دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

تحلیل و بررسی مدل p—میانه‌ی گرانشی

دانشجو: **مسعود کرمی**

استاد راهنما:

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

استاد مشاور:

دکتر جعفر فتحعلی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

دی ماه ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر دلسوز

مادر مهربان

و همسر صبور و فداکارم

قدردانی و تشکر

سپاس خداوند یکتایی را که در تمام مراحل زندگی مرا یاری نمود و به من نیروی تلاش و همتی عطا فرمود تا این مرحله از زندگی را نیز با موفقیت به اتمام برسانم. از پدر و مادر عزیزم که در تمام این مدت یار و یار و مشوق من بودند تشکر و قدر دانی می‌نمایم. بدون شک اگر صبر و مهربانی مادرم، حمایت‌های بی دریغ پدرم ، دلگرمی‌ها پشتیبانی‌های همسرم و همدلی برادر و خواهرانم نبودند هیچ‌یک از این امور میسر نبود.

در این‌جا لازم می‌دانم از تمامی کسانی‌که مرا در این راه یاری نموده‌اند تشکر و قدردانی داشته باشم. خصوصاً از کمک‌ها و راهنمایی‌های استاد راهنما و استاد مشاور ارجمندم آقایان دکتر احمد نزاکتی و دکتر جعفر فتحعلی که در تمام مراحل تدوین مرا یاری نموده‌اند کمال تشکر و قدر دانی را می‌نمایم.

همچنین از آقایان دکتر صادق رحیمی شعرباف و دکتر مهدی زعفرانیه که قبول زحمت نموده‌اند و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفته‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم. در پایان لازم می‌دانم از تمامی اساتید گروه ریاضی که افتخار شاگردی آن‌ها را داشته‌ام و همچنین از دوستان خوبم که در این مدت به شکل‌های مختلف به اینجانب کمک نموده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم و موفقیت روزافزونشان را از درگاه ایزد منان خواستارم.

چکیده

مدل‌های مکان‌یابی در اصل با مکانیابی دفاتر، تأسیسات و دیگر واحدهای صنعتی و غیر صنعتی سر و کار دارد. یک شاخه‌ی تئوری مکانیابی با تعیین محلّ واحدهای تجاری و غیر تجاری که در یک فضای رقابتی فعّالیّت می‌کنند، در ارتباط است. سرویس‌دهنده‌ها با یک هدف ماکزیمم‌سازی، برای جذب متقاضیان و به‌دست آوردن سهم بازار با یکدیگر به رقابت می‌پردازند. بنابراین عوامل کلیدی مؤثر در انتخاب سرویس‌دهنده بسیار مورد توجه هستند. تابع هدف مرسوم برای ماکزیمم‌سازی، سهم بدست آمده از بازار توسّط سرویس‌دهنده‌هاست.

هدف تمام مدل‌های مکانیابی از نوع رقابتی، پیش‌بینی و تخمین سهمی از بازار است که توسط دیگر سرویس‌دهنده‌ها جذب شده است. بهترین مکان برای سرویس‌دهنده‌ی جدید مکانی است که سهم بازار در آن‌جا ماکزیمم شود. مدل‌های اولیّه بنابر اصلی‌ترین فرض در رابطه با رفتار متقاضیان پایه‌ریزی شده‌اند. ساده‌ترین مدل بر پایه‌ی فرض «مجاورت» است. یعنی متقاضیان از نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده‌ای که نیازهای آن‌ها را برطرف کند، سرویس می‌گیرند. یکی از این مدل‌ها، مدل p—میانه‌ی استاندارد است. در این مدل فرض شده است که هر متقاضی، نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده نسبت به خودش را انتخاب می‌کند و همچنین تمام متقاضیان قدرت جذب و کشش یکسانی دارند که این حالت در واقعیّت به ندرت اتّفاق می‌اُفتد، مگر این‌که متقاضیان طبق دستوری به نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده هدایت شوند یا پس از کامل کردن اطّلاعاتشان در مورد فاصله، سرویس‌دهنده را در یک حالت نسبی انتخاب کنند. هنگامی‌که سرویس‌دهنده‌ها دارای قدرت جذب و کشش یکسانی نباشند، فرض مجاورت برقرار نخواهد بود. در این حالت متقاضیان مبنای انتخاب خود را روی قدرت جذب سرویس‌دهنده قرار می‌دهند که بوسیله‌ی یک تابع سود نشان داده می‌شود. این تابع سود ترکیبی از

ویژگی‌های سرویس‌دهنده و فاصله تا سرویس‌دهنده است. در مطالعات بعدی نشان داده شد احتمال اینکه یک متقاضی، فروشگاهی را برای خرید انتخاب کند، نسبت مستقیم با وسعت فروشگاه و نسبت عکس با توانی از فاصله تا آن فروشگاه دارد. معمولاً متقاضیان، تنها نگران نزدیکی تا سرویس‌دهنده نیستند، بلکه از عوامل دیگری نیز برای انتخاب سرویس‌دهنده‌ی مورد نظرشان بهره می‌گیرند. آن‌ها به‌جای این‌که به نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده مراجعه کنند، سرویس‌دهنده‌ای را انتخاب کردند که بیشترین سود رابرای آن‌ها دارد. در واقع، فرض «مجاورت» با عوامل دیگری که «واقع‌بینانه» تر و «تحقّق‌گرایانه» ترند جابه‌جا می شود. اوّلین مدلی که به متقاضیان این امکان را داده است تا بین انتخاب‌های خود از سرویس‌دهنده‌ها، بهترین آنها را نسبت به هزینه‌ی جابه‌جایی تا آن برگزینند، در مقاله‌ای به نام «اصل گرانش خرده‌فروشی‌ها» که بر اساس قانون گرانش نیوتون بود، ارائه شد. این اصل در سال‌های اخیر برای مسئله $p-$میانه با عنوان $p-$میانه گرانشی تعمیم داده شده است. در این پایان‌نامه قصد داریم مدل‌هایی را که بر اصل اخیر استوار است، بخصوص مدل $p-$میانه گرانشی، مورد تحلیل و برّرسی قرار دهیم.

کلید واژه: $p-$میانه؛ مسائل مکانیابی رقابتی؛ مدل گرانشی؛ اصل هاف؛ مکانیابی و تخصیص

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

[۱] کرمی، م.، حیدری، م.، نزاکتی رضازاده، ا.، (۱۳۸۸)، «مدل p–میانه گرانشی با وزن‌های فازی»، دوّمین کنفرانس بین المللی تحقیق در عملیات ایران، بابلسر، دانشگاه مازندران.

[**2**] Nezakati, Rezazade, A., Fathali, J., Karami, M., (2010). "A new model for gravity p-median problem" *23RD INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE JANGJEON MATHEMATICAL SOCIETY*, AHVAZ-IRAN.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

فصل ۱

مکانیابی

۱–۱ مقدمه

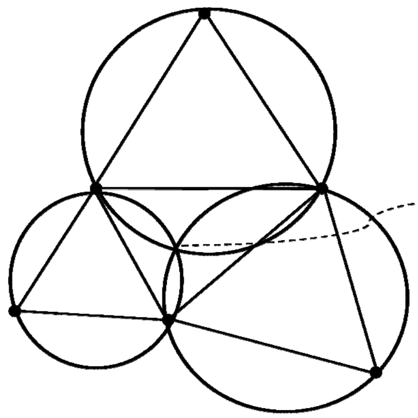
زندگی روزمرّه‌ی ما با بسیاری از مسائل مکانیابی و تعیین محلّ استقرار اشیاء در ارتباط است. به عنوان مثال پیدا کردن مکانی قابل دسترسی برای قرار دادن یک مداد روی یک میز، یا یافتن مکان‌هایی برای قرار دادن بیش از ۱۰۰۰۰۰ ترانزیستور روی یک ریزتراشه‌ی رایانه‌ای از آن جمله‌اند. در حقیقت فلسفه‌ی پیدایش مسائل مکانیابی در جواب این سؤال است که شیئ یا اشیائی به‌نام سرویس‌دهنده را کجا قرار دهیم. اشیائی که محلّ قرار گرفتن آن‌ها مشخّص شده‌اند را سرویس‌دهنده‌های موجود[۱] می‌نامیم. تعریفی از فاصله بین سرویس‌دهنده‌ای که قرار است محل آن تعیین شود وسرویس‌دهنده‌های موجود، نمایشی از یک اندازه به مفهوم ریاضی است که منجر به ایجاد و شکل‌گیری یک تابع هدف می‌شود. در حالت کلّی، مکانیابی مراکز را می‌توان این‌گونه تعریف کرد: انتخاب مکان برای یک یا چند سرویس‌دهنده با در نظر گرفتن سایر سرویس‌دهنده‌ها و محدودیّت‌های موجود، به گونه‌ای که هدف ویژه‌ای بهینه گردد. هدف می‌تواند هزینه حمل و نقل، ارائه خدمات عادلانه به مشتریان، به‌دست آوردن سهم بیشتری از بازار فروش و غیره باشد. در اوایل قرن هفدهم تلاش‌های انجام شده در حلّ مسائل مکانیابی منجر به طرح یک مسأله توسط فرما[۲] شد. به این صورت که فرض کنید سه نقطه در صفحه داریم. می‌خواهیم نقطه‌ی چهارم را به‌گونه‌ای بیابیم که مجموع فاصله‌های آن تا سه نقطه‌ی داده شده کمینه شود. توریچلی[۳] قبل از سال ۱۶۴۰ مشاهده کرد اشتراک دایره‌هایی که بر مثلث‌های متساوی‌الاضلاعِ بوجود آمده از هر ضلع مثلثِ ایجاد شده از سه نقطه‌ی داده شده، محاط باشند، نقطه‌ی بهینه است. به همین دلیل نقطه‌ی بهینه را نقطه‌ی توریچلی می‌نامند(شکل (۱–۱) را مشاهده کنید). هینن[۴] در سال ۱۸۳۴ نشان داد

[۱] Existing facility

[۲] Fermat

[۳] Torricelli

[۴] Heinen



شکل ۱—۱: نقطه‌ی بهینه‌ی توریچلی

خاصیّت توریچلی در حالت کلّی برقرار نیست. هنگامی‌که سه نقطه روی گوشه‌های یک مثلث شامل یک زاویه‌ی داخلی بزرگتر یا مساوی ۱۲۰ درجه قرار داشته باشند، رأس این زاویه نقطه‌ی مینیمم است. سیمسون[۵] در یکی از مقالات خود این مسأله را با مینیمم کردن فاصله‌ی وزنی تا سه نقطه‌ی داده شده تعمیم داد.

وبر[۶] در سال ۱۹۰۹ این مسأله را با تئوری مکانیابی در صنعت ترکیب کرد و اوّلین تعریف مسأله مکانیابی را بصورت کاربردی و مدرن ارائه داد. ریلی[۷] (۱۹۳۱) از جمله کسانی بود که مسأله‌ی مکانیابی را با تعیین محلّ تأسیسات و واحدهای صنعتی ترکیب کرد. در اوایل ۱۹۶۰ تعمیم و توسعه‌ی مسأله‌ی وبر به تعداد بیشتری نقطه‌ی تقاضا منجر به پیدایش مسأله‌ی معروف در تئوری مکانیابی شد.

هدف p—میانه استاندارد یافتن مکان‌هایی برای p سرویس‌دهنده است به‌طوری‌که میانگین فاصله‌ی هر متقاضی تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به آن مینیمم شود. حکیمی[۸][۱۴](۱۹۶۴) مطالعات جدی را

---

[۵] Simpson

[۶] Weber

[۷] Reilly

[۸] Hakimi

بر روی مسأله‌ی مکانیابی انجام داد و تابع هدف این مسائل را به صورت کمترین مجموع [۹] و مینیماکس [۱۰] مطرح کرد. او همچنین مسائل مکانیابی را بر روی شبکه‌ها نیز بررسی کرد.

اولین طبقه بندی مدل‌های مختلف مکانیابی توسط هندلر [۱۱] و میرچندانی [۱۲] ارائه شد[۱٦]. همچنین طبقه بندی های دیگری در این زمینه توسط کراروپ [۱۳] و پروزن [۱۴] [۲۷]، هانسن [۱۵] و همکاران [۱۷]، میرچندانی و فرانسیس [۱٦] [۲۸]، فرانسیس و همکاران [۱۲]، اُون [۱۷] و دسکین [۱۸] [۳۱]، اسکاپارا [۱۹] و اسکاتلا [۲۰] [۳٦]، درزنر [۲۱] و هاماخر [۲۲] [۸] انجام شده است.

۱—۲ طبقه بندی مسائل مکانیابی

مدل‌های‌مکانیابی را می‌توان به روش‌های متفاوتی دسته بندی کرد. یکی از مشخصه‌های دسته‌بندی عبارت است از هدفی که یک مسأله مکانیابی خاص آن‌را دنبال می‌کند. هدف یک مسأله‌ی مکانیابی می‌تواند متناسب با تعداد سرویس‌دهنده‌های موجود، تابع تصمیم‌گیری و متقاضیان باشد[۱۱]. در حالت

[۹] Minisum
[۱۰] Minimax
[۱۱] Handler
[۱۲] Mirchandani
[۱۳] Krarup
[۱۴] Pruzan
[۱۵] Hansen
[۱٦] Francis
[۱۷] Owen
[۱۸] Daskin
[۱۹] Scaparra
[۲۰] Scutella
[۲۱] Drezner
[۲۲] Hamacher

کلی مهمترین مؤلفه‌ها و عناصر یک مدل مکانیابی عبارتند از:

- فضایی که مسأله روی آن تعریف می‌شود.
- تعداد سرویس‌دهنده‌های جدید که لازم است محل قرار گرفتن آن‌ها را تعیین کنیم.
- تعداد سرویس‌دهنده‌های موجود.
- تابع تصمیم‌گیری[۲۳].
- متقاضیان.

طبقه‌بندی‌ها بر اساس مشخصه‌های گوناگونی صورت می‌پذیرند. یکی از این مشخصه‌ها فضایی است که مسأله روی آن تعریف می‌شود. بر این اساس، سه نوع مسأله‌ی مکانیابی وجود دارد:

۱) مسأله مکانیابی تسهیلات گسسته، یعنی مدل‌هایی که در آن‌ها مکان سرویس‌دهنده‌ها از پیش تعیین شده قرار بگیرند.

۲) مسأله مکانیابی تسهیلات پیوسته، یعنی مدل‌هایی که در آن‌ها مکان سرویس‌دهنده‌ها در فضای $\mathbb{R}^d$ با هر بعد d قرار دارد.

۳) مسأله مکانیابی تسهیلات روی شبکه.

چهار مسأله‌ی مقدماتی در تئوری مکانیابی گسسته وجود دارد[۲۸]:

- مسأله‌ی p—میانه[۲۴]

[۲۳] The decision maker's objective

[۲۴] p—میانه

- مسأله‌ی p–مرکز[۲۵]
- مسأله‌ی مکانیابی با ظرفیت نامحدود[۲۶](UFLP)
- مسأله‌ی تخصیص درجه دو [۲۷](QAP)

در این مسائل به دنبال مکانی(مکان‌هایی) برای یک (چند) سرویس دهنده و تخصیص نقاط به آن (آن‌ها) هستیم. به همین دلیل اغلب آن‌ها را مسائل مکانیابی و تخصیص می‌نامیم.
مسأله‌ی مکانیابی p–میانه یکی از زیر شاخه‌های رده‌ی وسیع‌تری از مسائل با نام مسائل مکانیابی و تخصیص کمترین مجموع[۲۸] است. مدل مکانیابی با ظرفیت نامحدود یکی از مدل‌های ساده‌ی مسأله‌ی مکانیابی روی صفحه است که از نظر تابع هدف و روش حل، مشابه مدل p–میانه است. تنها تفاوتی که این دو مسأله با یکدیگر دارند اولاً در هزینه‌ی ثابت برای تعیین مکان یک سرویس‌دهنده روی یک گره در شبکه ثانیاً در محدودیّت برای بیشینه‌ی تعداد سرویس‌دهنده‌هاست. مسأله‌ی تخصیص درجه دو نیز برای مکانیابی و تخصیص استفاده می‌شود، اما حلّ آن از نظر تئوری، کمی دشوارتر از مسأله‌ی p–میانه است.
دسته‌بندی دیگر بر اساس تعداد مکان‌هایی است که باید برای سرویس‌دهنده‌های جدید بیابیم. این دسته‌بندی شامل دو گروه است:

- مکانیابی تک وسیله‌ای[۲۹]

---

[۲۵] p-Center problem

[۲۶] Uncapacitated facility location problem

[۲۷] Quadratic assignment problem

[۲۸] Minisum location-allocation models

[۲۹] Single facility location

- مکانیابی چند وسیله‌ای[۳۰]

مدل‌های مکانیابی از نظر تعداد سرویس‌دهنده‌های موجود به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- مدل‌هایی که در آن‌ها تعداد سرویس‌دهنده‌های جدیدی که باید توسط تابع تصمیم تعیین شوند، عدد ثابتی است.

- مدل‌هایی که در آن‌ها تعداد سرویس‌دهنده‌های جدید در تابع تصمیم به عنوان یک متغیر به‌کار رفته است.

با فرض این‌که سرویس‌دهنده یا سرویس‌دهنده‌های جدیدی که محل آن‌ها تعیین می‌شود همگی مطلوب باشند و هیچ‌کدام زیان‌بار نباشند، دسته‌بندی مسائل مکانیابی از نظر تابع تصمیم‌گیری بصورت زیر است:

- کمینه‌سازی تابعی از فاصله

- بیشینه‌سازی تابعی از فاصله

- متعادل‌سازی تابعی از فاصله

توجه داشته باشید بدون در نظر گرفتن مطلوبیت یا زیان‌بار بودن سرویس‌دهنده‌ها، این دسته بندی بصورت گسترده‌تری به شکل زیر است:

- مسائلی با تابع هدف کششی و جذب[۳۱]: این طبقه شامل مسائلی است که در آن طراح قصد دارد مکانی نزدیک به متقاضیان را برای سرویس‌دهنده‌ها بیابد. قدیمی‌ترین مسائل مکانیابی مانند مسأله‌ی وبر، مکانیابی میانه، مکانیابی مرکز و مکانیابی پوششی از این دسته‌اند.

[۳۰] Multifacility location

[۳۱] Pull objective

• مسائلی با تابع هدف فشاری و طَرد[۳۲]: این دسته شامل مسائلی است که دارای سرویس‌دهنده‌های نامطلوب و ناخوشایند هستند.

• مسائلی با هدف متعادل سازی تابعی از فاصله[۳۳]: هدف این‌گونه مسائل برقراری تعادل است.

کمینه سازی مجموع فاصله‌های وزن‌دار [۳۴]به شرطی‌که توابع هزینه خطی باشند، یکی از اهداف بدیهی طرح مسائل مکانیابی است. مسائل مکانیابی تک وسیله‌ای با تابع هدف کمترین مجموع روی صفحه به مسأله‌ی وبر و یا مسأله‌ی اشتاینر—وبر اشاره دارد. تابع هدف مسأله، محدب و تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر است. این مسأله اولین بار توسط ویزفیلد[۳۵] با یک روش تکراری حل شد. با جایگزین کردن توان دوم فاصله‌ی اقلیدسی، یک شکل بسته از جواب نتیجه شد. در این حالت نقطه‌ی بهینه معادل با مرکز گرانشی[۳۶] است.

حالت $p > ۱$ برای این مسأله را معمولاً مسأله‌ی چند وضعیتی وبر[۳۷] می‌نامند که خود شامل دو دسته است:

• سرویس دهنده‌ها و متقاضیان مخصوص هر سرویس‌دهنده مشخص و معین هستند.

• مشخص نیست کدام متقاضی یک سرویس‌دهنده‌ی خاص را انتخاب می‌کند، مگراین‌که مکان سرویس‌دهنده‌ها دقیقاً مشخص شود.

---

[۳۲] Push objective

[۳۳] Balancig objective

[۳۴] Minisum objectives

[۳۵] Weiszfeld

[۳۶] Center of gravity

[۳۷] Multi-Weber problem

حالت دوم در دسته‌بندی بالا به رشد و توسعه‌ی دو موضوع بسیار مهم مکانیابی سرویس‌دهنده‌ها و تخصیص متقاضیان منجر شد. روش تکراری کوپر[۳۸] برای حل این‌گونه مسائل، یک روش ابتکاری است که به‌طور مختصر به‌صورت زیر است:

۱) به‌عنوان نقطه‌ی شروع، p مکان برای p سرویس‌دهنده به‌طور تصادفی انتخاب کنید؛

۲) هر متقاضی را به نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به آن اختصاص دهید؛

۳) با هدف بهینه سازی، مکان هر سرویس‌دهنده‌ای که متقاضیان به آن اختصاص داده‌شده‌اند را دوباره تعیین کنید؛

۴) به مرحله‌ی یک برگردید و این روش را تا زمان همگرایی ادامه دهید.

یکی از مشکلات مربوط به مسأله‌ی چند وضعیتی وبر این است که تابع هدف آن نه محدب و نه مقعر است. حکیمی نشان داد تابع هدف کمترین مجموع برای این‌گونه مسائل روی گراف، در حالی‌که تقاضای مشتریان روی گره‌ها به‌عنوان نقاط تقاضا درنظر گرفته شده است، تابعی مقعّر است و بنابراین مقدار مینیمم خود را روی مرزها (رأسی از گراف) اختیار می‌کند. این ویژگی به «**خاصیت حکیمی**[۳۹]» معروف است. خاصیت حکیمی برای p—سرویس‌دهنده ($p > ۱$) نیز در مسأله‌ی کمترین مجموع برقرار است. این ویژگی از آن نظر بسیار مفید است که به کاربر این توانایی را می‌دهد تا جستجوی خود برای نقاط بهینه را روی رأس‌ها محدود کند. این ویژگی برای مسأله‌ی ۱—میانه منجر به یک روش حل ساده از مرتبه‌ی $O(n^۲)$ شد. مسائل p—میانه با $p > ۱$ از نوع NP—سخت[۴۰] هستند.

[۳۸] Cooper

[۳۹] Hakimi property

[۴۰] NP-hard

نوع بسیار مهم دیگر از حالت دوم، مسائل کمترین بیشینه[۴۱] است که اشاره به مسائلی دارد که در تلاش هستند تا بیشترین فاصله‌ی یک متقاضی تا سرویس‌دهنده‌ی مورد نظرش را به کمترین مقدار ممکن برسانند. مسأله‌ی p−مرکز از این‌گونه است. انواع متفاوتی از این دسته مسائل موجود هستند که در این‌جا موضوع بحث نیست.

۱−۳ انتخاب‌های یک متقاضی در مدل مکانیابی رقابتی

در دنیای امروزی با رقابت‌های شدید، شرکت‌ها می‌توانند با قرار دادن چند فروشگاه در یک بازار فروش، به یک بازار قدرتمند دست پیدا کنند. موضوع مکانیابی رقابتی در فضای گسسته یک زیرشاخه از مدل‌های مکانیابی و تخصیص است که در آن، مکان سرویس‌دهنده‌هایی که برای متقاضیان رقابت می‌کنند را تعیین می‌کند و متقاضیان را بر اساس الگوی پیش‌بینی شده، به سرویس‌دهنده‌ها اختصاص می‌دهد. یک مدل مکانیابی رقابتی به‌گونه‌ای است که در آن بیش از یک شرکت برای رقابت با دیگر شرکت‌ها بر سر بازار فروش وجود دارد. مکان مورد نظرِ یک شرکت نه‌تنها روی سهم به‌دست آمده از بازار، بلکه روی سهمی از بازار که توسط دیگر شرکت‌های رقیب به‌دست می‌آید، تأثیر می‌گذارد[۳۵]. موضوع انتخاب فروشگاه توسط متقاضیان[۴۲] یکی از موضوعات مهم در علم اقتصاد است و در مورد متغیرهای کلیدیی بحث می‌کند که یک متقاضی هنگام خرید از یک فروشگاه خاص در نظر می‌گیرد. در این نظریه متقاضیان معمولاً به این نکته توجه نمی‌کنند که کدام فروشگاه به آن‌ها نزدیک‌تر است، بلکه عوامل دیگری را در تصمیم‌گیری برای خرید از یک فروشگاه در نظر می‌گیرند.

