دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

احتمالات دمی مجانبی برای مجموع وزنی تصادفی و ماکزیمم مجموع وزنی تصادفی برای متغیرهای تصادفی سنگین‌دم

محمد عابدی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

آبان ۹۴

تقدیم به روح پاک پدرم که عالمانه به من
آموخت چگونه در زندگی، ایستادگی را تجربه
نمایم و به مادرم، دریای بی کران فداکاری
و عشق

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمون مان شد و به هم نشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزی مان ساخت

محمد عابدی
آبان ۹۴

تعهد نامه

اینجانب **محمد عابدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احتمالات دمی مجانبی برای مجموع وزنی تصادفی و ماکزیمم مجموع وزنی تصادفی برای متغیرهای تصادفی سنگین‌دم** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد نزاکتی رضازاده** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمد عابدی
آبان ۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

سه نوع مهم از خانواده توزیع‌های آماری، خانواده توزیع‌های سنگین‌دم، درازدم و زیرنمایی می‌باشند. هم‌چنین گسترده‌ترین نوع این خانواده‌ها، خانواده توزیع‌های سنگین‌دم است. در این پایان‌نامه در ابتدا مقدمات و تعاریفی از این سه خانواده توزیع را بیان و نتایجی را به اثبات می‌رسانیم. به‌علاوه در فصل دوم تعریفی از خانواده توزیع‌های مقادیر غالب دمی را ارائه می‌کنیم و نشان می‌دهیم کلاس خانواده توزیع‌های درازدم و مقادیر غالب دمی تحت عمل پیچش بسته می‌باشند. در نهایت، در فصل آخر این پایان‌نامه با در نظر گرفتن متغیرهای وزنی X_1 و X_2 و ایجاد ساختار وابستگی خاصی بین این دو متغیر، بسته بودن خانواده توزیع‌های درازدم و مقادیر غالب دمی را تحت عمل پیچش اثبات و نتایج هم‌ارزی را بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: *توزیع‌های سنگین‌دم، توزیع‌های درازدم، توزیع‌های زیرنمایی، پیچش، توزیع‌های مقادیر غالب دمی*

پیش گفتار

در علم آمار، کلاس و خانواده توزیع‌های مختلف و وسیعی وجود دارند که هر کدام از این خانواده‌ها، خواص و ویژگی‌های خاص و مربوط به خود را دارند. در این پایان‌نامه بحث اصلی و عمده ما روی چهار خانواده از توزیع‌های آماری می‌باشد: خانواده توزیع‌های سنگین‌دم، خانواده توزیع‌های درازدم، خانواده توزیع‌های زیرنمایی و در آخر خانواده توزیع‌های مقادیر غالب دمی.

در فصل اول، مقدمات و تعاریفی را از خانواده توزیع‌های سنگین‌دم، درازدم و زیرنمایی بیان خواهیم کرد و به بیان ارتباط بین این توزیع‌ها می‌پردازیم. هم‌چنین تعاریفی از فضاهای متریک، σ-میدان و مجموعه بورل را بیان می‌کنیم. در ادامه به بیان کاربردی مختصر از خانواده توزیع‌های سنگین‌دم می‌پردازیم. در آخر در مورد خانواده توزیع‌های سنگین‌دم قضایا و نتایجی را به اثبات خواهیم رساند.

در فصل دوم، هم‌ارزی مجموع و ماکزیمم مجموع دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی را برای حالتی که متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دو به دو مستقل و حقیقی‌مقدار می‌باشند، مورد بررسی قرار خواهیم داد و در ادامه، با نسبت دادن وزن‌های متناظر به متغیرهای تصادفی، حالت کلی‌تری را در نظر خواهیم گرفت که در این حالت بین وزن‌های تصادفی و متغیرهای تصادفی متناظر، حالت استقلال را در نظر می‌گیریم و نتایج مرتبط را بیان خواهیم کرد.

در فصل سوم این پایان‌نامه، دو متغیر تصادفی وابسته X_1, X_2 را در نظر خواهیم گرفت و برای ایجاد رابطه هم‌ارزی بین مجموع و ماکزیمم مجموع این مقادیر وزنی تصادفی، ساختار وابستگی خاصی را بین متغیرهای تصادفی مطرح و بر طبق این ساختار وابستگی، قضایا و نتایج مرتبط را اثبات می‌کنیم. در ادامه فصل، فرض خواهیم کرد که $(X_1, \Theta_1), (X_2, \Theta_2), \ldots, (X_n, \Theta_n)$، n بردار تصادفی دو به دو مستقل باشند که در این حالت ساختار وابستگی قبل را بین متغیرهای تصادفی و نیز وزن‌های تصادفی در نظر خواهیم گرفت و در راستای همین فرض، قضایا و نتایجی را به اثبات خواهیم رساند.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. احمد نزاکتی رضازاده و محمّد عابدی، بررسی احتمالات دمی مجانبی برای مجموع وزنی تصادفی، چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه یزد، ۶-۳ شهریور ۱۳۹۴.

فهرست مطالب

فصل ۱

توزیع‌های درازدم، سنگین‌دم و زیرنمایی و برخی خواص آن‌ها

۱.۱ مقدمه

در این فصل و به‌طور کلی در این پایان‌نامه، تمام روابط هم‌ارزی در حالت حدی در نظر گرفته شده است. هم‌چنین در فصل‌های مختلف این پایان‌نامه، حالت‌های ممکن استقلال و وابستگی را در مورد متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ بررسی خواهیم کرد. به‌علاوه مطالب این فصل، برگرفته‌شده از کتاب $Foss$ و هم‌کاران، [۶] می‌باشد.

۲.۱ σ-میدان و مجموعه بورل

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه مرجع X را درنظر بگیرید. یک خانواده از زیرمجموعه‌های X مانند M را σ-میدان گوییم، هرگاه سه خاصیت زیر را دارا باشد:

۱) $\emptyset \in M$

۲) اگر مجموعه‌ای مانند A متعلق به M باشد، آن‌گاه متمّم مجموعه A نیز متعلق به M باشد، یعنی:

$$A \in M \Longrightarrow A' \in M$$

۳) اگر دنباله‌ای از مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots$ متعلّق به M باشند، آن‌گاه اجتماع آن‌ها نیز متعلّق به M باشد، یعنی:

$$A_۱, A_۲, \ldots \in M \Longrightarrow \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i \in M$$

تعریف ۲.۲.۱. σ-میدان تولیدشده توسط خانواده مجموعه‌های بسته $\{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$ را در نظر بگیرید. این σ-میدان را با β نمایش داده و عناصر آن را مجموعه‌های بورل [۱] می‌نامیم.

