضرایب موضعی حاصل از قوانین پایستگی موضعی PDE، (۱۶.۳) به شکل $\Lambda=\Lambda(t,x,U,\dots,\partial_x^lU)$، $l=1,2,\dots$ هستند. ضرایب‌ها به‌صورت مشتقات u از x به‌صورت تقریبی فرض می‌شوند. این درک از سیستم PDE، (۱۶.۳) ، همه مشتقات U از t در فلوهای قوانین پایستگی به‌صورت $D_t\psi[u]+D_x\phi[u]=0$ از PDE، (۱۶.۳) بیان شود. آسان است نشان دادن این که ضرایب برای فلوهای $\psi(t,x,U,\dots,\partial_x^rU)$ و $\phi(t,x,U,\dots,\partial_x^rU)$ وابستگی به U_t و مشتقاتش نداشته باشد.

[۴] Korteweg-de Vries equation

متعاقبا $\Lambda(t,x,U,\dots,\partial_x^l U)$ یک ضرایب قانون پایستگی موضعی سیستم PDE، (۱۶.۳) می‌گویند اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned}&E_U(\Lambda(t,x,U,U_x,U_{xx})(U_t+UU_x+U_{xxx}))\equiv\\&-D_t\Lambda-UD_x\Lambda-D_x^3\Lambda+(U_t+UU_x+U_{xxx})\Lambda_U\\&-D_x\big((U_t+UU_x+U_{xxx})\Lambda_{\partial_x}U\big)\\&+\dots+(-1)^lD_x^l\big((U_t+UU_x+U_{xxx})\Lambda_{\partial_x^l U}\big)\equiv 0,\end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

که برای توابع دلخواه $U(x,t)$ برقرار است. عملگر اویلر به‌صورت زیر است:

$$E_U=\frac{\partial}{\partial U}-(D_t\frac{\partial}{\partial U_t}+D_x\frac{\partial}{\partial U_x})+D_x^2\frac{\partial}{\partial U_{xx}}+\dots,$$

تا $\max(3,l)$ این مشتق ادامه دارد. معادلات مشخصه خطی (۱۷.۳) به شکل زیر است:

$$\alpha_1[U]+\alpha_2[U]U_t+\alpha_3[U]\partial_xU_t+\dots+\alpha_{l+2}[U]\partial_x^lU_t\equiv 0, \tag{۱۸.۳}$$

که هر $\alpha_i[U]$ به x,t,u و مشتقات U بستگی دارد. چون که هر $U(x,t)$ توابعی دلخواه هستند و در معادله (۱۸.۳) هر $U_t,\partial_xU_t,\dots,\partial_x^lU_t$ همچون متغیرهای مستقل عمل می‌کنند و آن‌گاه $\alpha_i[U]=0$، $i=1,\dots,l+2$. بنابراین تقریبا تجزیه‌ای از این $l+2$ معادلات مشخصه با محدود کردن U وجود دارد.
حال فرض می‌کنیم که $\Lambda=\Lambda(x,t,U)$. سپس شکل معادلات (۱۷.۳) ، (۱۸.۳) به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}&(\Lambda_t+U\Lambda_x+\Lambda_{xxx})+3\Lambda_{xxx}U_x+3\Lambda_{xUU}U_x^2+\Lambda_{UUU}U_x^3\\&+3\Lambda_{xU}U_{xx}+3\Lambda_{UU}U_xU_{xx}\equiv 0.\end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

معادله (۱۹.۳) یک چندجمله‌ای بر حسب متغیرهای U_x,U_{xx} است. بنابراین معادله (۱۹.۳) به‌صورت سه معادله زیر تجزیه می‌شود. (سه معادله نتیجه دیفرانسیل هستند.)

$$\Lambda_t+U\Lambda_x+\Lambda_{xxx}=0,\qquad \Lambda_{xU}=0,\qquad \Lambda_{UU}=0,$$

که جواب حاصل سه ضرایب قانون پایستگی موضعی زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\Lambda_1=1,\qquad \Lambda_2=U,\qquad \Lambda_3=tU-x. \tag{۲۰.۳}$$

آسان است که چک کنیم این سه ضرایب به‌ترتیب نتیجه دیورژانس عبارات زیر هستند:

$$\begin{aligned}&U_t+UU_x+U_{xxx}\equiv D_tU+D_X(\tfrac12U^2+U_{xx}),\\&U(U_t+UU_x+U_{xxx})\equiv D_t(\tfrac12U^2)+D_x(\tfrac13U^3+UU_{xx}-\tfrac12U_x^2),\\&(tU-x)(U_t+UU_x+U_{xxx})\equiv D_t(\tfrac12tU^2-xU)\\&\qquad+D_x(-\tfrac12xU^2+tUU_{xx}-\tfrac12tU_x^2-xU_{xx}+U_x),\end{aligned}$$

و متعاقبا به‌دست آوردن قوانین پایستگی موضعی

$$\begin{aligned}&D_tu+D_x(\tfrac12u^2+u_{xx})=0,\\&D_t(\tfrac12u^2-xu)+D_x(\tfrac13U^3+uu_{xx}-\tfrac12u_x^2)=0,\\&D_t(\tfrac12tu^2-xu)+D_x(-\tfrac12xu^2+tuu_{xx}-\tfrac12tu_x^2-xu_{xx}+u_x)=0,\end{aligned}$$

معادله (۱۶.۳) است. از معادلات (۱۸.۳)، (۱۷.۳) ، که PDE، (۱۶.۳) ضرایب به شکل $\Lambda=\Lambda(t,x,U,U_x)$ با یک متغیر اضافی U_x ندارد. علاوه بر این، می‌توان نشان داد که تنها یک ضرایب موضعی اضافی به شکل $\Lambda=\Lambda(t,x,U,U_x,U_{xx})$ وجود دارد که به شکل زیر است:

$$\Lambda_4=U_{xx}+\frac12U^2. \tag{۲۱.۳}$$

بنابراین، می‌توان نشان داد که در عبارت‌های بازگشتی عملگر

$$\Delta^*[U] = D_x^2 + \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}D_x^{-1} \circ U \circ D_x, \qquad (۲۲.۳)$$

که معادله (۱۶.۳) یک ضریب قانون پایستگی موضعی نامتناهی دارد که به شکل

$$\Lambda_{2n} = (\Delta^*[U])^n U, \qquad n = 1, 2, \dots, \qquad (۲۳.۳)$$

با اولین دو ضرایب در این نتیجه در بالا در معرض دید قرار گرفت.

مثال ۴.۴.۳ (معادله فیشر[۵]). معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta_{FK}(u) := u_t - u(1-u) - u_{xt} = 0, \qquad (۲۴.۳)$$

که u توابعی هموار از (x,t) است. این معادله از دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته تشکیل شده است. ضرایب موضعی حاصل از قوانین پایستگی موضعی PDE، (۲۴.۳) به شکل $\Lambda(x,t,u,u_x,u_t)$ بیان می‌شود. عملگر اویلر برای معادله (۲۴.۳) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$E_U = \frac{\partial}{\partial U} - D_x\frac{\partial}{\partial U_x} - D_t\frac{\partial}{\partial U_t} + D_x\left(D_x(\frac{\partial}{\partial U_{xx}})\right) + D_x\left(D_t(\frac{\partial}{\partial U_{xt}})\right)$$
$$+D_t\left(D_t(\frac{\partial}{\partial U_{tt}})\right) - \cdots,$$

