



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

یک الگوریتم مستقیم برای جاییابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم های خطی

علیرضا قرنی پور

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

۱۳۹۴

تقدیم به: روح پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه کنم
و به مادرم، دریای بیکران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر.
و به همسرم، اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودم
و به نازنینم، طراوت شبنم زندگیم.
خدایا به من زیستنی عطا کن، که در لحظه مرک بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است
حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش سوگواری نباشم.

تقدیم به وجود بارز نشان...

سپاس‌گزاری...

سپاس‌ خدایی را که اول و آخر بوده است. بی‌آنکه اولی بر او پیشی بگیرد یا آخری پس از او باشد، خدایی که دست هر چشمی از دامن دیدارش کوتاه است و فهم هر کبوتر توصیف‌گری از پرواز در آسمان وصفش عاجز. سپاس‌گزار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند، از یکی زاده می‌شوم از دیگری جاودانه. استاد‌گرامی دکتر حجت‌احسنی طهرانی که اندیشیدن را به من آموخت، نه اندیشه‌ها را. پدرم که همواره چتر محبتش بر سرم بود و مادرم که دامن پر مهرش یگانه پناهم است. همسرم که صبوری‌اش راهگشای من بود.

علیرضا قرنی‌پور
۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب علیرضا قرنلی پور دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان یک الگوریتم مستقیم برای جابجایی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم های خطی ، تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

علیرضا قرنلی پور
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، ما به ارائه راه حل مستقیم مساله جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم های خطی تک ورودی و چند ورودی می پردازیم. این پایان نامه راه حل مساله جایابی قطب برای هر سیستم کنترل پذیر با ماتریس سیستم نامنفرد و قطب های ناصفر مورد نظر را توضیح می دهد، سپس قطب های حلقه بسته را در جهت رسیدن به عملکرد مطلوب سیستم را می توان جایابی کرد. روش حل این مساله منجر به فرمولی شبیه آکرمن می شود که حاصل انتقال سیستم تک ورودی و چند ورودی به فرم فروبینیوس، براساس شکل های خاص مختصات انتقال است. پس از آن حل مساله جایابی قطب با پسخورد مشتق حالت و تبدیل راه حل به مختصات اصلی است.

در ادامه پسخورد مشتق حالت به ویژه پسخورد مشتق خروجی با استفاده از روشی شبیه تنظیم کننده خطی درجه دوم و همچنین ماتریس بهینه پسخورد برای شاخص مورد نظر بدست آمده است. اگر ماتریس حلقه باز سیستم نامنفرد باشد، این مساله برای هر سیستم کنترل پذیری قابل حل هست. در ادامه نتایج زیر را داریم:

اولا اگر $\det(A) = 0$ سیستم های خطی زمان ثابت با مدل ماتریسی $\{A, B, C, D\}$ ، با خروجی برابر با بردار مشتق حالت، با استفاده از پسخورد خروجی نمی تواند پایدار و مشاهده پذیر باشد. ثانيا اگر $\det(A) \neq 0$ باشد دفع کردن اغتشاش ثابت، اضافه شده به ورودی سیستم های فوق، با استفاده از پسخورد مشتق حالت امکان پذیر نیست. در پایان هر بخش برای درک بیشتر مفاهیم، مثال های عددی ارائه شده است.

کلیدواژه: جایابی قطب، پسخورد مشتق حالت، پسخورد مشتق خروجی، مشاهده پذیری، پایدار پذیری.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. قرنلی پور.ع و احسنی طهرانی.ح ، (۱۳۹۴) ، ”جایابی قطب با استفاده از مشتق حالت” ، چهل ششمین کنفرانس ریاضی ایران ، ص ۱۵۵-۱۵۲ ، دانشگاه یزد.
۲. قرنلی پور.ع و احسنی طهرانی.ح ، (۱۳۹۴) ، ”الگوریتمی برای جایابی قطب با استفاده از روش بس‌گیورا و روش آکرمن” ، چهل ششمین کنفرانس ریاضی ایران ، ص ۴۸۳-۴۸۰ ، دانشگاه یزد.

فهرست مطالب

لیست تصاویر	ذ
لیست جداول	۱
۱ تعاریف و مقدمات	۳
۱.۱ مقدمه	۳
۲.۱ تعاریف مقدماتی	۵
۱.۲.۱ بردار	۵
۲.۲.۱ ماتریس	۵
۳.۲.۱ فضای برداری	۸
۴.۲.۱ بردار ویژه و مقدار ویژه	۱۳
۵.۲.۱ دستگاه کنترل خطی	۱۳
۶.۲.۱ پایداری	۱۷
۷.۲.۱ مشاهده پذیر	۱۹
۸.۲.۱ تبدیلهای همانندی یا تشابهی	۲۰
۹.۲.۱ تابع تبدیل	۲۱
۲ الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی	۲۳
۱.۲ جایابی قطب با پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی با زمان ثابت	۲۳
۱.۱.۲ فرمول بندی مساله جایابی قطب	۲۳
۲.۱.۲ تبدیل کردن به حالت استاندارد فروبنیوس برای سیستم‌های با زمان ثابت	۲۴
۳.۱.۲ راه حل مساله‌ی جایابی قطب برای سیستم‌های با زمان ثابت	۲۵
۲.۲ مثال‌های عددی	۲۹
۳ الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی	۳۷

۱۰۳	جایابی قطب بوسیله‌ی پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های چند ورودی زمان ثابت	۳۷
۱۰۱.۳	فرمول بندی مساله جایابی قطب	۳۷
۲۰۱.۳	انتقال به شکل استاندارد فروبنیوس برای سیستم‌های زمان ثابت	۳۸
۳۰۱.۳	راه حل مساله جایابی قطب برای سیستم‌های زمان ثابت	۴۰
۲۰۳	تعیین ماتریس پسخورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی	۴۶
۱۰۲.۳	فرم استاندارد اشلون	۴۶
۲۰۲.۳	فرم همدم برداری	۴۸
۳۰۲.۳	به دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی	۴۹
۴۰۲.۳	تعیین ماتریس پسخورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی	۵۰
۳۰۳	مثال عددی	۵۳
۴	پسخورد مشتق حالت با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم برای سیستم های خطی زمان ثابت	۵۹
۱۰۴	پسخورد مشتق حالت با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم	۵۹
۱۰۱.۴	فرمول بندی مساله تنظیم کننده خطی درجه دوم	۵۹
۲۰۱.۴	تحلیل تنظیم کننده خطی درجه دوم	۶۰
۳۰۱.۴	حل تنظیم کننده خطی درجه دوم	۶۲
۲۰۴	پسخورد مشتق خروجی بوسیله تنظیم کننده خطی درجه دوم	۶۳
۱۰۲.۴	تحلیل تنظیم کننده خطی درجه دوم	۶۴
۳۰۴	مثال عددی	۶۶
۵	پایداری با پسخورد مشتق حالت و محاسبه تاثیر اغتشاش	۷۳
۱۰۵	مشاهده پذیری و پایداری سیستم با پسخورد مشتق حالت	۷۳
۲۰۵	تاثیر اغتشاشات با پسخورد مشتق حالت	۷۶
۳۰۵	مثال عددی	۷۷
۶	نتیجه گیری	۸۳
آ	کدهای MATLAB	۸۵
۱.آ	کدهای MATLAB فصل دوم	۸۵
۲.آ	کد متلب مثال فصل سوم	۹۰
۳.آ	کد متلب مثال فصل چهارم	۹۳
۴.آ	کدهای مربوط به استفاده از تبدیلات تشابهی	۹۶
۱۰۳	مراجع	

۱۰۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۱۱	نمایه

لیست تصاویر

۱۸	تعبیر ترسیمی از پایداری به مفهوم لیاپانوف و پایداری مجانبی	۱۰۱
۲۹	سیستم مکانیکی	۱۰۲
۳۱	پاسخ گذرا سیستم کنترل پذیری پسخورده مشتق حالت	۲۰۲
۳۱	ورودی کنترل سیستم کنترل پذیری پسخورده مشتق حالت	۳۰۲
۳۲	پاسخ گذرا سیستم با فرمول بندی آکرمین	۴۰۲
۳۲	ورودی کنترل سیستم با فرمول بندی آکرمین	۵۰۲
۳۳	سیستم توپ و میله	۶۰۲
۳۴	پاسخ گذرا سیستم کنترل پذیری با پسخورده مشتق حالت	۷۰۲
۳۴	ورودی کنترل سیستم کنترل پذیری با پسخورده مشتق حالت	۸۰۲
۳۵	پاسخ گذرا سیستم کنترل پذیری با فرمول بندی آکرمین	۹۰۲
۳۵	ورودی کنترل سیستم کنترل پذیری با فرمول بندی آکرمین	۱۰۰۲
۵۳	ساختار سیستم مکانیکی	۱۰۳
۵۵	پاسخ گذرای و ورودی کنترل سیستم با پسخورده مشتق	۲۰۳
۵۶	پاسخ گذرای سیستم با پسخورده حالت [۲]	۳۰۳
۵۶	ورودی کنترل سیستم با پسخورده حالت [۲]	۴۰۳
۵۸	پاسخ گذرای سیستم با پسخورده حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی	۵۰۳
۵۸	ورودی کنترل سیستم با پسخورده حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی	۶۰۳
۶۷	تجزیه لرزش	۱۰۴
۶۹	پاسخ با استفاده از پسخورده مشتق حالت	۲۰۴
۷۰	پاسخ با استفاده از پسخورده مشتق خروجی	۳۰۴
۷۱	پاسخ با استفاده از پسخورده مشتق خروجی	۴۰۴
۷۸	سیستم فنر-جرم چندمتغیره با ضربه گیر	۱۰۵
	پاسخ ورودی و گذرای سیستم کنترل کننده با اغتشاشات و پسخورده داده شده در	۲۰۵
۸۱	جدول (۱۰۵)	

۹۶		آ.۱	سیمولینک مثال فصل پنجم
----	-------	-----	------------------------

لیست جداول

۱۰۵ اغتشاشات و پسخورد کنترل کننده سیستم شبیه سازی شده ۸۰

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

مساله مهم در تئوری و عمل طراحی سیستم‌های کنترل، طراحی کنترل کننده های پسخورد حالت است، که قطب های حلقه بسته سیستم خطی را در جایگاه مناسب قرار می‌دهند. مساله کنترل پسخورد حالت، ظرف سه دهه‌ی گذشته، کاملاً مورد توجه بوده است.

محققان، روشهایی را برای دسته‌ای از سیستم‌های خطی، با هدف کنترل آنها تحت پسخورد حالت طراحی کرده اند که می‌توان از ج. آکرمین^۱ [۲۴]، ف.ل.لوییز^۲ [۸]، و.ج.تیول^۳ [۲۵] و م.والاسک، ن.الگک^۴ [۱، ۲] نام برد. در طراحی سیستم‌های کنترل برای جاییابی قطب، هدف این است که، سیستم حلقه بسته قطب‌ها را در مکان مطلوب قرار دهد. ایده استفاده از پسخورد مشتق حالت، جلوگیری از نوسانات کنترل شده سیستم های مکانیکی گرفته شده است، که سنسورهای اصلی ارتعاشات، شتاب‌سنج هستند. با شتاب‌سنج، می‌توان سرعت‌ها را با دقت بالا بدست آورد ولی نمی‌توان تغییر مکان را بدست آورد. از این رو سیگنال‌های قابل دسترسی برای پسخورد، سرعت و شتاب هستند. یکی از شرایط لازم برای قابل اجرا بودن راهبرد کنترل، این است که از پاسخ‌های اندازه‌گیری شده‌ی قابل دسترس برای تعیین عملکرد کنترل، استفاده کرد. همه تحقیقات گذشته، درباره کنترل فرض کرده‌اند که همه حالت‌ها را می‌توان مستقیماً اندازه‌گیری کرد. برای کنترل این گروه از سیستم‌ها آپریمانت، ن.لوی^۵ [۲۶]، م.پ.بایون دی نویر، س.و.هنگاد^۶ [۲۷، ۲۸] تحقیقاتی انجام داده‌اند. جاییابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت، از این نظر اهمیت دارد که تغییرات متغیر حالت نسبت به زمان مهم است. در این پایان‌نامه جاییابی قطب تنها با استفاده از مشتق حالت مورد بررسی قرار گرفته است.

^۱ J.Ackerman

^۲ F.L.Lews

^۳ W.G.Tuel

^۴ M.Valášek, N.Olgac

^۵ A.Preumont, N.Loxi

^۶ M.P,Bayon de Noyer , S.V , Hanagud

در این پایان نامه روش جدید تعیین ماتریس پسخوردها با استفاده از عملیات تشابهی بطور کامل تشریح خواهد شد.

- در ادامه فصل یک، تعاریف مقدماتی مورد نیاز را شرح می‌دهیم.
- در فصل دوم، مساله جایابی قطب با استفاده از پسخوردها مشتق حالت برای سیستم‌های خطی زمان ثابت تک ورودی مورد بررسی قرار داده‌ایم. روش آکرمین برای جایابی قطب با استفاده از پسخوردها حالت برای سیستم‌های خطی زمان ثابت تک ورودی تشریح شده است. و در آخر مثالهایی، با استفاده از روش‌های ارائه شده حل شده است.
- در فصل سوم، مساله جایابی قطب با استفاده از پسخوردها مشتق حالت برای سیستم‌های خطی زمان ثابت چند ورودی مورد بررسی قرار داده‌ایم. مساله جایابی قطب برای هرسیستم کنترل‌پذیر با ماتریس سیستم نامفرد و قطب‌های ناصفر قابل اجرا است. در ادامه روش استفاده از عملیات تشابهی و رسیدن به فرم استاندارد اشلون و در نهایت فرم همدم برداری به منظور تعیین پسخوردها حالت بطور کامل تشریح شده است. و در نهایت مثالی با روش‌های ارائه شده، حل شده است.
- در فصل چهارم، روش تعیین پسخوردها مشتق حالت به ویژه پسخوردها مشتق خروجی، برای سیستم‌های خطی زمان ثابت با استفاده از شیوهی، شبیه تنظیم‌کننده خطی درجه دوم ارائه خواهیم داد و شرایط لازم برای آن بطور کامل تشریح شده است. در نهایت، با مثالی کارآیی روش مذکور را نشان خواهیم داد.
- در فصل پنجم، به نتایج زیر خواهیم رسید که، اولاً اگر $\det(A) = 0$ سیستم‌های خطی زمان ثابت با مدل ماتریسی $\{A, B, C, D\}$ ، با خروجی برابر با بردار مشتق حالت، با استفاده از پسخوردها خروجی نمی‌تواند پایدار و مشاهده پذیر باشد. ثانیاً اگر $\det(A) \neq 0$ باشد دفع کردن اغتشاش ثابت، اضافه شده به ورودی سیستم‌های فوق، با استفاده از پسخوردها مشتق حالت امکان‌پذیر نیست. نتایج بالا برای آنالیز و طراحی سیستم‌های کنترل، با پسخوردها مشتق حالت، می‌تواند مفید باشد.
- در فصل ششم، نتایج حاصل از فصل‌ها را شرح می‌دهیم.

۲.۱ تعاریف مقدماتی

۱.۲.۱ بردار

برای توضیحات بیشتر این مبحث به [۲۱] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ای منظم از اعداد را بردار نامند و این اعداد عناصر بردار نامیده می‌شوند. بردار v با داشتن n عنصر به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

بردار v بالا به صورت $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ نیز نوشته می‌شود.

بردار اشاره شده به صورت (۱.۱)، بردار ستونی و ترانهاده آن، بردار سطری نامیده می‌شود. مجموعه همه بردارهای حقیقی با بعد n را با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند. ترانهاده بردار v را با v^T و ترانهاده - مزدوج مختلط v را با v^H نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. ضرب داخلی دو بردار u و v ، ضرب اسکالر نامیده می‌شود:

$$u * v = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \dots + \bar{u}_n v_n$$

تعریف ۳.۲.۱. طول بردار v با $\|v\|$ نشان داده می‌شود و برابر $\sqrt{v^H v}$ است.

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

۲.۲.۱ ماتریس

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه‌ای از mn عنصر مرتبط در یک آرایه مستطیلی، متشکل از m سطر و n ستون است که یک ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

که به صورت $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ، $(j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m)$ نیز نشان داده می‌شود. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$ ، با عناصر طبیعی، با $\mathbb{R}^{m \times n}$ و مجموعه همه ماتریس‌ها، با عناصر مختلط، با $\mathbb{C}^{m \times n}$ نشان داده می‌شوند.

ماتریس A با تعداد سطر و ستون برابر، ماتریس مربعی نامیده می‌شود. ماتریس مربعی که تمام عناصر روی قطر اصلی آن یک و مابقی عناصر آن صفر باشد را ماتریس واحد می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

جمع دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ یک ماتریس است که در آن:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

اگر c یک اسکالر باشد، سپس cA یک ماتریس است:

$$cA = (ca_{ij})$$

ترانواده ماتریس، $A_{m \times n}$ یک ماتریس $n \times m$ است و با A^T نشان داده می‌شود.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ترانواده مزدوج ماتریس A ، ماتریس $A^H = (\bar{A})^T$ است که در آن $\bar{A}$ ، ماتریس تشکیل شده از ماتریس A است که عناصر آن، مزدوج مختلط شده‌اند. ماتریس مربعی A متقارن است، اگر $A = A^T$ باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A ماتریس مربعی $m \times n$ و B ماتریس $n \times p$ باشد. سپس ضرب AB ، یک ماتریس $m \times p$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p$$

اگر b یک بردار ستونی باشد، Ab یک بردار ستونی است.

تعریف ۶.۲.۱. [۲۱] ^۷نرم ماتریس، نگاشت $R^{m \times n} \rightarrow R$: $\| \cdot \|$ است به طوری که:

۱. $\| A \| \geq 0$ ، به ازای $A \in R^{m \times n}$ و $\| A \| = 0$ اگر و فقط اگر $A = 0$ ،

۲. $\| \alpha A \| = |\alpha| \| A \|$ به ازای $\alpha \in R$ و $A \in R^{m \times n}$ (خاصیت همگنی)،

۳. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ به ازای $A, B \in R^{m \times n}$ (نامساوی مثلثی).

تعریف ۷.۲.۱. نرم

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \| a_{ij} \|^2} = \text{tr}(AA^H), \quad (2.1)$$

که یک نرم ماتریسی است، نرم فروبینیوس^۸ (یا نرم اقلیدسی^۹ در C^n) نامیده می‌شود [۲۱].

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنید $\| \cdot \|$ یک نرم برداری باشد، تابع

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}, \quad (3.1)$$

یک نرم ماتریسی است که نرم ماتریسی القایی^{۱۰} (نرم ماتریسی طبیعی^{۱۱}) نامیده می‌شود [۲۱].

^۷Matrix norm

^۸Frobenius norm

^۹Euclidean norm

^{۱۰}Induced matrix norm

^{۱۱}Natural matrix norm

برهان. ابتدا توجه داریم که (۳.۱) هم ارز

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|,$$

است. در واقع، برای هر $x \neq 0$ بردار واحد $u = \frac{x}{\|x\|}$ را تعریف می‌کنیم به طوری که (۳.۱) به صورت

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \|Aw\|, \quad \|w\|=1. \quad (4.1)$$

باشد. حال نشان می‌دهیم (۳.۱) (یا به طور معادل (۴.۱)) یک نرم است. با استفاده از تعریف ۶.۲.۱ داریم:

۱. اگر $\|Ax\| \geq 0$ ، آنگاه نتیجه می‌شود که $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq 0$. به علاوه

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \iff \|Ax\| = 0, \quad x \neq 0$$

و $Ax = 0$ برای $x \neq 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$ ؛ بنابراین $\|A\| = 0 \iff A = 0$.

۲. اسکالر α را در نظر می‌گیریم، پس

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha| \|A\|.$$

۳. سرانجام، خاصیت نامساوی مثلثی برقرار است. زیرا، با استفاده از تعریف سوپریم، اگر $x \neq 0$ آنگاه

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

بنابراین، با فرض x با نرم یک، به دست می‌آوریم:

$$\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

در نتیجه

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

□

تعریف ۹.۲.۱. نرم یک^{۱۲} و نرم بی نهایت^{۱۳} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m \|a_{ij}\|, \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|. \quad (5.1)$$

^{۱۲}1-norm

^{۱۳}Infity norm

و به ترتیب نرم مجموع ستونی^{۱۴} و نرم مجموع سطری^{۱۵} نیز نامیده می‌شوند. به علاوه داریم: $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$ و اگر A خودمزدوج یا متقارن حقیقی باشد $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.
 تعریف ۱.۲.۱. برای هر ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ ، اسکالر منحصربه‌فردی را به عنوان دترمینان می‌توان نسبت داد که به صورت $\det(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad (6.1)$$
 که در آن A_{ij} ، ماتریس مربعی $(n-1) \times (n-1)$ است که از حذف سطر i ام و ستون j ام از ماتریس $A_{n \times n}$ به دست می‌آید.

خواص دترمینان عبارت است از:

۱. با تعویض جای دو سطر یا ستون در ماتریس A ، تنها علامت دترمینان ماتریس A تغییر می‌کند.
۲. $\det(A) = \det(A)^T$.
۳. اگر یک سطر یا ستون ماتریس در اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در k ضرب می‌شود.
۴. برای دو ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ و $B_{n \times n}$ داریم: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
۵. اگر یک ماتریس دو سطر یا ستون یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.
۶. اگر تمامی درایه‌های ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ ، در اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در k^n ضرب خواهد شد: $\det(kA) = k^n \det(A)$.
۷. دترمینان ماتریس مثلی برابر حاصل ضرب درایه‌های قطری آن می‌باشد.

۳.۲.۱ فضای برداری

تعاریف و قضایای این فصل از [۲۱] و [۱۸] گرفته شده است.

تعریف ۱.۱.۲.۱. یک فضای برداری مانند V ، بر روی میدان F ، مجموعه‌ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب، شرایط زیر را برآورده می‌سازند:

۱. $\forall u, v \in V \longrightarrow u + v \in V$.
۲. $\forall u \in V, \forall \alpha \in F \longrightarrow \alpha u \in V$.
۳. $\forall u, v \in V \longrightarrow u + v = v + u$.

^{۱۴}Column sum norm

^{۱۵}Row sum norm

$$۴. \forall u, v, w \in V \longrightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$۵. \forall u \in V, \exists \circ \in V \longrightarrow u + \circ = \circ + u = u$$

$$۶. \forall u \in V, \exists -u \in V \longrightarrow u + (-u) = (-u) + u = \circ$$

$$۷. \forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in F \longrightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$۸. \forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in F \longrightarrow \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

$$۹. \exists 1 \in F, \forall u \in V, \longrightarrow 1u = u$$

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F و S یک زیرمجموعه غیر تهی از V باشد، S را یک زیرفضا از V می‌نامند، هرگاه:

$$۱. \forall s, t \in S \longrightarrow s + t \in S$$

$$۲. \forall s \in S, \forall \alpha \in F \longrightarrow \alpha s \in S$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم V فضای برداری و S یک زیرمجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $\nu \in V$ را ترکیب خطی از اعضای V گوئیم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند $u_1, \dots, u_n$ و اسکالرهای $a_1, \dots, a_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که:

$$\nu = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

قضیه ۱۴.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، آنگاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای V است.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲.۱. زیرمجموعه S از فضای V را در نظر بگیرید. برای اسکالرهای c_i ، $(i = 0, 1, \dots, n)$ ، اگر

$$\forall u_1, u_2, \dots, u_n \in S, \quad c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = \circ \rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

آنگاه بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_n$ را مستقل خطی نامند.

در غیراین‌صورت بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_n$ را وابسته خطی گویند.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. $S \subseteq V$ را پایه V گوئیم هرگاه S مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری باشد تعداد عناصر، یک پایه V را بعد فضای V نامیده و با $\dim V$ نشان می‌دهند.

رتبه، برد و فضای پوچ ماتریس

تعریف ۱۹.۲.۱. رتبه ماتریس A برابر با ماکزیمم تعداد ستون‌های یا سطرهای مستقل خطی در آن ماتریس است که با $\text{rank}(A)$ نشان داده می‌شود.

$$A_{n \times n} \text{ نامنفرد} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rank}(A) = n \quad (\text{رتبه کامل})$$

$$A_{m \times n} \rightarrow \begin{cases} \text{rank}(A) = \min(m, n) \rightarrow (\text{رتبه کامل}) \\ \text{rank}(A) < \min(m, n) \rightarrow (\text{رتبه ناقص}) \end{cases}$$

تعریف ۲۰.۲.۱. فضای پوچ ماتریس $A_{m \times n}$ ، نگاشت خطی به صورت زیر است:

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

نکته ۲۱.۲.۱. فضای پوچ، مجموعه تمامی پاسخ‌های غیر صفر معادله همگن $Ax = 0$ است و اگر تنها پاسخ معادله $Ax = 0$ ، همان پاسخ بدیهی صفر باشد، رتبه A ، کامل است.

قضیه ۲۲.۲.۱. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه برای هر ماتریس نامنفرد C و B به ترتیب و خواهیم داشت

$$\text{rank}(AC) = \text{rank}(A) = \text{rank}(BA)$$

قضیه ۲۳.۲.۱. اگر A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه r باشد، در این صورت ماتریس‌های B ، $m \times r$ و C ، $r \times n$ هر دو با رتبه r ، وجود دارند به طوری که:

$$A = BC$$

تعریف ۲۴.۲.۱. ماتریس A از مرتبه $n \times n$ ، معکوس‌پذیر است اگر ماتریس B از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$AB = BA = I$$

و با A^{-1} نمایش داده می‌شود. معکوس ماتریس منحصر به فرد است و ماتریس معکوس‌پذیر اغلب ماتریس نامنفرد نامیده می‌شود.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد. کهاد $-ij$ ام ماتریس A عبارتست از دترمینان ماتریس مربعی که از حذف سطر $-i$ ام و ستون $-j$ ام ماتریس A بدست می‌آید و آن را با M_{ij} نشان می‌دهیم.

همسازه ماتریس از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

و ماتریس الحاقی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{adj}(A) = C^T$$

قضیه ۲۶.۲.۱. اگر A ماتریس مربعی معکوس‌پذیر باشد، معکوس A عبارت است از:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

نکته ۲۷.۲.۱. اگر A و B ماتریس‌های نامنفرد باشند داریم:

$$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

تعریف ۲۸.۲.۱. اگر A یک ماتریس $m \times n$ ، ماتریس A^+ معکوس تعمیم یافته آن می‌باشد، که در شرایط زیر صدق کند

$$AA^+A = A \quad ۱.$$

$$A^+AA^+ = A^+ \quad ۲.$$

$$(AA^+)^H = AA^+ \quad ۳.$$

$$(A^+A)^H = A^+A \quad ۴.$$

A^+ ماتریسی $n \times m$ است، چهار شرط بالا را شرایط مور-پنرس^{۱۶} می‌نامند.

قضیه ۲۹.۲.۱. اگر A ماتریس $m \times n$ با رتبه n باشد

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$$

قضیه ۳۰.۲.۱. اگر A ماتریس $m \times n$ با رتبه m باشد

$$A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$$

تعریف ۳۱.۲.۱. دو ماتریس A و B متشابه نامیده می‌شوند، اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته، که:

$$T^{-1}AT = B$$

یک خاصیت مهم ماتریس‌های متشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

تعریف ۳۲.۲.۱. ماتریس مربعی A را متقارن گویند، هرگاه $A^T = A$ باشد.