این موضوع به سه گروه تقسیم می‌شود: گروه اول شامل مدل‌هایی بر اساس فرض اصلی و قانونی رفتار

[۴۱] Minimax

[۴۲] Store-choice literature

انتخابی متقاضیان است. ساده‌ترین مدل از این نوع، بر پایه‌ی فرض **نزدیک‌ترین مرکز**(که گاهی فرض مجاورت نیز نامیده می‌شود) است. یعنی متقاضیان از نزدیک‌ترین فروشگاهی که احتیاجات آن‌ها را برآورده کند، سرویس می‌بینند. اما این نظریه از لحاظ تجربی کارآمد نبود. چرا که متقاضیان بهترین فروشگاه را نسبت به هزینه‌ی جابه‌جایی تا آن انتخاب کردند. ریلی اولین شخصی بود که به این نتیجه رسید. او در مقاله‌ای با نام **قانون گرانش فروشگاه‌ها**، که بر اساس قانون گرانش نیوتن بود، نشان داد احتمال این‌که یک مشتری از یک فروشگاه خرید کند، نسبت مستقیم با قدرت جذب آن و نسبت عکس با توانی از فاصله تا آن فروشگاه دارد. مدل‌های گرانشی که از بین این تحقیقات ارائه شد، دارای مشکلات و محدودیت‌هایی است که در زیر به چند نمونه از آن‌ها اشاره شده است.

- این مدل‌ها تنها برای فروشگاه‌های بزرگ مانند عمده‌فروشی‌ها به‌کار می‌روند.
- برای خرید کالاهای غیرمعمول استفاده می‌شوند.
- متقاضی را محدود به انتخاب یک فروشگاه می‌کردند.

گروه دوم شامل مدل‌هایی است که از اطلاعات به‌دست آمده از رفتار گذشته‌ی متقاضیان برای درک جزئیات پویایی رقابت، و این‌که چطور متقاضیان فروشگاه‌های مورد نظر خود را انتخاب می‌کنند بهره می‌گیرند. هاف[۴۳][۲۱][۲۰] اولین کسی بود که این مدل را برای مطالعه‌ی فروشگاه‌های کوچک مورد استفاده قرار داد. او یک روش برای پیش‌بینی سهمی از بازار که توسط سرویس‌دهنده‌های رقیب و همکار به‌دست می‌آید، بر اساس مدل گرانشی ارائه داد. او همچنین اصل بدیهی **لوس** [۴۴] در انتخاب گسسته

[۴۳] Huff

[۴۴] *Luce*، بر طبق این اصل ممکن است متقاضیان بیش از یک فروشگاه را برای خرید در نظر بگیرند. در این حالت احتمال خرید از یک فروشگاه برابر است با نسبت سود حاصل از خرید از آن فروشگاه به مجموع سود به‌دست آمده از خرید از تمام فروشگاه‌های مورد نظر متقاضی.

را برای مدل گرانشی معرفی کرد. ناکانیشی و کوپر[۴۵] [۲۹] با معرفی ضریب MCI مدل هاف را بهبود بخشیدند. این ضریب که بصورت نشان داده شده در زیر است، جایگزین عامل وسعت در مدل هاف شد.

$$\rho_{ij} = \Pi_{k=1}^{s} A_{kij}^{\beta_k} / \sum_{j \in J} \Pi_{k=1}^{s} A_{kij}^{\beta_k}. \qquad (1-1)$$

که در آن $i \in I$ اندیس و I مجموعه‌ای از گروه متقاضیان است، $j \in J$ اندیس و J مجموعه‌ای از فروشگاه‌ها است، ρ_{ij} برابر است با احتمال این‌که متقاضیان واقع در مکان i، از فروشگاه j خرید کنند، A_{kij} برابر است با k اُمین مشخصه‌ی جذب متقاضیان در مکان i مربوط به فروشگاه j ؛ $k = 1, ..., s$.
β_k تمایل یک متقاضی برای خرید از یک فروشگاه و مشخصه‌ای از تابع تأخیر فاصله می‌باشند .
گروه سوم شامل مدل‌هایی است که مستقیماً از سود استفاده می‌کنند. این روش‌ها به‌جای مشاهده‌ی انتخاب‌های گذشته، از ارزش‌گذاری روی ویژگی‌های فروشگاه‌ها توسط متقاضیان برای اصولی کردن تابع سود استفاده می‌کنند.

۱—۴ مدل‌های مکانیابی و تخصیص

مدل‌های مکانیابی و تخصیص چون می‌توانند هم مکانیابی و هم تخصیص را تحلیل و دامنه‌ی تأثیر سیستم را برای محل فروشگاه‌های خاص بررسی کنند، ابزار مناسبی برای طرح و برنامه‌ریزی مکان فروشگاه‌ها هستند. این مدل‌ها روش‌هایی را برای ارزیابی مکان فروشگاه‌ها ارائه داده و مکان‌هایی را که اهداف مشترکی مانند سهم به‌دست آمده از بازار یا سود را بیشینه می‌سازد، جستجو می‌کنند.
با پیشرفت سریع روش‌های محاسبه و آگاهی از کاربرد این مدل‌ها در دنیای واقعی، تحقیقات روی

[۴۵] Nakanishi and Cooper

مدل‌های مکانیابی و تخصیص به‌سرعت افزایش یافت. مدل‌های کاربردی مکانیابی و تخصیص به پنج گروه طبقه‌بندی می‌شوند:

- مدل p—میانه
- مدل پوششی [۴۶]
- مدل p—انتخاب [۴۷]
- مدل‌هایی بر اساس ترجیح متقاضی [۴۸]
- مدل معافیت یا حق انتخاب [۴۹]

۱—۴—۱ مدل p—میانه

گراف کامل وزن‌دار و بدون جهت $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که V مجموعه‌ی رأس‌ها و E مجموعه‌ی یال‌هاست. به هر یال عددی به‌عنوان وزن آن یال نسبت داده می‌شود که در حالت ساده برابر است با $d(v_i, v_j)$ یعنی کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین رأس‌های v_i و v_j که دو سر یال هستند. همین‌طور به هر رأس نیز یک وزن w_i نسبت می‌دهیم. مسأله‌ی p—میانه اغلب روی شبکه تعریف می‌شود. حکیمی[۱۴] نقطه‌ی m را نقطه‌ی میانه‌ی مطلق [۵۰] گراف G تعریف کرد اگر برای هر رأس v_j روی G رابطه‌ی زیر

[۴۶] Covering Model

[۴۷] p-Choice Models

[۴۸] Consumer Preference Based Models

[۴۹] Franchise Models

[۵۰] Absolute Median

برقرار باشد:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i d(v_i, m) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i d(v_i, v_j) \ . \qquad (۱-۲)$$

بعدها این مفهوم برای مسأله‌ی معروف $p-$میانه‌ی امروزی تعمیم داده شد. فرض کنید V_p مجموعه‌ای از p رأس روی G باشد. همچنین فرض کنید $d(v_i, V_p)$ و $d(v_i, V_i^*)$ به ترتیب برابر با کوتاهترین مسیر از رأس v_i تا نزدیک‌ترین عضو در V_p و V_p^* باشند.

تعریفی از $p-$میانه بصورت زیر است:

مجموعه‌ای از نقاط V_p^* را $p-$میانه گوییم اگر برای هر V_p در G داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{n} w_i d(v_i, V_p^*) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i d(v_i, V_p) \ . \qquad (۱-۳)$$

واژه‌ی $p-$میانه به مجموعه‌ای از رأس‌ها مانند V_p اشاره دارد. مجموعه‌ی V_p، رأس‌های $p-$میانه نامیده می‌شوند. $p-$میانه به‌طور ذاتی یک گراف را افراز می‌کند؛ چرا که برای هر رأس m_j از $p-$میانه، مجموعه‌ای از رأس‌ها موجود است به‌طوری‌که نسبت به هر رأس دیگری، به m_j نزدیک‌تر است.

تعریف امروزی و پرکاربرد مسأله‌ی $p-$میانه روی شبکه، بصورت گفته شده در زیر است. شبکه‌ی $N = (V, E)$ را که در بالا تعریف شده است در نظر بگیرید. فرض کنید تقاضاها به‌صورت مجموعه‌ای از نقاط تقاضا(گره‌هایی در شبکه) به‌صورت یک وزن به هر نقطه (گره) نسبت داده شوند. در مسأله‌ی $p-$میانه روی شبکه‌ها هدف پیدا کردن مجموعه $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ شامل مکان p سرویس دهنده روی شبکه $N = (V, E)$ است بطوری که اگر هر رأس v_i دارای وزن w_i باشد، مجموع فاصله‌های وزنی از این مجموعه تا تمام رئوس روی شبکه‌ی N مینیمم شود. به عبارتی، در این حالت هدف کمینه کردن

مجموع وزنی فاصله‌ها خواهد بود. یعنی

$$\min\ f(x) = \sum_{v_i \in N} w_i d(X, v_i)$$

فاصله هر رأس $v \in V$ از مجموعه‌ی X بصورت فاصله v تا نزدیک‌ترین وسیله در X تعریف می‌شود. یعنی:

$$d(X, v) = \min_{x_i \in X}\ \{d(x_i, v)\}$$

و $d(v_i, v_j)$ فاصله کوتاهترین مسیر بین دو رأس v_i و v_j روی شبکه می‌باشد.

کریو[۵۱] و حکیمی [۲۴] در سال ۱۹۷۹ ثابت کردند که p—میانه در حالت کلی NP—سخت[۵۲] است. حکیمی نشان داد در حالتی‌که وزن‌ها نامنفی باشند، همواره مجموعه‌ای از p رأس وجود دارد که تابع هدف p—میانه را کمینه می‌کند. او نمایشی گسسته از یک مسأله‌ی پیوسته را با محدود کردن فضای جستجو به رأس‌ها، ارائه داد. این نتیجه به «**خاصیت حکیمی**» یا «**خاصیت بهینگی رأسی** » معروف است. پس با توجه به قضیّه حکیمی، برای بدست آوردن جواب بهینه کافی است جواب بهینه را روی مجموعه رأسهای شبکه جستجو کنیم. کمکی که قضیّه حکیمی در حل مسائل مکانیابی روی شبکه‌ها انجام داد شبیه کار دانتزیگ[۵۳]در مسائل برنامه‌ریزی خطی است. به عبارتی به کمک این قضیّه مجموعه جواب های بهینه، از یک مجموعه‌ی نامتناهی به یک مجموعه‌ی متناهی کاهش پیدا می‌کند. با استفاده از این نتیجه ریول و سواین[۵۴][۳۳] در سال ۱۹۷۰ اولین فرمولبندی مسأله p—میانه را با برنامه‌ریزی خطی صفر و یک ارائه دادند. یک مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک برای مسأله p—میانه

[۵۱] Kariv

[۵۲] NP-hard

[۵۳] Dantzig

[۵۴] ReVelle & Swain

بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&min\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i d_{ij} x_{ij} \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,...,n \qquad (a) \\
&\quad x_{ij} \le y_j \qquad i = 1,...,n\ j = 1,...,n \qquad (b) \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} y_j = p \qquad (c) \\
&\quad x_{ij} = 0 \vee 1 \qquad i = 1,...,n\ j = 1,...,n \qquad (d) \\
&\quad y_j = 0 \vee 1 \qquad j = 1,...,n \qquad (e)
\end{aligned} \qquad (۴-۱)$$

در فرمول فوق متغیرهای x_{ij} و y_j بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر راس } i \text{ به سرویس دهنده } j \text{ اختصاص داده شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر راس } j \text{ بعنوان مکان سرویس دهنده انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

در واقع x_{ij} نقش تخصیص را اجرا می‌کند. یعنی مجموعه نقاط تقاضایی را که هر سرویس‌دهنده سرویس‌دهی می‌کند را مشخص می‌کند. هنگامی‌که سرویس‌دهنده‌ی j نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به نقطه تقاضای i باشد، x_{ij} مقدار یک، و در غیر این‌صورت مقدار صفر را اختیار می‌کند. بنابراین تنها عاملی که در تابع هدف مورد توجه است، فاصله‌ی هر متقاضی تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده است.

در مدل (۱−۴) مجموعه قیدهای (a) بیانگر این مسأله هستند که هر رأس باید تنها به یک سرویس دهنده اختصاص یابد. مجموعه قیدهای (b) نشان می‌دهند که رأس‌ها را تنها می‌توان به رأس‌هایی اختصاص داد که به عنوان مکان یک سرویس دهنده در نظر گرفته شده باشد، یعنی به ازای آن رأس $y_j = 1$ باشد. مجموعه قیدهای (b) را می توان با قیدهای $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le My_j$ جایگزین کرد که M یک عدد بزرگتر از $n - p + 1$ است. و محدودیت (c) نشان دهنده این مطلب است که p سرویس دهنده

مورد نیاز است .

در مسأله‌ی $p-$میانه همیشه فرض بر این است که هر متقاضی، نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به خود را انتخاب می‌کند. اگر متقاضیان در تحقّق بخشیدن به یک حکم و یا امر اجباری به سمت نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده هدایت شوند، یا زمانی‌که پس از کامل کردن اطلاعاتشان در مورد فاصله، سرویس‌دهنده را در یک حالت نسبی انتخاب کنند، ممکن است این فرض درست باشد. علاوه‌براین فرض شده است که سرویس‌دهنده‌ها دارای قدرت جذب یکسانی هستند. در واقعیت این حالت به ندرت برای تمام متقاضیان برقرار است. درزنر و درزنر[۳] فرض مجاورت را با فرض دیگری که واقعی‌تر است، جابه‌جا کردند. آنها قانون گرانشی را برای $p-$میانه به‌کار بردند. در فصل دوم به‌طور مفصل راجع به آن توضیح داده شده است.

۱-۴-۲ مدل پوششی

نوع دیگر از مدل‌های مکانیابی از لحاظ کاربرد و اهمیت برای فروشگاه‌ها مدل پوششی است. هدف مدل‌های پوششی تعیین مکانی برای سرویس‌دهی است به‌گونه‌ای‌که استفاده کنندگان بتوانند پس از طی یک فاصله یا صرف یک زمان گردش مشخص، به این مکان‌ها دست یابند. این مدل در حالت‌هایی‌که دسترسی، نقش کلیدی و مؤثری را در میزان استفاده از سرویس‌دهنده‌ها یا کیفیت کارهای تحویل داده‌شده ایفا می‌کند، بسیار مورد توجه است.

یکی از اولین مدل‌های پوششی ارائه شده، مربوط به مسأله‌ی مکانیابی پوشش مجموعه[55] یا$LSCP$ است. در این مدل فرض بر این است که متقاضیانی که مقدار فاصله‌ی بیشینه یا زمان سفر ثابتی از یک سرویس‌دهنده دارند، توسط آن سرویس‌دهنده به‌طور مناسب سرویس‌دهی نمی‌شوند و بنابراین به

[55] Location Set Covering Problem

این سرویس‌دهنده مراجعه نخواهند کرد. هدف این مدل یافتن کمترین تعداد و مکان سرویس‌دهنده‌های مورد نیاز برای سرویس‌دهی تمام متقاضیان تا یک فاصله یا زمان جابه‌جایی مشخص و معین است. از آن‌جایی‌که هزینه‌ی به‌کارگیری تعداد زیادی سرویس‌دهنده، ملزم به در نظر گرفتن هزینه‌ی مکانیابی سرویس‌دهنده‌های اضافی از طریق سود تولید شده از پوشش اضافی می‌باشد، بنابراین ممکن است فراهم کردن یک سرویس عمومی و فراگیر امکان‌پذیر نباشد. پس ممکن است طراح به‌جای یک پوشش فراگیر، در پی این هدف باشد که تعداد نقاط تقاضای پوشش داده شده توسط تعداد ثابتی سرویس‌دهنده را بیشینه کند. این مسأله به مسأله‌ی مکانیابی پوشش بیشینه[۵۶] ویا (MCLP) معروف است که توسط چرچ و ریول[۵۷] ارائه شد. مدل $MCLP$ به‌صورت روبرو است:

$$
\begin{aligned}
max\ z = \ & \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \\
s.t.\ & \\
& \sum_{j\in J} x_j = p \qquad (a) \\
& \sum_{j\in N_i} x_j \geq y_i \qquad (b)
\end{aligned}
\tag{۱--۵}
$$

۱--۴--۳ مدل p--انتخاب

فرآیند تخصیص در مدل‌های مکانیابی و تخصیص، الگوی خرید متقاضیان را شبیه‌سازی می‌کند. مدل p--میانه بر این فرض استوار است که هر نقطه‌ی تقاضا به نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده نسبت به خودش اختصاص داده می‌شود. پس سهم بازار به‌دست آمده توسط یک فروشگاه برابر است با

$$
\frac{\text{تقاضای قسمتی از بازار برای فروشگاه}}{\text{تقاضای کل بازار}}. \tag{۱--۶}
$$

[۵۶] Maximal Covering Location Problem

[۵۷] Church and ReVelle(1974)

فرض مجاورت نیز در مدل‌های پوششی با این قید اضافی که متقاضیان تنها به‌سمت سرویس‌دهنده‌ای می‌روند که شرط فاصله برای آن برقرار باشد، در نظر گرفته می‌شود. شرط لازم برای اصل مجاورت این است که تمام سرویس‌دهنده‌ها از نظر ارائه‌ی خدمات، در یک سطح باشند. پس سرویس‌دهنده‌ها تنها از طریق مکان‌هایشان شناسایی می‌شوند. با این حال دو سرویس‌دهنده‌ای که نوع مشابه‌ای از محصول را تولید می‌کنند، در عمل، محصولات را با کیفیت و قیمت متفاوتی به بازار روانه می‌کنند و این دلیل دیگری است برای این‌که متقاضیان غیر از نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده، به سرویس‌دهنده‌های مجاور نیز مراجعه می‌کنند. عدم حمایت و پشتیبانی از فرضیه‌ی مجاورت، محققان را وادار کرد تا به سراغ مدل‌های تصادفی روند. یعنی مدل‌هایی که علاوه بر ویژگی‌های فروشگاه شبیه کیفیت خدمات و اندازه و وسعت فروشگاه، فاصله تا فروشگاه را نیز در نظر گرفته بودند. همانطور که قبلاً هم دیده شد، هاف از جمله اولین کسانی بود که روش معین و مناسبی را برای قانونمند کردن نوع خاص گرانشی از مدل‌ها معرفی کرد. این مدل‌های تصادفی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\rho_{ij} = \frac{\frac{f(A_{ij})}{g(d_{ij})}}{\sum_{k \in K_j} \frac{f(A_{ij})}{g(d_{ij})}} \qquad (۷-۱)$$

که در آن A_{ij} اندازه‌ی جذب سرویس‌دهنده‌ی j برای متقاضی i، d_{ij} فاصله یا زمان طی شده برای متقاضی i تا سرویس‌دهنده‌ی j و k_j مجموعه‌ی انتخابی برای متقاضی iام است.

مجموعه‌ی مشخصه‌ها و ویژگی‌های فروشگاه، A_{ij}، باید شامل تمام خصوصیت‌های مربوط به مکان قرار گرفتن و خود فروشگاه باشد تا انتخاب متقاضیان را تحت تأثیر قرار دهد. به عنوان مثال جین و ماهاجان[۵۸] [۲۲] در تحقیقاتشان راجع به فروشگاه‌های مواد غذایی علاوه بر فاصله، از عامل‌هایی مانند وسعت فروشگاه، در دسترس بودن دستگاه کارت اعتباری، تعداد صندوق‌های اخذ پول و غیره برای

[۵۸] Jain and Mahajan

توصیف سهم به‌دست آمده از بازار توسط یک فروشگاه خاص استفاده کردند.

فرض کنید ρ_{ij} برابر است با احتمال این‌که متقاضی واقع در گره‌ی i، سرویس‌دهنده‌ی موجود در گره‌ی j را انتخاب کند. در این صورت مدل p—انتخاب به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} max\ z = \ & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_i p_{ij} x_j \\ s.t. & \\ & \sum_{j\in J} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I\ . \end{aligned} \tag{۱—۸}$$

از (۱—۸) می‌توان دید که مدل p—انتخاب، یک تعمیم بی قید و شرط از مدل p—میانه است. چرا که قید «همه یا هیچ»[59] از مسأله‌ی p—میانه در این‌جا به عنوان یک قید آزاد در نظر گرفته شده است و انتخاب متقاضیان بر اساس یک اصل انتخاب احتمالی انجام می‌شود. هرچند مسائل p—انتخاب و p—میانه در ساختار خیلی شبیه یکدیگرند، اما عموماً جواب‌های متفاوتی دارند.

۱—۴—۴ مدل‌هایی بر اساس ترجیح متقاضی

گروه چهارم از مدل‌های مکانیابی و تخصیص شامل مدل‌هایی است که مستقیماً با ترجیح و خواستِ متقاضی سر و کار دارند. تخصیص در این مدل‌ها بیشتر بر پایه‌ی ارزش‌گذاری روی تجربیات متقاضی در انتخاب‌های گذشته نسبت به مشاهده‌ی انتخاب‌هاست.

در این رابطه از متقاضیان خواسته می‌شود که به یک سری انتخاب‌های متعدد و متفاوت امتیاز دهند. سپس از این ارزش‌گذاری برای پیش‌بینی و چگونگی تخصیص استفاده می‌شود. این مدل‌ها بر یکی از مشکلات بزرگ مدل p—انتخاب، که به‌طور ساده می‌توان از آن با عنوان «مفهوم وابستگی» یاد کرد، غلبه می‌کند. این مدل‌ها به جای تحلیل و بررسی مدل‌های قبلی، از مفهوم ارزش‌گذاری و اولویت‌بندی

[59] All or Nothing

نظر متقاضیان در قانونمند کردن و تنظیم تابع هدف بهره می‌گیرند.

یکی از قدیمی‌ترین این مدل‌ها توسط پارکر و سرینیواسان[۶۰] پیشنهاد شد[۳۲]. آن‌ها در این مدل از«تحلیل هم‌پیوند[۶۱]» برای تعیین این‌که چه‌طور یک متقاضی ویژگی‌های متفاوتی از دغدغه‌های اولیه‌ی یک سرویس‌دهنده را اولویت‌بندی می‌کند، استفاده کردند.

۱—۴—۵ مدل حق انتخاب امتیاز

گروهی از مدل‌های پیشرفته مخصوص شرکت‌های دارای امتیاز حق انتخاب یا «حق استفاده از اسم تجاری» است به گونه‌ای‌که شرکت مادر(امتیاز دهنده) به امتیازات شخصی خود یک پروانه‌ی بهره‌برداری اختصاص می‌دهد تا با مبادله‌ی کالا و خدمات، به‌جای گرفتن حق‌الزحمه، علامت تجاری خود را به همراه اسم روی کالا درج کند. هرچند عملکرد شرکت‌های دارای حق انتخاب امتیاز در بسیاری از مواقع بسیار مشابه دیگر شرکت‌هاست اما تعدادی از مفروضات خاص در مکانیابی این فروشگاه‌ها در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال باید اهداف هر دوی امتیاز دهنده(سرویس دهنده) و امتیاز گیرنده(متقاضی) همزمان در نظر گرفته شود.

۱—۵ مدل‌های مکانیابی سرویس‌دهنده‌های رقابتی

یک زیرگروه از مدل‌های مکانیابی و تخصیص مربوط به مکانیابی انبارها، مخازن، واحدهای صنعتی و تجاری است که در یک بازار به رقابت می‌پردازند. این مدل‌ها در تلاش هستند تا سهمی از بازار که هر سرویس‌دهنده‌ی رقیب با هدف بهینه کردن مکانش جذب می‌کند را پیش‌بینی کنند. بهترین مکان برای

[۶۰] Parker and Srinivasan

[۶۱] Conjoint analysis

مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید مکانی است که سهم بازار در آن‌جا بیشینه باشد.

هتلینگ[62] اوّلین مقاله در زمینه‌ی یکی از شاخه‌های مکانیابی به‌نام «مکانیابی سرویس‌دهنده‌های رقابتی[63]» را ارائه داد که این مسأله بعدها توسّط حکیمی روی شبکه پیاده سازی شد[۱۹]. او مکان دو سرویس‌دهنده‌ی رقیب در یک بازارِ مشترک را مورد توجه قرار داد. همچنین با در نظر گرفتن توزیع قدرت خرید بصورت یکنواخت فرض را بر این نهاد که متقاضیان نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده را انتخاب می‌کنند. او همچنین مشاهده کرد هنگامی‌که تنها یک سرویس‌دهنده موجود باشد، هیچ رقابتی در بازار برای انتخاب سرویس‌دهنده وجود ندارد و تمام متقاضیان، مشتریِ این سرویس‌دهنده خواهند شد؛ امّا زمانی‌که یک سرویس‌دهنده‌ی رقیب در نقطه‌ی دیگری قرار گیرد، متقاضیانی که در نیمه‌ی راستِ عمود منصّف خطّ فاصل بین دو سرویس‌دهنده قرار دارند، سرویس‌دهنده‌ی سمت راست و دیگر متقاضیانی‌که در نیمه‌ی چپ عمود منصّف قرار دارند، سرویس‌دهنده‌ی دیگر را برمی‌گزینند. در این روش فرض شده است که سرویس‌دهنده‌ها قدرت جذب یکسانی دارند و همچنین متقاضی نزدیک به خود را جذب می‌کنند.