و همچنین مشتقات کامل D_x, D_t نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + U_x\frac{\partial}{\partial U} + U_{xx}\frac{\partial}{\partial U_x} + U_{xt}\frac{\partial}{\partial U_t} + U_{xxx}\frac{\partial}{\partial U_{xx}} + U_{xxt}\frac{\partial}{\partial U_{xt}} + U_{xtt}\frac{\partial}{\partial U_{tt}} + \cdots, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + U_t\frac{\partial}{\partial U} + U_{tt}\frac{\partial}{\partial U_t} + U_{xt}\frac{\partial}{\partial U_t} + U_{ttt}\frac{\partial}{\partial U_{tt}} + U_{xxt}\frac{\partial}{\partial U_{xt}} + U_{xtt}\frac{\partial}{\partial U_{tt}} + \cdots, \end{aligned}$$

حال به $\Lambda(x,t,U,U_x,U_t)$ یک ضرایب قانون پایستگی موضعی سیستم PDE، (۲۴.۳) می‌گویند اگر و تنها اگر

$$E_U\left(\Lambda(x,t,U,U_t,U_x)\left(U_t - U(1-U) - U_{xt}\right)\right) \equiv 0, \qquad (۲۵.۳)$$

برای توابع دلخواه $U(x,t)$ برقرار باشد. با باز کردن معادله (۲۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} &E_U\left(\Lambda U_t - U\Lambda + U^2\Lambda - \Lambda U_{xt}\right) \equiv \\ &\Lambda_U U_t - U\Lambda_U + U^2\Lambda_U - \Lambda_U U_{xt} - \Lambda + 2U\Lambda \\ &-D_x\left(\Lambda_{U_x}U_t - U\Lambda_{U_x} + U^2\Lambda_{U_x} - \Lambda_{U_x}U_{xt}\right) \\ &-D_t\left(\Lambda_{U_t}U_t + \Lambda - U\Lambda_{U_t} + U^2\Lambda_{U_t} - \Lambda_{U_t}U_{xt}\right) \\ &-D_xD_t(\Lambda) \equiv \Lambda_U U_t - U\Lambda_U + U^2\Lambda_U - \Lambda_U U_{xt} - \Lambda + \cdots \\ &-\Lambda_t + \Lambda_{t,U_t}U - \Lambda_{t,U_t}U^2 + \Lambda_{t,U_t}U_{xt} + \Lambda_{U_t}U_t - \cdots \\ &-\Lambda_{U_t,U_t}U^2U_{tt} + \Lambda_{U_t,U_t}U_{xt}U_{tt} + \Lambda_{U_t}U_{xtt} - \Lambda_{xt} - \cdots \\ &- \cdots - \Lambda_{U_t,U_t}U_{tt}U_{xt} - \Lambda_U U_{xt} - \Lambda_{U_x}U_{xxt} - \Lambda_{U_t}U_{xtt} \equiv 0, \end{aligned} \qquad (۲۶.۳)$$

[۵] Fisher equation

پس از ساده کردن معادله (۲۶.۳) ضرایب چندجمله‌ای متشابه را با هم برابر قرار می‌دهیم. بنابراین به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{lll}\Lambda-\Lambda_t-\Lambda_{xt}=0, & -2\Lambda_{U_t}+\Lambda_{U,U_t}=0, & \Lambda_{U_x,U_t}=0,\\ -\Lambda_{x,U_x}-\Lambda_{t,U_t}+\Lambda_{U_t}=0, & -2\Lambda_{U_t}-\Lambda_{U_t,x}=0, & -\Lambda_{U_x,U_x}=0,\\ -\Lambda_U+2\Lambda+\Lambda_{x,U_x}+\Lambda_{t,U_t}=0, & \Lambda_{U_x}-\Lambda_{t,U}=0, & \Lambda_{U,U_x}=0,\\ \Lambda_U-\Lambda_{x,U_x}-\Lambda_{t,U_t}=0, & -2\Lambda_u-2\Lambda_{U_x}=0, & \Lambda_{U_t,U_t}=0,\end{array}$$

که جواب حاصل سه ضرایب قانون پایستگی موضعی زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\Lambda_1=1,\qquad \Lambda_2=U_t,\qquad \Lambda_3=tU_t+x^2-t^2. \tag{۲۷.۳}$$

که هر ضرایب یک قانون پایستگی موضعی به‌صورت زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}&D_x\Phi^1(x,t,U,U_x,U_t)+D_t\Psi^1(x,t,U,U_t,U_x)\\&\qquad\equiv(U_t-U(1-U)-U_{xt}),\\&D_x\Phi^2(x,t,U,U_x,U_t)+D_t\Psi^2(x,t,U,U_t,U_x)\\&\qquad\equiv(U_t)(U_t-U(1-U)-U_{xt}),\\&D_x\Phi^3(x,t,U,U_x,U_t)+D_t\Psi^3(x,t,U,U_t,U_x)\\&\qquad\equiv(tU_t+x^2-t^2)(U_t-U(1-U)-U_{xt}),\end{aligned} \tag{۲۸.۳}$$

که مستقیما دو قانون پایستگی موضعی مستقل خطی به‌صورت زیر بدست می‌آید.

$$\Phi\ =-xtuu_t-\exp(x^2+t^2+u^2)+x^2uu_t+\tfrac{1}{2}(x^2+u^2), \tag{۲۹.۳}$$

$$\Psi\ =x^3tu^2u_t+u-u_x. \tag{۳۰.۳}$$

مثال ۵.۴.۳ (معادله بورن-اینفلد)**.** معادله BI [۶] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta:=(1-u_t^2)u_{xx}+2u_xu_tu_{xt}-(1+u_x^2)u_{tt}=0, \tag{۳۱.۳}$$

که یک دستگاه PDE از مرتبه دوم است که که u توابعی هموار از (x,t) است. این معادله از دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته تشکیل شده است. ضرایب موضعی حاصل از قوانین پایستگی موضعی PDE، (۳۱.۳) به شکل

$$\Lambda(x,t,u,u_x,u_t),$$

بیان می‌شود. عملگر اویلر برای معادله (۳۱.۳) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}E_U=&\frac{\partial}{\partial U}-D_x\frac{\partial}{\partial U_x}-D_t\frac{\partial}{\partial U_t}+D_x\left(D_x(\frac{\partial}{\partial U_{xx}})\right)+D_x\left(D_t(\frac{\partial}{\partial U_{xt}})\right)\\&+D_t\left(D_t(\frac{\partial}{\partial U_{tt}})\right)-\cdots,\end{aligned}$$

و همچنین مشتقات کامل D_x, D_t نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}D_x\ &=\frac{\partial}{\partial x}+U_x\frac{\partial}{\partial U}+U_{xx}\frac{\partial}{\partial U_x}+U_{xt}\frac{\partial}{\partial U_t}+U_{xxx}\frac{\partial}{\partial U_{xx}}+U_{xxt}\frac{\partial}{\partial U_{xt}}+U_{xtt}\frac{\partial}{\partial U_{tt}}+\cdots,\\D_t\ &=\frac{\partial}{\partial t}+U_t\frac{\partial}{\partial U}+U_{tt}\frac{\partial}{\partial U_t}+U_{xt}\frac{\partial}{\partial U_t}+U_{ttt}\frac{\partial}{\partial U_{tt}}+U_{xxt}\frac{\partial}{\partial U_{xt}}+U_{xtt}\frac{\partial}{\partial U_{tt}}+\cdots,\end{aligned}$$

[۶] Born-Infeld

حال به $\Lambda(x,t,U,U_x,U_t)$ یک ضرایب قانون پایستگی موضعی سیستم PDE، (۳۱.۳) می‌گویند اگر و تنها اگر

$$E_U\left(\Lambda(x,t,U,U_t,U_x)\left((1-u_t^2)u_{xx}+2u_xu_tu_{xt}-(1+u_x^2)u_{tt}\right)\right)\equiv 0, \qquad (۳۲.۳)$$