تعریف ۳۳.۲.۱. ماتریس متقارن A را معین مثبت نامند. هرگاه به ازای هر بردار $x \neq 0$ ، $x^T A x > 0$ و در صورتی که $x^T A x \geq 0$ ، A را نیمه معین مثبت گویند. ماتریس‌های معین منفی و نیمه معین منفی بطور مشابه تعریف می‌شود.

قضیه ۳۴.۲.۱. فرض کنید A معین مثبت باشد، آنگاه

۱. تمام زیرماتریس‌های اصلی A معین مثبت هستند.

۲. تمام مقادیر ویژه‌ی A مثبت هستند.

^{۱۶}More-penrose

قضیه ۳۵.۲.۱. (تجزیه چولسکی^{۱۷}) اگر A ماتریس متقارن و معین مثبت باشد، آنگاه ماتریس پایین مثلثی منحصر بفرد L با درایه‌های قطری مثبت وجود دارد به طوری که

$$A = LL^T$$

نکته ۳۶.۲.۱. هر ماتریس نیمه معین مثبت Q به ریشه‌های دوم به صورت زیر تجزیه می‌شوند

$$Q = \sqrt{Q} \sqrt{Q^T}$$

یا

$$Q = \sqrt{Q^T} \sqrt{Q}$$

معرفی چند ماتریس خاص

۱. ماتریس قطری^{۱۸}: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های آن به جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشد.

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \quad , \quad a_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

۲. ماتریس بالامثلثی^{۱۹}: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است.

$$U = \begin{cases} a_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

۳. ماتریس پایین مثلثی^{۲۰}: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.

$$L = \begin{cases} a_{ij} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

۴. ماتریس متعامد^{۲۱}: ماتریس A متعامد است، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده کند:

$$A^T A = A A^T = I$$

^{۱۷}Cholesky decomposition

^{۱۸}Diagonal

^{۱۹}Upper triangular

^{۲۰}Lower triangular

^{۲۱}Orthogonal

۴.۲.۱ بردار ویژه و مقدار ویژه

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. چندجمله‌ای $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ، چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A نامیده می‌شود.

تعریف ۳۷.۲.۱. صفرهای چندجمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه A هستند. این معادل است با: $\lambda \in \mathbb{C}$ ، یک مقدار ویژه از ماتریس A است، اگر و تنها اگر، بردار غیر صفر x وجود داشته باشد، به طوری که:

$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۳۸.۲.۱. بردار $x \neq 0$ ، بردار ویژه ماتریس A است، اگر:

$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۳۹.۲.۱. بردار $y \neq 0$ ، بردار ویژه چپ نامیده می‌شود، اگر:

$$y^H A = \lambda y^H$$

نکته ۴۰.۲.۱. برای ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ معادله مشخصه $|\lambda I - A| = 0$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به صورت مختلط $\alpha \pm i\beta$ است.

برای ماتریس $A_{n \times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

چند جمله‌ای مشخصه برای هر ماتریس $A_{n \times n}$ یک چندجمله‌ای از مرتبه n است.

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0.$$

این چندجمله‌ای را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ای هستند که می‌توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند.

نکته ۴۱.۲.۱. در ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

۵.۲.۱ دستگاه کنترل خطی

تعاریف و قضایای این بخش از [۲۰] و [۱۹] انتخاب شده است.

تعریف ۴۲.۲.۱. یک سیستم مجموعه‌ای از اجزا است که باهم برای انجام عملی مشخص کار می‌کنند.

تعریف ۴۳.۲.۱. هر نوع محرکه‌ای که برای انتقال اطلاعات به کار گرفته شود، سیگنال نامند.

تعریف ۴۴.۲.۱. ورودی مرجع، نشان دهنده پاسخ مطلوب به سیستم است، به عبارت دیگر، هدف یا عملکرد مطلوب سیستم، موقعی برآورده می شود که خروجی سیستم به این مقدار برسد.

تعریف ۴۵.۲.۱. سیگنالی که از خروجی سیستم به دست می آید و مایل به اندازه گیری و کنترل آن می باشیم، را خروجی سیستم نامند.

تعریف ۴۶.۲.۱. سیگنالی است که در جهت تغییر شدید خروجی سیستم عمل می کند، را اغتشاش نامند.

تعریف ۴۷.۲.۱. بازگرداندن بخشی از خروجی یک سیستم و تاثیر آن بر ورودی به منظور کنترل خروجی می باشد را پسخورد می نامند.

تعریف ۴۸.۲.۱. سیستمی که در آن خروجی اثری بر روی سیگنال ورودی ندارد، سیستم کنترل حلقه باز می نامند.

تعریف ۴۹.۲.۱. سیستمی که در آن خروجی به گونه ای بر ورودی اثر می گذارند که خروجی در مقدار مطلوب باقی بماند، سیستم کنترل حلقه بسته می نامند.

سیستم های دینامیکی

- برای بسیاری از دستگاه های فیزیکی، معادله دیفرانسیل آن را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{۷.۱}$$

که در آن

– t متغیر زمان،

– $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت،

– $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل،

– $y(t)$ یک بردار r بعدی متغیر با زمان به نام بردار خروجی

است. ماتریس های A ، B ، C و D ماتریسهایی با ابعاد سازگار با معادلات فوق می باشد و می توانند متغیر با زمان باشند. در حالتی که ماتریس های A ، B ، C و D مستقل از t و ثابت باشند، دستگاه حاصل را دستگاه خطی ناوردای زمان^{۲۲} می نامیم.

معادله (۷.۱) را معادله دستگاه پیوسته گویند.

برای برخی از دستگاه ها، بردار حالت یا بردار ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه گیری نیستند، بلکه در دنباله ای از نقاط $t_i, i = 0, 1, \dots, n$ این کمیت ها در دسترس

^{۲۲}Time invariant

است. در این موارد، معادله دیفرانسیل حالت دستگاه به طور هم‌ارز به صورت معادله تفاضلی مرتبه اول زیر است:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i). \end{aligned} \quad (۸.۱)$$

که در آن $x(i)$ و $u(i)$ به ترتیب، بردارهای حالت ورودی در زمان t_i هستند.

نکته ۵۰.۲.۱. برخی از دستگاه‌ها ذاتاً گسسته زمانی هستند و تغییر حالت دستگاه فقط در نقاط زمانی خاصی صورت می‌پذیرد. در این حالت، دستگاه به صورت گسسته خطی زیر است:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \quad (۹.۱)$$

نکته ۵۱.۲.۱. یکی از نمایشهای سودمند ماتریس حالت به شکل همراه^{۲۳} است. شکل همراه ماتریس حالت کاربردهای فراوانی در تحلیل و طراحی فضای حالت سیستم‌های کنترل دارد. صورت کلی ماتریس همراه به صورت زیر است:

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

که چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A_F ، به صورت زیر است

$$\det[sI - A_F] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0.$$

کنترل‌پذیری

دستگاه توصیف شده با معادله (۷.۱)، کنترل‌پذیر نامیده می‌شود، اگر با شروع از حالت اولیه $x(0)$ ، با انتخاب ورودی مناسب $u(t)$ ، $0 \leq t \leq t_1$ ، بتوان دستگاه را به هر گام نهایی $x_1 = x(t_1)$ هدایت کرد.

نکته ۵۲.۲.۱. کنترل‌پذیری^{۲۴} دستگاه (۷.۱)، اغلب به کنترل‌پذیری زوج (A, B) اشاره دارد.

ماتریس کنترل‌پذیری

برای دستگاه توصیف شده با معادله تفاضلی (۷.۱) ماتریس کنترل‌پذیری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (۱۰.۱)$$

^{۲۳}Companion

^{۲۴}Controllability

قضیه ۵۳.۲۰۱. (معیار کنترل پذیری دستگاه پیوسته زمانی) [۱۹]

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $m \leq n$ باشد، عبارت‌های زیر معادل هستند:

• دستگاه (۷.۱) کنترل پذیر است.

• ماتریس کنترل پذیری $Q_{n \times nm}$ ، رتبه کامل n است.

$$\text{rank}(Q) = n$$

• اگر (λ, x) ، جفت ویژه ماتریس A^T باشند، به این معنی که $x^T A = \lambda x^T$ ، آنگاه:

$$x^T B \neq 0$$

ناوردهای کرونگر

ماتریس کنترل پذیری

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}, \quad (11.1)$$

را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم $b_1, \dots, b_m$ به ترتیب ستون‌های اول تا m ام ماتریس B باشند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m & Ab_1 & \dots & Ab_m & \dots & A^{n-1} b_1 & \dots & A^{n-1} b_m \end{bmatrix}, \quad (12.1)$$

از آنجایی که دستگاه کنترل پذیر است، پس می‌توان n ستون از اولین ستون‌های Q را طوری به دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان‌تر، ستون‌های Q را در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m \\ Ab_1 & \dots & Ab_m \\ A^2 b_1 & \dots & A^2 b_m \\ \vdots & & \vdots \\ A^{n-1} b_1 & \dots & A^{n-1} b_m \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

با شروع از گوشه سمت چپ بالای بلوک به طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردار قبل وابسته خطی‌اند، از بلوک حذف می‌کنیم و اگر بردار حذف شد همه‌ی بردارهای واقع در زیر آن نیز از بلوک حذف می‌شوند و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی n بردار باشد. در این حالت همه‌ی بردارهای باقیمانده غیر از n بردار به دست آمده را از بلوک حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون‌های ماتریس P قرار دهیم آنگاه P معکوس پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر به دست می‌آید.

$$P = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m & Ab_1 & \dots & Ab_m & \dots & A^{p_1-1} b_1 & \dots & A^{p_m-1} b_m \end{bmatrix}. \quad (14.1)$$

تعریف ۵۴.۲.۱. در رابطه (۱۳.۱) به هر ستون از بلوک که متناظر ستونی از ماتریس B است عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$1 \leq p_i \leq n \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (15.1)$$

این p_i ها را ناوردهای کرونکر می‌نامیم. از طرفی p_i تعداد بردارهای باقیمانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد بردارهای واقع در ستون‌های بلوک برابر است با:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m, \quad (16.1)$$

از طرفی این تعداد برابر n است، در نتیجه

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = n, \quad (17.1)$$

در کنترل بهینه به دنبال یافتن ماتریس F به گونه‌ای هستیم که حالت دستگاه را در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v به صفر میل نماید (به حالت تعادل برسد). v را اندیس کنترل‌پذیری می‌نامیم. تعریف می‌کنیم:

$$v = \max\{p_i \mid i = 1, \dots, m\}, \quad (18.1)$$

تعریف ۵۵.۲.۱. ناوردهای کرونکر (B, A) را منظم‌گوییم هرگاه اختلاف بین $\max$ و $\min$ آن‌ها حداکثر یک باشد. در غیر این صورت ناوردهای کرونکر را نامنظم‌گویند.

۶.۲.۱ پایداری

تعاریف و قضایای این بخش از [۱۹] و [۲۰] انتخاب شده‌است.

تعریف ۵۶.۲.۱. نقطه x_e را نقطه تعادل، معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x(t))$ می‌نامند، هرگاه:

$$f(x_e) = 0$$

تعریف ۵۷.۲.۱. دستگاه دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_e = 0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (19.1)$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدارگوییم، اگر به ازای t_0 و $\epsilon > 0$ ، برای تمامی $t \geq t_0$:

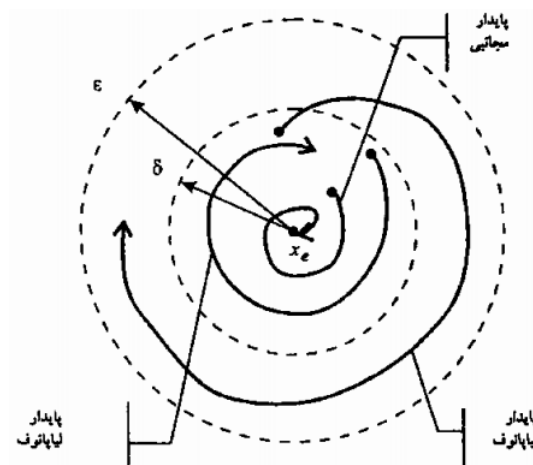
$$\exists \delta_\epsilon > 0; \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\epsilon) \implies \|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$$

تعریف ۵۸.۲.۱. نقطه تعادل x_e را پایدارمجانبی گوئیم، اگر الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

ب) برای کلیه t_0 ، یک $\rho(t_0) > 0$ وجود دارد که به ازای $\|x(t_0) - x_e\| < \rho$ ، برای $t \rightarrow \infty$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0$$

شکل (۱.۱) تعبیری از پایداری لیاپانوف و مجانبی را نشان می دهد.



شکل ۱.۱: تعبیر ترسیمی از پایداری به مفهوم لیاپانوف و پایداری مجانبی

تعریف ۵۹.۲.۱. نقطه تعادل x_e معادله دیفرانسیل حالت زیر را

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

پایدار مجانبی فراگیر گویند اگر

الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

پ) برای هر $x(t_0)$ و هر t_0 ، به ازای $t \rightarrow \infty$ داشته باشیم

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0$$

دستگاه خطی پیوسته (۷.۱) را در نظر بگیرید. فرض می کنیم بردار حالت $x(t)$ مشخص باشد و انتخاب می کنیم:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (۲۰.۱)$$

که در آن، K یک ماتریس ثابت است.

از جایگذاری معادله (۲۰.۱) در دستگاه (۷.۱) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t), \\ y(t) &= (C - DK)x(t).\end{aligned}\quad (21.1)$$

سپس مسئله پایداری دستگاه (۷.۱)، به مسئله پیدا کردن ماتریس K ، به گونه‌ای که دستگاه (۲۱.۱) پایدار باشد، تبدیل می‌شود. به بیان دیگر:

با توجه به زوج ماتریس (A, B) ، ماتریس پس‌خورد حالت K را به گونه‌ای می‌یابیم که $A - BK$ پایدار باشد. دستگاه (۲۱.۱) یک دستگاه حلقه بسته و ماتریس $A - BK$ را ماتریس حلقه بسته می‌نامند.

نکته ۶۰.۲.۱. اگر زوج (A, B) کنترل‌پذیر باشند، آنگاه این زوج باید پایدار باشد. عکس این مطلب ممکن است صحیح نباشد. یعنی، ممکن است دستگاه کنترل‌پذیر نباشد اما پایدار باشد.

قضیه ۶۱.۲.۱. دستگاه خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (22.1)$$

این دستگاه پایدار به مفهوم لیاپانوف است اگر و فقط اگر:

الف) کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی غیرمثبت داشته باشد.

ب) آن دسته از مقادیر ویژه A که قسمت‌های حقیقی صفر دارند صفرهای ساده چندجمله‌ای مشخصه باشند.

قضیه ۶۲.۲.۱. سیستم داده شده با معادله $\dot{x}(t) = Ax(t)$ پایدار مجانبی است، اگر و فقط اگر برای ماتریس معین مثبت داده شده Q ، پاسخ معادله لیاپانوف $A^T P + PA = -Q$ ، ماتریس P معین مثبت باشد.

۷.۲.۱ مشاهده پذیر

تعریف ۶۳.۲.۱. سیستم توصیف شده با معادلات (۷.۱) را کاملاً مشاهده پذیر می‌نامند، اگر بتوان هر حالت $x(t_0)$ را با مشاهده خروجی $y(t)$ تعیین نمود.

قضیه ۶۴.۲.۱. سیستم توصیف شده با معادلات (۷.۱) را کاملاً مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس مشاهده‌پذیری^{۲۵} زیر رتبه کامل داشته باشد.

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

^{۲۵}Observability

۸.۲.۱ تبدیلهای همانندی یا تشابهی

به راحتی می‌توان با تبدیل معادلات حالت و خروجی سیستم دینامیکی به صورت دیگر، از مزیت خاص نمایش جدید استفاده نمود. تغییر نمایش فضای حالت سیستم با تبدیل خطی انجام می‌پذیرد که تبدیلهای تشابهی^{۲۶} نامیده می‌شود.

معادلات حالت و خروجی سیستم دینامیکی خطی تغییرناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (23.1)$$

اکنون متغیر حالت جدید، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x(t) = Tz(t)$$

که در آن T ماتریس تبدیل ثابت و نامنفرد است. با جایگزینی $x(t) = Tz(t)$ در معادلات حالت و خروجی (۲۳.۱)، معادلات حالت و خروجی سیستم براساس متغیر حالت جدید $z(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t), \\ y(t) &= CTz(t) + Du(t)\end{aligned}$$

و با قرار دادن $\bar{C} = CT$ و $\bar{B} = T^{-1}B$ ، $\bar{A} = T^{-1}AT$ متغیر حالت جدید $z(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}z(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (24.1)$$

اگر U_n و V_n به ترتیب، ماتریس کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری معادلات حالت و خروجی (۲۳.۱) باشد و $\bar{U}_n$ و $\bar{V}_n$ به ترتیب، ماتریس کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری معادلات حالت و خروجی (۲۴.۱) باشد، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\text{rank}(\bar{U}_n) &= \text{rank}(U_n) \\ \text{rank}(\bar{V}_n) &= \text{rank}(V_n)\end{aligned}$$

^{۲۶}Similarity transformations

۹.۲.۱ تابع تبدیل

تعریف ۶۵.۲.۱. در سیستم خطی، نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به، تبدیل لاپلاس ورودی را تابع تبدیل^{۲۷} گویند.

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

با بکاربردن تبدیل لاپلاس و در نظر گرفتن شرط اولیه برابر صفر، داریم:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s),$$

$$sX(s) - AX(s) = BU(s),$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s),$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s),$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

تابع تبدیل عبارتست از:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

^{۲۷}Transfer function

فصل ۲

الگوریتم مستقیم برای جایی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی

در این فصل، راه حل مستقیم برای جایی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی ارائه شده روش حل این مساله منجر به فرمولی مشابه فرمول آکرمن می‌شود. روش کار به این صورت است که ابتدا سیستم را به صورت استاندارد فروبنیوس تبدیل کرده، پس از آن مساله جایی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت حل می‌شود.

۱.۲ جایی قطب با پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های خطی با زمان ثابت

جایی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت، در این بخش سیستم‌های خطی با زمان ثابت با استفاده از روش‌های [۱، ۲، ۳] حل می‌شود.

۱.۱.۲ فرمول بندی مساله جایی قطب

سیستم خطی کنترل‌پذیر تک ورودی زمان ثابت زیر در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.2)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}$ ، به ترتیب بردار حالت و ورودی عددی یا کنترل هستند، بطوری که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ به ترتیب ماتریس سیستم و بردار ورودی می‌باشند. چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A را می‌توان بصورت زیر بدست آورد.

$$\det[sI - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (2.2)$$

۲. الگوریتم مستقیم برای جابجایی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی و تک خروجی

که در آن $a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]$ ضرایب چندجمله‌ای مشخصه و $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس واحد است. می‌دانیم که $a_0 = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ و $a_{n-1} = -\text{trace}(A)$ است.

هدف جابجایی قطب‌های مطلوب برای سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترل پسخورده مشتق حالت ثابت زیر است

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad (3.2)$$

که رفتار مطلوب را برای حالت‌ها اجرا و از این رو سیستم را پایدار می‌کند. با استفاده از پسخورده (۳.۲) سیستم حلقه بسته به این صورت خواهد بود

$$\dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t), \quad (4.2)$$

مساله، یافتن ماتریس پسخورده K است بطوریکه $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ قطب‌های دلخواه، سیستم حلقه بسته (۴.۲) باشند. حل این مساله با استفاده از روش‌های پسخورده حالت دشوار است، و یک رویکرد مستقیم معمولاً منجر به بهینه‌سازی تکراری می‌شود. راه حل این مساله با بکارگیری یک تبدیل در این سیستم و تغییر به شکل استاندارد فروبنیوس برای سیستم‌های با زمان ثابت و تخصیص مقادیر ویژه، تکمیل می‌شود.

۲.۱.۲ تبدیل کردن به حالت استاندارد فروبنیوس برای سیستم‌های با زمان ثابت

شکل استاندارد فروبنیوس با تبدیل بردار حالت به سیستم هماهنگ جدید ایجاد می‌شود که در آن معادله‌ی سیستم شکل خاصی را به خود می‌گیرد. تبدیل حالت زمان ثابت زیر را در نظر بگیرید

$$z(t) = Q^{-1}x(t), \quad (5.2)$$

که در آن $z(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیر حالت جدید و $Q^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس انتقال است. سیستم اصلی به سیستمی با ماتریس سیستم جدید $A_F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و بردار کنترل جدید $B_F \in \mathbb{R}^n$ تبدیل می‌شود، که به صورت زیر می‌باشد

$$A_F = Q^{-1}AQ, \quad B_F = Q^{-1}B \quad (6.2)$$

ماتریس انتقال به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ \vdots \\ q_1 A^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

که در آن بردار سطری $q_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$q_1 = e_n^T R^{-1}, \quad (8.2)$$

که $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس کنترل پذیری سیستم (۱.۲) بصورت زیر است

$$R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

و $e_n = [0, \dots, 0, 1]^T$ بردار یکه است، در این صورت سیستم تغییر یافته به شکل استاندارد فروبنیوس زیر می‌باشد

$$\dot{z} = A_F z + B_F u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (10.2)$$

در این صورت این سیستم به شکل رایج و ساده‌ی تغییر می‌یابد، که می‌توان آن را به سادگی کنترل کرد و مسالهی جایابی قطب را با استفاده از پسخورد مشتق حالت را حل کنیم. توجه داریم که اگر ماتریس انتقال نامنفرد باشد، در این صورت تبدیل به شکل استاندارد فروبنیوس امکان‌پذیر است.

۳.۱.۲ راه حل مسالهی جایابی قطب برای سیستم‌های با زمان ثابت

در این بخش، ماتریس پسخورد مشتق حالت K را پیدا می‌کنیم که ماتریس حلقه بسته، قطب‌های مطلوب را به گونه‌ای اختیار کند که از لحاظ محاسبه، کارآمد و ساده می‌باشد. با بکار بردن تبدیل بالا به شکل استاندارد فروبنیوس، می‌توان سیستم را با پسخورد خطی برای رفتار مطلوب، تغییر داد. با تمایز قائل شدن معادله‌ی تغییر شکل (۵.۲)، سیستم حلقه بسته‌ای که در مختصات z به دست می‌آید به شرح زیر است

$$\dot{z}(t) = Q^{-1} \dot{x}(t). \quad (11.2)$$

بنابراین، بعد از جایگزینی (۴.۲) و (۵.۲) در معادله‌ی بالا، خواهیم داشت

$$\dot{z}(t) = Q^{-1} [I + BK]^{-1} A Q z = A_z z, \quad (12.2)$$

که در آن ماتریس سیستم حلقه بسته $A_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به صورت زیر است

$$A_z = Q^{-1} [I + BK]^{-1} A Q. \quad (13.2)$$

با ضرب $Q^{-1} A^{-1} [I + BK]$ در A_z می‌توانیم معادله‌ی بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$A_z Q^{-1} A^{-1} [I + BK] = Q^{-1}. \quad (14.2)$$

مقادیر ویژه‌ی مطلوب $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ را در نظر بگیرید. چند جمله‌ای مشخصه حلقه بسته به صورت زیر است

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0, \quad (15.2)$$

۲. الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پس‌خورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی^۲

که در آن $d = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{n-1}]$ ضرایب چندجمله‌ای مشخصه هستند. ماتریس حلقه بسته را می‌توان به شکل استاندارد زیر نوشت

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (۱۶.۲)$$

معادله‌ی (۱۴.۲) را می‌توان، در قالب بردارهای سطری ماتریس انتقال Q^{-1} به صورت زیر بازنویسی کرد

$$q_1 A^i [I + BK] = q_1 A^i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

و

$$-dQ^{-1}A^{-1}[I + BK] = q_1 A^{n-1}. \quad (۱۷.۲)$$

با توجه به تعریف ماتریس انتقال Q^{-1} به راحتی می‌توان نوشت

$$q_1 A^i B = 0, \quad i = 0, \dots, n-2. \quad (۱۸.۲)$$

در نهایت ماتریس پس‌خورد K برای سیستم با زمان ثابت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$K = (-dQ^{-1}A^{-1}B)^{-1}(q_1 A^{n-1} + dQ^{-1}A^{-1}). \quad (۱۹.۲)$$

معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیرنوشت

$$K = \left(\left(-\sum_{i=0}^{n-1} d_i q_1 A^{i-1} \right) B \right)^{-1} \left(q_1 A^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} d_i q_1 A^{i-1} \right). \quad (۲۰.۲)$$

برای ساده کردن ماتریس پس‌خورد، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$AQ = QA_F \quad (۲۱.۲)$$

بنابراین، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$Q^{-1}A^{-1}B = A_F^{-1}Q^{-1}B = A_F^{-1}B_F \quad (۲۲.۲)$$

معکوس ماتریس A_F ، به صورت زیر بدست می‌آید

$$A_F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{1}{a_0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (۲۳.۲)$$

در نهایت، می‌توان به دست آورد که

$$-dQ^{-1}A^{-1}B = -dA_F^{-1}B_F = -d \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_o} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d_o}{a_o}. \quad (24.2)$$

بنابراین، ماتریس پسخورده K برای سیستم زمان ثابت، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{a_o}{d_o} \right) \left(q_1 A^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} d_i q_1 A^{i-1} \right) \\ &= \left(\frac{a_o}{d_o} \right) q_1 A^{-1} [A^n + d_{n-1} A^{n-1} + \dots + d_1 A + d_o I] \\ &= \left(\frac{a_o}{d_o} \right) e_n^T [AR]^{-1} D(A) = \frac{(-1)^n}{d_o} e_n^T R^{-1} \text{adj}(A) D(A) \end{aligned} \quad (25.2)$$

که در آن $D(A)$ نشان دهنده مقادیر چندجمله‌ای مشخصه (۱۵.۲) به ازای ماتریس حالت A است. نتایج فرمول بندی برای ماتریس پسخورده حالت مشتق ثابت، شبیه فرمول آکرمن برای حالت پسخورده رایج است.

فرمول اصلی آکرمن در [۱، ۲، ۳] به الگوریتم مؤثر معادل برای محاسبه‌ی ماتریس پسخورده K تغییر داده شده است. همین کار را می‌توان برای پسخورده حالت مشتق انجام داد. فرمول مؤثر معادلی که مبتنی بر ضرایب چندجمله‌ای به دست می‌آید، روشی بازگشتی است که در ادامه می‌آید.

$$K = \frac{a_o}{d_o} \left(q'_n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i q'_i \right) \quad (26.2)$$

که در آن

$$q'_o = q_1 A^{-1} = e_n^T [AR]^{-1}, \quad q'_i = q'_{i-1} A, \quad i = 1, \dots, n$$

واضح است که محاسبه با بردارهای سطری، کارآمدتر از محاسبه با ماتریس‌های مربعی کامل است. حال، اگر مجموعه‌ای از مقادیر ویژه، λ_i ، $i = 1, \dots, n$ بجای ضرایب d_i از معادله‌ی مشخصه معلوم باشند، در این صورت ماتریس پسخورده به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} K &= \frac{a_o}{\prod_{i=1}^n (-\lambda_i)} q_1 A^{-1} \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I) \\ &= \frac{\det(-A)}{\prod_{i=1}^n (-\lambda_i)} e_n^T [AR]^{-1} \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \lambda_i} e_n^T R^{-1} \text{adj}(A) \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I) \end{aligned} \quad (27.2)$$

و دوباره با بکارگیری ساده سازی (۲۶.۲)، فرمول بالا می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$K = \frac{a_o}{\prod_{i=1}^n (-\lambda_i)} q'_n, \quad (28.2)$$

که در آن

$$q'_0 = q_1 A^{-1} = e_n^T [AR]^{-1}, \quad q'_i = q'_{i-1} (A - \lambda_i I), \quad i = 1, \dots, n.$$

به سادگی می‌توان متوجه شد که بکارگیری الگوریتم پیشنهادی آسان است. علاوه بر این، محاسبات ماتریس پسخورده مشتق حالت و پیاده سازی مستقیم آن در فضای حالت اصلی اجرا می‌شود. ما نیازی به محاسبه‌ی تغییر شکل فروبنیوس نداریم. یکی از مزیت‌های اصلی ماتریس انتقال، امکان به دست آوردن حالت تحلیلی صریح برای ماتریس پسخورده است. الگوریتم بالا برای مقادیر ویژه‌ای که حقیقی یا مزدوج مختلط هستند به کار می‌رود.

