دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب

زهره عبدالهیان

استاد راهنما

دکتر مهدی‌رضا خورسندی

آبان ۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری...

سپاس از خداوند بزرگ و مهربانم که جان را فکرت آموخت.
در آغاز از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی‌رضا خورسندی کمال تشکر و قدردانی دارم که از راهنمایی‌های ایشان در پیشبرد پایان‌نامه خود استفاده فراون نمودم.
همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی و جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند تشکر نمایم.
در پایان از پدر و مادر عزیزم و همه اعضای خانواده که در این راه به بنده کمک کردند، قدردانی می‌کنم.

زهره عبدالهیان
آبان ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **زهره عبدالهیان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی‌رضا خورسندی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " University of Shahrood " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره عبدالهیان
آبان ۱۳۹۴

چکیده

در این پایان‌نامه گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب را مطالعه می‌کنیم. رنگ آمیزی این گراف را مورد بررسی قرار خواهیم داد و نشان می‌دهیم عدد رنگی و عدد خوشه‌ای این گراف با هم برابرند. همچنین به مطالعه‌ی قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب می‌پردازیم.
به علاوه نشان خواهیم داد که گراف مقسوم‌علیه صفر چه مجموعه‌های جزئاً مرتبی مسطح هستند و گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتبی که چندبخشی کامل هستند را نیز مطالعه می‌کنیم. در انتها نشان خواهیم داد که چه گراف‌هایی گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب هستند.

کلمات کلیدی: گراف مقسوم‌علیه صفر، مجموعه‌ی جزئاً مرتب، عدد رنگی، قطر، کمر، گراف مسطح، گراف چند بخشی کامل، گراف فشرده، نیم‌گروه کاهشی.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در چند دهه‌ی اخیر در میان شاخه‌های ریاضی موضوعات بین رشته‌ای اهمیت زیادی یافته و سعی محققان برآن است که مطالب مجرد ریاضی را با شاخه‌های کاربردی‌تر ریاضیات پیوند دهند. امروزه گراف‌ها یکی از ابزارهای مناسب برای تحقیق در زمینه‌های گوناگونی از ریاضیات کاربردی و علوم پایه وحتی در برخی از علوم انسانی نظیر علوم اجتماعی شده است. نتایج منتج از نظریه‌ی گراف دارای کاربردهای بسیاری در زمینه‌های محاسباتی و تجربی می‌باشد. استفاده از ابزارهای جبری برای مطالعه‌ی خواص یک گراف و یا به عکس، استفاده از خواص گراف برای بررسی خواص یک ساختار جبری یکی از مهم‌ترین اهداف نظریه‌ی گراف‌های جبری است.
یکی از گراف‌های جبری که در چند دهه‌ی اخیر بر روی آن مقالات بسیاری نوشته شده است، گراف مقسوم‌علیه صفر است. این گراف برای اولین بار توسط بک[۱] در سال ۱۹۸۸ در [۶]، معرفی شد.
این گراف که برای حلقه‌های جابه‌جایی تعریف شده، یک گراف ساده است که مجموعه رئوس آن اعضای حلقه R می‌باشد و دو رأس متمایز x و y در این گراف به هم متصل می‌شوند اگر و تنها اگر $xy = ۰$.
دغدغه اصلی بک رنگ آمیزی این گراف بود، همچنین او حدس زد که عدد رنگی و عدد خوشه‌ای این گراف با هم برابرند.
این تحقیقات توسط اندرسون[۲] و نثیر[۳] در [۴] ادامه یافت، آن‌ها نشان دادند حدس بک در حالت کلی درست نیست. بعد از آن اندرسون و لیوینگستون[۴] در [۵]، تعریف گراف مقسوم‌علیه صفر را اصلاح کردند، به این ترتیب که رأس‌های تنها و رأس صفر را از مجموعه رئوس حذف کردند.
از دیگر افرادی که در این زمینه تحقیق کردند، نیمبرکار[۵] و واسادیکار[۶] در [۱۲]، بودند که نشان دادند حدس بک برای نیم‌گروه‌های جابه‌جایی با عنصر صفر که عناصر آن خودتوان باشند برقرار است. همچنین محققان دیگری بودند که علاقه‌مند بودند تعریف این گراف را به دیگر ساختارهای جبری بسط دهند.
در سال‌های اخیر گراف‌های مرتبط با ساختارهای جبری دیگر مورد مطالعه قرار گرفته است. به طور

[۱] Beck
[۲] Anderson
[۳] Nasser
[۴] Livingston
[۵] Nimbhorkar
[۶] Wasadikhar

مثال هالاس[۷] و جاکل[۸] در [۱۰]، مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر را برای ساختارهای جبری مجموعه‌های جزئاً مرتب که دارای کوچکترین عنصر ۰ بودند، معرفی کردند و به حدس بک پاسخ مثبت دادند.
مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب توسط افراد دیگر نیز ادامه پیدا کرد. به عنوان مثال در مقاله [۲]، قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب بررسی شده است. نشان داده شده است که این گراف همبند و قطر آن حداکثر سه و کمر آن سه، چهار یا ∞ است. همچنین علیزاده، میمانی، پورنکی و یاسمی در [۳]، چندبخشی بودن گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب را بررسی کردند. به عنوان مثال آن‌ها نشان دادند که گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه جزئاً مرتب دوبخشی است اگر و تنها اگر دوبخشی کامل باشد. همچنین در مقالات [۱] و [۱۱] مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب ادامه پیدا کرد.
در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف مقدماتی شامل مقدمات نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی ترتیب بیان خواهد شد. دربخش اول فصل دوم نشان می‌دهیم که عدد رنگی و عدد خوشه‌ای گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب با هم برابرند. همچنین در بخش دوم همین فصل قطر و کمر این گراف بررسی می‌شود. نشان می‌دهیم که این گراف همبند و قطر آن حداکثر سه است. همچنین کمر گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب سه، چهار یا ∞ است.
در بخش اول فصل سوم این رساله نشان می‌دهیم که گراف مقسوم‌علیه صفر چه مجموعه‌های جزئاً مرتبی مسطح هستند و در بخش دوم همین فصل گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتبی که چند بخشی کامل هستند، مشخص خواهند شد. این مشخص‌سازی بر حسب ایده‌آل‌های مجموعه‌های جزئاً مرتب بیان خواهد شد. سرانجام در فصل آخر این رساله نشان می‌دهیم که چه گراف‌هایی گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه های جزئاً مرتب هستند. در این فصل گراف‌های فشرده معرفی خواهند شد. نشان خواهیم داد یک گراف ساده، گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه جزئاً مرتب است اگر و تنها اگر یک گراف فشرده باشد. در انتهای فصل ارتباط گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه جزئاً مرتب با گراف مقسوم‌علیه صفر نیم‌گروه‌ها بیان خواهد شد.
مطالب این پایان‌نامه برگرفته از مقالات [۱]، [۲]، [۳]، [۱۰] و [۱۱] می‌باشد.

[۷] Halaŝ

[۸] Jukl

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمات نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. در این صورت یک گراف ساده یا به اختصار یک گراف مانند G زوج مرتب (V,E) از مجموعه‌ها می‌باشد به طوری که $E \subseteq [V]^۲$ و $[V]^۲$ مجموعه‌ی همه زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. هر عضو مجموعه‌یV را یک رأس از گراف G و هر عضو از مجموعه‌ی E را یک یال گراف G می‌گوئیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت H را یک زیرگراف از G گوئیم، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد. علاوه بر این اگر برای هر $a,b \in V(H)$، $\{a,b\} \in E(G)$ ایجاب کند که $\{a,b\} \in E(H)$، آنگاه H را زیرگراف القائی G گوئیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید x یک رأس در گراف G باشد. در این صورت رأس‌هایی که به x متصل‌اند را همسایگی‌های x گوئیم و با $N(x)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. دنباله‌ای از رئوس و یال‌های مجاور به هم به شکل $v_۰e_۱v_۱e_۲...e_kv_k$ را یک گشت به طول k در گراف G می گوئیم.

تعریف ۵.۱.۱. گشتی که دارای یال تکراری نباشد گذر نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. مسیر گذری است که دارای رأس تکراری نباشد.

تعریف ۷.۱.۱. اگر ابتدا و انتهای مسیر در گراف G به هم متصل شوند، آنگاه به آن دور می‌گوئیم و طول کوتاه‌ترین دور در گراف G کمر گراف نامیده می‌شود که با $\mathrm{girth(G)}$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که گراف دور نداشته باشد، $\mathrm{girth}(G) = \infty$ تعریف می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید G یک گراف ساده باشد. هسته گراف G، اجتماع همه‌ی دورهای گراف G است.

تعریف ۹.۱.۱. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس x و y از گراف G فاصله بین دو رأس x و y نامیده می‌شود و با $\mathrm{d(x,y)}$ نمایش داده می‌شود. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد فاصله‌ی بین دو رأس بی‌نهایت تعریف می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱. قطر گراف G که آن را با نماد $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{diam}(G) = \sup\{\mathrm{d(x,y)} | \text{هستند } G \text{ دو رأس از گراف } y \text{ و } x\}$$

تعریف ۱۱.۱.۱. گراف کامل گرافی است که بین هر دو رأس متمایز آن یک یال وجود داشته باشد. گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. گراف $r-$بخشی $(r \geq ۲)$ گرافی است که بتوان مجموعه‌ی رئوس آن را به زیرمجموعه‌های $X_۱$ و $\ldots$ و X_r چنان افراز نمود به گونه‌ای که هیچ دو رأسی در X_i $(۱ \leq i \leq r)$ با هم مجاور نباشند.

تعریف ۱۳.۱.۱. گراف $r-$بخشی کامل $(r \geq ۲)$ یک گراف $r-$بخشی است به طوری که هر رأس $x \in X_i$ $(۱ \leq i \leq r)$ به هر رأس $y \in X_j$ $(۱ \leq j \leq r$ و $j \neq i)$ متصل است. گراف $r-$بخشی کامل را با نماد $K_{r_۱,\ldots,r_n}$ نشان می‌دهند که در آن $r_i = \mathrm{Card}X_i$ $(۱ \leq i \leq n)$. گراف $K_{۱,n}$ را گراف ستاره می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. گراف G را همبند گوئیم، اگر برای هر دو رأس x و y از G یک مسیر بین x و y وجود داشته باشد. در غیر این‌صورت G را ناهمبند می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک رأس از گراف که دقیقاً یک یال به آن متصل شده است را رأس پایانی می‌گوئیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. عدد رنگی گراف G، کم‌ترین تعداد رنگی است که بتوان به رأس‌های گراف G نسبت داد به طوری که هر دو رأس متصل به هم، دارای رنگ‌های متمایزی باشند. عدد رنگی گراف G را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک زیرگراف کامل از گراف G را یک خوشه می‌نامیم. کوچکترین کران بالای اندازه خوشه‌ها در G را عدد خوشه‌ای گراف G می‌گوئیم و با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت زیرگراف H از G یک مؤلفه‌ی همبندی برای G است اگر و تنها اگر بین هر دو رأس در H، دست‌کم یک مسیر وجود داشته باشد و با افزودن هر رأس (و یا یال) دیگری از G به H این خاصیت از بین برود. به عبارت دیگر هر زیرگراف بیشینه و همبند از G، یک مؤلفه‌ی همبندی G است.

تعریف ۱۹.۱.۱. رأس x را برشی گوئیم، هرگاه با حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی در گراف افزایش یابد.

تعریف ۲۰.۱.۱. گراف G را یک تظریف از H گوئیم، هرگاه مجموعه‌ی رأس‌های G و H یکسان باشد و هر یال در H یک یال در G باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱. قرار دادن یک رأس جدید روی یک یال مانند ab در گراف G را یک زیرتقسیم یالی از گراف G گوئیم. یک زیرتقسیم گراف G گرافی است که می‌توان از G با دنباله‌ای متناهی از زیرتقسیم‌های یالی به دست آورد. خود G طبق قرارداد یک زیرتقسیم از خودش است.

قضیه ۲۲.۱.۱. *(کونیگ[۱]) گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر G شامل دور فرد نباشد.*

تعریف ۲۳.۱.۱. گراف G را مسطح گوئیم، هرگاه بتوان در صفحه آن را طوری رسم کرد که یال‌هایش جز در نقاط انتهایی با یکدیگر برخورد نداشته باشند.

قضیه ۲۴.۱.۱. *(کوراتوفسکی[۲]) یک گراف متناهی مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیرتقسیمی از $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ نباشد.*

تعریف ۲۵.۱.۱. گراف همبند و بدون دور را درخت می‌نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. دو گراف G و H را یکریخت گوئیم هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا مانند

$$\varphi : V(G) \to V(H)$$

وجود داشته باشد به طوری که $\{x, y\} \in E(G)$ اگر و تنها اگر $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E(H)$.

خواننده می‌تواند برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه نظریه‌ی گراف به مرجع [۷]، مراجعه کند.

۲.۱ مقدمات نظریه‌ی ترتیب

تعریف ۱.۲.۱. یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب مجموعه‌ای است ناتهی مانند P همراه با رابطه‌ی دوتایی $\leq$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:
(۱)به ازای هر $x \in P$ ، $x \leq x$ (خاصیت انعکاسی).
(۲)به ازای هر $x, y \in P$ ، $x \leq y$ و $y \leq x$ ایجاب می‌کند $x = y$ (خاصیت پادتقارنی).
(۳)به ازای هر $x, y, z \in P$ ، $x \leq y$ و $y \leq z$ ایجاب می‌کند $x \leq z$ (خاصیت تعدی).

تذکر ۲.۲.۱. *فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. کوچکترین عضو P در صورت وجود را با ۰ نمایش می‌دهیم. در صورتی‌که P دارای کوچکترین عضو نباشد، عضوی با نام ۰ خارج از P را به آن اضافه می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر قرار دهید $P_۱ := P \cup \{۰\}$ و رابطه‌ی $\leq_۱$ روی $P_۱$ به صورت زیر تعریف می‌شود:*
برای هر $x, y \in P_۱$، $x \leq_۱ y$ اگر و تنها اگر $x \leq y$ و برای هر $x \in P_۱$، $۰ \leq_۱ x$. حال $(P_۱, \leq_۱)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است که دارای کوچکترین عضو است.
در سراسر این رساله $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب با عنصر مینیمم "۰" است. همچنین $P \setminus \{۰\}$ با P^* نشان داده می‌شود.

[۱] könig

[۲] kuratowski

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی A ازمجموعه‌ی جزئاً مرتب P را یک زنجیر از P می‌گوئیم هرگاه با رابطه‌ی $\leq$ مرتب کلی باشد، به عبارت دیگر هر دو عضو این مجموعه قابل مقایسه باشند. (یعنی برای هر $x, y \in A$، $x \leq y$ یا $y \leq x$.)

تعریف ۴.۲.۱. زیرمجموعه A از مجموعه جزئاً مرتب P را یک پادزنجیر می‌گوئیم هرگاه هیچ دو عضو آن قابل مقایسه نباشند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی جزئاً مرتب P باشد. در این صورت می‌گوئیم عنصر x از مجموعه‌ی P یک کران پائین برای S است هرگاه به ازای هر عنصر $s \in S$ داشته باشیم $x \leq s$. همچنین می‌گوئیم عنصر y یک کران بالا برای مجموعه‌ی S است هرگاه به ازای هر عنصر $s \in S$ داشته باشیم $s \leq y$. مجموعه‌ی کران‌های پائین مجموعه‌ی S را با نماد $L(S)$ و مجموعه‌ی کران‌های بالای S را با $U(S)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$L(S) = \{x \in P | x \leq s \text{ ، } s \in S \text{به ازای هر}\} \text{ و}$$

$$U(S) = \{x \in P | s \leq x \text{ ، } s \in S \text{به ازای هر}\}.$$

در صورتی که

$$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

باشد، آن‌گاه به جای $L(S)(U(S))$ از نماد $L(x_1, \ldots, x_n)(U(x_1, \ldots, x_n))$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۶.۲.۱. عنصر $x \in P$ را مقسوم‌علیه صفر گوئیم هرگاه عنصر $y \in P^*$ وجود داشته باشد که $L(x, y) = \{0\}$. مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر P را با $Z(P)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $Z(P) \setminus \{0\}$ را با $Z(P)^*$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی I از مجموعه‌ی جزئاً مرتب P را ایده‌آل P گوئیم، هرگاه برای هر $x, y \in P$، اگر $x \in I$ و $y \leq x$، آنگاه $y \in I$. اگر $I \neq P$ باشد I را ایده‌آل سره P می‌گوئیم. توجه کنید که $\{0\}$ زیرمجموعه‌ی هر ایده‌آل است.

تعریف ۸.۲.۱. برای $x \in P$، پوچساز x را با نماد $\mathrm{Ann}(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{y \in P | L(x, y) = \{0\}\}$$

لم ۹.۲.۱. *$\mathrm{Ann}(x)$ یک ایده‌آل از P است.*

برهان. فرض کنید که $y_1, y_2 \in P$ و $y_1 \in \mathrm{Ann}(x)$ و $y_2 \leq y_1$. در این‌صورت باید نشان دهیم که $y_2 \in \mathrm{Ann}(x)$. چون $y_1 \in \mathrm{Ann}(x)$ لذا $L(y_1, x) = \{0\}$. حال $t \in L(y_2, x)$ را در نظر می‌گیریم. پس $t \leq y_2$ و $t \leq x$. از $t \leq y_2$ و $y_2 \leq y_1$ نتیجه می‌شود که $t \leq y_1$. بنابراین $t \in L(y_1, x)$ و لذا $L(y_2, x) \subseteq L(y_1, x) = \{0\}$. بنابراین $y_2 \in \mathrm{Ann}(x)$. □

تعریف ۱۰.۲.۱. برای $x \in P$ تعریف می‌کنیم:

$$(x] := \{y \in P | y \leq x\}$$

که یک ایده‌آل ازP می‌باشد و ایده‌آل اصلی P تولید شده توسط x نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. ایده‌آل سره $\mathfrak{p}$ از P یک ایده‌آل اول می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in P$، اگر $L(x, y) \subseteq \mathfrak{p}$ آن‌گاه $x \in \mathfrak{p}$ یا $y \in \mathfrak{p}$ باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از P را ایده‌آل اول پوچساز گوئیم اگر $x \in P$ وجود داشته باشد که $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل های اول پوچساز P را با نماد $\mathrm{Ass}(P)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $\emptyset \neq Q \subseteq P$. $x \in Q$ را یک عنصر مینیمال Q گوئیم هرگاه برای هر $y \in Q$، اگر $y \leq x$ آن‌گاه $y = x$. مجموعه‌ی تمام عناصر مینیمال Q را با $\mathrm{Min}(Q)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $\emptyset \neq Q \subseteq P$. $x \in Q$ را یک عنصر ماکسیمال Q گوئیم هرگاه برای هر $y \in Q$، اگر $x \leq y$ آن‌گاه $y = x$. مجموعه‌ی تمام عناصر ماکسیمال Q را با $\mathrm{Max}(Q)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی ناتهی و جزئاً مرتب باشد.

(یک) می‌گوئیم که $(P, \leq)$ در شرط زنجیره‌ی صعودی صدق می‌کند اگر به ازای هر خانواده‌ای از عضوهای P چون $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ با ویژگی

$$p_۱ \leq p_۲ \leq \cdots \leq p_i \leq p_{i+۱} \leq \ldots$$

عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $p_k = p_{k+i}$.

(دو) گوئیم $(P, \leq)$ در شرط ماکسیمال صدق می‌کند اگر هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از P شامل عضوی ماکسیمال (نسبت به $\leq$) باشد.

لم ۱۶.۲.۱. *فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی ناتهی و جزئاً مرتب باشد. در این صورت $(P, \leq)$ در شرط زنجیره‌ی صعودی صدق می‌کند اگر و تنها اگر در شرط ماکسیمال صدق کند.*

برهان. برای اثبات به [۱۳، لم ۳۶.۳] مراجعه شود. □

خواننده می‌تواند برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه‌ی نظریه ترتیب به مرجع [۸]، مراجعه کند.

۳.۱ گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب با عنصر مینیمم ۰ باشد. در این صورت گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$، گرافی است که رئوس آن مقسوم‌علیه‌های صفر غیر صفر P می‌باشند و دو رأس x و y از P به هم متصل‌اند اگر و تنها اگر $L(x,y) = \{0\}$ باشد. در سرتاسر این پایان‌نامه P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب غیر صفر است و $Z(P)^* \neq \emptyset$ فرض می‌شود.

لم ۲.۳.۱. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

(یک) اگر $x,y \in \mathrm{Min}(P^*)$ و $x \neq y$، آن‌گاه $L(x,y) = \{0\}$ و بنابراین x و y در $\Gamma(P)$ به هم متصل‌اند.

(دو) اگر $x \in \mathrm{Min}(P^*)$ و $y \in P^*$ که $x \nleq y$، آن‌گاه $L(x,y) = \{0\}$ و بنابراین x و y در $\Gamma(P)$ به هم متصل‌اند.

(سه) اگر $x \in \mathrm{Min}(P^*)$ و $y \in Z(P)^*$ که $x \leq y$، آن‌گاه $L(x,y) \neq \{0\}$ و بنابراین x و y در $\Gamma(P)$ به هم متصل نیستند.

(چهار) برای $x \in P^*$، $\mathrm{Ann}(x) \neq \{0\}$ اگر و تنها اگر $x \in \mathrm{Z}(P)^*$.

(پنج) اگر $x,y \in P$ و $x \leq y$، آن‌گاه برای هر $z \in P$ داریم $L(x,z) \subseteq L(y,z)$ و بنابراین $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$.

(شش) اگر $x,y,z \in \mathrm{Z}(P)^*$ به طوری که $x \leq y$ و y به z در $\Gamma(P)$ متصل باشد، آن‌گاه x به z در $\Gamma(P)$ متصل است.

(هفت) اگر $y \in Z(P)^*$، آن‌گاه $(y]\backslash\{0\} \subseteq \mathrm{Z}(P)^*$ و برای هر $x \in (y]\backslash\{0\}$ که $x \neq y$ باشد $\mathrm{d}(x,y) = 2$.

(هشت) $|\mathrm{Z}(P)^*| \geq 2$.

(نه) $\mathrm{Min}(P^*) \subseteq Z(P)^*$.

برهان. (یک) فرض کنید $L(x,y) \neq \{0\}$. در این صورت $0 \neq t \in L(x,y)$ وجود دارد که $t \leq x$ و $t \leq y$. چون x و y متعلق به $\mathrm{Min}(P^*)$ می‌باشند، لذا $t = x = y$ که این متناقض فرض $x \neq y$ است.
(دو) فرض کنید $L(x,y) \neq \{0\}$. در این صورت $0 \neq t \in L(x,y)$ وجود دارد که $t \leq x$ و $t \leq y$. چون x متعلق به $\mathrm{Min}(P^*)$ است. لذا $t = x$ و بنابراین $x \leq y$ که این متناقض فرض $x \nleq y$ است.
(سه) چون $x \leq y$ و $x \leq x$، لذا $0 \neq x \in L(x,y)$. بنابراین $L(x,y) \neq \{0\}$.
(چهار) ($\Leftarrow$) فرض کنید $\mathrm{Ann}(x) \neq \{0\}$. در این صورت $0 \neq t \in \mathrm{Ann}(x)$ وجود دارد. لذا $L(t,x) = \{0\}$ و بنابراین $x \in Z(P)^*$.

($\Rightarrow$) فرض کنید $x \in Z(P)^*$ باشد. در این صورت طبق تعریف $Z(P)^*$، $y \in P^*$ وجود دارد که $L(x,y)=\{0\}$. در نتیجه $y \in \mathrm{Ann}(x)$. بنابراین $\mathrm{Ann}(x) \neq \{0\}$.

(پنج) فرض کنید $t \in L(x,z)$ باشد. در این صورت $t \leq x$ و $t \leq z$. از طرفی طبق فرض $x \leq y$. پس $t \leq y$ و در نتیجه $t \leq z$ و $t \leq y$. لذا $t \in L(y,z)$ و بنابراین $L(x,z) \subseteq L(y,z)$.

حال برای اثبات قسمت دوم $t \in \mathrm{Ann}(y)$ دلخواه در نظر می‌گیریم. پس طبق تعریف $\mathrm{Ann}(y)$، $L(t,y)=\{0\}$ می‌باشد. از طرفی $L(t,x) \subseteq L(t,y)=\{0\}$. بنابراین $L(t,x)=\{0\}$ که نشان می‌دهد $t \in \mathrm{Ann}(x)$ و در نتیجه $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$.

(شش) فرض کنید $t \in L(x,z)$. در این صورت $t \leq x$ و $t \leq z$. از طرفی طبق فرض $x \leq y$. پس $t \leq y$ و در نتیجه $t \leq z$ و $t \leq y$ که نشان می‌دهد $t \in L(y,z)$ و لذا $L(x,z) \subseteq L(y,z)$.

حال طبق فرض می‌دانیم که $L(y,z)=\{0\}$ پس $L(x,z)=\{0\}$. بنابراین x به z در $\Gamma(P)$ متصل است.

(هفت) فرض کنید $t \in (y]\backslash\{0\}$. در این صورت $t \leq y$. از طرفی طبق قسمت (شش) چون $y \in Z(P)^*$. پس t به رأسی در $\Gamma(P)$ متصل است و لذا $t \in Z(P)^*$. درنتیجه $(y]\backslash\{0\} \subseteq Z(P)^*$.