برای توابع دلخواه $U(x,t)$ برقرار باشد. با باز کردن معادله (۳۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
&4\Lambda_tU_t+4\Lambda_UU_t^2+4\Lambda_xU-x+\cdots+2\Lambda_{xU_x}-2\Lambda_{tU_t}=0,\\
&2\Lambda_{U_xU_x}+4\Lambda_{U_xU_t}U_x^2U_t^2+12\Lambda_{U_t}U_xU_t^2+\cdots+2\Lambda_{U_tU_t}U_xU_t^3+2\Lambda_{U_xU_x}U_x^3U_t=0,\\
&\Lambda_{tU_t}U_x^2+\Lambda_{tU_t}U_x^4-\Lambda_{UU_x}U_x^3+\cdots-\Lambda_{UU_t}U_x^4U_t+\Lambda_{UU_t}U_x^2U_t=0,\\
&-2\Lambda_{U_xU_t}U_x^3U_t-\Lambda_{U_tU_t}U_x^2U_t^2-6\Lambda_{U_x}U_x^3-\cdots-\Lambda_{U_xU_x}U_x^2-\Lambda_{U_xU_x}U_x^4=0,\\
&\Lambda_{U_xU_x}-\Lambda_{U_tU_t}-\Lambda_{U_xU_x}U_t^2+\cdots-6\Lambda_{U_x}U_xU_t^2-\Lambda_{U_xU_x}U_x^2U_t^2=0,\\
&\Lambda_{U_tU_t}-\Lambda_{U_xU_x}-\Lambda_{U_tU_t}U_t^2+\cdots-\Lambda_{U_xU_x}-2\Lambda_{U_xU_x}U_xU_t=0,
\end{aligned} \qquad (۳۳.۳)$$

که جواب (۳۳.۳) دو ضریب قانون پایستگی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\Lambda_1=\frac{U_x}{(1+U_x^2)^2}, \qquad \Lambda_2=\frac{U_x^2-1}{(1+U_x^2)^2}. \qquad (۳۴.۳)$$

که هر ضرایب یک قانون پایستگی موضعی به‌صورت

$D_x\Phi(x,t,U,U_x,U_t)+D_t\Psi(x,t,U,U_t,U_x)=0$ را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}
&D_x\Phi^1(x,t,U,U_x,U_t)+D_t\Psi^1(x,t,U,U_t,U_x)\\
&\qquad\equiv\Lambda_1(x,t,U,U_t,U_x)\left((1-u_t^2)u_{xx}+2u_xu_tu_{xt}-(1+u_x^2)u_{tt}\right),\\
&D_x\Phi^2(x,t,U,U_x,U_t)+D_t\Psi^2(x,t,U,U_t,U_x)\\
&\qquad\equiv\Lambda_2(x,t,U,U_t,U_x)\left((1-u_t^2)u_{xx}+2u_xu_tu_{xt}-(1+u_x^2)u_{tt}\right).
\end{aligned} \qquad (۳۵.۳)$$

در حالت خاص، بعد از تساوی قرار دادن مشتقات مشابه عبارت (۳۵.۳) ، برای هر مجموعه‌ای از ضرایب موضعی به روابط زیر می‌رسیم :

$$\begin{aligned}
&\Phi^1_{U_x}=\frac{U_x-U_xU_t^2}{(1+U_x^2)^2},\\
&\Phi^1_{U_x}+\Psi^1_{U_x}=\frac{2U_x^2U_t}{(1+U_x^2)^2},\\
&\vdots\\
&\Phi^1_{U_x}=\frac{U_x^2-U_X^2U_t^2+U_t^2-1}{(1+U_x^2)^2},\\
&\Phi^2_x+\Phi^2_UU_x+\Psi^1_t+\Psi^1_UU_t=0,
\end{aligned} \qquad (۳۶.۳)$$

با انتگرال‌گیری از روابط (۳۶.۳) چهار قانون پایستگی موضعی مستقل خطی به‌صورت زیر به‌دست می‌اید.

$$\begin{aligned}
\Phi^1&=\frac{1}{2}\frac{u_t^2-1}{1+u_x^2}+xtuu_t+\frac{1}{2}xu^2,\\
\Psi^1&=-\frac{u_xu_t}{1+u_x^2}-\frac{1}{2}tu^2-\frac{1}{2}xt^2uu_x,\\
\Phi^2&=\frac{u_x(u_t^2-1)}{1+u_x^2}+xtuu_t+\frac{1}{2}xu^2,\\
\Psi^2&=\frac{u_t(1-u_x^2)}{1+u_x^2}-\frac{1}{2}tu^2-\frac{1}{2}xt^2uu_x.
\end{aligned} \qquad (۳۷.۳)$$

فصل ۴

ارتباط بین تقارن‌ها و قوانین پایستگی

۱.۴ مقدمه

در این بخش نشان خواهیم داد که اگر دستگاه PDE، $\Delta(x,u^{(n)})$ تحت تبدیلی معکوس‌پذیر (تبدیل نقطه‌ای یا برخوردی) به دستگاه PDE، $\Gamma(x,u^{(n)})$ نگاشته شود آن‌گاه هر قانون پایستگی از $\Delta(x,u^{(n)})$ به یک قانون پایستگی $\Gamma(x,u^{(n)})$ نگاشته خواهد شد. وقتی که تبدیل معکوس‌پذیر، تقارنی از دستگاه $\Delta(x,u^{(n)})$ باشد آن‌گاه قانون پایستگی متناظر، قانون پایستگی $\Delta(x,u^{(n)})$ خواهد بود [۹].

۲.۴ ارتباط بین تقارن‌ها و قوانین پایستگی

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی (۱.۳) را در نظر بگیرید، قرار دهید

$$\Delta_\nu[U]=\Delta_\nu(x,U^{(n)})=0,\qquad \nu=1,\dots,l, \tag{۱.۴}$$

که $U(x)=(U^1(x),\dots,U^q(x))$ تابع دلخواه با $U(x)=u(x)$ به‌عنوان جواب دستگاه (۱.۴) می‌باشد.
تبدیل نقطه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x^i&=x^i(z,W), & i&=1,\dots,p,\\ U^\alpha&=U^\alpha(z,W), & \alpha&=1,\dots,q, \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

که $U(x)=(U^1(x),\dots,U^q(x))$ ، $z=(z^1,\dots,z^q)$ و $W(z)=(W^1(z),\dots,W^q(z))$. تحت تبدیل نقطه‌ای (۲.۴) و امتداد یافته آن، هر تابع $\Delta_\nu[U]$ به تابع

$$\Gamma_\nu(x,W^{(n)})=\Gamma_\nu[W]. \tag{۳.۴}$$

نگاشته می‌شود. در حالت خاص

$$\Gamma_\nu[W]=\Delta_\nu[U], \tag{۴.۴}$$

وقتی که مولفه‌های $x,U,,\dots,\partial^kU$ بر اساس مولفه‌های $z,W,,\dots,\partial^kW$ در (۳.۴) بیان شوند.
اگر $U(x)=u(x)$ به‌عنوان جواب دستگاه PDE، (۱.۴) باشد، آن‌گاه $W(z)=w(z)$ جواب دستگاه

PDE، $\Gamma(z,w)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_\nu(z,w^{(n)}) = \Gamma_\nu[w], \qquad \nu = 1,\dots,l, \tag{۵.۴}$$

با p متغیر مستقل $z=(z^1,\dots,z^p)$ و q متغیر وابسته $w=(w^1,\dots,w^q)$.