از جایابی قطب با استفاده از مشتق حالت شرایط لازم و کافی برای قرار دادن قطب دلخواه را می‌توان توصیف کرد. برای انتقال به شکل استاندارد فروبنیوس و یا محاسبه‌ی فرمول‌های (۲۵.۲) - (۲۸.۲) ماتریس کنترل پذیری R باید از رتبه‌ی کامل باشد، یعنی سیستم اصلی باید مانند پسخورده حالت رایج، کنترل پذیر باشد علاوه بر این ضریب a_0 نباید صفر باشد. با استفاده از دانسته‌های مربوط به ضرایب چندجمله‌ای مشخصه، معادل با شرط زیر است

$$a_0 = \prod_{i=1}^n -\lambda_{oi} \neq 0. \quad (29.2)$$

که در اینجا λ_{oi} ، $(i = 1, \dots, n)$ قطب‌های اصلی سیستم (۱.۲) هستند. و این یعنی همه‌ی قطب‌های اصلی باید ناصفر باشند و این معادل با این است که ماتریس سیستم A برای سیستم اصلی (۱.۲) نامنفرد است [۴].

بر اساس شرایط لازم و کافی بالا، می‌توانیم نتیجه‌ی از مطالب فوق را به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه ۱.۱.۲. سیستم کنترل پذیر خطی تک ورودی با زمان ثابت (۱.۲) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس A نامنفرد و قانون کنترل (۳.۲) باشد، در این صورت قطب‌های سیستم حلقه بسته (۱.۲)، می‌تواند به طور دلخواه در مکانهای مطلوب قرار گیرند و پسخورده مشتق حالت، بوسیله‌ی فرمول‌های (۲۵.۲) - (۲۸.۲) محاسبه می‌شود.

نکته ۲.۱.۲. روش آکرمین [۱] سیستم خطی کنترل پذیر تک ورودی زمان ثابت زیر در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}$ ، به ترتیب بردار حالت و ورودی عددی یا کنترل هستند، بطوری که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ به ترتیب ماتریس سیستم و بردار ورودی می‌باشند. هدف جایابی قطب با پسخورده حالت، با قانون کنترل $u = K_S x$ می‌باشد که قطب‌های مطلوب $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ را به ماتریس حلقه بسته سیستم اختصاص دهد، ماتریس پسخورده حالت روش آکرمین بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$K_S = -q_1 \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)$$

که در آن بردار سطری $q_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$q_1 = e_n^T R^{-1},$$

که $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس کنترل پذیری سیستم بصورت زیر است

$$R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix},$$

و $e_n = [0 \dots 0 \ 1]^T$ بردار یکه است.

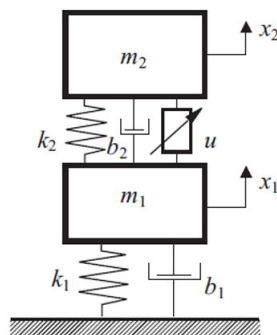
۲.۲ مثال‌های عددی

در این بخش، نتایج شبیه سازی شده ارائه می‌گردد تا شدنی بودن و کارایی الگوریتم جایابی قطب پیشنهاد شده را بوسیله‌ی پس‌خورد مشتق حالت نشان دهد.

مثال ۱.۲.۲. ساختار سیستم مکانیکی و پارامترهای آن در شکل (۱.۲) نشان داده شده است. معادله دینامیکی این سیستم می‌تواند در شکل فضای حالت زیر توصیف شود

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{-b_1 - b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}$$

که در آن m_1 و m_2 جرم اول و دوم است، k_1 و k_2 ثابتهای فنر، b_1 و b_2 ثابتهای ضربه گیر، x_1 و x_2 جابجایی عمودی جرم اول و دوم، $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$ بردار حالت و u بردار ورودی کنترل است.



شکل ۱.۲: سیستم مکانیکی

در مدل پارامترها بصورت زیر هستند

$$m_1 = 100 \text{ kg}, \quad m_2 = 10 \text{ kg}, \quad k_1 = 360 \text{ kN/m},$$

$$k_2 = 36 \text{ kN/m}, \quad b_1 = 70 \text{ N.s/m}, \quad b_2 = 50 \text{ N.s/m}$$

۲. الگوریتم مستقیم برای جابجایی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی ۳

برای این سیستم حلقه باز قطب‌ها $70/1294i \pm 2/1835$ و $51/3006i \pm 0/9165$ می باشد. قطب‌های حلقه بسته مورد نظر به صورت $2i \pm 5$ و $5i \pm 10$ است. ابتدا، به محاسبه ماتریس پسخورد مشتق حالت به صورت زیر می پردازیم

$$K = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \lambda_i} q_1 \text{adj}(A) \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)$$

که در آن λ_i قطب های ماتریس حلقه بسته می باشد، پس داریم

$$\prod_{i=1}^4 \lambda_i = 3625$$

و

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0/0278 & 0/0028 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3000 & 0 & -4000 & 0 \\ 15000 & -18000 & -4000 & -4000 \\ 12960000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12960000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

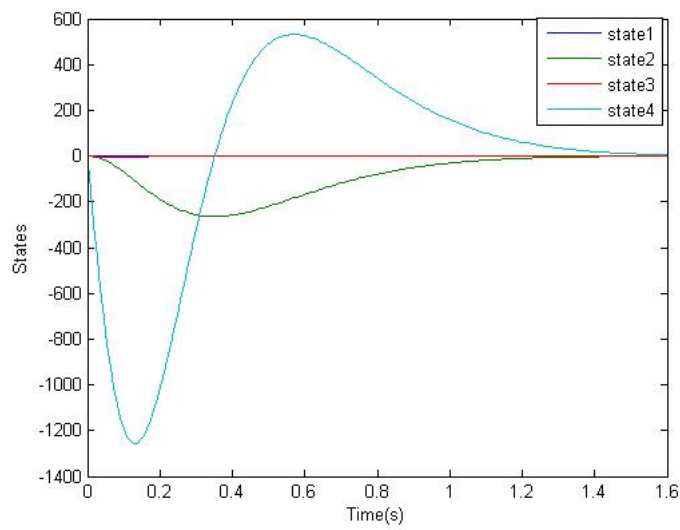
$$\prod_{i=1}^4 (A - \lambda_i I) = \begin{bmatrix} 15750000 & -2650000 & -1000000 & 0 \\ -26850000 & 13470000 & 500000 & -700000 \\ 430210000 & -55110000 & 15900000 & -27300000 \\ -437230000 & 261210000 & -27250000 & 13830000 \end{bmatrix}$$

$$K = [-10519000 \quad 18000 \quad -323000 \quad 3000]$$

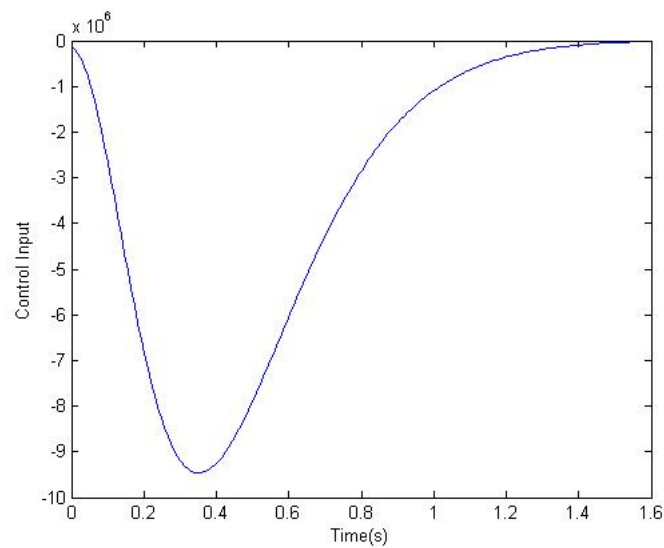
با شرایط اولیه حالت $x(t_0) = [0/5 \quad 0/5 \quad 0/2 \quad 0/2]^T$ شبیه سازی انجام شده است. پاسخ گذرا حالت و ورودی کنترل در شکل‌های (۲.۲) و (۳.۲) نشان داده شده است. سپس برای مقایسه، ماتریس پسخورد آکرمن برای همان قطب‌های سیستم‌های مطلوب، به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$K_S = -q_1 \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)$$

$$K_S = [360740 \quad -35990 \quad -2830 \quad 40]$$



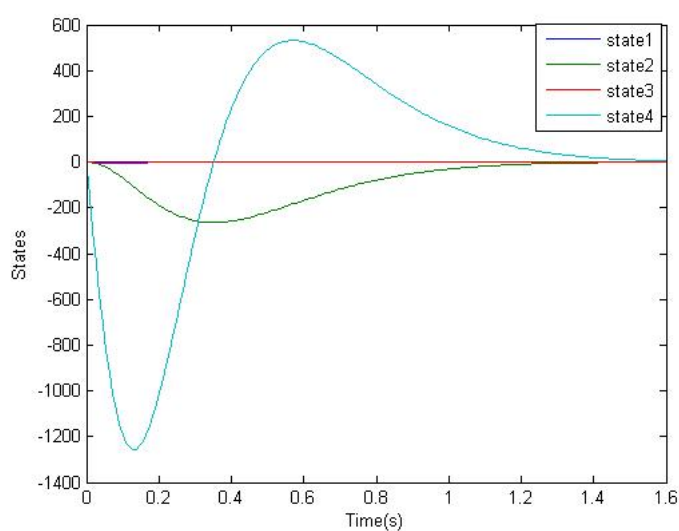
شکل ۲.۲: پاسخ گذرا سیستم کنترل پذیری پس‌خورده مشتق حالت



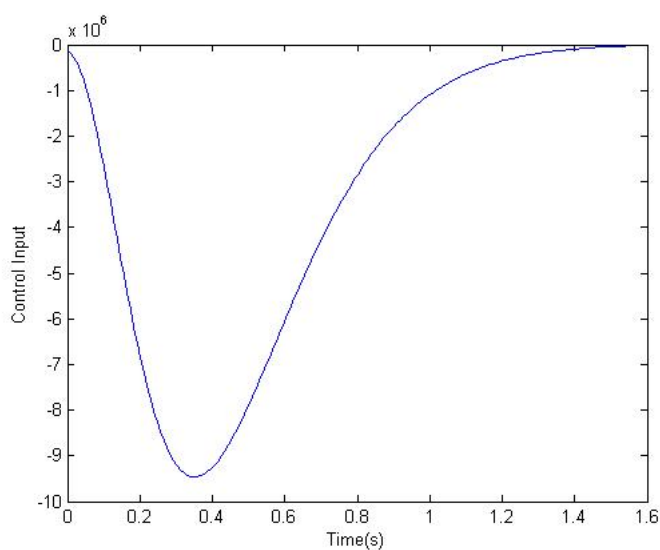
شکل ۳.۲: ورودی کنترل سیستم کنترل پذیری پس‌خورده مشتق حالت

نتایج پایداری برای شرایط اولیه یکسان در شکل‌های (۴.۲) و (۵.۲) رسم شده است. که نشان می‌دهد، پاسخ گذرا و کنترل برای این دو روش یکسان است.

۲. الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پاسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی ۳



شکل ۴.۲: پاسخ گذرا سیستم با فرمول بندی آکرم

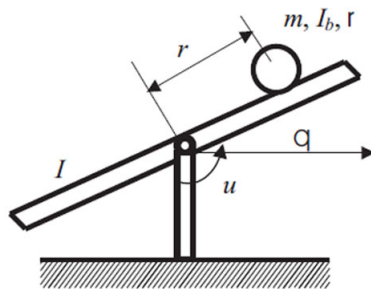


شکل ۵.۲: ورودی کنترل سیستم با فرمول بندی آکرم

مثال ۲.۲.۲. سیستم توپ و میله را در نظر بگیرید. شکل (۶.۲) ساختار این سیستم و پارامترهای آن را نشان می‌دهد. معادلات دینامیک خطی مدل فضای حالت برای حرکات کوچک پیرامون $\theta = 0^\circ$ و

$r = r_0$ در زیر آمده است.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{mr_0^2 + I} & \frac{-mg}{mr_0^2 + I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m g p^2}{m p^2 + I_b} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (30.2)$$



شکل ۶.۲: سیستم توپ و میله

که در آن m, I_b, p نیرو هستند، به ترتیب گشتاور لختی و شعاع توپ، I گشتاور لختی میله، g شتاب گرانش، b ضریب اصطکاک چسبندگی چرخش میله، θ زاویه ای است که میله با محور افق می‌سازد، r فاصله‌ی بین مرکز توپ و مرکز میله است، بردار حالت $x = [\theta \dot{\theta} r \dot{r}]$ ، و ورودی کنترل گشتاور دورانی است. در این بررسی، فرض می‌کنیم که توپ بدون اصطکاک روی میله حرکت می‌کند. کنترل در توازن با توپ در فاصله از مرکز نقطه لولا بوسیله‌ی شیب‌دار کردن عقب میله و نیروی موتور است. مقادیر پارامترهای گوناگون مدل به صورت زیر هستند.

$$m = 1 \text{ kg}, p = 0.05 \text{ m}, r_0 = 0.1 \text{ m}, g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

$$b = 0.1 \text{ N.s/m}, I_b = 5 \text{ kg.m}^2, I = 1 \text{ Kg.m}^2$$

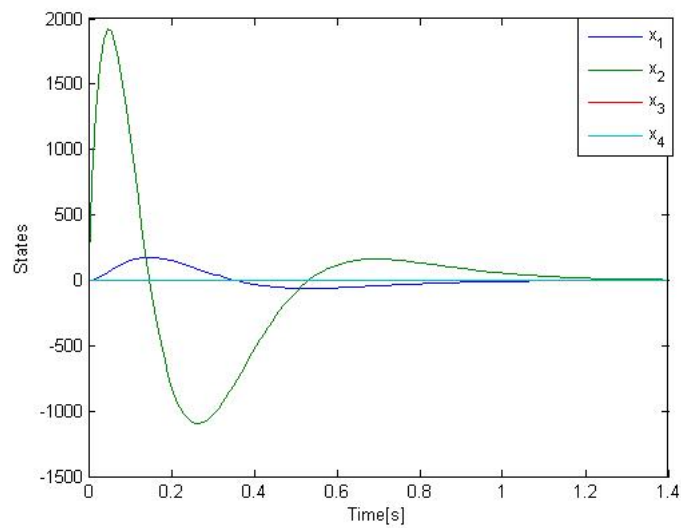
ضرایب چندجمله‌ای مشخصه $a = [1 \quad 0.99 \quad 0 \quad -0.476]$ هستند. قطب‌های اصلی $-0.494, -0.442, 0.4652i \pm 0.246i$ هستند. قطب‌های حلقه بسته مطلوب $2i \pm 7$ و $5i \pm 10$ هستند.

ابتدا ماتریس پس‌خورد مشتق حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود

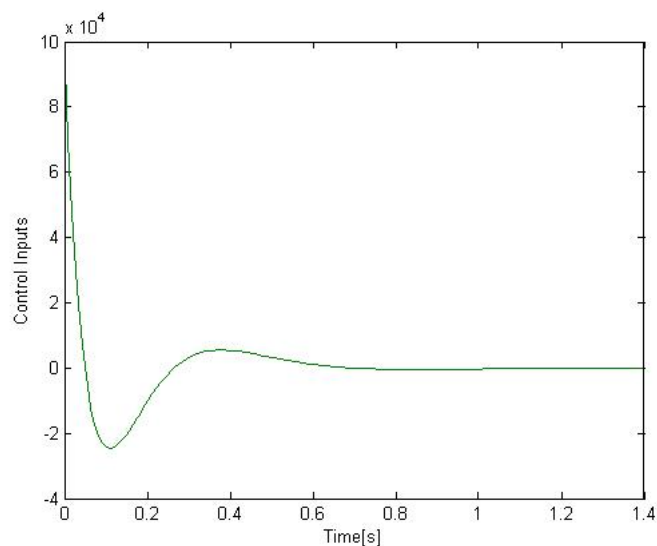
$$K = [-0.1012 \quad -1.01 \quad 4.1609 \quad 0.6782]$$

حالت‌های اولیه $x(t_0) = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.05 \quad 0.05]^T$ را در نظر بگیرید. نتایج شبیه سازی شده در شکل‌های (۷.۲) و (۸.۲) نشان داده شده است.

۲. الگوریتم مستقیم برای جابجایی قطب با استفاده از پس‌خورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی تک ورودی ۳۴



شکل ۷.۲: پاسخ گذرا سیستم کنترل پذیری با پس‌خورد مشتق حالت

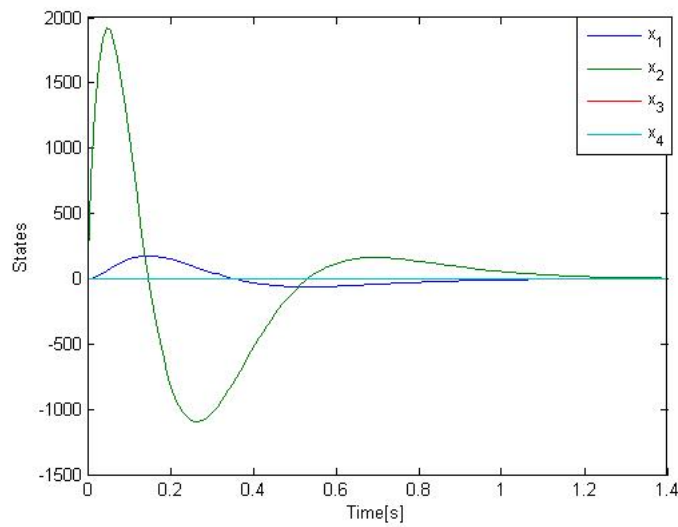


شکل ۸.۲: ورودی کنترل سیستم کنترل پذیری با پس‌خورد مشتق حالت

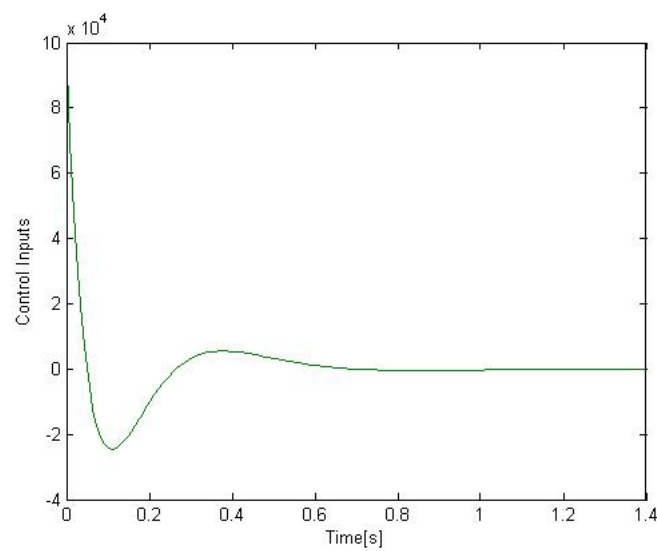
برای مقایسه ماتریس پس‌خورد، با فرمول آکرمن برای همان قطب‌های به صورت زیر محاسبه شده است

$$K_S = [-500 \quad 0 \quad 1364900 \quad 578900]$$

مشابه نتایج مثال قبل، عملکرد پاسخ گذرا و ورودی کنترل یکسان است. نتایج شبیه سازی شده در شکل‌های (۹.۲) و (۱۰.۲) نشان داده شده است.



شکل ۹.۲: پاسخ گذرا سیستم کنترل پذیری با فرمول بندی آکرمن



شکل ۱۰.۲: ورودی کنترل سیستم کنترل پذیری با فرمول بندی آکرمن

فصل ۳

الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی

در این فصل، راه حل مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی ارائه شده است. راه حل جایابی قطب برای هر سیستم کنترل پذیری که ماتریس سیستم نامنفرد با قطب‌های ناصفر قابل اجرا است. روش کار به این صورت است که ابتدا سیستم را به صورت استاندارد فروبنیوس تبدیل کرده و سپس مساله جایابی قطب با استفاده از پسخورده مشتق حالت حل می‌شود.

۱.۳ جایابی قطب بوسیله‌ی پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های چند ورودی زمان ثابت

در این بخش، جزئیات الگوریتم برای مساله جایابی قطب بوسیله‌ی پسخورده مشتق حالت برای سیستم‌های خطی زمان ثابت را شرح می‌دهیم.

۱.۱.۳ فرمول بندی مساله جایابی قطب

سیستم خطی چند ورودی، زمان ثابت را با نمایش فضای حالت زیر در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردارهای حالت و کنترل هستند ($m \leq n$)، بطوریکه $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس‌های سیستم و کنترل هستند. مفروضات مساله این است که، سیستم کاملاً کنترل پذیر و m ستون ماتریس B ، $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ ، مستقل خطی باشند. به

علاوه فرض می‌کنیم ماتریس سیستم، A نامنفرد باشد. هدف این است که با استفاده از پسخورد خطی، برای حالات مختلف مساله پایداری در سیستم ایجاد کنیم. مساله پیدا کردن پسخورد مشتق حالت با قانون کنترل

$$u(t) = -K\dot{x}(t) \quad (2.3)$$

که مقادیر ویژه مورد نظر را اختصاص می‌دهد، به منظور پایداری و دستیابی به عملکرد مطلوب می‌باشد. با جایگذاری (۲.۳) در (۱.۳) سیستم دینامیکی حلقه بسته به صورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned} (I_n + BK)\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ \dot{x}(t) &= (I_n + BK)^{-1}Ax(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

که در آن I_n ماتریس همانی $n \times n$ است. فرض شده ماتریس $(I_n + BK)$ رتبه‌ی کامل است برای اینکه سیستم حلقه بسته خوش تعریف است.

مساله به پیدا کردن ماتریس پسخورد $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ هست که مقادیر ویژه‌ی حلقه بسته خودمزدوج $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ به مقادیر مطلوبی تخصیص داده شوند. نشان خواهیم داد که این مقادیر ویژه‌ی باید ناصفر باشند. مشکل اساسی این است که از ماتریس سیستم A بطور مستقیم در محاسبه ماتریس K استفاده می‌شود برای غلبه یافتن به این مشکل، سیستم به ساختار ساده‌ای از ماتریس‌های تبدیل A و B تغییر داده می‌شود و سپس روش جایابی قطب می‌تواند به کار رود. مراحل مقدماتی برای حل مساله بالا، تبدیل این سیستم به شکل استاندارد فروبنیوس است و مرحله‌ی بعدی به کاربردن روش جایابی قطب به منظور تخصیص دلخواه قطب‌های حلقه بسته سیستم است.

۲.۱.۳ انتقال به شکل استاندارد فروبنیوس برای سیستم‌های زمان ثابت

شکل استاندارد فروبنیوس بوسیله‌ی تبدیل بردار حالت در مختصات جدید بدست می‌آید که در آن معادلات سیستم شکل ویژه‌ای به خود می‌گیرند. تبدیل مختصات خطی زمان ثابت زیر را در نظر بگیرید

$$z(t) = Q^{-1}x(t), \quad x(t) = Qz(t) \quad (4.3)$$

که در آن $z(t) \in \mathbb{R}^n$ تبدیل بردار متغیر حالت و $Q^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس انتقال است. بنابراین شکل استاندارد فروبنیوس به صورت زیر است

$$\dot{z}(t) = A_F z(t) + B_F u(t) \quad (5.3)$$

که در آن $A_F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B_F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس سیستم تبدیل یافته و ماتریس کنترل تبدیل یافته می‌باشد که به صورت زیر داده می‌شود [۵]

$$A_F = Q^{-1}AQ, \quad B_F = Q^{-1}B \quad (6.3)$$

که در آن

$$A_F = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & 1 \\ \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & \dots & \dots & \dots & \circ \\ \vdots & & & & \vdots \\ \circ & \dots & \dots & \dots & \circ \\ \times & \times & \dots & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \\ \circ & \dots & \circ \\ \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & 1 \\ \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & \circ & \dots & \circ \\ \dots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \circ & \dots & \circ \\ \dots & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} \circ & \dots & \dots & \dots & \circ \\ \vdots & & & & \vdots \\ \circ & \dots & \dots & \dots & \circ \\ \times & \times & \dots & \times & \dots & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & 1 \\ \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B_F = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & \dots & \circ \\ \vdots & & \vdots \\ \circ & \dots & \circ \\ \times & \dots & \times \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & \dots & \circ \\ \vdots & & \vdots \\ \circ & \dots & \circ \\ \times & \dots & \times \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} \circ & \dots & \dots & \dots & \circ \\ \vdots & & & & \vdots \\ \circ & \dots & \dots & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \dots & \dots & \circ \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

این نشان می‌دهد که، این سیستم از ترکیب کردن m ماتریس همراه مشخص شده، در بلوک‌ها به صورت قطری تشکیل شده است. هر ماتریس همراه می‌تواند به نمایش دادن زیر سیستم‌های جفت شده به دیگر سیستم‌ها در نظر گرفته شود. اندازه بلوک‌ها μ_j ، که اندیس کنترل پذیری متناظر با b_j از ماتریس B است که، $\mu_1 + \dots + \mu_m = n$ و $j = 1, \dots, m$ می‌باشد. در این صورت، سیستم چند ورودی به مجموعه‌ی جفت‌هایی از m زیر سیستم تک ورودی که می‌توان به آسانی پردازش کرد کاهش می‌یابد بنابراین مساله جایابی قطب حل می‌شود. نماد $\times$ در ماتریس بطور کلی عناصر ناصفر را نشان می‌دهد.

۳. الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی ۴۹

$$Q^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ماتریس انتقال ثابت دارای ساختار زیر است}$$

$$Q^{-1} = \text{rows}(q_1 \ q_1 A \ \dots \ q_1 A^{\mu_1-1} \ q_2 \ q_2 A \ \dots \ q_2 A^{\mu_2-1} \ \dots \ q_m \ q_m A \ \dots \ q_m A^{\mu_m-1}) \quad (۸.۳)$$

که در آن $q_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ نشان دهنده بردار سطری است که در زیر آمده است

$$q_j = e_{r_j}^T R^{-1}, \quad r_j = \sum_{k=1}^j \mu_k, \quad j = 1, \dots, m, \quad (۹.۳)$$

که در آن $e_{r_j} \in \mathbb{R}^n$ بردار یکه، با ۱ در موقعیت r_j می‌باشد.