برای اثبات قسمت دوم فرض کنید $x \in (y]\backslash\{0\}$. در این صورت $x \leq y$. از طرفی y به رأسی مثل z در $\Gamma(P)$ متصل است. درنتیجه طبق قسمت (شش)، x به z در $\Gamma(P)$ متصل است. پس $L(x,z)=L(y,z)=\{0\}$ و بنابراین $\mathrm{d}(x,y)=2$.

(هشت) طبق قرارداد $Z(P)^* \neq \emptyset$ می‌باشد. لذا عنصر $x \in Z(P)^*$ وجود دارد. طبق تعریف $Z(P)^*$، $y \in P^*$ وجود دارد که $L(x,y)=\{0\}$. توجه کنید که $x \neq y$ و در نتیجه $x,y \in Z(P)^*$ و بنابراین $|Z(P)^*| \geq 2$.

(نه) اگر $\mathrm{Min}(P^*)=\emptyset$، آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. لذا فرض کنید $\mathrm{Min}(P)^* \neq \emptyset$. فرض کنید $x \in \mathrm{Min}(P^*)$ دلخواه باشد. چون طبق قرارداد $Z(P)^* \neq \emptyset$، لذا $y \in Z(P)^*$ وجود دارد. دراین‌صورت با استفاده از قسمت (شش) اگر $x \leq y$، یا قسمت (دو) اگر $x \nleq y$ باشد، آنگاه $x \in Z(P)^*$. بنابراین $\mathrm{Min}(P^*) \subseteq Z(P)^*$. $\square$

فصل ۲

خواص مقدماتی گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب

در این فصل خواص مقدماتی گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ مطالعه می‌شود. در بخش اول رنگ آمیزی گراف $\Gamma(P)$ را مطالعه می‌کنیم. نشان خواهیم داد عدد خوشه‌ای و عدد رنگی گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ برابرند. در بخش دوم قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ مطالعه می‌شود. ثابت می‌کنیم که گراف $\Gamma(P)$ همبند است و قطر آن حداکثر سه است. همچنین نشان خواهیم داد کمر گراف $\Gamma(P)$ سه، چهار یا ∞ می‌باشد.

۱.۲ رنگ آمیزی در گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$

هدف اساسی این بخش این است که نشان دهیم $\chi(\Gamma(P)) = \omega(\Gamma(P))$.
در مثال زیر نشان خواهیم داد که هر گرافی نمی‌تواند گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد.

مثال ۱.۱.۲. می‌خواهیم نشان دهیم مجموعه‌ی جزئاً مرتبی وجود ندارد که گراف مقسوم‌علیه صفر آن مطابق شکل ۱.۱.۲ باشد. فرض کنید P مجموعه‌ی جزئاً مرتبی باشد که گراف مقسوم‌علیه صفر آن مطابق شکل ۱.۱.۲باشد. در این صورت $L(a,b) = L(b,c) = L(c,d) = L(d,e) = L(a,e) = \{0\}$ و $L(a,c) = L(a,d) = L(b,d) = L(b,e) = L(c,e) \neq \{0\}$. چون $L(a,d) \neq \{0\}$ لذا یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:
(یک) اگر $a \in L(a,d)$، آن‌گاه $a \leq d$. حال $t \in L(a,c)$ در نظر می‌گیریم، لذا $t \leq a$ و $t \leq c$. در نتیجه $t \leq d$. لذا $t \in L(c,d)$. پس $L(a,c) \subseteq L(c,d) = \{0\}$ و بنابراین $L(a,c) = \{0\}$ که تناقض است.
(دو) اگر $b \in L(a,d)$، آن‌گاه $b \leq a$. حال $L(a,b) = L(b) = \{0\}$. زیرا اگر $t \in L(a,b)$، آن‌گاه $t \leq a$ و $t \leq b$. بنابراین $t \in L(b)$. همچنین اگر $t \in L(b)$، آن‌گاه $t \leq b$. از طرفی $b \leq a$، لذا $t \leq a$.

بنابراین $t \in L(a,b)$. همچنین $b \le d$. به‌طور مشابه $L(a,d)=L(b)=\{0\}$ که هر دو حالت تناقض است.

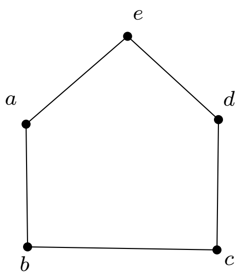
(سه) اگر $c\in L(a,d)$، آن‌گاه $c\le d$. باتوجه به مطالب گفته شده در قسمت (دو)، $L(c,d)=L(c)=\{0\}$. از طرفی $c\le a$، لذا $L(a,c)=L(c)=\{0\}$ که هر دو حالت تناقض است.

(چهار) اگر $d\in L(a,d)$، آن‌گاه $d\le a$. حال $t\in L(b,d)$ در نظر می‌گیریم، لذا $t\le d$ و $t\le b$. در نتیجه $t\le a$. پس $t\in L(a,b)$. لذا $L(b,d)\subseteq L(a,b)=\{0\}$. بنابراین $L(b,d)=\{0\}$ که تناقض است.

(پنج) اگر $e\in L(a,d)$ آن‌گاه $e\le a$. در نتیجه طبق مطالب گفته شده در قسمت (دو) $L(e,a)=L(e)=\{0\}$. بنابراین $L(e,c)=L(0,c)=\{0\}$ که تناقض است.

(شش) اگر $0\neq t\in L(a,d)$ و $t\notin\{a,b,c,d,e\}$، آن‌گاه t مقسوم‌علیه صفر نیست و در نتیجه $L(t,b)\neq\{0\}$. لذا $0\neq t_1\in L(t,b)$ وجود دارد. بنابراین $0\neq t_1\in L(a,b)$ که متناقض $L(a,b)=\{0\}$ است.

لذا در هر کدام از حالت‌های فوق به تناقض رسیدیم. بنابراین فرض خلف باطل وحکم ثابت می‌شود.
توجه کنید که عدد رنگی این گراف سه و عدد خوشه‌ای آن دو است.



شکل ۱.۱.۲: گرافی که گراف مقسوم‌علیه صفر هیچ مجموعه‌ی جزئاً مرتبی نیست.

لم ۲.۱.۲. *فرض کنید $(P,\le)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $x\in P$ و $\mathrm{Ann}(x)$ یک عضو ماکسیمال از $\{\mathrm{Ann}(a)|a\in P, \mathrm{Ann}(a)\neq P\}$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ann}(x)$ یک ایده‌آل اول از P است.*

برهان. با توجه به لم ۹.۲.۱، $\mathrm{Ann}(x)$ یک ایده‌آل است. فرض کنید $L(a,b)\subseteq \mathrm{Ann}(x)$ و $a\notin \mathrm{Ann}(x)$. باید نشان دهیم $b\in\mathrm{Ann}(x)$. ابتدا توجه کنید که $L(a,b,x)=\{0\}$. زیرا اگر $t\in L(a,b,x)$، آن‌گاه $t\in L(a,b)\subseteq \mathrm{Ann}(x)$. در نتیجه $L(t,x)=\{0\}$. از طرفی $t\in L(t,x)$. بنابراین $t=0$. حال چون $a\notin\mathrm{Ann}(x)$، لذا $L(a,x)\neq\{0\}$ و درنتیجه $0\neq z\in L(a,x)$ وجود دارد.

ادعا می‌کنیم $L(b,z)\subseteq L(a,b,x)$. زیرا اگر $t\in L(b,z)$، آن‌گاه $t\le b$ و $t\le z$. از طرفی $z\le a$ و $z\le x$ و لذا $t\le a$ و $t\le x$. یعنی $t\in L(a,b,x)$. بنابراین $L(b,z)=\{0\}$ و در نتیجه $b\in \mathrm{Ann}(z)$. از طرفی $\mathrm{Ann}(x)\subseteq \mathrm{Ann}(z)$. زیرا اگر $t\in\mathrm{Ann}(x)$، آن‌گاه $L(t,x)=\{0\}$. باید

نشان دهیم $t \in \mathrm{Ann}(z)$ یا به طور معادل $L(t,z)=\{0\}$.
فرض کنید $u \in L(t,z)$. در این صورت $u \le t$ و $u \le z$. از طرفی $z \le x$ لذا $u \le x$. بنابراین $u \in L(t,x)=\{0\}$ و لذا $u=0$. بنابراین $\mathrm{Ann}(z) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$. از طرفی چون $z \neq 0$ لذا $z \notin \mathrm{Ann}(z)$ و در نتیجه $\mathrm{Ann}(z) \neq P$. بنابر ماکسیمال بودن $\mathrm{Ann}(x)$، $\mathrm{Ann}(x)=\mathrm{Ann}(z)$. بنابراین $b \in \mathrm{Ann}(x)$ که نشان می‌دهد $\mathrm{Ann}(x)$ یک ایده‌آل است. $\square$

لم ۳.۱.۲. *فرض کنید $(P,\le)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $\mathrm{Ann}(x)$ و $\mathrm{Ann}(y)$ دو ایده‌آل اول متمایز از P باشند، آن‌گاه $L(x,y)=\{0\}$.*

برهان. فرض کنید $L(x,y)\neq\{0\}$. در این صورت $x \notin \mathrm{Ann}(y)$ و $y \notin \mathrm{Ann}(x)$. از طرفی $\mathrm{Ann}(x)$ و $\mathrm{Ann}(y)$ هر دو ایده‌آل اول هستند. همچنین $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$ و $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$. زیرا مثلاً اگر $t \in \mathrm{Ann}(y)$، آن‌گاه $L(t,y)=\{0\}$. چون $\{0\}=L(t,y)\subseteq \mathrm{Ann}(x)$ و $\mathrm{Ann}(x)$ یک ایده‌آل اول است و $y \notin \mathrm{Ann}(x)$ لذا $t \in \mathrm{Ann}(x)$. بنابراین $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$ و به طور مشابه $\mathrm{Ann(x)} \subseteq \mathrm{Ann}(y)$. بنابراین $\mathrm{Ann}(x)=\mathrm{Ann}(y)$ که متناقض با متمایز بودن $\mathrm{Ann}(x)$ و $\mathrm{Ann}(y)$ است. $\square$

لم ۴.۱.۲. *فرض کنید $(P,\le)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $\omega(\Gamma(P)) < \infty$. در این صورت هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از P به شکل $\{\mathrm{Ann}(x) | x \in P, x \neq 0\}$ حداقل یک عنصر ماکسیمال دارد.*

برهان. بنابر لم ۱۶.۲.۱، کافی است نشان دهیم مجموعه‌ی فوق در شرط زنجیره‌ی صعودی صدق می‌کند. به برهان خلف فرض کنید

$$\mathrm{Ann}(x_1) \subset \mathrm{Ann}(x_2) \subset \dots$$

یک زنجیر اکیداً صعودی از ایده‌آل‌های P باشند. برای $j>1$، $a_j \in \mathrm{Ann}(x_j)\backslash \mathrm{Ann}(x_{j-1})$ را اختیار کنید. در این صورت $L(a_j,x_{j-1})\neq\{0\}$ و برای هر $j>1$، $0 \neq y_j \in L(a_j,x_{j-1})$ انتخاب کنید. حال $L(y_j,x_j) \subseteq L(a_j,x_{j-1},x_j)$. زیرا اگر $t \in L(y_j,x_j)$، آن‌گاه $t \le x_j$ و $t \le y_j$. چون $y_j \le a_j$ و $y_j \le x_{j-1}$، پس $t \le x_{j-1}$ و $t \le a_j$. بنابراین $t \in L(a_j,x_{j-1},x_j)$. ادعا می‌کنیم $L(a_j,x_{j-1},x_j)=\{0\}$. چون $a_j \in \mathrm{Ann}(x_j)$، $L(a_j,x_j)=\{0\}$ و لذا $L(a_j,x_{j-1},x_j)=\{0\}$. همچنین $y_j \in \mathrm{Ann}(x_j)\backslash \mathrm{Ann}(x_{j-1})$ چون $L(y_j,x_j)=\{0\}$ و $L(y_j,x_{j-1})\neq\{0\}$، زیرا $y_j \in L(y_j,x_{j-1})$.

ادعا می‌کنیم برای $k \neq j$، $y_j \neq y_k$. در غیر این صورت فرض کنید $j>k$ و $y_j=y_k$. چون $y_j=y_k \in \mathrm{Ann}(x_k)\backslash \mathrm{Ann}(x_{k-1})$ و $\mathrm{Ann}(x_j)\subseteq \mathrm{Ann}(x_{k-1})$. لذا $y_j \notin \mathrm{Ann}(x_j)$ که متناقض با انتخاب y_j است.

از طرفی داریم $L(y_j,y_k)\subseteq L(a_j,x_{j-1},a_k,x_{k-1})$. زیرا اگر $t \in L(y_j,y_k)$، آن‌گاه $t \le y_j$ و $t \le y_k$. از طرفی $y_j \in L(a_j,x_{j-1})$، لذا $y_j \le a_j$ و $y_j \le x_{j-1}$. پس $t \le a_j$ و $t \le x_{j-1}$. به طور مشابه $t \le a_k$ و $t \le a_{k-1}$. بنابراین $t \in L(a_j,x_{j-1},a_k,x_{k-1})$. فرض کنید $j \le k-1$. در این صورت $a_j \in \mathrm{Ann}(x_j)\subseteq \mathrm{Ann}(x_{k-1})$، لذا $L(a_j,x_{k-1})=\{0\}$ و در نتیجه $L(a_j,x_{j-1},a_k,x_{k-1})=$

$\{0\}$. بنابراین $L(y_j, y_k) \subseteq L(a_j, x_{j-1}, a_k, x_{k-1}) = \{0\}$ و درنتیجه $\{y_1, y_2, \dots\}$ یک خوشه‌ی نامتناهی از P است که متناقض $\omega(\Gamma(P)) < \infty$ است. □

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت هر عنصر ماکسیمال $\{\mathrm{Ann}(x) | x \in P, x \neq 0\}$ را یک ایده‌آل پوچساز ماکسیمال گوئیم.

تعریف ۶.۱.۲. فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب و I یک ایده‌آل سره از P باشد. I را $n-$اول گوییم، هرگاه برای $x_1, x_2, \dots, x_n \in P$، اگر $L(x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq I$، آن‌گاه $i \in \{1, \dots, n\}$ موجود باشد که $x_i \in I$. به وضوح ایده‌آل I ۲-اول است اگر و تنها اگر I اول باشد.

لم ۷.۱.۲. *فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب و I یک ایده‌آل سره از P باشد. در این صورت برای $n \geq 2$، I اول است اگر و تنها اگر I، $n-$اول باشد.*

برهان. $(\Leftarrow)$ حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. طبق تعریف ایده‌آل اول، حکم برای $n = 2$ برقرار است. حال فرض کنید $n > 2$ و حکم برای $n - 1$ برقرار باشد. فرض کنید $L(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \subseteq I$ و I ایده‌آل اول از P باشد. $z \in L(x_2, \dots, x_n)$ دلخواه در نظر می‌گیریم.
دراین‌صورت $L(x_1, z) \subseteq L(x_1, \dots, x_n)$. زیرا اگر $t \in L(x, z)$، آن‌گاه $t \leq x$ و $t \leq z$. از طرفی $z \in L(x_2, \dots, x_n)$ و درنتیجه $z \leq x_2$ و ... و $z \leq x_n$. بنابراین $t \leq x_1$ و ... و $t \leq x_n$. و درنتیجه $t \in L(x_1, \dots, x_n)$. اگر $x_1 \in I$، آن‌گاه حکم ثابت است. لذا فرض کنید $x_1 \notin I$. از اول بودن I نتیجه می‌شود که $z \in I$. چون z یک عضو دلخواه از P بود، لذا $L(x_2, \dots, x_n) \subseteq I$. طبق فرض استقرا $2 \leq i \leq n$ وجود دارد که $x_i \in I$. این مطلب نشان می‌دهد برای $n \geq 2$، هر ایده‌آل اول P یک ایده‌آل $n-$اول است.
$(\Rightarrow)$ با توجه به اینکه $L(x_1, x_2) = L(x_1, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n-1\text{بار}})$ حکم واضح است. □

لم ۸.۱.۲. *فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $\Gamma(P)$ شامل خوشه‌ی نامتناهی نباشد. در این صورت مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های پوچساز ماکسیمال متمایز P، متناهی است.*

برهان. قرار دهید $A := \{x_i | \text{ایده‌آل پوچساز ماکسیمال است} \ \mathrm{Ann}(x_i)\}$ و همچنین فرض کنید که برای $i \neq j$، $\mathrm{Ann}(x_i) \neq \mathrm{Ann}(x_j)$.
باتوجه به لم ۲.۱.۲، همه‌ی عناصر A ایده‌آل‌های اول P هستند. در این صورت به وسیله‌ی لم ۳.۱.۲، برای $i \neq j$، $L(x_i, x_j) = \{0\}$. لذا $|A| \leq \omega(\Gamma(P))$. بنابراین $|A| \leq (\omega\Gamma(P)) < \infty$. □

لم ۹.۱.۲. *فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $\Gamma(P)$ شامل خوشه‌ی نامتناهی نباشد. در این صورت $\{0\}$ اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل اول مینیمال از P است.*

برهان. با توجه به لم ۸.۱.۲، فرض کنید $\{\mathrm{Ann}(x_i) | 1 \leq i \leq n\}$ مجموعه‌ی ایده‌آل‌های پوچساز ماکسیمال متمایز P باشد. توجه کنید که چون $P \neq \{0\}$، لم ۴.۱.۲ ایجاب می‌کند که مجموعه‌ی فوق ناتهی باشد. از طرفی طبق لم ۲.۱.۲، عناصر مجموعه‌ی فوق اول هستند. به برهان خلف فرض کنید

$0 \neq a \in \cap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Ann}(x_i)$. دراین‌صورت برای هر $1 \leq i \leq n$، $L(a, x_i) = \{0\}$.
بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in \mathrm{Ann}(a)$. اما طبق لم ۴.۱.۲ و لم ۱۶.۲.۱، هر ایده‌آل پوچساز سره مشمول در یک ایده‌آل پوچساز ماکسیمال است، پس $1 \leq j \leq n$ وجود دارد که $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(x_j)$ و در نتیجه $x_j \in \mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(x_j)$، لذا $x_j = 0$ که تناقض است.
بنابراین $\cap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Ann}(x_i) = \{0\}$.
حال کافی است نشان دهیم $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}(x_i)$ ایده‌آل‌های اول مینیمال از P هستند. برای $i \neq j$، هیچ $\mathfrak{p}_i$ای مشمول در $\mathfrak{p}_j$ نیست، چون $\mathfrak{p}_i$ها ایده‌آل‌های ماکسیمال P می‌باشند. حال اگر به ازای $1 \leq j \leq n$، $\mathfrak{p}_j$ اول مینیمال نباشد، آن‌گاه یک ایده‌آل اول مانند J وجود دارد که $J \subseteq \mathfrak{p}_j$. اگر نشان دهیم $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $\mathfrak{p}_i \subseteq J$، آن‌گاه $\mathfrak{p}_i \subseteq J \subseteq \mathfrak{p}_j$ که تناقض است.
حال فرض کنید که I ایده‌آل اول از P باشد. ادعا می‌کنیم $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $\mathfrak{p}_i \subseteq I$. در غیراین‌صورت برای هر $1 \leq i \leq n$، $y_i \in \mathfrak{p}_i \backslash I$ وجود دارد. حال $L(y_1, \ldots, y_n) \subseteq \cap_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i$. زیرا اگر $t \in L(y_1, \ldots, y_n)$ آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $t \leq y_i$. چون $y_i \in \mathfrak{p}_i$ و $\mathfrak{p}_i$ بنابر لم ۸.۱.۲، ایده‌آل است لذا $t \in \mathfrak{p}_i$. یعنی برای هر $1 \leq i \leq n$، $t \in \mathfrak{p}_i$. بنابراین $L(y_1, \ldots, y_n) = \{0\}$. چون $I \supseteq L(y_1, \ldots, y_n) = \{0\}$ و I یک ایده‌آل اول است، بنا به لم ۷.۱.۲، I یک ایده‌آل n-اول است و درنتیجه $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $y_i \in I$ و این تناقض است. $\square$

لم ۱۰.۱.۲. *فرض‌کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $\omega(\Gamma(P)) < \infty$. در این صورت هر ایده‌آل اول مینیمال I از P یک ایده آل پوچساز است، یعنی $x \in P$ وجود دارد که I به شکل $\mathrm{Ann}(x)$ است.*

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل اول مینیمال از P باشد. طبق لم ۴.۱.۲، مجموعه $A = \{\mathrm{Ann}(x) | x \notin I\}$ یک عنصر ماکسیمال دارد. فرض کنید $\mathrm{Ann}(y_1)$ و $\mathrm{Ann}(y_2)$ دو عنصر ماکسیمال از A باشند. چون I یک ایده‌آل اول است و $y_1, y_2 \notin I$، لذا $L(y_1, y_2) \nsubseteq I$. بنابراین $y \in L(y_1, y_2) \backslash I$ وجود دارد. از طرفی $\mathrm{Ann}(y_1) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$ و $\mathrm{Ann}(y_2) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$. زیرا اگر $t \in \mathrm{Ann}(y_1)$، آن‌گاه $L(t, y_1) = \{0\}$. حال $u \in L(t, y)$ در نظر می‌گیریم، درنتیجه $u \leq t$ و $u \leq y$. از طرفی $y \in L(y_1, y_2)$ در نتیجه $y \leq y_1$ و $y \leq y_2$. پس $u \leq y_1$ و لذا $u \in L(t, y_1)$. بنابراین $L(t, y) \subseteq L(t, y_1) = \{0\}$ و درنتیجه $t \in \mathrm{Ann}(y)$. به‌طور مشابه $\mathrm{Ann}(y_2) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$. حال $\mathrm{Ann}(y_1)$ و $\mathrm{Ann}(y_2)$ هر دو ایده‌آل ماکسیمال هستند، لذا $\mathrm{Ann}(y_1) = \mathrm{Ann}(y_2) = \mathrm{Ann}(y)$.
بنابراین نشان دادیم که A دارای بزرگترین عنصر مانند $\mathrm{Ann}(y)$ است. بنابر لم ۱۶.۲.۱، شرط زنجیره‌ی صعودی در مورد ایده‌آل‌های پوچساز A برقرار است. بنابراین $z \in P$ وجود دارد که $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(z)$ و $\mathrm{Ann}(z)$ یک ایده‌آل پوچساز ماکسیمال است. توجه کنید که $z \neq 0$ است. با توجه به لم ۲.۱.۲، $\mathrm{Ann}(z)$ یک ایده‌ال اول است. ثابت می‌کنیم $\mathrm{Ann}(z) \subseteq I$.

به برهان خلف فرض‌کنید $g \in \mathrm{Ann}(z) \backslash I$. در این صورت $z \in \mathrm{Ann}(g) \in A$ با توجه به اینکه $\mathrm{Ann}(y)$ بزرگترین عنصر A است پس $z \in \mathrm{Ann}(g) \subseteq \mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(z)$، لذا $z \in \mathrm{Ann}(z)$ که تناقض است. بنابراین $\mathrm{Ann}(z) \subseteq I$. چون I ایده‌آل اول مینیمال است، $\mathrm{Ann}(z) = I$. $\square$

قضیه ۱۱.۱.۲. *فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $\omega(\Gamma(P)) < \infty$. در این صورت تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال P متناهی است و $\chi(\Gamma(P)) = \omega(\Gamma(P)) = n$ که در آن n تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال است.*

برهان. با توجه به لم۹.۱.۲، $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = \{0\}$ که درآن $\mathfrak{p}_i$ها ایده‌آل‌های اول مینیمال P هستند. توجه کنید که با توجه به لم ۲.۳.۱ (هشت)، $\Gamma(P)$ دارای دو رأس مانند x و y است که به هم متصل‌اند و لذا $L(x, y) \subseteq \{0\}$ یعنی $\{0\}$ ایده‌آل اول نیست و در نتیجه $n \geq 2$. طبق لم ۱۰.۱.۲، $x \in P$ $0 \neq$ وجود دارد که $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}(x_i)$. بنابراین $\cap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Ann}(x_i) = \{0\}$.
طبق لم ۳.۱.۲، $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ یک خوشه در $\Gamma(P)$ است و بنابراین $\omega(\Gamma(P)) \geq n$. توجه شود که چون $n \geq 2$، $x_i \in V(\Gamma(P))$، $(1 \leq i \leq n)$. رنگ آمیزی f برای $\Gamma(P)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای $x \in \Gamma(P)$، $f(x) := \min\{i | x \notin \mathfrak{p}_i\}$. چون $x \neq 0$ لذا $f(x) \in \mathbb{N}$. اگر x و y دو رأس از$\Gamma(P)$ باشند که به هم متصل‌اند، آنگاه $L(x, y) = \{0\}$. اگر $f(x) = k$ که $k \in \mathbb{N}$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq k-1$، $x \in \mathfrak{p}_i$ و $x \notin \mathfrak{p}_k$. چون $L(x, y) = \{0\} \subseteq \mathfrak{p}_k$ و $\mathfrak{p}_k$ یک ایده‌آل اول است و همچنین $x \notin \mathfrak{p}_k$، بنابراین $y \in \mathfrak{p}_k$. این نشان می‌دهد که $f(y) \neq k$ و بنابراین $f(x) \neq f(y)$. از اینرو f یک رنگ آمیزی برای$\Gamma(P)$ است و در نتیجه $\chi(\Gamma(P)) \leq n$. از طرفی $n \geq \chi(\Gamma(P)) \geq \omega(\Gamma(P)) \geq n$.
بنابراین $\chi(\Gamma(P)) = \omega(\Gamma(P)) = n$. □

قضیه ۱۲.۱.۲. *فرض کنید$(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(یک) $\chi(\Gamma(P))$ متناهی است.