قضیه ۱.۲.۴. *فرض کنید که $D_i\Phi^i[U]=0$ قانون پایستگی دستگاه PDE، (۱.۴) باشد. تحت تبدیل نقطه‌ای (۲.۴)، توابع $\{\Psi^i[W]\}_{i=1}^p$ وجود دارند به‌طوری که فرمول*

$$J[W]D_i\Phi^i[U] = \tilde{D}_i\Psi^i[W], \tag{۶.۴}$$

برقرار است، وقتی که $\Psi^i[W]$ به‌طور واضح بر اساس جملات دترمینانی که از جایگذاری i-امین ستون از دترمینان ژاکوبین

$$J[W] = \frac{D(x^1,\dots,x^p)}{D(z^1,\dots,z^q)}, \tag{۷.۴}$$

با ستون

$$\begin{pmatrix} \Phi^1[U] \\ \vdots \\ \Phi^p[U] \end{pmatrix},$$

به‌دست می‌آیند که عبارت هستند از

$$\begin{aligned} \Psi^1[u] &= \det\begin{pmatrix} \Phi^1[\tilde{u}] & D_2\tilde{x^1} & \cdots & D_p\tilde{x^1} \\ \Phi^2[\tilde{u}] & D_2\tilde{x^2} & \cdots & D_p\tilde{x^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Phi^p[\tilde{u}] & D_2\tilde{x^p} & \cdots & D_p\tilde{x^p} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \Psi^n[u] &= \det\begin{pmatrix} D_1\tilde{x^1} & \cdots & D_{p-1}\tilde{x^1} & \Phi^1[\tilde{u}] \\ D_1\tilde{x^2} & \cdots & D_{p-1}\tilde{x^2} & \Phi^2[\tilde{u}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_p\tilde{x^1} & \cdots & D_{p-1}\tilde{x^p} & \Phi^p[\tilde{u}] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

D_i عملگر مشتق کامل می‌باشد.

برهان. [۹]. □

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که تبدیل نقطه‌ای (۲.۴) تقارنی از دستگاه PDE، (۱.۴) باشد. بنابراین، توابعی مانند $A^\nu_\tau[W]$ وجود دارند به‌طوری که رابطه (۴.۴) به‌صورت زیر خواهد شد.

$$\Delta_\nu[U] = \Gamma_\nu[W] = A^\nu_\tau[W]\Delta_\tau[U]. \tag{۹.۴}$$

نتیجه ۲.۲.۴. *اگر تبدیل نقطه‌ای $(x,u)\longmapsto(\tilde{x}(x,u),\tilde{u}(x,u))$ تقارنی از دستگاه PDE، (۱.۴) باشد، آن‌گاه قانون پایستگی $D_i\Phi^i[u]=0$ از دستگاه $\Delta(x,u^{(n)})$، قانون پایستگی $D_i\Psi^i[u]=0$ از دستگاه $\Delta(x,u^{(n)})$ با شارهای (۸.۴) را نتیجه می‌دهد.*

برهان. از (۹.۴) نتیجه می‌شود که $S^\nu[U] = \Lambda^\nu_\tau[U]R^\tau[U]$ برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، بنابراین $S^\nu[u] = 0$ برای هر جواب $U(x) = u(x)$ از دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ برقرار است. در نتیجه بنا به قضیه ۱.۲.۴ قانون پایستگی $D_i\Psi^i[u] = 0$ با شارهای Ψ^i که توسط فرمول (۸.۴) بیان می‌شوند بعد از جایگذاری x^i با $\tilde{x}^i$، u^α با $\tilde{u}^\alpha$ و آن‌گاه z^i با x^i، $W^\alpha(z)$ با $u^\alpha(z)$ و W^α_i با u^α_i به‌دست می‌آید. □

نتیجه فوق نشان می‌دهد که عمل تبدیل تقارنی دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ روی قانون پایستگی $D_i\Phi^i[u] = 0$ از دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ قانون پایستگی جدید $D_i\Psi^i[u] = 0$ از دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ را نتیجه می‌دهد. حال قضیه و نتیجه فوق را برای ضرایب تابعی قوانین پایستگی بازنویسی می‌کنیم. به این ترتیب که از ضرایب تابعی موجود، ضرایب تابعی جدید بسازیم.

قضیه ۳.۲.۴. *فرض کنید تبدیل نقطه‌ای (۲.۴)، تقارنی از دستگاه PDE، (۱.۴) باشد. اگر $\Lambda_\nu[U]^l_{\nu=1}$ مجموعه‌ای از ضرایب تابعی قانون پایستگی دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ با شارهای $\Phi^i[u]$ باشد، آن‌گاه*

$$\tilde{\Lambda}_\tau[W]\Delta_\tau[W] = \tilde{D}_i\Psi^i[W], \tag{۱۰.۴}$$

که

$$\tilde{\Lambda}_\tau[W] = J[W]A^\nu_\tau[W]\Lambda_\nu[U(z, W)], \qquad \tau = 1, \dots, l. \tag{۱۱.۴}$$

$U(z, W)$ و مشتق‌های آن توسط تبدیل (۲.۴) بیان می‌شود. در (۱۰.۴)، $\Psi^i[W]$ توسط رابطه (۸.۴) و در (۱۱.۴)، ژاکوبین دترمینان $J[W]$ و $A^\nu_\tau[W]$ به‌ترتیب توسط روابط (۷.۴) و (۹.۴) بیان می‌شوند.

برهان. چون تبدیل (۲.۴) تقارن دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ است، بنابراین معادله (۷.۴) برای توابع دلخواه $W(z)$ برقرار است. چون $\Lambda_\nu[U]^l_{\nu=1}$ مجموعه ضرایب تابعی قانون پایستگی دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ با شارهای $\Phi^i[u]$ است، بنابراین رابطه زیر برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است.

$$\Lambda_\nu[U]\Delta^\nu[U] \equiv D_i\Phi^i[U], \tag{۱۲.۴}$$

از جایگذاری (۹.۴) در (۱۲.۴) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$D_i\Phi^i[U] = \Lambda_\nu[U]\Delta^\nu[U] = \Lambda_\nu[U]A^\nu_\tau[W]\Delta^\tau[W], \tag{۱۳.۴}$$

بعد از ضرب رابطه (۱۳.۴) در $J[W]$ و استفاده از رابطه (۶.۴) داریم:

$$J[W](D_i\Phi^i[U]) = J[W]\Lambda_\nu[U]\Delta^\nu[U] = J[W]\Lambda_\nu[U]A^\nu_\tau[W]\Delta^\tau[W] = \tilde{D}_i\Psi^i[W], \tag{۱۴.۴}$$

بنابراین

$$\tilde{\Lambda}_\tau[W]\Delta^\tau[W] = \tilde{D}_i\Psi^i[W], \tag{۱۵.۴}$$

که $\tilde{\Lambda}_\tau$ توسط رابطه (۱۱.۴) بیان می‌شود. □

بعد از جایگذاری z^i با x^i، $W^\alpha(z)$ با $u^\alpha(z)$ و W^α_i با U^α_i نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۴.۲.۴. *اگر $\Lambda_\nu[U]^l_{\nu=1}$ مجموعه‌ای از ضرایب تابعی برای قانون پایستگی دستگاه PDE، $\Delta(x, u^{(n)})$ باشد و دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ تحت تبدیل $(x, u) \longmapsto (\tilde{x}, \tilde{u})$ ناوردا باشد، آن‌گاه $\tilde{\Lambda}_\nu[U]^l_{\nu=1}$ ضرایب تابعی جدید برای قانون پایستگی دستگاه $\Delta(x, u^{(n)})$ می‌باشد و* $\tilde{\Lambda}[U] = J[\tilde{U}]A^\alpha_\tau[\tilde{U}]\Lambda_\alpha[U]$.