ماتریس کنترل پذیری سیستم (۱۰.۳)، $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به صورت زیر است

$$R = (b_1 \ Ab_1 \ \dots \ A^{\mu_1-1} b_1 \ b_2 \ Ab_2 \ \dots \ A^{\mu_2-1} b_2 \ \dots \ b_m \ Ab_m \ \dots \ A^{\mu_m-1} b_m) \quad (۱۰.۳)$$

انتخاب بردارهای که در ماتریس R هستند، به صورت زیر انجام می‌شود. در ابتدا با انتخاب تمام ستونهای b_j از ماتریس B شروع می‌شود. در مرحله i ام، از چپ به راست ستونهای $A^{i-1} b_j$ برای $j = 1, \dots, m$ از نظر وابستگی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. اگر بردار انتخاب شده مستقل خطی از بردارهای قبلی باشد، آن را حفظ، در غیر این صورت آن را از انتخاب‌ها حذف می‌کنیم. این روند انتخاب‌ها زمانی پایان می‌یابد که n بردار مستقل خطی حاصل شود. n بردار را، به منظور شکل‌گیری ماتریس R مرتب می‌کنیم. در مرجع [۲]، ثابت شده است که ماتریس تبدیل Q^{-1} به دست آمده نامنفرد است و تبدیل به شکل استاندارد کلی می‌تواند ایجاد شود. مراحل بالا تبدیل به شکل استاندارد را کامل می‌کند. این نتایج اساسی پردازش مساله جایابی قطب را ساده می‌کند.

۳.۱.۳ راه حل مساله جایابی قطب برای سیستم‌های زمان ثابت

در این بخش، چگونگی نتیجه‌گیری فرمول صریح برای ماتریس پسخورد مشتق حالت K که قطب‌ها را به سیستم حلقه بسته تخصیص می‌دهد را نشان خواهیم داد. با بکارگیری تبدیل بالا به شکل استاندارد، سیستم می‌تواند با استفاده از پسخورد خطی، رفتار مطلوبی را ایجاد کند. با دیفرانسیل‌گیری معادله انتقال (۴.۳) نتایج سیستم حلقه بسته در مختصات z به صورت زیر است

$$\dot{z}(t) = Q^{-1} \dot{x}(t) \quad (۱۱.۳)$$

بنابراین، بعد از جایگزینی (۳.۳) و (۴.۳) در معادله بالا به دست می‌آوریم

$$\dot{z}(t) = Q^{-1} (I_n + BK)^{-1} A Q z(t) = A_Z z(t) \quad (۱۲.۳)$$

که در آن $A_Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس حلقه بسته سیستم در مختصات z است و به صورت زیر می‌باشد

$$A_Z = Q^{-1} (I_n + BK)^{-1} A Q \quad (۱۳.۳)$$

با ضرب کردن رابطه $Q^{-1} A^{-1} (I_n + BK)$ در معادله‌ی بالا، خواهیم داشت

$$A_Z Q^{-1} A^{-1} (I_n + BK) = Q^{-1} \quad (۱۴.۳)$$

در حل مساله جایابی قطب، ابتدا قطب‌های مطلوب را به m گروه $\{\lambda^1\}, \dots, \{\lambda^m\}$ خود مزدوج، با تعداد قطب‌های μ_j در هر بلوک $j = 1, \dots, m$ که $\lambda^j \equiv (\lambda_1^j, \dots, \lambda_{\mu_j}^j)$ تقسیم می‌کنیم. همچنین

سودمند است که قطب‌های مطلوب در همه‌ی بلوک‌ها توزیع شوند و مقادیر ویژه بزرگتر در بلوک‌های کوچکتر قرار می‌گیرند [۲]. بردارهای حقیقی متناظر $\{d^1\}, \dots, \{d^m\}$ با $d^j \equiv (d_{\mu_j}^j, \dots, d_{\mu_j-1}^j)$ که ضرایب معادلات مشخصه‌ی مطلوب برای گروه j هستند به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$D_j(s) = (s - \lambda_1^j)(s - \lambda_2^j) \dots (s - \lambda_{\mu_j}^j) \\ = s^{\mu_j} + d_{\mu_j-1}^j s^{\mu_j-1} + \dots + d_1^j s + d_0^j, \quad j = 1, \dots, m \quad (15.3)$$

در این صورت ساختار ماتریس حلقه بسته مطلوب می‌تواند، به صورت ماتریس قطری بلوکی به شکل زیر نشان داده شود

$$A_Z = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ_{\mu_1-1,1} & I_{\mu_1-1} \\ & -d^1 \end{pmatrix} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \begin{pmatrix} \circ_{\mu_2-1,1} & I_{\mu_2-1} \\ & -d^2 \end{pmatrix} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \begin{pmatrix} \circ_{\mu_m-1,1} & I_{\mu_m-1} \\ & -d^m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (16.3)$$

می‌توان به این نکته اشاره کرد که مقادیر ویژه A_Z همان قطب‌های حلقه بسته مطلوب است. از معادله‌ی (۱۳.۳) و (۱۴.۳) واضح است که ماتریس A نامنفرد و ماتریس مطلوب A_Z نیز باید نامنفرد و همچنین ماتریسهای $(I_n + BK)$ و Q باید از رتبه‌ی کامل باشد. شرایط لازم برای جایابی قطب با پسخورد مشتق حالت با مقادیر ویژه ناصفر در لم زیر توضیح داده شده است.

لم ۱۰.۱.۳. اگر مساله جایابی قطب با قطب‌های خودمزدوج مطلوب ناصفر برای زوج ماتریس (A, B) حل شود، در این صورت (A, B) بطور کامل کنترل پذیر است که

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (17.3)$$

و A نامنفرد است.

برهان. فرض کنیم (A, B) بطور کامل کنترل پذیر نباشند، در این صورت یک مقدار ویژه، مثلاً λ ، از A و بردار ویژه نظیر $w \neq \circ$ وجود دارد بطوریکه

$$w^T A = \lambda w^T, \quad w^T B = \circ$$

در این صورت

$$w^T [(I_n - BK)\lambda - A] = w^T \lambda - \lambda w^T = \circ$$

بنابراین λ مقادیر ویژه حلقه بسته است، همچنین با تغییرهای قطب‌های به آن‌هایی که موردنظر است در تناقض است. برای تبدیل به شکل استاندارد فروبنیوس و با محاسبه پسخورد، ماتریس کنترل پذیر پسخورد R باید از رتبه‌ی کامل باشد.

۳. الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی ۴۲

از این شرط که ماتریس حلقه بسته در (۳.۳) باید تعریف شود، پس باید در آن $(I_n + BK)$ از رتبه‌ی کامل باشد. معادله‌ی (۱۳.۳) به آسانی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$A_Z = (I_n + B_F K_F)^{-1} A_F, \quad K_F = KQ. \quad (18.3)$$

به خاطر اینکه ماتریس $(I_n + B_F K_F)$ رتبه‌ی کامل است، ماتریس‌های A_F و A_Z باید یا هر دو نامنفرد باشند یا هر دو منفرد باشند. بنابراین اگر A_Z نامنفرد باشد، یعنی قطب‌های مطلوب ناصفر هستند، در اینصورت ماتریس A_F باید نامنفرد باشد یعنی A نامنفرد است. $\square$

معادله‌ی (۱۴.۳) را می‌توان به صورت بردارهای سطر $q_j, (j = 1, \dots, m)$ از Q^{-1} به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} q_1 A^i (I_n + BK) &= q_1 A^i, \quad i = 0, \dots, \mu_1 - 2, \\ \sum_{i=0}^{\mu_1-1} (-d_i^1 q_1 A^{i-1}) (I_n + BK) &= q_1 A^{\mu_1-1}, \\ q_2 A^i (I_n + BK) &= q_2 A^i, \quad i = 0, \dots, \mu_2 - 2, \\ \sum_{i=0}^{\mu_2-1} (-d_i^2 q_2 A^{i-1}) (I_n + BK) &= q_2 A^{\mu_2-1}, \\ &\dots \\ q_m A^i (I_n + BK) &= q_m A^i, \quad i = 0, \dots, \mu_m - 2, \\ \sum_{i=0}^{\mu_m-1} (-d_i^m q_m A^{i-1}) (I_n + BK) &= q_m A^{\mu_m-1}. \end{aligned} \quad (19.3)$$

بر اساس تعریف ماتریس انتقال Q^{-1} ، می‌توان نشان داد که

$$q_j A^i B = 0_{1,m}, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 0, \dots, \mu_j - 2. \quad (20.3)$$

و همچنین می‌توان m معادله توصیف کننده سیستم حلقه بسته را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\mu_1-1} (-d_i^1 q_1 A^{i-1}) (I_n + BK) &= q_1 A^{\mu_1-1}, \\ \sum_{i=0}^{\mu_2-1} (-d_i^2 q_2 A^{i-1}) (I_n + BK) &= q_2 A^{\mu_2-1}, \\ &\dots \\ \sum_{i=0}^{\mu_m-1} (-d_i^m q_m A^{i-1}) (I_n + BK) &= q_m A^{\mu_m-1}. \end{aligned} \quad (21.3)$$

این معادلات می‌تواند در ماتریس قرار داده شده و بصورت جبری حل شود. بنابراین، ماتریس پسخورد

K برای سیستم زمان ثابت می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$K = \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1} (-d_i^1 q_i A^{i-1}) \right) B \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=0}^{\mu_m-1} (-d_i^m q_m A^{i-1}) \right) B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 A^{\mu_1-1} + \sum_{i=0}^{\mu_1-1} (d_i^1 q_1 A^{i-1}) \\ \vdots \\ q_m A^{\mu_m-1} + \sum_{i=0}^{\mu_m-1} (d_i^m q_m A^{i-1}) \end{pmatrix} \\ = M_1^{-1} \begin{pmatrix} q_1 A^{\mu_1-1} + \sum_{i=0}^{\mu_1-1} (d_i^1 q_1 A^{i-1}) \\ \vdots \\ q_m A^{\mu_m-1} + \sum_{i=0}^{\mu_m-1} (d_i^m q_m A^{i-1}) \end{pmatrix} \quad (22.3)$$

با بکارگیری (۲۰.۳) ماتریس M_1 به صورت زیر می‌شود

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\mu_1-1} (-d_i^1 q_1 A^{i-1}) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{\mu_m-1} (-d_i^m q_m A^{i-1}) \end{pmatrix} B = - \begin{pmatrix} d_0^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_0^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} A^{-1} B \quad (23.3)$$

بنابراین، M_1 نامنفرد است اگر A دارای رتبه‌ی کامل و B دارای رتبه‌ی ستونی کامل و تمام قطب‌های مطلوب ناصفر باشند.

ماتریس پسخورد می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$K = - \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} A^{-1} B \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_0^1} \left(q_1 A^{\mu_1-1} + \sum_{i=0}^{\mu_1-1} (d_i^1 q_1 A^{i-1}) \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{d_0^m} \left(q_m A^{\mu_m-1} + \sum_{i=0}^{\mu_m-1} (d_i^m q_m A^{i-1}) \right) \end{pmatrix} \quad (24.3)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$K = - \left(\begin{pmatrix} e_{\mu_1}^T (AR)^{-1} \\ \vdots \\ e_n^T (AR)^{-1} \end{pmatrix} B \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_0^1} (e_{\mu_1}^T (AR)^{-1} D_1(A)) \\ \vdots \\ \frac{1}{d_0^m} (e_n^T (AR)^{-1} D_m(A)) \end{pmatrix} \quad (25.3)$$

که در آن $D_j(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ مقدار چندجمله‌ای مشخصه مطلوب D_j به ازای ماتریس حالت A است که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$D_j(A) = A^{\mu_j} + d_{\mu_j-1}^j A^{\mu_j-1} + \dots + d_1^j A + d_0^j I_n, \quad j = 1, \dots, m \quad (26.3)$$

اکنون کنترل پسخورد را با استفاده از مجموعه‌ی مقادیر ویژه λ_i ، $i = 1, \dots, n$ ، بجای ضرایب مقادیر مشخصه تعیین می‌کنیم. مقادیر ویژه به m گروه خودمزدوج $\{\lambda^1\}, \dots, \{\lambda^m\}$ با تعداد قطب‌های μ_j تقسیم شده و قطب‌های آن‌ها بین بلوک‌ها توزیع می‌شوند.

ماتریس پسخورد به صورت زیر است:

$$K = - \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} A^{-1} B \right)^{-1} \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{\mu_1} \left(\frac{-1}{\lambda_i^1} \right) \left(q_1 A^{-1} \prod_{i=1}^{\mu_1} (A - \lambda_i^1 I_n) \right) \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^{\mu_m} \left(\frac{-1}{\lambda_i^m} \right) \left(q_m A^{-1} \prod_{i=1}^{\mu_m} (A - \lambda_i^m I_n) \right) \end{pmatrix} \quad (27.3)$$

یک الگوریتم عددی موثر برای محاسبات ماتریس پسخورد K به صورت زیر است

$$K = - \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} A^{-1} B \right)^{-1} \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{\mu_1} \left(\frac{1}{\lambda_i^1} \right) q_{\mu_1}' \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^{\mu_m} \left(\frac{1}{\lambda_i^m} \right) q_{\mu_m}^{m'} \end{pmatrix} \quad (28.3)$$

که در آن

$$q_{\circ}^{j'} = e_{rj}^T (AR)^{-1}, \quad q_i^{j'} = q_{i-1}^{j'} (A - \lambda_i^j I_n), \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, \mu_j.$$

می‌توان توجه نمود که الگوریتم پیشنهادی ساده است، اجرا کردن آن ساده است و محاسبات پسخورد در شکل فروبنیوس انجام نمی‌شود و در فضای حالت اصلی بطور مستقیم اجرا می‌شود. الگوریتم بالا برای مقادیر ویژه حقیقی، مزدوج مختلط و قطب‌های تکراری مدنظر است. یادآور می‌شویم، مقادیر ویژه مزدوج مختلط باید در همان بلوک قرار داده شود. لازم به ذکر است که می‌توان دنباله‌های مختلف از قطب‌های مورد نظر که منجر به ماتریس‌های پسخورد مختلف می‌شود در نظر گرفت. برای هموارکردن و حداقل رساندن تغییرات ناپایدار، قطب‌های بزرگ در بلوک‌های کوچکتر قرار گیرند [۲]. ماتریس انتقال Q^{-1} نقش مهمی در حل این مساله اجرا می‌کند.

نکته ۲.۱.۳. برای حالت $m = n$ و بکارگیری (۱۴.۳) پسخورد می‌تواند به صورت زیر داده شود

$$K = B^{-1} (AQA_Z^{-1}Q^{-1} - I_n) \quad (29.3)$$

نکته ۳.۱.۳. برای حالت تک ورودی ($m = 1$)، پسخورد مشتق حالت می‌تواند به صورت زیر نوشته شود [۶، ۷]:

اگر ضرایب d_i ، $i = 1, \dots, n$ از معادله مشخصه داده شوند

$$K = \left(\frac{\det(-A)}{d_{\circ}} \right) \left(q_n' + \sum_{i=1}^{n-1} (d_i q_i') \right), \quad (30.3)$$

که در آن

$$q_{\circ}' = e_n^T (AR)^{-1}, \quad q_i' = q_{i-1}' A$$

بعلاوه، اگر مجموعه‌ای از مقادیر ویژه مطلوب λ_i ، $i = 1, \dots, n$ داده شوند

$$K = \frac{\det(A)}{\prod_{i=1}^n \lambda_i} q_n', \quad (31.3)$$

که در آن

$$q_{\circ}' = e_n^T (AR)^{-1}, \quad q_i' = q_{i-1}' (A - \lambda_i I_n)$$

با نتایج بالا، مهمترین نتیجه مطالب فوق را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۳. سیستم خطی کنترل پذیر چند ورودی زمان ثابت (۱.۳) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس سیستم A نامنفرد و B دارای رتبه‌ی ستونی کامل باشد در اینصورت سیستم (۱.۳) با پسخورد مشتق حالت (۲.۳) می‌تواند با پسخورد منحصر به فرد K (۲۸.۳) یا (۲۵.۳) با مقادیر ویژه ناصفر $\{\lambda^1\}, \dots, \{\lambda^m\}$ با تعداد قطب‌های خود مزدوج μ_j در هر بلوک با ضرایب ناصفر $\{d^1\}, \dots, \{d^m\}$ پایدار می‌شود. برای حالت تک ورودی ($m = 1$)، پسخورد می‌تواند به صورت (۳۰.۳) یا (۳۱.۳) بدست می‌آید.

اگرچه، از طرف دیگر کنترل $u(t)$ برای هر دو پسخورد حالت و پسخورد مشتق حالت یکسان است. این می‌تواند از (۱۴.۳)، (۱۲.۳)، (۱۱.۳) نتیجه شود و در حقیقت سیستم بعد از به کار بردن پسخورد K ویژگی‌های دینامیکی مطلوب به صورت زیر دارد

$$\begin{aligned} u(t) &= -K\dot{x}(t) = -B^+(AQ A_Z^{-1}Q^{-1} - I_n)QA_Z z(t) \\ &= -B^+(AQ - QA_Z)z(t) = -B^+(A - QA_ZQ^{-1})x(t) \quad (32.3) \\ &= -K_S x(t) \end{aligned}$$

که در آن $(\cdot)^+$ نشان دهنده‌ی معکوس تعمیم یافته است. مطلب اخیر دقیقاً پسخورد حالت رایج برای تغییر از قطب‌های سیستم اصلی، به قطب‌های مدنظر است و Q^{-1} همان ماتریس انتقال حالت است. به علاوه، پاسخ گذرا برای پسخورد مشتق با بکارگیری (۱۳.۳) به دست می‌آید.

$$(I_n + BK)^{-1}A = QA_ZQ^{-1} \quad (33.3)$$

بنابراین، سیستم حلقه بسته به صورت زیر است

$$\dot{x}(t) = QA_ZQ^{-1}x(t) \quad (34.3)$$

که پاسخ یکسان برای پسخورد حالت با همان قطب‌های مورد نظر و ماتریس انتقال است. فرمول بالا برای سیستم‌های بطور کامل کنترل پذیر می‌باشد. در نکته (۵.۱.۳) سیستم‌های کنترل ناپذیر با پسخورد مشتق می‌تواند پایداری پذیر شود.

نکته ۵.۱.۳. اگر سیستم (۱.۳) بطور کامل کنترل پذیر نباشد، در اینصورت با استفاده از ماتریس انتقال حالت نامنفرد $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به صورت

$$z(t) = Tx(t) \quad (35.3)$$

به دست می‌آوریم

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad z(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (36.3)$$

که در آن زوج مرتب (A_{11}, B_1) کنترل پذیر است و بردار $x_1(t) \in \mathbb{R}^c$ دارای بعد $c = \text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n$ ، درحالی‌که بردار $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-c}$ شامل مولفه‌های حالت است، که کنترل پذیر نیستند. قطب‌های ماتریس A_{22} مربوط به قطب‌های کنترل ناپذیر سیستم هستند. [۱۹]

حال قانون کنترل را به صورت زیر اختیار می‌کنیم

$$u(t) = -[K_1, K_2]\dot{z}(t) \quad (37.3)$$

که در آن $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times c}$ و $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times n-c}$ می‌باشد.

بنابراین، سیستم حلقه بسته انتقال یافته می‌تواند به صورت زیر توصیف شود

$$\begin{pmatrix} I_C + B_1 K_1 & B_1 K_2 \\ \circ & I_{n-c} \end{pmatrix} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \circ & A_{22} \end{pmatrix} z(t) \quad (38.3)$$

بنابراین

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} (I_C + B_1 K_1)^{-1} & N \\ \circ & I_{n-c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \circ & A_{22} \end{pmatrix} z(t) \quad (39.3)$$

که در آن $N \in \mathbb{R}^{c \times n-c}$ است.

با ادامه دادن به آسانی به دست می‌آوریم

$$\dot{z}(t) = A_Z z(t), \quad A_Z = \begin{pmatrix} (I_C + B_1 K_1)^{-1} A_{11} & (I_n + B_1 K_1)^{-1} A_{12} + N A_{22} \\ \circ & A_{22} \end{pmatrix} \quad (40.3)$$

بنابراین، مقادیر ویژه ماتریس A_Z از $(I_C + B_1 K_1)^{-1} A_{11}$ و A_{22} هستند. بنابراین، تاثیر پسخورد مشتق حالت تنها در قسمت کنترل پذیر سیستم است. قطب‌های کنترل پذیر می‌توانند در مقادیر مطلوب با استفاده از الگوریتم بالا اختصاص داده شوند، درحالی که قطب‌های کنترل ناپذیر بوسیله‌ی پسخورد تغییر نمی‌کند. اگر ماتریس A_{22} پایدار باشد، سیستم پایداری پذیر خواهد بود و ممکن است که پسخورد پیدا شود که برای هر سیستم حلقه بسته بطور مجانبی پایدار، شود. ماتریس K_2 روی قطب‌های حلقه بسته تاثیر ندارد و $K_2 = \circ$ دلخواه انتخاب می‌شود.

در نهایت، پسخورد مشتق حالت می‌تواند به صورت زیر داده شود

$$K = [K_1, \circ_{n-c}]T \quad (41.3)$$

بنابراین، مقادیر ویژه کنترل پذیر می‌تواند با مقادیر مطلوب دوباره تخصیص داده شود.

۲.۳ تعیین ماتریس پسخورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این بخش ابتدا به بیان فرم استاندارد اشلون و همدم برداری زوج (B, A) می‌پردازیم. سپس، چگونگی محاسبه ماتریس پسخورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی [۲۲، ۲۳] را تشریح می‌کنیم. در بخش بعدی مثال عددی را با استفاده از تبدیلات تشابهی و با استفاده از پسخورد مشتق حالت حل شده است.

۱.۲.۳ فرم استاندارد اشلون

فرض کنید که T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است. معادله حالت دستگاه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۴۲.۳)$$

حال فرض می‌کنیم بردار حالت دستگاه توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی:

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad \text{یا} \quad x(t) = T\hat{x}(t) \quad (۴۳.۳)$$

با جایگذاری (۴۳.۳) در معادله حالت (۴۲.۳) خواهیم داشت:

$$T\hat{x}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (۴۴.۳)$$

$$\hat{x}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t)$$

با در نظر گرفتن $\hat{A} = T^{-1}AT$ و $\hat{B} = T^{-1}B$ در معادله (۴۴.۳) داریم:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (۴۵.۳)$$

ماتریس تبدیل T را می‌توان به صورت منحصر به فردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد. به این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس Q را ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم. در این صورت فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \ \dots \ A^{q-1}b_1 \ \dots \ A^{q-1}b_r \ A^{q-1}b_{r+1} \ \dots \ A^{q-1}b_m \ A^qb_1 \ \dots \ A^qb_r]$$

ماتریس افزوده $[B, A]$ ، که دارای n سطر و $n + m$ ستون است را تشکیل می‌دهیم. اگر ماتریس $[T^{-1}B, T^{-1}AT]$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-1}[B, AT] &= T^{-1}[b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \ Ab_1 \ \dots \ A^qb_1 \ \dots \ A^qb_r \ A^qb_{r+1} \ \dots \ A^qb_m \ A^{q+1}b_1 \ \dots \ A^{q+1}b_r] \\ &= T^{-1}[T, A^qb_{r+1} \ \dots \ A^{q+1}b_r] = [I, T^{-1}A^qb_{r+1} \ \dots \ T^{-1}A^{q+1}b_r] = [I_{n \times n}, V_{n \times m}] \end{aligned} \quad (۴۶.۳)$$

اکنون تبدیلات تشابهی سطری و ستونی نظیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱.

$$r(i) \longleftrightarrow r(j) \quad , \quad c(i) \longleftrightarrow c(j)$$

۲.

$$r(i) \longleftrightarrow ar(i) \quad , \quad c(i) \longleftrightarrow \frac{1}{a}c(i)$$

۳.

$$r(i) \longleftrightarrow r(i) + kr(j) \quad , \quad c(j) \longleftrightarrow c(j) - kc(i)$$

۳. الگوریتم مستقیم برای جابجایی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی ۴۸

در صورتی که بخواهیم زوج (B, A) را به فرم استاندارد اشلون $[I, V]$ تبدیل نماییم، ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I]$ را تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس Q و ستونی مقدماتی نظیر روی ماتریس A حاصل در هر مرحله، n ستون اول ماتریس Q را به I تبدیل می‌کنیم. در این صورت ماتریس افزوده $\hat{Q}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n \times m}, T^{-1}] \quad (۴۷.۳)$$

که ماتریس‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به صورت زیر هستند:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \circ_{m \times m} & \circ & \dots & \circ_{m \times r} & v^{(1)}_{m \times m} \\ I_m & \circ & \dots & \circ & v^{(2)}_{m \times m} \\ \circ_{m \times m} & I_m & \dots & \circ & v^{(3)}_{m \times m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & v^{(q)}_{m \times m} \\ \circ_{r \times m} & \circ_{r \times m} & \dots & I_r & v^{(q+1)}_{r \times m} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \circ_{m \times m} \\ \circ_{m \times m} \\ \vdots \\ \circ_{m \times m} \\ \circ_{r \times m} \end{bmatrix} \quad (۴۸.۳)$$

۲.۲.۳ فرم همدم برداری

یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی مانند S را در نظر می‌گیریم که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است. اکنون بردار حالت دستگاه که در بخش ۱.۲.۳ آن را به فرم استاندارد اشلون در آوردیم، توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل می‌گردد:

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۴۹.۳)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۴۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} S\tilde{x}(t) &= \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ \Rightarrow \tilde{x}(t) &= S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \end{aligned} \quad (۵۰.۳)$$

با در نظر گرفتن $\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B$ و $\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$ در معادله (۵۰.۳) داریم:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (۵۱.۳)$$

زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ، فرم همدم برداری زوج (B, A) می‌باشد از آنجایی که معادلات (۴۲.۳) و (۵۱.۳) هم‌ارز یکدیگر هستند، جواب آن‌ها نیز یکسان است.

۳.۲.۳ به دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی

اگر ناورداهای کرونکر منظم باشد، با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس $\hat{A}$ و سطری مقدماتی نظیر آن روی کل ماتریس $\hat{Q}$ ، می توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{\circ m \times m} \\ \dots\dots\dots \\ \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (52.3)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_{\circ m \times n} & \\ & \dots\dots\dots & \\ I_{(n-m)} & & \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (53.3)$$

برای معادله (۴۲.۳)، قانون کنترل را به صورت $u(t) = Fx(t)$ تعریف می کنیم و به طور مشابه برای معادله (۴۵.۳)، قانون کنترل به صورت $u(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t)$ تعریف می شود که $\tilde{F}$ ماتریس پسخورد حالت معادله دستگاه تبدیل شده به فرم همدم برداری است. با جایگذاری $S^{-1}T^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}$ خواهیم داشت:

$$u(t) = \tilde{F}S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (54.3)$$

در نظر می گیریم:

$$F = \tilde{F}S^{-1}T^{-1} \quad (55.3)$$

که آن را ماتریس پسخورد اولیه زوج (B, A) می نامیم. در صورتی که $\tilde{F}$ را به صورت $-B_{\circ}^{-1}G_{\circ}$ تعریف نماییم، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ صفر است.