(دو) $\omega(\Gamma(P))$ متناهی است.

(سه) ایده‌آل $\{0\}$ از P، اشتراک تعدادمتناهی از ایده‌آل‌های اول است.

(چهار) $\Gamma(P)$ شامل یک خوشه‌ی نامتناهی نیست.

برهان. (یک) $\Leftarrow$ (دو) واضح است چون $\omega(\Gamma(P)) \leq \chi(\Gamma(P))$ است.
(دو) $\Leftarrow$ (چهار) واضح است.
(چهار) $\Leftarrow$ (سه) با توجه به لم ۹.۱.۲ بدیهی است.
(سه) $\Leftarrow$ (یک) فرض کنید $\cap_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i = \{0\}$ که در آن $\mathfrak{p}_i$ها ایده‌آل‌های اول P باشند. باتوجه به اثبات قضیه۱۱.۱.۲، $f(x) = \min\{i | x \notin \mathfrak{p}_i\}$ یک رنگ آمیزی برای $\Gamma(P)$ است و لذا $\chi(\Gamma(P)) \leq n$. □

۲.۲ قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$

در این بخش قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌صفر $\Gamma(P)$ را مطالعه می‌کنیم. نشان خواهیم داد که $\Gamma(P)$ یک گراف همبند با قطر حداکثر سه است. همچنین $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) \in \{3, 4, \infty\}$ می‌باشد و شرایطی

را برای اینکه کمر گراف $\Gamma(P)$ سه، چهار یا ∞ باشد ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند :*

(یک) $\Gamma(P)$ *یک گراف همبند است و* $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) \in \{۱,۲,۳\}$.

(دو) $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۱$ *اگر و تنها اگر* $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$.

(سه) $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۲$ *اگر و تنها اگر* $Z(P^*)\backslash\mathrm{Min}(P^*) \neq \emptyset$ *و برای هر* $x, y \in Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*)$ *که* $L(x,y) \neq \{۰\}$، $\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) \neq \{۰\}$.

(چهار) $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۳$ *اگر و تنها اگر* $Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*) \neq \emptyset$ *و* $x, y \in Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*)$ *موجود باشند که* $L(x,y) \neq \{۰\}$ *و* $\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) = \{۰\}$.

برهان. (یک) فرض کنید x و y دو رأس متمایز از $\Gamma(P)$ باشند. ادعا می‌کنیم $\mathrm{d}(x,y) \in \{۱,۲,۳\}$. اگر $L(x,y) = \{۰\}$، آنگاه x به y متصل است و بنابراین $\mathrm{d}(x,y) = ۱$.
حال فرض کنید $L(x,y) \neq \{۰\}$. چون $x, y \in Z(P)^*$، $u, v \in Z(P)^*$ اختیار می‌کنیم که $L(x,u) = L(y,v) = \{۰\}$. اگر $L(u,v) = \{۰\}$، آنگاه یک مسیر به فرم $x - u - v - y$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد و بنابراین $\mathrm{d}(x,y) \leq ۳$.
حال اگر $L(u,v) \neq \{۰\}$، آنگاه $۰ \neq z \in L(u,v)$. طبق لم ۲.۳.۱ (پنج)، $L(x,z) \subseteq L(x,u) = \{۰\}$ و $L(y,z) \subseteq L(y,v) = \{۰\}$. لذا $L(x,z) = L(y,z) = \{۰\}$ و در نتیجه $\mathrm{d}(x,y) = ۲$. بنابراین $\Gamma(P)$ یک گراف همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) \in \{۱,۲,۳\}$.
(دو) ($\Leftarrow$) فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۱$. طبق لم ۲.۳.۱(نه)، کافی است نشان دهیم که

$$Z(P)^* \subseteq \mathrm{Min}(P^*).$$

فرض کنید $y \in Z(P)^*$ باشد. اگر $y \notin \mathrm{Min}(P^*)$، آنگاه $x \in (y]\backslash\{۰\}$ وجود دارد که $x \neq y$. بنابراین طبق لم ۲.۳.۱ (هفت)، $x \in Z(P)^*$ وجود دارد که $\mathrm{d}(x,y) = ۲$ و این تناقض با فرض $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۱$ است. پس $y \in \mathrm{Min}(P^*)$ و بنابراین $Z(P)^* \subseteq \mathrm{Min}(P^*)$.
($\Rightarrow$) اگر $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$ باشد، آنگاه طبق لم ۲.۳.۱ (هشت)، $|Z(P)^*| \geq ۲$. بنابراین $|\mathrm{Min}(P^*)| \geq ۲$. از طرفی طبق لم ۲.۳.۱ (یک)، همه‌ی عناصر $\mathrm{Min}(P^*)$ به هم متصل‌اند. حال چون $\mathrm{Min}(P^*) = Z(P)^*$، لذا گراف $\Gamma(P)$ کامل است و درنتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۱$.
(سه) ($\Leftarrow$)فرض کنید $\mathrm{diam}\Gamma(P) = ۲$ باشد. در این صورت $u, v \in Z(P)^*$ که $u \neq v$ وجود دارند که $\mathrm{d}(u,v) = ۲$. بنابراین طبق ۲.۳.۱ (یک)، $\{u,v\} \notin \mathrm{Min}(P^*)$، پس $Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*) \neq \emptyset$.
حال فرض کنید که $x, y \in Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*)$ که $L(x,y) \neq \{۰\}$. یعنی $\mathrm{d}(x,y) > ۱$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۲$، داریم $\mathrm{d}(x,y) = ۲$. بنابراین $z \in Z(P)^*$ وجود دارد که $\mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(y,z) = ۱$. در نتیجه $z \in \mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$. بنابراین $\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) \neq \emptyset$.
($\Rightarrow$) فرض کنید $Z(P^*)\backslash\mathrm{Min}(P^*) \neq \emptyset$ و برای هر $x, y \in Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*)$ که $L(x,y) \neq \{۰\}$، $\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) \neq \{۰\}$. فرض کنید $x \in Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*)$ دلخواه و ثابت باشد. در این صورت $z \in Z(P)^*$ وجود دارد که $L(x,z) = \{۰\}$ و لذا $\mathrm{d}(x,z) = ۱$. چون $x \notin \mathrm{Min}(P^*)$ لذا

$u \in P^*$ وجود دارد که $u < x$. بنابراین طبق لم ۲.۳.۱ (هفت)، داریم $\mathrm{d}(x,u) = ۲$. حال فرض کنید $y \in Z(P)^*$. اگر y متعلق به $\mathrm{Min}(P^*)$ نباشد، آنگاه با استفاده از فرض، داریم $\mathrm{d}(x,y) = ۱$ یا $z \in Z(P)^*$ وجود دارد که $\mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(y,z) = ۱$ و در نتیجه $\mathrm{d}(x,y) = ۲$. اگر $y \in \mathrm{Min}(P^*)$ و $x \not\leq y$، آنگاه با استفاده از لم ۲.۳.۱ (دو)، $\mathrm{d}(x,y) = ۱$ و در حالتی که $y \in \mathrm{Min}(P^*)$ و $y \leq x$ طبق لم ۲.۳.۱ (سه)، $\mathrm{d}(x,y) = ۲$. اگر $x, y \in \mathrm{Min}(P^*)$، طبق لم ۲.۳.۱ (یک)، $\mathrm{d}(x,y) = ۱$. بنابراین در کلیه‌ی حالت‌ها $\mathrm{d}(x,y) \leq ۲$ و در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) \leq ۲$. از طرفی طبق قسمت (دو)، $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) \neq ۱$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۲$.

(چهار) با توجه به قسمت‌های (یک) تا (سه)، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. □

نتیجه ۲.۲.۲. *فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $Z(P^*)\backslash\mathrm{Min}(P^*) \neq \emptyset$. در این صورت $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = \mathrm{Max}\{۲, \mathrm{d}(x,y) | x, y \in Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*), x \neq y\}$. به ویژه اگر $Z(P^*)\backslash\mathrm{Min}(P^*)$ یک زنجیر باشد، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۲$.*

برهان. قسمت اول از قضیه ۱.۲.۲ (سه) و (چهار) نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت دوم، برای هر $x, y \in Z(P)^*\backslash\mathrm{Min}(P^*)$، $y \leq x$ یا $x \leq y$. مثلاً فرض کنید $x \leq y$. دراین‌صورت چون $y \in Z(P)^*$ لذا $z \in Z(P)^*$ وجود دارد که $L(y,z) = \{۰\}$ پس $L(z,x) = \{۰\}$. بنابراین $۰ \neq z \in \mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$ و با توجه به قضیه ۱.۲.۲ (سه)، حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

(یک) $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) \in \{۳, ۴, \infty\}$.

(دو) $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = \infty$ *اگر و تنها اگر* $\Gamma(P)$ *گراف ستاره ای باشد.*

(سه) $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$ *اگر و تنها اگر* $\Gamma(P)$ *گراف دوبخشی باشد و ستاره‌ای نباشد.*

(چهار) $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$ *اگر و تنها اگر* $\Gamma(P)$ *شامل یک دور فرد باشد.*

برهان. (یک) فرض کنید $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) \neq \infty$. در این صورت یک دور به طول مینیمال n در $\Gamma(P)$ وجود دارد که به فرم $x_۱ - x_۲ - x_۳ - \ldots - x_n - x_۱$ است. فرض کنید $n \geq ۵$. مینیمال بودن n نتیجه می‌دهد که $L(x_۲, x_۴) \neq \{۰\}$. فرض کنید $۰ \neq z \in L(x_۲, x_۴)$ باشد. در این صورت طبق لم ۲.۳.۱(پنج)، $L(x_۱, z) \subseteq L(x_۱, x_۲) = \{۰\}$ و $L(x_۵, z) \subseteq L(x_۵, x_۴) = \{۰\}$.

در نتیجه $x_۱ - z - x_۵ - \cdots - x_n - x_۱$ یک دور به طول حداکثر $n - ۲$ است که این تناقض با فرض $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = n$ است. بنابراین ۴ یا $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$.

(دو) ($\Leftarrow$)فرض کنید $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = \infty$ و $\Gamma(P)$ گراف ستاره ای نباشد، در این حالت$|Z(P)^*| \geq ۳$.

ازطرفی طبق قضیه ۱.۲.۲ (یک)، $\Gamma(P)$ همبند است، لذا$x \in Z(P)^*$ وجود دارد که رأس پایانی نیست.

چون $\Gamma(P)$ ستاره‌ای نیست، یک مسیر به فرم $a - x - b - c$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد که $a, b, c \in Z(P)^*$.

اگر a به c متصل باشد، آنگاه $a - x - b - c - a$ یک دور در$\Gamma(P)$ است که تناقض است.

اگر a به c متصل نباشد، آنگاه $z \in P^*$ وجود دارد که $z \leq a$ و $z \leq c$، بنابراین طبق لم ۲.۳.۱ (شش)، z به هر دو رأس x و b متصل است، در نتیجه $z - x - b - z$ یک دور در $\Gamma(P)$ است که تناقض با

فرض است. توجه کنید که $x \neq z$. در غیر این‌صورت $x \leq a$ و $a \leq a$ می‌باشد. بنابراین $a \in L(x,a)$ که با $L(x,a) = \{\circ\}$ در تناقض است. به‌طور مشابه $z \neq b$ می‌باشد. بنابراین $\Gamma(P)$ستاره‌ای است.
$(\Rightarrow)$ بدیهی است.
(سه) $(\Leftarrow)$ فرض کنید $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$. به وضوح $\Gamma(P)$ یک گراف ستاره‌ای نیست. نشان می‌دهیم که $\Gamma(P)$ دور فرد ندارد. در این‌صورت با توجه به قضیه ۲۲.۱.۱ (کونیگ)، دوبخشی است. به برهان خلف فرض کنید که $\Gamma(P)$ یک دور فرد دارد و $x_۱ - x_۲ - \cdots - x_n - x_۱$ یک دور فرد به طول مینیمال n در $\Gamma(P)$ باشد. چون $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) \neq ۳$، لذا $n \geq ۵$. حال مینیمال بودن n نتیجه می‌دهد که $L(x_۲, x_۴) \neq \{\circ\}$. فرض کنید $\circ \neq z \in L(x_۲, x_۴)$ باشد. در این‌صورت با استفاده از لم ۲.۳.۱ (پنج)، $L(x_۱, z) \subseteq L(x_۱, x_۲) = \{\circ\}$ و $L(x_۵, z) \subseteq (x_۵, x_۴) = \{\circ\}$ که نتیجه می‌دهد $x_۱ - z - x_۵ - \cdots - x_n - x_۱$ یک دور به طول حداکثر $n - ۲$ در $\Gamma(P)$ است و این تناقض با مینیمال بودن n است. در نتیجه $\Gamma(P)$ دور فرد ندارد.
حال یک اثبات دیگر برای این قسمت ارائه می‌کنیم. اگر $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$ باشد، آنگاه عدد خوشه‌ای $\Gamma(P)$، دو است. بنابراین طبق قضیه۱۱.۱.۲، عدد رنگی $\Gamma(P)$ نیز، دو است که نتیجه می‌دهد $\Gamma(P)$ دوبخشی است.
$(\Rightarrow)$فرض کنید که $\Gamma(P)$ دوبخشی باشد ولی ستاره‌ای نباشد. دراین‌صورت با استفاده از قضیه‌ی ۲۲.۱.۱ (کونیگ)، داریم $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) \neq ۳$. درنتیجه با توجه به قسمت (دو)، $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) \neq \infty$. بنابراین $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$.
(چهار) با توجه به قسمت‌های (یک) تا (سه) و قضیه‌ی ۲۲.۱.۱ (کونیگ)، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. □

گزاره ۴.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $\mathrm{Min}(P^*) = \emptyset$، آن‌گاه به وضوح $\Gamma(P)$ گراف ستاره‌ای نیست و بنابراین ۴ یا $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$.*

برهان. فرض کنید $\Gamma(P)$ ستاره‌ای و x مرکز آن باشد. چون$x \in Z(P)^*$، لذا $z \in P^*$ وجود دارد که $L(x,z) = \{\circ\}$. اگر $x \notin \mathrm{Min}(P^*)$، آن‌گاه $y \in P^*$ وجود دارد که $x \gneqq y$. باتوجه به لم ۲.۳.۱ (شش)، $L(y,z) = \{\circ\}$ که متناقض ستاره‌ای بودن $\Gamma(P)$ است. لذا $x \in \mathrm{Min}(P^*)$ که متناقض فرض است. □

گزاره ۵.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$ اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*

(یک) $|\mathrm{Min}(P^*)| \geqslant ۳$.

(دو) $|\mathrm{Ass}(P)| \geqslant ۳$.

برهان. اگر قسمت (یک) برقرار باشد، آنگاه $x, y, z \in \mathrm{Min}(P^*)$، در نتیجه طبق لم ۲.۳.۱ (یک)، $L(x,z) = L(x,y) = L(y,z) = \{\circ\}$و لذا $x - y - z - x$ یک دور در $\Gamma(P)$ است. بنابراین $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$.

اگر قسمت (دو) برقرار باشد، آنگاه $x, y, z \in P$ وجود دارد که $\mathrm{Ann}(x)$ و $\mathrm{Ann}(y)$ و $\mathrm{Ann}(z)$ ایده‌آل‌های اول متمایز از Pاند. بنابراین طبق لم ۳.۱.۲، $L(x,z) = L(x,y) = L(y,z) = \{0\}$ و لذا $x - y - z - x$ یک دور در $\Gamma(P)$ است. بنابراین $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = 3$. □

لم ۶.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $x \in P^*$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(یک) $x \in \mathrm{Min}(P^*)$.

(دو) $\{0, x\}$ *یک ایده‌آل اول از P است.*

برهان. (یک) ⇐ (دو) فرض کنید $y \leq x$، چون $x \in \mathrm{Min}(P^*)$، پس $y = x$. بنابراین طبق تعریف ایده‌آل، $\{0, x\}$ یک ایده‌آل است.

(دو) ⇐ (یک) فرض کنید $\{0, x\}$ یک ایده‌آل از P باشد. در این صورت هر عنصر مانند y که $y \leq x$ باشد، متعلق به $\{0, x\}$ است. لذا $y = 0$ یا $y = x$. بنابراین $x \in \mathrm{Min}(P^*)$. □

لم ۷.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $a - x - b$ یک مسیر در $\Gamma(P)$ باشد، آنگاه دقیقاً یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:*

(یک) $\mathrm{Ann}(a) \cap \mathrm{Ann}(b) = \{0, x\}$ *و درنتیجه* $x \in \mathrm{Min}(P^*)$.

(دو) $a - x - b$ *مشمول در یک ۴-دور در $\Gamma(P)$ است.*

برهان. طبق فرض $a - x - b$ یک مسیر در $\Gamma(P)$ است. لذا $L(x,b) = L(a,x) = \{0\}$ و در نتیجه $\mathrm{Ann}(a) \cap \mathrm{Ann}(b) \supseteq \{0, x\}$. اگر $\mathrm{Ann}(a) \cap \mathrm{Ann}(b) = \{0, x\}$، آنگاه چون پوچسازها ایده‌آل‌هایی از P هستند، با توجه به لم۶.۲.۲ ، $x \in \mathrm{Min}(P^*)$.

حال اگر عنصر $c \in \mathrm{Ann}(a) \cap \mathrm{Ann}(b)$ وجود داشته باشد که $c \neq x$ و $c \neq 0$، آنگاه یک ۴-دور به فرم $a - x - b - c - a$ در $\Gamma(P)$ موجود است.

(توجه کنید $c \neq a$، در غیر این‌صورت $a \in \mathrm{Ann}(a) \cap \mathrm{Ann}(b)$ که تناقض است.) همچنین توجه شود که اگر (دو) برقرار باشد، آنگاه $c \in \mathrm{Ann}(a) \cap \mathrm{Ann}(b)$ وجود دارد که $c \neq 0$ و $c \neq x$ و لذا (یک) و (دو) همزمان برقرار نیستند. □

لم ۸.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $a - b - c - d$ یک مسیر در $\Gamma(P)$ باشد و یال $b - c$ مشمول در یک ۳-دور نباشد، آنگاه رأس‌های a و d متمایزند و به هم متصل‌اند.*

برهان. چون $b - c$ مشمول در یک ۳-دور نیست، لذا a و d متمایزند. حال اگر a و d متصل نباشند، آنگاه $z \in L(a,d)$ وجود دارد که $z \neq 0$. در این صورت طبق لم ۲.۳.۱ (شش)، چون $z \leq a$ و a به b متصل است، پس z به b متصل است. همچنین $z \leq d$ و d به c متصل است، پس z به c متصل می‌شود. بنابراین $z - b - c - z$ یک ۳-دور در $\Gamma(P)$ است که تناقض با فرض است. □

نتیجه ۹.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $\Gamma(P)$ رأس پایانی نداشته باشد، آنگاه هر یال در $\Gamma(P)$ مشمول در یک ۳-دور یا ۴-دور است و لذا $\Gamma(P)$، اجتماعی از ۳-دورها و ۴-دورهاست.*

برهان. فرض کنید $b-c$ یک یال در $\Gamma(P)$ باشد و مشمول در یک ۳-دور نباشد. چون b و c رأس پایانی نیستند، لذا مسیری مانند $a-b-c-d$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. در نتیجه با توجه به لم ۸.۲.۲، a و d متمایزند و به هم متصل‌اند. بنابراین $b-c$ مشمول در یک ۴-دور است. □

لم ۱۰.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد که $\mathrm{Min}(P^*) = \emptyset$. در این صورت هر یال در $\Gamma(P)$ مشمول در یک ۴-دور و لذا $\Gamma(P)$ اجتماعی از ۴-دورهاست.*

برهان. یال $a-x$ در $\Gamma(P)$ را در نظر بگیرید. چون $a \notin \mathrm{Min}(P^*)$، درنتیجه $b \in P^*$ وجود دارد که $a < b$. حال با توجه به لم ۲.۳.۱ (شش)، $L(b,x) = \{0\}$. پس x رأس پایانی نیست. لذا یک مسیر به فرم $a-x-b$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. بنابراین با توجه به لم ۷.۲.۲ و اینکه $x \notin \mathrm{Min}(P^*)$، مسیر $a-x-b$ و همچنین یال $a-x$ مشمول در یک ۴-دور در $\Gamma(P)$ است. □

گزاره ۱۱.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $\Gamma(P)$ رأس پایانی نداشته باشد، آن‌گاه هر جفت از رأس‌ها در $\Gamma(P)$ در یک $k-$دور قرار می‌گیرند که $k \leq 6$.*

برهان. فرض کنید x و y دو رأس متمایز در $\Gamma(P)$ باشند. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) \leq 3$، داریم: $\mathrm{d}(x,y) = 1, 2$ یا ۳. اگر $\mathrm{d}(x,y) = 1$، آن‌گاه یال $x-y$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. بنابراین با توجه به نتیجه ۹.۲.۲، x و y در یک ۳-دور یا ۴-دور قرار می‌گیرند.
اگر $\mathrm{d}(x,y) = 2$، آن‌گاه یک مسیر به فرم $x-w-y$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. چون $\Gamma(P)$ رأس پایانی ندارد، لذا یال‌های $a-x$ و $y-b$ در $\Gamma(P)$ وجود دارند که $w \neq a$ و $w \neq b$. چون $\mathrm{d}(x,y) = 2$ داریم $a \nleq y$ و $b \nleq x$. (مثلاً اگر $a \leq y$، آن‌گاه با توجه به لم ۲.۳.۱ (شش)، y به x متصل است و لذا $\mathrm{d}(x,y) = 1$ که تناقض است.) اگر $L(x,b) = \{0\}$، آن‌گاه یک ۴-دور به فرم $b-x-w-y-b$ در $\Gamma(P)$ داریم که شامل x و y است.
حال فرض کنید $0 \neq z \in L(x,b)$. توجه کنید که $z \neq a$، در غیر این صورت $a \in L(x,b)$. چون x به a متصل است، لذا با توجه به لم ۲.۳.۱ (شش)، a به a متصل می‌شود که تناقض است. به طور مشابه $z \neq y$. همچنین $z \neq x$، در غیر این‌صورت $x \in L(x,b)$. چون b به y متصل است، لذا با توجه به لم ۲.۳.۱ (شش)، x به y متصل می‌شود که تناقض با $\mathrm{d}(x,y) = 2$ است. از طرفی $z \neq w$، در غیر این‌صورت $w \in L(x,b)$. چون x به a متصل است، لذا با توجه به لم ۲.۳.۱ (شش)، w به a متصل می‌شود. بنابراین مسیر $x-a-w-y$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد که تناقض با $\mathrm{d}(x,y) = 2$ است. درنتیجه $z \notin \{x,a,y,w\}$. با توجه به لم ۲.۳.۱ (شش)، یال‌های $z-a$ و $z-y$ در $\Gamma(P)$ وجود دارند که در نتیجه یک ۵-دور به فرم $a-x-w-y-z-a$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد که شامل x و y است.
اگر $\mathrm{d}(x,y) = 3$، آن‌گاه یک مسیر به فرم $x-u-v-y$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. چون $\Gamma(P)$ رأس پایانی ندارد، یال‌های $a-x$ و $y-b$ در $\Gamma(P)$ وجود دارند که $u \neq a$ و $v \neq b$. چون $\mathrm{d}(x,y) = 3$ داریم $a \neq y, v$ و $b \neq x, u$. (زیرا مثلاً اگر $a = y$ باشد، آن‌گاه $d(x,y) = 1$ و اگر $a = v$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{d}(x,y) = 2$ که تناقض با $\mathrm{d}(x,y) = 3$ است.)
اگر $0 \neq z \in L(u,b)$ ، آن‌گاه طبق لم ۲.۳.۱ (شش)، یال‌های $x-z$ و $z-y$ وجود دارند که تناقض با $\mathrm{d}(x,y) = 3$ است. لذا $L(u,b) = \{0\}$ و به‌طور مشابه $L(a,v) = \{0\}$. بنابراین یک ۶-دور به فرم $a-x-u-b-y-v-a$ در $\Gamma(P)$ می‌باشد که شامل x و y است. □

گزاره ۱۲.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$، آن‌گاه $\Gamma(P)$ رأس پایانی ندارد.*

برهان. فرض کنید a یک رأس پایانی در $\Gamma(P)$ باشد. چون $\Gamma(P)$ همبند است، لذا رأس b در $\Gamma(P)$ وجود دارد که به a متصل است. طبق قضیه ۳.۲.۲ (سه)، $\Gamma(P)$ گراف ستاره‌ای نیست، لذا یک مسیر به فرم $a-b-c-d$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. چون $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$، یال $b-c$ مشمول در یک ۳-دور نیست و لذا طبق لم۸.۲.۲، $a \neq d$ و رأس‌های a و d متصل‌اند. این تناقض با رأس پایانی بودن a است. □

تذکر ۱۳.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. باتوجه به قضیه ۱.۲.۲ ، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) \in \{۱, ۲, ۳\}$ و همچنین طبق قضیه ۳.۲.۲ ، داریم $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) \in \{۳, ۴, \infty\}$. بنابراین خواهیم داشت:*

$$(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) \in \{(i,j) | ۱ \leqslant i \leqslant ۳, j = ۳, ۴ \text{ یا } \infty\}$$

قضیه ۱۴.۲.۲. *فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

(یک) $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) \notin \{(۱, ۴), (۳, ۴), (۳, \infty)\}$.

(دو) $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۱, ۳)$ *اگر و تنها اگر* $|Z(P)^*| \geqslant ۳$ و $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$.

(سه) $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۱, \infty)$ *اگر وتنها اگر* $|Z(P)^*| = ۲$ و $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$.