یک معیار معمول برای تعیین بهترین مکان برای سرویس‌دهنده‌ی جدید در بازار رقابت، سهم به‌دست آمده از بازاردر مکان آن سرویس‌دهنده است. روش‌های متعددی برای پیش‌بینی سهم به‌دست آمده از بازار و در نتیجه‌ی آن، انتخاب مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید بر اساس رابطه‌ی موجود بین چهار عامل زیر در یک محیط وجود دارد:

۱) سهم به‌دست آمده از بازار توسط سرویس‌دهنده‌های رقیب.

۲) قدرت خرید.

[62] Hotelling

[63] Competitive Facility Location

۳) فاصله‌ی بین متقاضیان و سرویس‌دهنده‌ها.

۴) قدرت جذب و کشش سرویس‌دهنده‌ها.

عامل اول یعنی سهم به‌دست آمده از بازار به‌عنوان متغیری وابسته به سه عامل دیگر است. محققان طیّ سال‌های متمادی تحقیقات زیادی برای به‌دست آوردن این رابطه انجام داده‌اند. برای کامل ساختن مدل سرویس‌دهنده‌های رقابتی، فضای بازار به اجتماع‌های پیوسته شبیه شهرها، بخش‌ها و شهرستان‌ها تقسیم می‌شود. قدرت خرید به‌کار برده شده در این مدل‌ها برابر بامجموع درآمد مؤثر از هر کدام از اجتماعات است. قدرت خرید در هر اجتماع بر اساس برخی قوانین(برای مثال قانون گرانشی) بین سرویس‌دهنده‌ها تقسیم می‌شود.

فرض کنید n تعداد اجتماعات، B_i قدرت خرید در اجتماع i برای $i = ۱,...,n$، b_i نسبت قدرت خرید در اجتماع i (B_i) به کل قدرت خرید برای تمام اجتماعات، k تعداد سرویس‌دهنده‌های رقابت کننده، d_{ij} فاصله‌ی بین اجتماع i و سرویس‌دهنده‌ی j که $i = ۱,...,n$ و $j = ۱,...,k$، $F(d)$ تابعی نزولی بر حسب فاصله، X_j کشش نامعین از اجتماع j، M_j کل فروش سرویس‌دهنده‌ی j بر حسب دلار، m_j نسبتی از کل فروش برای سرویس‌دهنده‌ی j است. در این صورت بر اساس مدل گرانشی، یک رابطه بین چهار عامل گفته شده در ۱−۵ موجود است:

$$p_{ij} = \frac{X_j/F(d_{ij})}{\sum_{j=۱}^{k} X_j/F(d_{ij})} \qquad (۱-۹)$$

از تعریف واضح است که $\sum_{j=۱}^{k} p_{ij} = ۱$. از طرفی سهم به‌دست آمده از بازار توسط سرویس‌دهنده‌ی j، m_j، برابر است با

$$m_j = \frac{\sum_{i=۱}^{n} B_i p_{ij}}{\sum_{j=۱}^{k}\sum_{i=۱}^{n} B_i p_{ij}} \qquad \forall j = ۱,...,k \qquad (۱-۱۰)$$

از آن‌جا که

$$\sum_{j=۱}^{k}\sum_{i=۱}^{n} B_i p_{ij} = \sum_{i=۱}^{n} B_i \sum_{j=۱}^{k} p_{ij} = \sum_{i=۱}^{n} B_i \qquad (a) \tag{۱۱-۱}$$

$$m_j = \frac{۱}{\sum_{i=۱}^{n} B_i}\sum_{i=۱}^{n} B_i p_{ij} = \sum_{i=۱}^{n} b_i p_{ij} \quad \forall j = ۱,...,k \quad (b) \tag{۱۲-۱}$$

(۱۳-۱)

با جایگزاری ۱ــ۹ در (b) داریم:

$$m_j = \sum_{i=۱}^{n} b_i \frac{X_j/F(d_{ij})}{\sum_{j=۱}^{k} X_j/F(d_{ij})} \qquad \forall j = ۱,...,k \tag{۱۴-۱}$$

در این رابطه از فروش کل (و در نتیجه سهم بازار)، قدرت خرید و فاصله‌ها برای اندازه‌گیری قدرت جذب و کشش سرویس‌دهنده‌ها استفاده شده است که به‌راحتی قابل محاسبه هستند. تعداد k تا از مقادیر جذب X_j نامعلوم است. بنابراین معادله‌ی ۱ــ۱۴ یک مجموعه‌ی متقارن از k معادله‌ی غیر خطی با k مجهول است.

مدل‌های مکانیابی رقابتی از نظر نمایش تابع هدف به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- مدل‌های پیوسته‌ی مکانیابی رقابتی که مکان سرویس‌دهنده‌ها هر جایی روی صفحه است.
- مدل‌های گسسته مکانیابی رقابتی که سرویس‌دهنده‌ها تنها می‌توانند روی یک مجموعه‌ی متناهی از مکان‌های شدنی روی یک شبکه قرار داده شوند.

مدل‌های مکانیابی رقابتی پیوسته در واقع یک تعمیم توسعه یافته از روش هتلینگ در یک فضای پیوسته است. یکی از روش‌های اولیه، تحلیل و بررسی عکس‌العمل سازمان‌های عمومی و بزرگ در مقابل سرویس‌دهنده‌هاست. دراین مدل‌ها، تخصیص متقاضیان به سرویس‌دهنده‌ها با استفاده از فرض مجاورت انجام می‌شود. یعنی هر سرویس‌دهنده، متقاضی نزدیک به خود را جذب می‌کند. ابتدا سهم به‌دست

آمده از بازار توسط هر سرویس‌دهنده محاسبه می‌شود سپس بهترین مکان را برای سرویس‌دهنده‌های جدید پیدا می‌کنیم. یک نمونه‌ی عالی از این مدل‌ها، مدل مکانیابی و تخصیص سهم بازار یا MSM است که توسط گودچایلد[۶۴] ارائه شد[۱۳].

روش دوم، به کارگیری مدل سود[۶۵] است که با استفاده از مدل‌های چند بعدی انتخاب متقاضی و همچنین از این فرض که سرویس‌دهنده‌های از یک نوع مشابه لزوماً با یکدیگر مقایسه نمی‌شوند، پیش‌بینی شده‌اند. سرویس‌دهنده‌ها در یک یا چند خصوصیت که ترکیبی از کل کشش و جذب متقاضیان است تفاوت دارند. علاوه بر این، اولویّت بندی مربوط به این متغیرها توسط متقاضیان با سلیقه‌های متفاوت، در مجموعه‌ی انتخابی هر کدام از آن‌ها تأثیر می‌گذارد. هرچند در این مدل انتخاب متقاضیان دیگر بر اساس فرض مجاورت نیست، اما متقاضیان واقع در نقطه تقاضای مرکزی از همان تابع سود استفاده می‌کنند. پس همه‌ی متقاضیان واقع در یک نقطه‌ی تقاضا، یک سرویس‌دهنده را انتخاب می‌کنند و این در واقع ویژگی « **همه یا هیچ**» را ایجاب میکند. مدل قطعی سود برای مکانیابی رقابتی در فضای پیوسته توسط درزنر[۵]، با آزاد گذاشتن فرض مجاورت در مدل هتلینگ، معرفی شد.

روش سوم که از تئوری انتخاب سرویس‌دهنده پیروی می‌کند، روشی است که از روش گرانشی در مدل پیوسته‌ی مکانیابی و تخصیص رقابتی استفاده می‌کند. مدل قطعی سود، با این فرض که هر متقاضی سود خود را ازیک تابع سود با توزیع تصادفی می‌گیرد، تعمیم داده شد. این فرض ویژگی «همه یا هیچ» را نادیده می‌گیرد چرا که احتمال این‌که یک متقاضی مشتری یک سرویس‌دهنده شود می‌تواند یک عدد ثابت بین صفر درصد تا صد درصد باشد. در آخر، روش دیگر، تئوری مکان مرکزی است که چهارچوبی برای تحلیل و بررسی وسعت و فاصله‌ی سرویس‌دهنده‌ها تا یکدیگر فراهم می‌کند.

[۶۴] Goodchild

[۶۵] Utility model

از اواخر دهه‌ی هفتاد، فرضیات راجع به اثرات متقابل بین سرویس‌دهنده‌های رقابتی در فضای گسسته با روش‌های متعددی توسعه داده شد. یکی از اولین پرسش‌هایی که بیشتر محققان مطرح کردند در مورد وجود یا عدم وجود یک مجموعه مکان‌ها روی رأس‌های یک شبکه است به شرط اینکه « **تعادل نَش**[۶۶]» در آن برقرار باشد. یعنی یک مکان با این شرط که هیچ شرکتی در آن‌جا انگیزه‌ای برای جابه‌جا شدن نداشته باشد. حکیمی(۱۹۸۶) مسأله مکانیابی رقابتی را روی رأس‌ها به‌طور گسترده مورد تحلیل و بررسی قرار داد و ثابت کرد تحت برخی شرایط معین ریاضی، شبیه تقعر تابع هزینه، مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه روی رأس‌های شبکه موجود است.

مکانیابی رقابتی دارای زیر شاخه‌های فراوانی است که هر کدام از آن‌ها نیز به نوبه‌ی خود به گروه‌های گوناگونی تقسیم می‌شوند که در این‌جا موضوع بحث نیست. برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۱۱] مراجعه کنید.

۱—۵—۱ مدل قطعی سود برای مکانیابی رقابتی در صفحه

درزنر مدل قطعی سود برای مکانیابی سرویس‌دهنده‌های رقابتی را معرفی کرد[۵]. سرویس‌دهنده‌هایی با قدرت کشش و جذب نابرابر در موضوعی با مفهوم «رفتار انتخابی متقاضیان در فضا» مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. مدل‌های متعددی برای اولویت بندی در انتخاب متقاضیان و همچنین مؤلفه‌های مورد نظر آن‌ها به‌کار گرفته شده است. محققان در این زمینه از یک تابع به منظور اندازه‌گیری سود یا قدرت جذب سرویس‌دهنده استفاده کردند. این تابع سود، درجه مطلوبیت سرویس‌دهنده بصورت یک تابع از ویژگی‌های سرویس‌دهنده نمایش می‌دهد که بصورت زیر است:

$$U = F(x_۱, x_۲, x_۳, ..., x_m).$$

[۶۶] Nash equilibrium

در بیشتر مدل‌ها فرض می‌شود تابع F مجموع چند متغیر مستقل است که در نهایت به تابع زیر منجر می‌شود

$$U = \sum_{p=1}^{m} w_p f_p(x_p).$$

در این مدل‌ها فرض می‌شود متقاضیان، سرویس‌دهنده‌ای با بیشترین سود را در نظر می‌گیرند. بهترین مکان برای سرویس‌دهنده‌ی جدید بر اساس مجموع مقادیر سود برای سسرویس‌دهنده‌های موجود و مقدار تابع سود برای سرویس‌دهنده‌ی جدید یافت می‌شود. این مکان بهینه با استفاده از مفهوم فاصله‌ی عطف به‌دست می‌آید. در فاصله‌ی عطف، سود سرویس‌دهنده‌های موجود با سود سرویس‌دهنده‌ی جدید برابر است.

ویژگی‌های سرویس‌دهنده‌ی موجود j (شامل فاصله d_j) و در نتیجه، سود آن سرویس‌دهنده یعنی U_j مشخص و معین است. همچنین برای محاسبه‌ی تابع سود سرویس‌دهنده‌ی جدید، U، تمام متغیرهای مستقل در ضابطه‌ی تابع معین و مشخص هستند بغیر از فاصله‌ی d از نقطه تقاضای i که به‌عنوان اولین ویژگی x_1 در نظر گرفته شده است. در نتیجه تابع سود U برای سرویس‌دهنده‌ی جدید عبارت است از

$$U = F(d, x_2, x_3, ..., x_m).$$

چون تمام ویژگی‌های $x_2, ..., x_m$ مشخص و معین هستند، پس U تنها به‌صورت تابعی از فاصله تا سرویس‌دهنده‌ی جدید است و می‌توان آن‌را به‌صورت $U(d)$ نمایش داد. یک متقاضی، سرویس‌دهنده‌ی جدید را به سرویس‌دهنده‌ی j ترجیح می‌دهد اگر $U(d) > U_j$. حداکثر فاصله تا این‌که یک متقاضی، سرویس‌دهنده‌ی جدید را به سرویس‌دهنده‌ی موجود ترجیح دهد را فاصله‌ی عطف می‌نامیم که از حل معادله‌ی $U(d) = U_j$ به‌دست می‌آید. از آن‌جا که $U(d)$ یک تابع نزولی نسبت به فاصله است، معادله جواب یکتا دارد که با Δ_{ij} نشان داده می‌شود و برابر است با بیشترین فاصله‌ای‌که متقاضی i از جایگاه

خودش طی می‌کند تا به جای سرویس‌دهنده‌ی موجود، از سرویس‌دهنده‌ی جدید سرویس‌دهی شود. فاصله‌ی عطف برای کل سرویس‌دهنده‌های موجود، D_i، برابر با کوچکترین فاصله‌ی عطف سرویس دهنده‌ها است. یعنی

$$D_i = \min_{۱\leq j\leq k} \Delta ij.$$

در صورتی‌که فاصله از نقطه تقاضای i تا سرویس‌دهنده‌ی جدید کمتر از فاصله‌ی عطف D_i باشد، متقاضی واقع در نقطه تقاضای i، سرویس‌دهنده‌ی جدید را انتخاب می‌کند. مثل این است که بگوییم اگر سرویس‌دهنده‌ی جدید داخل یک دایره به مرکز نقطه تقاضای i و با شعاع D_i باشد، آن‌گاه نقطه تقاضای i سرویس‌دهنده‌ی جدید را انتخاب می‌کند. اگر فاصله‌ی نقطه تقاضای i تا سرویس‌دهنده‌ی جدید واقع در نقطه‌ی X را با $d_i(X)$ نمایش دهیم، آن‌گاه سهمی از بازار که توسط سرویس‌دهنده‌ی جدید در مکان X جذب می‌شود برابر است با

$$M(X) = \sum_{d_i(X)<D_i} B_i \qquad (۱۵-۱)$$

که B_i برابر است با قدرت خرید در نقطه تقاضای i. توجه داشته باشید اگر $d_i(X) = D_i$ آن‌گاه قدرت خرید در نقطه تقاضای i به‌طور مساوی و با همان سود بیشینه، بین تمام سرویس‌دهنده‌ها تقسیم می‌شود. در این‌جا هدف، بیشینه کردن $M(X)$ برای بهترین مجموعه‌ی انتخاب شده‌ی X است.

۱-۵-۲ مدل تصادفی سود:

مدل قطعی سود، از روش همه یا هیچکدام برای تخصیص متقاضیان به سرویس‌دهنده‌ها استفاده می‌کند. برای بررسی تغییرات روی توابع سود، مدل قطعی به مدل تصادفی تعمیم داده شده است. در این مدل فرض بر این است که تابع سود، در بین متقاضیانی که در یک نقطه‌ی تقاضا قرار دارند، تغییر می‌کند.

تابع سود به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$U(Q,d)=\sum_{i=1}^{M} w_i Q_i - d$$

که Q بردار کیفیت، و d فاصله‌ی بین متقاضی تا سرویس‌دهنده است. w یک بردار از وزن‌های مرتب شده است. در این مدل تمام متغیرها مانند مقادیر کیفی Q_i که $1 \leq i \leq M$، وزن‌های w_i که $1 \leq i \leq M$ و فاصله‌ی d، از یک توزیع احتمالی با میانگین و واریانس مشخص گرفته شده باشند. چون تابع سود مجموعی از توزیع‌هاست، با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی برای M به اندازه‌ی کافی بزرگ، $U(Q,d)$ تقریباً دارای توزیع نرمال است.

سهم به دست آمده از بازار را می‌توان توسط یک تابع تأخیر نمایی به شکل $f(d)=f(0).e^{-d_i(\alpha+\beta d_i)}$ تقریب زد که α و β اعداد ثابت و مثبتی هستند. بنابراین یافتن بهترین مکان معادل با به دست آوردن بیشینه‌ی تابع زیر است

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i e^{-d_i(\alpha+\beta d_i)}$$

که d_i فاصله بین نقطه تقاضای i و مکان (x,y) است. این مسأله به‌وسیله‌ی الگوریتم بازگشتی ویزفیلد[۶۷] حل شده است[۷].

۱–۵–۳ مدل‌های گرانشی

اساس مدل‌های گرانشی بر این فرض استوار است که « **احتمال این‌که یک متقاضی، سرویس‌دهنده‌ای را انتخاب کند نسبت مستقیم با قدرت کشش سرویس‌دهنده و نسبت عکس با توانی از فاصله تا آن**

[۶۷] $Weiszfeld$

سرویس‌دهنده دارد.» نمونه‌هایی از انواع کشش و جذب سرویس‌دهنده عبارت است از وسعت فروشگاه در مدل هاف و ضریب MCI در مدل ارائه شده توسط ناکانیشی و کوپر. فرض کنید

n تعداد نقاط تقاضا (هر نقطه‌ی تقاضا نمایشی از یک فضای کوچک اطرافش است.)

(a_i, b_i) مختصات نقطه تقاضای i، $i = 1, \ldots, n$

B_i کل قدرت خرید متقاضیان در نقطه تقاضای i، $i = 1, \ldots, n$

k تعداد سرویس‌دهنده‌های موجود

c اولین c سرویس‌دهنده از k سرویس‌دهنده $0 \leq c \leq k$

p تعداد سرویس‌دهنده‌های جدید

(x_m, y_m) مختصات سرویس‌دهنده‌ی جدید m $m = 1, \ldots, p$

d_{ij} فاصله‌ی بین نقطه تقاضای i و سرویس‌دهنده‌ی موجود j $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, k$

$d_i(x_m, y_m)$ فاصله‌ی بین نقطه تقاضای i و سرویس‌دهنده‌ی جدید m

$$d_i(x_m, y_m) = \sqrt{(x_m - a_i)^2 + (y_m - b_i)^2} \quad j = 1, \ldots, k \quad i = 1, \ldots, n$$

E_j اندازه‌ی کشش یا جذب سرویس‌دهنده‌ی موجود j $j = 1, \ldots, k$

A_m اندازه‌ی کشش یا جذب سرویس‌دهنده‌ی جدید m $m = 1, \ldots, p$

λ توانی برای فاصله

مدل گرانشی بهترین مکان برای سرویس‌دهنده‌ی جدید را که در حالی‌که اندازه‌ی کشش یا جذب آن مشخص است، می‌یابد. اگر مکان p سرویس‌دهنده‌ی جدید در یک بازار تعیین شود، آن‌گاه کل سهم

به دست آمده از بازار، T، برابر است با

$$T = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\sum_{m=1}^{p} \frac{A_m}{d_i^{\lambda}(x_m,y_m)} + \sum_{j=1}^{c} \frac{E_j}{d_{ij}^{\lambda}}}{\sum_{m=1}^{p} \frac{A_m}{d_i^{\lambda}(x_m,y_m)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{E_j}{d_{ij}^{\lambda}}}. \qquad (۱—۱۶)$$

هدف پیدا کردن بهترین مکان در صفحه است به‌طوری‌که کل سهم به‌دست آمده از بازار توسط ۱—۱۶ بیشینه شود. یک سری ساده‌سازی‌های جبری منجر به مسائل بهینه‌سازی ساده‌تری می‌شود که یکی از آن‌ها کمینه کردن کل قدرت خریدی است که توسط یک شبکه جذب نشده باشد

$$F = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\sum_{j=c+1}^{k} \frac{E_j}{d_{ij}^{\lambda}}}{\sum_{m=1}^{p} \frac{A_m}{d_i^{\lambda}(x_m,y_m)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{E_j}{d_{ij}^{\lambda}}}. \qquad (۱—۱۷)$$

برای سرویس‌دهنده‌های موجود، هر دو مجموع دارای مقادیر یکسانی هستند.

فرض کنید $G_i = B_i \sum_{j=c+1}^{k} \frac{E_j}{d_{ij}^{\lambda}}$ و $H_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{E_j}{d_{ij}^{\lambda}}$ در این‌صورت نهایتاً عبارت زیر را داریم:

$$minimize: \left\{ F = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{G_i}{H_i + \sum_{m=1}^{p} \frac{A_m}{d_{ij}^{\lambda}}} \right\}. \qquad (۱—۱۸)$$

مینیمم سازی تابع F

مفهوم تقعر و تحدب توابع در پیدا کردن جواب بهینه‌ی آن‌ها بسیار مهم است. توابع مقعر یک نقطه‌ی ماکزیمم یکتا دارند در حالیکه توابع محدب یک نقطه‌ی مینیمم یکتا دارند. جستجو برای یافتن نقطه‌ی ماکزیمال یک تابع مقعر را می‌توان از یک نقطه‌ی دلخواه شروع کرد. اگر از روش « **بالا رفتن از تپه**[۶۸]» استفاده کنیم، مکان بهینه‌ی تابع به دست می‌آید. توابعی که مقعر نیستند ممکن است چند ماکزیمم محلی داشته باشند. اگر فرایند بالا روی از تپه را برای جستجوی ماکزیمم تابع مقعر به‌کار ببریم، آن‌گاه

[۶۸] Climbs up the hill

ممکن است نقطه‌ی به دست آمده، مکان بهینه باشد. یک روش برای دستیابی بهتر به نقطه‌ی بهین، جستجو از چند نقطه‌ی ابتدایی به‌جای یک نقطه است. سپس از بین نقاط به‌دست آمده، بهترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. اگر این روش را در یک مدت زمان کافی ادامه دهیم، آن‌گاه ماکزیمم سراسری با احتمال خیلی زیاد به دست می‌آید.

تابع F در ۱—۱۸ تابعی محدب نیست بنابراین ممکن است بیش از یک مینیمم محلی داشته باشد. در [۹] یک روش بر پایه‌ی الگوریتم ویزفیلد برای حل مسأله‌ی مکانیابی تک وسیله‌ای پیشنهاد شده است. این الگوریتم می‌تواند برای جستجوی یک متغیره به‌کار رود. جستجوی یک متغیره، یک روش ابتکاری است که در آن هر متغیر در حالی‌که بقیه ثابت هستند، بهینه می‌شود. به محض این‌که بهبود در مقدار تابع هدف در طول یک دوره‌ی بهینه‌سازی برای تمامی متغیرها، از یک مقدار مشخص کمتر شود، الگوریتم خاتمه می‌یابد. این برای مسأله‌ی مورد نظر ما به معنی یافتن بهترین مکان برای سرویس‌دهنده‌ی جدید است در حالی‌که سرویس‌دهنده‌های موجود ثابت نگه داشته شده‌اند. در اولین اجرای این فرآیند، سرویس‌دهنده‌ی جدید در مکان بهینه‌ی خود ثابت می‌شود و مکان سرویس‌دهنده‌ی دیگر بهینه می‌شود. زمانی‌که تغییر در مکان سرویس‌دهنده‌های جدید ناچیز باشد، الگوریتم خاتمه می‌یابد. در [۱۰] دو روش با استفاده از جستجوی تک متغیره ارائه شده است. یکی از آن دو که جواب‌های بهتری تولید می‌کند به‌صورت زیر است:

۱) p مکان به طور تصادفی برای p سرویس‌دهنده انتخاب کنید.

۲) یک تکرار از الگوریتم ویزفیلد را برای هر یک از سرویس‌دهنده‌ها اجرا کنید.

۳) بعد از این‌که مکان p سرویس‌دهنده را یکی یکی در مرحله‌ی قبل تعیین کردید، تغییرات را در نظر بگیرید. اگر به ازای یک ϵ معین، میزان تغییرات از ϵ کمتر بود، الگوریتم خاتمه می‌یابد.

دو روش ای.ام.ال.پی[۶۹] واِکسِل[۷۰] برای حل مسألهی ۱—۱۸ پیشنهاد شده است. جوابهای بهین تمایل دارند تا نزدیک یک سرویسدهندهی موجود باشند بهطوریکه سرویسدهندهی جدید سهم عظیمی از بازار آن سرویسدهندهی موجود را جذب میکند.

روش ای.ام.ال.پی : در روش ای.ام.ال.پی از برنامهریزی غیر خطی برای حل مسائلی شبیه ۱—۱۸ استفاده شده است. چون در این مسائل تابع هدف محدب است، لازم است الگوریتم باچند نقطهی آغازین اجرا شود و بهترین جواب انتخاب شود. برنامهنویسی مدل ای.ام.ال.پی بسیار ساده، کوتاه، فشرده و برای دنبال کردن مسیر برنامه ساده است.