[۱] Borel Set

۳.۱ فضای متریک و پوشش باز

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه X در صورتی یک فضای متریک [۲] است که به هر دو نقطه p و q از X، عدد حقیقی $d(p,q)$، که به عنوان فاصله‌ای از p تا q می‌باشد، طوری نسبت داده شده باشد که:
الف) برای $p \neq q$، $d(p,q) > 0$ باشد و $d(p,p) = 0$.
ب) $d(p,q) = d(q,p)$
ج) به ازای هر عنصر دلخواه $r > 0$ از مجموعه X داشته باشیم:

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$$

لازم به ذکر است که هر تابع برخوردار از سه خاصیت فوق را یک متر می‌نامند.

تعریف ۲.۳.۱. منظور از یک پوشش باز [۳] مجموعه E در فضای متریک X، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند G_αها است، که E زیرمجموعه اجتماع تمام G_αها می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ باشد. برای A می‌توان پوشش‌های متفاوتی را در نظر گرفت، برای مثال فرض می‌کنیم $\bigcup I_n$ پوششی برای مجموعه A باشد، حال اندازه خارجی لبگ [۴] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum \ell(I_n); \quad A \subseteq \underbrace{\bigcup I_n}_{A\text{پوششی برای }} \quad , I_n = [a_n, b_n]\right\}$$

که در آن ℓ طول بازه موردنظر می‌باشد.
به m^* اندازه خارجی لبگ گویند.

اندازه m^* دارای دو خاصیت زیر است :
۱) $m^*(A) \leq \sum \ell(I_n)$
۲)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \exists \text{پوششی} \quad ; \sum \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon$$

با توجه به خاصیّت اول، درمی‌یابیم که چون اندازه خارجی هر مجموعه دلخواه مانند A از مجموع طول پوشش موردنظر برای مجموعه A کوچک‌تر است، لذا از خود طول بازه نیز کوچک‌تر می‌باشد، به این صورت که برای مجموعه دلخواه A داریم:

$$m^*(A) \leq \ell(A)$$

[۲] Metric Space
[۳] Open Cover
[۴] Lebesgue Outer Measure

۴.۱ تابع دم، توزیع‌های سنگین‌دم و تابع خطر

توزیع‌های آماری خواص و کاربردهای بسیار زیادی در علوم مختلف دارند، که از آن جمله از این خواص و کاربردها می‌توان به کاربرد این توزیع‌ها در مدیریت ریسک و بیمه اشاره داشت، به‌علاوه در بین تمام خانواده توزیع‌های آماری، وسیع‌ترین نوع خانواده از این توزیع‌ها، خانواده توزیع‌های سنگین‌دم می‌باشند.
به عنوان مثالی از کاربرد این نوع وسیع از خانواده توزیع‌های آماری، می‌توان به کاربرد این خانواده در کنترل کیفیت صنایع و بیمه که با ریسک سر و کار دارند، اشاره کرد. هرچه کارشناسان از خواص این خانواده وسیع (سنگین‌دم) از توزیع‌ها، و ارتباط آن‌ها اطلاعات بیش‌تری داشته باشند، می‌توانند مدیریت بهتری در بیمه نمودن ریسک‌ها داشته باشند.

توزیع‌های سنگین‌دم هم‌چنین نقش عمده‌ای را در تجزیه و تحلیل بسیاری از سیستم‌های تصادفی ایفا می‌کنند. برای مثال، این توزیع‌ها اغلب برای دقیق بودن ورودی‌های مدل به شبکه‌های کامپیوتری و ارتباطات، ضروری و مورد نیاز می‌باشند، آن‌ها هم‌چنین در بسیاری از فرآیندهای خطر یک بخش اساسی به‌شمار می‌آیند، به‌علاوه این نوع از توزیع‌ها، به‌طور طبیعی در توسعه و گسترش علم اپیدمیولوژیک [5] تأثیر مهمی را دارند و اغلب در مدل‌های گسترش اپیدمیولوژیک رخ می‌دهند و شواهد آماری زیادی برای تناسب آن‌ها در فیزیک، داده‌های علوم زمین و اقتصاد وجود دارد. به عنوان مثال‌هایی از این خانواده از توزیع‌ها، می‌توان به توزیع پارتو، توزیع لگ‌نرمال و توزیع وایبل (با پارامتر مکان کوچک‌تر از ۱) اشاره کرد.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی است، تابع دم F روی مجموعه اعداد حقیقی به ازای هر x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{\mathrm{F}}(x) = \mathrm{F}(x,\infty) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > x)$$

و هم‌چنین F برای هر x از راست بی‌کران است اگر:

$$\overline{\mathrm{F}}(x) > ۰$$

همان‌طور که از تعریف تابع دم برمی‌آید، این تابع برخلاف تابع توزیع تجمّعی، مقدار انباشتگی احتمال را در سمت راست نقطه x، از نمودار تابع چگالی احتمال توزیع مربوطه، محاسبه می‌نماید.

تعریف ۲.۴.۱. توزیع F را روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی، سنگین‌دم [6] می‌نامیم، اگر داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x}\, d(\mathrm{F}(x)) = \infty \qquad \forall \lambda > ۰$$

[5] همه‌گیرشناسی یا اپیدمیولوژی مطالعه نحوه انتشار بیماری‌ها و عوامل بیماری‌زا یا هر عاملی که به سلامت مربوط باشد، است. این اصطلاح ابتدا به مفهوم " علم بررسی همه‌گیری بیماری‌های عفونی " به کار برده شد، ولی امروزه با پیشرفت تمام علوم و از جمله علم پزشکی و کنترل بسیاری از همه‌گیری‌ها دامنه آن وسعت بیش‌تری پیدا کرده و به مفهوم " علم بررسی انتشار و علل بیماری‌ها " تلقی می‌گردد. امّا تعریفی که مورد پذیرش گروه زیادی از پژوهش‌گران قرار گرفته است عبارت‌اند از: " مطالعه چگونگی وقوع، انتشار و تعیین‌کننده‌های حالات و وقایع مربوط به سلامت در یک جمعیّت معین و استفاده از این دانش برای مدیریّت و سامان‌دهی مسائل بهداشتی".

[6] Heavy-tailed

خانواده تمام توزیع‌های سنگین‌دم را با $\mathcal{H}$ نمایش می‌دهیم.
از تعریف فوق درمی‌یابیم که، تابع توزیع F سنگین‌دم است، اگر تمام گشتاورهای نمایی مثبت آن نامتناهی باشد.