(چهار) $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۲, ۴)$ *اگر و تنها اگر $\Gamma(P)$ یک گراف کامل دوبخشی باشد و یک دور داشته باشد.*

(پنج) $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۲, \infty)$ *اگر و تنها اگر $\Gamma(P)$ یک گراف ستاره‌ای و $\Gamma(P) \neq K_۲$ باشد.*

(شش) گراف‌های متعددی وجود دارند که $(۳, ۳)$ یا $(۲, ۳)$ = $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P)))$. اما صورتبندی این نوع مجموعه‌های جزئاً مرتب هنوز یک مسئله باز است.

برهان. (یک) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۱$، آن‌گاه $\Gamma(P)$ کامل است و لذا ∞ یا $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$. در نتیجه حالت $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۱, ۴)$ اتفاق نمی‌افتد.
اگر $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$ و x و y دو رأس باشند که $\mathrm{d}(x, y) = ۳$. آن‌گاه مسیری به فرم $x-b-c-y$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. طبق لم ۸.۲.۲، x و y به هم متصل‌اند که تناقض است.
لذا حالت $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۳, ۴)$ اتفاق نمی‌افتد. اگر $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = \infty$، آن‌گاه $\Gamma(P)$ ستاره‌ای است. لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۲$.
درنتیجه حالت $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۳, \infty)$ اتفاق نمی‌افتد.
(دو) $(\Leftarrow)$ فرض کنید $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۱, ۳)$. در این‌صورت طبق قضیه ۱.۲.۲ (دو)، $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$. از طرفی اگر $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$، آن‌گاه $|Z(P)^*| \geq ۳$.
$(\Rightarrow)$ فرض کنید $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$ و $|Z(P)^*| \geq ۳$. طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲ (دو)، $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۱$.

از طرفی $|\mathrm{Min}(P^*)| \geq ۳$، پس طبق گزاره ۵.۲.۲، $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۳$.

(سه) ($\Leftarrow$) فرض کنید $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۱, \infty)$. دراین‌صورت طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲ (دو)، $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$. ازطرفی طبق لم ۲.۳.۱ (یک)، رئوس $\mathrm{Min}(P^*)$ همگی به هم متصل‌اند و چون $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = \infty$، لذا $|Z(P)^*| = ۲$.

($\Rightarrow$) فرض کنید $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$ و $|Z(P)^*| = ۲$. دراین‌صورت طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲ (دو)، چون $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$، لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۱$. از طرفی $|Z(P)^*| = ۲$ یعنی در گراف $\Gamma(P)$ دوری وجود ندارد، بنابراین $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = \infty$.

(چهار) ($\Leftarrow$) فرض کنید $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۲, ۴)$.در این صورت چون $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = ۴$ لذا طبق قضیه ۳.۲.۲ (سه)، $\Gamma(P)$ یک گراف دوبخشی است ولی ستاره‌ای نیست و از آنجایی که $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۲$ است، پس گراف $\Gamma(P)$ یک گراف کامل دوبخشی است.

($\Rightarrow$) بدیهی است.

(پنج) ($\Leftarrow$) فرض کنید $(\mathrm{diam}(\Gamma(P)), \mathrm{girth}(\Gamma(P))) = (۲, \infty)$. دراین صورت چون $\mathrm{girth}(\Gamma(P)) = \infty$ لذا $\Gamma(P)$ ستاره‌ای است و چون $\mathrm{diam}(\Gamma(P)) = ۲$ است، بنابراین $\Gamma(P) \neq K_۲$ است.

($\Rightarrow$) بدیهی است. □

فصل ۳

برخی رده‌بندی‌ها در گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب

در این فصل برخی رده‌بندی‌ها در گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب مطالعه می‌شود. در بخش اول تمام مجموعه‌های جزئاً مرتب متناهی که گراف مقسوم‌علیه صفر آنها مسطح است، مشخص خواهند شد. هدف بخش دوم این فصل مطالعه مجموعه‌های جزئاً مرتبی است که گراف مقسوم‌علیه صفر آنها چندبخشی کامل است. گزاره‌های معادل چندبخشی بودن این گراف بیان خواهد شد. به عنوان مثال نشان خواهیم داد که اگر این گراف دوبخشی باشد، آن‌گاه دوبخشی کامل است.

۱.۳ مسطح بودن گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$

هدف این بخش مطالعه شرایط لازم و کافی برای مسطح بودن گراف $\Gamma(P)$، در حالت P متناهی می‌باشد. لذا در سراسر این بخش P یک مجموعه جزئاً مرتب متناهی است و $\mathrm{Min}(P^*) = \{a_۱, \ldots, a_n\}$ فرض خواهد شد. در این پایان‌نامه $Z(P)^* \neq \emptyset$ فرض شده است، لذا با توجه به لم زیر $|\mathrm{Min}(P^*)| \geq ۲$.

لم ۱.۱.۳. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب متناهی باشد. در این صورت $Z(P)^* = \emptyset$ اگر و تنها اگر $|\mathrm{Min}(P^*)| \leq ۱$.*

برهان. $(\Leftarrow)$به برهان خلف فرض کنید $a_۱, a_۲ \in \mathrm{Min}^*(P)$ و $a_۱ \neq a_۲$. در این صورت با توجه به لم ۲.۳.۱ (یک)، $L(a_۱, a_۲) = \{۰\}$. بنابراین $a_۱ \in Z(P)^*$ که متناقض $Z(P)^* = \emptyset$ است.

$(\Rightarrow)$ به برهان خلف فرض کنید $x \in Z(P)^*$. در این صورت $(x \neq)y \in P^*$ وجود دارد که $L(x, y) = \{۰\}$. چون P متناهی است، لذا $a, b \in \mathrm{Min}(P^*)$ وجود دارند که $a \leq x$ و $b \leq y$. چون $L(x, y) = \{۰\}$ لذا $a \neq b$ که نشان می‌دهد $|\mathrm{Min}(P^*)| \geq ۲$ و این متناقض فرض است. □

گزاره ۲.۱.۳. *گراف $\Gamma(P)$ کامل است اگر و تنها اگر $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$.*

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $\Gamma(P)$ گراف کامل باشد و یک عنصر غیر صفر مانند $x \in Z(P)^*\backslash \mathrm{Min}(P^*)$ وجود داشته باشد. چون $x \notin \mathrm{Min}(P^*)$، لذا $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $a_i \leq x$. بنابراین $x \in U(a_i)$ و در نتیجه $0 \neq a_i \in L(a_i, x)$. یعنی a_i به x در $\Gamma(P)$ متصل نیست که این تناقض با کامل بودن $\Gamma(P)$ است.

($\Rightarrow$) فرض کنید $Z(P)^* = \mathrm{Min}(P^*)$. دراین صورت $\Gamma(P)$ کامل است. زیرا بنابر لم ۲.۳.۱ (یک)، برای هر دو عنصر متمایز a_i و a_j متعلق به $\mathrm{Min}(P^*)$، $L(a_i, a_j) = \{0\}$. □

تذکر ۳.۱.۳. *گزاره فوق نتیجه قضیه ۱.۲.۲ (دو)، نیز می‌باشد.*

لم ۴.۱.۳. *$x \in \cap_{i=1}^{n} U(a_i)$ اگر و تنها اگر $x \in P^*\backslash Z(P)^*$.*

برهان. ($\Leftarrow$)فرض کنید $x \in \cap_{i=1}^{n} U(a_i)$. در این صورت $x \geq a_1$ و $\ldots$ و $x \geq a_n$. حال برای هر $y \in P^*$، چون P متناهی است لذا $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $a_i \leq y$. یعنی $0 \neq a_i \in L(x, y)$. بنابراین $x \notin Z(P)^*$.

($\Rightarrow$) فرض کنید $x \in P^*\backslash Z(P)^*$. در این صورت برای هر $y \in P^*$، $L(x, y) \neq \{0\}$. و در نتیجه برای هر $1 \leq i \leq n$، $L(x, a_i) \neq \{0\}$. چون $a_i \in \mathrm{Min}(P^*)$، لذا $0 \neq a_i \in L(x, a_i)$. بنابراین $x \in \cap_{i=1}^{n} U(a_i)$. □

نمادگذاری ۵.۱.۳. *فرض‌کنید $k, n \in \mathbb{N}$، $k \leq n$ و $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. در این صورت قرار دهید:*

$$P_{i_1 \ldots i_k} := \{x \in P | x \in \bigcap_{s=1}^{k} U(a_{i_s}) \backslash \bigcup_{j \neq i_1, \ldots, i_k} U(a_j)\}$$

باتوجه به لم ۴.۱.۳، $P_{12\ldots n} = \{x \in P | x \in \cap_{i=1}^{n} U(a_i)\} = P^*\backslash Z(P)^*$. توجه کنید برای هر $x, y \in P_{i_1 \ldots i_k}$، $x \geq a_{i_1}$ و $y \geq a_{i_1}$ و لذا $L(x, y) \neq \{0\}$. یعنی اگر $x, y \in Z(P)^* \cap P_{i_1 \ldots i_k}$، آن‌گاه x و y در $\Gamma(P)$ به هم متصل نیستند.

همچنین اگر $\{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_t\}$، آن‌گاه با توجه به تعریف $P_{i_1 \ldots i_k}$ و $P_{j_1 \ldots j_t}$، داریم:

$$P_{i_1 \ldots i_k} \cap P_{j_1 \ldots j_t} = \emptyset.$$

از طرفی $P\backslash\{0\} = \cup_{k=1, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n}^{n} P_{i_1 \ldots i_k}$. زیرا اگر $x \in P^*$ دلخواه باشد، آن‌گاه چون P متناهی است لذا $a \in \mathrm{Min}(P^*)$ وجود دارد که $a \leq x$.

اگر $x \geq a_{i_1}$ و $\ldots$ و $x \geq a_{i_k}$ و برای هر $j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{i_1, \ldots, i_k\}$، $x \ngeq a_j$ آن‌گاه $x \in P_{i_1 \ldots i_k}$. بنابراین $x \in \cup_{k=1, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n}^{n} P_{i_1 \ldots i_k}$.

گزاره ۶.۱.۳. *زیرگراف القایی روی مجموعه‌ی $\cup_{i=1}^{n} P_i$ یک گراف $n-$بخشی کامل با بخش‌های P_1 و $\ldots$ و P_n است.*

برهان. چون برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in P_i$، تمام بخش‌های گراف $\Gamma(P)$ ناتهی هستند. حال باید نشان دهیم که هر دو عنصر در یک بخش به هم متصل نیستند. فرض کنید $x, y \in P_i$. در این صورت

$x \geq a_i$ و $y \geq a_i$، لذا $a_i \in L(x,y)$ و بنابراین $L(x,y) \neq \{0\}$. همچنین برای هر $1 \leq i \neq j \leq n$ و هر $x \in P_i$ و $y \in P_j$، x و y در $\Gamma(P)$ به هم متصل‌اند، زیرا اگر $0 \neq z \in L(x,y)$، آنگاه $z \leq x$ و $z \leq y$. حال عنصر a_k متعلق به $\mathrm{Min}(P^*)$ وجود دارد که $a_k \leq z \leq x$ و $a_k \leq z \leq y$. چون $x \in P_i$ ، لذا $i = k$. همچنین $y \in P_j$، پس $j = k$. در نتیجه $i = j = k$ که تناقض است. بنابراین $L(x,y) = \{0\}$. □

قضیه ۷.۱.۳. *گراف $\Gamma(P)$ یک گراف $r-$بخشی است که در آن $n \leq r \leq 2^n - 2$.*

برهان. با توجه به توضیحات ۵.۱.۳ و انتخاب $P_{i_1 \dots i_k}$ (به جز $P_{12\dots n}$) به عنوان بخش‌های گراف $\Gamma(P)$، به وضوح $\Gamma(P)$ یک گراف کامل $r-$بخشی است و هر بخش این گراف ناتهی است. حال چون P_1 و $\dots$ و P_n جزء بخش‌های گراف $\Gamma(P)$ هستند، لذا $n \leq r$. از طرف دیگر تعداد همه‌ی مجموعه‌های $P_{i_1 \dots i_k}$ (به جز $P_{12\dots n}$) برابراست با $\sum\limits_{k=1}^{n-1} C(n,k) = 2^n - 2$ که $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. بنابراین $r \leq 2^n - 2$ □

نتیجه ۸.۱.۳. *فرض کنید $n = 2$ یعنی $\mathrm{Min}(P^*) = \{a_1, a_2\}$. در این صورت $\Gamma(P)$ یک گراف دوبخشی کامل است.*

برهان. در این حالت P_1 و P_2 تنها بخش‌های گراف هستند و حکم از گزاره ۶.۱.۳، نتیجه می‌شود. □

در ادامه این بخش مسطح بودن گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب را مطالعه می‌کنیم. همچنین مکرراً از قضیه ۲۴.۱.۱ (کوراتوفسکی) استفاده خواهیم کرد.

لم ۹.۱.۳. *اگر $\Gamma(P)$ مسطح باشد، آنگاه $n \leq 4$.*

برهان. به برهان خلف فرض کنید $n > 4$. با توجه به لم ۲.۳.۱ (یک)، زیرگراف القایی از $\Gamma(P)$ روی مجموعه‌ی رئوس $\mathrm{Min}(P^*)$ یک گراف کامل است، زیرگراف القایی روی $\mathrm{Min}(P^*)$ از $\Gamma(P)$ با K_5 یکریخت است. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲۴.۱.۱ (کوراتوفسکی)، $\Gamma(P)$ مسطح نیست که تناقض است. □

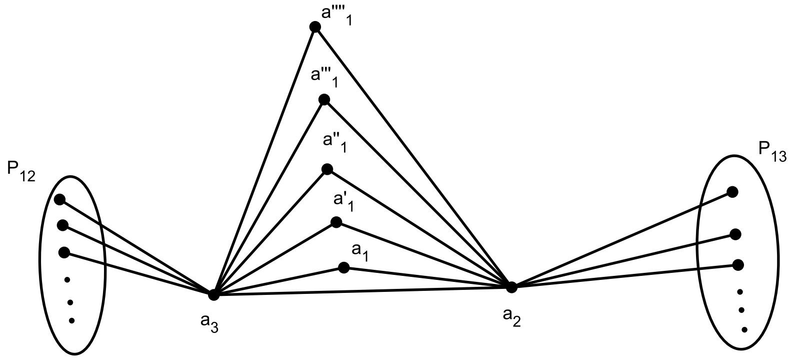
با توجه به لم قبل حالت‌های $n \leq 4$ را مطالعه می‌کنیم. توجه کنید که $n \geq 2$. در ادامه شرط لازم و کافی برای مسطح بودن گراف $\Gamma(P)$ زمانی که $n = 2$ است، ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۱.۳. *فرض کنید $n = 2$. در این صورت $\Gamma(P)$ مسطح است اگر و تنها اگر $|P_1| \leq 2$ یا $|P_2| \leq 2$.*

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $\Gamma(P)$ مسطح و $|P_1| \geq 3$ و $|P_2| \geq 3$ باشد. فرض کنید $V_1 \subseteq P_1$ و $V_2 \subseteq P_2$ که $|V_1| = |V_2| = 3$. با توجه به نتیجه‌ی ۸.۱.۳ ، $\Gamma(P)$ یک گراف یکریخت با $K_{3,3}$ دارد که مجموعه‌ی رئوس آن $V_1 \bigcup V_2$ است که با توجه به قضیه‌ی ۲۴.۱.۱ (کوراتوفسکی)، متناقض مسطح بودن گراف $\Gamma(P)$ است.

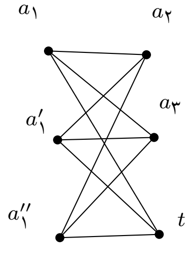
($\Rightarrow$) فرض کنید $|P_1| \leq 2$ یا $|P_2| \leq 2$. در این صورت با توجه به نتیجه‌ی ۸.۱.۳، $\Gamma(P)$ دوبخشی کامل با بخش‌های P_1 و P_2 است. بنابراین $\Gamma(P)$ مسطح است. □

حال مسطح بودن گراف $\Gamma(P)$ را زمانی که $n=۳$ است، مطالعه می‌کنیم.
اگر $۷ \geq |\cup_{i=۱}^{۳} P_i|$، آن‌گاه یکی از P_iها حداقل سه عنصر دارد. فرض کنید $P_۱$ چنین باشد و $a_۱, a'_۱, a''_۱, a'''_۱, a''''_۱ \in P_۱$. حال اگر $|P_۲| = |P_۳| = ۱$ و $P_{۲۳} = \emptyset$، آن‌گاه $|P_۱| = ۵$ و $\Gamma(P)$ با توجه به شکل ۱.۱.۳ ، یک گراف مسطح است.



شکل ۱.۱.۳:

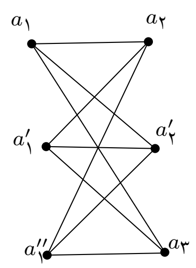
در غیر این صورت به روش‌های زیر می‌توان یک کپی از $K_{۳,۳}$ در $\Gamma(P)$ پیدا کرد و طبق قضیه ۲۴.۱.۱ (کوراتوفسکی)، $\Gamma(P)$ مسطح نخواهد بود. در اینجا دو حالت در نظر می‌گیریم:
حالت اول: اگر $P_{۲۳} \neq \emptyset$، آن‌گاه $t \in P_{۲۳}$ وجود دارد. در این حالت یک کپی از $K_{۳,۳}$ مطابق شکل ۲.۱.۳ وجود دارد .توجه کنید که $L(a'_۱, t) = \{۰\}$. زیرا اگر $۰ \neq t' \in L(a'_۱, t)$، آن‌گاه $t' \leq a'_۱$ و $t' \leq t$. چون P متناهی است و $a'_۱ \in P_۱$ لذا $a_۱ \leq t' \leq a'_۱$ و در نتیجه $a_۱ \leq t' \leq t$ که متناقض $t \in P_{۲۳}$ است.



شکل ۲.۱.۳: اگر $P_{۲۳} \neq \emptyset$ باشد.

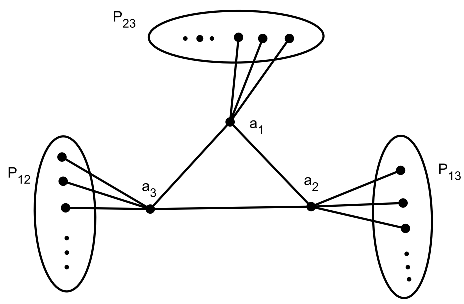
حالت دوم: اگر مثلاً $|P_۲| \geq ۲$ و $|P_۳| \geq ۱$، آن‌گاه می‌توان یک کپی از $K_{۳,۳}$ در $\Gamma(P)$ مطابق شکل

۳.۱.۳، پیدا کرد.



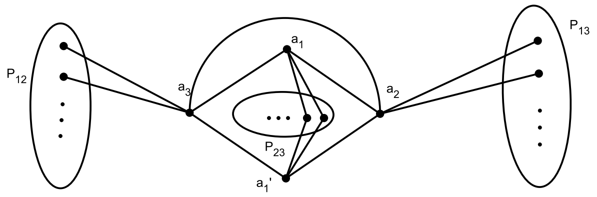
شکل ۳.۱.۳: اگر $۱ \geq |P_۳|$ و $۲ \geq |P_۲|$.

حال فرض کنید $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| \leq ۶$. در این صورت حالت‌های زیر را داریم:
حالت اول: فرض کنید $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| = ۳$. در این صورت $\Gamma(P)$ یک گراف بدون دور و مسطح است که در شکل ۴.۱.۳ نشان داده شده است.



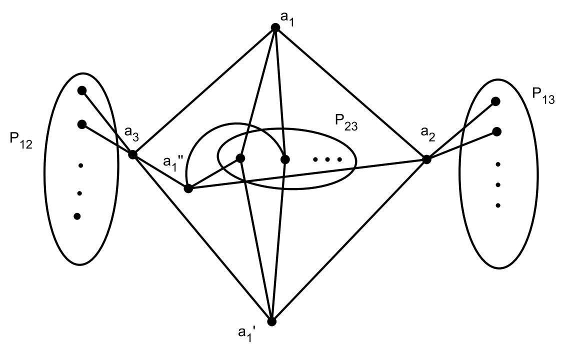
شکل ۴.۱.۳:

حالت دوم: فرض کنید $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| = ۴$. در این صورت مثلاً اگر $|P_۱| = ۲$، آن‌گاه $a_۱ \neq a'_۱ \in P_۱$ وجود دارد. بنابراین در این حالت $\Gamma(P)$ با گراف شکل ۵.۱.۳ یکریخت است و لذا مسطح است.



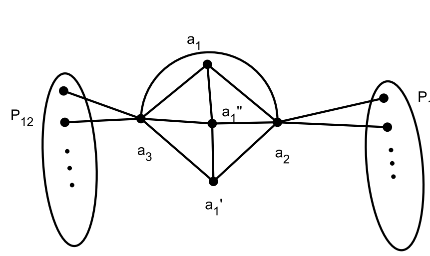
شکل ۵.۱.۳:

حالت سوم: $|\cup_{i=1}^{3} P_i| = 5$. *ابتدا فرض کنید حداقل یکی از P_iها مثلاً P_1 حداقل دارای ۳ عنصر باشد و $|P_2| = |P_3| = 1$ و همچنین $P_{23} \neq \emptyset$. در این حالت گراف $\Gamma(P)$ مطابق شکل ۶.۱.۳ است. در نتیجه P_1 و $P_{23} \cup P_2 \cup P_3$، $K_{3,3}$ را ایجاد می‌کنند و لذا $\Gamma(P)$ مسطح نیست.*



شکل ۶.۱.۳:

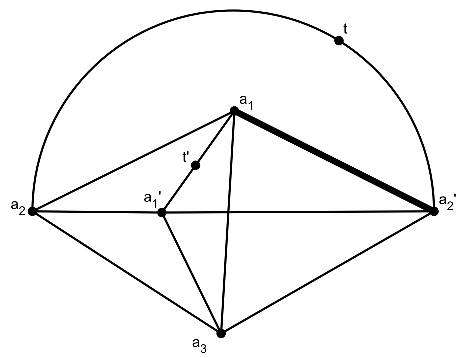
در حالتی که $P_{23} = \emptyset$، آن‌گاه مطابق شکل ۷.۱.۳، $\Gamma(P)$ یک گراف مسطح است.



شکل ۷.۱.۳:

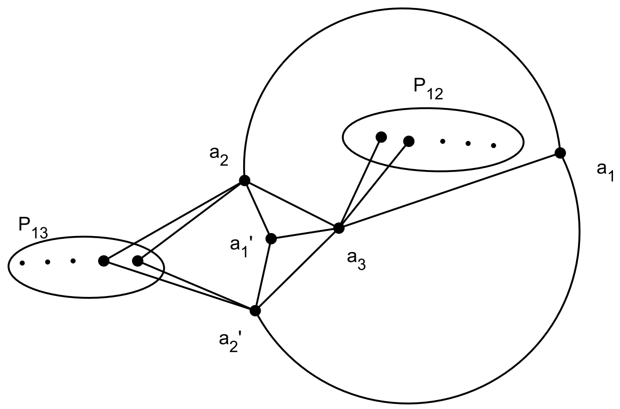
حال فرض کنید برای هر $i = 1, 2, 3$، $|P_i| \leq 2$، بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید

۲ $= |P_۲| = |P_۱|$ و $|P_۳| = ۱$. یعنی فرض کنید $P_۱ = \{a_۱, a'_۱\}$ و $P_۲ = \{a_۲, a'_۲\}$ و $P_۳ = \{a_۳\}$.
حال اگر $P_{۱۳} \neq \emptyset$ و $P_{۲۳} \neq \emptyset$ ، آن‌گاه $t \in P_{۱۳}$ و $t' \in P_{۲۳}$ وجود دارد و لذا می‌توان یک زیر تقسیم از $K_۵$ مطابق شکل ۸.۱.۳ در $\Gamma(P)$ پیدا کرد که نشان می‌دهد $\Gamma(P)$ مسطح نیست.



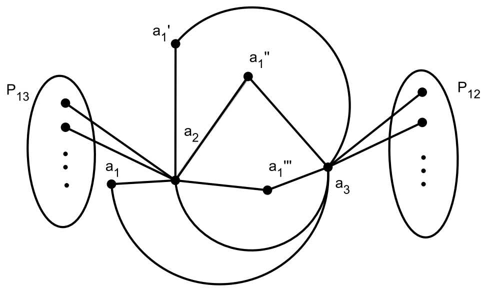
شکل ۸.۱.۳:

در غیر این صورت $\Gamma(P)$ با گراف شکل ۹.۱.۳ یکریخت است و بنابراین مسطح می‌باشد.



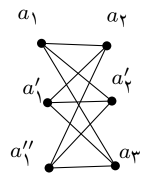
شکل ۹.۱.۳:

حالت چهارم: $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| = ۶$. یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:
(یک) یکی از P_iها حداقل سه عضو داشته باشد، مثلاً $|P_۱| \geq ۳$. حال اگر $|P_۲| = |P_۳| = ۱$ و $P_{۲۳} = \emptyset$، آن‌گاه به‌وضوح $\Gamma(P)$ مسطح است که در شکل ۱۰.۱.۳ ، نشان داده شده است.
($P_۱ = \{a_۱, a'_۱, a''_۱, a'''_۱\}$ ، $P_۲ = \{a_۲\}$ و $P_۳ = \{a_۳\}$ فرض شده است.)



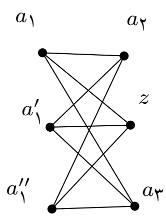
شکل ۳.۱.۱۰:

در غیر این صورت اگر به طور مثال $|P_۲| \geq ۲$، آن‌گاه $a_۲ \neq a'_۲ \in P_۲$ وجود دارد و لذا می‌توان یک کپی از $K_{۳,۳}$ در ساختار گراف $\Gamma(P)$ پیدا کرد، که نشان می‌دهد $\Gamma(P)$ مسطح نیست. این گراف در شکل ۳.۱.۱۱ ، نشان داده شده است.