به‌طور خلاصه از قضایا و نتایج فوق چنین نتیجه می‌شود که برای یافتن قوانین پایستگی جدید از قوانین پایستگی قبلی به‌جای اثر تبدیلات نقطه‌ای بر دستگاه از اثر تقارن‌های دستگاه روی ضرایب تابعی استفاده می‌شود. این فرآیند باعث ایجاد ضرایب تابعی جدید می‌شود که هر کدام یک قانون پایستگی جدید را نتیجه می‌دهد.

مثال ۵.۲.۴. برای به‌دست آوردن قوانین پایستگی جدید معادله بورن-اینفلد، اول باید میدان‌های برداری متناظر با عمل گروه را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که معادله بورن-اینفلد[۱] به‌صورت زیر است:

$$\Delta_{\mathrm{BI}}(u) := (1-u_t^2)u_{xx} + 2u_xu_tu_{xt} - (1+u_x^2)u_{tt} = 0, \tag{۱۶.۴}$$

که u تابعی هموار از (x,u) است. در نظر می‌گیریم گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (x,t,u) که به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\begin{aligned} &\tilde{x} = x + \varepsilon\xi_1(x,t,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \tilde{t} = t + \varepsilon\xi_2(x,t,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\ &\tilde{u} = u + \varepsilon\phi(x,t,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

که ε پارامتر گروه است. بنابراین تبدیلات (۱۷.۴) روی مجموعه جواب‌های معادله (۱۶.۴) ناوردا است. میدان برداری متناظر با معادله (۱۶.۴) به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{v} = \xi_1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۱۸.۴}$$

که امتداد مرتبه دوم آن به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \tag{۱۹.۴}$$

که ضرایبش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x(\phi - \xi_1u_x - \xi_2u_t) + \xi_1u_{xx} + \xi_2u_{xt},\\ \phi^t &= D_t(\phi - \xi_1u_x - \xi_2u_t) + \xi_1u_{tx} + \xi_2u_{tt},\\ \phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi_1u_x - \xi_2u_t) + \xi_1u_{xxx} + \xi_2u_{xtx},\\ \phi^{xt} &= D_xD_t(\phi - \xi_1u_x - \xi_2u_t) + \xi_1u_{xxt} + \xi_2u_{xtt},\\ \phi^{tt} &= D_t^2(\phi - \xi_1u_x - \xi_2u_t) + \xi_1u_{xtt} + \xi_2u_{ttt}, \end{aligned} \tag{۲۰.۴}$$

که D_x و D_t عملگرهای مشتق کامل هستند که به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots,\\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + \cdots. \end{aligned} \tag{۲۱.۴}$$

با اثر دادن امتداد دوم میدان برداری $\mathbf{v}$ روی معادله (۱۶.۴) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\phi^x(2u_tu_{xt} - 2u_xu_{tt}) + \phi^t(2u_tu_{xx} + 2u_xu_{xt}) + \phi^{xx}(1-u_t^2)\\ &+\phi^{xt}(2u_xu_t) + \phi^{tt}(-1-u_x^2) = 0, \end{aligned} \tag{۲۲.۴}$$

با جایگذاری ضرایب $\phi^x, \phi^t, \cdots$ در معادله (۲۲.۴) و ساده کردن معادله و مساوی قرار دادن ضرایب تک‌جمله‌ای‌های $u, u_x, u_t, \cdots$ به دستگاه‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\xi^2_{xx} = 0, \quad \xi^2_{xu} = 0, \quad \xi^2_{tt} = 0, \quad \xi^2_{uu} = 0, \quad \xi^1_x = \xi^2_t,\\ &\xi^1_t = \xi^2_x, \quad \xi^1_u = -\phi_x, \quad \xi^2_t = \phi_u, \quad \xi^2_u = \phi_t, \quad \xi^2_{tu} = -\phi_{xx}. \end{aligned} \tag{۲۳.۴}$$

[۱] Born-Infeld

با حل دستگاه معادلات (۲۳.۴)، ضرایب میدان برداری $\mathbf{v}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 + c_4 t - c_5 u + c_7 x, \\ \xi_2 &= c_2 + c_4 x + c_6 u + c_7 t, \\ \phi &= c_3 + c_5 x + c_6 t + c_7 t, \end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

که $c_1, c_2, \cdots, c_7$ ثابت‌های دلخواهی هستند. بنابراین جبرلی $\mathcal{G}$ معادله (۱۶.۴) توسط میدان‌های برداری زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = \partial_x, && \mathbf{v}_2 = \partial_t, && \mathbf{v}_3 = \partial_u, \\ &\mathbf{v}_4 = t\partial_x + x\partial_t, && \mathbf{v}_5 = -u\partial_x + x\partial_u, && \mathbf{v}_6 = u\partial_t + t\partial_u, \\ &\mathbf{v}_7 = x\partial_x + t\partial_t + u\partial_u, \end{aligned} \tag{۲۵.۴}$$

که $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ که انتقال روی x ، t و u هستند، همچنین میدان برداری $\mathbf{v}_5$ دوران روی x و u است و میدان برداری $\mathbf{v}_7$ تجانس روی x و t است. رابطه بین این میدان‌های برداری در جدول زیر آمده است، که درایه‌ی در ردیف i و ستون j را با $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ نمایش می‌دهیم.

$[,]$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_7$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_3$	0	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	$\mathbf{v}_1$	0	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0	$-\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	0	0	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_5$	0
$\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_3$	0	$\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_6$	0	$\mathbf{v}_4$	0
$\mathbf{v}_6$	0	$-\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_4$	0	0
$\mathbf{v}_7$	$-\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_3$	0	0	0	0

که ε یک عدد حقیقی است. برای مثال اگر $u = c$ یه جواب ثابت معادله (۱۶.۴) باشد آن‌گاه جواب‌های نابدیهی مانند

$$\begin{aligned} u &= \cos\varepsilon + (t\sin\varepsilon + x\cos\varepsilon)\sin\varepsilon, \\ u &= \cosh\varepsilon + (t\cosh\varepsilon - x\sinh\varepsilon)\sinh\varepsilon. \end{aligned}$$

دارند. در اینجا ما می‌توانیم گروه تقارن عمومی با ترکیب خطی میدان‌های برداری را به‌صورت $c_1\mathbf{v}_1, \dots, c_7\mathbf{v}_7$ به‌دست آورد. همچنین در حالت خاص اگر g عضوی از گروه تقارن در همسایگی عضو همانی باشد آن‌گاه آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$g = \exp(\varepsilon_7\mathbf{v}_7) \circ \cdots \circ \exp(\varepsilon_1\mathbf{v}_1).$$

حال می‌توانیم قوانین پایستگی جدید معادله بورن-اینفلد را به‌دست آوریم. نتایج آن در جدول زیر به‌دست آمده است.