تعریف ۳.۴.۱. تابع چگالی احتمال $f \geq ۰$ سنگین‌دم است اگر و فقط اگر برای هر $\lambda > ۰$ داشته باشیم:

$$\limsup_{x\to\infty} f(x)e^{\lambda x} = \infty$$

با نگاه دقیق به تعریف فوق، این مطلب استنتاج می‌شود که برای سنگین‌دم بودن تابع f نیازی به وجود $\lim$ و حتی متناهی بودن آن نیست، بلکه فقط باید $\limsup$ تابع موردنظر، نامتناهی باشد.

تعریف ۴.۴.۱. توزیع F، سبک‌دم [۷] نامیده می‌شود اگر و فقط اگر برای مقدار $\lambda > ۰$ داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} d(\mathrm{F}(x)) < \infty \qquad (۱.۱)$$

به عبارت دیگر، توزیع F سبک‌دم نامیده می‌شود اگر و فقط اگر سنگین‌دم نباشد.

تمایز آشکار بین توزیع‌های سنگین‌دم و سبک‌دم، وجود داشتن و مقدار داشتن انتگرال‌های تعریف‌شده می‌باشد، به این ترتیب که در توزیع‌های سنگین‌دم انتگرال موردنظر مقدار دارد امّا وجود ندارد (چون برابر بی‌نهایت است)، ولی در توزیع‌های سبک‌دم انتگرال تعریف‌شده، متناهی است و وجود دارد.

تعریف ۵.۴.۱. برای هر توزیع F، تابع خطر [۸] توزیع F به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(x) := -\ln \overline{\mathrm{F}}(x)$$

اگر تابع خطر مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق $r(x) = R'(x)$ را نرخ خطر گوییم.

در لم زیر نانزولی بودن تابع خطر R را با توجه به تعریف اثبات می‌کنیم.

لم ۶.۴.۱. *تابع خطر R برای هر توزیع دلخواه F نانزولی است.*

برهان. چون تابع F نانزولی است، درنتیجه تابع $\overline{\mathrm{F}}$ نزولی است، لذا برای هر دو عدد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ داریم:

$$\begin{aligned}
&x_۱ \leq x_۲ \Longrightarrow \overline{\mathrm{F}}(x_۱) \geq \overline{\mathrm{F}}(x_۲),\\
&x_۱ \leq x_۲ \Longrightarrow \ln \overline{\mathrm{F}}(x_۱) \geq \ln \overline{\mathrm{F}}(x_۲),\\
&x_۱ \leq x_۲ \Longrightarrow -\ln \overline{\mathrm{F}}(x_۱) \leq -\ln \overline{\mathrm{F}}(x_۲),\\
&x_۱ \leq x_۲ \Longrightarrow R(x_۱) \leq R(x_۲).
\end{aligned}$$

[۷] Light-tailed

[۸] Hazard Function

بنابراین تابع خطر R نانزولی است. $\square$

به‌علاوه داریم:

$$R(x+1)-R(x)=\ln\overline{\mathrm{F}}(x)-\ln\overline{\mathrm{F}}(x+1)=\ln\frac{\overline{\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x+1)}$$

هم‌چنین

$$R(x)-R(x+1)=\ln\overline{\mathrm{F}}(x+1)-\ln\overline{\mathrm{F}}(x)=\ln\frac{\overline{\mathrm{F}}(x+1)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}$$

حال با ضرب کردن برابری دوم در عدد -1 نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$R(x+1)-R(x)=-\ln\frac{\overline{\mathrm{F}}(x+1)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}.$$

قضیه ۷.۴.۱. *برای هر توزیع F گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱) F *یک توزیع سنگین‌دم است.*

۲) *تابع* $\overline{\mathrm{F}}$ *سنگین‌دم است.*

۳) *برای تابع خطر متناظر* R*، نتیجه زیر برقرار است:*

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{R(x)}{x}=0$$

۴) *برای هر ثابت* $T>0$*، تابع* $\mathrm{F}(x,x+T]$ *سنگین‌دم است.*

برهان. $4\to1$: (اثبات با استفاده از عکس نقیض). فرض کنید تابع $\mathrm{F}(x,x+T]$ سنگین‌دم نباشد، آن‌گاه برای بعضی $\lambda'>0$ تعریف می‌کنیم:

$$c:=\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathrm{F}(x,x+T]e^{\lambda' x}<\infty$$

بنابراین برای هر $\lambda<\lambda'$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\lambda x}d(\mathrm{F}(x))&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}e^{\lambda x}d(\mathrm{F}(x))\\&\le\sum_{n=0}^{\infty}e^{\lambda(n+1)T}\int_{nT}^{(n+1)T}d(\mathrm{F}(x))\\&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\lambda(n+1)T}\mathrm{F}(nT,nT+T]\\&\le c\sum_{n=0}^{\infty}e^{\lambda(n+1)T}e^{-\lambda' nT}=ce^{\lambda T}\sum_{n=0}^{\infty}e^{(\lambda-\lambda')nT}<\infty\end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که انتگرال تعریف‌شده برای تابع F متناهی است و در نتیجه توزیع F سنگین‌دم نمی‌باشد. پس حکم برقرار است.

$۲ \to ۴$: چون تابع $\mathrm{F}(x, x+T]$ سنگین‌دم است و به‌علاوه $\overline{\mathrm{F}}(x) \geq \mathrm{F}(x, x+T]$، پس تابع $\overline{\mathrm{F}}(x)$ سنگین‌دم است.

$۳ \to ۲$: فرض کنید به برهان خلف، $\liminf$ تعریف‌شده در قسمت (۳) اکیداً مثبت باشد، پس یک $x_۰ > ۰$ و $\varepsilon > ۰$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x \geq x_۰$، $R(x) \geq \varepsilon x$.

در نتیجه با توجه به تعریف تابع مخاطره داریم:

$$R(x) = -\ln \overline{\mathrm{F}}(x) \Longrightarrow -\ln \overline{\mathrm{F}}(x) \geq \varepsilon x \Longrightarrow \overline{\mathrm{F}}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$$

که رابطه آخر به این علت که یک تابع سنگین‌دم به وسیله تابع نمایی محدود شده است با حکم (۲) در تناقض می‌باشد. پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است.