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} G_{\circ} & & \\ & \dots\dots\dots & \\ I & & \circ \end{bmatrix}_{n \times n} + \begin{bmatrix} B_{\circ} & \\ & \dots\dots\dots \\ & & \circ \end{bmatrix}_{n \times m} (-B_{\circ}^{-1}G_{\circ}) = \begin{bmatrix} \circ_{m \times n} & & \\ & \dots\dots\dots & \\ I_{(n-m)} & & \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

نتیجه ۱.۲.۳. به دلیل متشابه بودن Γ با $\tilde{\Gamma}$ ، تمامی مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ نیز صفراوند.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}BKTS = S^{-1}T^{-1}(A + BK)TS \\ &= (TS)^{-1}(A + BK)TS = (TS)^{-1}\Gamma TS \end{aligned} \quad (56.3)$$

۴.۲.۳ تعیین ماتریس پسخورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی

هدف این است که ماتریس پسخورد حالت K_p را به گونه ای تعیین کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK_p x(t)$ با قانون کنترل $u(t) = K_p x(t)$ در مجموعه از پیش تعریف شده $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد. برای این کار ابتدا زوج کنترل پذیر (B, A) را به صورت فرم همدم برداری $(\tilde{B}, \tilde{A})$ تبدیل می کنیم، سپس ماتریس پسخورد حالت $\tilde{F}$ را به گونه ای محاسبه می کنیم که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته $\tilde{\Gamma}$ صفر باشد. حال اگر ماتریس قطری $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ را با $\tilde{\Gamma}$ جمع کنیم، داریم $A_\lambda = \tilde{\Gamma} + D$ می شود. مقادیر ویژه A_λ همان مقادیر ویژه مجموعه Λ می باشد. حال اگر با عملیات ستونی مقدماتی و سطری مقدماتی نظیر انجام دهیم آنگاه A_λ بصورت $\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_{\lambda_m \times n} \\ I_{n-m} \end{bmatrix}$ که A_λ و $\tilde{A}_\lambda$ متشابه اند پس مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ همان مجموعه Λ می شود. حال ماتریس پسخورد حالت به فرم زیر تعریف می شود:

$$\tilde{K}_p = \tilde{F} + B_o^{-1} G_\lambda = B_o^{-1} (-G_o + G_\lambda) \rightarrow \tilde{K}_p = \tilde{F} + \tilde{K}_\lambda$$

از رابطه بالا K_p بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$K_p = F + K_\lambda = (-B_o^{-1} G_o + B_o^{-1} G_\lambda) (TS)^{-1} = \tilde{K}_p (TS)^{-1}$$

مثال ۲.۲.۳. در دستگاه خطی زیر ماتریس پسخورد K_p را طوری تعیین کنید که مقادیر ویژه حلقه بسته متعلق به مجموعه $\Lambda = \{-1, -2, -1\}$ باشد

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل. ابتدا فرم استاندارد اشلون را بدست می آوریم:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -2 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r(2)-r(1) \rightarrow r(2) \text{ on } Q]{c(1)+c(2) \rightarrow c(1) \text{ on } A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \vdots & 0 & 2 & 2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}r(2) \rightarrow r(2) \text{ on } Q]{-2c(2) \rightarrow c(2) \text{ on } A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\frac{c(2)+2c(1) \rightarrow c(2) \text{ on } A}]{\frac{r(1)-2r(2) \rightarrow r(1) \text{ on } (Q)}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\frac{-2c(2) \rightarrow c(2) \text{ on } A}]{\frac{-\frac{1}{4}r(2) \rightarrow r(2) \text{ on } (Q)}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & -6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\frac{c(2)+2c(1) \rightarrow c(2) \text{ on } A}]{\frac{r(1)-2r(2) \rightarrow r(1) \text{ on } (Q)}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \hat{Q} = [I, V, T^{-1}] \end{aligned}$$

حال فرم همدم برداری را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{on } A]{\frac{c(2)-4c(1) \rightarrow c(2)}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{on } \hat{Q}]{\frac{r(1)+4r(2) \rightarrow r(1)}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & 0 & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{on } A]{\frac{c(2)-\frac{4}{3}c(1) \rightarrow c(2)}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{on } \hat{Q}]{\frac{r(1)+\frac{4}{3}r(2) \rightarrow r(1)}{}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -5 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{16}{3} & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

و در نهایت K_P بصورت زیر حاصل می شود:

$$K_P = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1^\circ/3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته ۳.۲.۳. توضیح روش استفاده شده در [۲] برای تعیین ماتریس پسخورد حالت: سیستم خطی چند ورودی، زمان ثابت را با نمایش فضای حالت زیر در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (57.3)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردارهای حالت و کنترل هستند ($m \leq n$)، بطوریکه $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس های سیستم و کنترل هستند. مفروضات مساله این است که، سیستم کاملاً کنترل پذیر و m ستون از ماتریس B ، $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ ، مستقل خطی باشند. هدف جایابی قطب با پسخورد حالت، با قانون کنترل $u = K_S x$ می باشد که قطب های مطلوب را به ماتریس حلقه بسته سیستم اختصاص دهد. ماتریس پسخورد حالت به صورت زیر محاسبه می شود

$$K_S = \begin{pmatrix} q_1 AB \\ \vdots \\ q_m AB \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -q_1 \prod_{i=1}^{\mu_1} (A - \lambda_i^1 I) \\ \vdots \\ -q_m \prod_{i=1}^{\mu_m} (A - \lambda_i^m I) \end{pmatrix}$$

این سیستم از ترکیب کردن m ماتریس همراه مشخص شده، در بلوک ها به صورت قطری تشکیل شده است. هر ماتریس همراه می تواند به نمایش دادن زیر سیستم های جفت شده به دیگر سیستم ها در نظر گرفته شود. اندازه بلوک ها μ_j است که اندیس کنترل پذیری متناظر با b_j از ماتریس B را نشان می دهد و، $\mu_1 + \dots + \mu_m = n$ و $j = 1, \dots, m$ می باشد. در حل مساله جایابی قطب، ابتدا قطب های مطلوب را به m گروه $\{\lambda^1\}, \dots, \{\lambda^m\}$ خود مزدوج، با تعداد قطب های μ_j در هر بلوک $j = 1, \dots, m$ که $\lambda^j \equiv (\lambda_1^j, \dots, \lambda_{\mu_j}^j)$ تقسیم می کنیم. که در آن $q_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ نشان دهنده بردار سطری است که در زیر آمده است

$$q_j = e_{r_j}^T R^{-1}, \quad r_j = \sum_{k=1}^j \mu_k, \quad j = 1, \dots, m,$$

که در آن $e_{r_j} \in \mathbb{R}^n$ بردار یکه، با ۱ در موقعیت r_j می باشد. ماتریس کنترل پذیری سیستم، $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به صورت زیر است

$$R = (b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{\mu_1-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{\mu_2-1}b_2 \quad \dots \quad b_m \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{\mu_m-1}b_m)$$

۳.۳ مثال عددی

در این بخش، روش جابجایی قطب پیشنهادشده را بکار برده و سیستم را برای اثبات کارایی و شدنی بودن نتایج قبل، شبیه سازی می‌کنیم

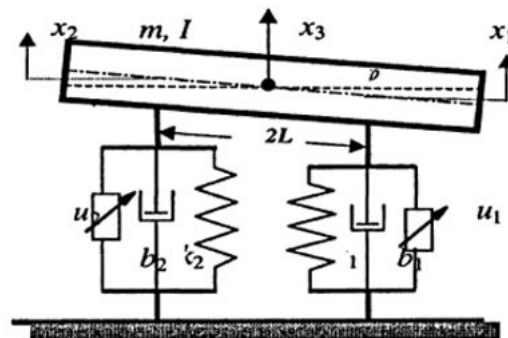
مثال ۱.۳.۳. ساختار سیستم مکانیکی و پارامترهای آن در شکل (۱.۳) داده شده است. معادلات دینامیک این سیستم، که در آن زاویه φ را کوچک در نظر می‌گیریم، در فضای حالت با استفاده از بردار حالت $x(t) = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$ توصیف می‌شود:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 c_1 & -k_2 c_2 & -b_1 c_1 & -b_2 c_2 \\ -k_1 c_2 & -k_2 c_1 & -b_1 c_2 & -b_2 c_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

که در آن

$$c_1 = \frac{1}{m} + \frac{L^2}{I}, \quad c_2 = \frac{1}{m} - \frac{L^2}{I}, \quad x_3 = 0.5(x_1 + x_2), \quad \varphi = 0.5(x_1 - x_2)/L$$

که در آن m و I جرم و گشتاور اینرسی جرم، k_1 و k_2 ثابتهای فنر، b_1 و b_2 ثابتهای ضربه گیر، x_1 و x_2 جابجایی جرم از هردو طرف، x_3 بردار جابجایی مرکز جرم، φ زاویه میل جرم با افق، $2L$ فاصله بین دونقطه حامی و ورودهای کنترل هستند. پارامترهای مدل به صورت زیر انتخاب می‌شوند



شکل ۱.۳: ساختار سیستم مکانیکی

$$m = 10 \text{ Kg}, \quad I = 1 \text{ Kg.m}^2, \quad L = 1 \text{ m}, \quad k_1 = 500 \text{ N/m},$$

$$k_2 = 700 \text{ N/m}, \quad b_1 = 10 \text{ N.s/m}, \quad b_2 = 20 \text{ N.s/m}.$$

قطبهای اصلی سیستم $31.1738i \pm 15.1384$ و $10.7106i \pm 1.3616$ هستند. مقادیر ویژه حلقه بسته برای بلوک اول به صورت $\{\lambda_1^1, \lambda_2^1\} = -5 \pm 2i$ ، و برای بلوک دوم به صورت $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2\} = -10 \pm 5i$ ، انتخاب می‌شوند که در آن $\mu_1 = 2$ و $\mu_2 = 2$ می‌باشند.

$$r_1 = \sum_{k=1}^1 \mu_k = 2$$

۳. الگوریتم مستقیم برای جابجایی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی ۵۴

$$r_2 = \sum_{k=1}^2 \mu_k = 4$$

و

$$q_1 = e_{r_1}^T R^{-1} = [0, 1, 0, 0] R^{-1} = [2/75, 2/25, 0, 0]$$

$$q_2 = e_{r_2}^T R^{-1} = [0, 0, 0, 1] R^{-1} = [2/25, 2/75, 0, 0]$$

ماتریس انتقال و معادل شکل استاندارد فروبنیوس به صورت زیر است

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ q_2 \\ q_2 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/75 & 2/25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/75 & 2/25 \\ 2/25 & 2/75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/25 & 2/75 \end{pmatrix}$$

و

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -30/25 & -11 & 24/25 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -23/95 & 18 & 17/95 & -22 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

ماتریس پسخورد مشتق حالت به صورت زیر است

$$K = - \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} A^{-1} B \right)^{-1} \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{\mu_1} \left(\frac{-1}{\lambda_i^1} \right) \left(q_1 A^{-1} \prod_{i=1}^{\mu_1} (A - \lambda_i^1 I) \right) \\ \prod_{i=1}^{\mu_2} \left(\frac{-1}{\lambda_i^2} \right) \left(q_2 A^{-1} \prod_{i=1}^{\mu_2} (A - \lambda_i^2 I) \right) \end{pmatrix}$$

که پس از جایگذاری داریم:

$$K = \begin{pmatrix} 1967/5 & 1258 & 239/6 & 178 \\ 1657/3 & 1088 & 194/2 & 145/6 \end{pmatrix}$$

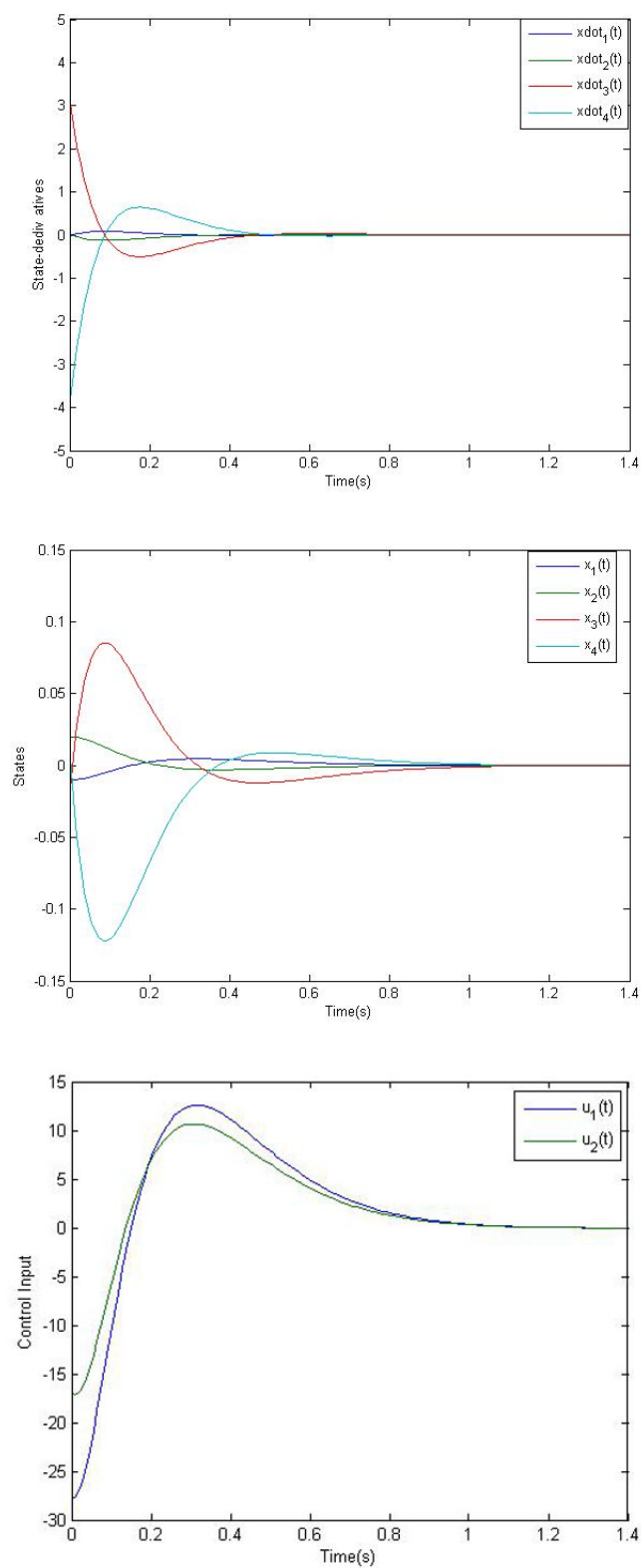
فرآیند ترکیبی جابجایی قطب کنترل از بخش ۲ را در این سیستم به کار می‌بریم. در این شبیه سازی، شرایط اولیه حالت به صورت $x(t_0) = [-0/01, 0/02, -0/02, 0/01]^T$ اختیار می‌کنیم پاسخ گذرا و ورودی کنترل در شکل‌های (۲.۳) نشان داده شده است.

برای مقایسه، محاسبات ماتریس پسخورد حالت برای همان قطب‌های مطلوب سیستم با استفاده از [۲] به صورت زیر است.

$$K_S = \begin{pmatrix} q_1 AB \\ q_2 AB \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -q_1 \prod_{i=1}^{\mu_1} (A - \lambda_i^1 I) \\ -q_2 \prod_{i=1}^{\mu_2} (A - \lambda_i^2 I) \end{pmatrix}$$

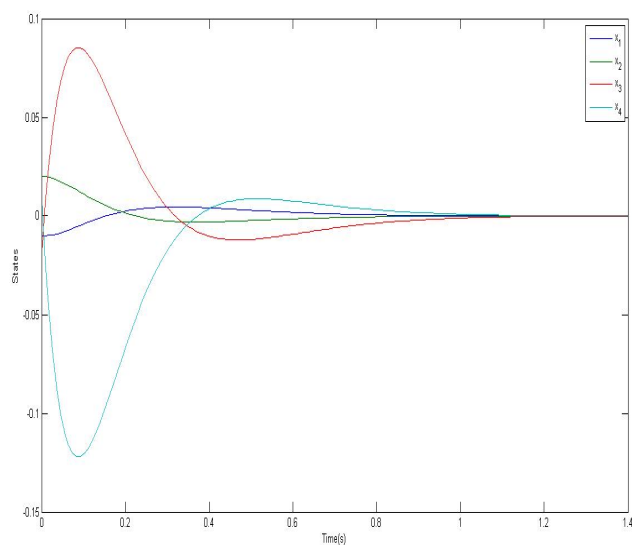
$$K_S = \begin{pmatrix} 2670/2 & -65/2 & -17/5 & -22/5 \\ 2468/7 & 356/2 & -45 & -35 \end{pmatrix}$$

پاسخ گذرا و ورودی کنترل به ترتیب در شکل‌های (۳.۳) و (۴.۳) نشان داده شده است. نتایج شبیه سازی شده نشان می‌دهد که کارایی هر دو مورد برای قطب‌های یکسان به دست آمده سیستم، برابرند. بنابراین ورودی کنترل در هر دو مورد برابر است.

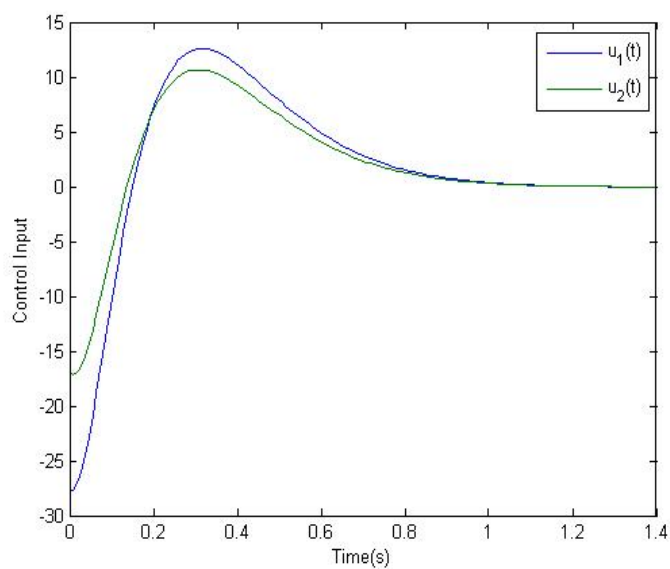


شکل ۲.۳: پاسخ گذرای و ورودی کنترل سیستم با پسخورد حالت مشتق

۳. الگوریتم مستقیم برای جاییابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی ۵۶



شکل ۳.۳: پاسخ گذرای سیستم با پسخورد حالت [۲]



شکل ۴.۳: ورودی کنترل سیستم با پسخورد حالت [۲]

حال ماتریس پسخورد حالت را با استفاده از تبدیلات تشابهی بدست می آوریم در این صورت فرم

همدم برداری به صورت زیر است:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -۱۱ & ۹ & -۳۰۲۵ & ۲۴۷۵ \\ ۱۸ & -۲۲ & -۲۳۹۵ & ۱۷۰۵ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و ماتریس های Γ و $\tilde{\Gamma}$ را محاسبه می کنیم

$$\Gamma = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و قرار می دهیم:

$$D = \text{diag}(-۵ + ۲i, -۱۰ + ۵i, -۵ - ۲i, -۱۰ - ۵i)$$

و $A_\lambda = \tilde{\Gamma} + D$ را محاسبه می کنیم حال با عملیات ستونی مقدماتی وسطری نظیرروی آن $\tilde{A}_\lambda$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

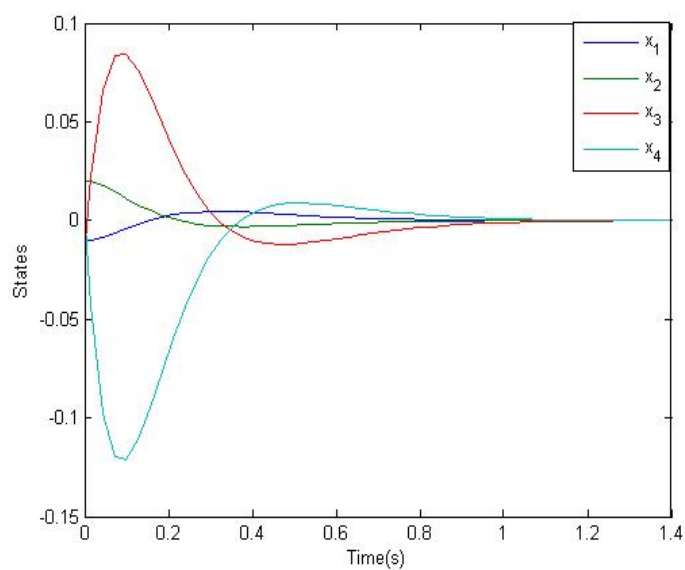
$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} -۱۰ & ۰ & -۲۹ & ۰ \\ ۰ & -۲۰ & ۰ & -۱۲۵ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و با توجه به روابط $\tilde{K}_\lambda = B_\lambda^{-1} G_\lambda$ و $K_\lambda = \tilde{K}_\lambda (TS)^{-1}$ می توان K_P را به صورت زیر محاسبه کرد:

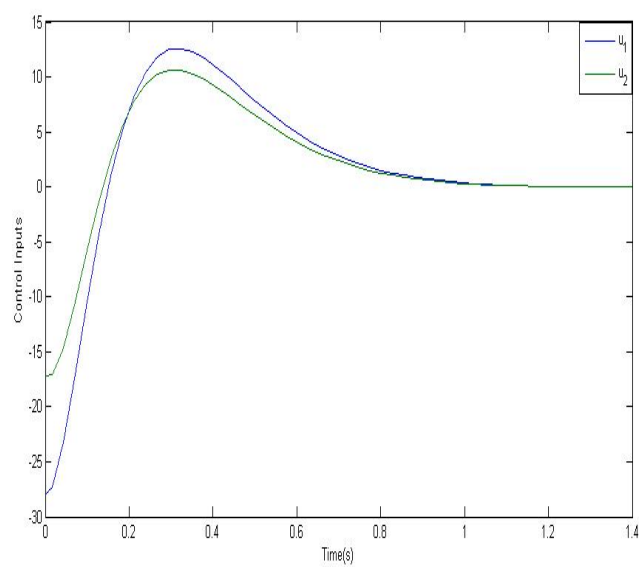
$$K_P = K_\lambda + F = \begin{bmatrix} ۲۶۷۰/۲ & -۶۵/۲ & -۱۷/۵ & -۲۲/۵ \\ ۲۴۶۸/۷ & ۳۵۶/۳ & -۴۵ & -۳۵ \end{bmatrix}$$

پاسخ گذرا و ورودی کنترل تبدیلات تشابهی به ترتیب در شکل های (۵.۳) و (۶.۳) آمده است، که دقیقاً مانند روشهای استفاده شده در مثال است.

۳. الگوریتم مستقیم برای جایابی قطب با استفاده از پس‌خورد مشتق حالت برای سیستم‌های خطی چند ورودی ۵۸



شکل ۵.۳: پاسخ گذرای سیستم با پس‌خورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی



شکل ۶.۳: ورودی کنترل سیستم با پس‌خورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی

فصل ۴

پسخوردمشتق حالت با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم برای سیستم های خطی زمان ثابت

در این فصل، پسخوردهای مشتق حالت و به ویژه مشتق خروجی برای سیستم های خطی زمان ثابت با استفاده از روش مشابه، تنظیم کننده خطی درجه دوم رایج بدست آمده است. این مساله برای هر سیستم کنترل پذیر در صورتی که ماتریس سیستم حلقه باز نامنفرد باشد قابل حل است.

۱.۴ پسخوردمشتق حالت با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم

در این بخش پسخوردمشتق برای سیستم های خطی زمان ثابت با استفاده از روش مشابه تنظیم کننده خطی درجه دوم بدست آمده است.

۱.۱.۴ فرمول بندی مساله تنظیم کننده خطی درجه دوم

سیستم خطی زمان ثابت پیوسته زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل ($m \leq n$) می باشد که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس سیستم و ماتریس کنترل هستند. فرض این است که سیستم بطور کامل کنترل پذیر است. علاوه بر این فرض می کنیم که ماتریس A رتبه کامل است. هدف پایدار کردن سیستم با استفاده

از پسخورد مشتق حالت خطی، زیر می باشد

$$u(t) = -K\dot{x}(t) \quad (2.4)$$

که سیستم را پایدار و موجب عملکرد مطلوب آن شود. سیستم دینامیکی حلقه بسته به صورت زیر است

$$\dot{x}(t) = A_c x(t), \quad A_c = (I_n + BK)^{-1} A \quad (3.4)$$

که I_n ماتریس همانی است. علاوه بر این فرض شده است ماتریس $(I_n + BK)$ رتبه کامل است بخاطر این که سیستم حلقه بسته خوش تعریف است.

کنترل پایدار با رفتار دینامیکی مناسب، نتیجه طراحی کنترلی است که، شاخص عملکرد را مینیمم می کند

$$J(\dot{x}(t), u(t)) = \min_u \int_0^\infty (\dot{x}^T(t) Q \dot{x}(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (4.4)$$

که Q ماتریس $n \times n$ ، ماتریس وزن مشتق حالت، متقارن معین مثبت (یا نیمه معین مثبت) می باشد و R ماتریس $m \times m$ ماتریس وزن کنترل، متقارن معین مثبت می باشد. فرمول بالا شبیه به یک تنظیم کننده خطی درجه دوم رایج به عنوان شاخص عملکرد بر روی مشتقات حالت، به جای حالت است. با این وجود خواصی مشابه تنظیم کننده خطی درجه دوم رایج را نتیجه می دهد. با جایگذاری (2.4) در J شاخص عملکرد بصورت زیر می شود:

$$J = \int_0^\infty (\dot{x}^T Q \dot{x} + (K\dot{x})^T R (K\dot{x})) dt = \int_0^\infty (\dot{x}^T (Q + K^T R K) \dot{x}) dt \quad (5.4)$$

مساله، انتخاب پسخورد K است، که J را به حداقل برساند بطوریکه قید (3.4) برقرار باشد. پس مساله تنظیم کننده خطی درجه دوم با پسخورد مشتق حالت برای سیستم های خطی به شرح زیر بیان می شود:

مساله ۱.۱.۴. با توجه به سیستم دینامیکی (1.4) و ماتریس های متقارن $Q \geq 0$ و $R > 0$ ماتریس پسخورد حقیقی K در (2.4) را پیدا می کنیم که شاخص عملکرد درجه دوم (5.4) را به حداقل می رساند و سیستم حلقه بسته (3.4) را برای هر x_0 اولیه پایدار می کند.