$\mathbf{v}_i(\Phi^j), \mathbf{v}_j(\Psi^j)$	Φ^1, Φ^2	Ψ^1, Ψ^2
$\mathbf{v}_1$	$tuu_t + \frac{1}{2}xu^2$	$\frac{1}{2}t^2uu_x$
$\mathbf{v}_2$	xuu_t	$\frac{1}{2}u^2 + xuu_x$
$\mathbf{v}_3$	$xu + xtu_t$	$tu + \frac{1}{2}xt^2u_x$
$\mathbf{v}_4$	$(x^2 + t^2)uu_t + \frac{1}{2}tu^2$	$(\frac{1}{2}t^2 + x^2)tuu_x$
$\mathbf{v}_5$	$(x^2 - u^2)tu_t - \frac{1}{2}u^3 + x^2u$	$\frac{1}{2}(u^2 - x^2)t^2u_x$
$\mathbf{v}_6$	$(u^2 + t^2)xu_t + xt$	$\frac{1}{2}(t^3 + u^2)xu_x + t^2u + \frac{1}{2}u^3$
$\mathbf{v}_7$	$2xtuu_t + \frac{3}{2}xu^2 + xuu_t$	$\frac{3}{2}xtuu_t + \frac{3}{2}xu^2 + xuu_t$

بنابراین مجموعه‌ای از ضرایب مستقل خطی جدید به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= (x^2 + t^2)uu_t + \tfrac{1}{2}tu^2, \\
\Lambda_2 &= \left(\tfrac{1}{2}t^2 + x^2\right) tuu_x, \\
\Lambda_3 &= (x^2 - u^2)tu_t - \tfrac{1}{2}u^3 + x^2u, \\
\Lambda_4 &= \tfrac{1}{2}(u^2 - x^2)t^2u_x, \\
\Lambda_5 &= (u^2 + t^2)xu_t + xt, \\
\Lambda_6 &= \tfrac{1}{2}(t^3 + u^2)xu_x + t^2u + \tfrac{1}{2}u^3.
\end{aligned}$$

به‌عنوان آخرین مثال، تمامی مباحث این چهار فصل خلاصه می‌شود:

مثال ۶.۲.۴. معادله دسته-ویتهام [۲] مدلی است برای بیان انحرافات امواج کوتاه در الاستیک‌های فشرده در [۳۰] آمده است که عبارت است از:

$$u_{xt} = 2uu_{xx} + u_x^2, \tag{۲۶.۴}$$

برای یافتن تقارن‌های این معادله، میدان برداری $\mathbf{v}$ متناظر با معادله (۲۶.۴) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۲۷.۴}$$

که امتداد مرتبه دوم آن به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \tag{۲۸.۴}$$

که ضرایب $\phi^x, \dots, \phi^{xt}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\phi^x &= D_x(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xx} + \eta u_{xt}, \\
\phi^t &= D_t(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi_1 u_{tx} + \eta u_{tt}, \\
\phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xxx} + \eta u_{xtx}, \\
\phi^{xt} &= D_x D_t(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xxt} + \eta u_{xtt}, \\
\phi^{tt} &= D_t^2(\phi - \xi u_x - \eta u_t) + \xi u_{xtt} + \eta u_{ttt},
\end{aligned} \tag{۲۹.۴}$$

[۲] Whitham-type

که D_x و D_t عملگرهای مشتق کامل هستند. با تاثیر دادن امتداد مرتبه دوم روی معادله (۲۶.۴) داریم:

$$\phi^{xt} - 2\phi u_{xx} - 2u\phi^{xx} - 2u_x\phi^x = 0, \tag{۳۰.۴}$$

با جایگذاری ضرایب $\phi^x, \phi^t, \cdots$ در معادله (۳۰.۴) و ساده کردن معادله و مساوی قرار دادن ضرایب تک‌جمله‌ای‌های $u, u_x, u_t, \cdots$ به دستگاه‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{llll} \xi_t = -2\varphi + 2u\varphi_u, & \xi_u = 0, & \xi_x = \varphi_u + \eta_t, & \xi_{tu} = 0, \\ \eta_x = 0, & \eta_u = 0, & \eta_{tt} = -2\varphi_x, & \varphi_{uu} = 0, \\ \varphi_{tx} = 0, & \varphi_{xu} = 0, & \varphi_{xx} = 0, & \end{array} \tag{۳۱.۴}$$

دستگاه فوق دارای جواب زیر با ضرایب ثابت و دلخواه $c_1, \ldots, c_5$ و تابع مشتق‌پذیر $f(t)$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \xi &= (c_1t + c_2 + c_4)x - 2f(t) + c_5, \\ \eta &= \tfrac{1}{2}c_1t^2 + c_2t + c_3, \\ \varphi &= -\tfrac{1}{2}c_1x + c_4u + f'(t), \end{aligned} \tag{۳۲.۴}$$

بنابراین تقارن‌های معادله (۲۶.۴) عبارت است از:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = \partial_x, & \mathbf{v}_2 = \partial_t, \\ \mathbf{v}_3 = x\partial_x + t\partial_t, & \mathbf{v}_4 = x\partial_x + u\partial_u, \\ \mathbf{v}_5 = tx\partial_x + \frac{t^2}{2}\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_u, & \mathbf{v}_6 = f'(t)\partial_u - 2f(t)\partial_x, \end{array} \tag{۳۳.۴}$$

گروه‌های یک-پارامتری G_i تولید شده توسط $\mathbf{v}_i$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &G_1 : (x,t,u) \longmapsto (x+\varepsilon, t, u), \\ &G_2 : (x,t,u) \longmapsto (x, t+\varepsilon, u), \\ &G_3 : (x,t,u) \longmapsto (e^\varepsilon x, e^\varepsilon t, u), \\ &G_4 : (x,t,u) \longmapsto (e^\varepsilon x, t, e^\varepsilon u), \\ &G_5 : (x,t,u) \longmapsto \left(\frac{4x}{(t\varepsilon-2)^2}, \frac{2t}{2-t\varepsilon}, \frac{x\varepsilon + tu\varepsilon - 2u}{t\varepsilon - 2}\right), \\ &G_6 : (x,t,u) \longmapsto (x - 2f(t)\varepsilon, t, f'(t)\varepsilon + u). \end{aligned}$$

حال برای یافتن قوانین پایستگی، ضرایب موضعی نظیر معادله (۲۶.۴) به فرم زیر است:

$$\Lambda = \xi(x, t, u, u_x, u_t),$$

حال به $\Lambda(x,t,U,U_x,U_t)$ یک ضرایب قانون پایستگی موضعی سیستم PDE، (۲۶.۴) می‌گویند اگر و تنها اگر

$$E_U\left(\xi(x,t,U,U_t,U_x)\left(u_{xt} - 2uu_{xx} - u_x^2\right)\right) \equiv 0, \tag{۳۴.۴}$$

برای توابع دلخواه $U(x,t)$ برقرار باشد. با باز کردن معادله (۳۴.۴) به یک دستگاه خطی از معادلات دیفرانسیل تبدیل می‌شوند که عبارتند از:

$$\begin{array}{ll} \xi_{xx} = 0, & \xi_u = 0, \\ \xi_{u_t^2} = 0, & \xi_{u_xu_t} = 0, \\ \xi_{xu_t} = 0, & \xi_{tx} - 2\xi_{tu_t}u_x^2, \\ \xi_{xu_x} = \xi_{tu_t}, & \xi_{t^2u_t} = -2\xi_{tu_t}u_x + 2\xi_x, \\ \xi_{tu_x} = -2\xi_{u_x}u_x - 2u_t\xi_{u_t} + 2\xi - u_x^2\xi_{u_x^2}. & \end{array}$$

با حل دستگاه فوق ضرایب تابعی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= u_t,\\
\xi_2 &= xu_x + tu_t,\\
\xi_3 &= xtu_x + \tfrac{1}{2}t^2u_t + \tfrac{1}{2}x,\\
\xi_4 &= \tfrac{1}{2}(c+2u_x)\exp(ct),\\
\xi_5 &= (c-2u_x)\exp\left(\tfrac{c(tu_x+1)}{u_x}\right).
\end{aligned} \tag{۳۵.۴}$$

هر کدام از ضرایب $\Lambda_i = \xi_i$ ، $i = 1, \dots, 4$ یک قانون پایستگی موضعی به فرم $D_t\Psi^i + D_x\Phi^i = 0$ با مشخصه

$$D_t\Psi^i + D_x\Phi^i \equiv \xi_i(u_{xt} - 2uu_{xx} - u_x^2) = 0, \tag{۳۶.۴}$$

بر روی جواب‌های معادله تولید می‌کنند که در ادامه به آن‌ها اشاره خواهد شد.