$۱ \to ۳$: فرض می‌کنیم به برهان خلف که توزیع F سنگین‌دم نباشد، لذا سبک‌دم است. بنابراین با توجه به رابطه (۱.۱) برای بعضی مقادیر $\lambda > ۰$ داریم:

$$\overline{\mathrm{F}}(x) \leq e^{-\lambda x} \Longrightarrow -\ln \overline{\mathrm{F}}(x) \geq -\ln e^{-\lambda x} = \lambda x \Longrightarrow R(x) \geq \lambda x$$

در نتیجه با $\liminf$ گرفتن از طرفین آخرین رابطه داریم:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x} \geq \lambda$$

که با قسمت (۳) در تناقض است، پس حکم صحیح می‌باشد. □

با توجه به قضیه ۷.۴.۱ که بیان می‌کند یک توزیع سنگین‌دم است اگر و تنها اگر تابع دم آن یک تابع سنگین‌دم باشد و همچنین تعریف تابع سنگین‌دم و اینکه تابع $\overline{\mathrm{F}} \geq ۰$، نتیجه می‌شود که هر توزیع سنگین‌دم از راست بی‌کران است.

همچنین با توجه به تعریف تابع سنگین‌دم می‌توان دریافت که یک تابع نامنفی سنگین‌دم است اگر و تنها اگر نتوان آن را توسط هیچ تابع نمایی کاهشی محدود کرد.

لذا با توجه به این مطالب نتیجه می‌شود که توزیع F سنگین‌دم است اگر وتنها اگر نتوان تابع دم آن را توسط هیچ تابع نمایی کاهشی محدود کرد.

۵.۱ توزیع‌های درازدم، توزیع‌های زیرنمایی و مفهوم پیچش

تعریف ۱.۵.۱. توزیع F روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی درازدم [۹] است، اگر F از راست بی‌کران باشد و برای هر ثابت $y \neq ۰$ داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}}(x+y)}{\overline{\mathrm{F}}(x)} = ۱$$

[۹] Long-tailed

خانواده تمام توزیع‌های درازدم را با $\mathcal{L}$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعریف توزیع درازدم، می‌توان نتیجه گرفت که چون درازدمی خاصیتی است که در دم‌های توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد، لذا اگر توزیعی درازدم باشد، به این معنی است که احتمال انباشتگی دمی از نقطه x تا بی‌نهایت، فرق چندانی با احتمال انباشتگی دمی در زمانی که مقدار ناصفر y به x اضافه شود، ندارد.

تعریف ۱.۵.۲. تابع مثبت f درازدم است اگر و تنها اگر برای هر $y \neq ۰$ داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+y)}{f(x)} = ۱.$$

تعریف ۱.۵.۳. پیچش [۱۰] دو تابع توزیع F و G را با $\mathrm{F} * \mathrm{G}$ نشان می‌دهیم و برای هر مجموعه بورل مانند B به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathrm{F} * \mathrm{G})(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(B-y)\mathrm{G}(dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(B-y)\mathrm{F}(dy)$$

که $B - y = \{x - y : x \in B\}$.

اگر در فضای احتمالی با اندازه‌ی احتمال P، ξ و η متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های به ترتیب F و G باشند، آن‌گاه $(\mathrm{F} * \mathrm{G})(B) = \mathrm{P}\{\xi + \eta \in B\}$. به‌علاوه تابع دم پیچش یا پیچش دمی دو تابع توزیع F و G برای هر $x \in \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{\mathrm{F} * \mathrm{G}}(x) = \mathrm{P}\{\xi + \eta > x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathrm{F}}(x-y)\mathrm{G}(dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathrm{G}}(x-y)\mathrm{F}(dy)$$

تعریف ۱.۵.۴. توزیع F روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت، زیرنمایی [۱۱] است، اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)} = ۲$$

خانواده تمام توزیع‌های زیرنمایی را با $\mathcal{S}$ نمایش می‌دهیم.

در حالت خاص رابطه‌ی بین توزیع‌های سنگین‌دم، درازدم و زیرنمایی به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$$

تعریف ۱.۵.۵. برای هر عدد حقیقی x، x^+ و x^- را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^+ = \max\{۰, x\}$$

$$x^- = -\min\{۰, x\}$$

در ادامه این بخش، دو قضیه را مطرح می‌کنیم و خاصیتی از خانواده توزیع‌های زیرنمایی را بیان می‌کنیم.

[۱۰] Convolutions

[۱۱] Subexponential

قضیه ۱.۵.۶. *فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل و متناظر با توزیع‌های به ترتیب F_1 و F_2 باشند. اگر تابع توزیع $F \in \mathcal{S}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای مقدار $l_i > 0$، برای $i = 1, 2$ رابطه*

$$\overline{F_i}(x) \sim l_i \overline{F}(x)$$

برقرار باشد، آن‌گاه برای هر ثابت $0 < a \leq b < \infty$ رابطه

$$P\left(X_1 + cX_2 > x\right) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}\left(\frac{x}{c}\right)$$

به‌طور یکنواخت برای $c \in [a, b]$ برقرار می‌باشد.

برهان. به [۱۳] مراجعه شود. □

اکنون قضیه زیر را مطرح می‌کنیم که تعمیمی از نتیجه فوق می‌باشد.

قضیه ۱.۵.۷. *فرض کنید $\{X_k; 1 \leq k \leq n\}$، n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک $F \in \mathcal{S}$ باشند. آن‌گاه برای هر ثابت $0 < a \leq b < \infty$ رابطه*

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} c_k X_k > x\right) \sim \sum_{k=1}^{n} \overline{F}\left(\frac{x}{c_k}\right) \tag{۱.۲}$$

به‌طور یکنواخت برای $\underline{c_n} \in [a, b]^n$ برقرار است که در این قسمت منظور از بردار $\underline{c_n}$، بردار nتایی $\underline{c_n} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$ می‌باشد.