۲.۱.۴ تحلیل تنظیم کننده خطی درجه دوم

هدف اصلی ما به حداقل رساندن شاخص عملکرد در (5.4) با توجه به پسخورد K است. فرض کنیم که می توانیم یک ماتریس ثابت p نیمه معین مثبت و متقارن یافت که در (5.4) صدق می کند، پس داریم

$$\dot{x}^T (Q + K^T R K) \dot{x} = -\frac{d}{dt}(x^T p x) = -\dot{x}^T p x - x^T p \dot{x} \quad (6.4)$$

بنابراین شاخص عملکرد را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{x}^T (Q + K^T R K) \dot{x}) dt = -x^T p x \Big|_0^{\infty} = -x^T(\infty) p x(\infty) + x^T(0) p x(0) \quad (۷.۴)$$

فرض کنیم که سیستم حلقه بسته پایداری مجانبی دارد، یعنی همه مقادیر ویژه A_c دارای قسمت حقیقی منفی هستند، بنابراین با گذشت زمان $x(t)$ به صفر می‌رسد و $x(\infty) \rightarrow 0$ بنابراین شاخص عملکرد به مقدار بهینه مثبت همگرا است.

$$J = x^T(0) p x(0) \quad (۸.۴)$$

بنابراین در صورتی که شرایط اولیه x_0 و ماتریس p باشند، شاخص عملکرد J بدست می‌آید. از (۳.۴)

$$x = A_c^{-1} \dot{x}, \quad A_c^{-1} = A^{-1} (I_n + B K) \quad (۹.۴)$$

پس معادله (۶.۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\dot{x}^T (Q + K^T R K) \dot{x} = -\dot{x}^T (P A_c^{-1} + A_c^{-T} P) \dot{x} \quad (۱۰.۴)$$

از مقایسه هر دو طرف معادله بالا داریم

$$P A_c^{-1} + A_c^{-T} P + K^T R K + Q = 0 \quad (۱۱.۴)$$

با استفاده از قضیه (۶۲.۲.۱) اگر A_c ماتریس پایدار باشد یک ماتریس معین مثبت P وجود دارد که در معادله بالا صدق می‌کند. بنابراین هدف ما تعیین ماتریس P است. از (۹.۴) می‌توانیم بنویسیم

$$A_c^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B K, \quad A_c^{-T} = A^{-T} + K^T B^T A^{-T} \quad (۱۲.۴)$$

با جایگذاری در (۱۱.۴) می‌توانیم بدست آوریم

$$P (A^{-1} + A^{-1} B K) + (A^{-T} + K^T B^T A^{-T}) P + K^T R K + Q = 0 \quad (۱۳.۴)$$

$$P A^{-1} + A^{-T} P + P A^{-1} B K + K^T B^T A^{-T} P + K^T R K + Q = 0 \quad (۱۴.۴)$$

چون R ماتریس مثبت معین و متقارن است

$$R = T^T T \quad (۱۵.۴)$$

که T ماتریس نامنفرد است. با جایگذاری در (۱۴.۴) داریم

$$PA^{-1} + A^{-T}P + PA^{-1}BK + K^TB^TA^{-T}P + K^TT^TK + Q = 0 \quad (16.4)$$

که می توان به صورت زیر نوشت

$$PA^{-1} + A^{-T}P + (TK + T^{-T}B^TA^{-T}P)^T (TK + T^{-T}B^TA^{-T}P) - PA^{-1}BR^{-1}B^TA^{-T}P + Q = 0 \quad (17.4)$$

کمینه کردن J منوط به مینیم کردن عبارت

$$\dot{x}^T (TK + T^{-T}B^TA^{-T}P)^T (TK + T^{-T}B^TA^{-T}P) \dot{x} \quad (18.4)$$

با در نظر گرفتن K است. چون عبارت بالا نامنفی است، پس حداقل آن هنگامی حاصل می شود که برابر صفر باشد

$$TK = -T^{-T}B^TA^{-T}P \quad (19.4)$$

مقدار بهینه ماتریس K به صورت زیر است

$$K = -T^{-1}T^{-T}B^TA^{-T}P = -R^{-1}B^TA^{-T}P \quad (20.4)$$

در نهایت قانون کنترل بهینه پایدار به صورت زیر بدست می آید

$$u(t) = -K\dot{x}(t) = R^{-1}B^TA^{-T}P\dot{x} \quad (21.4)$$

ماتریس P در (۲۱.۴) باید در (۱۴.۴) یا در معادله جبری ریکاتی زیر صدق کند

$$PA^{-1} + A^{-T}P - PA^{-1}BR^{-1}B^TA^{-T}P + Q = 0 \quad (22.4)$$

۳.۱.۴ حل تنظیم کننده خطی درجه دوم

محاسبه تنظیم کننده خطی درجه دوم با پسخورد مشتق حالت، تبدیل شده به راه حل متناظر معادله ماتریس ریکاتی (۲۲.۴) است. تعدادی الگوریتم برای حل آن وجود دارد. از قضیه معروف زیر درمورد منحصر بفرد بودن استفاده می کنیم [۸].

قضیه ۳.۱.۴. اگر جفت (A^{-1}, B) کنترل پذیر و $(\sqrt{Q}, A^{-1})$ مشاهده پذیر باشد، معادله ریکاتی جواب منحصر بفرد نیمه معین P را دارد.

براساس آن شرایط لازم و کافی برای وجود مساله تنظیم کننده خطی درجه دوم با پسخورد مشتق حالت را می توان ثابت کرد. بنابراین مساله پایداری پسخورد مشتق حالت به حل معادله (۲۲.۴) تبدیل می شود.

قضیه ۳.۱.۴. اگر (A, B) پایدار و $(\sqrt{Q}, A)$ مشاهده پذیر و A نامنفرد باشد، مساله مشابه تنظیم کننده خطی درجه دوم با استفاده از پسخورد مشتق حالت، بر جفت حقیقی (A, B) حل پذیر است.

برهان. (A, B) پایدار هست بدین معنا است که (A, B) کنترل پذیر نیز است یعنی ماتریس قابلیت کنترل دارای رتبه کامل است. ماتریس سیستم A نامنفرد است و با استفاده از انتقال حالت بوسیله ماتریس A می توان گفت ماتریس قابلیت کنترل (A^{-1}, B) نیز دارای رتبه کامل است. بطور مشابه اگر $(\sqrt{Q}, A)$ مشاهده پذیر باشد $(\sqrt{Q}, A^{-1})$ نیز مشاهده پذیر است. از این رو نتیجه می گیریم سیستم حلقه بسته A_c پایدار است. $\square$

نکته ۴.۱.۴. پسخورد مشتق حالت از طریق تنظیم کننده خطی درجه دوم می تواند همچنین از پسخورد حالت از طریق تنظیم کننده خطی درجه دوم رایج حاصل شود. با جایگذاری (۱.۴) در شاخص عملکرد (۴.۴) مساله تنظیم کننده خطی درجه دوم رایج بدست می آید.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T A^T Q A x + u^T (R + B^T Q B) u + 2x^T A^T Q B u) dt$$

K_{opt} بهینه پسخورد است. پس

$$\begin{aligned} u_{opt} &= -K_{opt}x = -K\dot{x} = -K(Ax + Bu_{opt}) \\ &= -K(Ax + B(-K_{opt}x)) = -K(A - BK_{opt})x \end{aligned}$$

که آن $K = K_{opt}(A - BK_{opt})^{-1}$ را نتیجه می دهد. با این حال نتیجه گرفتن پسخورد مشتق خروجی به وسیله تنظیم کننده خطی درجه دوم، از پسخورد خروجی به وسیله تنظیم کننده خطی درجه دوم رایج دشوار می باشد.

۲.۴ پسخورد مشتق خروجی بوسیله تنظیم کننده خطی درجه دوم

در بسیاری از کاربردهای عملی، مشتقات حالت کامل، بطور مستقیم برای پسخورد در دسترس نیست بنابراین تنظیم کننده خطی درجه دوم با مشتق خروجی پیشنهاد می شود و از چند اندازه گیر سیستم استفاده می شود. سیستم خطی زمان ثابت

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0. \quad (23.4)$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $\dot{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار اندازه گیر خروجی و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی ($m \leq n$) هستند، که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ به ترتیب ماتریس های سیستم، کنترل و خروجی هستند. فرض که سیستم کاملاً کنترل پذیر و مشاهده پذیر و ماتریس سیستم A رتبه کامل باشد. هدف پایداری سیستم به وسیله کنترل پسخورد مشتق خروجی خطی زیر است

$$u(t) = -F\dot{y}(t) \quad (24.4)$$

که سیستم پایدار شود و سیستم حلقه بسته به عملکرد مطلوب برسد

$$\dot{x}(t) = A_{co}x(t), \quad A_{co} = (I_n + BFC)^{-1}A \quad (25.4)$$

در ادامه فرض می‌کنیم که $(I_n + BFC)$ رتبه کامل دارد به این جهت که سیستم حلقه بسته خوش تعریف باشد. علاوه بر این A_{co} پایدار مجانبی باشد. با انتخاب $u(t)$ به عنوان ورودی سیستم، برای به حداقل رساندن شاخص عملکرد درجه دوم داریم

$$J(\dot{x}(t), u(t)) = \min_u \int_0^\infty (\dot{x}^T(t) Q \dot{x}(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (26.4)$$

که ماتریس $Q \geq 0$ وزن مشتق حالت و متقارن و $R > 0$ ماتریس وزن کنترل و متقارن است. با جایگذاری (24.4) در J داریم

$$J = \int_0^\infty (\dot{x}^T Q \dot{x} + (FC\dot{x})^T R (FC\dot{x})) dt = \int_0^\infty (\dot{x}^T (Q + C^T F^T R F C) \dot{x}) dt \quad (27.4)$$

است، پس مساله تنظیم کننده خطی درجه دوم با پسخورد مشتق خروجی به شرح زیر می‌شود

مساله ۱.۲.۴. سیستم دینامیکی خطی (23.4) و ماتریس های $Q \geq 0$ و $R > 0$ را که متقارن اند در نظر بگیرید. هدف یافتن ماتریس پسخورد F با قانون کنترل (24.4) که ارزش (27.4) به حداقل می‌رساند و سیستم حلقه بسته (25.4) برای هر حالت اولیه، $x(0)$ پایدار می‌کند.

۱.۲.۴ تحلیل تنظیم کننده خطی درجه دوم

فرض کنیم می‌توان ماتریس P ، را که ثابت نیمه معین مثبت و متقارن یافت که در (24.4) صدق می‌کند، پس

$$\dot{x}^T (Q + C^T F^T R F C) \dot{x} = -\frac{d}{dt} (x^T P x) = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} \quad (28.4)$$

شاخص عملکرد را می‌توان به صورت معادل زیر بنویسیم

$$J = \int_0^\infty (\dot{x}^T (Q + C^T F^T R F C) \dot{x}) dt = -x^T P x \Big|_0^\infty = -x(\infty)^T P x(\infty) + x(0)^T P x(0) \quad (29.4)$$

چون ما فرض کرده بودیم که سیستم حلقه بسته پایداری مجانبی دارد پس $x(\infty) \rightarrow 0$ و

$$J = x(0)^T P x(0) \quad (30.4)$$

بنابراین شاخص عملکرد را با شرایط اولیه $x(0)$ و P را می‌توان بدست آورد. با استفاده از روابط

$$x = A_{co}^{-1} \dot{x}, A_{co}^{-1} = A^{-1} (I_n + BFC) \quad (31.4)$$

معادله (28.4) را می‌توان صورت زیر بازنویسی کرد

$$\dot{x}^T (Q + C^T F^T R F C) \dot{x} = -\dot{x}^T (P A_{co}^{-1} + A_{co}^{-T} P) \dot{x} \quad (32.4)$$

مقایسه هر دو طرف (32.4) برای همه مشتقات حالت برقرار است، معادله لیاپانوف بدست آمده است

$$g \equiv P A_{co}^{-1} + A_{co}^{-T} P + C^T F^T R F C + Q = 0 \quad (33.4)$$

اگر F و Q که ثابت، متقارن و مثبت معین هستند داده شود ممکن است، ماتریس P از معادله محاسبه شود.

(30.4) را می‌نویسیم

$$J = tr(PX) \quad (34.4)$$

که ماتریس X متقارن $n \times n$ که به صورت زیر تعریف شده

$$X \equiv x(\circ) x^T(\circ) \quad (35.4)$$

بنابراین مساله انتخاب F برای به حداقل رساندن J بادر نظر گرفتن محدودیت‌های دینامیکی (۲۵.۴) با مشتق حالت، معادل مساله جبری انتخاب F برای به حداقل رساندن J با قیدهای g روی ماتریس کمکی P تبدیل می شود. برای حل مساله تغییر یافته از ضرایب لاگرانژ و تبدیل دوباره مساله طبق [۸] استفاده می‌کنیم. بنابراین قیدهای (۲۷.۴) به وسیله تابع هامیلتونی، به صورت زیر اضافه می‌کنیم

$$H = tr(PX) + tr(gS) \quad (36.4)$$

یک ماتریس متقارن $n \times n$ ، از ضرایب لاگرانژ که همچنان به تعیین آن نیازمندیم. پس مساله بهینه سازی با قیدهای ما معادل، مساله مینیم سازی (۳۶.۴) بدون قید می‌شود. با گرفتن مشتقات جزئی H نسبت متغیرهای مستقل S, P, F و برابر صفر قرار دادن آنها با استفاده از

$$A_{co}^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BFC, A_{co}^{-T} = A^{-T} + C^T F^T B^T A^{-T} \quad (37.4)$$

پس شرایط لازم برای حل مساله تنظیم کننده خطی درجه دوم با استفاده از پسخورد مشتق خروجی به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\circ = \frac{\partial H}{\partial S} = g = PA_{co}^{-1} + A_{co}^{-T}P + C^T F^T R F C + Q \quad (38.4)$$

$$\circ = \frac{\partial H}{\partial P} = A_{co}^{-1}S + SA_{co}^{-T} + X \quad (39.4)$$

$$\circ = \frac{\partial H}{\partial F} = 2R F C S C^T + 2B^T A^{-T} P S C^T \quad (40.4)$$

دو معادله اول معادلات لیاپانوف هستند و سومین معادله‌ی برای پسخورد F است. اگر $S > 0$ در ۴۱.۴ در این صورت $C S C^T$ نامنفرد است، بنابراین (۴۰.۴) را می توان حل کرد، تا مقدار بهینه پسخورد مشتق خروجی به صورت زیر بدست آید.

$$F = -R^{-1}B^T A^{-T} P S C^T (C S C^T)^{-1} \quad (41.4)$$

متأسفانه دربسیاری از مساله ها مشتق حالت، $x(\circ)$ ناشناخته است، بنابراین شاخص عملکرد را می‌توان بدست آورد اما با ارزش مورد انتظار آن که $E\{J\}$ هست. فرض می‌کنیم $x(\circ)$ بطور یکنواخت در حوزه واحد توزیع شده $X = I_n$ و پس

$$J = tr(p) \quad (42.4)$$

برای بدست آوردن پسخورد مشتق خروجی و به حداقل رساندن شاخص عملکرد، (۲۶.۴) ما به حل (۳۸.۴)-(۳۹.۴) نیاز داریم. معادله‌های مربوط به S, P و F جفت معادله های ماتریس غیرخطی سه مجهولی هستند. برای حل معادلات ماتریسی می‌توان از تکنیک های عددی استفاده کرد [۸، ۹]

روش های عددی تکرار شونده ای بر اساس تغییرات F در J وجود دارد. که در آن تضمینی برای، بیشتر از یک مینیم محلی و بهینه سراسری وجود ندارد. یافتن بهینه وابسته، به حدس اولیه که می‌زنیم است که باید پایداری اولیه کنترلگر را تضمین کند، که این یک مشکل کوچک ولی با اهمیت است. با این حال تعیین بهینه سراسری هنوز هم کار دشواری است. الگوریتم محاسباتی برای حل مساله تنظیم کننده

خطی درجه دوم با استفاده از پسخورد مشتق خروجی بصورت زیر است:

الگوریتم ۲.۲.۴. ورودی ماتریس های حقیقی A ، B و C که A نامنفرد، $Q \geq 0$ و $R > 0$ ماتریس های وزن متقارن هستند

گام ۱: $k = 0$ قرار دهید و تعیین کنید F_0 بطوریکه $(I_n + BF_0C)^{-1}A$ پایدار مجانبی باشد.
گام ۲: k -امین تکرار، $A_k = (I_n + BF_kC)^{-1}A$ و P_k و S_k در

$$0 = PA_k^{-1} + A_k^{-T}P + C^T F^T R F C + Q \quad (۴۳.۴)$$

$$0 = A_k^{-1}S + SA_k^{-T} + X$$

بدست آورید، قرار بده $J_k = tr(P_k X)$ و جهت بروز رسانی پسخورد

$$\Delta F = -R^{-1}B^T A^{-T}PSC^T(CSC^T)^{-1} - F_k \quad (۴۴.۴)$$

قرار بده به وسیله آن $F_{k+1} = F_k + \alpha \Delta F$ را تعیین کنید، α باید طوری انتخاب شود

که $(I_n + BF_{k+1}C)^{-1}A$ پایدار مجانبی و $J_{k+1} = (P_{k+1}X) \leq J_k$ باشد.

اگر J_k ، J_{k+1} به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک باشند به گام ۳ برو در غیر این صورت قرار بده $k = k + 1$ و به گام ۲ برو

گام ۳: در انتها، بهینه پسخوردمشتق خروجی $F = F_{k+1}$ و $J = J_{k+1}$ است.

الگوریتم فوق، مستلزم انتخاب ماتریس پسخورد اولیه پایدار است. برای این امر ابتدا مساله پسخورد مشتق حالت کامل با استفاده از تکنیک قبل حل شده، و در نهایت ساختار ماتریس پسخورد خروجی اولیه پایدار به وسیله حل معادله کمترین مربع

$$K = F_0 C \quad (۴۵.۴)$$

که K ماتریس پسخورد مشتق حالت کامل است، حاصل می شود.

۳.۴ مثال عددی

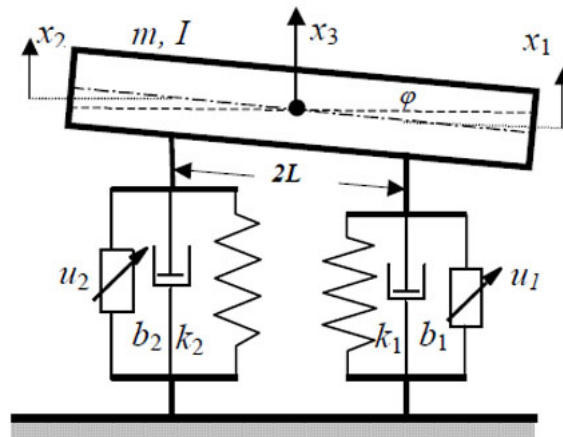
مثال ۱.۳.۴. سیستم مکانیکی از تجزیه لرزش در شکل (۱.۴) داده شده است. معادلات دینامیک این سیستم، که در آن زاویه φ را کوچک در نظر می گیریم، در فضای حالت با استفاده از بردار حالت $x(t) = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]$ توصیف می شود:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 c_1 & -k_2 c_2 & -b_1 c_1 & -b_2 c_2 \\ -k_1 c_2 & -k_2 c_1 & -b_1 c_2 & -b_2 c_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

که در آن

$$c_1 = \frac{1}{m} + \frac{L^2}{I}, \quad c_2 = \frac{1}{m} - \frac{L^2}{I}, \quad x_3 = 0.5(x_1 + x_2), \quad \varphi = 0.5(x_1 - x_2)/L$$

که در آن m و I جرم و گشتاور اینرسی جرم، k_1 و k_2 ثابتهای فنر، b_1 و b_2 ثابتهای ضربه گیر، x_1 و x_2 جابجایی جرم از هردو طرف، x_3 بردار جابجایی مرکز جرم، φ زاویه میل جرم با افق، $2L$ فاصله بین دونقطه حامی و ورودهای کنترل هستند. پارامترهای مدل به صورت زیر انتخاب می‌شوند



شکل ۱۰۴: تجزیه لرزش

$$m = 10 \text{ Kg}, \quad I = 1 \text{ Kg.m}^2, \quad k_1 = 500 \text{ N/m}, \quad L = 1 \text{ m}$$

$$k_2 = 700 \text{ N/m}, \quad b_1 = 10 \text{ N.s/m}, \quad b_2 = 20 \text{ N.s/m}.$$

قطب‌های سیستم اصلی $31/1738i \pm 15/1384$ و $10/7106i \pm 1/3616$ هستند. در ابتدا پس‌خورد مشتق حالت، با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم محاسبه شده است.

وزن ماتریس‌های شاخص عملکرد Q و R هستند، که $Q = \text{diag}(10000, 10, 10, 10)$

و $R = \text{diag}(1, 1)$ انتخاب شده است. با حل معادله ریکاتی، P به صورت زیر بدست می‌آید

$$P = \begin{pmatrix} 490004 & -3264 & 794 & -756 \\ -3264 & 24949 & -208 & 1364 \\ 794 & -208 & 432 & 35 \\ -756 & 1364 & 35 & 202 \end{pmatrix}$$

و در نهایت با استفاده از $K = -R^{-1}B^T A^{-T}P$ ماتریس پس‌خورد به صورت زیر بدست می‌آید

$$K = \begin{pmatrix} 98/0081 & -6/5270 & 1/5875 & -1/5119 \\ -4/6622 & 35/6412 & -0/2978 & 1/9490 \end{pmatrix}$$

پس مقادیر ویژه سیستم $10/1242i \pm 5/6331$ ، $-5/9365$ ، $-23/1893$ هستند.

در شکل (۲.۴) پاسخ گذرا سیستم حلقه بسته با شرایط اولیه حالت $x(t_0) = [-0.01 \ 0.02 \ -0.02 \ 0.01]^T$ نشان داده شده است.

سپس پسخورد مشتق خروجی، با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم محاسبه شده است. بردار خروجی، فقط برای اندازه گیری شتاب از جرم استفاده شده است.

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{x}$$

برای شبیه سازی ماتریس های وزن شاخص عملکرد $Q = \text{diag}(10^8, 1, 1, 1)$

و $R = \text{diag}(1, 1)$ در نظر گرفته شده است ماتریس پسخورد اولیه را

$$F_0 = \begin{pmatrix} -1.1950 & -2.2384 \\ 1.0977 & 0.9412 \end{pmatrix}$$

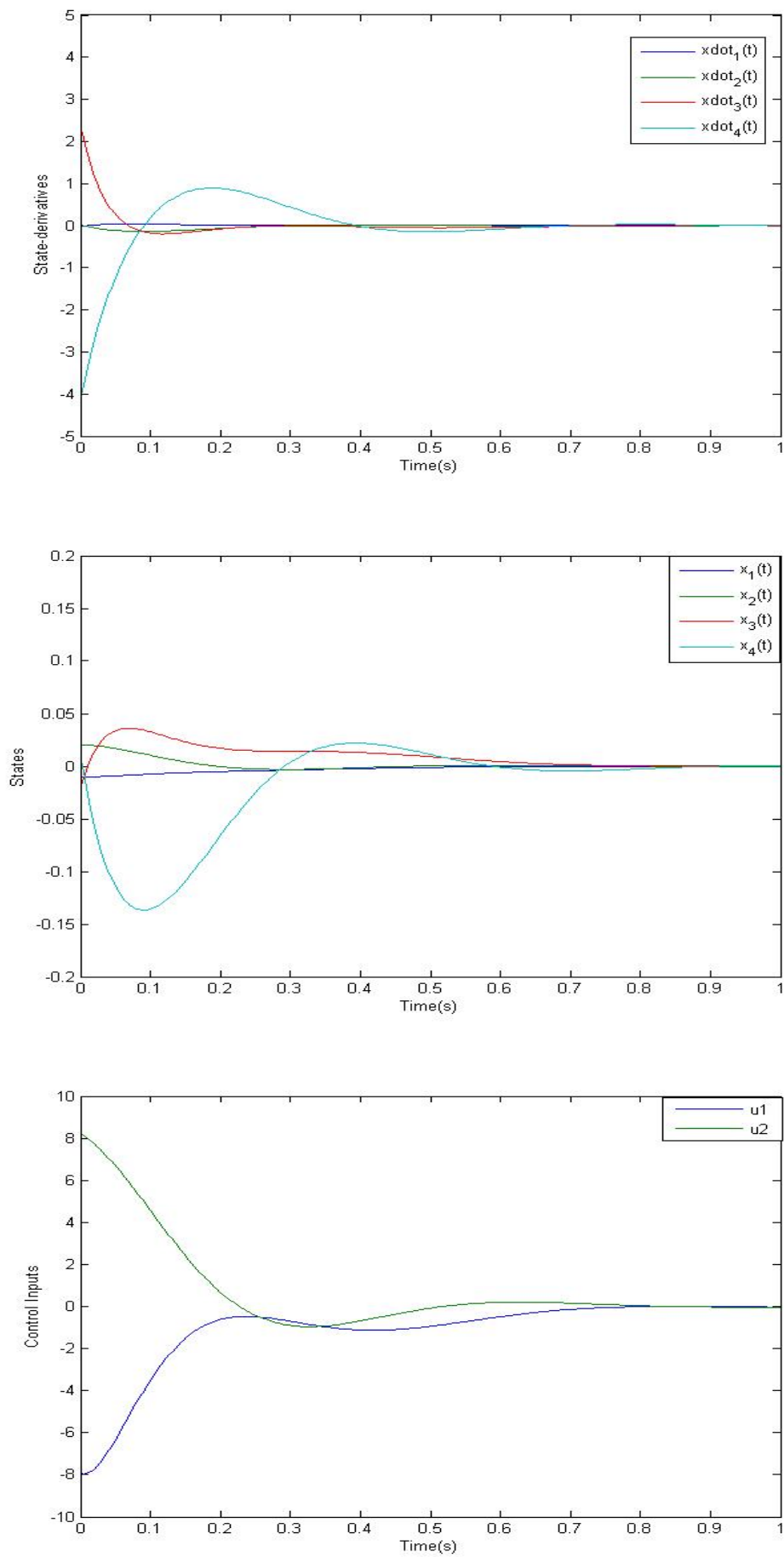
قرار داده ایم. ماتریس پسخورد

$$F = \begin{pmatrix} -1.0213 & -1.0896 \\ 3.5659 & 1.2723 \end{pmatrix}$$

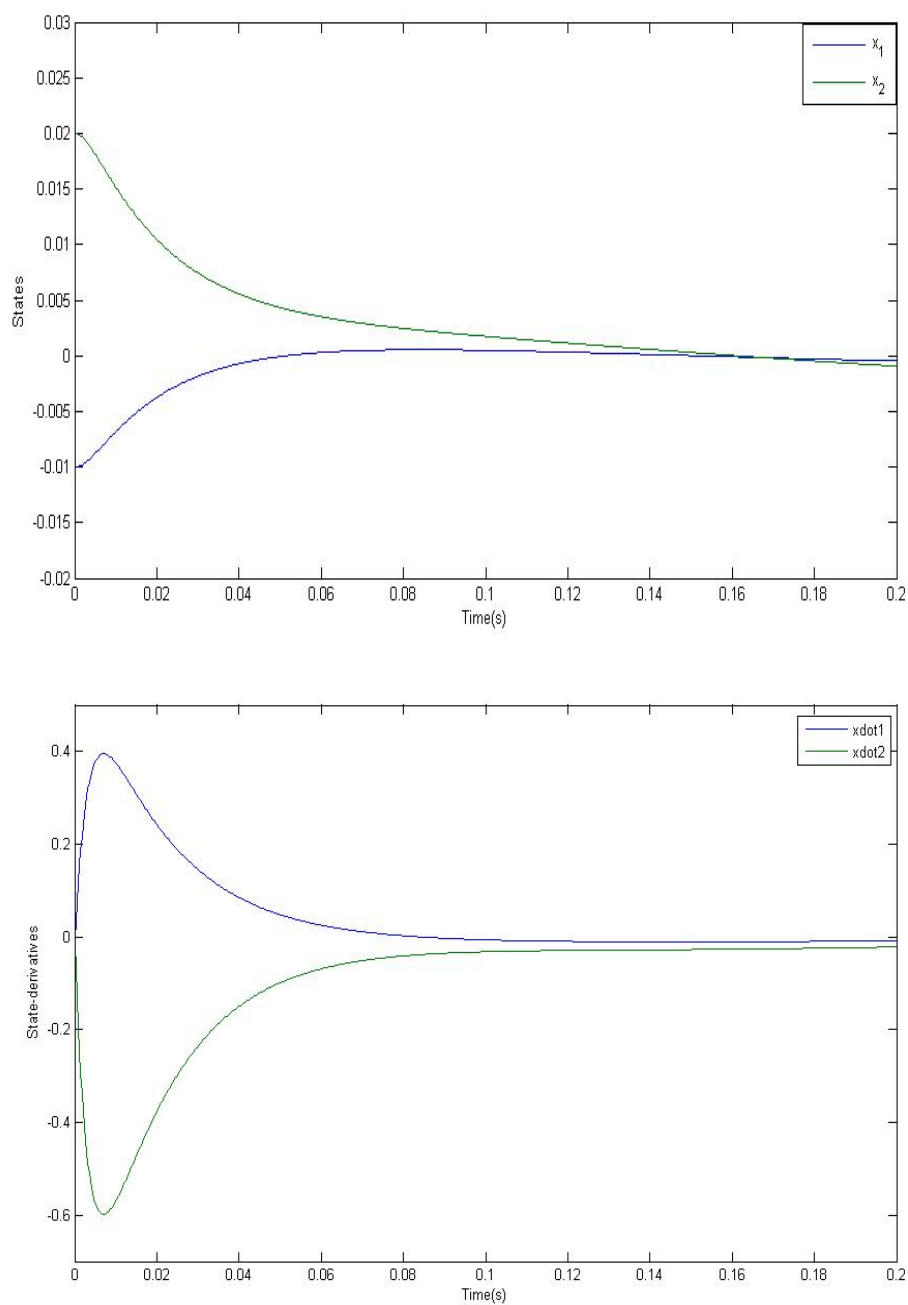
بدست آمده است.