شکل ۳.۱.۱۱:

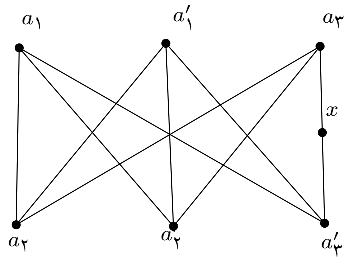
همچنین اگر $P_{۲۳} \neq \emptyset$، آن‌گاه $z \in P_{۲۳}$ وجود دارد و در این حالت نیز می‌توان یک کپی از $K_{۳,۳}$ مطابق شکل ۳.۱.۱۲ در ساختار $\Gamma(P)$ پیدا کرد. بنابراین $\Gamma(P)$ مسطح نیست.



شکل ۳.۱.۱۲:

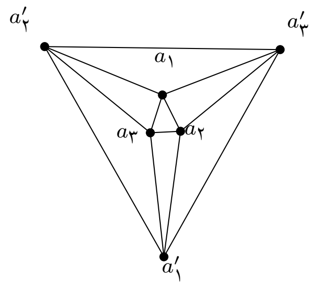
(دو)فرض کنید برای هر $i = ۱,۲,۳$، $|P_i| = ۲$. اگر یکی از P_{ij}ها ناتهی باشد، مثلاً $P_{۱۲} \neq \emptyset$ و

$x \in P_{۱۲}$. در این صورت می‌توان یک زیر تقسیم از $K_{۳,۳}$ در $\Gamma(P)$ پیدا کرد، که در شکل ۱۳.۱.۳ نشان داده شده است و این نشان می‌دهد که $\Gamma(P)$ مسطح نیست.



شکل ۱۳.۱.۳:

حال فرض کنید برای هر $۱ \le i < j \le ۳$ ، $P_{ij} = \emptyset$. در این صورت گراف $\Gamma(P)$ با $K_{۲,۲,۲}$ یکریخت است که در شکل ۱۴.۱.۳ نشان داده شده است. بنابراین $\Gamma(P)$ مسطح است.



شکل ۱۴.۱.۳:

از مطالب گفته شده قضیه‌ی زیر بدست می‌آید.

قضیه ۱۱.۱.۳. *فرض کنید $n = ۳$. در این صورت $\Gamma(P)$ مسطح است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.*

(یک) $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| = ۳$.

(دو) $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| = ۴$.

(سه) $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| = ۵$ و یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) $|P_۱| = ۳$ و $P_{۲۳} = \emptyset$.

(ب) برای هر $۱ \leq i \leq ۳$ ، $|P_i| \leq ۲$ و $P_{۱۳} = \emptyset$ یا $P_{۲۳} = \emptyset$.

(چهار) $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| = ۶$ *و یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*

(الف) $|P_۲| = |P_۳| = ۱$ و $P_{۲۳} = \emptyset$.

(ب) برای هر $i = ۱,۲,۳$ ، $|P_i| = ۲$ و برای هر $۱ \leq i < j \leq ۳$ ، $P_{i,j} = \emptyset$.

(پنج) $|\cup_{i=۱}^{۳} P_i| \geq ۷$ و $|P_۲| = |P_۳| = ۱$ و $P_{۲۳} = \emptyset$.

سرانجام حالت $n = ۴$ *را مطالعه می‌کنیم. ابتدا فرض کنید* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| \geq ۶$. *در این صورت حالت‌های زیر را داریم:*

حالت اول: $۱ \leq i \leq ۴$ *وجود دارد که* $|P_i| \geq ۳$. *بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید* $|P_۱| \geq ۳$. *در این حالت* $\{a_۱, a'_۱, a''_۱\} \subseteq P_۱$ *به مجموعه‌ی رئوس* $\{a_۲, a_۳, a_۴\}$ *متصل است. در نتیجه* $K_{۳,۳}$ *با زیرگرافی از* $\Gamma(P)$ *یکریخت است. بنابراین* $\Gamma(P)$ *مسطح نیست.*

حالت دوم: فرض کنید برای هر $۱ \leq i \leq ۴$ ، $|P_i| \leq ۲$. *در این صورت چون* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| \geq ۶$ *، بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید* $P_۱ = \{a_۱, a'_۱\}$ *و* $P_۲ = \{a_۲, a'_۲\}$. *حال مجموعه‌های* $V_۱ = \{a_۱, a'_۱, a_۳\}$ *و* $V_۲ = \{a_۲, a'_۲, a_۴\}$ *را در نظر بگیرید. به وضوح همه‌ی رأس‌ها در* $V_۱$ *به همه‌ی رئوس در* $V_۲$ *متصل است. بنابراین* $\Gamma(P)$ *مسطح نیست.*

با توجه به مطالب فوق، اگر $\Gamma(P)$ *مسطح باشد، آنگاه* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| \leq ۵$. *از طرفی* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| \geq ۴$. *بنابراین حالت‌های* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| = ۴$ *و* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| = ۵$ *را مطالعه می‌کنیم. ابتدا فرض کنید* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| = ۴$.

لم ۱۲.۱.۳. *فرض کنید* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| = ۴$. *در این صورت اگر* $۱ \leq i < j \leq ۴$ *و* $i' < j'$ *با شرط* $\{i', j'\} \in \{۱,۲,۳,۴\} \backslash \{i, j\}$ *وجود داشته باشند که* $|P_{ij}| \geq ۱$ *و* $|P_{i'j'}| \geq ۱$ *، آنگاه* $\Gamma(P)$ *مسطح نیست.*

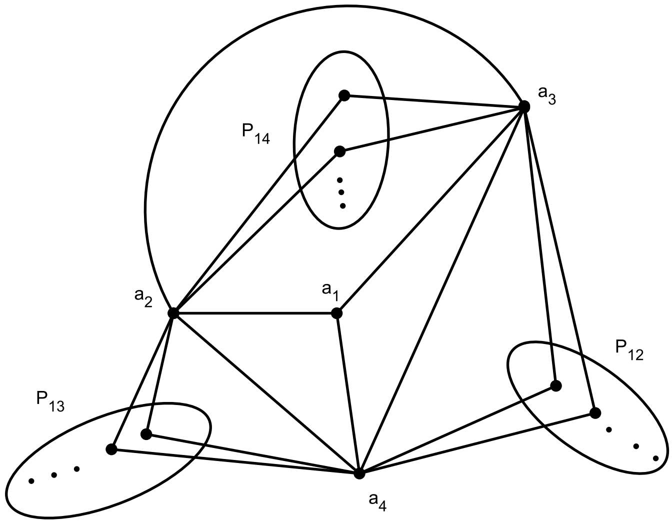
برهان. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $|P_{۱۲}| \geq ۱$ و $|P_{۳۴}| \geq ۱$ و $x \in P_{۱۲}$ و $y \in P_{۳۴}$. در این صورت $\{a_۱, a_۲, x\}$ و $\{a_۳, a_۴, y\}$ در $\Gamma(P)$ به هم متصل‌اند. در نتیجه یک کپی از $K_{۳,۳}$ در $\Gamma(P)$ وجود دارد. بنابراین طبق قضیه‌ی ۲۴.۱.۱(کوراتوفسکی)، $\Gamma(P)$ مسطح نیست. □

قضیه ۱۳.۱.۳. *فرض کنید* $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| = ۴$. *در این صورت* $\Gamma(P)$ *مسطح است اگر و تنها اگر برای هر* $۱ \leq i < j \leq ۴$ *و هر* $i' < j'$ *با شرط* $\{i', j'\} \in \{۱,۲,۳,۴\} \backslash \{i, j\}$ *،* $P_{ij} = \emptyset$ *یا* $P_{i',j'} = \emptyset$.

برهان. $(\Leftarrow)$ طبق لم ۱۲.۱.۳، برقرار است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید مثلاً $P_{۱۲} \neq \emptyset$ ، $P_{۱۳} \neq \emptyset$ و $P_{۱۴} \neq \emptyset$. در این حالت با توجه به فرض $P_{۳۴} = P_{۲۴} = P_{۲۳} = \emptyset$ و لذا با توجه به شکل ۱۵.۱.۳ گراف $\Gamma(P)$ مسطح است. بقیه حالت‌ها مشابهاً بررسی می‌شود. □

فرض کنید $|\cup_{i=۱}^{۴} P_i| = ۵$ *، درنتیجه* $۱ \leq i \leq ۴$ *وجود دارد که* $|P_i| = ۲$. *بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید* $i = ۱$ *و* $P_۱ = \{a_۱, a'_۱\}$. *در ادامه مسطح بودن* $\Gamma(P)$ *را در این حالت بررسی می‌کنیم.*



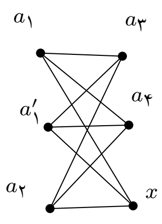
شکل ۱۵.۱.۳:

لم ۱۴.۱.۳. *فرض کنید ۵ $= |\cup_{i=۱}^{۴} P_i|$. در این صورت :*

(یک) اگر ۴ $\leq j > i \leq$ ۲ وجود داشته باشد که $P_{ij} \neq \emptyset$، آن‌گاه $\Gamma(P)$ مسطح نیست.

(دو) اگر $P_{۲۳۴} \neq \emptyset$، آن‌گاه $\Gamma(P)$ مسطح نیست.

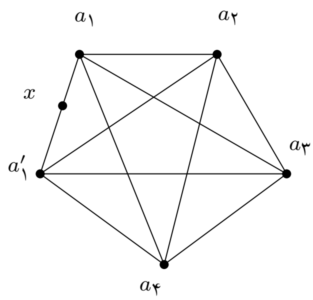
برهان. (یک) بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $x \in P_{۳۴} \neq \emptyset$. در این صورت می‌توان یک کپی از $K_{۳,۳}$ مطابق شکل ۱۶.۱.۳، در $\Gamma(P)$ پیدا کرد. بنابراین $\Gamma(P)$ مسطح نیست. (توجه کنید که $P_۱ = \{a_۱, a'_۱\}$، $P_۲ = \{a_۲\}$، $P_۳ = \{a_۳\}$ و $P_۴ = \{a_۴\}$.)



شکل ۱۶.۱.۳:

(دو) فرض کنید $x \in P_{۲۳۴}$. در این صورت یک زیرتقسیم از $K_۵$ مطابق شکل ۱۷.۱.۳وجود دارد.

بنابراین$\Gamma(P)$ مسطح نیست. □

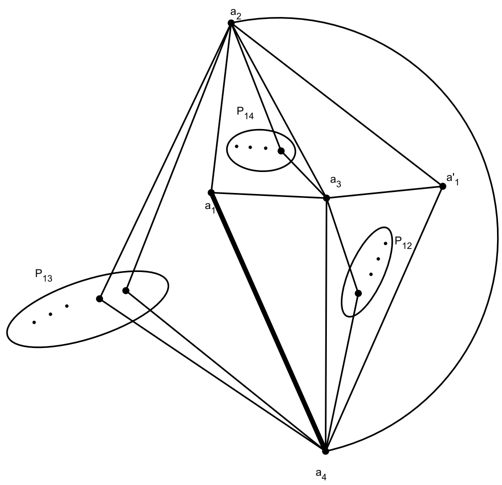


شکل ۱۷.۱.۳:

قضیه ۱۵.۱.۳. *فرض کنید* ۵ $= |\cup_{i=۱}^{۴} P_i|$ و ۲ $= |P_۱|$. *در این صورت* $\Gamma(P)$ *مسطح است اگر و تنها اگر برای هر* $۲ \leq i < j \leq ۴$، $P_{ij} = \emptyset$ و $P_{۲۳۴} = \emptyset$.

برهان. $(\Leftarrow)$ با توجه به لم ۱۴.۱.۳ واضح است.

$(\Rightarrow)$ اگر $P_۱ = \{a_۱, a'_۱\}$، آن‌گاه با توجه به شکل ۱۸.۱.۳، $\Gamma(P)$ مسطح است. □



شکل ۱۸.۱.۳:

۲.۳ چند بخشی بودن گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$

در این بخش مجموعه‌های جزئاً مرتبی را مطالعه می‌کنیم که گراف مقسوم‌علیه صفر آنها چندبخشی کامل است. گزاره‌های معادل چند بخشی بودن این گراف بیان خواهد شد. مثلاً نشان خواهیم داد که اگر این

گراف دوبخشی باشد، آن‌گاه دوبخشی کامل است.

گزاره ۱.۲.۳. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. فرض کنید $\mathfrak{p}_1$ و ... و $\mathfrak{p}_k$ ایده‌آل‌های اول از P باشند که $\bigcap_{i=1}^{k}\mathfrak{p}_i=\{0\}$ و برای هر $1\leq j\leq k$*

$$\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\mathfrak{p}_i\neq\{0\}.$$

در این صورت برای هر $1\leq j\leq k$، $\mathfrak{p}_j\in Ass(P)$. علاوه براین $Z(P)=\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{p}_i$.

برهان. فرض کنید $1\leq j\leq k$. در این صورت یک عنصر غیرصفر مانند x وجود دارد که

$$x\in\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\mathfrak{p}_i.$$

ادعا می‌کنیم $\mathrm{Ann}(x)=\mathfrak{p}_j$. فرض کنید $y\in\mathrm{Ann}(x)$ دلخواه و ثابت باشد. در این صورت $L(x,y)=\{0\}\subseteq\mathfrak{p}_j$. چون $\mathfrak{p}_j$ یک ایده‌آل اول است و $x\notin\mathfrak{p}_j$، در نتیجه $y\in\mathfrak{p}_j$. بنابراین $\mathrm{Ann}(x)\subseteq\mathfrak{p}_j$. حال فرض کنید $y\in\mathfrak{p}_j$. برای هر $z\in L(x,y)$، داریم $z\leq x$ و $z\leq y$. چون

$$x\in\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\mathfrak{p}_i=I$$

و I یک ایده‌آل P است. (زیرا فرض کنید $x,y\in P$، $x\in I$ و $y\leq x$. در این صورت باید نشان دهیم که $y\in I$. حال برای هر $i\neq j$ $(1\leq i\leq k)$، $x\in\mathfrak{p}_i$ و از طرفی $\mathfrak{p}_i$ ایده‌آل است. در نتیجه برای هر $i\neq j$ $(1\leq i\leq k)$، $y\in\mathfrak{p}_i$. بنابراین $y\in I$ و لذا I یک ایده‌آل است.) و $z\leq x$ در نتیجه

$$z\in\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\mathfrak{p}_i.$$

حال $y\in\mathfrak{p}_j$ و $z\leq y$ و $\mathfrak{p}_j$ یک ایده‌آل است، لذا $z\in\mathfrak{p}_j$. پس

$$z\in\Big(\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\mathfrak{p}_i\Big)\cap\mathfrak{p}_j=\bigcap_{i=1}^{k}\mathfrak{p}_i=\{0\}.$$

و بنابراین $z=0$ که نتیجه می‌دهد $L(x,y)=\{0\}$. لذا $y\in\mathrm{Ann}(x)$ و در نتیجه $\mathfrak{p}_j\subseteq\mathrm{Ann}(x)$. بنابراین $\mathfrak{p}_j\in Ass(P)$.

برای اثبات قسمت دوم گزاره، از قسمت اول استفاده می‌کنیم. برای هر $1\leq i\leq k$، $x_i\in P$ وجود دارد که $\mathfrak{p}_i=\mathrm{Ann}(x)$. بنابراین $\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{p}_i=\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{Ann}(x_i)\subseteq Z(P)$. حال فرض کنید $x\in Z(P)$. در این صورت $y\in P^*$ وجود دارد که $L(x,y)=\{0\}$. چون $y\in P^*$، عنصر t، $1\leq t\leq k$ وجود دارد که $y\notin\mathfrak{p}_t$. از طرفی $L(x,y)=\{0\}\subseteq\mathfrak{p}_t$ و $\mathfrak{p}_t$ یک ایده‌آل اول است، لذا $x\in\mathfrak{p}_t\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{p}_i$. بنابراین $Z(P)\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{p}_i$ و در نتیجه $Z(P)=\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{p}_i$.

□

قضیه ۲.۲.۳. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(یک) ایده‌آل‌های اول غیرصفر $\mathfrak{p}_1$ و $\mathfrak{p}_2$ از P وجود دارند که $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \{0\}$.

(دو) گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$، یک گراف کامل دوبخشی است.

(سه) گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$، یک گراف دوبخشی است.

برهان. (یک) $\Leftarrow$ (دو) قرار می‌دهیم $V_1 := \mathfrak{p}_1 \backslash \{0\}$ و $V_2 := \mathfrak{p}_2 \backslash \{0\}$ و نشان می‌دهیم که گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ یک گراف کامل دوبخشی با بخش‌های V_1 و V_2 است. توجه کنید که $V_1 \neq \emptyset$ و $V_2 \neq \emptyset$ همچنین $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

با توجه به گزاره‌ی ۱.۲.۳، $V_1 \cup V_2 = V(\Gamma(P)) = Z(P)^*$. فرض کنید $x, y \in V_1$. اگر x و y به هم متصل باشند، آن‌گاه $L(x,y) = \{0\}$ و در نتیجه $L(x,y) \subseteq \mathfrak{p}_2$. چون $\mathfrak{p}_2$ ایده‌آل اول P است، درنتیجه $x \in \mathfrak{p}_2$ یا $y \in \mathfrak{p}_2$. لذا $x \in V_2$ یا $y \in V_2$ که تناقض است. بنابراین عناصر V_1 به هم متصل نیستند. به طور مشابه هیچ دو عنصری از V_2 به هم متصل نیستند.

حال فرض کنید $x \in V_1$ و $y \in V_2$. در این صورت $x \in \mathfrak{p}_1$ و $y \in \mathfrak{p}_2$. حال فرض کنید $z \in L(x,y)$. دراین‌صورت $z \leq x$ و $z \leq y$. چون $\mathfrak{p}_1$ ایده‌آل P است، $z \leq x$ و $x \in \mathfrak{p}_1$ درنتیجه $z \in \mathfrak{p}_1$. به‌طور مشابه $z \in \mathfrak{p}_2$. لذا $z \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \{0\}$ و در نتیجه $z = 0$. بنابراین $L(x,y) = \{0\}$ که نتیجه می‌دهد x و y در $\Gamma(P)$ به هم متصل‌اند. یعنی هر عنصر از V_1 به هر عنصر V_2 متصل است. بنابراین $\Gamma(P)$ یک گراف دوبخشی کامل است.

(دو) $\Leftarrow$ (سه) بدیهی است.

(سه) $\Leftarrow$ (یک) فرض کنید V_1 و V_2 بخش‌های گراف دوبخشی $\Gamma(P)$ باشند و قرار دهید $\mathfrak{p}_1 := V_1 \cup \{0\}$ و $\mathfrak{p}_2 := V_2 \cup \{0\}$. ثابت می‌کنیم $\mathfrak{p}_1$ و $\mathfrak{p}_2$ ایده‌آل‌های اول غیرصفر Pاند و $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \{0\}$. فرض کنید x و y دو عنصر از P^* باشند، $y \in \mathfrak{p}_1$ و $x \leq y$. نشان می‌دهیم $x \in \mathfrak{p}_1$. چون $y \in \mathfrak{p}_1$ پس $y \in V_1$. درنتیجه $y \in Z(P)^*$ و لذا $z \in P^*$ وجود دارد که $L(y,z) = \{0\}$. بنابراین y و z در $\Gamma(P)$ به هم متصل‌اند و درنتیجه $z \in V_2$. چون $L(x,z) \subseteq L(y,z)$ و $L(y,z) = \{0\}$، درنتیجه $L(x,z) = \{0\}$. بنابراین x به z متصل است لذا $x \in V_1$. بنابراین $x \in \mathfrak{p}_1$. نشان دادیم که $\mathfrak{p}_1$ ایده‌آل P است. به‌طور مشابه $\mathfrak{p}_2$ ایده‌آل P است.

حال ثابت می‌کنیم $\mathfrak{p}_1$ ایده‌آل اول P است. فرض کنید x و y دو عنصر از P^* باشند که $L(x,y) \subseteq \mathfrak{p}_1$. نشان می‌دهیم $x \in \mathfrak{p}_1$ یا $y \in \mathfrak{p}_1$. حال دو حالت را در نظر می‌گیریم .

حالت اول: فرض کنید $L(x,y) = \{0\}$. به برهان خلف فرض کنید $x, y \notin \mathfrak{p}_1$. در این صورت $L(x,y) = \{0\}$ که نتیجه می‌دهد $x, y \in Z(P)^*$. از طرفی $x, y \in V_2$. بنابراین x و y به هم متصل نیستند، درنتیجه $L(x,y) \neq \{0\}$ که تناقض است. بنابراین $x \in \mathfrak{p}_1$ یا $y \in \mathfrak{p}_1$.

حالت دوم : فرض کنید $L(x,y) \neq \{0\}$. بنابراین $0 \neq t \in L(x,y)$ وجود دارد. از طرفی $L(x,y) \subseteq \mathfrak{p}_1$ لذا $t \in \mathfrak{p}_1$ و درنتیجه $t \in V_1$. از این رو $t \in Z(P)^*$ و لذا $z \in P^*$ وجود دارد که $L(t,z) = \{0\}$. درنتیجه t به z متصل است و بنابراین $z \in V_2$. دراین‌صورت یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

حالت (الف) : فرض کنید $L(x,z)=\{0\}$. در این حالت، $x\in Z(P)^*$ که به z متصل است. از طرفی $z\in V_2$ درنتیجه $x\in V_1$. بنابراین $x\in\mathfrak{p}_1$.

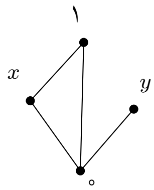
حالت (ب): فرض کنید $L(x,z)\neq\{0\}$. در این صورت $0\neq u\in L(x,z)$ وجود دارد. ادعا می‌کنیم $L(y,u)=\{0\}$. به برهان خلف فرض کنید $L(y,u)\neq\{0\}$. درنتیجه $0\neq w\in L(y,u)$ وجود دارد. لذا $w\leq u$ و $w\leq y$. از طرفی $u\in L(x,z)$، در نتیجه $u\leq x$ و $u\leq z$. پس $w\leq x$. از طرفی $w\leq y$ و بنابراین $w\in L(x,y)$. چون $L(x,y)\subseteq\mathfrak{p}_1$، لذا $w\in\mathfrak{p}_1$. از طرفی $w\leq u$ و $u\leq z$، در نتیجه $w\leq z$. چون $z\in\mathfrak{p}_2$ و $\mathfrak{p}_2$ یک ایده‌آل P است، بنابراین $w\in\mathfrak{p}_2$. لذا $w\in\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2=\{0\}$ و در نتیجه $w=0$ که تناقض است. بنابراین $L(y,u)=\{0\}$. چون $u\leq z$ و $z\in\mathfrak{p}_2$ و $\mathfrak{p}_2$ یک ایده‌آل P است، لذا $u\in\mathfrak{p}_2$. با توجه به اینکه $L(y,u)=\{0\}$ و $u\in V_2$ می‌باشد، $y\in V_1$ و در نتیجه $y\in\mathfrak{p}_1$. بنابراین $\mathfrak{p}_1$ یک ایده‌آل اول از P است. به طور مشابه $\mathfrak{p}_2$ یک ایده‌آل اول P است. □

تذکر ۳.۲.۳. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. طبق قضیه‌ی ۲.۲.۳، گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$، $k-$بخشی است اگر و تنها اگر $k-$بخشی کامل باشد، به شرطی که $k=2$. مثال زیر نشان می‌دهد که برای $k>2$ برقرار نمی‌باشد.*

مثال ۴.۲.۳. فرض کنید $\mathbb{I}$ فاصله‌ی بسته $[0,1]$ باشد و x و y دو عدد حقیقی باشند که $x,y\notin\mathbb{I}$. فرض کنید $P=\mathbb{I}\cup\{x,y\}$. رابطه‌ی $\leq$ روی P را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{(a,b)|a,b\in\mathbb{I},a\leq b\}\cup\{(x,x),(y,y),(0,x),(0,y),(x,1)\}$$

همچنین مجموعه‌ی جزئاً مرتب P به صورت شکل ۱.۲.۳ است.



شکل ۱.۲.۳: مجموعه‌ی جزئاً مرتب P

گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ یک گراف ۳-بخشی با بخش‌های $\mathbb{I}\backslash\{0\}$ و $\{x\}$ و $\{y\}$ است. این گراف ۳-بخشی کامل نیست، چون $L(x,1)\neq\{0\}$.

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد و $k\geq 2$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:*

(یک) گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ یک گراف کامل $k-$بخشی است.

(دو) $|\mathrm{Min}(P^*)|\leq k$ و برای هر $x\in Z(P)^*$، $|(x]\cap\mathrm{Min}(P^*)|\leq 1$.

در این صورت (یک)، (دو) را نتیجه می‌دهد. به علاوه اگر در هر قسمت از (دو) تساوی برقرار باشد، آن‌گاه (دو) نیز، (یک) را نتیجه می‌دهد.

برهان. (یک) $\Leftarrow$ (دو) ابتدا نشان می‌دهیم $|\mathrm{Min}(P^*)| \le k$. فرض کنید $\mathrm{Min}(P^*)$ کمتر از دو عنصر داشته باشد. در این صورت چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر x و y متعلق به $\mathrm{Min}(P^*)$ باشند، آن‌گاه $L(x,y)=\{۰\}$. در نتیجه $x,y\in Z(P)^*$ و x و y دو رأس از $\Gamma(P)$اند که به هم متصل‌اند. با توجه به فرض، گراف $\Gamma(P)$، $k-$بخشی کامل است و x و y در بخش‌های مختلف قرار می‌گیرند. چون بخش‌های مختلف $\Gamma(P)$ برابر k است، بنابراین $|\mathrm{Min}(P^*)|\le k$.