برهان. قضیه را به روش استقراء اثبات می‌کنیم:
بدیهی است که رابطه (۱.۲) برای $n = 1$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم که رابطه (۱.۲) برای $n = m$، که m عددی صحیح و مثبت است، برقرار باشد. بنابراین باید نشان دهیم که رابطه

$$P\left(\sum_{k=1}^{m+1} c_k X_k > x\right) \sim \sum_{k=1}^{m+1} \overline{F}\left(\frac{x}{c_k}\right) \tag{۱.۳}$$

به‌طور یکنواخت برای $\underline{c_{m+1}} \in [a, b]^{m+1}$ برقرار می‌باشد.
رابطه (۱.۳) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$P\left(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k + c_{m+1} X_{m+1} > x\right) \sim \sum_{k=1}^{m} P\left(c_k X_k > x\right) + P\left(c_{m+1} X_{m+1} > x\right) \tag{۱.۴}$$

حال طرفین رابطه (۱.۴) را بر c_{m+1} تقسیم می‌کنیم، در نتیجه:

$$P\left(\sum_{k=1}^{m} c'_k X_k + X_{m+1} > x'\right) \sim \sum_{k=1}^{m} P\left(c'_k X_k > x'\right) + P\left(X_{m+1} > x'\right) \tag{۱.۵}$$

که در رابطه (۱.۵)، $c'_k = \frac{c_k}{c_{m+1}}$ و $x' = \frac{x}{c_{m+1}}$ می‌باشند.
به وضوح مشاهده می‌کنیم که $c_{m+1} \in [a, b]$ و برای هر $1 \leq k \leq m$ داریم:

$$\underbrace{a \leq c_k \leq b}_{(*)} \quad \text{و} \quad \underbrace{a \leq c_{m+1} \leq b}_{(**)}$$

در نتیجه با در نظر گرفتن روابط (*) و (**) داریم:

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{c_{m+1}} \leq \frac{1}{a} \Longrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c_k}{b} \leq \frac{c_k}{c_{m+1}} \leq \frac{c_k}{a} \leq \frac{b}{a}$$

و در نهایت:

$$0 < \frac{a}{b} \leq c'_k \leq \frac{b}{a} < \infty$$

بنابراین بدون از دست دادن کلیّت مسأله می‌توانیم فرض کنیم که در رابطه (۳.۱)، $c_{m+1} = 1$ باشد. در نتیجه کافی است که ثابت کنیم رابطه

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k \mathrm{X}_k + \mathrm{X}_{m+1} > x\right) \sim \sum_{k=1}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + \overline{\mathrm{F}}(x) \tag{۶.۱}$$

به‌طور یکنواخت برای $\underline{c_m} \in [a,b]^m$ برقرار است.

برای هر $\varepsilon > 0$ توسط فرض استقراء، مقدار ثابت $B_1 > 0$ وجود دارد به‌طوری که نامعادلات:

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k > x\right) \leq \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k \mathrm{X}_k > x\right) \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k > x\right) \tag{۷.۱}$$

به‌طور یکنواخت برای $\underline{c_m} \in [a,b]^m$ و $x \geq B_1$ برقرار می‌باشد.

اکنون احتمال سمت چپ رابطه (۶.۱) را با توجه به تعریف پیچش، به‌صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$L_1 + L_2 = \left(\int_{-\infty}^{x-B_1} + \int_{x-B_1}^{\infty}\right) \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k \mathrm{X}_k > x-t\right) \mathrm{F}(dt).$$

در ابتدا L_1 را بررسی می‌کنیم، برای این منظور با توجه به رابطه (۷.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
L_1 &\leq (1+\varepsilon)\int_{-\infty}^{x-B_1} \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k > x-t\right) \mathrm{F}(dt) \\
&= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+1} > x, \mathrm{X}_{m+1} \leq x - B_1\right) && (1) \\
&\leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \left(\mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+1} > x\right) - \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+1} > x, \mathrm{X}_{m+1} > x\right)\right) && (2) \\
&= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+1} > x\right) - (1+\varepsilon)m\overline{\mathrm{F}}(x). && (۸.۱)
\end{aligned}$$

که در روابط فوق برابری (۱) با توجه به تعریف پیچش و همچنین با توجه به این که تابع توزیع هر X_k متعلق به خانواده توزیع‌های زیرنمایی می‌باشد، به‌دست می‌آید، همچنین نامساوی (۲) با توجه به فضاهای مربوط به متغیرهای تصادفی حاصل می‌شود.

به‌طور مشابه:

$$L_۱ \geq (۱-\varepsilon)\int_{-\infty}^{x-B_۱} \sum_{k=۱}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k > x-t\right) \mathrm{F}(dt)$$
$$= (۱-\varepsilon)\sum_{k=۱}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x, \mathrm{X}_{m+۱} \leq x-B_۱\right)$$
$$\geq (۱-\varepsilon)\sum_{k=۱}^{m} \left(\mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{m+۱} > x-B_۱\right)\right) \quad (۳)$$
$$= (۱-\varepsilon)\sum_{k=۱}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) - (۱-\varepsilon) m \overline{\mathrm{F}}(x-B_۱). \quad (۹.۱)$$

که در آن نامساوی (۳) با در نظر گرفتن $A = \left[c_k \mathrm{X_k}^{+} + \mathrm{X_{m+۱}} > x\right]$ و $B = \left[\mathrm{X_{m+۱}} \leq x - B_۱\right]$ و روابط ساده احتمالی به‌دست می‌آید.

حال در ادامه، بقیه اثبات را معطوف به کلاس بزرگ‌تری می‌کنیم و تمام روابط را در این کلاس بزرگ‌تر در نظر می‌گیریم. با توجه به این که $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ است، لذا نتیجه موردنظر را در آخر می‌توان به کلاس کوچک‌تر نسبت داد.

با توجه به قضیه ۶.۵.۱ و این که $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ است، مقدار ثابت $B_۲ > ۰$ وجود دارد به‌طوری که نامعادلات:

$$(۱-\varepsilon)\left(\overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + \overline{\mathrm{F}}(x)\right) \leq \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right)$$
$$\leq (۱+\varepsilon)\left(\overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + \overline{\mathrm{F}}(x)\right) \quad (۱۰.۱)$$

و

$$\overline{\mathrm{F}}(x-B_۱) \leq (۱+\varepsilon)\overline{\mathrm{F}}(x), \quad (۱۱.۱)$$

به‌طور یکنواخت برای $\underline{c_m} \in [a,b]^m$ و $x \geq B_۲$ برقرار می‌باشند.