در نتیجه مقادیر ویژه حلقه بسته $0.1038i \pm 0.13987i, -0.4987, -3.1297$ هستند.

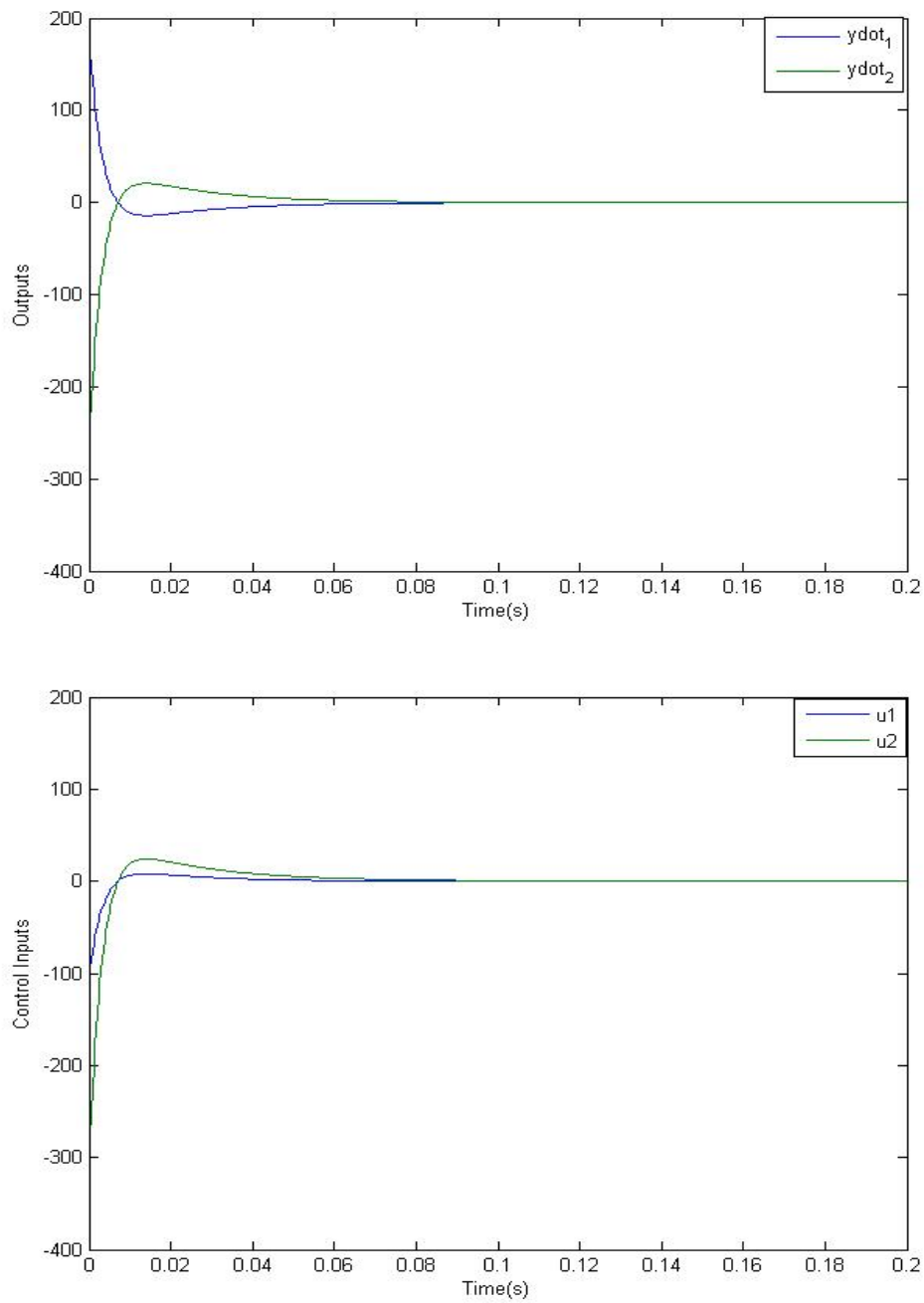
نتایج شبیه سازی با حالت اولیه $x_0 = [-0.01 \ 0.02 \ -0.02 \ 0.01]^T$ در شکل ها، (۳.۴) (۴.۴) نشان داده شده است. به ویژه، شاخص عملکرد J در طول این تکرار از $10^9 \times 2.4615$ به $10^9 \times 1.5160$ کاهش یافته است.



شکل ۲.۴: پاسخ با استفاده از پس‌خورد مشتق حالت



شکل ۳.۴: پاسخ با استفاده از پسخورد مشتق خروجی



شکل ۴.۴: پاسخ با استفاده از پس‌خورد مشتق خروجی

فصل ۵

پایداری با پسخورد مشتق حالت و محاسبه تأثیر اغتشاش

در این فصل، نشان می‌دهیم سیستم‌های خطی زمان ثابت توسط مدل ماتریس‌های فضای حالت $\{A, B, C, D\}$ با خروجی برابر با مشتق حالت، اگر $\det(A) \neq 0$ با استفاده از پسخورد خروجی مشاهده پذیر و پایداری نیست. و این که دفع یک اغتشاش ثابت که به ورودی اضافه شده از سیستم فوق، با در نظر گرفتن $\det(A) \neq 0$ و یک کنترل کننده پسخورد خروجی حالت امکان پذیر نیست.

۱.۵ مشاهده پذیری و پایداری سیستم با پسخورد مشتق حالت

در کنترل سیستم‌های خطی زمان ثابت، که توسط مدل ماتریس‌های فضای حالت $\{A, B, C, D\}$ نمایش داده می‌شوند، با استفاده از پسخورد مشتق حالت معمولاً فرض بر این است که $\det(A) \neq 0$. در این فصل با این شرایط جزئیات و رابطه‌ی مشاهده پذیری و پایداری سیستم را بررسی می‌کنیم. ایده اصلی در این مطالعه نمایش بردار مشتق حالت $\dot{x}(t)$ ، به عنوان خروجی سیستم $y(t)$ است.

قضیه ۱.۱.۵. (نامساوی سیلوستر^۱ [۱۵]) ماتریس‌های $n \times q$ و $n \times p$ و A و B را در نظر بگیرید. آنگاه

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

لم ۲.۱.۵. سیستم خطی زمان ثابت با ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{۱.۵}$$

^۱Sylvester's inequality

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ است.
در این صورت این سیستم مشاهده پذیر است اگر و فقط اگر $\det(A) \neq 0$.

برهان. یادآور می‌شویم ماتریس‌های سیستم (۱.۵) به صورت $\{A, B, C, D\} = \{A, B, A, B\}$ هستند. ماتریس مشاهده پذیری سیستم (۱.۵) به صورت زیر داده می‌باشد

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{pmatrix} A \quad (2.5)$$

بنابراین، از (۲.۵) و قضیه (۱.۱.۵) داریم

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} I_n \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{pmatrix} A \right) = \text{rank}(A) = n \quad (3.5)$$

اگر و تنها اگر $\det(A) \neq 0$ باشد. بنابراین، سیستم (۱.۵) مشاهده پذیر است اگر و فقط اگر $\det(A) \neq 0$.

□

لم بعدی نتایجی پیرامون قطب‌های سیستم (۱.۵) زمانی که $\det(A) = 0$ می‌باشد، نمایش می‌دهد.

لم ۳.۱.۵. فرض کنیم $\det(A) = 0$ و $\text{rank}(A) = q < n$ باشد. بنابراین، سیستم (۱.۵) قابل تجزیه به یک سیستم مشاهده پذیر و مشاهده ناپذیر است که قسمت مشاهده ناپذیر آن دارای $n - q$ قطب در $s = 0$ است.

برهان. چون $\det(A) = 0$ و $\text{rank}(A) = q < n$ ، ماتریس A می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود

$$A = RA_0 \quad (4.5)$$

که در آن $A_0 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ، $R \in \mathbb{R}^{n \times q}$ و $\text{rank}(A_0) = q$. تعریف می‌کنیم $A_{0,1} \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ ، $\text{rank}(A_{0,1}) = n - q$ و $A_0 A_{0,1}^T = 0$. بنابراین، انتقال خطی زیر را انجام می‌دهیم

$$z = Tx \quad T = \begin{bmatrix} A_{0,1} \\ [A_0 A_0^T]^{-1} A_0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

سیستم (۱۰۵) می تواند به شکل زیر تبدیل شود

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (TAT^{-1})z + TBu, \\ y &= (AT^{-1})z + Bu,\end{aligned}\quad (۶.۵)$$

که در آن

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} A_o^T & [A_o \setminus A_o^T]^{-1} A_o^T \end{bmatrix} \quad (۷.۵)$$

از (۴.۵) - (۷.۵) داریم

$$AT^{-1} = RA_o \begin{bmatrix} A_o^T & [A_o \setminus A_o^T]^{-1} A_o^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & RA_o A_o^T \end{bmatrix}. \quad (۸.۵)$$

بنابراین، از (۶.۵) - (۸.۵) و تعریف کردن $z^T = [z_a^T \ z_b^T]$ و $z_a \in \mathbb{R}^{n-q}$ و $z_b \in \mathbb{R}^q$ ، داریم

$$y = AT^{-1}z + Bu = RA_o A_o^T z_b + Bu. \quad (۹.۵)$$

حال، از (۴.۵) - (۷.۵) نتیجه می شود

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_a \\ \dot{z}_b \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} A_o \setminus \\ [A_o A_o^T]^{-1} A_o \end{bmatrix} RA_o \right) \begin{bmatrix} A_o \setminus \\ [A_o A_o^T]^{-1} A_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_o \setminus \\ [A_o A_o^T]^{-1} A_o \end{bmatrix} Bu \quad (۱۰.۵) \\ &= \begin{bmatrix} \circ & A_o \setminus RA_o A_o^T \\ \circ & [A_o A_o^T]^{-1} A_o RA_o A_o^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_o \setminus B \\ [A_o A_o^T]^{-1} A_o B \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

بنابراین، مشاهده پذیری z_a از خروجی y آشکار نیست، زیرا z_a در (۹.۵) به y و همچنین به $\dot{z}_b$ در (۱۰.۵) وابسته نیست. بنابراین سیستم با بردار z_a مشاهده پذیر نیست. حال، از (۱۰.۵) نتیجه می شود

$$\dot{z}_a = A_o \setminus RA_o A_o^T z_b + A_o \setminus Bu, \quad (۱۱.۵)$$

□

و این سیستم $n - q$ قطب در $s = \circ$ دارد.

لم بعد پایداری سیستم (۱۰۵) را نشان می دهد.

لم ۴.۱۰۵. اگر $\det(A) = \circ$ باشد سیستم (۱۰۵) نمی تواند با استفاده از پس خورد خروجی پایدار باشد.

برهان. از لم (۳.۱۰۵) اگر $\det(A) = \circ$ و $\text{rank}(A) = q < n$ باشد در این صورت سیستم (۱۰۵) مشاهده پذیر نیست و قسمت مشاهده ناپذیر آن دارای $n - q$ قطب در $s = \circ$ است. بنابراین قسمت مشاهده ناپذیر نمی تواند به خروجی وابسته شود و تغییر قطب های آن بوسیله ی پس خورد خروجی ممکن نیست. بنابراین، پایدار کردن با پس خورد خروجی دلخواه ممکن نیست.

□

۲.۵ تاثیر اغتشاشات با پسخورد مشتق حالت

لم ۱.۲.۵. اگر $\det(A) \neq 0$ باشد، در اینصورت سیستم (۱.۵) حداقل یک انتقال صفر در $s = 0$ دارد.

برهان. سیستم (۱.۵) که به صورت زیر داده می شود را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= \dot{x}(t).\end{aligned}\quad (12.5)$$

با بکاربردن تبدیل لاپلاس و در نظر گرفتن شرایط اولیه برابر صفر داریم

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s), \\ sX(s) - AX(s) &= BU(s), \\ (sI - A)X(s) &= BU(s), \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s), \\ Y(s) &= sX(s).\end{aligned}\quad (13.5)$$

از (۱۲.۵) نتیجه می شود

$$Y(s) = s(sI - A)^{-1}BU(s). \quad (14.5)$$

بنابراین، فرض می کنیم $\det(A) \neq 0$ ، در اینصورت A^{-1} می تواند محاسبه شود و

$$s(sI - A)^{-1}B|_{s=0} = -sA^{-1}B|_{s=0} = 0. \quad (15.5)$$

این اثبات را کامل می کند که انتقال صفر در $s = 0$ وجود دارد. $\square$

قضیه ۲.۲.۵. (مقدار نهایی [۱۷]) این قضیه امکان محاسبه $f(\infty)$ را مستقیماً از روی $F(s)$ فراهم می کند مشروط به این که حدود زیر موجود باشد

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

لم ۳.۲.۵. یک دستگاه با ورودی u و خروجی y را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + \xi) \\ y(t) &= \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + \xi),\end{aligned}\quad (16.5)$$

$\xi, \xi \in \mathbb{R}^m$ و $u(t), x(t) \in \mathbb{R}^n$ اغتشاش ثابت و نامعلوم است، و کنترل کننده مشتق حالت به صورت زیر است

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad \det(I + BK) \neq 0. \quad (17.5)$$

فرض کنیم که $\det(A) \neq 0$ و $x_e = -A^{-1}B\xi$ نقطه ی تعادل سیستم کنترل کننده (۱۶.۵) و (۱۷.۵) پایدار مجانبی فراگیر است. بنابراین $x(\infty)$ مستقل از پسخورد کنترل کننده K است و به صورت زیر بدست می آید.

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1}B\xi. \quad (18.5)$$

برهان. از (۱۶.۵) و (۱۷.۵) داریم

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-K\dot{x}(t) + \xi), \\ (I + BK)\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\xi, \\ \dot{x}(t) &= (I + BK)^{-1}Ax(t) + (I + BK)^{-1}B\xi.\end{aligned}\quad (19.5)$$

با بکاربردن تبدیل لاپلاس در (۱۹.۵) مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned}sX(s) - x(\circ) &= (I + BK)^{-1}AX(s) + (I + BK)^{-1}B\xi s^{-1}, \\ X(s) &= (sI - (I + BK)^{-1}A)^{-1}((I + BK)^{-1}B\xi s^{-1} + x(\circ)).\end{aligned}\quad (20.5)$$

بنابراین، با توجه به اینکه x_e نقطه‌ی تعادل (۱۶.۵) و (۱۷.۵)، پایدار مجانبی فراگیر است، از قضیه (۲۰.۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - (I + BK)^{-1}A)^{-1}(I + BK)^{-1}B\xi s^{-1} \\ &= -A^{-1}(I + BK)(I + BK)^{-1}B\xi = -A^{-1}B\xi\end{aligned}\quad (21.5)$$

□

بنابراین، اثبات تمام می‌شود

قضیه ۴.۲۰.۵. سیستم خطی کنترل‌پذیر با زمان ثابت به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

که $x(t) \in R^n$ و $u(t) \in R^m$ به ترتیب بردار حالت و ورودی کنترل می‌باشند، در حال که $A \in R^{n \times n}$ و $B \in R^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس‌های سیستم و کنترل می‌باشند. فرض می‌کنیم $rank(A) = n$ و $rank(B) = m$ و $rank(A + BK) = n$ و قانون کنترل $u(t) = -K\dot{x}(t)$ ، مقادیر ویژه دلخواه مخالف صفر حلقه بسته $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشند

در این صورت با تعریف $A_n = A^{-1}B$ و $B_n = -A^{-1}B$ فرض اینکه (A_n, B_n) کنترل‌پذیر باشد آنگاه K پسخورد حالت و $\Lambda_2 = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته، سیستم زیر $\dot{x}_n(t) = A_n x_n(t) + B_n u_n(t)$ با قانون کنترل $u_n(t) = -Kx_n(t)$ می‌باشد. [۱۶]

نکته ۵.۲۰.۵. ایده قضیه (۴.۲۰.۵) در [۱۶] طراحی پسخورد مشتق حالت با استفاده از طراحی پسخورد حالت است

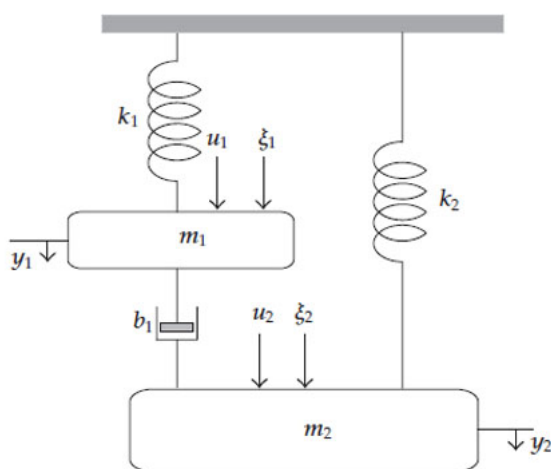
۳.۵ مثال عددی

سیستم فنر-جرم با ضربه گیر را در نظر بگیرید که در شکل (۱.۵) نشان داده شده است. ایده اصلی ما در این مثال استفاده از لم (۳.۲.۵) است. این سیستم مدل ساده‌ای از کنترل کننده ارتعاش، در جهت

کاهش نوسان جرم m_1 و m_2 است. ضرایب الاستیسیته فنر، k_1 و k_2 و b_1 ضریب ضربه گیر است. در این مورد، مدل شامل دو کنترل ورودی $u_1(t)$ و $u_2(t)$ و دو اغتشاش نامعلوم ξ_1 و ξ_2 اما ثابت است. این سیستم با معادلات زیر توصیف می‌شود [۱۰]:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1(t) + b_1(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + k_1 y_1(t) &= u_1(t) + \xi_1 \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + b_1(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2 y_2(t) &= u_2(t) + \xi_2 \end{aligned} \quad (22.5)$$

شکل فضای حالت سیستم مکانیکی شکل (۱۰.۵) می‌تواند به صورت (۱۶.۵) نمایش داده شود.



شکل ۱۰.۵: سیستم فنر-جرم چندمتغیره با ضربه گیر

متغیرهای حالت $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ که در آن

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t), \quad x_2(t) = \dot{y}_1(t), \quad x_3(t) = y_2(t), \\ x_4(t) &= \dot{y}_2(t), \quad u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T, \quad \xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T \end{aligned}$$

رادرنظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & 0 & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_1}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-b_1}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (23.5)$$

قانون کنترل پس‌خورد مشتق حالت (۱۷.۵) را در نظر بگیرید. بنابراین سیستم کنترل کننده (۱۶.۵)، (۱۷.۵) و (۲۳.۵) می‌تواند توسط (۱۹.۵) توصیف شود. برای طراحی پس‌خورد مناسب K با استفاده از قضیه (۴.۲.۵)، ابتدا ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_n = A^{-1}, \quad B_n = -A^{-1}B \quad (24.5)$$

بنابراین، از (۲۳.۵)، (۲۴.۵) و

$$m_1 = 10 \text{ kg}, m_2 = 30 \text{ kg}, k_1 = 250 \text{ KN/m}, k_2 = 150 \text{ KN/m}, b_1 = 30 \text{ Ns/m}$$

داریم

$$A_n = \begin{bmatrix} -0.0120 & -0.0040 & 0.0120 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0200 & 0 & -0.0200 & -0.0200 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 0.400 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.6667 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن (A_n, B_n) کنترل پذیر هستند.

قطب‌های حلقه بسته برای تعیین پاسخورد مشتق حالت سیستم (۱۹.۵) را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$\lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = -15, \quad \lambda_{3,4} = -2 \pm 10i.$$

اکنون، با توجه به قضیه (۴.۲.۵) سیستم

$$\dot{x}_n(t) = A_n x_n(t) + B_n u_n(t),$$

$$u_n(t) = -K x_n(t)$$

دارای قطب‌های حلقه بسته $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \lambda_4^{-1}$ می‌باشد

. بنابراین قطب‌های سیستم حلقه بسته جدید با پاسخورد حالت، با A_n و B_n داده شده بصورت زیر می‌باشند

$$\lambda_1^{-1} = -0.1000, \quad \lambda_2^{-1} = -0.0667, \quad \lambda_{3,4}^{-1} = -0.0192 \pm 0.0962i$$

حال، با پارامترهای داده شده و استفاده از دستور *command place* در نرم افزار *MATLAB*، ماتریس پاسخورد K در زیر به دست می‌آید:

$$K_* = \begin{bmatrix} 178.9532 & -6.4647 & 323.3542 & 19.8478 \\ -79.6370 & -11.4321 & 152.3204 & -26.1863 \end{bmatrix}$$

بطوریکه، برای $K = K_*$ ، قطب‌های برابر $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \lambda_4^{-1}$ هستند.

برای $K = 0$ قطب‌های داده شده در (۱۹.۵) برابر است با

$$\lambda_{1,2} = -0.14962 \pm 15.6198i, \quad \lambda_{3,4} = -0.5038 \pm 7.1074i$$

جدول (۱.۵) مقادیر ξ_1, ξ_2 و K را در فاصله زمانی، شبیه سازی دیجیتال سیستم کنترل کننده (۱۹.۵) و (۲۳.۵) را نشان می‌دهد.

جدول ۱۰۵: اغتشاشات و پس‌خورد کنترل کننده سیستم شبیه سازی شده

$Times(s)$	$\xi_1[N]$	$\xi_2[N]$	K	$x_e = -A^{-1}B[\xi_1 \ \xi_2]^T$
۰-۲۰	۰	۰	K_0	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
۲۰-۴۰	۳۰۰	۰	K_0	$[0/12 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
۴۰-۶۰	۰	-۳۰۰	K_0	$[0 \ 0 \ -0/2 \ 0]^T$
۶۰-۸۰	۳۰۰	۰	۰	$[0/12 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
۸۰-۱۰۰	۰	-۳۰۰	۰	$[0 \ 0 \ -0/2 \ 0]^T$
۱۰۰-۱۲۰	۰	۰	۰	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

شکل (۲.۵) پاسخ‌گذرا و ورودی کنترل، سیستم کنترل کننده (۱۶.۵)، (۱۷.۵) و (۲۳.۵)، با شرط اولیه $x(0) = [0/1 \ 0 \ 0/1 \ 0]^T$ و شرایط توصیف شده در جدول (۱.۵) را نشان می‌دهد.

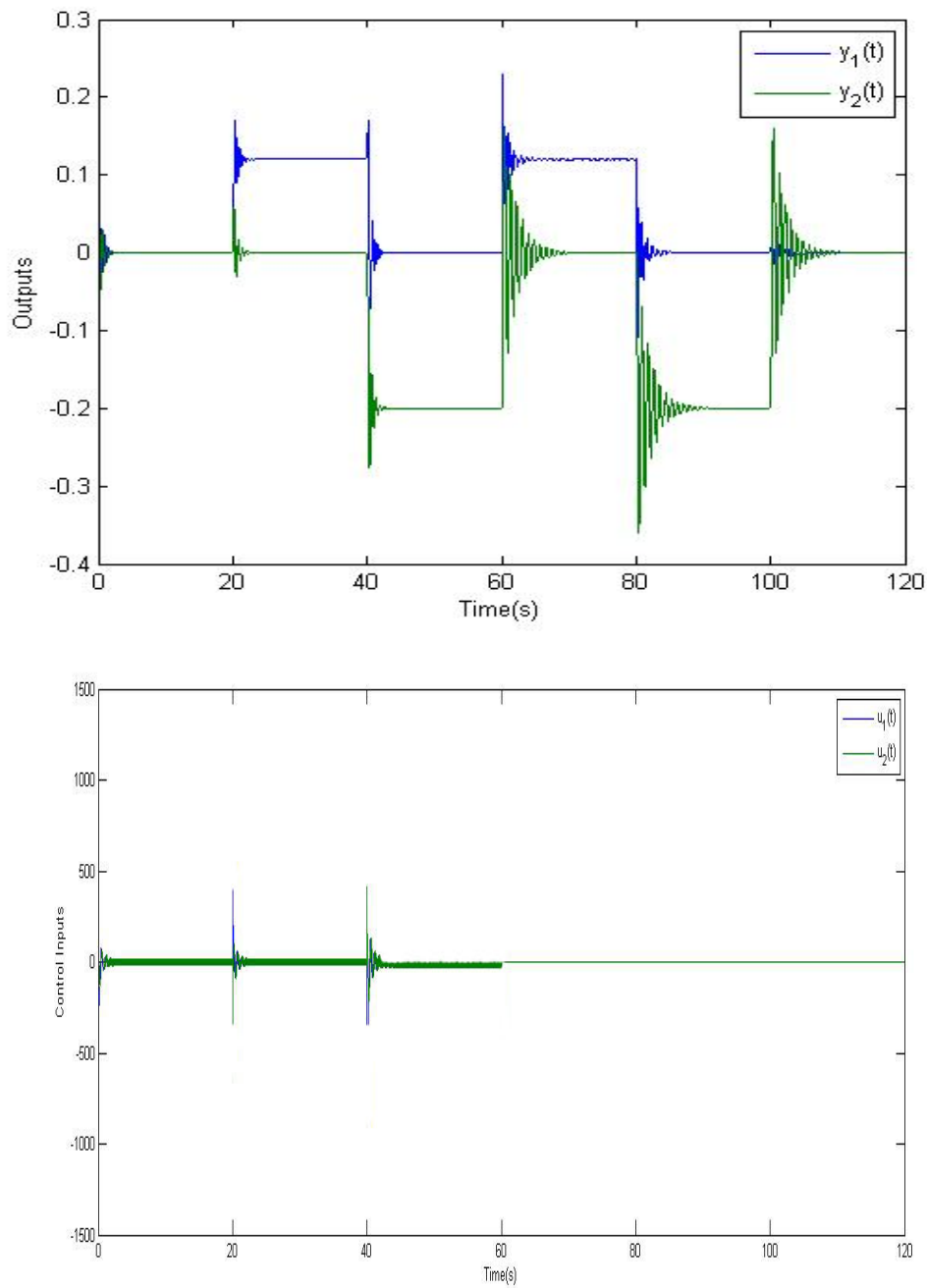
برای $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T = [300 \ 0]^T$ در $t \in (20, 40)$ و $t \in [60, 80)$ ، از لم (۳.۲.۵)، داریم

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1}B\xi = \begin{bmatrix} 0/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و برای $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T = [0 \ -300]^T$ در $t \in [40, 60)$ و $t \in [80, 100)$ ، از لم (۳.۲.۵)، داریم

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1}B\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

شکل (۲.۵) نتایج را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰۵: پاسخ ورودی و گذرای سیستم کنترل کننده با اغتشاشات و پسخورد داده شده در جدول (۱۰۵)

فصل ۶

نتیجه گیری

در این پایان نامه، الگوریتمی برای جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم های خطی زمان ثابت، تک ورودی و چند ورودی ارائه شد و نیز تعیین پسخورد مشتق با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم و در نهایت پایداری و اغتشاش با استفاده از پسخورد مشتق حالت مورد بررسی قرار گرفته است.

همانطور که در فصل ۲ به آن اشاره شد، اگر سیستم کنترل پذیر و همه قطب های سیستم اصلی ناصفر باشد مساله جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم های خطی زمان ثابت تک ورودی قابل حل است که الگوریتمی ساده آسان برای آن پیشنهاد شده است، برای این منظور ابتدا سیستم را به صورت استاندارد فروبنیوس در آورد سپس مساله جایابی قطب با استفاده از مشتق حالت حل می شود. از مزایای این روش که الگوریتم ساده دارد و روند تکراری در آن وجود ندارد.