برای اثبات قسمت دوم به برهان خلف فرض کنید $x\in Z(P)^*$ وجود دارد که $|(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)|\ge ۲$. بنابراین $x_۱,x_۲\in (x]\cap \mathrm{Min}(P^*)$ وجود دارند. چون $x_۱,x_۲\in (x]$ در نتیجه $x_۱\le x$ و $x_۲\le x$. لذا $x_۱\in L(x_۱,x)$ و $x_۲\in L(x_۲,x)$ و بنابراین $L(x_۱,x)\neq\{۰\}$ و $L(x_۲,x)\neq\{۰\}$. لذا $x_۱$ و $x_۲$ به هم متصل نیستند. چون $\Gamma(P)$ گراف کامل $k-$بخشی است، $x_۱$ و $x_۲$ در یک بخش قرار ندارند و به هم متصل نیستند. در این صورت $L(x_۱,x_۲)\neq\{۰\}$. از طرفی $x_۱,x_۲\in \mathrm{Min}(P^*)$ و در نتیجه $L(x_۱,x_۲)=\{۰\}$ که تناقض است. بنابراین برای هر $x\in Z(P)^*$، $|(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)|\le ۱$.

(دو) $\Leftarrow$ (یک)فرض کنید $|\mathrm{Min}(P^*)|=k$ و برای هر $x\in Z(P)^*$، $|(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)|=۱$. فرض کنید $\mathrm{Min}(P^*)=\{x_۱,\dots,x_k\}$. برای هر $۱\le i\le k$ قرار دهید $V_i:=\{x\in Z(P)^*|x_i\le x\}$ که ناتهی هستند. ثابت می‌کنیم $\Gamma(P)$ گراف کامل $k-$بخشی با بخش‌های $V_۱,\dots,V_k$ است.

گام اول: فرض کنید $۱\le i\le k$ و $i\neq j$. اگر $x\in V_i\cap V_j$ باشد، آن‌گاه $x_i\le x$ و $x_j\le x$ و لذا $x_i,x_j\in (x]$. بنابراین $x_i,x_j\in (x]\cap \mathrm{Min}(P^*)$. چون $|(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)|=۱$ است، درنتیجه $x_i=x_j$ که تناقض است. بنابراین برای هر $۱\le i,j\le k$ و $i\neq j$ داریم $V_i\cap V_j=\emptyset$.

گام دوم: فرض کنید $x\in Z(P)^*$. چون $|(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)|=۱$، $۱\le i\le k$ وجود دارد که $(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)=\{x_i\}$.

درنتیجه $x_i\le x$ و همچنین $x\in V_i$. بنابراین داریم $V(\Gamma(P))=Z(P)^*=V_۱\cup V_۲\cup\dots\cup V_k$.

گام سوم: فرض کنید $۱\le i\le k$. در این صورت اگر $x,y\in V_i$ ، آن‌گاه $x_i\le x$ و $x_i\le y$. لذا $x_i\in L(x,y)$ و در نتیجه $L(x,y)\neq\{۰\}$. بنابراین x و y به‌هم متصل نیستند.

گام چهارم: فرض کنید $۱\le i,j\le k$ و $i\neq j$. همچنین فرض کنید $x\in V_i$ و $y\in V_j$. بنابراین $x_i\le x$ و $x_j\le y$. چون $|(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)|=۱$ و $|(y]\cap \mathrm{Min}(P^*)|=۱$، لذا، $(x]\cap \mathrm{Min}(P^*)=\{x_i\}$ و $(y]\cap \mathrm{Min}(P^*)=\{x_j\}$. ادعا می‌کنیم $L(x,y)=\{۰\}$. اگر $L(x,y)\neq\{۰\}$، آن‌گاه $۰\neq z\in L(x,y)$ وجود دارد. بنابراین $z\le x$ و $z\le y$. از طرفی $x\in V_i$ لذا عنصر $t\in P^*$ وجود دارد که $L(t,x)=\{۰\}$. حال می‌دانیم $L(t,z)\subseteq L(t,x)=\{۰\}$ لذا $z\in Z(P)^*$. پس $|(z]\cap \mathrm{Min}(P^*)|=۱$ و $۱\le t\le k$ وجود دارد که $(z]\cap \mathrm{Min}(P^*)=\{x_t\}$. در نتیجه $x_t\le z$. باتوجه به این و اینکه $z\le x$ و $z\le y$ داریم $x_t\le x$ و $x_t\le y$. بنابراین $x_t\in (x]\cap \mathrm{Min}(P^*)=\{x_i\}$ و $x_t\in (y]\cap \mathrm{Min}(P^*)=\{x_j\}$. پس $x_i=x_j=x_t$ و این تناقض است. بنابراین $L(x,y)=\{۰\}$، یعنی x و y در $\Gamma(P)$ به هم متصل‌اند. این روند نشان می‌دهد که گراف $\Gamma(P)$ یک گراف کامل $k-$بخشی با بخش‌های $V_۱,\dots,V_k$ است. $\square$

تذکر ۶.۲.۳. *در قسمت (دو) قضیه‌ی ۵.۲.۳، باید تساوی در دو حالت برقرار باشد. به عنوان نمونه در مثال ۴.۲.۳، $\mathrm{Min}(P^*)=\{x,y\}$ و برای هر $z\in Z(P)^*$، $|(z]\cap \mathrm{Min}(P^*)|\le ۱$ و مثلاً*

$|(\frac{1}{2}] \cap \mathrm{Min}(P^*)| = 0$. *بنابراین شرط‌های (دو) قضیه ۵.۲.۳ برقرارند ولی (یک) را نمی‌توان نتیجه گرفت، چون گراف $\Gamma(P)$ دوبخشی کامل نیست.*

تعریف ۷.۲.۳. مجموعه‌ی جزئاً مرتب P را یک درخت تعمیم‌یافته گوئیم، هرگاه برای هر $x \in P$ و هر $x_1, x_2 \in (x]$ داشته باشیم $x_1 \leq x$ یا $x_2 \leq x$.

قضیه ۸.۲.۳. *فرض کنید P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب و $k \geq 2$.* همچنین *فرض کنید $|\mathrm{Min}(P^*)| = k$ و $Z(P)^*$ یک درخت تعمیم‌یافته باشد. اگر برای هر $x \in P^*$، مجموعه‌ی $(x]\backslash\{0\}$ یک عنصر مینیمال داشته باشد، آن‌گاه گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ یک گراف کامل $k-$بخشی است .* علاوه براین *اگر $V_1, \ldots, V_k$ بخش‌های $\Gamma(P)$ باشند، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq k$*، مجموعه‌ی

$$\mathfrak{p}_i = (\bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} V_j) \cup \{0\}$$

یک ایده‌آل اول از P است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\Gamma(P)$ یک گراف کامل$k-$بخشی است. با استفاده از قضیه ۵.۲.۳، کافی است نشان دهیم برای هر $x \in Z(P)^*$، $|(x]\cap\mathrm{Min}(P^*)| = 1$. به برهان خلف فرض کنید $x \in Z(P)^*$ وجود دارد که $|(x]\cap\mathrm{Min}(P^*)| \neq 1$. بنابراین$|(x]\cap\mathrm{Min}(P^*)| \geq 2$. عنصرهای متمایز x_1 و x_2 متعلق به $(x]\cap\mathrm{Min}(P^*)$ را در نظر می‌گیریم. لذا $x_1, x_2 \in (x]$. از طرفی $x \in Z(P)^*$ و $Z(P)^*$ یک درخت تعمیم‌یافته است درنتیجه $x_1 \leq x$ یا $x_2 \leq x$ که دو حالت تناقض است، زیرا $x_1, x_2 \in \mathrm{Min}(P^*)$. بنابراین برای هر $x \in Z(P)^*$، $|(x] \cap \mathrm{Min}(P^*)| = 1$.
حال برای اثبات قسمت دوم باید نشان دهیم $\mathfrak{p}_i$، $1 \leq i \leq k$ یک ایده‌آل از P است. فرض کنید $x, y \in P^*$ ، $y \in \mathfrak{p}_i$ و $x \leq y$. در این صورت نشان می‌دهیم $x \in \mathfrak{p}_i$. چون $y \in Z(P)^*$، عنصر $z \in P^*$ وجود دارد که $L(y, z) = \{0\}$. از طرفی می‌دانیم که $L(x, z) \subseteq L(y, z) = \{0\}$ در نتیجه $L(x, z) = \{0\}$. پس $x \in Z(P)^*$. بنابراین $1 \leq t \leq k$ وجود دارد که $x \in V_t$. چون $y \in \mathfrak{p}_i$ در نتیجه $y \notin V_i$. فرض کنید $w \in V_i$. چون $\Gamma(P)$ یک گراف کامل $k-$بخشی است، لذا y به w متصل است. بنابراین $L(y, w) = \{0\}$. حال می‌دانیم که $L(x, w) \subseteq L(y, w)$، درنتیجه $L(x, w) = \{0\}$. لذا x به w متصل است و در نتیجه $x \notin V_i$. بنابراین $x \in \mathfrak{p}_i$ که نشان می‌دهد $\mathfrak{p}_i$ یک ایده‌آل از P است.
حال ثابت می‌کنیم $\mathfrak{p}_i$ ایده‌آل اول P است. فرض کنید x و y متعلق به P^* و $L(x, y) \subseteq \mathfrak{p}_i$. نشان می‌دهیم $x \in \mathfrak{p}_i$ یا $y \in \mathfrak{p}_i$. دو حالت وجود دارد $L(x, y) = \{0\}$ یا $L(x, y) \neq \{0\}$.
ابتدا فرض کنید $L(x, y) = \{0\}$. به برهان خلف فرض کنید $x, y \notin \mathfrak{p}_i$، لذا $L(x, y) = \{0\}$ که نتیجه می‌دهد $x, y \in Z(P)^*$ و در نتیجه $x, y \in V_i$. لذا x و y به هم متصل نیستند، بنابراین $L(x, y) \neq \{0\}$ و این تناقض است. در نتیجه در این حالت، $x \in \mathfrak{p}_i$ یا $y \in \mathfrak{p}_i$.
حال فرض کنید $L(x, y) \neq \{0\}$. در این صورت $0 \neq t \in L(x, y)$ وجود دارد. لذا $t \in \mathfrak{p}_i$ و در نتیجه $t \notin V_i$. فرض کنید $z \in V_i$. چون $\Gamma(P)$ یک گراف کامل $k-$بخشی است، لذا t به z متصل است. در نتیجه یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: $L(x,z)=\{0\}$. در این حالت $x\in Z(P)^*$ و به z متصل است. چون $z\in V_i$ لذا $x\notin V_i$. بنابراین $x\in \mathfrak{p}_i$.

حالت دوم: فرض کنید $L(x,z)\neq\{0\}$. در این صورت $0\neq u\in L(x,z)$ وجود دارد. ادعا می‌کنیم $L(y,u)=\{0\}$. به برهان خلف فرض کنید $L(y,u)\neq\{0\}$. بنابراین $0\neq w\in L(y,u)$ وجود دارد. در نتیجه $w\le y$ و $w\le u$. از طرفی $u\in L(x,z)$، لذا $u\le x$ و $u\le z$. بنابراین $w\le x$. در نتیجه $w\in L(x,y)$. چون $L(x,y)\subseteq \mathfrak{p}_i$، لذا $w\in\mathfrak{p}_i$. حال

$$\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\mathfrak{p}_j=V_i\cup\{0\}$$

یک ایده‌آل از P است. زیرا فرض کنید $x,y\in P$، $x\in V_i\cup\{0\}$ و $y\le x$. در این صورت باید نشان دهیم که $y\in V_i\cup\{0\}$. داریم $x\in\mathfrak{p}_j$ که $j\neq i$. از طرفی $\mathfrak{p}_j$ یک ایده‌آل است. در نتیجه $y\in\mathfrak{p}_j$ که $j\neq i$. بنابرای $y\in V_i\cup\{0\}$ و لذا $V_i\cup\{0\}$ یک ایده‌آل است. همچنین $u\in L(x,z)$. در نتیجه $u\le z$ و $u\le x$. از طرفی $w\le u$. لذا $w\le z$ و چون

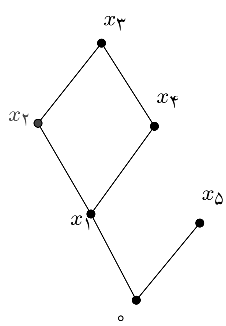
$$z\in\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\mathfrak{p}_j$$

در نتیجه

$$w\in\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\mathfrak{p}_j.$$

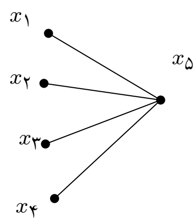
از طرفی $\cap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\mathfrak{p}_j=\{0\}$. بنابراین $w=0$ که تناقض است. لذا $L(y,u)=\{0\}$. چون $u\le z$ و $z\in\cap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\mathfrak{p}_j=V_i\cup\{0\}$ و $\cap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\mathfrak{p}_j$ یک ایده‌آل است. لذا $u\in\cap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\mathfrak{p}_j=V_i\cup\{0\}$. در نتیجه $u\in V_i$. از طرفی $L(y,u)=\{0\}$ یعنی y به u متصل است. بنابراین $y\notin V_i$ و در نتیجه $y\in\mathfrak{p}_i$.

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس قضیه ۸.۲.۳، برقرار نیست.



شکل ۲.۲.۳:

مثال ۹.۲.۳. فرض کنید $P = \{0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد که در شکل۲.۲.۳، نشان داده شده است. گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$، گراف کامل ۲-بخشی است که در شکل ۳.۲.۳، نشان داده شده است. اما مجموعه‌ی $Z(P)^*$ یک درخت تعمیم‌یافته نیست.



شکل ۳.۲.۳:

فصل ۴

گراف‌هایی که گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب هستند

در این فصل ابتدا گراف فشرده معرفی می‌شود، ثابت می‌کنیم که یک گراف فشرده است اگر و تنها اگر گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. در ادامه کاربرد گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب را در نیم‌گروه‌های کاهشی بیان می‌کنیم. هدف اصلی این فصل ارتباط بین گراف‌های فشرده و گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ می‌باشد.

۱.۴ گراف‌های فشرده

در این بخش گراف فشرده را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر G یک گراف فشرده باشد که شامل خوشه‌ی نامتناهی نباشد، آن‌گاه $\chi(G) = \omega(G) < \infty$.

تعریف ۱.۱.۴. گراف ساده G یک گراف فشرده نامیده می‌شود، اگر G شامل رأس ایزوله نباشد و برای هر دو رأس x و y که به هم متصل نیستند، رأس z وجود داشته باشد که $N(x) \cup N(y) \subseteq N(z)$.

گزاره ۲.۱.۴. *فرض کنید G یک گراف فشرده باشد. در این صورت برای هر دو رأس متمایز x و y از G یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:*
$N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$ یا هر رأس در $N(x)$ به تمام رئوس در $N(y)$ متصل است. به ویژه G یک گراف همبند با قطر حداکثر سه است.

برهان. فرض کنید $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ و $a \in N(x)$ و $b \in N(y)$ باشند. اگر a به b متصل نباشد، آن‌گاه چون G یک گراف فشرده است پس رأس c وجود دارد که $N(x) \cup N(y) \subseteq N(c)$. از طرفی داریم $\{x, y\} \subseteq N(a) \cup N(b)$ لذا $\{x, y\} \subseteq N(a) \cup N(b) \subseteq N(c)$. بنابراین $c \in N(x) \cap N(y)$ که این تناقض با $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ است. $\square$

گزاره ۳.۱.۴. *فرض کنید G یک گراف فشرده باشد.*

(یک) اگر G ستاره‌ای نباشد ، آن‌گاه هر رأس در G پایانی است یا در یک دور به طول کمتر مساوی چهار قرار می‌گیرد. به ویژه هسته‌ی G اجتماعی از مثلث‌ها و مربع‌هاست.

(دو) برای هر رأس برشی c از G، ${G^*}_c$ یک گراف همبند است که ${G^*}_c$ زیرگراف القایی G با مجموعه رئوس $V(G)\backslash\{x \in G|x = c$ یا x رأس پایانی است و به c متصل است$\}$ می‌باشد.

برهان. (یک) فرض کنید $a \in V(G)$ و رأس پایانی نباشد. چون G گراف ستاره‌ای نیست، لذا گذری به فرم $x - a - b - c$ در G وجود دارد. اگر $x = c$ آنگاه a یک رأس از مثلث $c - a - b - c$ است. اگر $x \neq c$ و x به c متصل باشد، آنگاه a یک رأس از مربع $x - a - b - c - x$ است. اگر $x \neq c$ و x به c متصل نباشد آن‌گاه چون گراف G فشرده است لذا رأس $d \in V(G)$ وجود دارد که $\{a, b\} \subseteq N(x) \cup N(c) \subseteq N(d)$ و a یک رأس در مثلث $a - b - d - a$ می‌باشد.
(دو) به برهان خلف فرض کنید c یک رأس برشی باشد که ${G^*}_c$ حداقل دارای دو مولفه‌ی همبندی باشد. رأس‌های x و y از مؤلفه‌های متمایز از ${G^*}_c$ را در نظر می‌گیریم. حال چون گراف G فشرده است پس z وجود دارد که $N(x) \cup N(y) \subseteq N(z)$. ازطرفی c یک رأس برشی، G همبند و x و y از طریق z متصل به هم هستند، لذا z همان c است و در نتیجه G یک تظریف از گراف ستاره با مرکز c است. بنابراین $c \in N(x) \cup N(y) \subseteq N(c)$ که تناقض است. پس ${G^*}_c$ همبند است. □

تعریف ۴.۱.۴. گراف n−بخشی G را یک گراف n−بخشی سره گوئیم، هرگاه G برای $k < n$، k−بخشی نباشد.

گزاره ۵.۱.۴. *فرض کنید G یک گراف فشرده باشد و n یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر G یک گراف r−بخشی سره شامل یک خوشه با $n - ۱$ عنصر باشد که r عددی متناهی و $r \geq n$ است، آن‌گاه G شامل یک خوشه با n عنصر است یعنی $\omega(G) \geq n$.*

برهان. فرض کنید G یک گراف با بخش‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n, \ldots$ و $\{a_۱, \ldots, a_{n-۱}\}$ یک خوشه با $n - ۱$ عنصر برای G باشد و برای $i = ۱, \ldots, n - ۱$، $a_i \in A_i$. حال $a \in A_n$ وجود دارد که برای هر $i = ۱, \ldots, n - ۱$ ، $N(a) \cap A_i \neq \emptyset$. در غیر این صورت گراف G، $r - ۱$ بخشی می‌شود که متناقض تعریف گراف r−بخشی سره است.
اگر $\{a_۱, \ldots, a_{n-۱}\} \subseteq N(a)$، آنگاه $\{a_۱, \ldots, a_{n-۱}, a\}$ یک خوشه با n عنصر است و لذا حکم برقرار است. بنابراین فرض کنید $|N(a) \cap \{a_۱, \ldots, a_{n-۱}, a\}| \leq n - ۲$. دو حالت رخ می‌دهد:
حالت اول: $|N(a) \cap \{a_۱, \ldots, a_{n-۱}, a\}| = n - ۲$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $\{a_۱, \ldots, a_{n-۲}\} \subseteq N(a)$ و $a_{n-۱} \notin N(a)$. $b_{n-۱} \in N(a) \cap A_{n-۱}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. $a_{n-۱}$ به $b_{n-۱}$ متصل نیست. چون G فشرده است $b \in V(G)$ وجود دارد که $N(a_{n-۱}) \cup N(b_{n-۱}) \subseteq N(b)$.
از طرفی $a \in N(b_{n-۱})$ و $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۲}\} \subseteq N(a_{n-۱})$.
پس $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۲}, a\} \subseteq N(a_{n-۱}) \cup N(b_{n-۱}) \subseteq N(b)$. بنابراین $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۲}, a, b\}$ یک خوشه با n عنصر در G است.

حالت دوم: $|N(a) \cap \{a_1, \dots, a_{n-1}, a\}| < n - 2$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید a به a_{n-1} متصل نباشد. چون G یک گراف فشرده است، در نتیجه $b \in V(G)$ وجود دارد که $N(a_{n-1}) \cup N(a) \subseteq N(b)$. از طرفی $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\} \subseteq N(a_{n-1})$.

پس $N(a) \cup \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\} \subseteq N(a_{n-1}) \cup N(a) \subseteq N(b)$. بنابراین $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\} \subseteq N(b)$ و برای هر $1 \leq i \leq n-1$، $N(b) \cap A_i \supseteq N(a) \cap A_i \neq \emptyset$. $c_{n-1} \in N(b) \cap A_{n-1}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. c_{n-1} به a_{n-1} متصل نیست. لذا چون G یک گراف فشرده است، $d \in V(G)$ وجود دارد که $N(a_{n-1}) \cup N(c_{n-1}) \subseteq N(d)$. از طرفی $b \in N(c_{n-1})$ و $\{a_1, \dots, a_{n-2}\} \subseteq N(a_{n-1})$. پس $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, b\} \subseteq N(a_{n-1}) \cup N(c_{n-1}) \subseteq N(d)$. بنابراین $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a, d\}$ یک خوشه با n عنصر در G است. $\square$

نتیجه ۶.۱.۴. *برای هر گراف فشرده G که عدد خوشه‌ای آن یعنی $\omega(G)$ متناهی باشد، عدد خوشه‌ای $\omega(G)$ با عدد رنگی $\chi(G)$ برابر است.*

برهان. فرض کنید $\omega(G) = n$. اگر $\chi(G) = r > n$، آن‌گاه G یک گراف $r-$بخشی سره می‌باشد و طبق گزاره ۵.۱.۴، $\omega(G) \geq n + 1$ که یک تناقض است. بنابراین $\chi(G) = n$. $\square$

لم ۷.۱.۴. *فرض کنید G یک گراف فشرده باشد که خوشه‌ی نامتناهی ندارد. در این صورت شرط زنجیر صعودی برای همسایگی‌های G برقرار است.*

برهان. به برهان خلف فرض کنید که زنجیر اکیداً صعودی از همسایگی‌ها وجود داشته باشد:

$$N(x_1) \subset N(x_2) \subset \cdots \subset N(x_n) \subset \dots$$

برای هر i، $y_i \in N(x_i) \backslash N(x_{i-1})$ را انتخاب می‌کنیم. چون y_i به x_{i-1} متصل نیست و گراف G فشرده است، $a_i \in V(G)$ وجود دارد که $N(x_{i-1}) \cup N(y_i) \subseteq N(a_i)$. ادعا می‌کنیم $a_i \in N(x_i) \backslash N(x_{i-1})$. زیرا اگر $a_i \in N(x_{i-1})$ باشد، آن‌گاه $a_i \in N(x_{i-1}) \cup N(y_i) \subseteq N(a_i)$ که تناقض است. از طرفی $x_i \in N(y_i) \subseteq N(a_i)$ پس $a_i \in N(x_i)$. بنابراین $a_i \in N(x_i) \backslash N(x_{i-1})$ و در نتیجه برای $i \neq j$، $a_i \neq a_j$.

برای $i > j$، $a_i \in N(x_i) \subseteq N(x_{j-1}) \subseteq N(a_j)$. لذا a_i به a_j متصل است. بنابراین $\{a_i | i \geq 1\}$ یک خوشه‌ی نامتناهی در G است که متناقض با فرض است. $\square$

گزاره ۸.۱.۴. *فرض کنید G یک گراف فشرده باشد که خوشه نامتناهی ندارد. در این صورت عدد خوشه‌ای G متناهی است.*

برهان. فرض کنید $T := \{N(a) | a \in V(G)\}$. $(T, \subseteq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است. بنابه لم ۷.۱.۴، $(T, \subseteq)$ در شرط زنجیر صعودی صدق می‌کند لذا با توجه به لم ۱۶.۲.۱، هر $N(x)$ مشمول در یک عنصر ماکسیمال از T است. ادعا می‌کنیم اگر G شامل یک خوشه با k عنصر باشد، آن‌گاه T، حداقل k عنصر ماکسیمال دارد. فرض کنید $\{a_1, \dots, a_k\}$ یک خوشه با k عنصر باشد. برای هر i، $b_i \in V(G)$ را انتخاب می‌کنیم که $N(a_i) \subseteq N(b_i)$ و هر $N(b_i)$ یک عنصر ماکسیمال در T است.

نشان می‌دهیم که اگر $i \neq j$ باشد، آنگاه $N(a_i) \neq N(b_j)$. در غیر این صورت $a_i \in N(a_j) \subseteq N(b_j)$ و لذا $b_j \in N(a_i) \subseteq N(b_j)$ که تناقض است. این ادعا مارا ثابت می‌کند.
حال فرض کنید S مجموعه‌ی همه‌ی عناصر ماکسیمال در T باشد. اگر $N(b_۱) \neq N(b_۲) \in S$، آنگاه $b_۱$ به $b_۲$ متصل است، در غیر این‌صورت چون G فشرده است، $b \in V(G)$ وجود دارد که $N(b_۱) \cup N(b_۲) \subseteq N(b)$ و لذا $N(b_۱) \subseteq N(b)$ و $N(b_۲) \subseteq N(b)$. چون $N(b_۱)$ و $N(b_۲)$ عناصر ماکسیمال هستند، لذا $N(b_۱) = N(b_۲) = N(b)$ که تناقض است. حال چون G شامل خوشه‌ی نامتناهی نیست، S متناهی است و با توجه به قسمت اول اثبات، $\omega(G) = |S| < \infty$. $\square$

با توجه به گزاره ۸.۱.۴، نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹.۱.۴. *برای هر گراف فشرده G ، اگر هر همسایگی $N(x)$ مشمول در یک همسایگی ماکسیمال باشد، آنگاه عدد خوشه‌ای G برابر است با عدد اصلی مجموعه همه همسایگی‌های ماکسیمال در G.*

قضیه ۱۰.۱.۴. *فرض کنید G یک گراف فشرده باشد که شامل خوشه‌ی نامتناهی نیست. در این صورت $\omega(G) = \chi(G) = n < \infty$.*

برهان. با توجه به نتیجه ۶.۱.۴ و گزاره ۸.۱.۴ حکم ثابت می‌شود. $\square$

۲.۴ ارتباط بین گراف فشرده و گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$

در این بخش ارتباط بین گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(P)$ و گراف فشرده بیان می‌شود.