حال با جایگزینی روابط (۱۰.۱) و (۱۱.۱) در روابط (۸.۱) و (۹.۱) به نتیجه زیر می‌رسیم:

طبق رابطه (۱۰.۱) و (۱۱.۱) نتایج زیر را داریم:

$$(۱+\varepsilon)\sum_{k=۱}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) \leq (۱+\varepsilon)^۲ \left[\sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + m\overline{\mathrm{F}}(x)\right], \quad (۱۲.۱)$$

و

$$(۱-\varepsilon)\sum_{k=۱}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) \geq (۱-\varepsilon)^۲ \left[\sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + m\overline{\mathrm{F}}(x)\right], \quad (۱۳.۱)$$

هم‌چنین

$$\overline{\mathrm{F}}(x-B_۱) \leq (۱+\varepsilon)\overline{\mathrm{F}}(x) \Longrightarrow -(۱-\varepsilon)m\overline{\mathrm{F}}(x-B_۱) \geq -(۱-\varepsilon^۲)m\overline{\mathrm{F}}(x). \quad (۱۴.۱)$$

بنابر رابطه (۸.۱) و (۱۲.۱) داریم:

$$\begin{aligned} L_{۱} &\leq (۱+\varepsilon)\sum_{k=۱}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) - (۱+\varepsilon)m\overline{\mathrm{F}}(x) \\ &\leq (۱+\varepsilon)^{۲}\sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + \underbrace{(۱+\varepsilon)^{۲}m\overline{\mathrm{F}}(x) - (۱+\varepsilon)m\overline{\mathrm{F}}(x)}_{(\varepsilon+\varepsilon^{۲})m\overline{\mathrm{F}}(x)} \qquad (۱۵.۱) \end{aligned}$$

و به‌علاوه بنابر روابط (۹.۱)، (۱۳.۱) و (۱۴.۱) داریم:

$$\begin{aligned} L_{۱} &\geq (۱-\varepsilon)\sum_{k=۱}^{m} \mathrm{P}\left(c_k \mathrm{X}_k^{+} + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) - (۱-\varepsilon)m\overline{\mathrm{F}}(x-B_{۱}) \\ &\geq (۱-\varepsilon)^{۲}\sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + (۱-\varepsilon)^{۲}m\overline{\mathrm{F}}(x) - (۱-\varepsilon)m\overline{\mathrm{F}}(x-B_{۱}) \\ &\geq (۱-\varepsilon)^{۲}\sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + \underbrace{(۱-\varepsilon)^{۲}m\overline{\mathrm{F}}(x) - (۱-\varepsilon^{۲})m\overline{\mathrm{F}}(x)}_{-۲(\varepsilon-\varepsilon^{۲})m\overline{\mathrm{F}}(x)} \qquad (۱۶.۱) \end{aligned}$$

در نتیجه با ادغام روابط (۱۵.۱) و (۱۶.۱) به‌دست می‌آید که:

$$\begin{aligned} (۱-\varepsilon)^{۲}\sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) - ۲(\varepsilon-\varepsilon^{۲})m\overline{\mathrm{F}}(x) \leq L_{۱} \\ \leq (۱+\varepsilon)^{۲}\sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + (\varepsilon+\varepsilon^{۲})m\overline{\mathrm{F}}(x). \qquad (۱۷.۱) \end{aligned}$$

اکنون $L_{۲}$ را بررسی می‌کنیم. از یک طرف، با توجه به تعریف $L_{۲}$ و همچنین رابطه (۱۱.۱) برای هر $x \geq B_{۲}$ داریم:

$$L_{۲} \leq \overline{\mathrm{F}}(x-B_{۱}) \leq (۱+\varepsilon)\overline{\mathrm{F}}(x). \qquad (۱۸.۱)$$

از طرف دیگر، می‌توان مقادیر $C > ۰$ و $B_{۳} > ۰$ را انتخاب کرد به‌طوری که روابط زیر به‌طور یکنواخت برای $\underline{c_m} \in [a,b]^m$ و $x \geq B_{۳}$ برقرار باشند:

$$\begin{aligned} L_{۲} &\geq \int_{x-B_{۱}}^{\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{m} c_k \min\{\mathrm{X}_k, ۰\} > x-t\right)\mathrm{F}(dt) && (۴) \\ &\geq \int_{x+C}^{\infty} \mathrm{P}\left(b\sum_{k=۱}^{m} \min\{\mathrm{X}_k, ۰\} > x-t\right)\mathrm{F}(dt) && (۵) \\ &\geq \mathrm{P}\left(b\sum_{k=۱}^{m} \min\{\mathrm{X}_k, ۰\} > -C\right)\overline{\mathrm{F}}(x+C) && (۶) \\ &\geq (۱-\varepsilon)^{۲}\overline{\mathrm{F}}(x). && (۷) \qquad (۱۹.۱) \end{aligned}$$

در روابط فوق، رابطه (۴) با توجه به مثبت یا منفی بودن $\mathrm{X_k}$ها و همچنین رابطه (۵) با توجه به بازه مربوط به c_mها نتیجه می‌شود. به‌علاوه رابطه (۶) از قرار دادن کران پایین در انتگرالده و محاسبه انتگرال باقی‌مانده به‌دست می‌آید. در نهایت مقدار C را طوری انتخاب می‌کنیم که عبارت (۶) بزرگ‌تر از $(۱-\varepsilon)^۲$ شود، و با توجه به این که $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ می‌باشد، $\overline{\mathrm{F}}(x+C)$ تقریباً معادل $\overline{\mathrm{F}}(x)$ خواهد بود.

روابط (۱۸.۱) و (۱۹.۱) نشان می‌دهد که برای هر $x \geq \max\{B_۲, B_۳\}$ و $\underline{c_m} \in [a,b]^m$ داریم:

$$(۱-\varepsilon)^۲\overline{\mathrm{F}}(x) \leq L_۲ \leq (۱+\varepsilon)\overline{\mathrm{F}}(x). \tag{۲۰.۱}$$

در نهایت با ترکیب روابط (۱۷.۱) و (۲۰.۱) نامعادلات:

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{m} c_k\mathrm{X}_k + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) \geq (۱-\varepsilon)^۲ \sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) - \left(۲\varepsilon m - ۲\varepsilon^۲ m - (۱-\varepsilon)^۲\right)\overline{\mathrm{F}}(x)$$

و

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{m} c_k\mathrm{X}_k + \mathrm{X}_{m+۱} > x\right) \leq (۱+\varepsilon)^۲ \sum_{k=۱}^{m} \overline{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{c_k}\right) + \left(\varepsilon m + \varepsilon^۲ m + \varepsilon + ۱\right)\overline{\mathrm{F}}(x)$$

به‌طور یکنواخت برای $\underline{c_m} \in [a,b]^m$ و $x \geq \max\{B_۱, B_۲, B_۳\}$ برقرار می‌باشند.

در نتیجه با توجه به دلخواه بودن ε، رابطه (۶.۱) اثبات می‌شود. □

قضیه فوق این مطلب را به اثبات رسانید که در خانواده توزیع‌های زیرنمایی، احتمال مجموع متغیرهای تصادفی مستقل با مجموع احتمالات این متغیرها هم‌ارز است.