روش اِکسِل : گزینهی $solver$ در نرمافزار اِکسِل میتواند برای حل ۱—۱۸ بهکار میرود. در اِکسِل این گزینه زیر $formula$ یافت میشود. حل کنندهی $solver$ جواب بهین را به همراه سهم بهدست آمده از بازار در آن نقطه فراهم میکند. چون تابع محدب نیست، فرآیند با استفاده از چند مکان اولیه تصادفی تکرار میشود و بهترین جواب برای اجرای نهایی انتخاب میشود.

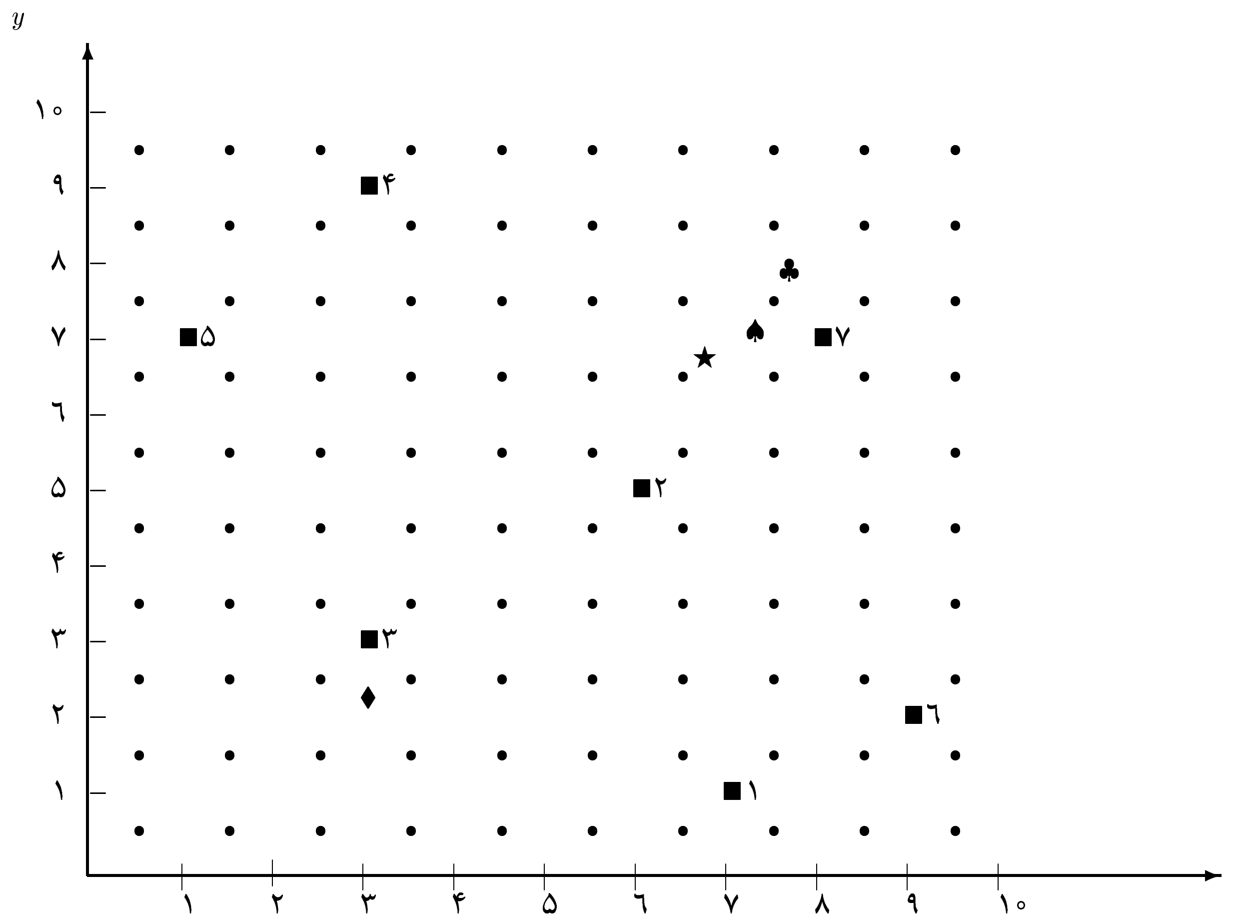
مثال ۱.۱ برای بررسی مدلهای مختلف، از یک مسألهی نمونه استفاده شده است:

فرض کنید k، تعداد سرویسدهندههای موجود برابر با هفت و n، تعداد نقاط تقاضا برابر با صد باشد که بهطور یکنواخت روی یک مربع ده × ده توزیع شدهاند. به هر نقطهی تقاضا یک قدرت خرید که برابر است با حاصلضرب مختصات آن نقطه از صفر تا صد، نسبت داده شده است (شکل ۱—۲) بهترین مکان برای هشتمین سرویسدهنده (سرویسدهندهی جدید)، با استفاده از روشهای متعددی یافت شده است.

---

[۶۹] AMLP

[۷۰] Excel



■ سرویس‌دهنده‌ها، ♦ کشش یکسان، ★ مدل گرانشی، ♠ مدل تصادفی، ♣ مدل قطعی

شکل ۱—۲: نمایش گرافیکی

جدول ۱.۱: میانگین اندازه‌های کیفی برای سرویس‌دهنده‌ها

Quality measure	1	2	3	4	5	6	7	New
1	6.8	7.8	7.6	8.0	8.1	6.1	6.1	7.8
2	7.2	6.4	7.2	7.2	6.5	5.8	6.7	6.4
3	6.9	8.9	7.1	6.1	7.6	8.4	7.4	7.1
4	8.1	7.2	6.0	6.7	8.4	8.0	6.5	8.0
5	8.7	6.3	7.2	7.3	7.1	7.6	7.9	6.9

کشش یکسان با فرض کشش یکسان در سرویس‌دهنده‌ها برای مدل قطعی سود، هر نقطه‌ی تقاضا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده را انتخاب می‌کند. جواب بهینه عبارت است از $x = ۳$ و $y = ۲/۲۵$ در حالی‌که سهم به‌دست آمده از بازار برابر است با ۱۵/۰۰.

سود قطعی با فرض سود نابرابر برای مدل قطعی سود، تابع سود عبارت است از

$$U = \frac{۰/۸Q_۱ + ۰/۷۳Q_۲ + ۰/۷۲Q_۳ + ۰/۶۸Q_۴ + ۰/۶۶Q_۵}{۱/۵} - d \qquad (۱-۱۹)$$

با مقادیر کیفی که در جدول ۱.۱ آورده شده است، نقطه‌ی مورد نظر عبارت است از $x = ۷/۵۶$ و $y = ۷/۶۶$ که سهم بازار در آن‌جا برابر است با ۲۲/۰۰.

سود تصادفی با در نظر گرفتن مدل تصادفی سود، تابع سود ۱—۱۹ با میانگین Qامین داده در جدول ۱.۱ به‌کار گرفته شده است، انحراف استاندارد Qامین داده برابر ۱ و انحراف استاندارد فاصله برابر ۰/۵ شده است. مکان بهینه عبارت است از $x = ۷/۲۲$ و ۷/۰۶ با سهم به‌دست آمده‌ی ۱۵/۰۹.

مدل گرانشی مکان بهینه‌ای که سهم به‌دست آمده از بازار در آن‌جا توسط مدل گرانشی بیشینه می‌شود عبارت است از $x = ۵/۵۹$ و $y = ۵/۵۴$ با سهم به‌دست آمده است ۱۲/۹۳. این در حالی است

جدول ۲.۱: مکان‌های بهینه و سهم به‌دست آمده از بازار توسط روش‌های مختلف

مدها	مکان بهینه		سهم به‌دست آمده از بازار بااستفاده از مدل‌ها			
			Proxi−	*deter.*	*Random*	*Gravity*
	x	y	*mity*	*Utility*	*Utility*	*Model*
Proximity	3.00	2.25	15.00	16.00	12.67	12.26
Determ.Utility	7.56	7.66	11.00	22.00	14.71	11.08
RandomUtility	7.22	7.06	10.00	16.00	15.09	12.31
GravityModel	5.59	5.54	9.00	11.00	12.67	12.93

که برای سرویس‌دهنده‌های موجود و همچنین سرویس‌دهنده‌های جدید، کشش یکسانی در نظر گرفته شده است.

مکان بهین برای سرویس‌دهنده‌ی جدید و همچنین سهم به‌دست آمده از بازار با استفاده از در جدول ۲ گزارش و در شکل ۱—۲ نیز نمایش داده شده است. به نظر می‌رسد تمام مکان‌های بهین اطراف قطر مربع هستند و این تا اندازه‌ای به‌این دلیل است که مسأله خیلی شبیه به یک مسأله‌ی متقارن نسبت به قطر است. معمولاً چنین مکان‌هایی در «**حفره‌ها**» هستند که شامل متقاضیانی است که دور از یک سرویس‌دهنده‌ی موجودند. جواب‌های بهین تمایل دارند تانزدیک به یک سرویس‌دهنده‌ی موجود باشند به طوری‌که سرویس‌دهنده‌ی جدید سهم عظیمی از بازار سرویس‌دهنده‌ی موجود را جذب می‌کند. به نظر می‌رسد مدل قطعی سود منجر به کسب بیشترین سهم بازار می‌شود. در هر صورت، بهترین مکان با استفاده از فرض «**شباهت بیشتر به رفتار واقعی متقاضی**» به‌دست می‌آید.

فصل ۲

مدل p—میانه گرانشی

۲–۱ مقدمه و تاریخچه

مسئله‌ی مکانیابی p–میانه شاید پر کاربردترین مدل مکانیابی است. برای مطالعه‌ی بیشتر در این باره می‌توانید به [۲۸] و [۲] مراجعه کنید. تقاضا در هر مکان بصورت مجموعه‌ای از نقاط تقاضا(گره‌هایی روی یک شبکه) و بعنوان وزنِ آن گره در نظر گرفته شده است. می‌خواهیم p مکان برای p سرویس‌دهنده بیابیم. هر متقاضی نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده نسبت به خودش را انتخاب می‌کند. تابع هدف کل زمان طی شده توسّط تمام متقاضیان را کمینه می‌کند. خاصیّت حکیمی[۱] (۱۹۶۴ و ۱۹۶۵) روی شبکه‌ی مورد نظر برقرار است. بر طبق این خاصیّت اگر سرویس‌دهنده‌ها بتوانند هر جایی روی شبکه قرار بگیرند، مکان‌های بهینه باید روی گره‌ها باشند. یکی از فرض‌های قطعی در مسئله‌ی p–میانه این است که هر متقاضی، نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده نسبت به خودش را انتخاب می‌کند. امّا زمانی‌که قدرت جذب سرویس‌دهنده‌ها با یکدیگر متفاوت باشد، فرضِ «مجاورت» [۲] دیگر برقرار نخواهد بود. روش هتلینگ با آزاد گذاشتن قید مجاورت تعمیم داده شد. در سال ۱۹۳۱ ریلی قانون گرانشی را برای مکانیابی ارائه داد. او در اثری بر اساس قانون گرانش نیوتون[۳] با عنوان «قانون گرانش خرده‌فروشی‌ها» مدل‌هایی را برای مکانیابی فروشگاه‌های بزرگ شبیه مراکز فروش کالا بصورت عمده، ارائه داد. این قانون بعدها توسّط هاف برای الگو گرفتن از رفتار مشتریان در انتخاب فروشگاه محلّ خریدشان به‌کار گرفته شد. فرض کنید یک متقاضی در شهری کوچک مابین دو شهر بزرگ اقامت دارد. احتمال این‌که او مشتریِ یکی از شهرهای بزرگ شود نسبت مستقیم با وسعت آن شهر و نسبت عکس با مربع فاصله تا آن شهر

---

[۱] Hakimi Property

[۲] Hotelling's Proximity Assumption

[۳] Newton's Low of Gravitation(1686)

قانون گرانش نیوتون در مورد نیروی بین ستارگان و سیّارات است و بیان می‌کند که نیروی بین دو جسم نسبت مستقیم با حاصلضرب جرم آن‌ها و نسبت عکس با مربع فاصله بین آن دو دارد.

دارد. او توان‌های متفاوتی از فاصله را برای این مسأله پیشنهاد داد و تابع زوال [۴] فاصله را از مربع فاصله به توان‌های دیگر تعمیم داد. هنگامی‌که توان به بینهایت میل داده شود، متقاضی نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده را با احتمال یک انتخاب می‌کند. بنابراین قانون هاف تعمیمی از فرض مجاورت است. هاف اوّلین کسی بود که «اصل انتخاب گسسته‌ی لوس [۵] را برای مدل گرانشی معرّفی کرد. هاف یک رابطه‌ی احتمالی ارائه داد و در آن فاصله‌ی (یا زمان طی شده‌ی) هر متقاضی تا مرکز خرید و همچنین متغیّر وسعت فروشگاه را به عنوان ورودی آن در نظر گرفت. انتقاد عمده‌ای که به مدل پیشنهادی هاف وارد شد در مورد سادگی بیش از حدّ آن بود. او در این مدل تنها از دو متغیّر «فاصله» و «وسعت» برای توصیف رفتار متقاضیان در انتخاب سرویس‌دهنده‌ی مورد نظرشان استفاده کرده بود. ناکانیشی و کوپر با در نظر گرفتن خصوصیت‌های ناشی از قدرت کشندگی و جذب متقاضی توسط یک سرویس‌دهنده، مدل هاف را بهبود بخشیدند. یکی از این خصوصیت‌ها تصوّری است که متقاضی از فروشگاه در نظر خود دارد مانند ظاهر فروشگاه، میزان سرویس‌دهی و همچنین عوامل دیگری همچون فاصله‌ی که تا فروشگاه طی می‌شود. آن‌ها پیشنهاد دادند تا عامل وسعت برای جذب متقاضیان را با «برهم‌کنش‌های رقابتی چندمنظوره» (MCI)[۶] جایگزین کنند. در طول سال‌های زیادی این قانون برای بسیاری از فروشندگان مورد استفاده قرار گرفت و توابع زوال گوناگونی برای کاربردهای مختلف به‌کار گرفته شد. به عنوان مثال جین و ماهاجان (۱۹۷۹) و بِل و دیگران [۷] (۱۹۹۸) از این قانون برای خواربار فروشی‌ها استفاده کردند[۲۲، ۱].

---

[۴] Decay function

[۵] Luce axiom of discrete choice model

در این‌جا این اصل بیان می‌کند که انتخاب مکان بهینه توسط متقاضیان، بصورت یک تابع سود حاصل از این انتخاب، نسبت به سود به‌دست آمده از انتخاب دیگر مکان‌هاست.

[۶] Multiplicative Competitive Interaction

[۷] Bell et al.

این قانون می‌تواند برای مدل‌های مختلف pـمیانه به‌کار گرفته شود؛ به‌عنوان مثال درزنر و درزنر این قانون را برای مدل‌های مکانیابی چرخشی و کانونی[۸]، و طیّ مقاله‌ای در سال ۲۰۰۶ نیز برای مدل p— میانه مورد استفاده قرار دادند و مدل اخیر را «مدل p—میانه گرانشی» نامگذاری کردند[۴][۳]. آن‌هاابتدا مدل p—میانه‌ی گرانشی را فرمول‌بندی کرده سپس روی شبکه مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و یک روش ابتکاری برای حلّ آن ارائه دادند. نتایج عددی حاصل از آزمایش این مدل روی ۴۰ مسئله‌ی متفاوت در همان مقاله موجود است.

۲—۲ مسئله‌ی p—میانه‌ی گرانشی

۲—۲—۱ مسئله‌ی ۱—میانه‌ی گرانشی

مسئله‌ی ۱—میانه در حالت کلی به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

فرض کنید m وسیله در نقاط معین و مجزای $P_۱, P_۲, \ldots, P_m$ قرار داده شده‌اند. یک وسیله‌ی جدید در نقطه‌ی X وضع می‌شود. هزینه‌های حمل و نقل نسبت مستقیم با یک فاصله‌ی معین و مناسب بین سرویس‌دهنده‌ی جدید و سرویس دهنده‌ی موجود i دارد. فرض کنید $d(X, P_i)$، فاصله‌ی بین نقاط X و P_i باشد. فرض کنید w_i هزینه‌ی جابه‌جایی بین سرویس‌دهنده‌ی جدید و سرویس‌دهنده‌ی موجود i باشد. کل هزینه‌ی سالیانه‌ی در طول جابه‌جایی بین سرویس‌دهنده‌ی جدید و تمام سرویس‌دهنده‌های موجود عبارت است از:

$$f(X) = \sum_{i=۱}^{m} w_i d(X, P_i)$$

[۸] Hub and Spoke

مسأله‌ی مکانیابی تک وسیله‌ای، مسأله‌ی تعیین مکان یک سرویس‌دهنده‌ی جدید $X^\star$ است به‌طوریکه، $f(X)$، کل هزینه‌ی سالیانه حمل و نقل، را کمینه کند. به‌صورت مشابه، مسأله‌ی مکانیابی p—میانه، مسأله‌ی تعیین مکان p—سرویس‌دهنده است به‌طوری‌که کل هزینه حداقل شود.

اما سؤالی که ممکن است در این‌جا مطرح شود، این است که « **فاصله‌ی معین و مناسب** به چه معنی است؟». فاصله‌هایی که فوراً کاندید می‌شوند، فاصله‌ی مستقیم الخط (مستطیلی) یا فاصله‌ی اقلیدسی است. اگر مختصات سرویس‌دهنده‌ی جدید و سرویس‌دهنده‌ی موجود i به ترتیب (x,y) و (a_i,b_i) باشد ($X=(x,y)$ و $P_i=(a_i,b_i)$)، آن‌گاه فاصله اقلیدسی بین X و P_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(X,P_i)=\left[(x-a_i)^۲+(y-b_i)^۲\right]^{۱/۲}.$$

فاصله اقلیدسی برای برخی مسائل مکانیابی شبکه، خطوط هوایی و انتقال دهنده‌ها به‌کار می‌رود.

در بیشتر مسائل مکانیابی، حرکت در امتداد یک مجموعه از راهروها و گذرگاه‌ها در یک طرح مستطیلی، موازی دیوارهای یک ساختمان صورت می‌گیرد. در چنین وضعیتی، فاصله‌ی مناسب، فاصله‌ی مستطیلی است. فاصله‌ی مستقیم الخط بین X و P_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(X,P_i)=|x-a_i|+|y-b_i|.$$

فاصله‌ی مستقیم الخط (مستطیلی) در بعضی تحلیل‌های مکان‌یابی شهودی که حرکت در امتداد مجموعه‌ای متعامد از خیابان‌ها صورت می‌گیرد، مناسب است.

در برخی از مسائل، هزینه، یک تابع خطی از فاصله نیست. به‌عنوان مثال، انتظار می‌رود هزینه‌ی مربوط به واکنش یک ماشین آتش‌نشانی در برابر حریق، نسبت به فاصله، یک تابع غیر خطی باشد. وابسته به نوع مسأله‌ی مکانیابی، تابع هدف می‌تواند دارای فرمول‌بندی‌های متفاوتی باشد. یک نمونه‌ی

غیر خطی از $f(x)$ که در این‌جا مورد بررسی قرار خواهد گرفت، مسئله‌ی گرانشی است. فرض کنید هزینه، متناسب است با توان دوم فاصله‌ی اقلیدسی بین X و P_i. بنابراین ۲—۱ برای مسأله‌ی ۱—میانه به صورت زیر خواهد شد

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right]. \qquad (۱—۲)$$

مسائل مکانیابی مربوط به تابع هدف بالا را مسائل گرانشی می‌نامیم. یک مسئله‌ی گرانشی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right]. \qquad (۲—۲)$$

هر نقطه‌ی $(x^\star, y^\star)$ که تابع ۲—۲ را مینیمم می‌کند، باید در شرط زیر صدق کند:

$$\left(\frac{\partial f\,(x^\star, y^\star)}{\partial x^\star}, \frac{\partial f\,(x^\star, y^\star)}{\partial y^\star}\right) = (0, 0). \qquad (۳—۲)$$

با محاسبه‌ی مشتقات جزئی ۲—۲ نسبت به x و y و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، جواب یکتای زیر به دست می‌آید:

$$x^\star = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \qquad (۴—۲)$$

$$y^\star = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}. \qquad (۵—۲)$$

مختصات $x^\star$ و $y^\star$ از سرویس‌دهنده‌ی جدید ممکن است به‌عنوان میانگین وزنی مختصات x و y در سرویس‌دهنده‌های موجود باشد. پس مسأله‌ی گرانشی تک وسیله‌ای، جواب ساده و یکتا دارد که گاهی با عنوان **مرکز گرانش** شناخته می‌شود.

مثال ۱.۲ چهار سرویس‌دهنده با مختصات‌های $(۴, ۲)$، $(۸, ۵)$، $(۱۱, ۸)$ و $(۱۳, ۲)$ به‌ترتیب با وزن‌های $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید هزینه‌ی جابه‌جایی از سرویس‌دهنده‌ی جدید

تا هر یک از سرویس‌دهنده‌های موجود برابر است با حاصل‌ضرب وزن در مربع فاصله‌ی اقلیدسی بین سرویس‌دهنده‌ی جدید و سرویس‌دهنده‌های موجود. بنابراین از ۲—۴ و ۲—۵ به ترتیب داریم

$$x^{\star} = \frac{\frac{1}{6}(4) + \frac{1}{3}(8) + \frac{1}{3}(11) + \frac{1}{6}(13)}{1/0} = 9/167$$

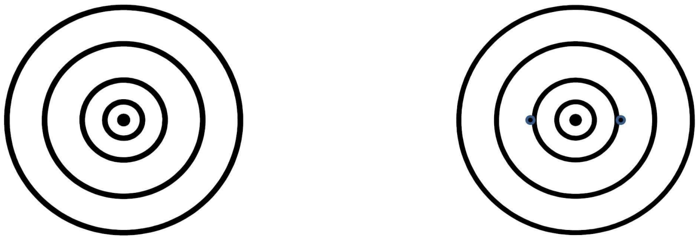
$$y^{\star} = \frac{\frac{1}{6}(2) + \frac{1}{3}(5) + \frac{1}{3}(8) + \frac{1}{6}(2)}{1/0} = 5$$

اگر همین مسئله را با فاصله‌ی مستطیلی حل کنیم، باز هم همین جواب به دست خواهد آمد.

برخی مواقع، منحنی‌های تراز برای مسأله‌ی گرانشی نیز مورد توجه قرار می‌گیرند که کاملاً به‌راحتی به دست می‌آیند. فرض کنید منحنی تراز برای دو حالت ساده‌ی مسأله‌ی گرانشی، به صورت نشان داده شده در شکل ۲—۲—۱ باشد. در حالت اول، یک سرویس‌دهنده‌ی یکتا موجود است. در حالت دوم، یک وضعیت جابه‌جایی یکسان بین سرویس‌دهنده‌ی جدید و هر یک از دو سرویس‌دهنده‌ی موجود برقرار است. نشان دادن این‌که منحنی‌های تراز در این حالت دوایر متحدالمرکزی هستند که مرکز آن‌ها نقطه‌ی بهین است،بسیار ساده است. سؤالی که در این‌جا ممکن است مطرح شود این است که اگر ما هر تعداد از سرویس‌دهنده‌های موجود با شرایط جابه‌جایی غیر یکسان داشته باشیم، آن‌گاه منحنی تراز به چه شکل است؟ اثبات این‌که در این حالت نیز منحنی‌های تراز، دوایر متحدالمرکز به مرکزیت مکان بهینه خواهند شد، قابل ملاحظه و به صورت زیر است

می‌خواهیم با استفاده از ۲—۲ مجموعه‌ای از نقاط x و y را به گونه‌ای تعیین کنیم که

$$k = \sum_{i=1}^{m} w_i \left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right] \qquad (2-6)$$



شکل ۲—۱: منحنی‌های تراز

که k یک عدد ثابت است. با بسط جملات توان دوم داریم

$$k = x^{۲} \sum_{i=۱}^{m} w_i - ۲x \sum_{i=۱}^{m} w_i a_i + \sum_{i=۱}^{m} w_i a_i^{۲} + y^{۲} \sum_{i=۱}^{m} w_i - ۲y \sum_{i=۱}^{m} w_i b_i + \sum_{i=۱}^{m} w_i b_i^{۲}$$

اگر $W = \sum_{i=۱} m w_i$، باتقسیم ۲—۲—۱ بر W، به‌کارگیری ۲—۴ و ۲—۵ و کمی ساده‌سازی، معادله‌ی دایره‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$r^{۲} = (x - x^{\star})^{۲} + (y - y^{\star})^{۲}$$

که مرکز آن $(x^{\star}, y^{\star})$ و شعاع آن برابر است با

$$r = \left[k/w + (x^{\star})^{۲} + (y^{\star})^{۲} - \sum_{i=۱}^{m} \frac{w_i \left(a_i^{۲} + b_i^{۲}\right)}{W} \right]^{۱/۲}$$

این یک نتیجه‌ی جالب و غیر شهودی است. بنابراین، اگر قادر به تعیین مکان سرویس‌دهنده‌ی جدید در نقطه‌ی بهین نباشید و مجبور باشید مکان‌های دیگر را ارزش‌گذاری کنید، لازم است نقطه‌ای را بیابید که کمترین فاصله‌ی مستقیم‌الخط تا نقطه‌ی $(x^{\star}, y^{\star})$ را داشته باشد.