قضیه ۱.۲.۴. *گراف ساده G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است اگر و تنها اگر G یک گراف فشرده باشد.*

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنید $G = \Gamma(P)$ و P یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. طبق قرارداد $V(G) \neq \emptyset$. G شامل رأس ایزوله نیست، چون $\Gamma(P)$ گراف مقسوم‌علیه صفر است، لذا هر رأس آن مقسوم‌علیه صفر است و به یک رأس متصل است. اگر x به y متصل نباشد، آنگاه $L(x,y) \neq \{۰\}$. درنتیجه $۰ \neq z \in L(x,y)$ وجود دارد که $z \leq x$ و $z \leq y$ و لذا $N(x) \cup N(y) \subseteq N(z)$. چون اگر $t \in N(x)$ آنگاه $L(t,x) = \{۰\}$. از طرفی $L(t,z) \subseteq L(t,x)$. پس $L(t,z) = \{۰\}$ و در نتیجه $t \in N(z)$. لذا $N(x) \subseteq N(z)$. به طور مشابه $N(y) \subseteq N(z)$. بنابراین $N(x) \cup N(y) \subseteq N(z)$.
$(\Rightarrow)$حال فرض کنید G یک گراف فشرده باشد و قرار دهید $P := V(G) \cup \{۰\}$ که $۰ \notin V(G)$. رابطه‌ی هم‌ارزی در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
برای هر $x, y \in V(G)$، $x \sim y$ اگر و تنها اگر $N(x) = N(y)$. فرض کنید $\{a_i | i \in I\}$ یک زیرمجموعه از $V(G)$ باشد که برای هر $x \in V(G)$، عنصر یکتای $i \in I$ وجود دارد که $x \sim a_i$.
حال رابطه‌ی $\leq$ را روی P به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
(یک) برای هر $x \in P$، $۰ \leq x$ و $x \leq x$. (دو) برای هر $x, y \in V(G)$ که $x \neq y$، $x \leq y$ اگر و تنها اگر $N(x) \supsetneqq N(y)$ یا $N(x) = N(y)$ که برای $i \in I$، $x = a_i$.

$(P,\leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است. زیرا برای هر $x \in P$، $x \leq x$ و لذا خاصیت انعکاسی برقرار است. حال به برهان خلف فرض کنید که رابطه‌ی $\leq$ پادمتقارن نباشد. لذا $x,y \in P^*$ وجود دارند که $x \leq y$، $y \leq x$ و $x \neq y$. اگر برای هر $i \in I$، $x \neq a_i$، آن‌گاه طبق تعریف رابطه $\leq$، $N(y) \subsetneqq N(x)$. از طرفی $y \leq x$ نیز ایجاب می‌کند که برای هر $i \in I$، $y \neq a_i$ و $N(x) \subsetneqq N(y)$ و این تناقض است. بنابراین $i \in I$ وجود دارد که $x = a_i$. چون $x \leq y$، $N(x) = N(y)$. از طرفی $y \leq x$ پس طبق تعریف رابطه‌ی $\leq$، $j \in I$ وجود دارد که $y = a_j$. چون $N(x) = N(y)$ لذا $x \sim y$ و طبق انتخاب a_iها، $i = j$ و لذا $x = y$ که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و رابطه‌ی $\leq$ پادمتقارن است.

حال اگر $x,y,z \in P^*$ و $x \lneqq y$ و $y \lneqq z$ آن‌گاه حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) $i \in I$ و $j \in I$ موجود باشند که $x = a_i$ و $y = a_j$. در این حالت $N(x) = N(y)$ و $N(y) = N(z)$ و در نتیجه $N(x) = N(z)$ و لذا $x \lneqq z$.

(ب) $i \in I$ موجود باشد که $x = a_i$ و برای هر $j \in I$، $y \neq a_j$. در این حالت $N(x) = N(y)$ و $N(z) \subsetneqq N(y)$ و لذا $N(z) \subsetneqq N(x)$. بنابر تعریف رابطه $\leq$، $x \lneqq z$.

(ج) x,y با هیچ a_iای $(i \in I)$ برابر نباشند. در این حالت $N(y) \subsetneqq N(x)$ و $N(z) \subsetneqq N(y)$ و در نتیجه $N(z) \subsetneqq N(x)$ و لذا $x \lneqq z$. بنابراین در هر حالت رابطه‌ی $\leq$ متعدی است.

قرار دهید $H = \Gamma(P)$ و ثابت می‌کنیم H بر G منطبق است. ابتدا نشان می‌دهیم $V(H) = V(G)$. به وضوح $V(H) \subseteq V(G)$. طبق گزاره ۲.۱.۴، G همبند است. بنابراین برای هر $x \in V(G)$، $y \in V(G)$ وجود دارد که x به y متصل است. ادعا می‌کنیم $L(x,y) = \{۰\}$ و در نتیجه $x \in V(H)$. لذا $V(G) \subseteq V(H)$ و بنابراین $V(H) = V(G)$. اگر $L(x,y) \neq \{۰\}$ باشد، آن‌گاه $۰ \neq z \in L(x,y)$ وجود دارد. لذا $z \leq x$ و $z \leq y$ و در نتیجه $N(x) \subseteq N(z)$ و $N(y) \subseteq N(z)$. پس $x \in N(y) \subseteq N(z)$ و لذا $z \in N(x)$.بنابراین $z \in N(z)$ که تناقض است.

حال نشان می‌دهیم $E(H) = E(G)$. فرض کنید $x,y \in V(G)$ باشند که x به y در G متصل است. در نتیجه طبق مطالب گفته شده در قسمت قبل ثابت شد $L(x,y) = \{۰\}$. در نتیجه x و y در H به هم متصل اند. حال فرض کنید x به y در H متصل باشد، ثابت می‌کنیم x به y در G متصل است. به برهان خلف فرض کنید x به y در G متصل نباشد. در این صورت چون G یک گراف فشرده است پس $z \in V(G)$ وجود دارد که $N(x) \cup N(y) \subseteq N(z)$ و لذا $N(x) \subseteq N(z)$ و $N(y) \subseteq N(z)$. در نتیجه $z \leq x$ و $z \leq y$ و لذا $۰ \neq z \in L(x,y)$ که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

با توجه به قضیه‌های ۱۰.۱.۴ و ۱.۲.۴ قضیه زیر که نتیجه اصلی بخش یک فصل دو است نیز نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۲.۴. *فرض کنید G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد که شامل خوشه‌ی نامتناهی نیست، در این صورت* $\omega(G) = \chi(G) = n < \infty$.

جالب است که قضیه قبل را با قضیه دیلورث [۹] که قضیه مشهوری در آنالیز ترکیبی است مقایسه کنیم.

قضیه ۳.۲.۴. *(دیلورث[۱]) فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب متناهی باشد. کم‌ترین تعداد زنجیرهای مجزایی که اجتماع آن‌ها همه عناصر P است با اندازه بزرگترین پادزنجیر در P برابر است.*

تعریف ۴.۲.۴. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. گراف $T(P)$ گرافی است که رأس‌های آن از Pاند و a به b متصل است اگر و تنها اگر a و b غیر قابل مقایسه باشند.

تذکر ۵.۲.۴. *با استفاده از قضیه ۳.۲.۴ (دیلورث)، اگر P یک مجموعه جزئاً مرتب متناهی باشد. در این صورت $\omega(T(P)) = \chi(T(P))$.*

تعریف ۶.۲.۴. برای هر گراف G رابطه هم‌ارزی $\sim$ را به صورت $x \sim y$ اگر و تنها اگر $N(x) = N(y)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $[x]$ کلاس هم‌ارزی شامل x باشد که $[x] = \{t \in V(G) | N(x) = N(t)\}$. G_r گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن کلاس‌های هم‌ارزی است و $[x]$ به $[y]$ در G_r به‌هم متصل‌اند اگر و تنها اگر x به y در G متصل باشد. G_r را گراف کاهشی G می‌گوئیم.

نتیجه ۷.۲.۴. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

(یک) گراف G فشرده است اگر و تنها اگر گراف G_r فشرده باشد.

(دو) گراف G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است اگر و تنها اگر گراف G_r گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد.

برهان. (یک)($\Leftarrow$) چون G رأس ایزوله ندارد. لذا G_r نیز رأس ایزوله ندارد. حال اگر $[x]$ و $[y]$ دو رأس در G_r باشند که به هم متصل نباشند، آن‌گاه x و y در G متصل نیستند. چون G فشرده است لذا $z \in V(G)$ وجود دارد که $N(x) \cup N(y) \subseteq N(z)$. بنابراین در G_r، $N([x]) \cup N([y]) \subseteq N([z])$. زیرا مثلاً اگر $[t] \in N([x])$، آن‌گاه $[t]$ به $[x]$ در G_r متصل است و لذا t به x در G متصل است و در نتیجه $t \in N(x) \subseteq N(x) \cup N(y) \subseteq N(z)$. بنابراین t به z در G متصل است و در نتیجه $[t]$ به $[z]$ در G_r متصل است. لذا $[t] \in N([z])$.
($\Rightarrow$) اثبات آن مشابه بالاست.
(دو) ($\Leftarrow$) اگر G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد، آن‌گاه طبق قضیه ۱.۲.۴، گراف G فشرده است. درنتیجه طبق قسمت (یک)، G_r یک گراف فشرده است. بنابراین G_r طبق قضیه ۱.۲.۴، گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است.
($\Rightarrow$) به‌طور مشابه اثبات می‌شود. □

تعریف ۸.۲.۴. فرض کنید n یک عدد صحیح بزرگتر از یک باشد. در این صورت گراف ساده G، گراف $n-$فشرده نامیده می‌شود، هرگاه G فشرده باشد و $\omega(G) = n$.

تذکر ۹.۲.۴. *فرض کنید G یک گراف $n-$فشرده باشد. در این صورت G یک گراف $n-$بخشی سره که شامل خوشه‌ای با n عنصر می‌باشد. زیرا هر گراف $n-$فشرده، فشرده است و $\omega(G) = n$. در نتیجه طبق قضیه ۱۰.۱.۴، $\chi(G) = n$ و بنابراین G یک گراف $n-$بخشی سره است.*

[۱] Dilworth's

لم ۱۰.۲.۴. *فرض کنید G یک گراف $n-$فشرده با بخش‌های A_i، $i = 1, \ldots, n$ باشد. همچنین فرض کنید $a, b \in V(G)$ و $a \neq b$. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، $(N(a) \cup N(b)) \cap A_i \neq \emptyset$، آن‌گاه a به b متصل است.*

برهان. فرض کنید که a به b متصل نباشد. در این صورت چون G گراف فشرده است $c \in V(G)$ وجود دارد که $N(a) \cup N(b) \subseteq N(c)$. حال طبق فرض برای هر $1 \leq i \leq n$، $N(c) \cap A_i \neq \emptyset$ که تناقض است. زیرا مثلاً اگر $c \in A_i$ باشد، آن‌گاه $N(c) \cap A_i = \emptyset$. □

تذکر ۱۱.۲.۴. *$\Delta_n(G)$ مجموعه‌ی تمام رأس‌هایی است که در یک خوشه با n عنصر قرار می‌گیرند.*

لم ۱۲.۲.۴. *فرض کنید G یک گراف $n-$فشرده با بخش‌های A_i، $i = 1, \ldots, n$ باشد. در این صورت اگر $a_i \in \Delta_n(G) \cap A_i$، $i = 1, \ldots, n$، آن‌گاه $\{a_1, \ldots, a_n\}$ یک خوشه در G است.*

برهان. فرض کنید برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in \Delta_n(G) \cap A_i$ باشد. در این صورت a_i در یک خوشه‌ی n عضوی قرار می‌گیرد. در نتیجه برای هر $1 \leq k \leq n$ که $k \neq i$ ، $N(a_i) \cap A_k \neq \emptyset$. همچنین برای هر $1 \leq j \leq n$، چون $a_j \in \Delta_n(G) \cap A_j$، لذا a_j در یک خوشه‌ی n عضوی قرار می‌گیرد و در نتیجه برای هر $1 \leq k \leq n$ که $k \neq j$، $N(a_j) \cap A_k \neq \emptyset$. بنابراین برای هر $1 \leq i \neq j \leq n$ و هر $1 \leq k \leq n$ چون $k \neq i$ یا $k \neq j$، $(N(a_i) \cup N(a_j)) \cap A_k \neq \emptyset$. لذا طبق لم ۱۰.۲.۴، a_i به a_j متصل است. بنابراین $\{a_1, \ldots, a_n\}$ یک خوشه n عضوی است. □

تذکر ۱۳.۲.۴. *اگر G یک گراف $n-$فشرده باشد. در این صورت طبق لم ۱۲.۲.۴، زیرگراف القائی روی $\Delta_n(G)$ گراف $n-$بخشی کامل است.*

لم ۱۴.۲.۴. *فرض کنید G یک گراف $n-$فشرده با بخش‌های A_i، $1 \leq i \leq n$ باشد. در این صورت اگر $h \in V(G) \backslash \Delta_n(G)$ و برای هر $1 \leq k \leq n$ یک رأس مانند $b_0 \in \Delta_n(G) \cap A_k$ وجود داشته باشد که به h متصل باشد، آن‌گاه h به همه‌ی رأس‌ها در $\Delta_n(G) \cap A_k$ متصل است.*

برهان. فرض کنید $\{a_i \in A_i | i = 1, \ldots, n\}$ یک خوشه در G باشد. در این صورت برای هر $b \in \Delta_n(G) \cap A_k$، $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n\} \subseteq N(b)$. زیرا $b \in A_k$ و لذا به هیچ رأسی از A_k متصل نیست.

حال طبق فرض داریم $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, b_0, a_{k+1}, \ldots, a_n\} \subseteq N(b) \cup N(h)$. درنتیجه برای هر $1 \leq i \leq n$، $(N(b) \cup N(h)) \cap A_i \neq \emptyset$. حال طبق لم ۱۰.۲.۴، h به b متصل است. □

تعریف ۱۵.۲.۴. برای هر $a \in V(G)$، تعریف می‌کنیم:

$$W(a) := \{i \in [1, n] | N(a) \cap \Delta_n(G) \cap A_i \neq \emptyset\}$$

که $[1, n]$ همان $\{1 \ldots, n\}$ است.

تذکر ۱۶.۲.۴. *فرض کنید $a \in V(G) \backslash \Delta_n(G)$. در این صورت طبق لم ۱۴.۲.۴، $i \in W(a)$ است اگر و تنها اگر a به هر رأس $\Delta_n(G) \cap A_i$ متصل باشد.*

لم ۱۷.۲.۴. *فرض کنید G یک گراف $n-$فشرده با بخش‌های A_i، $1 \leq i \leq n$ و $x, y \in V(G) \backslash \Delta_n(G)$ باشد. در این صورت x به y متصل است اگر و تنها اگر $W(x) \cup W(y) = [1, n]$.*

برهان. فرض کنید $\{a_i \in A_i | i = 1, \ldots, n\}$ یک خوشه در G باشد. در این صورت اگر $[1, n] = W(x) \cup W(y)$، آن‌گاه x به y متصل است.
زیرا $W(x) \cup W(y) = \{i \in [1, n] | (N(x) \cup N(y)) \cap \Delta_n(G) \cap A_i \neq \emptyset\}$. در نتیجه برای هر $1 \leq i \leq n$، $(N(x) \cup N(y)) \cap A_i \neq \emptyset$. بنابراین طبق لم ۱۰.۲.۴، x به y متصل است.
بر عکس حال فرض کنید $W(x) \cup W(y) \subsetneqq [1, n]$ و x به y متصل باشد. $k \in [1, n] \backslash (W(x) \cup W(y))$ در نظر بگیرید. در این صورت چون $k \notin W(x)$، طبق تعریف $W(x)$، $N(x) \cap \Delta_n(G) \cap A_k = \emptyset$. لذا x به a_k متصل نیست. چون گراف G، $n-$فشرده است لذا فشرده نیز می‌باشد. در نتیجه $b \in V(G)$ وجود دارد که $N(a_k) \cup N(x) \subseteq N(b)$. از طرفی x به y متصل است. پس $y \in N(x)$. $\{a_i | i = 1, \ldots, n\}$ یک خوشه است . لذا $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n\} \subseteq N(a_k)$.
بنابراین $\{y, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n\} \subseteq N(a_k) \cup N(x) \subseteq N(b)$. در نتیجه $b \in \Delta_n(G) \cap A_k$ و y به b متصل است. از طرفی $k \notin W(y)$ ، در نتیجه y به هیچ رأسی از $\Delta_n(G) \cap A_k$ متصل نیست و این تناقض است.

تعریف ۱۸.۲.۴. گراف ساده همبند G یک گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است اگر $V(G)$ اجتماع مجزایی از A و H باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:
(یک) $A = \Delta_n(G)$ و گراف القائی روی A یک گراف $n-$بخشی کامل با بخش‌های A_i، $i = 1, \ldots, n$ است.
(دو) برای هر $h \in H$ و $i \in [1, n]$، h به بعضی از رأس‌های A_i متصل است اگر و تنها اگر h به هر رأس از A_i متصل باشد. برای هر $x \in V(G)$ قرار دهید:

$$W(x) := \{1 \leq i \leq n | N(x) \cap A_i \neq \emptyset\} = \{1 \leq i \leq n | N(x) \cap A_i \cap \Delta_n(G) \neq \emptyset\}$$

(توجه کنید که $A_i \subseteq \Delta_n(G)$.)
(سه) برای هر $h_1, h_2 \in H$، h_1 به h_2 متصل است اگر و تنها اگر $W(h_1) \cup W(h_2) = [1, n]$.

تذکر ۱۹.۲.۴. *درگراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته G، مجموعه‌ی رئوس به صورت $V(G) = A \cup H$ است. توجه کنید که در تعریف بالا اگر $h \in H$ باشد، آن‌گاه $|W(h)| \leq n - 2$. درغیر این صورت $h \in \Delta_n(G) = A$ که تناقض است. در این صورت گراف ۲-بخشی کامل تعمیم‌یافته، ۲-بخشی کامل است.*

تذکر ۲۰.۲.۴. *فرض کنید $R := \mathbb{Z}_2^n$ که ضرب دکارتی n کپی ازحلقه‌ی $\mathbb{Z}_2$ (حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۲) است. در این صورت به وضوح یک حلقه‌ی بولی است (یعنی برای هر $x \in R$، $x^2 = x$) و به وسیله‌ی رابطه‌ی $e \leq f$ اگر و تنها اگر $ef = e$ ، برای هر $e, f \in R$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است. توجه کنید که گراف مقسوم‌علیه صفر R، به عنوان یک حلقه (یا یک نیم‌گروه) و به عنوان یک مجموعه جزئاً مرتب برهم منطبق‌اند. زیرا اگر $a, b \in R$ و $ab = 0$ آن‌گاه نشان می‌دهیم که $L(a, b) = \{0\}$.*

عنصر $t \in L(a,b)$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. در نتیجه $t \leq a$ و $t \leq b$. لذا $t = ta$ و $t = tb$. از طرفی $t = ta = tba = tab$. و طبق فرض $ab = 0$. در نتیجه $t = 0$ و بنابراین $L(a,b) = \{0\}$.
حال فرض کنید $L(a,b) = \{0\}$. در این صورت نشان می‌دهیم که $ab = 0$. ادعا می‌کنیم $ab \in L(a,b)$. داریم $ab.b = ab$ و لذا طبق تعریف $ab \leq a$ و به طور مشابه $ab \leq b$. بنابراین $ab \in L(a,b) = \{0\}$ و لذا $ab = 0$.

تعریف ۲۱.۲.۴. عنصر $0 \neq e \in P$ را اولیه گوئیم اگر برای هر $0 \neq f \in P$ که $f \leq e$، آن‌گاه $e = f$. یا معادلاً $e \in \mathrm{Min}(P^*)$.

تعریف ۲۲.۲.۴. زیر گراف H از $\Gamma(\mathbb{Z}_2^n)$ را مینیمال گوئیم، هرگاه H زیر گراف القائی روی یک زیرمجموعه از $V(\Gamma(\mathbb{Z}_2^n))$ که شامل همه‌ی عناصر اولیه از مجموعه‌ی جزئاً مرتب $\mathbb{Z}_2^n$ است، باشد. H را مینیمال بسته گوئیم، هرگاه H مینیمال باشد و $V(H) \cup \{0\}$ یک زیرنیم‌گروه $\mathbb{Z}_2^n$ باشد.

قضیه ۲۳.۲.۴. *فرض کنید G یک گراف و $\omega(G) = n < \infty$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(یک) G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است.

(دو) G یک گراف $n-$فشرده است.

(سه) G یک گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است.

(چهار) گراف القائی G_r از G با زیرگراف مینیمال $\Gamma(\mathbb{Z}_2^n)$ یکریخت است.

برهان. (یک) $\Leftrightarrow$ (دو)فرض کنید G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت طبق قضیه۱.۲.۴، G یک گراف فشرده است. از طرفی $\omega(G) = n < \infty$، بنابراین G یک گراف $n-$ فشرده است.
اگر G گراف $n-$فشرده باشد، آن‌گاه G فشرده است. لذا طبق قضیه ۱.۲.۴، G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است.
(دو) $\Leftarrow$ (سه) فرض کنید G گراف $n-$فشرده باشد. در این صورت طبق لم‌های ۱۲.۲.۴، ۱۴.۲.۴ و ۱۷.۲.۴، گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است. زیرا
اگر قرار دهید $A = \Delta_n(G)$ و $H = V(G) \backslash \Delta_n(G)$، آن‌گاه $V(G)$ اجتماع متمایزی از A و H است. حال برای اینکه G، گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته باشد، A و H باید در شرطهای تعریف ۱۸.۲.۴، صدق کنند. اگر G گراف $n-$فشرده با بخش‌های A_i، $i = 1, \ldots, n$ باشد، آن‌گاه طبق لم ۱۷.۲.۴، h_1 به h_2 (توجه کنید که $h_1, h_2 \in H$) متصل است اگر و تنها اگر $W(h_1) \cup W(h_2) = [1,n]$. در نتیجه شرط (سه) در تعریف ۱۸.۲.۴، برقرار است.
همچنین طبق لم ۱۴.۲.۴، شرط (دو) تعریف ۱۸.۲.۴، برقرار است. در نهایت طبق لم ۱۲.۲.۴، اگر G گراف $n-$فشرده با بخش‌های A_i، $i = 1, \ldots, n$ باشد. آن‌گاه زیر گراف القائی روی $\Delta_n(G)$ یک گراف $n-$بخشی کامل است. بنابراین شرط (یک) نیز بر قرار است.
(سه) $\Leftarrow$ (چهار)فرض کنید G یک گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته با بخش‌های $A \cup H$ که در آن

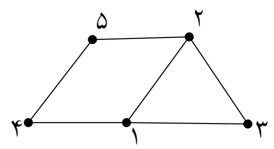
$A = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$ است. در این صورت برای هر $x, y \in A$، $N(x) = N(y)$ اگر و تنها اگر i وجود داشته باشد که $x, y \in A_i$ (زیرا فرض کنید برای هر $x, y \in A$، $N(x) = N(y)$. در این صورت چون گراف القائی روی یک A گراف $n-$بخشی کامل با بخش‌های A_i، $i = ۱, ۲. \ldots, n$ است. لذا x و y در یک بخش قرار دارند و بنابراین i وجود دارد که $x, y \in A_i$. حال فرض کنید i وجود داشته باشد که $x, y \in A_i$. در این صورت چون G گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است، لذا $N(x) = N(y)$.) $W(x) = W(y)$ اگر و تنها اگر (با توجه به تعریف W و چون G گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است، حکم برقرار است). از طرفی برای هر $x, y \in H$، $N(x) = N(y)$ اگر و تنها اگر $W(x) = W(y)$. (طبق تعریف W حکم برقرار است). برای هر $x \in A$ و $y \in H$ داریم $N(x) \neq N(y)$ (اگر $N(x) = N(y)$، آنگاه $۱ \leq i \leq n$ای هست که $x \in A_i$ و لذا y به هر A_jای $(j \neq i)$ متصل خواهد شد. در نتیجه $y \in \Delta_n(G)$ که متناقض $y \in H$ است.) و $W(x) \neq W(y)$.
در نتیجه برای هر $x, y \in V(G)$، $W(x) = W(y)$ اگر و تنها اگر $x \sim y$. فرض کنید $\{e_i | i \in [۱, n]\}$ مجموعه‌ی همه‌ی عناصر اولیه از $\mathbb{Z}_۲^n$ باشد. نگاشت ϕ را برای هر $x \in V(G)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi : V(G_r) \to \mathbb{Z}_۲^n$$
$$\phi([x]) = \sum_{i \notin W(x)} e_i$$

در نتیجه برای هر $a_i \in A_i$، $i = ۱, \ldots, n$ داریم $\phi([a_i]) = e_i$.
زیرا $W(a_i) = \{i \in [۱, n] | N(a_i) \cap A_i \neq \emptyset\} = \{۱, \ldots, i-۱, i+۱, \ldots, n\}$. لذا $i \notin W(a_i)$.
همچنین $\mathrm{Im}(\phi)$ شامل تمام عناصر اولیه‌ی $\mathbb{Z}_۲^n$ است. نگاشت ϕ، یک به یک است زیرا اگر $[x] \neq [y]$ باشد، آنگاه $W(x) \neq W(y)$ و در نتیجه $\phi([x]) \neq \phi([y])$. برای هر $[x]$ و $[y]$ متعلق به $V(G_r)$، $[x]$ به $[y]$ در G_r متصل است اگر و تنها اگر $W(x) \cup W(y) = [۱, n]$ (زیرا $[x]$ به $[y]$ در G_r متصل است اگر و تنها اگر x به y در G به هم متصل باشد. از طرفی چون G یک گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است. لذا x به y در G متصل است اگر و تنها اگر $W(x) \cup W(y) = [۱, n]$.) اگر و تنها اگر $\phi([x])\phi([y]) = ۰$ (چون $W(x) \cup W(y) = [۱, n]$، لذا اگر $i \notin W(x)$، آنگاه $i \in W(y)$ و در نتیجه اگر e_i در $\phi([x])$ ظاهر شود در $\phi([y])$ ظاهر نمی‌شود و لذا $\phi([x])\phi)[y]) = ۰$.عکس آن نیز مشابهاً برقرار است، مثلاً اگر $W(x) \cup W(y) = [۱, ۳]$ و $W(x) = \{۱, ۲\}$ و $W(y) = \{۱, ۳\}$ باشند، آنگاه $\phi([x]) = e_۳$ و $\phi([y]) = e_۲$. لذا $\phi([x])\phi([y]) = e_۳(e_۲) = ۰$. عکس آن نیز برقرار است.) اگر و تنها اگر $\phi([x])$ به $\phi([y])$ در $\Gamma(\mathbb{Z}_۲^n)$ متصل باشد. بنابراین G_r با یک زیرگراف مینیمال از $\Gamma(\mathbb{Z}_۲^n)$ یکریخت است.