در فصل ۳، الگوریتمی کار آمد برای مساله جایابی قطب با استفاده از پسخورد مشتق حالت برای سیستم های خطی زمان ثابت چند ورودی ارائه شد برای این منظور ابتدا سیستم را به صورت استاندارد فروبنیوس در آورد سپس مساله جایابی قطب با استفاده از مشتق حالت حل می شود. این الگوریتم برای هر سیستم کنترل پذیر که ماتریس سیستم نامنفرد و قطب های آن ناصفر است قابل اجرا است. در ادامه روش جایابی قطب با استفاده از پسخورد حالت، از روش تبدیلات تشابهی مورد بررسی قرار گرفته است. و با ارائه مثال کارآیی روشها مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل ۴، تعیین پسخورد مشتق حالت با استفاده از تنظیم کننده خطی درجه دوم برای سیستم های خطی زمان ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. شرط لازم برای حل پذیری مساله این است که سیستم کنترل پذیر و ماتریس حلقه باز سیستم، نامنفرد باشد.

در فصل ۵، برخی از نتایج قطعی در مورد مشاهده پذیری و پایداری و اغتشاشات برای سیستم های خطی زمان ثابت با خروجی برابر با بردار مشتق حالت خروجی ارائه شده است، این نتایج می تواند در تجزیه و تحلیل و طراحی سیستم های کنترلی با پسخورد مشتق حالت مفید می باشد، نتایج حاصل از آن را برای سیستم های غیر خطی می توان مورد بررسی قرارداد.

پوست آ

کدهای *MATLAB*

آ.۱ کدهای *MATLAB* فصل دوم

کد متلب مثال ۱ فصل دو

```
clc
clear all

k1 = 360000;
k2 = 36000;
b1 = 70;
b2 = 50;
m1 = 100;
m2 = 10;

A = [0 0 1 0;
     0 0 0 1;
     (-k1-k2)/m1 k2/m1 (-b1-b2)/m1 b2/m1;
     (k2/m2) -k2/m2 b2/m2 -b2/m2];

B = [0; 0; -1/m1; 1/m2];

adj = A^-1*det(A);
```

```

ple = (-5 + 2i)*(-5 - 2i)*(-10 + 5i)*(-10 - 5i);

R = [B A*B A*A*B A*A*A*B];
q = [0 0 0 1]*R^-1;

z =
    (A - (-5 + 2i)*eye(4))*(A - (-5 - 2i)*eye(4))
    *(A - (-10 + 5i)*eye(4))*(A - (-10 - 5i)*eye(4));

k = (1/ple)*q*adj*z;
k = real(k)

Ac = (eye(4) + B*k)^-1*A;

eig(Ac);
%K = acker(A,B,[-5+2i,-5-2i,-10+5i,-10-5i])
K=-q*(A+(5+2i)*eye(4))*(A+(5-2i)*eye(4))*(A+(10+5i)*eye(4))*(A+(10-5i)*eye(4))
Anew = (eye(4) + B*k)^-1*A;

init = [.5 .5 .2 .2];

c1 = [1 0 0 0];

sys = ss(Anew,B,c1,0);
sys1 = ss(A+B*K,B,c1,0);

[y,t,x] = initial(sys,init,1.6);
[y1,t1,x1] = initial(sys1,init,1.6);

[s1,s2] = size(x);
[si1,si2] = size(x1);

```

```

for i = 1:s1

    dx(i,:) = (Anew*x(i,:))';
    u(i,:) = -(k*(dx(i,:))')';

end
%%%%%%%%
for i = 1:si1

    dx1(i,:) = ((A+B*K)*x1(i,:))';
    % u1(i,:) = -(K*(dx1(i,:))')';
    u1(i,:) = (K*(x1(i,:))')';

end

%%%%%%%%
plot(t,x);
%figure
%plot(t,dx);
figure
plot(t,u);
figure
plot(t1,x1);
%figure
%plot(t1,dx1);
figure
plot(t1,u1);

```

کد متلب مثال ۲ فصل دو

```

m = 1;
ro = 0.05;
r0 = 0.1;
g = 9.81;
b = 0.1;
ib = 5;
i = 1;
A = [0 1 0 0; 0 (-b)/(m*r0^2 + 1) -m*g/(m*r0^2 + 1) 0; 0 0 0 1; -(m*g*ro^2)/(m*ro^2 + i);
B = [0; 1/(m*r0^2 + i); 0; 0];
adj = A^-1*det(A);
ple = (-7 + 2i)*(-7 - 2i)*(-10 + 5i)*(-10 - 5i);

R = [B A*B A*A*B A*A*A*B];
q = [0 0 0 1]*R^-1;

z = (A - (-7 + 2i)*eye(4))*(A - (-7 - 2i)*eye(4))
*(A - (-10 + 5i)*eye(4))*(A - (-10 - 5i)*eye(4));

k = (1/ple)*q*adj*z;
k = real(k)

Ac = (eye(4) + B*k)^-1*A;

eig(Ac);
%K = acker(A,B,[-5+2i,-5-2i,-10+5i,-10-5i])
K=-q*(A+(7+2i)*eye(4))*(A+(7-2i)*eye(4))*(A+(10+5i)*eye(4))*(A+(10-5i)*eye(4))
Anew = (eye(4) + B*k)^-1*A;

init = [.1 .1 0.05 0.05 ];

c1 = [1 0 0 0];

sys = ss(Anew,B,c1,0);
sys1 = ss(A+B*K,B,c1,0);

```

```
[y,t,x] = initial(sys,init,1.4);
[y1,t1,x1] = initial(sys1,init,1.4);
```

```
[s1,s2] = size(x);
[si1,si2] = size(x1);
```

```
for i = 1:s1
```

```
    dx(i,:) = (Anew*x(i,:))';
    u(i,:) = -(k*(dx(i,:)))';
```

```
end
```

```
for i = 1:si1
```

```
    dx1(i,:) = ((A+B*K)*x1(i,:))';
    % u1(i,:) = -(K*(dx1(i,:)))';
    u1(i,:) = (K*(x1(i,:)))';
```

```
end
```

```
plot(t,x);
%figure
%plot(t,dx);
figure
plot(t,u);
figure
plot(t1,x1);
%figure
%plot(t1,dx1);
```

```
figure
plot(t1,u1);
    n= sum(sum(k.^2)).^5 ;
N=sum(sum(K.^2)).^5;
```

آ.۲ کدمتلب مثال فصل سوم

```
clc
clear all
close all

m = 10;
k1 = 500;
k2 = 700;
b1 = 10;
b2 = 20;
c1 = (1/m) + 1;
c2 = (1/m) - 1;

A = [0 0 1 0;
      0 0 0 1;
      -k1*c1 -k2*c2 -b1*c1 -b2*c2;
      -k1*c1 -k2*c1 -b1*c2 -b2*c1];

B = [0 0;
      0 0;
      c1 c2;
      c2 c1];

b1 = B(:,1);
b2 = B(:,2);

R = [b1 A*b1 b2 A*b2];
```

```

q1 = [0 1 0 0]*R^-1;

q2 = [0 0 0 1]*R^-1;

inq = [q1; q1*A; q2; q2*A];
pole1 = [-5+2i -5-2i];
pole2 = [-10+5i -10-5i];

k11 = 1;
k12 = eye(4);

k21 = 1;
k22 = eye(4);

for i = 1:1:2

    k11 = (-1/pole1(i)) * k11;
    k12 = (A - pole1(i)*eye(4)) * k12;

    k21 = (-1/pole2(i)) * k21;
    k22 = (A - pole2(i)*eye(4)) * k22;

end

k1 = k11*q1*A^-1*k12;
k2 = k21*q2*A^-1*k22;
%k=[349.5517 228.7241 41.3052 30.5224;-320.2138 -169.9931 -48.1314 -34.6893];
k = -([q1; q2]*A^-1*B)^-1*[k1; k2];
T=[q1*A*B;q2*A*B]^-1
M=[-q1*(A+(5-2i)*eye(4))*(A+(5+2i)*eye(4));-q2*(A+(10-5i)*eye(4))*(A+(10+5i)*eye(4))]
%K=[-420.2500 65.2500 17.50000 22.5000;281.2500 -356.2500 45.00000 35.0000]
K=T^-1*M

Anew = (eye(4) + B*k)^-1*A;

```

```

init = [-0.01 0.02 -0.02 0.01];

c1 = [1 0 0 0];

sys = ss(Anew,B,c1,0);
sys1 = ss(A+B*K,B,c1,0);

[y,t,x] = initial(sys,init,1.4);
[y1,t1,x1] = initial(sys1,init,1.4);

[s1,s2] = size(x);
[si1,si2] = size(x1);

for i = 1:s1

    dx(i,:) = (Anew*x(i,:)')';
    u(i,:) = -(k*(dx(i,:)'))';

end

for i = 1:si1

    dx1(i,:) = ((A+B*K)*x1(i,:)')';
    % u1(i,:) = -(K*(dx1(i,:)'))';
    u1(i,:) = +(K*(x1(i,:)'))';

end
plot(t,dx);
figure
plot(t,x);
figure

```

```

plot(t,u);
figure
plot(t1,x1);
figure
%plot(t1,dx1);
%figure
plot(t1,u1);
n= sum(sum(k.^2)).^5 ;
N=sum(sum(K.^2)).^5;

```

۳.آ کدمتلب مثال فصل چهارم

```

m=10;
i=1;
l=1;
k1=500;
k2=700;
b1=10;
b2=20;
c1=(1/m)+1;
c2=(1/m)-1;
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;-k1*c1 -k2*c2 -b1*c1 -b2*c2;-k1*c2 -k2*c1 -b1*c2 -b2*c1];
B=[0 0;0 0;c1 c2;c2 c1];
k=[98.0081 -6.5270 1.5875 -1.5119;-4.6622 35.6412 -0.2978 1.9490];
Anew = (eye(4) + B*k)^-1*A;

init = [-0.01 0.02 -0.02 0.01];
c1 = [1 0 0 0];
sys = ss(Anew,B,c1,0);
[y,t,x] = initial(sys,init,1.4);
[s1,s2] = size(x);

```

```

for i = 1:s1

    dx(i,:) = (Anew*x(i,:)')';
    u(i,:) = -(k*(dx(i,:)'))';

end

plot(t,dx);
figure
plot(t,x);
figure
plot(t,u);

*****

k1=500;
k2=700;
b1=10;
b2=20;
c1=(1/m)+1;
c2=(1/m)-1;
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;-k1*c1 -k2*c2 -b1*c1 -b2*c2;-k1*c2 -k2*c1 -b1*c2 -b2*c1];
B=[0 0;0 0;c1 c2;c2 c1];
c=[0 0 1 0;0 0 0 1];

f=[-1.0213 -1.0896;3.5659 1.2723];
Anew = (eye(4) + B*f*c)^-1*A;

init = [-0.01 0.02 -0.02 0.01];

c1 = [1 0 0 0];

sys = ss(Anew,B,c1,0);
[y,t,x] = initial(sys,init,1.4);
[s1,s2] = size(x);
k=f*c;

```

```

for i = 1:s1

    dx(i,:) = (Anew*x(i,:)')';
    u(i,:) = -(k*(dx(i,:)'))';

end
plot(t,x);
figure
plot(t,dx);
figure
plot(t,c*(dx)');
figure
plot(t,u);

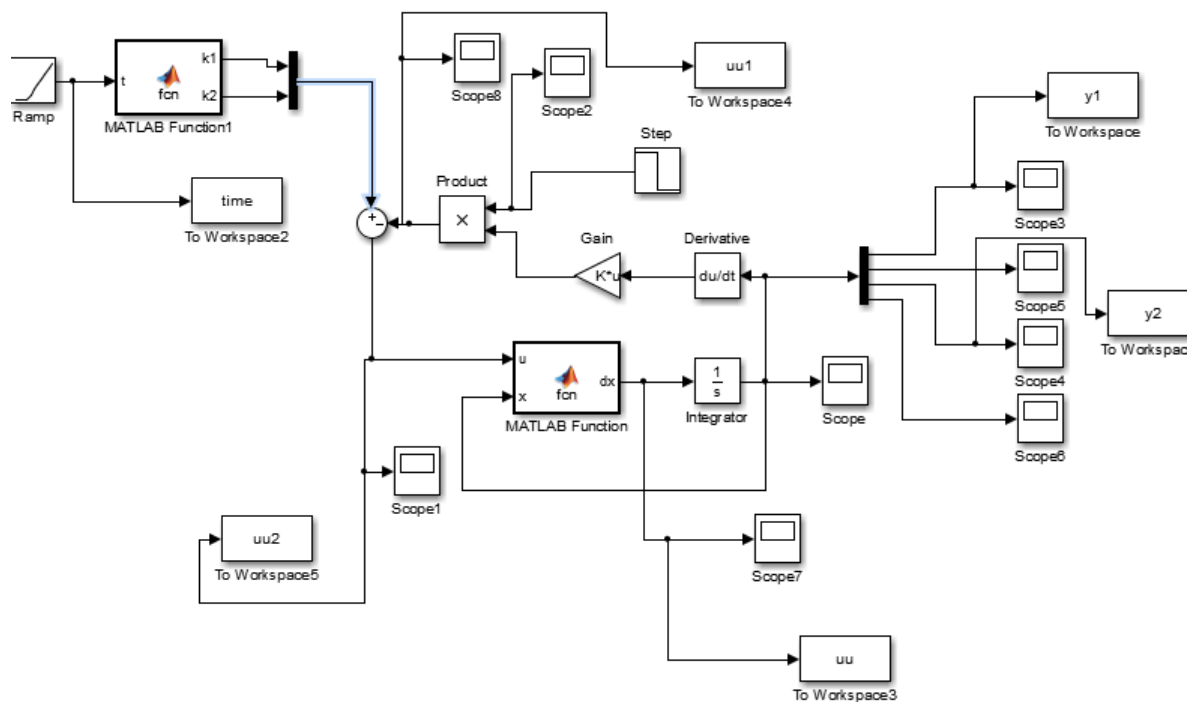
*****

m=10;
i=1;
l=1;
k1=500;
k2=700;
b1=10;
b2=20;
c1=(1/m)+1;
c2=(1/m)-1;
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;-k1*c1 -k2*c2 -b1*c1 -b2*c2;-k1*c2 -k2*c1 -b1*c2 -b2*c1];
B=[0 0;0 0;c1 c2;c2 c1];

Q=[10000 0 0 0;0 10 0 0;0 0 10 0;0 0 0 10];
R=[1 0;0 1];
AN=A^-1;
BN=A^-1*B;

[x,l,g] = care(AN,BN,Q,R)
k=-g

```



شکل ۱.۰: سیمولینک مثال فصل پنجم

آ.۴ کدهای مربوط به استفاده از تبدیلات تشابهی

```
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% *****
%
t0=cputime;
```

```

disp('          This is the given plant matrix A')          %line 1
disp('          *****')                                  %line 2
          A                                                  %line 3
disp('          This is the given input matrix B')          %line 4
disp('          *****')                                  %line 5
          B                                                  %line 6
[n,m]=size(B);                                              %line 7
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n);                                                  %line 10
% The Echelon form of Q
% -----
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
    [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
    if (q<=tol)
        Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
        j=j+1;
    else
        % perform the similarity operations
        % swap i-th row with k-th row:

        o1
        % divide the pivot row

        o2
        % subtract multiples of the pivot row

        o3

        i=i+1 ;
        j=j+1;
    end
end
end
% *****

```

```

% Now compute the Standard echelon form      !
% -----
s=1;
while s < n
    i=s+1 ;
    for j=i:r
        if Q(i,j)~=0
            for k=1:s
                if Q(k,j)~=0
                    t=Q(k,j);
                    Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                end
            end
            break
        end
    end
    s=s+1;
end

% *****
% choice=input(' do you want the kronecker invariants displayed,y/n %','s')
% if choice=='y'
%     kronk3
% end
% *****

% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=i:r
        if Q(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Q(i,j);
                Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
            end
        end
    end
end

```

```

T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
end
break
end
end
end

% *****
% choice=input('do you want the prim. vec comp form displayed,y/n%','s')
% if choice=='y'
% disp(' The standard Vector Companion form ')
% disp(' ***** ')
% Q
% end
% .....
disp(' This is the transformation matrix,T1')
disp(' *****')

T1

% disp(' press any key to continue')
% *****
% pause
% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:, [1:m]);A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
Fp=F1*T1;
% *****
disp(' This is the primdry feedback law ')
disp(' ***** ')

Fp

% *****
%disp(' The closed loop matrix A+B*F ')
%disp(' ***** ')

```

```

gama=A+B*Fp
% *****
%choice=input(' do you want to check the resultfeed,y/n ','s')
%if choice=='y'
%    g=gama^p(1);
%    for i=1:n
%        for j=1:n
%            if abs(g(i,j))<tol
%                g(i,j)=0;
%            end
%        end
%    end
%end
%fprintf(' This is g=(A+B*F)^%g',p(1))
%disp(' *****')
%g
% *****
% generating parametric feed-back laws
%    q=fix(n/m);
%    if p(1)==q
%        disp(' The feed-back law is unique ! ')
%        disp(' ***** ')
%    disp(' The kronecker invariants are all equal ')
%disp(' ***** ')
%    else
%        allfeeds
%    end
% *****

t1=cputime-t0

% program for assigning eigenvalues,eigen.m
% *****
% D=[-1 0 0 0 0 ;0 -2 1 0 0 ;0 -1 -2 0 0; 0 0 0 -3 1 ;0 0 0 -1 -3]
D=[];

```

```

for j=1:n
    landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
end
%landa=[ 0  0  0  ]

for i=1:n
    D(i,i)= landa(i);
end
% D
%if c==0
    Acap=A1;
    Bcap=B1;
    newF=Fp ;
%end
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1];
%A=[0.95 0.49 0.46;0.23 0.89 0.02;0.61 0.76 0.82]
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end
end
G2=Qc(1:m,m+1:r);

```

```

    glanda=Qc(:,m+1:r);
    Fc=bo*G2*T1;
disp('    The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
disp('    *****')
    Kp=newF+Fc
%    disp('    with the closed-loop matrix ')
%    disp('    ***** ')
    gamac=A+B*Kp;
disp('    checking the eigen values ')
disp('    ***** ')
    v=eig(gamac)'
    [u1,v1]=eig(gamac);
    c2=cond(u1)
disp('    Frobenius norm of feedback matrix ')
disp('    ***** ')
    Normmkp=norm(Kp,'fro')
%    disp('    frobenious norm of closed-loop matrix ')
%    disp('    ***** ')
%    Normgama=norm(gamac,'fro')

%    End of program for eigen

```

مراجع

- [1] M.Valášek, N. Olgac, *An Efficient Pole Placement Technique For Linear Time-variant SISO Systems*, IEE Proceedings-Control Theory and Applications, Vol. 142, No. 5, pp. 451–458, 1995.
- [2] M.Valášek,N. Olgac, *Efficient Eigenvalue Assignments for General LinearMIMO Systems*, Automatica, Vol. 31, No. 11, pp. 1605–1617, 1995.
- [3] M.Valášek,N. Olgac, *Pole Placement for Linear time- -varying Non-lexicographically Fixed MIMO Systems*,Automatica, Vol. 35, No. 11, pp. 101–108, 1999.
- [4] R. A.Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, University Press, Cambridge, 1986.
- [5] D.G. Luenberger, *Canonical forms for linear multivariable systems*,Automatic Control, IEEE Transactions on, Vol.12 , pp. 290-293,1967.
- [6] T.H.S. Abdelaziz , M. Valášek, *A direct algorithm for pole placement by stated-erivative feedback for single-input linear systems*, Acta Polytechnica, Vol.43 ,No. 6, pp.52-60,2003.
- [7] T.H.S. Abdelaziz , M. Valášek, *Pole-placement for SISO linear systems by stated-erivative feedback*, InControl Theory and Applications, IEE Proceedings ,Vol. 151, No. 4, pp.377-385,2004.
- [8] F.L.Lewis, *Applied optimal control and estimation, digital design and implementation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [9] D.D.Moerder ,A.J. Calise , *Convergence of a numerical algorithm for calculating optimal feedback gains*,IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 30, No. 9, pp. 900-903, 1985.
- [10] R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção , M. Covacic, *Design of state-derivative feedback controllers using a state feedback control design*,in Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, Vol. 1, pp. 135–141, 2007.

- [11] J. M. Araújo , A. C. Castro, E. T. F. Santos, *Alocação Pólos em Sistemas Lineares Invariantes no Tempo Utilizando Realimentação da Derivada de Estados e a Equação de Lyapunov*, Controle y Automacao, Vol. 20, No. 3, pp. 263–270, 2009 .
- [12] E. Assunção , M. C. M. Teixeira, F. A. Faria, N. A. P. da Silva, R. Cardim, *Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems*, International Journal of Control, Vol. 80, No. 8, pp. 1260–1270, 2007.
- [13] F. A. Faria, E. Assunção, M. C. M. Teixeira, R. Cardim, *Robust state-derivative feedback LMIbased designs for linear descriptor systems*, Mathematical Problems in Engineering, pp. 15, 2010.
- [14] F. A. Faria, E. Assunção, M. C. M. Teixeira, *Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs*, Sba: Controle and Automação Sociedade Brasileira de Automatica, Vol. 20, No. 1, pp. 83–93, 2009.
- [15] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 1999.
- [16] R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, F. A. Faria, *Control designs for linear systems using state-derivative feedback*, INTECH Open Access Publisher, 2008.
- [17] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, New York, NY, USA, 4th edition, 2002.
- [18] B. N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, SIAM, 2nd edition, 2010.
- [19] B. N. Datta, *Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis*, Academic Press, New York, 2002.
- [20] B. N. Datta, *Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis*, Elsevier Academic Press, 2003.
- [21] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc, 2006.
- [22] S. M. Karbassi , D. J. Bell, *Parametric time -optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 1 : Regular Kronecker invariants*, International Journal of Control, Vol. 57, pp. 817-830, 1993.
- [23] S. M. Karbassi , D. J. Bell, *New method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control*, IEE Proceedings-Control Theory and Applications, Vol. 141, pp. 223-226, 1994.
- [24] J. Ackermann, *Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum*, Automatisierungstechnik , Vol. 7, pp. 297–300, 1972.

-
- [25] W. G. Tuel, *On the transformation to (phase-variable) canonical form*, IEEE Trans, on Automatic Control, Vol. 11, pp. 607, 1966 .
- [26] A. Preumont, N. Loix, *Active Damping of Optical Test Benches with Acceleration Feedback*, Machine Vibration, Vol. 2, pp. 119–124, 1993.
- [27] M. P. Bayon de Noyer, S. V. Hanagud, *Single Actuator And Multi-Mode Acceleration Feedback Control*, Adaptive Structures and Material Systems, Vol. 54, pp. 227–235, 1997.
- [28] M. P. Bayon de Noyer, S. V. Hanagud, *A Comparison of H_2 Optimized Design and Cross-Over Point Design For Acceleration Feedback Control*, Proceedings of 39th AIAA/ASME/ ASCE/AHS, Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, pp. 3250–3258, 1998.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Trace	اثر
Eigenvector	بردار ویژه
Transient response	پاسخ گذرا
Stability	پایداری
Transfer function	تابع تبدیل
Complex conjugate transpose	ترانهاده مختلط مزدوج
Pole placement	جایابی قطب
Multi Output	چندخروجی
Multi Input	چند ورودی
State	حالت
Open loop	حلقه باز
Close loop	حلقه بسته
Determinant	دترمینان
Rank	رتبه
Subsystem	زیرسیستم
Lagrange multiplier	ضرایب لاگرانژ
Vector space	فضای برداری
Null space	فضای پوچ
Pole	قطب
Completely controllable	کاملاًکنترل پذیر
Control	کنترل
Uncontrollable	کنترل ناپذیر
Weighting matrix	ماتریس وزنی
Observer	مشاهده گر
Characteristic equation	معادله مشخصه

Riccati equation	معادله ریکاتی
Unstable	ناپایدار
Sylvester inequality	نامساوی سیلوستر
Nonsingular	نامنفرد
Norm	نرم
Positive semidefinite	نیمه معین مثبت
Linearly dependent	وابسته خطی
Hamiltonian	هامیلتونی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Ackermann's formula.....	فرمول آکرمن
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Companion	همراه
Controllability	کنترل پذیری
Controllability matrix	ماتریس کنترل پذیری
Diagonal.....	قطری
Disturbance vector.....	برداری اغتشاش
Eigenvalue	مقدار ویژه
Equilibrium point.....	نقطه تعادل
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Input variable	متغیر ورودی
Linear combination	ترکیب خطی
Linearly dependent	وابسته خطی
Lyapunov	لیاپانوف
Minimization.....	حداقل سازی
Minor.....	کهاد
Negative definite	معین منفی
Negative semidefinite.....	نیمه معین منفی
Observability	مشاهده پذیری
Observability matrix	ماتریس مشاهده پذیری
Output variable.....	متغیر خروجی
Positive definite	معین مثبت
Similarity transformation.....	تبدیل همانندی
Single Input Single Output	یک ورودی یک خروجی
Stabilizable	پایدار پذیر

State feed back	پس‌خورد حالت
State variable	متغیر حالت
System equations	معادلات سیستم
Time invariant	تغییر ناپذیر با زمان
Unobservable	مشاهده ناپذیر

نمایه

- بردار، ۴
- بردار حالت، ۱۴
- بردار خروجی، ۱۴
- بعد فضا، ۹
- ترکیب خطی، ۸
- دترمینان، ۷
- رتبه، ۹
- زیرفضای تولید شده، ۸
- فرم جردن، ۱۸
- فضای پوچ، ۹
- ماتریس، ۴
- ماتریس مثلثی، ۷
- ماتریس مربعی، ۵
- ماتریس واحد، ۵
- ماتریس کنترل پذیری، ۱۵
- ماتریس های مشابه، ۱۰
- متغیر کنترل، ۱۴
- مستقل خطی، ۸
- معادله تفاضلی، ۱۵
- مقادیر ویژه، ۱۰
- وابسته خطی، ۸
- پایه، ۹
- کنترل پذیری، ۱۵

Aabstract

In this thesis, we will intraduce the direct solution of the pole placement problem by state-derivative feedback for single-input and multi-input linear systems. this thesis describes the solution of this pole placement problem for any controllable system with nonsingular system matrix and nonzero desired poles. Then closed-loop poles can be placed in order to achieve the desired system performance. The solving procedure results into a formula similar to Ackermann one. Its derivation is based on the transformation of linear single-input and multi-input systems into Frobenius canonical form by coordinate transformation, then solving the pole placement problem by state derivative feedback and transforming the solution into original coordinates.

Then we introduce state-derivative and especially output-derivative feedbacks for linear time-invariant systems are derived using control approach similar to linear quadratic regulator (LQR). The optimal feedback gain matrices are derived for the desired performance. This problem is always solvable for any controllable system if the open-loop system matrix is nonsingular. Explicit expression of the state-derivative gain matrix is derived. Then we introduce (i) linear time-invariant plants given by the state-space model matrices $\{A, B, C, D\}$ with output equal to the state-derivative vector are not observable and can not be stabilizable by using an output feedback if $\det(A) = 0$ and (ii) the rejection of a constant disturbance added to the input of the aforementioned plants, considering $\det(A) \neq 0$, and a static output feedback controller is not possible. At the end of each section for more understanding of concepts, numerical examples are provided.

keywords:Pole placement, State-derivative feedback,Output derivative feedback, Observability , Stabilizability.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

A Direct Algorithm for Pole Placement by State-derivative Feedback for Linear Systems

Alireza Gharanli Pour

Supervisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor

Dr. Ali Mesforoosh

Jan 2016