با توجه به تعریف خانواده توزیع‌های زیرنمایی و برای درک بهتر آن فرض می‌کنیم $\xi_۱$ و $\xi_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل، متناظر با توزیع مشترک F باشند، آنگاه تعریف زیرنمایی بودن که در بالا ذکر شد، معادل است با این که:

$$\mathrm{P}\{\xi_۱ + \xi_۲ > x\} \sim ۲\mathrm{P}\{\xi_۱ > x\}$$

لذا رابطه فوق معادل این است که بنویسیم:

$$\mathrm{P}\{\xi_۱ > x | \xi_۱ + \xi_۲ > x\} \longrightarrow \frac{۱}{۲}$$

به‌علاوه هم‌ارزی زیر را نیز داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{\max(\xi_۱,\xi_۲) > x\} &= ۱ - \mathrm{P}\{\max(\xi_۱,\xi_۲) \leq x\} \\
&= ۱ - \left[\underbrace{\mathrm{P}(\xi_۱ \leq x)}_{\mathrm{F}_{\xi_۱}(x)}\underbrace{\mathrm{P}(\xi_۲ \leq x)}_{\mathrm{F}_{\xi_۲}(x)}\right] \\
&= ۱ - \mathrm{P}^۲\{\xi_۱ \leq x\} = ۱ - (۱ - \mathrm{P}\{\xi_۱ > x\})^۲ \\
&= ۲\mathrm{P}\{\xi_۱ > x\} - \mathrm{P}^۲\{\xi_۱ > x\}
\end{aligned}$$

در رابطه فوق اگر $x \to \infty$، آن‌گاه $\mathrm{P}\{\xi_1 > x\}$ به سمت صفر میل می‌کند و با توجه به این که در رابطه فوق توان دو را داریم، لذا سرعت صفر شدن $\mathrm{P}^2\{\xi_1 > x\}$ خیلی سریع‌تر می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\mathrm{P}\{\max(\xi_1, \xi_2) > x\} \sim 2\mathrm{P}\{\xi_1 > x\}$$

با توجه به روابط فوق نتیجه می‌گیریم که توزیع F متعلق به خانواده توزیع‌های زیرنمایی است اگر و فقط اگر:

$$\mathrm{P}\{\xi_1 + \xi_2 > x\} \sim \mathrm{P}\{\max(\xi_1, \xi_2) > x\}$$

حال تعریف زیرنمایی بودن را برای حالت n متغیر تصادفی تعمیم می‌دهیم:

فرض کنید F توزیعی دلخواه روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^+$ و $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع مشترک F باشند، با استدلالی شبیه به استدلال فوق می‌توان نشان داد که اگر توزیع F روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^+$ زیرنمایی باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر نیز برقرار است:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}^{*n}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)} = n \quad \forall n \geq 1$$

در این‌جا منظور از $\overline{\mathrm{F}^{*n}}(x)$ همان n برابر پیچش توزیع F نسبت به خودش است، به این معنی که:

$$\underbrace{\mathrm{F} * \mathrm{F} * \cdots * \mathrm{F}}_{n\text{بار}}$$

همانند حالت دو متغیر ξ_1 و ξ_2 داریم:

$$\mathrm{P}\{(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) > x\} \sim \mathrm{P}\{\max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > x\} \tag{۱.۲۱}$$

تفسیر و آن‌چه از رابطه (۱.۲۱) می‌توان برداشت کرد این است که، تنها راه قابل توجهی که در آن مجموع $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ می‌تواند از مقدار x بزرگ‌تر باشد این است که، حداکثر یکی از متغیرهای $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ نیز بزرگ‌تر از x باشد.

لذا برای احتمال سمت راست رابطه (۱.۲۱) داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{\max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > x\} &= 1 - \mathrm{P}\{\max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq x\} \\
&= 1 - [\mathrm{P}(\xi_1 \leq x)\,\mathrm{P}(\xi_2 \leq x)\ldots\mathrm{P}(\xi_n \leq x)] \\
&= 1 - \mathrm{F}^n(x)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{\max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > x\} &= \mathrm{P}(\xi_1 > x) + \mathrm{P}(\xi_2 > x) + \cdots + \mathrm{P}(\xi_n > x) \\
&= n\overline{\mathrm{F}}(x)
\end{aligned}$$

در نتیجه همانند حالت دو متغیر ξ_1 و ξ_2 داریم:

$$\mathrm{P}\left\{(\xi_۱+\xi_۲+\cdots+\xi_n)>x\right\}\sim \mathrm{P}\left\{\max\left(\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n\right)>x\right\}\sim n\overline{\mathrm{F}}(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}^{*n}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}=n \quad \forall n\geq ۱$$

به‌علاوه همواره رابطه زیر نیز صادق است:

$$\mathrm{P}\left\{(\xi_۱+\xi_۲+\cdots+\xi_n)>x\right\}\geq \mathrm{P}\left\{\max\left(\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n\right)>x\right\}$$

لذا اگر در رابطه فوق $n=۲$ را در نظر بگیریم و سپس با گرفتن $\liminf$، داریم:

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}*\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}\geq ۲ \tag{۲۲.۱}$$

۶.۱ قضایا و خواص توزیع‌های سنگین‌دم

در قضیه دوم از این بخش نشان می‌دهیم که اگر F سنگین‌دم باشد، آن‌گاه رابطه‌ی (۲۲.۱) به تساوی تبدیل می‌شود، یعنی:

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}*\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}=۲$$

در تساوی فوق $\limsup$ ممکن است هر عددی بزرگ‌تر از ۲ یا حتی ∞ باشد.
هم‌چنین $\liminf$ تعریف‌شده در بالا برای هر توزیع روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^+$ نمی‌تواند کوچک‌تر از ۲ باشد.

قضیه ۱.۶.۱. *فرض کنید $\xi\geq ۰$ یک متغیر تصادفی با توزیع سنگین‌دم باشد. فرض کنید تابع $g(x)$ به‌صورتی باشد که وقتی $x\to\infty$ میل کند، آن‌گاه $g(x)\to\infty$. در این صورت یک تابع مقعر یکنواخت $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ وجود دارد به‌طوری که $h(x)=o(x)$، $\mathbb{E}e^{h(\xi)}<\infty$ و $\mathbb{E}e^{h(\xi)+g(\xi)}=\infty$.*

برهان. به [۶] مراجعه شود. □

قضیه ۲.۶.۱. *فرض کنید F توزیعی سنگین‌دم روی مجموعه $\mathbb{R}^+$ باشد، در این صورت رابطه*

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}*\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}=۲$$

برقرار است.