- قوانین پایستگی متناظر با $\xi_1 = u_t$:

$$\begin{aligned}
&D_t\left(\tfrac{1}{4}uu_{xt} - \tfrac{2}{3}u^2u_{xx} - \tfrac{1}{3}uu_x^2 + \tfrac{1}{4}u_xu_t\right)\\
&\quad + D_x\left(-\tfrac{2}{3}uu_xu_t - \tfrac{1}{4}uu_{tt} + \tfrac{1}{4}u_t^2 + \tfrac{2}{3}u^2u_{xt}\right) = 0.
\end{aligned}$$

- قوانین پایستگی متناظر با $\xi_2 = xu_x + tu_t$:

$$\begin{aligned}
&D_t\Big(\tfrac{1}{4}xuu_{xt} - xuu_x^2 - \tfrac{2}{3}tuu_xu_t - \tfrac{1}{4}uu_t - \tfrac{1}{4}tuu_{tt} + \tfrac{1}{4}xu_tu_x\\
&\quad + \tfrac{1}{4}tu_t^2 + \tfrac{2}{3}u^2u_x + \tfrac{2}{3}tu^2u_{xt}\Big) + D_t\Big(\tfrac{1}{4}tuu_{xt} - \tfrac{2}{3}tu^2u_{xx}\\
&\quad - \tfrac{1}{3}tuu_x^2 - \tfrac{1}{4}uu_x - \tfrac{1}{4}xuu_{xx} + \tfrac{1}{4}xu_x^2 + \tfrac{1}{4}tu_xu_t\Big) = 0.
\end{aligned}$$

و همچنین قوانین پایستگی متناظر به همین صورت پیدا می‌شود.

حال اثر میدان‌های برداری (۳۳.۴) بر روی ضرایب تابعی (۳۵.۴) در جدول زیر بیان می‌شود:

$\mathbf{v}_i\xi_i$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
$\mathbf{v}_1$	0	u_x	$tu_x + \frac{1}{2}$	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	ξ_1	ξ_2	$c\xi_4$	$c\xi_5$
$\mathbf{v}_3$	0	ξ_2	$x(tu_x + \frac{1}{2}) + t\xi_2$	$ct\xi_4$	$ct\xi_5$
$\mathbf{v}_4$	0	xu_x	$x(tu_x + \frac{1}{2})$	0	0
$\mathbf{v}_5$	0	$xtu_x + \frac{t^2}{2}u_t$	$xt(tu_x + \frac{1}{2}) + \frac{t^2}{2}\xi_2$	$\frac{ct^2}{2}\xi_4$	$\frac{ct^2}{2}\xi_5$
$\mathbf{v}_6$	0	$-2f(t)u_x$	$-2f(t)(tu_x + \frac{1}{2})$	0	0

بنابراین

$$\zeta_1 = u_x, \qquad \zeta_2 = tu_x + \frac{1}{2}. \tag{۳۷.۴}$$

ضرایب تابعی جدید می‌باشند، زیرا در شرط ضرایب تابعی (۶.۳) صادقند و نسبت به ξ_i ، $i = 1, \dots, 5$ مستقل خطی می‌باشند.

مراجع

[1] Anco S.C. and Bluman G.W., (1997), *Direct Construction of Conservation Laws from Field Equations*, Phys. Rev. Lett., 78, 2869-2873.

[2] Anco S. and Bluman G., (2002), *Direct Construction Method for Conservation Laws of Partial Differential Equations Part II: General Treatment*, Eur J Appl Math, 13, 567-585.

[3] Anco S.C., (2003), *Conservation Laws of Scaling-Invariant Field Equations*, J. Phys., A 36, 8623-8638.

[4] Anco S.C. and Bluman G.W., (2002), *Direct Construction Method for Conservation Laws of Partial Differential Equations. Part I: Examples of Conservation Law Classifications*, Eur. J. Appl. Math., 13, 545-566.

[5] Baldwin D.E., Hereman W., (2010), *A Symbolic Algorithm for Computing Recursion Operators of Nonlinear Partial Differential Equations*, International Journal of Computer Mathematics, 87, 1094-1119.

[6] Bessel-Hagen E., (1921), *Uber Die Erhaltungssatze Der Elektrodynamik*, Math. Ann., 84, 258-276.

[7] Bluman G.W., Cheviakov A.F. and Anco S.C., (2009), *Construction of Conservation Laws: How the Direct Method Generalizes Noether's Theorem*, Proceeding of 4th Workshop "Group Analysis of Di erential Equations Integribility", p. 1-23.

[8] Bluman G.W., Cheviakov A.F. and Anco S.C., (2010), *Application of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer, New York, Dordrecht Heudelberg London.

[9] Bluman G.W., Temuerchaolu. and Anco S.C., (2006), *New Conservation Laws Obtained Directly from Symmetry Action on a Known Conservation Law*, J. Math. Anal. Appl., 322.

[10] Bluman G.W. and Temuerchaolu, (2005), *Conservation Laws for Nonlinear Telegraph Equations*, J. Math. Anal. Appl., 310, 459-476.

[11] Bluman G.W. and Temuerchaolu, (2005), *Comparing Symmetries and Conservation Laws of Nonlinear Telegraph Equations*, J. Math. Phys., 46, 073513.

[12] Bluman G.W. and Cole J.D., (1974), *CSimilarity Methods for Differential Equations*, Appl. Math. Sci., No. 13, Springer-Verlag, New York.

[13] Bluman G.W. and Cole J.D., (1969), *The General Similarity Solution of the Heat Equation*, J. Math. Mech. 18, 1025-1042.

[14] Bluman G.W. and Kumei S., (1989), *Symmetry and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, No. 81, Spriger-Verlag, New York.

[15] Boyer T.H., (1967), *Continuous Symmetries and Conserved Currents*, Ann.Physics, 42, 445-466.

[16] Göktas U. and Hereman W., (1998), *SComputation of Conservation Laws for Nonlinear Lattices*, Physica D, 123, 425-436.

[17] Hejazi S.R., (2011), *Contact Geometry and Symmetry Analysis of Differential Equations*, Ph.D. dissertation, Iran University of Science and Technology, Tehran.

[18] Hejazi S.R., (2013), *Travelling Wave Solutions and Conservation Laws of Fisher-Kolmogorov Equation*, Gen. Math. Notes, Vol. 18, No. 2, October, pp. 16-25.

[19] Hejazi S.R., (2014), *Lie Group Analaysis, Hamiltonian Equation and Conservation Laws of Born-Infeld Equation*, Asian-European J. Math, Vol. 7, No. 3, 1-19.

[20] Hereman W., (2006), *Symbolic Computation of Conservation Laws of Nonlinear Partial Differential Equations in Multi-Dimensions*, International Journal of Quantum Chemistry, 106, 278-299.

[21] Hopf E., (1950), *The Partial Differential Equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., 3, 201-230.

[22] Hydon P.E., (2000), *Symmetry Method for Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[23] Ibragimov N.H., Torrisi M. and Valenti A., *Perliminary Group Classification of Equations* $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$, J. Math. Phys. 32, 2988-2995.

[24] Ibragimov N.H., ed., (1994), *CRC Handbook of Lie Groups Analysis of Differential Equations*, Vol. 1, CRC Press, Boca Raton. Fl.

[25] Lee J.M., (2002), *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM, Springer, New York.

[26] Noether E., (1918), *Invariante Variations Probleme, Nachr. KÄonig. Gesell. Wissen. GÄottingen*, Math.-Phys. Kl., 235-257.

[27] Olver P.J., (1993), *Applications of Lie Groups to Differential Equations, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics*, vol. 107, Springer-Verlag, New York.

[28] Olver P.J., (1995), *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge.

[29] Olver P.J., (1986), *Noether's Theorem and Systems of Cauch-Kovalevskaya Type in Non-Linear Systems of PDE in Applied Mathematics*, B. Nicholaenko, D.D. Holm, and J.M. Hyman, eds., Lectures in Applied Math., vol. 23, part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., pp. 81-104.