۲–۲–۲ مدل p–میانه‌ی گرانشی

برای ساده سازی، مسئله را روی شبکه پیاده‌سازی می‌کنیم. مدل با استفاده از یک تابع زوال عمومی فاصله گسترش داده شده است. فرض کنید مجموعه‌ی N از اندازه‌ی n، مجموعه‌ی تمام گره‌ها باشد. u_{ij} را به صورت سود سرویس‌دهنده‌ی واقع در گره‌ی j برای یک متقاضی در گره‌ی i تعریف می‌کنیم. یعنی احتمال این‌که متقاضی موجود در گره‌ی i از سرویس‌دهنده‌ی واقع در گره‌ی j سرویس‌دهی شود، متناسب با u_{ij} است. این اندازه سود به فاصله‌ی گره i تا گره j و قدرت جذب سرویس‌دهنده‌ی واقع در گره‌ی j بستگی دارد. از آن‌جا که مکان‌های مختلف، قدرت کِشندگی و جذب متفاوتی دارند، و با نظر گرفتن این‌که فاصله‌ی گره‌ی i تا j ممکن است با فاصله‌ی گره‌ی j تا i متفاوت باشد، بنابراین این امکان وجود دارد که $u_{ij} \neq u_{ji}$. فرض کنید P از اندازه‌ی p، مجموعه گره‌هایی باشد که سرویس‌دهنده‌ها در آن‌جا قرار داده می‌شوند. احتمال این‌که یک متقاضی در گره‌ی i توسط سرویس‌دهنده‌ی $k \in P$ سرویس‌دهی شود برابر است با

$$\frac{u_{ik}}{\sum_{j\in P} u_{ij}}.$$

پس تقسیم تقاضا در گره‌ی i، یعنی w_i که توسط سرویس‌دهنده‌ی k انجام می‌شود، برابر است با

$$w_i \frac{u_{ik}}{\sum_{j\in P} u_{ij}}.$$

تابع هدف $f(P)$، کل فاصله‌ی طی شده توسط تمام متقاضیان تا سرویس‌دهنده‌ی مورد نظرشان، برای یک مجموعه سرویس‌دهنده‌ی P، برابر است با

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{i\in N}\sum_{k\in P} w_i d_{ik}\frac{u_{ik}}{\sum_{j\in P} u_{ij}} = \sum_{i\in N}\left(\frac{w_i}{\sum_{j\in P} u_{ij}}\sum_{k\in P} u_{ik} d_{ik}\right) \\ &= \sum_{i\in N}\left(w_i \frac{\sum_{k\in P} u_{ik} d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}}\right) . \end{aligned}$$

مدل p—میانه‌ی گرانشی عبارت است از

$$\min_{P}\left\{\ f(P)=\ \sum_{i\in N}\left[w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right]\right\} \tag{۷—۲}$$

۳—۲ ویژگی‌های مدل p—میانه‌ی گرانشی

فرض کنید تابع هدف p—میانه‌ی **استاندارد**، $f_{min}(P)$، به صورت زیر تعریف شود

$$f_{min}(P)=\sum_{i\in N}w_i\min_{k}\{d_{ik}\}.$$

در این‌صورت یکی از ویژگی‌های مدل گرانشی در قالب قضیه‌ی زیر آمده است.

قضیّه ۱.۲ مقدار تابع هدف p—میانه‌ی استاندارد نابیشتر از مقدار تابع هدف برای مسئله‌ی p—میانه‌ی گرانشی است. یعنی

$$f_{min}(P)\le f(P).$$

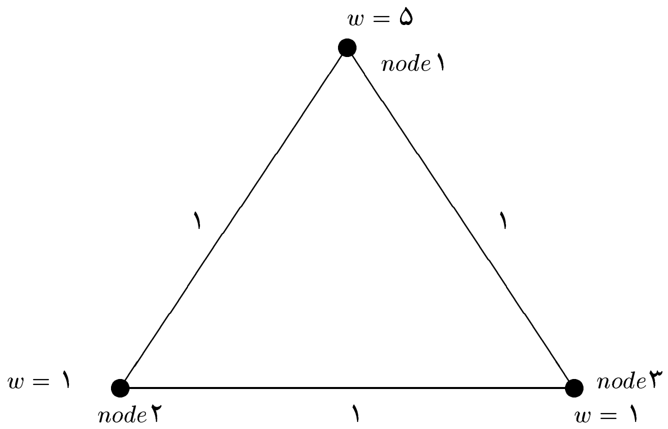
اثبات.

$$\begin{aligned} f(P)=\sum_{i\in N}\left(w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right) &\ge \sum_{i\in N}\left(w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}\min_{k\in P}\{d_{ik}\}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right)\\ &=\sum_{i\in N}w_i\min_{k\in P}\{d_{ik}\}=f_{min}(P)\end{aligned}$$

□

اثبات لم زیر واضح است.

لم ۱.۲ مسئله‌ی ۱—میانه‌ی گرانشی، معادل مسئله‌ی ۱—میانه‌ی استاندارد است.



شکل ۲—۲: یک مثال نقض برای خاصیت حکیمی

۲—۳—۱ خاصیت حکیمی در مدل p—میانه‌ی گرانشی

در این‌جا فرض می‌شود سرویس‌دهنده‌ها روی گره‌های شبکه قرار داده شوند. خاصیت حکیمی [۱۴] و [۱۵] که بر طبق آن مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌های جدید باید روی گره‌ای در شبکه باشد، برای مسئله‌ی p—میانه‌ی گرانشی برقرار نیست. برای $p = ۱$، خاصیت حکیمی طبق لم ۱.۲ برقرار است. پس برای اثبات این‌که مسئله‌ی p—میانه‌ی گرانشی این ویژگی را دارا نیست، کافی است یک مثال نقض با $p > ۱$ پیدا شود. درزنر و درزنر[۳] پس از تلاش‌های بسیار توانستند مثال زیر را با $p = ۲$ پیدا کنند.

مثال ۲.۲ مسألِه‌ی زیر با سه نقطه‌ی تقاضا به‌صورت نمایش داده شده در شکل ۲—۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع سود برابر است با $u_{ik} = e^{-۲d_{ik}}$. واضح است که یکی از دو سرویس‌دهنده در گره‌ی ۱ قرار داده خواهد شد. در نمودار شکل ۲ ، کل فاصله برای مثال ۲—میانه‌ی گرانشی را زمانی‌که سرویس‌دهنده‌ی دوم در فاصله‌ی بین صفر و ماکزیمم ممکن (۱.۵) از گره‌ی ۱ تعیین محل شد، نمایش می‌دهد. مکان بهینه در فاصله‌ی ۱.۵ از سرویس‌دهنده‌ی اول، یعنی در وسط ضلع پایینی مثلث است.

دقت کنید که گره‌های ۲ و ۳ مینیمم‌های محلّی هستند.

۲—۳—۲ به‌کارگیری یک تابع زوال یکسان برای تمام متقاضیان

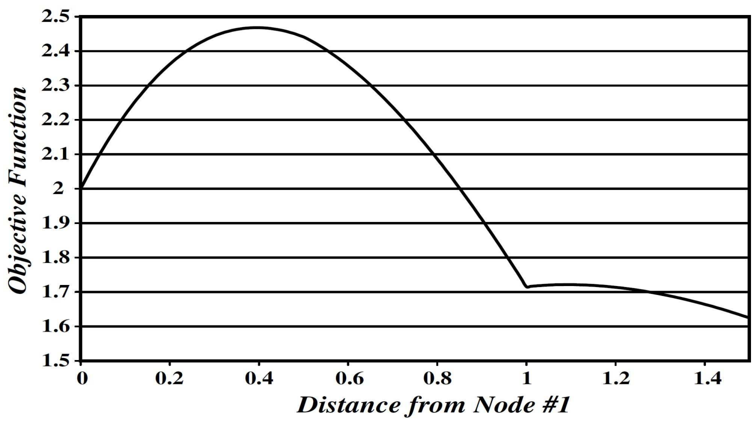
تابع سود یک تابع غیرصعودی از فاصله است [۳]. تابع هدف مسأله‌ی p—میانه‌ی گرانشی با یک تابع زوال مفروض $u(d)$ و قدرت جذب α_k در گره‌ی k، $f(P,u)$، برابر است با

$$f(P,u) = \sum_{i\in N}\left[w_i \frac{\sum_{k\in P}\alpha_k u(d_{ik})d_{ik}}{\sum_{k\in P}\alpha_k u(d_{ik})}\right] \qquad (۸—۲)$$

تذکر ۱.۲ در این‌جا از یک تابع زوال یکسان برای تمام سرویس‌دهنده‌ها استفاده شده است. می‌توان از توابع زوال دیگری مانند $u(d) = d^{-\lambda}$ و $u(d) = e^{-\lambda d}$ نیز استفاده کرد. توجه کنید که این توابع لزوماً نسبت به فاصله، غیر صعودی هستند.

در مسأله‌ی p—میانه‌ی استاندارد سرویس‌دهنده‌ها با یکدیگر تفاوتی ندارند. مدل p—میانه‌ی گرانشی با تخصیص کشش‌هایی با اندازه‌های متفاوت برای مکان‌های متفاوت، گسترش داده شده است. می‌توان همواره قرار داد $\alpha_k = ۱ \quad \forall k$.

بر اساس مدل گرانشی، احتمال این‌که یک متقاضی، مشتری یک سرویس‌دهنده شود نسبت مستقیم با قدرت جذب و نسبت عکس با برخی توابع نسبت به فاصله دارد. این تابع ازفاصله، به تابع زوال فاصله، $F(d)$ معروف است. طبق مدل هاف[۲۰، ۲۱] و ناکانیشی و کوپر[۲۹]، برای برخی مقادیر λ، $F(d) = d^{\lambda}$ است. هیچ‌گونه مطالعه و تحقیقی در مورد تابع زوال فاصله برای مراکز خرید صورت نگرفته است. اما در برخی مقالات توان‌های متفاوتی از فاصله برای فروشگاه‌های مختلف در نظر گرفته شده است. به‌عنوان مثال توان برای تابع زوال فاصله برای یک اساس‌فروشی برابر ۲/۷۳۲، برای یک مرکز خرید لباس برابر ۳/۱۹۱ و برای یک سوپر مارکت برابر ۳ در نظر گرفته شده است. اگر متقاضیان زمان بیشتری را صرف خرید کنند، توان عدد کوچکتری خواهد شد. برای مثال چون انتظار می‌رود زمان رفت



شکل ۲—۳: نمودار تابع هدف برای مثال نقض

و برگشت تا یک مرکز خرید بیشتر از زمان رفت و برگشت تا یک سوپر مارکت باشد، بنابراین توان تابع زوال آن نیز عددی بین ۲ و ۲/۵ است. همچنین ثابت شده است که برای یک سوپر مارکت $F(d) = e^{\varphi d^\omega}$ که $\varphi = ۱/۷۰۵$ و $\omega = ۰/۰۴۰۹$ است.

دو تابع زوال $u(d)$ و $v(d)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید u با سرعت بیشتری نسبت به v نزول می‌کند. یعنی اگر $d_۲ \geq d_۱$ آن‌گاه داریم

$$\frac{u(d_۲)}{u(d_۱)} \leq \frac{v(d_۲)}{v(d_۱)}. \qquad (۹—۲)$$

اگر شرط ۲—۹ برقرار باشد، می‌گوییم تابع u بر v غالب است که با $v \prec u$ یا $u \succ v$ نمایش داده می‌شود.

با توجه به ۲—۹ و با در نظر گرفتن $\epsilon > ۰$ داریم

$$\frac{u(d+\epsilon)-u(d)}{u(d)} \leq \frac{v(d+\epsilon)-v(d)}{v(d)}.$$

که این رابطه برای توابع زوال مشتق‌پذیر u و v معادل زیر است

$$\frac{d}{dd}ln(u(d)) \leq \frac{d}{dd}ln(v(d)). \qquad (۱۰—۲)$$

فرض کنید $f(P,u)$ و $f(P,v)$ مقادیر تابع هدف ۲—۷ به ترتیب با توبع زوال $u(d)$ و $r(d)$ باشند. نشان می‌دهیم هرگاه $u \prec v$ آن‌گاه $f(P,u) \leq f(P,v)$. برای اثبات، نشان می‌دهیم میانگین فاصله برای هر گره در معادله‌ی ۲—۸ برای تابع زوال فاصله‌ی $u(d)$ کمتر است. یعنی

$$\frac{\sum_{k\in P} \alpha_k u(d_{ik}) d_{ik}}{\sum_{k\in P} \alpha_k u(d_{ik})} \leq \frac{\sum_{k\in P} \alpha_k v(d_{ik}) d_{ik}}{\sum_{k\in P} \alpha_k v(d_{ik})}. \quad (۲—۱۱)$$

فرض کنید $\{ d_{ik}, k \in P\}$ از اندازه‌ی P، مجموعه‌ای از فاصله‌های مرتب شده به صورت صعودی باشد که دنباله‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$D_1 \leq D_2 \leq D_3 \leq \cdots \leq D_P.$$

اثبات قضیه‌ی زیر بسیار طولانی است و درنتیجه مورد بحث قرار داده نمی‌شود. علاقه‌مند می‌تواند برای مشاهده‌ی اثبات به [۳] مراجعه کند.

قضیّه ۲.۲ اگر $u \prec v$ آن‌گاه $f(P,u) \leq f(P,v)$.

لم ۲.۲ مقدار $\lim\limits_{i\to\infty} f(P,u_i)$ برای یک دنباله‌ی نامتناهی از توابع زوال $u_1 \succ u_2 \succ \cdots$ موجود است.

اثبات. بنابر قضیه‌ی ۲.۲، دنباله‌ی $f(P,u_i)$ به‌طور یکنوا نزولی و از پایین به ۰ کران‌دار است. بنابراین مقدار حد موجود است. □

قضیّه ۳.۲ دنباله‌ی $u_1(d), u_2(d), \cdots$ را در نظر بگیرید به طوری‌که برای دو عدد مفروض $\{d, \Delta\} \geq ۰$ داشته باشیم $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{u_j(d,\Delta)}{u_j(d)} = ۰$. آن‌گاه حد جواب مسأله‌ی p—میانه‌ی گرانشی روی $u_k(d)$، جواب مسأله‌ی p—میانه‌ی استاندارد است.

اثبات. با استفاده از ۲–۸، $f(P,u_j)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(P,u_j)=\sum_{i\in N}\left[w_i\frac{\sum_{k\in P}\alpha_k u_j(d_{ik})d_{ik}}{\sum_{k\in P}\alpha_k u_j(d_{ik})}\right] \tag{۲–۱۲}$$

δ_j را برای یک j مفروض به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\delta_j=\frac{\sum_{k\in P}\alpha_k u_j(d_{ik})d_{ik}}{\sum_{k\in P}\alpha_k u_j(d_{ik})}$$

فرض کنید $d_{\min}$ برابر با مینیمم فاصله برای گره‌ی i تا تمام $k\in P$، C از اندازه‌ی $c\geq ۱$ برابر با مجموعه‌ی تمام $k\in P$ برای این‌که فاصله برابر با $d_{\min}$ و $d_{\min+\Delta}$ برابر با کمترین فاصله‌ی بزرگ‌تر از $d_{\min}$ باشد. در این‌صورت

$$\delta_j=\frac{\sum_{k\in C}\alpha_k u_j(d_{\min})d_{\min}+\sum_{k\in P-C}\alpha_k u_j(d_{ik})d_{ik}}{\sum_{k\in C}\alpha_k u_j(d_{\min})+\sum_{k\in P-C}\alpha_k u_j(d_{ik})}.$$

با تقسیم صورت و مخرج بر $u_j(d_{\min})$ داریم

$$\delta_j=\frac{d_{\min}\sum_{k\in C}\alpha_k+\sum_{k\in P-C}\alpha_k d_{ik}\frac{u_j(d_{ik})}{u_j(d_{\min})}}{\sum_{k\in C}\alpha_k+\sum_{k\in P-C}\alpha_k\frac{u_j(d_{ik})}{u_j(d_{\min})}}.$$

برای $k\in P-C$ داریم $d_{ik}\geq d_{\min}+\Delta$. همچنین از فرض قضیه داریم $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{u_j(d_{ik}}{u_j(d_{\min})}=۰$. بنابراین $\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=d_{\min}$ و اثبات کامل می‌شود. □

۲–۳–۳ مثال‌ها

۱) تابع زوال نمایی $u(d)=e^{-\lambda d}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lambda_۲>\lambda_۱$ آن‌گاه از ۲–۱۰ و قضیه‌ی ۲.۲ نتیجه می‌شود که تابع هدف به ازای $\lambda_۲$ کمتر است. در واقع تابع هدف برای دنباله‌ی $\lambda=$

$\{۱,۲,۳,\cdots\}$ کاهش می‌یابد و با توجه به قضیه‌ی ۲.۲ حد مقدار تابع هدف موجود است. اثبات این‌که شرایط قضیه‌ی ۳.۲ برقرارند بسیار ساده است. پس مقدار حد با مقدار تابع هدف برای مسأله‌ی p—میانه‌ی استاندارد برابر است.

۲) تابع زوال $u(d) = d^{-\lambda}$ در نقطه‌ی $d = ۰$ تعریف نشده است. با استفاده از شرط ۲—۱۰ و با درنظر گرفتن این‌که $\lambda_۲ > \lambda_۱$، در این‌صورت اگر $d \geq ۱$ آن‌گاه تابع هدف به ازای $\lambda_۲$ کمتر است. فرض کنید $d_{\min}$ برابر با مینیمم فاصله‌ی بین دو گره‌ی متفاوت باشد. در این صورت تابع $\left[\frac{d_{\min}}{d}\right]^{\lambda}$ برای تمام نقاط تعریف شده است (برای $d = ۰$ مقدار کسر برابر یک در نظر گرفته شده است.). تابع هدف برای دنباله‌ی $\lambda = ۱,۲,۳,\cdots$ کاهش می‌یابد و با توجه به لم ۲.۲ حد مقدار تابع هدف موجود است. اثبات این‌که شرط قضیه‌ی ۳.۲ برای $d > ۰$ برقرار است و در نتیجه‌ی آن، مقدار حد برابر با مقدار تابع هدف برای مسأله‌ی p—میانه‌ی استاندارد است، کار ساده‌ای است.

۳) تابع زوال دیگری که توسط درزنر پیشنهاد شده است عبارت است از $u(d) = ۱/\cosh(\lambda d^۲) = ۲/e^{\lambda d^۲} + e^{-\lambda d^۲}$ که نسبت به فاصله به‌طور یکنوا صعودی است اما نمودار آن شبیه $''S''$ است. برای dهای کوچک به آرامی نزول می‌کند و برای dهای بزرگ به طور مجانب به صفر همگراست. این تابع، تابعی مغلوب نیست و توابع دیگر را نیز مغلوب نمی‌کند.

۴) سؤالی که ممکن است این‌جا به نظر برسد این است که آیا برای یک مقدار λ، تابع زوال نمایی فاصله، اُفت سریع‌تری نسبت به تابع زوال توانی دارد. جواب این سؤال بستگی به فاصله دارد. بنابر شرط ۲—۱۰ داریم $-\lambda \leq -\lambda \ln(d)$، که نتیجه می‌دهد $d \geq e = ۲/۷$. بنابراین اُفت تابع نمایی برای dهای بزرگ، سریع‌تر است.

۲–۴ حل مسأله‌ی p–میانه‌ی گرانشی

در این بخش دو الگوریتم ابتکاری[۹] برای حل مسأله‌ی p–میانه‌ی گرانشی که توسط درزنر و درزنر در [۳] آورده شده است ارائه می‌دهیم: روش تندترین کاهش[۱۰] و جستجوی تابو[۱۱]. روش‌های دیگری مانند روش شبیه سازی تبریدی[۱۲] و یا الگوریتم ژنتیک[۱۳] نیز می‌توانند برای حل این مسأله به‌کار گرفته شوند. درزنر و درزنر[۳] مجموعه‌ای شامل ۴۰ مسأله را برای آزمایش الگوریتم‌های ابتکاری پیشنهادی به‌کار گرفتند.

۲–۴–۱ روش تندترین کاهش

الگوریتم تندترین کاهش را با روش پیشنهادی توسط تیتز و بارت[۱۴] [۳۷] برای مسأله‌ی p–میانه‌ی استاندارد به صورت زیر ایجاد شده است:

۱) مجموعه‌ای از p مکان تصادفی برای سرویس‌دهنده‌ها،از اندازه‌ی p در نظر بگیرید.

۲) تمام $p(n-p)$ حالت ممکن از جابه‌جایی یک سرویس‌دهنده‌ی مجموعه‌ی P را با سرویس‌دهنده‌ای که در P موجود نیست، بررسی کنید.

۳) اگر یک جابه‌جایی باعث بهبود تابع هدف شد آن‌گاه مجموعه‌ی P را به‌روزرسانی کنید و به مرحله‌ی ۲ بروید.

---

[۹] Heuristic algorithm

[۱۰] Steepest descent

[۱۱] Tabu search

[۱۲] Simulated annealing

[۱۳] Genetic algorithm

[۱۴] Teitz and Bart

۴) اگر تمام جابه‌جایی‌ها در p باعث بهبود در مقدار تابع هدف نشدند، در آخرین P به‌عنوان جواب توقف کنید.

از همین روش می‌توان برای مسأله‌ی p—میانه‌ی گرانشی نیز استفاده کرد. در قسمت بعد، چگونگی محاسبه‌ی تغییر در مقدار تابع هدف به ازای یک تغییر در مجموعه‌ی P نشان داده شده است.

حرکت یک سرویس‌دهنده به گره‌ی دیگر

محاسبه‌ی مقدار $f(P)$ دارای مرتبه‌ی زمانی $O(np)$ است. از ساده‌سازی زیر می‌توان برای محاسبه‌ی تفاوت بین مقدار تابع هدف، زمانی‌که یک سرویس‌دهنده به گره‌ی دیگر حرکت داده می‌شود استفاده کرد. فرض کنید تغییر مکان یک سرویس‌دهنده از گره‌ی $r \in P$ به گره‌ی $s \notin P$ با تعریف مجموعه‌ی جدید P' همراه باشد. برای هر مقدار i، دو مقدار $\beta_i(P)$ و $\alpha_i(P)$ را به‌صورت زیر در حافظه‌ای جداگانه ذخیره کنید:

$$\alpha_i(P) = \sum_{j \in P} u_{ij}.$$

$$\beta_i(P) = \sum_{j \in P} u_{ij} d_{ij},$$

در این‌صورت مقدار تابع هدف برابر است با

$$f(P) = \sum_{i \in N} \frac{w_i \beta_i(P)}{\alpha_i(P)} \qquad (۱۳—۲)$$

حال تعریف می‌کنیم

$$\alpha_i(P') = \alpha_i(P) + u_{is} - u_{ir}$$

همچنین

$$\beta_i(P') = \beta_i(P) + u_{is}d_{is} - u_{ir}d_{ir}$$

و مقدار جدید تابع هدف برای P' را می‌توان با استفاده از ۲—۱۳ با مرتبه‌ی زمانی $O(n)$ محاسبه کرد.

۲—۴—۲ جستجوی تابو

در این مسأله از ترکیب الگوریتم‌های تندترین کاهش و جستجوی تابو برای به دست آوردن جواب‌های بهتر استفاده شده است. جستجوی تابو با شروع از جواب نهایی الگوریتم تندترین کاهش و حرکت‌های متوالی به سمت جواب‌های بهتر و همچنین برعکس، یک جواب در مینیمم محلی بهتر را جستجو می‌کند. در کل، جستجوی تابو را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد. یک منظره با تعداد زیادی تپّه را در نظر بگیرید که مینیمم‌های محلّی را نمایش می‌دهند. جواب نهایی الگوریتم تندترین کاهش یک مینیمم محلّی است. بنابراین در ابتدای جستجوی تابو، درون یک چاله بین دو تپّه هستیم. امّا برای ادامه‌ی جستجو و حرکت به سمت چاله‌ی عمیق‌تر باید به سمت بالا حرکت کنیم. دقت داشته باشید برای رهایی از یک حفره، حدّاقل در طول یک تعداد مفروض[۱۵] (T) از حرکت‌های آغازین، اجازه‌ی حرکت به سمت عقب داده نخواهد شد[۱۶]. بنابراین جستجو به سمت حفره‌ای که در آن قرار داریم «سُر نمی‌خورد». پس از این‌که کل حرکت‌های T یک‌بار اجرا شد، دوباره اجازه‌ی حرکت به سمت عقب داده خواهد شد. در حقیقت محدودیّتی در جستجو وجود ندارد.