(چهار) $\Leftarrow$ (یک) گراف القائی G یعنی G_r با زیر گراف مینیمال $\Gamma(\mathbb{Z}_۲^n)$ یکریخت است . در نتیجه G_r گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه جزئاً مرتب است. (زیرا مجموعه عناصر اولیه یک مجموعه جزئاً مرتب است.) بنابراین طبق نتیجه۷.۲.۴، G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است.
□

مثال ۲۴.۲.۴. گراف شکل ۱.۲.۴، گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب نیست. زیرا $W(۴) = \{۱\}$ و $W(۵) = \{۲\}$. در نتیجه $W(۴) \cup W(۵) \neq [۱, ۳]$. از طرفی ۴ به ۵ متصل است. لذا طبق تعریف ۱۸.۲.۴، گراف G، $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته نیست. بنابراین طبق قضیه ۲۳.۲.۴، G گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌ی جزئاً مرتب نیست. (توجه کنید که $\Delta_n(G) = \{۱, ۲, ۳\}$).



شکل ۱.۲.۴: گرافی که گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه جزئاً مرتب نیست.

تعریف ۲۵.۲.۴. گراف ساده G را گراف شکافنده گوئیم، هرگاه $V(G)$ به دو زیرمجموعه‌ی S و K افراز شده باشد که K یک خوشه و S مجموعه مستقل است (یعنی برای هر $x, y \in S$ که x و y دو رأس متمایزند، x به y متصل نیست).

نتیجه ۲۶.۲.۴. *فرض کنید G یک گراف شکافنده با $V(G) = S \cup K$ باشد. اگر $\infty > |K|$ آن‌گاه G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است اگر و تنها اگر یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد:*

(یک) برای هر دو رأس $a, b \in S$، $N(a) \cup N(b) \subsetneq K$.

(دو) رأس $a \in S$ وجود داشته باشد که $N(a) = K$.

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنید G گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. در این صورت چون $\infty > |K| + ۱ \geq \omega(G)$، طبق قضیه‌ی ۲۳.۲.۴، گراف G، $n-$بخش کامل تعمیم‌یافته است ($n = \omega(G)$). اگر $K = \Delta_n(G)$، آن‌گاه چون S نیز یک مجموعه مستقل است، به ازای هر $a, b \in S$، $N(a) \subsetneqq K$ و $N(b) \subsetneqq K$. لذا $N(a) \cup N(b) \subsetneq K$. اگر $K \neq \Delta_n(G)$، آن‌گاه $a \in S$ وجود دارد که $N(a) = K$ و $K \cup \{a\} = \Delta_n(G)$. در هر حالت (یک) یا (دو) برقرار است.
$(\Rightarrow)$ حال فرض کنید که شرط (یک) برقرار باشد. در این صورت باید نشان دهیم G گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌ی جزئاً مرتب یا طبق قضیه ۲۳.۲.۴، $n-$ بخشی کامل تعمیم‌یافته است. لذا G باید در شرایط (یک) تا (سه) تعریف ۱۸.۲.۴، صدق کند. حال چون (یک) برقرار است پس $K = \Delta_n(G)$. از طرفی قرار می‌دهیم $S =: H$. بنابراین G، $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است.
اگر شرط (دو) برقرار باشد، آن‌گاه $a \in S$ وجود دارد که $N(a) = K$ و لذا $\Delta_n(G) = K \cup \{a\}$. با قرار دادن $H := S \setminus \{a\}$، G یک گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است. □

۳.۴ کاربرد گراف $\Gamma(P)$ در نیم‌گروه‌های کاهشی

در این بخش ارتباط بین گراف مقسوم‌علیه صفر نیم‌گروه‌ها و گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب بیان خواهد شد. همچنین کاربرد گراف مقسوم‌علیه صفر مجموعه‌های جزئاً مرتب را در نیم‌گروه‌های کاهشی بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۴. $(G,^*)$ یک نیم‌گروه است هرگاه G تحت عمل *، بسته و شرکت‌پذیر باشد.

تذکر ۲.۳.۴. *در سرتاسر این بخش نیم‌گروه‌ها جابه‌جایی و با عنصر "$\circ$" در نظر گرفته می‌شوند.*

تعریف ۳.۳.۴. نیم‌گروه S را نیم‌گروه کاهشی گوئیم، هرگاه برای هر $x \in S$ و هر n صحیح مثبت، $x^n = \circ$ نتیجه دهد که $x = \circ$.

تعریف ۴.۳.۴. نیم‌گروه S را نیم‌گروه بولی (نیم‌مشبکه) گوئیم، هرگاه برای هر $x \in S$، $x^۲ = x$.

تعریف ۵.۳.۴. نیم‌گروه S را نیم‌گروه فون نیومن منظم[۱] گوئیم، هرگاه برای هر $x \in S$، $y \in S$ وجود داشته باشد که $x = xyx$.

تذکر ۶.۳.۴. *هر نیم‌گروه بولی، فون نیومن منظم و هر نیم‌گروه فون نیومن منظم، کاهشی است.*

یادآوری می‌کنیم که گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم‌گروه مانند S، گرافی است که رأس‌های آن مقسوم‌علیه‌های صفر غیرصفر S هستند ($x \in S$ مقسوم‌علیه صفر است اگر $\circ \neq y \in S$ موجود باشد که $xy = \circ$) و دو رأس x و y به هم متصل‌اند اگر و تنها اگر $xy = \circ$. همواره طبق قرار داد فرض می‌شود که این گراف ناتهی باشد. این گراف را با $\Gamma(S)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۷.۳.۴. *فرض کنید S یک نیم‌گروه کاهشی با عنصر صفر باشد. در این صورت گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(S)$ از S یک گراف فشرده است.*

برهان. گراف $\Gamma(S)$ شامل رأس ایزوله نیست. برای هر دو رأس غیر متصل $x, y \in V(\Gamma(S))$، $xy \in V(\Gamma(S))$ است. زیرا $x \in V(\Gamma(S))$، لذا رأس z وجود دارد که $zx = \circ$ و در نتیجه $zxy = \circ$. فرض کنید $a \in N(x) \cup N(y)$. در این صورت $ax = \circ$ یا $ay = \circ$. لذا $axy = \circ$. چون S نیم‌گروه کاهشی است لذا $xyxy \neq \circ$. در نتیجه $a \neq xy$. پس $a \in N(xy)$. بنابراین $N(x) \cup N(y) \subseteq N(xy)$. لذا $\Gamma(S)$ فشرده است. $\square$

گزاره ۸.۳.۴. *فرض کنید G گراف ساده همبند باشد. در این صورت اگر گراف G_r از G گراف مقسوم‌علیه صفر نیم‌گروه بولی باشد، آن‌گاه G نیز چنین است.*

برهان. فرض کنید $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی روی $V(G)$ و $\{e_i | i \in I\}$ یک زیر مجموعه از $V(G)$ باشد که برای هر $x \in V(G)$، $i \in I$ یکتا وجود داشته که $x \sim e_i$. در این صورت G_r زیرگراف القائی G روی $\{e_i | i \in I\}$ است و عمل دوتایی $\diamond$ روی مجموعه‌ی $S = \{e_i | i \in I\} \cup \{\circ\}$ وجود دارد. S یک

---
[۱] Von neumann

نیم‌گروه بولی است و طبق فرض $G_r = \Gamma(S)$. حال عمل دوتایی روی مجموعه‌ی $T = V(G) \cup \{\circ\}$ تعریف می‌کنیم. برای هر $x, y \in V(G)$، $x \sim e_i$ و $y \sim e_j$. اگر $x = y$ باشد، آنگاه $xy = x$ و اگر $x \neq y$ باشد، آنگاه $xy = e_i \diamond e_j$. برای هر $x \in T$، $x\circ = \circ x = \circ$. ابتدا چک می‌کنیم که عمل دوتایی، شرکت‌پذیر است. فرض کنید $x, y, z \in T$. در این صورت اگر یکی از x و y و z صفر باشند، آنگاه $(xy)z = x(yz) = y(xz) = \circ$. حال فرض کنید $x, y, z \in V(G)$ باشند. در این صورت $i, j, k \in I$ وجود دارد که $x \sim e_i$ و $y \sim e_j$ و $z \sim e_k$. سه حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: فرض کنید x, y, z دوبه‌دو متمایز باشند. در این صورت اگر هیچ یک از تساویهای $z = xy$ و $y = xz$ و $x = yz$ برقرار نباشد، آنگاه $(xy)z = x(yz) = y(xz) = e_i \diamond e_j \diamond e_k$. درغیر این صورت بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $z = xy$. در این حالت:

$$yz = y(e_i \diamond e_j) = \begin{cases} e_i \diamond e_j & \text{اگر } y = e_i \diamond e_j \\ e_i \diamond (e_i \diamond e_j) = e_i \diamond e_j & \text{اگر } y \neq e_i \diamond e_j \end{cases}$$

در نتیجه

$$x(yz) = x(e_i \diamond e_j) = \begin{cases} e_i \diamond e_j & \text{اگر } x = e_i \diamond e_j \\ e_i \diamond (e_i \diamond e_j) = e_i \diamond e_j & \text{اگر } x \neq e_i \diamond e_j \end{cases}$$

بنابراین $x(yz) = e_i \diamond e_j$. به طور مشابه $(xy)z = y(xz) = e_i \diamond e_j$. در نتیجه در این حالت $(xy)z = x(yz) = y(xz)$.

حالت دوم: فرض کنید $x = y$ و $x \neq z$. در این صورت:

$$x(yz) = x(e_j \diamond e_k) = \begin{cases} e_j \diamond e_k & \text{اگر } x = e_j \diamond e_k \\ e_i \diamond (e_j \diamond e_k) = e_j \diamond e_k & \text{در غیر این صورت } (e_i = e_j) \end{cases}$$

بنابراین $x(yz) = e_j \diamond e_k$. به طور مشابه $(xy)z = y(xz) = e_j \diamond e_k$. در نتیجه در این حالت $(xy)z = x(yz) = y(xz)$.

حالت سوم: فرض کنید $x = y = z$. در این صورت $(xy)z = x(yz) = y(xz) = x$. بنابراین عمل دوتایی شرکت‌پذیر است. در نتیجه T یک نیم‌گروه بولی با عنصر صفر می‌باشد. حال باید نشان دهیم که $\Gamma(T) = G$. فرض کنید $x, y \in V(G)$ و $x \neq y$. در این صورت $i, j \in I$ وجود دارد که $x \sim e_i$ و $y \sim e_j$. توجه کنید x به y در G متصل است، اگر و تنها اگر e_i به e_j در G_r متصل باشد اگر و تنها اگر $e_i \diamond e_j = \circ$ اگر و تنها اگر $xy = \circ$. □

قضیه ۹.۳.۴. *فرض کنید G یک گراف ساده باشد و $\omega(G) = n < \infty$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(یک) G گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم‌گروه کاهشی با عنصر صفر است.

(دو) G گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است که برای هر دو رأس غیر متصل $a, b \in V(G)$ رأس $c \in V(G)$ وجود دارد که $W(c) = W(a) \cup W(b)$.

(سه) گراف G_r از G با یک زیرگراف مینیمال بسته از $\Gamma(\mathbb{Z}_2^n)$ یکریخت است.

(چهار) G گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم‌مشبکه (نیم‌گروه بولی) با عنصر صفر است.

برهان. (یک) $\Leftarrow$ (دو)با استفاده از قضیه ۲۳.۲.۴ و گزاره ۷.۳.۴، $G=\Gamma(S)$ یک گراف $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است. زیرا طبق گزاره ۷.۳.۴، G فشرده است. از طرفی $\omega(G)=n\ <\infty$ می‌باشد. لذا G، $n-$ فشرده است . بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲۳.۲.۴، گراف G، $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است.

حال فرض کنید $V(G)=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup H$ و a و b در G به هم متصل نباشند. حال اگر $a,b\in A$، آنگاه $1\leq i\leq n$ وجود دارد که $a,b\in A_i$. در نتیجه چون G، $n-$بخشی کامل تعمیم‌یافته است لذا $N(a)=N(b)$. بنابراین $W(a)=W(b)$ و لذا $W(a)\cup W(b)=W(a)=W(b)$.

اگر $a\in H$ و $b\in A$ ، آنگاه $W(a)\subsetneqq W(b)$. زیرا $b\in A_i$ و در نتیجه:

$W(b)=[1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n]$. از طرفی $a\in H$ لذا طبق تذکر ۱۹.۲.۴، $|W(a)|\leq n-2$.

بنابراین $W(a)\subsetneqq W(b)$. و در نتیجه $W(a)\cup W(b)=W(b)$.

حال اگر $a,b\in H$ باشد، آنگاه ادعا می‌کنیم که $W(a)\cup W(b)=W(ab)$. می‌دانیم که $W(a)\subseteq W(ab)$ و $W(b)\subseteq W(ab)$. لذا $W(a)\cup W(b)\subseteq W(ab)$. برای اثبات طرف دیگر به برهان خلف فرض کنید که $k\in W(ab)\setminus W(a)\cup W(b)$ و $x\in A_k$. می‌دانیم که $W(x)\subseteq W(ax)$ و داریم $ax\in A_k$. در غیر این صورت ax باید به x متصل باشد و در نتیجه $axx=0$. لذا $ax=0$ که تناقض است. (زیرا $x\in A_k$ و $k\notin W(a)$) به‌طور مشابه $bx\in A_k$. بنابراین $axbx\neq 0$. از طرفی $k\in W(ab)$ و $x\in A_k$ بنابراین $xab=0$ که تناقض است.

(دو) $\Leftarrow$ (سه) در اثبات قضیه‌ی ۲۳.۲.۴، نگاشت ϕ را برای هر $x\in V(G)$ به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\phi: V(G_r)\to\mathbb{Z}_2^n$$
$$\phi([x])=\sum_{i\notin W(x)} e_i$$

که $\{e_i|i\in I\}$ مجموعه‌ی تمام عناصر اولیه بودند و برای هر $a_i\in A_i$، $\phi([a_i])=e_i$ و $\mathrm{Im}(\phi)$ شامل همه‌ی عناصر اولیه است. حال قرار دهید $S=\mathrm{Im}(\phi)\cup\{0\}$. ادعا می‌کنیم S یک زیرنیم‌گروه از $\mathbb{Z}_2^n$ است. برای این منظور توجه کنید که

$$\phi([a])\phi([b])=\sum_{i\notin W(a)} e_i\sum_{i\notin W(b)} e_i=\sum_{i\notin W(a)\cup W(b)} e_i=\sum_{i\notin W(c)} e_i.$$

بنابراین

$$\phi([a])\phi([b])\in S$$

همچنین ϕ، یک به یک است. زیرا اگر $[x]\neq[y]$، آنگاه $W(x)\neq W(y)$ و در نتیجه $\phi([x])\neq\phi([y])$.

می دانیم که $[a]$ به $[b]$ در G_r متصل‌اند اگر و تنها اگر a به b در G متصل باشد و از طرفی چون G یک گراف $n-$بخشی کامل تعمیم یافته است لذا a به b متصل است اگر و تنها اگر $W(a)\cup W(b)=[1,n]$ اگر وتنها اگر $\phi([a])\phi([b])=0$.

(سه) ⇐ (چهار) با توجه به گزاره‌ی ۸.۳.۴، اگر $G_r = \Gamma(S')$ باشد که S' یک نیم‌گروه بولی است، آن‌گاه نیم‌گروه بولی S وجود دارد که $G = \Gamma(S)$. طبق فرض G_r با یک زیرگراف مینیمال بسته از $\Gamma(\mathbb{Z}_2^n)$ یکریخت است . در نتیجه $G_r \cong \Gamma(T)$ که T یک زیرنیم‌گروه از $\mathbb{Z}_2^n$ می‌باشد. لذا G_r گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم‌گروه بولی است، بنابراین طبق گزاره۸.۳.۴، G، نیز چنین است.

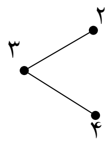
(چهار) ⇐ (یک) بدیهی است. □

تذکر ۱۰.۳.۴. *باتوجه به قضیه ۲۳.۲.۴ ، قضیه ۹.۳.۴ وگزاره ۷.۳.۴ داریم:*

(یک) گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم گروه کاهشی، گراف مقسوم‌علیه صفر یک مجموعه جزئاً مرتب است.

(دو) گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم‌گروه کاهشی، گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم‌مشبکه (نیم‌گروه بولی) است.

تذکر ۱۱.۳.۴. *چون گراف مقسوم‌علیه صفر نیم‌گروه‌های کاهشی و گراف مقسوم‌علیه صفر نیم‌گروه‌های بولی یکی هستند، سؤال طبیعی این است که یک نیم‌گروه کاهشی و بزرگترین تصویر نیم‌گروه بولی آن گراف مقسوم‌علیه صفر یکسانی دارند یا خیر؟ در ادامه نشان می‌دهیم که چنین چیزی درست نیست. فرض کنید $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ و $T = \{0, 2, 3, 4\}$ یک زیرمجموعه از $\mathbb{Z}_6$ باشد. همچنین T یک نیم‌گروه کاهشی و یک زیر نیم‌گروه از $\mathbb{Z}_6$ است. گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(T)$ به فرم ۱.۳.۴ ، شکل است. زیرا ۰=۶=۲.۳ و ۰=۱۲=۳.۴. درنتیجه $\Gamma(T)$ با گراف $K_{1,2}$ یکریخت است.*



شکل ۱.۳.۴: گراف $\Gamma(T)$

حال قرار دهید $S = \{0, a, b\}$. واضح است که S با اعمال $a^2 = a$، $b^2 = b$ و $ab = 0$ یک نیم‌گروه بولی است. نگاشت ϕ را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi : T \to S$$

که $\phi(0) = 0$، $\phi(2) = \phi(4) = a$ و $\phi(3) = b$. نگاشت ϕ یک همریختی است. زیرا برای هر $a, b \in T$، $\phi(a.b) = \phi(a).\phi(b)$. به‌عنوان مثال $\phi(3.4) = \phi(12) = \phi(0)$ و $\phi(3).\phi(4) = a.b = 0$. بنابراین $\phi(3.4) = \phi(3).\phi(4)$. همچنین $\phi(2.4) = \phi(2) = a^2 = \phi(2)\phi(4)$ و $\phi(2.3) = \phi(0) = 0 = ab = \phi(2)\phi(3)$. S بزرگترین تصویر نیم‌گروه بولی از T است و گراف مقسوم‌علیه صفر آن K_2 با رأس‌های a و b است. بنابراین $\Gamma(T) \ncong \Gamma(S)$.

مراجع

[1] M. Afkhami, Z. Barati and K. Khashyarmanesh, Planar zero divisor graphs of partially ordered sets, *Acta Math. Hungar.* **137** (1-2) (2012), 27-35.

[2] M. Alizadeh, A. K. Das, H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, On the diameter and girth of zero divisor graphs of posets, *Discrete Appl. Math.* **160**(9) (2012) 1319-1324.

[3] M. Alizadeh, H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, An ideal theoretic approach to complete partite zero-divisor graphs of posets, *J. Algebra Appl.* **12**(2) (2013) 1250148 (11 pages).

[4] D. D. Anderson and M. Nasser, Beck's coloring of a commutative ring, *J. Algebra* **159**(2) (1993) 500-514.

[5] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a communative rings, *J. Algebra* **217**(2) (1999) 434-447.

[6] I. Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra* **116**(1) (1988) 208-226.

[7] J. A. Bondy and S. R. Murty, *Graph theory with application,* Elsevier (New York 1976).

[8] B. A. Davey and H. A. Priestely, *Introduction to lattices and Order,* second ed. Cambridge University Press, New York, (2002).

[9] R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. Math.* **51**(2) 161-166(1950)

[10] R. Halas and M. Jukl, On Beck' s coloring of posets, *Discrete Math.* **309**(13) (2009) 4584-4589.

[11] D. Lu and T. Wu, The zero- divisor graphs of posets and an application to semigroups, *Graphs Combin.* **26**(6) (2010) 739-804.

[12] S. K. Nimbhorkar, M. P. Wasadikhar and L. Demeyer, Coloring of meet- semilattices, *Ars Combin.* **84** (2007) 97-104.

[13] R. Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra,* 2nd edn, (Combridge Univercity Press, Cambridge, 2000).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

القائی	induced
انعکاسی	reflexive
ایده‌آل اول	prime ideal
پادمتقارن	antisymmetric
تظریف	refinement
تعدی	transtitive
حلقه جابه‌جایی	communative ring
درخت	tree
دوبخشی کامل	complete bipartite
رنگ آمیزی	coloring
زیرتقسیم	subdivison
زیرگراف القائی	induced graph
عدد خوشه ای	clique number
عدد رنگی	chromatic number
عنصر مینیمال	minimal element
فاصله	distance
فشرده	compact
قطر	diameter
کمترین	minimum
کمر	girth
گراف دوبخشی	bipartite graph
گراف ستاره	star graph
گراف کامل	complete graph
گراف مسطح	planar graph
گشت	walk

متصل .... adjacent
متناهی .... finite
مجموعه جزئاً مرتب .... partially orderd set(poset)
مجموعه مستقل .... independement set
مسیر .... path
مقسوم‌علیه صفر .... zero-divisor
ناهمبند .... disconnected
نیم‌مشبکه .... semilattice
نیم‌گروه خودتوان .... idempotent semigroup
نیم‌گروه کاهشی .... reduced semigroup
همبند .... connected
یال .... edge
یکریخت .... isomorphic

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjacent .... متصل
antisymmetric .... پادمتقارن
binary relation .... رابطه‌ی دوتایی
bipartite graph .... گراف دوبخشی
chromatic number .... عدد رنگی
clique .... خوشه
clique number .... عدد خوشه‌ای
coloring .... رنگ آمیزی
communative ring .... حلقه جابه‌جایی
compact .... فشرده
complete graph .... گراف کامل
connected .... همبند
cycle .... دور
diameter .... قطر
disconnected .... ناهمبند
edge .... یال
finite .... متناهی
generalized tree .... درخت تعمیم‌یافته
girth .... کمر
idempotent semigroup .... نیم‌گروه خودتوان
induced subgraph .... زیرگراف القائی
isomorphic .... یکریخت
minimal element .... عنصر مینیمال
partially orderd set(poset .... مجموعه جزئاً مرتب
path .... مسیر

planar graph .... گراف مسطح
prime ideal .... ایده‌آل اول
reduced semigroup .... نیم‌گروه کاهشی
refinement .... تظریف
reflexive .... انعکاسی
semilattice .... نیم‌مشبکه
split .... شکافنده
star graph .... گراف ستاره
subdivison .... زیرتقسیم
transitive .... تعدی
tree .... درخت
subgraph .... زیرگراف
vertex .... رأس
walk .... گشت
zero-divisor .... مقسوم‌علیه صفر

Aabstract

In this thesis, we study the zero-divisor graphs of posets. First, we focus on the coloring of these graphs. It will be shown that the clique number and chromatic number of these graphs are equal.
Also, we study the diameter and girth of the zero-divisor graphs of posets. Next, we classify all posets whose zero-divisor graphs are planar or complete partite.
Finally, we charactrise all graphs that are zero-divisor graphs of posets.

Key Words: Zero-Divisor Graph, Poset, Chromatic Number, Diameter, Girth, Planar Graph, Complete Partite Graph, Compact Graph, Reduced Semigroup.

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

The Zero-divisor Graphs of Posets

Zohreh Abdolahiyan

Supervisor

Dr. Mahdi Reza Khorsandi

October 2015