[30] Prykarpatsky A.K. and Prytula M.M., (2006), *The Gradient-Holonomic Integrability Analysis of a Whitham-Type Nonlineadynamical Model for a Relaxing Medium with Spatial Memory*, Nonlinearity, 19, 2115-2122.

[31] Stephani H., (1989), *Differential Equations, Their Solutions Using Symmetries*, Cambridge University Press, Cambridge New York.

[32] Shirvani V., (2013), *Lie Transformation Groups and its Application to Partial Differential Equations Derived from Fluid Mechanics*, Ph.D. Dissertation, Islamic Azad University, Karaj Branch, Tehran.

[33] Wan A., (2007), *Finding Conservation Laws for Partial Differential Equations*, B.A.Sc., The University of British Columbia.

[34] Wolf T., (2002), *Investigating Differential Equations with CRACK, LiePDE, Applysymm and ConLaw*, Handbook of Computer Algebra, Foundations, Applications, Systems (J. Grabmeier, E. Kaltofen, and V. Weispfenning, Eds.), Springer, New York, pp. 465-468.

[35] Wolf T., (2002), *A Comparison of Four Approaches to the Calculation of Conservation Laws*, European J. Appl. Math., V.13, 129-152.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

امتداد	prolongation
ایمرژن	immersion
بستار	closure
بردار مماس	tangent vector
برش	section
بعد	dimension
پایه	basis
پوچ-دیورژانس	null divergence
تابع	equation
تار	fiber
تباهیده	degenerate
تبدیل نقطه‌ای	point transformation
تقارن معادلات دیفرانسیل	symmetry of differential equation
تصویر	image
تناظر	correspondence
توپولوژی گسسته	discrete topology
چارت مختصاتی	coordinate chart
چگالی پایا	conserved density
چند جمله‌ای	polynomial
حرکت	motion
خم انتگرال	integral curve
دترمینان	determinant
درایه	entry
دیفئومورفیسم	diffeomorphism
دیورژانس	divergence

رتبه ماکسیمال .... maximal rank
زیر گروه یک-پارامتری .... one-parameter subgroup
زیر منیفلد منظم .... regular submanifold
سابمرژن .... submersion
شرط آغازی .... initial condition
ضرب .... product
ضریب .... multiplier
عمل .... action
عمل گروه بی‌نهایت کوچک .... infinitesimal group action
عملگر اویلر .... Euler operator
فضای توپولوژیکی .... topological space
فضای کامل .... total space
فضای جت .... jet space
فضای مماس .... tangent space
فضای هاسدورف .... Hausdorff space
قضیه زیر گروه بسته .... closed subgroup theorem
قضیه کوشی کوالفسکی .... Cauchy Kovalevskaya theorem
قوانین پایستگی .... conservation laws
کامل .... complete
کاملا غیر تباهیده .... totally non-degenerate
کلاس هم ارزی .... equivalence class
کلاف .... bundle
کلاف برداری .... vector bundle
کلاف مماسی .... tangent bundle
گروه تبدیلات .... transformation group
گروه دوران .... rotation group
گروه دوران .... orthogonal group
گروه لی .... Lie group
لم .... lemma
متغیر مستقل .... dependent variable
مختصات موضعی .... local coordinate
مجموعه تراز .... level set

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	partial differential equation
معادلات دیفرانسیل معمولی	ordinary differential equation
معادله گرما	heat equation
معادلات مشخصه	determining equations
معادله برگر	Burgers' equation
منیفلد	manifold
موضعا اقلیدسی	locally Euclidean
مولد بی‌نهایت کوچک	infinitesimal generator
میدان برداری	vector field
ناوردای دیفرانسیلی	differential invariant
نمایه	exponential
همانی	identity
همبند	connected
هموار	smooth

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action .... عمل
basis .... پایه
bracket .... کروشه، براکت
bundle .... کلاف
Burgers' equation .... معادله برگر
Cartesian .... ضرب دکارتی
Cauchy Kovalevskaya theorem .... قضیه کوشی کوالفسکی
characteristic .... مشخصه
closed subgroup theorem .... قضیه زیرگروه بسته
closure .... بستار
coefficient .... ضریب
combination .... ترکیب
complete .... کامل
connected .... همبند
conservation laws .... قوانین پایستگی
conserved density .... چگالی پایا
constant rank theorem .... قضیه رتبه ثابت
coordinate chart .... چارت مختصاتی
correspondence .... تناظر
definiton .... تعریف
degenerate .... تباهیده
dependent variable .... متغیر وابسته
derivation .... مشتق‌گیری
determinant .... دترمینان
determining equations .... معادلات مشخصه

diffeomorphism	دیفئومورفیسم
differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
dimension	بعد
discrete topology	توپولوژی گسسته
divergence	دیورژانس، واگرایی
entry	درایه
equivalence class	کلاس هم ارزی
Euler operator	عملگر اویلر
exponential	نمایه
equation	تابع
fiber	تار
forward	پیشرو
graph of a function	نمودار تابع
Hausdorff space	فضای هاسدورف
heat equation	معادله گرما
identity	همانی
image	تصویر
immersion	ایمرژن
independent variable	متغیر مستقل
infinitesimal generator	مولد بی نهایت کوچک
infinitesimal group action	عمل گروه بی نهایت کوچک
initial condition	شرط آغازی
integral curve	خم انتگرال
inversion map	نگاشت وارون ساز
jet space	فضای جت
Leibniz' rule	قاعده لایبنیتز
lemma	لم
level set	مجموعه تراز
Lie group	گروه لی
local coordinate	مختصات موضعی
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
manifold	منیفلد

maximal rank .... رتبه ماکسیمال
moment energy .... انرژی لحظه‌ای
motion .... حرکت
multiplier .... ضریب
null divergence .... پوچ- دیورژانس
one-parameter subgroup .... زیرگروه یک- پارامتری
operator .... عملگر
orbit .... مدار
order .... مرتبه
ordinary differential equation .... معادلات دیفرانسیلی معمولی
orthogonal group .... گروه متعامد
partial differential equation .... معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی
point transformation .... تبدیل نقطه‌ای
polynomial .... چندجمله‌ای
product .... ضرب
prolongation .... امتداد
regular submanifold .... زیر منیفلد منظم
rotation group .... گروه دوران
section .... برش
submanifold .... زیر منیفلد
submersion .... سابمرژن
smooth .... هموار
symmetry of differential equation .... تقارن معادلات دیفرانسیل
symmetry .... تقارن
tangent vector .... بردار مماس
topological space .... فضای توپولوژیکی
tangent space .... فضای مماس
tangent bundle .... کلاف مماسی
total derivative .... مشتق کامل
total space .... فضای کامل
totally non-degenerate .... کاملا غیر تباهیده
transformation group .... گروه تبدیلات

کلاف برداری .... vector bundle
میدان برداری .... vector field

نمایه

Aabstract

In this thesis, we study Lie symmetry method for partial differential equations to find symmetry groups, invariant solutions, exact solutions and general solutions. Also, we show how to make local conservation laws arises from a system of differential equations by using direct method, This operation is based on finding of the first conservation laws multiples that played major role in this thesis. At the end, the relations between conservation laws and point symmetries of PDEs are given.
Keywords : *Partial Differential Equation, Lie transformation groups, Lie symmetry, Local conservation laws, Local multipliers*

Shahrood University

Faculty Of Mathematical Sciences

Construction Of Conservation Laws via Direct Method

Paeeze Mahdavi Haravani

Supervisor

Dr. Seyed Reza Hejazi

Advisor

Dr. Ebrahim Hashemi

2015/07/27