در استفاده‌ای که از کاربرد تابو در این مسأله شده است، لیست تابو شامل تمام گره‌ها از مجموعه‌ی p گره‌ی منتخب در طول تکرارهای اخیر است. بنابراین نمی‌توان دوباره آن‌ها را برای تکرارهای دیگر T

[۱۵] the tabu tenure

[۱۶] تشکیل لیست تابو Constituiting the tabu list

انتخاب کرد.

۲–۴–۳ الگوریتم جستجوی تابو

۱) جواب به دست آمده از الگوریتم کاهشی را به‌عنوان یک جواب آغازین برای الگوریتم جستجوی تابو و همچنین به‌عنوان بهترین جواب پیدا شده تاکنون، در نظر بگیرید. لیست تابو را خالی کنید.

۲) نگهدارنده‌ی تابو، T، را از بازه‌ی $[t_{\min}, t_{\max}]$ انتخاب کنید. تمام زوج مرتب‌های (گره‌های انتخاب شده , گره‌های انتخاب نشده) را به ترتیب تصادفی، جستجو و تغییر در تابع هدف را به ازای حرکت یک سرویس‌دهنده از یک گره‌ی انتخاب شده به سمت یک گره‌ی انتخاب نشده بررسی کنید.

۳) اگر یک حرکت (تغییر مکان) منجر به جوابی بهتر از جواب پیدا شده است، مکان سرویس‌دهنده را در این جهت تغییر دهید. بهترین جواب پیدا شده را بهنگام و لیست تابو را خالی کنید و به مرحله‌ی ۲ بروید.

۴) اگر هیچ‌کدام از جابه‌جایی‌ها، جواب بهتری را به همراه نداشت آن‌گاه

- حرکتی را که منجر به بهترین مقدار تابع هدف (چه بهبود دهنده و چه برعکس) شده است (تا زمانی‌که نگهدارنده برای گره‌های انتخابی که در لیست تابو موجودند، از T تجاوز نکند) انتخاب کنید.

- گره‌ی انتخاب شده را به لیست تابو اضافه کنید.

- اگر طول لیست تابو از $t_{\max}$ تجاوز می‌کند، گره‌ای که در بیشترین تکرار در لیست نگه‌داشته شده است را از لیست خارج کنید.

۵) اگر تعداد تکرارهای از پیش تعیین شده حاصل نشده است، به مرحله‌ی ۲ بروید.

پارامترهای در نظر گرفته شده در این‌جا عبارت‌اند از $t_{\min} = ۰.۱ \times n$ و $t_{\max} = ۰.۲ \times n$. تعداد تکرارها نیز برابر $۵n$ است.

۲—۵ مثال‌های عددی

روش ابتکاری ذکر شده، روی ۴۰ مسأله‌ی مربوط به مدل p—میانه‌ی استاندارد آزمایش شده است. در این مسائل تعداد گره‌ها بین ۱۰۰ تا ۹۰۰ و تعداد سرویس‌دهنده‌ها بین ۵ تا ۲۰۰ در نظر گرفته شده است. فرض کنید برای تمام kها $\alpha_k = ۱$ است. دو تابع زوال مورد آزمایش، توابع $u_۱(d) = \frac{۱}{۱+d^۲}$ و $u_۲(d) = e^{-d}$ هستند. قابل توجه است که عدد ۱ در مخرج کسر اوّلین تابع زوال ، $u_۱(d)$، باعث می‌شود تا حالت تقسیم بر صفر به وجود نیاید. علاوه بر این وجود عدد ۱ در مخرج به این معنی است که فضای نمایش داده شده توسّط هر گره تقریباً برابر است با $\frac{۱}{۰/۲۴}$ است. این موضوع را به صورت ریاضی می‌توان این‌گونه شرح داد که گره‌ها نقاطی در فضا هستند و این به این معنا نیست که تمام متقاضیان در موقعیت یکسان مکانی قرار دارند. احکام و نتایج حاصل از این بررسی در [۶] و با عنوان «فاصله‌ی صحیح» ارائه شده است که تقریباً برابر با ۲۴% از فضای نمایش داده شده توسط یک گره، برای محاسبه‌ی فواصل گوناگون بین متقاضیان موجود در یک گره و سرویس‌دهنده است.

در جدول ۱.۲ ، نتایج محاسبات با به کارگیری $u_۱(d) = ۱/(۱ + d^۲)$ گزارش داده شده است. زمان

n	p	best known (BK)	descent percent over (BK) Min	Ave.	Max	times(BK) found	total time (second)	tabu serch percent over (BK) Min	Ave.	Max	times(BK) found	total time (second)
100	5	8012.115	0	0	0	1000	2.76	0	0	0	10	3.30
100	10	6850.371	0	0.007	0.023	573	6.61	0	0	0	10	5.97
100	10	7071.600	0	0	0	1000	6.92	0	0	0	10	6.00
100	20	6437.958	0	0	0	1000	14.36	0	0	0	10	10.33
100	33	3447.913	0	0	0	1000	22.88	0	0	0	10	14.06
200	5	10120.714	0	0	0	1000	12.54	0	0	0	10	29.77
200	10	8902.829	0	0.025	0.058	560	31.49	0	0	0	10	56.76
200	20	8699.655	0	0	0	1000	75.31	0	0	0	10	103.79
200	40	6778.697	0	0	0	1000	167.13	0	0	0	10	176.02
200	67	4268.302	0	0.016	0.193	917	275.56	0	0	0	10	229.03
300	5	9834.830	0	0	0	1000	26.14	0	0	0	10	99.47
300	10	10279.790	0	0	0	1000	76.20	0	0	0	10	192.26
300	30	9059.974	0	0	0	1000	310.75	0	0	0	10	509.22
300	60	8301.225	0	0.005	0.039	109	682.83	0	0	0	10	865.08
300	100	6271.200	0	0.035	0.269	432	1082.02	0	0	0	10	1150.81
400	5	10404.405	0	0	0	1000	51.64	0	0	0	10	233.72
400	10	10516.011	0	0.010	0.197	949	128.61	0	0	0	10	453.92
400	40	10644.121	0	0.012	0.091	180	798.42	0	0.001	0.006	8	1583.54
400	80	8794.938	0	0.001	0.034	845	1822.82	0	0	0	10	2690.43
400	133	7531.657	0	0.027	0.159	199	3214.36	0	0.038	0.095	6	3556.92
500	5	11691.122	0	0	0	1000	82.00	0	0	0	10	452.48
500	10	12640.371	0	0	0	1000	197.87	0	0	0	10	885.12
500	50	11008.560	0	0.002	0.015	830	1730.19	0	0	0	10	3821.60
500	100	9780.748	0	0.006	0.027	488	4087.87	0	0	0	10	6427.55
500	167	8291.135	0	0.008	0.135	83	6471.37	0	0	0.002	9	8575.79
600	5	12444.871	0	0	0	1000	108.37	0	0	0	10	777.60
600	10	11973.176	0	0	0	1000	285.23	0	0	0	10	1528.36
600	60	11057.149	0	0.001	0.006	782	3093.34	0	0	0	10	7841.56
600	120	10482.444	0	0.004	0.026	558	7474.39	0	0	0	10	13183.18
600	200	9975.692	0	0.026	0.117	104	11669.39	0	0.005	0.041	4	17573.14
700	5	12909.707	0	0.065	0.223	710	143.89	0	0	0	10	1229.96
700	10	13550.981	0	0	0	1000	389.32	0	0	0	10	2414.69
700	70	12347.303	0	0.010	0.086	304	5388.19	0	0	0	10	14346.50
700	140	11206.771	0	0.002	0.063	927	12877.12	0	0	0	10	24291.64
800	5	13060.535	0	0	0	1000	202.01	0	0	0	10	1841.36
800	10	14360.506	0	0.027	0.053	494	516.82	0	0	0	10	3624.90
800	80	13810.450	0	0.003	0.035	863	8838.19	0	0	0	10	24540.69
900	5	13990.942	0	0.054	0.150	641	263.51	0	0	0	10	2562.56
900	10	13551.330	0	0	0	1000	638.07	0	0	0	10	5051.74
900	90	14359.427	0	0.002	0.009	176	12347.26	0	0	0.001	7	38185.27
average			0	0.009	0.05	743.1	2140.34	0	0.001	0.004	9.6	4778.15

جدول ۱.۲: نتایج محاسبات برای $u(d) = 1/(d^2 + 1)$

کل[۱۷] بر حسب ثانیه، برابر با زمانی است که رایانه نیاز دارد تا تمام تکرارها را برای هر مسأله حل کند. بهترین جواب شناخته شده (BK) در ۷۴٫۳۱% از کل تکرارها مربوط به الگوریتم تندترین کاهش و ۹۶% از کل تکرارها مربوط به جستجوی تابو است. بهترین جواب در حدّاقل ۸۳ تکرار از ۱۰۰۰ تکرار، مربوط به الگوریتم کاهشی و حدّاقل ۴ تکرار در ۱۰ مربوط به جستجوی تابو به دست آمده است. بهترین جواب در ۱۸ مسأله از ۴۰ مسأله با ۱۰۰۰ تکرار، مربوط به الگوریتم کاهشی و در ۳۵ مسأله از ۴۰ مسأله با ۱۰ تکرار، مربوط به جستجوی تابو گزارش شده است. میانگین جواب، ۰٫۰۰۹% بیشتر از میانگین جواب به دست آمده از الگوریتم کاهشی، و تنها ۰٫۰۰۱% بیشتر از میانگین به دست آمده از روش جستجوی تابو گزارش شده است. زمان اجرای الگوریتم جستجوی تابو، به طور میانگین، بیشتر از دو برابر زمان اجرای روش کاهشی است.

در جدول ۲.۲، نتایج محاسبات با به کارگیری $u_۲(d) = e^{-d}$ گزارش داده شده است. در این‌جا نیز الگوریتم کاهشی برای ۱۰۰۰ تکرار و جستجوی تابو برای ۱۰ تکرار در هر مسأله اجرا شده‌است. نتایج منتشر شده در جدول ۲.۲ به خوبی نتایج برای $u_۱$ در جدول ۱.۲ نیست. به طور میانگین، بهترین جواب، تنها در ۴۱٫۲% از تکرارها را از الگوریتم کاهشی و در ۷۵٫۸% از تکرارها زا جستجوی تابو نتیجه شده است. نتیجه‌ی قابل توجه این است که الگوریتم کاهشی در یکی از ۴۰ مسأله، به بهترین جواب نرسید، در حالی‌که این ارقام برای جستجوی تابو به ترتیب ۴ از ۱۰ است. میانگین جواب، ۰٫۱۷۱% بیشتر از میانگین جواب به دست آمده از الگوریتم کاهشی، و تنها ۰٫۰۲۹% بیشتر از میانگین به دست آمده از روش جستجوی تابو گزارش شده است. کل زمان اجرای الگوریتم جستجوی تابو، به طور میانگین، بیشتر از دو برابر زمان اجرای روش کاهشی است. زمان‌های اجرا تقریباً برابر با همان مقادیری است که در جدول ۱.۲ گزارش شده است.

[۱۷] Total time

n	p	best known	descent					tabu serch				
		(BK)	percent	over	(BK)	times(BK)	total time	percent	over	(BK)	times(BK)	total time
			Min	Ave.	Max	found	(second)	Min	Ave.	Max	found	(second)
100	5	5821.041	0	0	0	1000	2.97	0	0	0	10	3.38
100	10	4093.296	0	0.273	1.319	358	7.02	0	0	0	10	6.01
100	10	4250.305	0	0.105	0.883	785	7.59	0	0	0	10	6.10
100	20	3034.318	0	0.390	3.074	294	14.73	0	0	0	10	10.45
100	33	1355.405	0	0.379	1.823	258	22.20	0	0.020	0.204	9	14.37
200	5	7831.242	0	0	0	1000	12.86	0	0	0	10	30.04
200	10	5634.103	0	0.092	0.242	386	32.92	0	0	0	10	57.68
200	20	4447.969	0	0.190	1.176	466	74.71	0	0	0	10	107.07
200	40	2735.869	0	0.456	1.446	108	168.54	0	0.0310	0.711	4	181.04
200	67	1257.575	0	0.333	1.990	40	261.13	0	0.059	0.587	9	239.58
300	5	7712.666	0	0.023	0.334	930	26.31	0	0	0	10	99.95
300	10	6647.564	0	0.	0	1000	76.08	0	0	0	10	194.58
300	30	4386.998	0	0.108	1.201	632	286.38	0	0	0	10	523.33
300	60	2974.343	0	0.165	1.257	84	680.40	0	0.022	0.044	5	882.97
300	100	1736.324	0	0.383	1.181	5	1076.80	0	0.092	0.441	5	1186.62
400	5	8199.870	0	0	0	1000	61.77	0	0	0	10	234.47
400	10	7030.920	0	0.065	0.863	432	144.86	0	0	0	10	457.90
400	40	4827.690	0	0.147	1.008	30	811.33	0	0.007	0.019	6	1598.92
400	80	2860.011	0	0.287	0.867	5	1679.52	0	0.013	0.065	7	2722.89
400	133	1801.309	0	0.350	1.474	3	2736.44	0.016	0.096	0.415	0	3604.96
500	5	9190.862	0	0	0	1000	79.37	0	0	0	10	454.31
500	10	8622.385	0	0.144	1.370	834	223.69	0	0	0	10	891.22
500	50	4653.901	0	0.112	0.670	157	1629.37	0	0.010	0.051	8	3836.78
500	100	2987.836	0	0.287	0.918	5	3653.68	0	0.087	0.337	4	6532.92
500	167	1853.879	0	0.490	1.304	1	5662.90	0.016	0.194	0.456	0	8675.45
600	5	9987.089	0	0.042	0.226	814	115.39	0	0	0	10	779.04
600	10	8377.945	0	0.026	1.279	610	310.92	0	0	0	10	1527.70
600	60	4559.104	0	0.188	0.711	75	3166.25	0	0	0	10	7901.86
600	120	3080.869	0	0.234	0.831	1	7223.19	0.016	0.068	0.138	0	13259.83
600	200	2023.689	0.002	0.477	1.219	0	10432.09	0	0.127	0.293	1	17713.54
700	5	10164.176	0	0.023	0.087	735	149.35	0	0	0	10	1230.94
700	10	9401.786	0	0.017	0.030	435	427.39	0	0	0	10	2419.75
700	70	4774.797	0	0.191	1.011	15	5104.81	0	0.004	0.041	9	14477.39
700	140	3082.594	0	0.297	1.227	4	11739.05	0.014	0.062	0.163	0	24320.75
800	5	10542.875	0	0.011	1.113	990	204.38	0	0	0	10	1841.47
800	10	10070.785	0	0.107	0.654	542	573.29	0	0	0	10	3632.62
800	80	5156.108	0	0.120	0.522	10	8156.04	0	0.001	0.005	8	24588.04
900	5	11226.922	0	0.147	0.641	481	246.17	0	0	0	10	2551.56
900	10	9624.791	0	0.017	0.397	958	674.12	0	0	0	10	5026.66
900	90	5262.915	0	0.161	0.715	2	13037.73	0	0.002	0.016	9	38334.37
average			0	0.171	0877	412.125	2024.84	0.001	0.029	0.100	7.85	4803.96

جدول ۲.۲: نتایج محاسبات برای $u(d) = e^{-d}$

فصل ۳

مدل p—میانه‌ی گرانشی با وزن‌های فازی

۳–۱ مقدمه

در این فصل مدل p–میانه‌ی گرانشی، در حالی‌که وزن‌هادر آن اعدادی فازی هستند مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته شده است. در مسأله‌ی p–میانه‌ی گرانشی، هر متقاضی، سرویس دهنده‌ای را انتخاب می‌کند که لزوماً نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به آن نیست. در این مسأله فرض شده است که متقاضیان حمایت و پشتیبانی خود را بین سرویس‌دهنده‌ها با احتمالی متناسب با کشش و جذب سرویس‌دهنده و همچنین کاهش تابع هدف فاصله تا سرویس‌دهنده، تقسیم می‌کنند. در اکثر این‌گونه مسائل، داده‌ها و اطلاعات ما در مورد شرایط مسأله دقیق و مشخص نیست. به عنوان نمونه، در مثال ۲.۲ وزن‌های نقاط تقاضاهمیشه اعدادی قطعی هستند ولی در عمل ماهیت این وزن‌ها فازی است. برای مثال ممکن است در این مدل w_i، وزن داده شده برای نقطه تقاضای i، به طور قطع مشخص نباشد. در اولین مرحله از حل یک مسأله‌ی مکانیابی، همه‌ی نقاط شبکه جواب‌های شدنی هستند، که درون مجموعه‌ی غالب متناهی، یعنی مجموعه‌ای متناهی شامل حداقل یک جواب شدنی، قرار دارند.

برای بررسی مسائل مکانیابی فازی، لازم است ابتدا مفهوم گراف فازی مورد تحلیل قرار گرفته شود. مدل‌های متعددی از مسائل مکانیابی فازی در [۳۹] آورده شده است. به عنوان مثال شبکه با رأس‌های فازی، شبکه با یال‌های فازی، شبکه با طول‌های فازی از آن جمله‌اند، که ممکن است هریک با دیگری نیز ترکیب شود. در این‌جا شبکه با وزن‌های فازی موضوع بحث است. در این حالت اطلاعات موجود اجازه نمی‌دهند که ارزش قطعی وزن‌هایی که نشان دهنده‌ی اهمیت رأس‌ها هستند را تعیین کنیم. برای مثال عبارت « **وزن رأس v در حدود w است**» را به کار می‌بریم، که نشان می‌دهد وزن رأس v، $w(v)$، یک عدد فازی است. در هر مسأله‌ی مکانیابی با وزن‌ها و طول‌های فازی، تابع هدف، یک مقدار فازی را برای جواب شدنی معرفی می‌کند. سپس با مقایسه‌ی این اعداد و مینیمم گرفتن روی همه‌ی مقادیر

تابع هدف و با استفاده از توابع رتبه‌بندی خطّی، جواب بهینه به دست می‌آید.

در این فصل ابتدا مسأله‌ی p–میانه‌ی گرانشی را در شبکه‌های فازی مورد تحلیل و بررسی قرار داده، سپس با ذکر مثالی مدل این مسأله را با وزن‌های فازی شرح می‌دهیم([۳۸]،[۳۰]، [۲۳]).

۳–۲ منطق فازی و مجموعه‌های فازی

۳–۲–۱ منطق فازی

تئوری مجموعه‌های فازی و منطق فازی را اولین بار پرفسور لطفی زاده[۱] درمقاله ای بنام «مجموعه‌های فازی، اطلاعات و کنترل»[۳۸] در سال ۱۹۶۵ معرفی نمود. هدف اولیه او در آن زمان، توسعه مدلی کارآمدتر برای توصیف فرایند پردازش زبان‌های طبیعی بود. او مفاهیم و اطلاعاتی همچون مجموعه‌های فازی، رویدادهای فازی، اعداد فازی و فازی سازی را وارد علوم ریاضیات و مهندسی نمود.

ریاضیات فازی یک فرا مجموعه از منطق دودوئی است که بر مفهوم درستی نسبی، دلالت می‌کند. منطق کلاسیک هر چیزی را بر اساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد(درست یا غلط، ۰ یا ۱، سیاه یا سفید) ولی منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقدار آن بین صفر و یک است نشان می‌دهد. مثلاً اگر رنگ سیاه را عدد صفر و رنگ سفید را با عدد یک نشان دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی بین صفر و یک خواهد بود. منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم است. بر خلاف دیگران که معتقد بودند که باید تقریب‌ها را دقیق‌تر کرد تا بهره‌وری افزایش یابد، دکتر لطفی زاده معتقد بود که باید به دنبال ساختن مدل‌هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم مدل کند. در منطق ارسطویی، یک دسته بندی درست و نادرست وجود دارد. تمام گزاره‌ها درست یا نادرست هستند. برای

[۱] Lotfi zadeh

مثال جمله« هوا سرد است» در منطق ارسطویی اساساً یک گزاره نمی‌باشد، چرا که مقدار سرد بودن برای افراد مختلف متفاوت است و این جمله اساساً همیشه درست یا همیشه نادرست نیست.

در منطق فازی جملاتی هستند که درستی آن گاهی کم وگاهی زیاد است. گاهی همیشه درست و گاهی همیشه نادرست وگاهی تا حدودی درست است. منطق فازی می تواند پایه‌ریز بنیانی برای فن‌آوری جدیدی باشد که تا کنون هم دست آوردهای فراوانی داشته است.

٣−٢−٢ مجموعه‌های فازی

بنیاد منطق فازی بر شالوده نظریه مجموعه‌های فازی استوار است. این نظریه تعمیمی ازنظریه کلاسیک مجموعه‌ها در علوم ریاضی است. در تئوری کلاسیک مجموعه‌ها، یک عنصر یا عضو مجموعه هست یا نیست در حقیقت عضویت عناصر از یک الگوی صفر و یک (دودوئی) تبعیت می‌کند. اما تئوری مجموعه‌های فازی این مفهوم را بسط می‌دهد و عضویت درجه بندی شده را مطرح می کند. به این ترتیب یک عنصر می‌تواند تا درجاتی و نه کاملاً عضو یک مجموعه باشد.

تعریف ١.٣ اگر X یک مجموعه مرجع باشد آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\tilde{A} \;=\; \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \;\mid\; x \;\in\; X\}$$

که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را تابع عضویت یا تابع سازگاری[٢] می نامند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \;:\; X \;\to\; [\circ, ١]$$

[٢] Member function

که صفر به این معنا است که شیء مورد نظر عضو مجموعه نیست و یک به معنای عضویت کامل شیء نسبت به مجموعه است.

تعریف ۲.۳ پشتیبان[۳] مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با $S(\tilde{A})$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\tilde{A}) = \{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \}$$

تعریف ۳.۳ مجموعه همه عناصری که در میان مجموعه $\tilde{A}$ درجه عضویت آنها حد اقل α باشد را مجموعه α—برش ضعیف می‌نامیم و بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

و مجموعه $\acute{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ را α—برش قوی می نامیم .

۳—۲—۳ اعداد فازی

در این‌جا تنها به تعریف‌های مهم و بنیادی اکتفا می‌کنیم. جهت مرور و مطالعه‌ی بیشتر، می‌توانید به [۳۸]،[۳۰] و [۲۳] مراجعه کنید.

تعریف ۴.۳ اگر مجموعه فازی A بر روی مجموعه مرجع R از اعداد حقیقی، در شرایط زیر صدق نماید آن را عدد فازی می‌نامیم.

الف) A یک مجموعه فازی محدب باشد.

ب) یک x_0 موجود باشد که به ازای آن $\mu_A(x_0) = 1$

ج) μ_A پیوسته باشد.

---
[۳] Support

اعداد فاصله‌ای

در بیشتر مواقع با کلماتی همچون «در حدود، تقریباً و ... » سروکار داریم. برای مثال فاصله در حدود ۵ کیلومتر را با [۴/۵, ۵/۵] ، [۴/۶, ۵/۵] و بازه‌هائی از این قبیل نمایش می‌دهیم و بنابراین در حالت کلی یک عدد فاصله‌ای را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_r\} .$$

که a_L و a_R اعدادی حقیقی هستند و به ترتیب نقطه انتهائی چپ و نقطه انتهائی راست فاصله A نامیده می‌شوند. عدد فاصله‌ای A را بصورت $A = \langle m(A), w(A) \rangle$ نیز نمایش می‌دهیم که $m(A)$ و $w(A)$ بصورت زیر است

$$m(A) = \frac{a_L + a_R}{۲} \qquad , \qquad w(A) = \frac{a_R - a_L}{۲} .$$

اعداد فازی مثلثی

در قسمت قبلی ما فاصله «درحدود ۵ کیلومتر » را در بازه [۴/۵, ۵/۵] بررسی کردیم. بطور مشابه می‌توان فاصله «درحدود ۵ کیلومتر » را با اعداد فازی مثلثی مورد بررسی قرار داد، بطوریکه فاصله ۵ کیلومتر درجه عضویت ۱ و فاصله بین ۵ − ۴/۵ کیلومتر و ۵/۵ − ۵ کیلومتر درجه عضویت بین ۰ و ۱ را می‌گیرد.

بطور کلی یک عدد فازی مثلثی را با سه‌تائی $\tilde{A} = \langle m, \alpha, \beta \rangle$ و با درجه عضویت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\mu(x) = \begin{cases} \circ & for\ x \leq m - \alpha \\ \text{۱} - \frac{m-x}{\alpha} & for\ m - \alpha < x < m \\ \text{۱} & for\ x = m \\ \text{۱} - \frac{x-m}{\beta} & for\ m < x < m + \beta \\ \circ & for\ x \geq m + \beta \end{cases} \qquad (\text{۱—۳})$$

اعداد فازی مثلثی را با $\tilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a})$ نیز نمایش می‌دهند که $\alpha = a - \underline{a}$ و $\beta = \bar{a} - a$ است.

۳—۲—۴ گراف‌های فازی

اولین تعریف گراف فازی توسط کافمن[۴][٢٦] از روی رابطه‌های فازی دکتر لطفی زاده ارائه شد. ولی اساسی‌ترین تعریف گراف‌های فازی توسط رزنفلد[۵][۳۴] ارائه گردید.

تعریف ۵.۳ یک گراف فازی (f—گراف) دارای ساختار $G = (V, E, \sigma, \mu)$ می‌باشد.

V نشان دهنده مجموعه رأس‌ها

E نشان دهنده مجموعه یال‌ها

$\sigma : V \longrightarrow [\circ, \text{۱}]$ نشان دهنده تابع عضویت مجموعه رأس‌ها($\sigma(v) > \circ$ برای هر $v \in V$)

$\mu : E \longrightarrow [\circ, \text{۱}]$ نشان دهنده تابع عضویت مجموعه یال‌ها می‌باشد، و برای هر $u, v \in V$ باید داشته باشیم:

$$\mu(u, v) \ \leq \ \sigma(u) \wedge \sigma(v)$$

به عبارتی درجه عضویت هر یال از درجه عضویت رأس‌های آن یال کمتر و یا حداکثر برابر است.

[۴] Kaufmann

[۵] Rosenfeld

۳—۳ برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی

برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی[۶] ($FILP$) کاربردهای زیادی در رشته‌های مختلف (هوش مصنوعی، تحقیق در عملیات و ...) دارد و چون مدل برنامه ریزی ریاضی مسائل مکانیابی فازی روی شبکه‌ها بصورت برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی است، ازاین مدل برای حل مسأل مکانیابی فازی نیزاستفاده می شود. مسائل برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی در حالت کلی به ۳ دسته تقسیم می‌شوند:

- مسأله $FILP$ با قیدهای فازی
- مسأله $FILP$ با ضرائب فازی در تابع هدف
- مسأله $FILP$ با اعداد فازی در ماتریس ضرائب

در این بخش بر حسب نیاز و به طور مختصر در مورد گزینه‌ی دوم یعنی مسأله $FILP$ با ضرائب فازی در تابع هدف صحبت می‌کنیم.

۳—۳—۱ مسأله $FILP$ با ضرائب فازی در تابع هدف

فرض کنید مدل قطعی برنامه ریزی عدد صحیح بصورت زیر باشد:[۱۸]

$$\begin{array}{lll} \max & z=\sum_j c_j x_j & \\ s.t & \sum_j a_{ij}x_j \le b_i & i\in M=\{1,\cdots,m\} \\ & x_j \ge 0 & \\ & x_j \in \mathbb{Z} & \end{array} \qquad (۳—۲)$$

در این صورت مدل فازی مسأله بصورت زیر است:

[۶] $Fuzzy\ integer\ linear\ programming$

$$\begin{array}{lll} \max & z=\sum_j \tilde{c}_j x_j & \\ s\ .\ t & \sum_j a_{ij}x_j \le b_i & i\in M=\{1,\cdots,m\} \\ & x_j \ \ge \ 0 & \\ & x_j\in\mathbb{Z} & \end{array} \qquad (۳–۳)$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ و $\tilde{c}_j \in F(\mathbb{R})$ که $F(\mathbb{R})$ **مجموعه اعداد فازی حقیقی** است. برای هر جواب شدنی فوق یک مقدار فازی وجود دارد که از تابع هدف فازی بدست می‌آید.

دو روش حل برای این مدل $FILP$ وجود دارد، روش اول روشی است مبتنی بر قضیّه نمایش[۷] و روش دوم روشهای رتبه بندی اعداد فازی[۸] است. که در این قسمت ما روشهای رتبه‌بندی اعداد فازی را بررسی می‌کنیم[۱۸].

استفاده از روش رتبه‌بندی اعداد فازی

فرض کنید X مجموعه جواب‌های شدنی مسأله ۳–۳ باشد و g یک نگاشت از مجموعه جواب‌های شدنی به مجموعه اعداد فازی باشد بطوری که:

$$g: X \longrightarrow F(\mathbb{R}) \qquad , \quad g(x)=\tilde{c}x=\sum \tilde{c}_j x_j \quad , \quad \tilde{c}_j\in F(R)$$

باتوجه به اصل توسیع[۹] در مجموعه‌های فازی داریم:

$$\sum \tilde{c}_j x_j \in F(\mathbb{R})$$

بنابراین کافی است مجموعه اعداد فازی زیر را برای بدست آوردن جواب بهینه بررسی کنیم.

$$A=\{g(x)\mid x\in X\}$$

[۷] Representation theorem

[۸] Fuzzy number ranking methods

[۹] Extension Principle

بنابراین $X^* \in X$ یک جواب بهینه است اگر عدد فازی $g(x^*)$ بزرگترین عدد در مجموعه فازی A باشد، پس هدف ما پیدا کردن بزرگترین عدد در مجموعه فازی A می‌باشد. حال با استفاده از روش رتبه‌بندی اعداد فازی $(FNRM)$ جواب بهینه را بدست می آوریم.
روشهای رتبه‌بندی زیادی برای بدست آوردن بزرگترین عدد فازی مجموعه A وجود دارد. ما در این‌جا روش‌هایی را بررسی می‌کنیم که بصورت یک تابع رتبه‌بندی تعریف می‌شوند، مخصوصاً روش‌هایی که تابع رتبه‌بندی آنها خطی[۱۰] (LRF) است.

تعریف ۶.۳ تابع f تابع رتبه‌بندی خطی است اگر

$$\forall A, B \in F(\mathbb{R})\ ; \forall r \in \mathbb{R}\ , r > 0 \qquad f(A+B) = f(A) + f(B)\ and\ f(rA) = rf(A)$$

فرض کنید از اعداد فازی مثلثی استفاده می‌کنیم، هر عدد فازی مثلثی را بصورت $\tilde{c_j} = (r_j, c_j, R_j)$ نمایش می دهیم و تابع عضویت آنها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall u \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}, \quad \mu_{c_j}(u) = \begin{cases} (u - r_j)/(c_j - r_j) & r_j \leq u \leq c_j \\ (R_j - u)/(R_j - c_j) & c_j \leq u \leq R_j \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (۴-۳)$$

حال فرض می‌کنیم $\tilde{y} = \sum \tilde{c_j} x_j$ باشد، بطوری که $\tilde{c_j}$ ها اعداد فازی مثلثی و برای هر $j \in \mathbb{N}$ $x_j \geq 0$ باشد، آنگاه تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{y}$ بصورت زیر مشخص می‌شود:

[۱۰] Linear ranking function

$$\mu(z) = \begin{cases} h_j(z) = (z - rx)/(cx - rx) & if\ x > 0, \quad rx \le z \le cx \\ g_j(z) = (Rx - z)/(Rx - cx) & if\ x > 0, \quad cx \le z \le Rx \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{۵—۳}$$

بطوری که $R = (R_1, ..., R_n)$، $c = (c_1, ..., c_n)$، $r = (r_1, ..., r_n)$. اگر $d = R - c$ و $d' = c - r$ آنگاه dx و $d'x$ اختلاف راست و چپ عدد فازی $\tilde{c}x$ را نشان می‌دهند. حال یک نگاشت رتبه‌بندی را از هر مجموعه فازی به مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم.

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

بنابراین یک جواب بهینه ۳—۳ با حل مسأله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} \max & f(\tilde{c}x) \\ s\ .\ t & Ax \le b \\ & x_j \ \ge \ 0 \\ & x_j \in \mathbb{Z} \end{array} \tag{۶—۳}$$

بنابراین با استفاده از تابع رتبه‌بندی خطی (LRF) مسأله کمکی (۱۹.۳) به مسأله (ILP) زیر تبدیل می‌شود:

$$\max \left\{ \sum f(\tilde{c}_j)x_j \mid j \in \mathbb{N}\ ,\ x \in X \right\} \tag{۷—۳}$$

بعضی از این مدل‌های کمکی عبارتند از:

الف) با استفاده از اندیس چانگ[11] مسأله زیر بدست می‌آید:

$$\max \left\{ \frac{(dx + d'x)(3cx + dx - d'x)}{6} \mid \ Ax \le b\ \ ,\ x_j \in \mathbb{Z} \right\} \tag{۸—۳}$$

[11] Chang

ب) بااستفاده از اندیس اول، دوم و سوم یاگر[۱۲] به ترتیب روشهای زیر بدست می‌آید:

$$\max\left\{ \ (c+\frac{d-d'}{۳})x \mid \ Ax\leq b \ , \ x_j\geq ۰ \ , \ x_j\in\mathbb{Z}\right\} \tag{۹–۳}$$

$$\max\left\{ \frac{(cx+dx)}{dx+۱} \mid \ Ax\leq b \ , \ x_j\geq ۰ \ , \ x_j\in\mathbb{Z}\right\} \tag{۱۰–۳}$$

$$\max\left\{ (c+\frac{d-d'}{۴})x \mid \ Ax\leq b \ , \ x_j\geq ۰ \ , \ x_j\in\mathbb{Z}\right\} \tag{۱۱–۳}$$

۳–۴ مدل p–میانه‌ی گرانشی با وزن‌های فازی

یک شبکه با وزن‌های فازی به صورت $N=(V,E,\widetilde{W},L)$ نمایش داده می‌شود که یک شبکه با مجموعه رأس‌های $V=\{v_۱,v_۲,\cdots,v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{e_۱,e_۲,\cdots,c_n\}$ است. طول هر یال e_i برابر با $l(e_i)$ و وزن هر رأس i برابر با $\widetilde{w}_i$ است. در این‌صورت تابع هدف مدل مسأله‌ی p–میانه‌ی گرانشی عبارت است از

$$\min\tilde{z}=\sum_{i=۱}^{n}\left[\widetilde{w}_i\frac{\sum_{j=۱}^{n}u_{ij}d_{ij}x_{ij}}{\sum_{j=۱}^{n}u_{ij}x_{ij}}\right] \tag{۱۲–۳}$$

در این حالت برخلاف مسأله‌ی p–میانه‌ی استاندار، با مدل برنامه‌ریزی غیر خطّی روبرو هستیم.

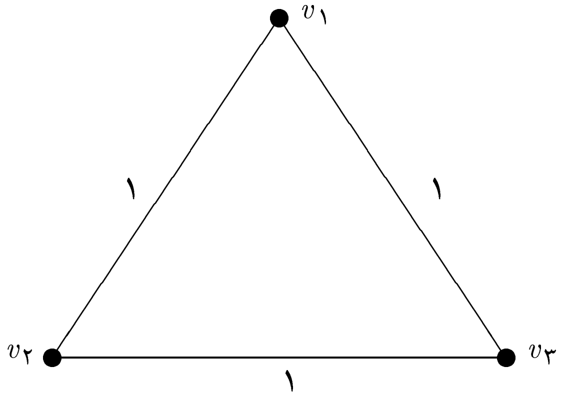
مثال ۱.۳ برای مثال شبکه‌ی نشان داده شده با سه رأس در مثال ۲.۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم ۲–میانه‌ی گرانشی را برای این شبکه به دست آوریم.

وزن رأس‌های $v_۱$، $v_۲$ و $v_۳$ به ترتیب برابر با ۲، ۱٫۵ و ۱ می‌باشد. همچنین تابع زوال فاصله، یعنی $u(d_{ij})$، همان‌گونه که در [۳] پیشنهاد شده است به صورت $u(d_{ij})\ =\ e^{-۲d_{ij}}$ در نظر گرفته شده است

[۱۲] Yager

u_{ij}	v_1	v_2	v_3
v_1	0	e^{-2}	e^{-2}
v_2	e^{-2}	0	e^{-2}
v_3	e^{-2}	e^{-2}	0

جدول ۱.۳: نمایش ماتریسی مقادیر مختلف u_{ij} برای رأس‌های شبکه



شکل ۳—۱: مثال برای وزن‌های فازی

که در آن d_{ij} نشان دهنده‌ی فاصله‌ی سرویس دهنده‌ی j تا نقطه تقاضای i است. در این‌جا مقدار d_{ij} برای هر i و j برابر ۱ قرار داده شده است. جدول ۱.۳ مقادیر u_{ij} را به ازای رأس‌های مختلف نمایش می‌دهد.

حال فرض کنید با دید فازی و با تأکید بر وزن‌ها به مسأله بنگریم. یعنی حالتی‌که w_iها اعداد فازی مثلثی باشند. با توجه به مدل قطعی مسأله، چون w_iها ضرایبی در تابع هدف هستند، بنابراین برای جواب‌های شدنی مختلف، مقادیر فازی مختلفی به دست می‌آید. پس هدف مسأله عبارت است از $\min_x\{f(x)\}$، یعنی پیدا کردن کمترین مقدار از بین تمام این مقادیر فازی.

۳–۴–۱ روش‌های حل

روش‌های مختلفی برای حل مسائل مکانیابی فازی پیشنهاد شده است[۱۸]. یکی از این روش‌ها استفاده از توابع رتبه‌بندی خطّی است که در این‌جا به کار گرفته خواهد شد.

چون هدف عبارت از یافتن کوچک‌ترین عدد فازی از بین یک مجموعه از اعداد فازی است پس با استفاده از روش رتبه بندی، اعداد فازی را با یکدیگر مقایسه کرده و جواب بهینه را به دست می‌آوریم.

برای مقایسه‌ی دو عدد فازی A و B کافی است یک تابع خطّی مانند $f : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ تعریف کنیم به طوری‌که اگر $f(A) > f(B)$، $f(A) < f(B)$ و $f(A) = f(B)$ آن‌گاه به ترتیب نتیجه دهند $A > B$، $A < B$ و $A = B$. هر عدد فازی مثلثی را به صورت $\tilde{c}_j = (r_j, c_j, R_j)$ نمایش می‌دهیم. برای مطالعه‌ی بیشتر در خصوص ویژگی‌های توابع رتبه‌بندی و تابع عضویت می‌توانید به [۱۸] مراجعه کنید.

یک نگاشت رتبه‌بندی از هر مجموعه‌ی فازی به هر مجموعه‌ی اعداد حقیقی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

با استفاده از نگاشت فوق، هر مجموعه از اعداد فازی را به یک مجموعه از اعداد حقیقی می‌نگاریم. از مهمترین این نگاشت‌ها می‌توان به اندیس چانگ[۱۳] و اندیس‌های اوّل، دوم و سوم یاگر[۱۴] اشاره کرد. در این‌جا با استفاده از اندیس‌های اوّل و سوم یاگر جواب‌های فازی و غیر فازی را برای مثال فوق با

[۱۳] Chang

[۱۴] Yager

	$W_{۱}$	$W_{۲}$	$W_{۳}$	جواب	۲−میانه‌ی گرانشی
مدل قطعی	۲	۱/۵	۱	۱/۴۱	$v_{۱}, v_{۲}$
فازی ↓	(۰/۵, ۲, ۲/۵)	(۰, ۱/۵, ۲)	(۰/۵, ۱, ۲/۵)	−−−	−−−
اندیس اول	۱/۶	۱/۱	۱/۳	۱/۴۴	$v_{۱}, v_{۲}$
اندیس سوم	۱/۷	۱/۲	۱/۲	۱/۵۴	$v_{۲}, v_{۲}$

جدول ۲.۳: مقایسه‌ی جواب‌های فازی و قطعی ۲−میانه‌ی گرانشی

یک‌دیگر مقایسه می‌کنیم. فرض کنید $\widetilde{W}_i$ها به صورت زیر باشند:

$$\widetilde{W}_{۱} = (۰/۵, ۲, ۲/۵),\ \widetilde{W}_{۲} = (۱, ۱/۵, ۲),\ \widetilde{W}_{۳} = (۰/۵, ۱, ۲/۵).$$

جواب‌های بهینه‌ی فازی برای اندیس‌های اول و سوم یاگر در جدول ۲.۳ نمایش داده شده است. با توجه به جدول ۲.۳ مشاهده می‌شود در صورتی‌که تقاضاهای ما دامنه تغییرات بیشتری داشته باشند، در این صورت نسبتاً به جواب بهتری دست خواهیم یافت. در حالی‌که اگر این دامنه‌ی تغییرات روی مقادیر قطعی اعمال شوند، جواب بهینه از کیفیت کمتری نسبت به معادل آن در حالت فازی برخوردار است.

فصل ۴

یک مدل جدید برای p—میانه‌ی گرانشی

۴−۱ مقدمه

همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد، اساس مدل گرانشی بر این فرض استوار است که « **احتمال این‌که یک متقاضی، سرویس‌دهنده‌ای را انتخاب کند نسبت مستقیم با قدرت کشش سرویس‌دهنده و نسبت عکس با توانی از فاصله تا آن سرویس‌دهنده دارد**». همچنین هنگامی‌که نقاط تقاضا اجتماعی از متقاضیان باشند و هر متقاضی سرویس‌دهنده‌ی مورد دلخواه خود را انتخاب کند، تقاضاها میان سرویس‌دهنده‌ها تقسیم می‌شوند. متقاضیان بر حسب مکان قرارگیری به چند دسته تقسیم می‌شوند:

۱) متقاضیانی که با هیچ سرویس‌دهنده‌ای در یک مکان قرار ندارند.

۲) متقاضیانی که با دقیقاً یک سرویس‌دهنده هم مکان هستند.

هر متقاضی یا به دسته‌ی اول و یا به دسته‌ی دوم تعلق دارد. به عبارت دیگر مجموعه‌ی متقاضیان به دو دسته‌ی بالا افراز شده است. بنابر قانون گرانشی، تقاضای مربوط به گروه اول بین سرویس‌دهنده‌ها تقسیم می‌شود. حال متقاضیانی را در نظر بگیرید که یک سرویس‌دهنده دقیقاً در مجاورت آن‌ها قرار دارد به گونه‌ای که فاصله‌ی آن‌ها تا سرویس‌دهنده‌ی ذکر شده برابر صفر است. فرض کنید این متقاضیان از قانون گرانشی پیروی کنند. در این صورت با وجود این‌که یک سرویس‌دهنده درست در مجاورت آن‌ها قرار دارد، امّا متقاضیان با احتمالی هرچقدر کم به سرویس‌دهنده‌های دیگر نیز مراجعه می‌کنند.

در مدل جدید برای مسأله‌ی p−میانه‌ی گرانشی، فرض اخیر برای متقاضیان دسته‌ی دوم در نظر گرفته نشده است. به عبارت دیگر متقاضیان گروه دوم از قانون مجاورت پیروی خواهند کرد. یعنی آن‌ها متقاضی نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به خودشان خواهند شد. از طرفی چون فاصله‌ی نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده، برای این دسته از متقاضیان برابر صفر است پس تمام متقاضیان از همین سرویس‌دهنده سرویس‌دهی می‌شوند.

۴−۲ ارائه‌ی مدل جدید برای p−میانه‌ی گرانشی

در این مدل جدید تمام مفروضات مسأله‌ی p−میانه‌ی گرانشی به غیر از تنها یک فرض در نظر گرفته شده است. تقاضاها در مکان سرویس‌دهنده‌ها بین دیگر سرویس‌دهنده‌ها تقسیم نمی‌شوند. ما این مدل را مدل p−میانه‌ی گرانشی خود یاوری یا $SSGP$ [۱] نام‌گذاری کرده‌ایم. در این بخش مدل $SSGP$ را فرموله‌بندی می‌کنیم و خواص آن‌را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم. از آن‌جایی‌که این مدل بسیار شبیه به مدل اصلی است، همان روش‌های ابتکاری به‌کار گرفته شده برای حل مسأله‌ی اصلی را برای حل آن پیشنهاد می‌دهیم.

در این‌جا این مدل جدید با یک تابع زوال یکسان برای تمام فاصله‌ها در نظر گرفته شده است. فرض کنید N از اندازه‌ی n، مجموعه‌ی تمام گره‌ها باشد. u_{ij} را به صورت سود سرویس‌دهنده‌ی واقع در گره‌ی j برای یک متقاضی در گره‌ی i تعریف می‌کنیم. یعنی احتمال این‌که متقاضی موجود در گره‌ی i از سرویس‌دهنده‌ی واقع در گره‌ی j سرویس‌دهی شود، متناسب با u_{ij} است. این اندازه سود به فاصله‌ی گره‌ی i تا گره‌ی j و قدرت جذب سرویس‌دهنده‌ی واقع در گره‌ی j بستگی دارد. از آن‌جا که مکان‌های مختلف، قدرت کِشندگی و جذب متفاوتی دارند، و با نظر گرفتن این‌که فاصله‌ی گره‌ی i تا j ممکن است با فاصله‌ی گره‌ی j تا i متفاوت باشد، بنابراین این امکان وجود دارد که $u_{ij} \neq u_{ji}$ باشد. فرض کنید P از اندازه‌ی p، مجموعه گره‌هایی باشد که سرویس‌دهنده‌ها در آن‌جا قرار داده می‌شوند. احتمال این‌که یک متقاضی در گره‌ی i توسط سرویس‌دهنده‌ی $k \in P$ که در گره‌ی i قرار داده نشده است، سرویس‌دهی شود برابر است با

$$\frac{u_{ik}}{\sum_{j \in P} u_{ij}}.$$

[۱] Self-service gravity p-median problem

بنابراین تقسیم تقاضا در گره‌ی i (که هیچ سرویس‌دهنده‌ای در آن‌جا موجود نیست)، w_i که توسط سرویس‌دهنده‌ی k انجام می‌شود، برابر است با

$$w_i \frac{u_{ik}}{\sum_{j\in P} u_{ij}}.$$

تابع هدف $f(P)$ برای مدل $SSGP$، کل فاصله‌ی طی شده توسط تمام متقاضیان تا سرویس‌دهنده‌ی مورد نظرشان، برای یک مجموعه سرویس‌دهنده‌ی P، برابر است با

$$\begin{aligned} f(P) &= \textstyle\sum_{i\in N-P}\sum_{k\in P} w_i d_{ik}\frac{u_{ik}}{\sum_{j\in P} u_{ij}} = \sum_{i\in N-P}\left(\frac{w_i}{\sum_{j\in P} u_{ij}}\sum_{k\in P} u_{ik}d_{ik}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i\in N-P}\left(w_i\frac{\sum_{k\in P} u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}}\right) \end{aligned}$$

بنابراین مدل p−میانه‌ی گرانشی خود یاوری یا $SSGP$ عبارت است از

$$\min_P\left\{ f(P) = \sum_{i\in N-P}\left[w_i\frac{\sum_{k\in P} u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}}\right]\right\} \qquad (۱-۴)$$

۴−۳ ویژگی‌های مدل $SSGP$

فرض کنید توابع هدف برای مسأله‌ی p−میانه‌ی استاندارد و مسأله‌ی p−میانه‌ی گرانشی استاندارد و $SSGP$ به ترتیب به صورت زیر تعریف شوند:

$$f_{min}(P) = \sum_{i\in N} w_i \min_k\{d_{ik}\}\ ,$$

$$\min_P f(P) = \sum_{i\in N}\left[w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right] \ ,$$

$$SSGP(P) = \sum_{i\in N-P}\left[w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right] \ .$$

در این صورت

قضیّه ۱.۴ اگر توابع هدف مسائل p—میانه‌ی استاندارد، p—میانه‌ی گرانشی استاندارد و مدل جدید $SSGP$ برای یک مجموعه‌ی P از سرویس‌دهنده‌ها را به ترتیب با $f_{\min}(P)$، $f(P)$ و $f_{SSGP}(P)$ نمایش دهیم، آن‌گاه

$$f_{\min}(P) \le f_{SSGP}(P) \le f(P) \ .$$

اثبات. چون در مدل $SSGP$ برای هر $i \in P$ داریم $f_{SSGP}(P) = 0$، بنابراین

$$\begin{aligned} f_{SSGP}(P) &= \textstyle\sum_{i\in N-P}\left[w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right] \\ &= \textstyle\sum_{i\in N}\left[w_i\frac{u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right] \ge \sum_{i\in N}\left[w_i\frac{u_{ik}\min_{d_{ik}}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right] \\ &= \textstyle\sum_{i\in N} w_i \min_k\{d_{ik}\} = f_{\min(P)} \ . \end{aligned} \qquad (۲—۴)$$

برای نامساوی دوّم با استفاده از ۲—۳ و نامساوی اوّل داریم:

$$\begin{aligned} f_{SSGP}(P) &= \textstyle\sum_{i\in N-P}\left(w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i\in N}\left[w_i\frac{u_{ik}d_{ik}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right] \ge \sum_{i\in N}\left(w_i\frac{\sum_{k\in P}u_{ik}\min_{k\in P}\{d_{ik}\}}{\sum_{k\in P}u_{ik}}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i\in N} w_i \min_{k\in P}\{d_{ik}\} = f_{min}(P) \ . \end{aligned} \qquad (۳—۴)$$

□

اثبات لم زیر بسیار ساده است.

لم ۱.۴ مسأله‌ی p−میانه‌ی گرانشی خود یاوری یا $SSGP$ برای $P=1$، معادل مسأله‌ی ۱ −میانه‌ی گرانشی استاندارد و همچنین مسأله‌ی ۱ −میانه‌ی استاندارد است.

قضیّه ۲.۴ فرض کنید $P \in N$ یک جواب بهینه برای مسأله‌ی P−میانه‌ی گرانشی استاندارد باشد، در این صورت P یک جواب بهینه برای $SSGP$ است.

اثبات. فرض کنید $P \in N$ یک جواب بهینه برای مسأله‌ی P−میانه‌ی گرانشی استاندارد باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
f(P) &= \min_P \left\{ f(P) = \textstyle\sum_{i\in N} \left[w_i \frac{u_{ik} d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}} \right] \right\} \\
&= \min_P \left\{ f(P) = \textstyle\sum_{i\in N-P} \left[w_i \frac{u_{ik} d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}} \right] + \textstyle\sum_{i\in P} \left[w_i \frac{u_{ik} d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}} \right] \right\} \\
&= \min_P \left\{ \textstyle\sum_{i\in N-P} \left[w_i \frac{u_{ik} d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}} \right] \right\} + \min_P \left\{ \textstyle\sum_{i\in P} \left[w_i \frac{u_{ik} d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}} \right] \right\} \\
&= \min_P f_{SSGP} + \min_P \left\{ \textstyle\sum_{i\in P} \left[w_i \frac{u_{ik} d_{ik}}{\sum_{k\in P} u_{ik}} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{۴−۴}$$

یعنی، تابع هدف $SSGP$ به ازای مجموعه‌ی انتخابی P کمینه شده است. به عبارت دیگر مجموعه‌ی P شامل گره‌های شبکه، یک جواب بهینه برای $SSGP$ نیز هست. □

دقت شود شرط لازم برای برقراری قضیه‌ی ۲.۴ برقراری خاصیّت حکیمی است یعنی مجموعه‌ی جواب بهینه برای مسأله‌ی p−میانه‌ی گرانشی شامل p گره از مجموعه‌ی N در شبکه‌ی $G=(N,E)$ باشد. به عبارت دیگر مجموعه‌ی جواب، P، شامل گره‌ای روی یال‌ها به‌غیر از ابتدا یا انتهای یال نباشد.

تذکر ۱.۴ در حال حاضر نمی‌توان در مورد عکس قضیه‌ی ۲.۴ اظهار نظر کرد و این امر را به تحقیقات آینده موکول می‌کنیم.

۴−۴ حل مسئله‌ی $SSGP$ با روش ابتکاری

مسأله‌ی p−میانه‌ی گرانشی با استفاده از دو روش ابتکاری سریع‌ترین کاهش و جستجوی تابو حل شده است. در این قسمت ما در قالب یک مثال از الگوریتم سریعترین کاهش که توسط تیتز و بارت [۳۷] برای حل مسأله p−میانه‌ی استاندارد پیشنهاد شده است، در حل مسأله‌ی $SSGP$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۴ مجدّداً مثال ۲.۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع سود برابر است با $u_{ik} = ۱/(d_{ik}^{۲} + ۱)$. همچنین فرض کنید $\alpha_k = ۱$. الگوریتم سریعترین کاهش برای مسأله‌ی p−میانه‌ی استاندارد به صورت زیر است:

۱) مجموعه‌ای از p مکان تصادفی برای سرویس‌دهنده‌ها،از اندازه‌ی p در نظر بگیرید.

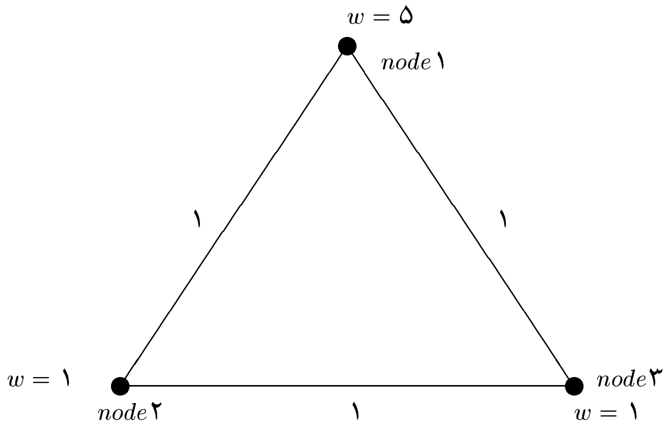
۲) تمام $p(n-p)$ حالت ممکن از جابه‌جایی سرویس‌دهنده‌ای در مجموعه‌ی P را با سرویس‌دهنده‌ای که در P موجود نیست، بررسی کنید.

۳) اگر یک جابه‌جایی باعث بهبود تابع هدف شد آن‌گاه مجموعه‌ی P را به‌روزرسانی کنید و به مرحله‌ی ۲ بروید.

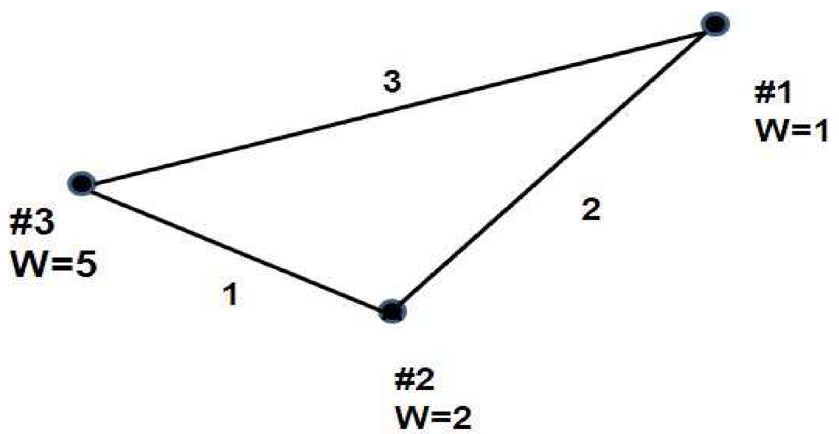
۴) اگر تمام جابه‌جایی‌ها در p باعث بهبود در مقدار تابع هدف نشدند، در آخرین P به‌عنوان جواب توقف کنید.

ما الگوریتم را با استفاده از زبان برنامه نویسی $MATLAB$۷.۱ پیاده سازی کرده‌ایم. جدول ۴−۴ نتایج حاصل از اجرای این الگوریتم با داده‌های مثال ۲.۲ را نمایش می‌دهد.

حال شکل ۴−۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم مکان دو سرویس‌دهنده را برای مدل گرانشی و $SSGP$ در این مثال بیابیم. بطور مشابه واضح است که اولین سرویس‌دهنده روی رأس ۱#



شکل ۴−۱: مثال حل شده با مدل $SSGP$



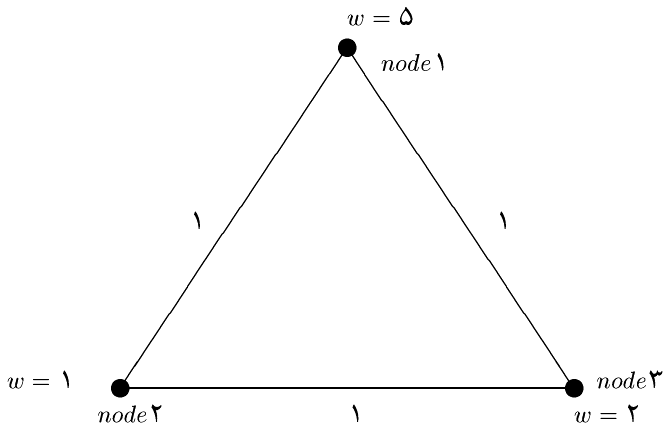
شکل ۴−۲: مثال برای بررسی وجود یا عدم وجود خاصیت حکیمی

قرار دارد. فرض کنید بنابر خاصیت حکیمی، دومین سرویس‌دهنده روی رأس ۲# قرار داشته باشد. در اینصورت مقدار تابع هدف برای مدل گرانشی برابر است با۴/۲۷۷ . اگر سرویس‌دهنده‌ی دوم روی رأس ۳# قرار داشته باشد آن‌گاه مقدار تابع هدف برابر است با ۴/۶۶. با نتایجی که از مثال ۲.۲ گرفته شد می‌توان استنباط کرد که مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ی دوم، مابین سرویس‌دهنده‌ی دوم و سوم و روی یال است. بنابراین مقدار تابع هدف از هر دوی مقادیر ۴/۲۷۷ و ۴/۶۶ کمتر است ولی تقریباً در بازه‌ای اطراف همین مقادیر است.

حال این مسأله را با مفروضات و محدودیت‌های مدل $SSGP$ حل می‌کنیم. فرض کنید سرویس‌دهنده‌ی دوم در این مدل روی رأس ۲# قرار داشته باشد. در این‌صورت مقدار تابع هدف مدل $SSGP$ برابر است با ۱/۲۸. به‌طور مشابه اگر سرویس‌دهنده‌ی دوم روی رأس ۳# قرار گیرد آن‌گاه مقدار تابع هدف مدل مذکور برابر است با ۲/۶۶. به عنوان یک مثال دیگر شکل ۴−۴ را مشاهده کنید. قبلاً نشان داده شده است که سرویس‌دهنده‌ی اول روی رأس ۱# قرار می‌گیرد. ما مقادیر تابع هدف در مدل $SSGP$ را برای مکان‌های مختلف سرویس‌دهنده‌ی دوم محاسبه کرده و در جدول ۴.۴ نمایش داده‌ایم. با دقت در مثال‌های بالا می‌توان حدس زد که ممکن است خاصیت حکیمی برای مدل $SSGP$ برقرار باشد.

	Standard p-median	Gravity p-median	SSGP
P(optimal solution)	{#1,#2 } or {#1, #3 }	{1, midpoint between #2, #3 }	{1, #2 or #3 }
Objective function	1	1.6246	1

جدول ۱.۴: میانگین اندازه‌های کیفی برای سرویس‌دهنده‌ها



شکل ۴–۳: مثال حل شده با مدل $SSGP$

۴–۵ پیشنهادات و کارهای آینده

مدل p–میانه‌ی گرانشی یکی از کامل‌ترین مدل‌های مکانیابی ریاضی است که برای مسألهی p–میانه در قالب اقتصادی آن ارائه شده است که به متقاضیان این امکان را می دهد تا با احتمالی هرچقدر کم اما مکان مورد علاقه‌ی خود را برای سرویس‌گیری اختیار کنند.

با محدود کردن شرایط می‌توان تغییراتی در مدل ایجاد کرد که نه تنها تابع هدف مینیمم سازی را بهبود می‌بخشد بلکه مجموعه جواب‌های متفاوتی نسبت به مدل اولیه تولید می‌کند.

این مسأله هم از نظر تابع هدف و هم از لحاظ روش حل مورد بررسی قرار گرفته شده است. صرف نظر از دید فازی، ما تنها تابع هدف مسأله را تحت بررسی قرار داده‌ایم و با محدود کردن انتخاب متقاضیان

مکان سرویس‌دهنده‌ی دوم	#۳	#۲	با فاصله‌ی $\frac{۱}{۲}$ از گره‌ی دوم و سوم	با فاصله‌ی $\frac{۱}{۳}$ از گره‌ی سوم و $\frac{۲}{۳}$ از گره‌ی دوم
مقدار تابع هدف $SSGP$	۱	۲	۲/۰۷	۱/۳۷

جدول ۲.۴: مقادیر تابع هدف $SSGP$ برای مکان‌های مختلف سرویس‌دهنده‌ها

یک مدل جدید ارائه دادیم. ما قصد داریم به عنوان تحقیقات آینده، روش حل مسأله را با یک الگوریتم ابتکاری یا با استفاده از مشتقات جهتی و گرادیان بهبود ببخشیم و در مورد تحدب و تقعر تابع هدف بیشتر بحث کنیم. بررسی مسأله در فضای پیوسته و همچنین آزاد گذاشتن ویژگی حکیمی برای مکان بهینه‌ی سرویس‌دهنده‌ها از دیگر مسائلی است که قالب آن‌ها تا حدودی مشخص ولی به نتیجه رساندن و هدفمند ساختن مطالعات و تحقیقاتشان مستلزم مطالعه و صرف زمان بیشتری است که در تحقیقات بعدی به آن می‌پردازیم.

مسأله از دید فازی نیز دارای ارزش تحقیقاتی بسیاری است. برای مثال مطالعه و تحلیل مسأله با یال‌های فازی ظاهراً کاری مشکل اما نتیجه بخش و پرفایده است.

با فاصله‌ی $\frac{۱}{۴}$ از گره‌ی دوم و $\frac{۳}{۴}$ از گره‌ی اول	#۱	#۲	مکان سرویس‌دهنده‌ی دوم
۱/۵۲	۲/۶۶	۱/۲۸	مقدار تابع هدف $SSGP$

جدول ۳.۴: مقادیر تابع هدف $SSGP$ برای مکان‌های مختلف سرویس‌دهنده‌های شکل ۴ − ۲

مکان سرویس‌دهنده‌ی دوم	#۳	#۲	با فاصله‌ی $\frac{1}{2}$ از گره‌ی دوم و سوم	با فاصله‌ی $\frac{1}{3}$ از گره‌ی سوم و $\frac{2}{3}$ از گره‌ی دوم
مقدار تابع هدف $SSGP$	۱	۲	۲٫۰۷	۱٫۳۷

جدول ۴.۴: مقادیر تابع هدف $SSGP$ برای مکان‌های مختلف سرویس‌دهنده‌ها

پیوست A

مراجع

کتاب‌نامه

[1] Bell, D.R., Ho, T.-H., Tang, C.S., 1998. "Determining where to shop:Fixed and variable cost of shopping." *Journal of Marketing Research* 35, 352-370.

[2] Current, J., Daskin, M., Schilling, D., 2002. "*Discrete Network Location Models.". In: Drezner, Z., Hamakher, H.W. (Eds), Facility location: Applications and Theory*, pp.81-118 (Chapter 3).

[3] Drezner, T., Drezner, Z., 2007. "The gravity p-median model." *European Journal of Operational research* 179, 1239-1251.

[4] Drezner, T., Drezner, Z., 2001. "A note on applying the gravity rule to the airline hub problem." *Journal of Regional Science* 41, 67-73.

[5] Drezner, T. 1994. "Locating a single new facility among existing unequally attractive facilities". *Journal of Regional Science*, vol. 34, pp.237-252.

[6] Drezner, T., Drezner, Z., 1997 "Replacing disceret demand with continuous demand in a competitive facility location problem." *Naval Research Logistics* 44, 81-95

[7] Drezner, T., Drezner, Z., 1996 "Competitive Facilities: Market Share and Location With Random Utility". *Journal of Regional Science*, Vol 36, No 1 pp.1-15.

[8] Drezner Z., H. Hamacher,. 1995 "*Facility location: A Survey of Application and Methods*", Springer-Verlage, Berlin.

[9] Drezner, T. 1994. "Optimal Continuous Location of a Retail Facility, Facility Attractiveness, and Market Share: an Interactive Model", *Journal of Retailing*, 70, 49-64.

[10] Drezner, T., Drezner, Z. 1998 "Location of Multiple Retail Facilities in a Continuous Space", *Journal of Retailing and Consumer Services*, Vol 5(3), 173-189.

[11] Eiselt, H. A., G. Laporte., 1995. "*Objectives in Location Problems" In: Drezner, Z. (Ed.), Facility location: "A Survey of Applications and Methods."* Springer, New York.

[12] Francis, R. L., L. F. McGinnis, Jr., and J. A. White. (1992) "Facility Layout and Location: An Analytical Approach", 2nd ed.," Prentice Hall.

[13] Goodchild, M.F. "ILACS: Location Allocation Model for Retail Site Selection". *Journal of Retailing*, 60, 1984, pp. 84-100.

[14] Hakimi,S.L., 1964. "Optimal location of switching center and the absolute centers and the absolute medians of a graph". *Operations Research* 12, 450-459.

[15] Hakimi,S.L., 1965."Optimal distibrution of switching centers in a communication network and some related theoretic graph theoretic problems".*Operation Research*13, 462-475.

[16] Handler, G.Y., Mirchandani, P.B., 1979. " Location on Networks: Theory and Algorithms" M.I.T. Press, Cambridge, MA.

[17] Hansen, P., M. Labbe, D. Peeters, and J. F. Thisse. 1987 "Single facility location on networks." *Annals of Discrete Math* 31, 113-146.

[18] Herrera, F., Verdegey, J.L. 1995. "Three models of fuzzy integer programming ". *European J. Oper. Res.* 83. 581-593.

[19] Hotelling, H. 1929. "Stability in Competition", *Economic Journal*, Vol. 39, pp 41-57.

[20] Huff, D. L., 1964. "Defining and Estimating a Trade Area." *Journal of Marketing* 28 34-38.

[21] Huff, D. L., 1966. "A Programmed solution for approximating an optimum retail location." *Land Economics* 42 293-303.

[22] Jane, A.K. and Mahajan, V. 1979 "Evaluating the Competitive Environment in Retailing using multiplicative comprtitive interactive Model". *Research in Marketing*, v2, pp. 217-235.

[23] Jose A. Moreno Perez, J. Marcos Moreno Vega, Jose L. Verdegay., 2004. "Fuzzy location problems on networks",*Fuzzy sets and Systems* 142. 393-405.

[24] Karive, O., Hakimi, S.L., 1979."An algorithmic approach to network location problems. Part I: The p-centers." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37, 513-538.

[25] Karive, O., Hakimi, S.L., 1979."An algorithmic approach to network location problems. Part II: The p-median." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37, 539-560.

[26] Kaufman, A., 1973 "*Introduction a la theorie des Sous-emsembles*". Flous, Vol.I,Masson et Cie.

[27] Krarup, J. and P. M. Pruzan, (1983) "The simple plant location problem: Survey and synthesis." *European Journal of Operational Research* 12, 36-81.

[28] Mirchandani, P. B. and R. Francis. 1990. *Discrete Location Theory.* J.Wiley.

[29] Nakanishi, M., Cooper, L.G., 1974. "Parameter estimate for multiplicative interactive choice model: Least square approach." *Journal of Marketing Research* 11, 303-311.

[30] Nayeem, S.M.A., Pal, M., 2008. "The p-center problem on fuzzy networks and reduction of cost." *Iranian Journal of fuzzy systems* Vol. 5,No. 1,pp. 1-26.

[31] Owen, S. H. and M. S. Daskin, 1998. "Strategic facility location: A review." *European Journal of Operational Research* 111, 423-447.

[32] Parker, B.R. and Srinivasan, V. 1976. "A Consumer Preference Approach to the Planning of Rural Primary health-Care Facilities",*operation Research*, 24, pp. 991-1029.

[33] ReVelle, C.S, Swain, R.W., 1970 . "Centeral facilities location,"*Geographical Analysis* 2, 30-42. Submitted for Publication.

[34] Rosenfeld, A., 1975. "Fuzzy graph in: L.A Zadeh, K.S Fu, K.Tanaka and M.shimura(eds)",*Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, New York.*, pp. 77-97.

[35] Serra, D., ReVella, C., 1996. "*Competitive Location in Networks." in: Drezner, Z. (eD.), Facility Location: "A Survey of Applications and Methods."*, Springer", New York.

[36] Scaparra, M. P., and M. G. Scutella. 2001. "Facilities, locations, customers: Building blocks of location models: A survey." *Thechnical Report:* tr-0118, University of Piza, Italy.

[37] Teitz, M.B., Bart, P., 1968. "Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph." *Operations Research* 16. 955-961.

[38] Zadeh, L.A., 1965. "*Fuzzy set*" , Information and contorol, 8 338-353.

[۳۹] حیدری ، م.، (۱۳۸۷)،«مکانیابی فازی»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود.

پیوست B

واژه نامه

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

آلفا برش .... $\alpha - cut$

ارزیابی .... *Assessment*

ابتکاری .... *Heuristic*

اعداد فازی .... *Fuzzy numbers*

اعداد فازی مسطح .... *Flat fuzzy numbers*

اعداد فاصله‌ای .... *Interval numbers*

امکان .... *Possibility*

برنامه‌ریزی خطی .... *Linear Programing*

تابع تولید .... *Production Function*

تابع رتبه بندی .... *Ranking function*

تابع مقعر .... *Concave function*

تابع هدف .... *Objective function*

تخصیص .... *Allocation*

جواب بهینه .... *Optimal solution*

جواب شدنی .... *Feasible solution*

رأس .... *Vertex*

سرویس‌دهنده .... *Facility*

شبکه	$Network$
عوامل تصادفی	$Random\ Factors$
فازی	$Fuzzy$
قطعی	$Crisp$
کمترین مجموع	$Minisum$
گراف	$Graph$
گره	$Node$
محدب	$Convex$
محدودیت	$Constraint$
مجموعه	Set
مجموعه فازی	$Fuzzy\ set$
مدل‌بندی	$Modeling$
مقعر	$Concave$
مکانیابی	$Location$
مکانیابی تک وسیله‌ای	$Single\ facility\ location$
مکانیابی رقابتی	$Gravitylocation$
مکانیابی پوشش بیشینه	$Maximal\ covering\ location$
مکانیابی p−میانه	$p - Median\ location$
مکانیابی فازی	$Fuzzy\ location$
مکانیابی و تخصیص	$Location\ -\ allocation$

منطق فازی .... *Fuzzy logic*

مطالعه‌ی موردی .... *Case study*

مینیماکس .... *Minimax*

نقطه‌ی تقاضا .... *Demand Point*

یال .... *Edge*

پیوست C

فهرست الفبائی

Abstract

Facility location models deal mainly with the location of plants, warehouses and other industrial facilities. One branch of location theory deals with the location of retail and other commercial facilities which operate in a competitive environment. The facilities compete for customes and market share, with a profit maximization objective. Therefore its interesting to recognize effective key variabales in a customer choice of selected facilities. The customary objective function to be maximized is the market share captured by the facilities. All copetitive location models attempt to estimate the market share captured by each competing facility in orther to optimize its location. The best location for a new facility is at the point at which its market share is maximized. Initial models rely on some **"normative assumption"** regarding consumer travel behaviour. The simplest model is based on the **"nearest-center"** (in some literature **"approximity assumption"**) hypothesis; i.e.,consumer patronise the nearest outlet that provides the required good or service. One of these models is the standard p-median model. A crucial assumption in the standard p-median problem is that every customer selects the facility closest to him. It is also implicitly assumed that all facilities are equally attractive. This may be a valid assumption if customers are directed by a central command to the closest facility, or when

customers have complete information about distances and select the facility in a rational manner. In reality this is seldom the case for all customers. When the facilities are not equally attractive, the proximity assumption for allocation is not longer valid. In this case customers base their choice of a facility on facility attractiveness which is represented by a utility function. This utility function is composite of facility attributes and the distance to the facility. It is asserted that the probability that a customer patronizes a store (or a shopping mall) is proportional to the store's floor area and inversly proportional to some power of the distance to the store. It is usually assumed that customers not only cares about which shop is closest but also consider other variables in making their decision to patronize a particular establishment. Rather than being attracted to the closest facility, customers are attracted to the facility with the highest utility. In fact the proximity assumption is replaced with another: a more realistic one. The first model that allowed customers to trade of the cost of travel with the attractiveness of alternating shopping opportunities is in "Low of Retail Gravitation" based on Newton's Low of Gravitation. Recently the Low of Retail Gravity is used for p-median problem and is reffered as the gravity p-median problem. In this thesis we want to analyse the models based on the gravitation and the gravity p-median problems specially.

Keywords: p-Median; Competitive Facility Location; Gravity; Huff; Location-llocation

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematics

subject

The gravity p-median model

Student: Massoud Karami

Supervisors:

Dr. Ahmad Nezakati Reza Zadeh

Dr. Jafar Fathali

August or September 2009