برهان. با توجه به رابطه (۲۲.۱) داریم:

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}*\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}\geq ۲$$

حال کافی است ثابت کنیم:

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}*\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)}\leq ۲$$

فرض کنید خلاف حکم صادق باشد یعنی $\delta > ۰$ و $x_۰$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x > x_۰$:

$$\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}(x) \geq (۲ + \delta)\overline{\mathrm{F}}(x) \qquad (۲۳.۱)$$

حال با به‌کارگیری قضیه ۱.۶.۱ و با در نظر گرفتن $g(x) = \ln x$ می‌توان یک تابع مقعر افزایشی $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ انتخاب کرد به‌طوری که $\mathbb{E}e^{h(\xi)} < \infty$ و $\mathbb{E}\xi e^{h(\xi)} = \infty$.
برای هر $b > ۰$، تابع مقعر $h_b(x)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$h_b(x) := \min(h(x), bx)$$

از آن‌جا که توزیع F سنگین‌دم است و $h(x) = o(x)$، لذا برای هر b ثابت، $x_۱$ای وجود دارد به‌طوری که برای هر $x > x_۱$، $h_b(x) = h(x)$. از این رو $\mathbb{E}e^{h_b(\xi)} < \infty$ و $\mathbb{E}\xi e^{h_b(\xi)} = \infty$. برای هر x، زمانی که $b \downarrow ۰$ آن‌گاه $h_b(x) \downarrow ۰$ همگرا می‌شود. بنابراین زمانی که $b \downarrow ۰$، $\mathbb{E}e^{h_b(\xi_۱)} \downarrow ۱$.
بنابراین bای وجود دارد به‌طوری که:

$$\mathbb{E}e^{h_b(\xi_۱)} \leq ۱ + \frac{\delta}{۴} \qquad (۲۴.۱)$$

در ادامه برای هر a و t حقیقی قرار می‌دهیم: $a^{[t]} = \min(a, t)$.
در نتیجه با توجه به مقعر بودن تابع h_b داریم:

$$\mathbb{E}\left(\xi_۱^{[t]} + \xi_۲^{[t]}\right) e^{h_b(\xi_۱+\xi_۲)} = ۲\mathbb{E}\xi_۱^{[t]} e^{h_b(\xi_۱+\xi_۲)} \leq ۲\mathbb{E}\xi_۱^{[t]} e^{h_b(\xi_۱)+h_b(\xi_۲)}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}\left(\xi_۱^{[t]} + \xi_۲^{[t]}\right) e^{h_b(\xi_۱+\xi_۲)}}{\mathbb{E}\xi_۱^{[t]} e^{h_b(\xi_۱)}} &\leq ۲\frac{\mathbb{E}\xi_۱^{[t]} e^{h_b(\xi_۱)}\mathbb{E}e^{h_b(\xi_۲)}}{\mathbb{E}\xi_۱^{[t]} e^{h_b(\xi_۱)}} \\ &= ۲\mathbb{E}e^{h_b(\xi_۲)} \leq ۲ + \frac{\delta}{۲}\end{aligned} \qquad (۲۵.۱)$$

نامساوی آخر با توجه به رابطه (۲۴.۱) نتیجه می‌شود.
از طرف دیگر، با توجه به نامساوی $\min(x+y, z) \leq \min(x, z) + \min(y, z)$، به دلیل این که $(\xi_۱ + \xi_۲)^{[t]} \leq \xi_۱^{[t]} + \xi_۲^{[t]}$ است، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}\left(\xi_۱^{[t]} + \xi_۲^{[t]}\right) e^{h_b(\xi_۱+\xi_۲)}}{\mathbb{E}\xi_۱^{[t]} e^{h_b(\xi_۱)}} &\geq \frac{\mathbb{E}(\xi_۱ + \xi_۲)^{[t]} e^{h_b(\xi_۱+\xi_۲)}}{\mathbb{E}\xi_۱^{[t]} e^{h_b(\xi_۱)}} \\ &= \frac{\int_۰^\infty x^{[t]} e^{h_b(x)} d\left((\mathrm{F} * \mathrm{F})(x)\right)}{\int_۰^\infty x^{[t]} e^{h_b(x)} d\left(\mathrm{F}(x)\right)}\end{aligned} \qquad (۲۶.۱)$$

برای رابطه (۲۶.۱) بعد از انتگرال‌گیری جزء به جزء به‌صورت زیر داریم:
در رابطه (۲۶.۱) برای صورت کسر، u و dv را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} u &= x^{[t]} e^{h_b(x)} && \Rightarrow du = d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right) \\ dv &= d\left((\mathrm{F} * \mathrm{F})(x)\right) && \Rightarrow v = (\mathrm{F} * \mathrm{F})(x) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & x^{[t]} e^{h_b(x)} (\mathrm{F} * \mathrm{F})(x) - \int_0^\infty (\mathrm{F} * \mathrm{F})(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right) = \\ & x^{[t]} e^{h_b(x)} (\mathrm{F} * \mathrm{F})(x) - \int_0^\infty \left(1 - \left(\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}\right)(x)\right) d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right) = \\ & x^{[t]} e^{h_b(x)} (\mathrm{F} * \mathrm{F})(x) - \int_0^\infty d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right) + \int_0^\infty \left(\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}\right)(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right) = \\ & x^{[t]} e^{h_b(x)} (\mathrm{F} * \mathrm{F})(x) - x^{[t]} e^{h_b(x)} + \int_0^\infty \left(\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}\right)(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right) = \\ & x^{[t]} e^{h_b(x)} \left[(\mathrm{F} * \mathrm{F}(x)) - 1\right] + \int_0^\infty \left(\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}\right)(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right) \end{aligned} \tag{۲۷.۱}$$

در آخرین معادله‌ی رابطه (۲۷.۱) در مورد $x^{[t]} e^{h_b(x)} \left[(\mathrm{F} * \mathrm{F}(x)) - 1\right]$ با توجه به $x^{[t]} = \min(x, t)$ می‌توان گفت زمانی که $x \to \infty$، آن‌گاه $x^{[t]} = t$ و $\mathrm{F} * \mathrm{F}(x) \to 1$ و زمانی که $x \to 0$، $x^{[t]} e^{h_b(x)} = 0$. پس در هر دو حالت $x^{[t]} e^{h_b(x)} \left[(\mathrm{F} * \mathrm{F}(x)) - 1\right] = 0$ می‌باشد. در نتیجه صورت کسر رابطه (۲۶.۱) برابر است با:

$$\int_0^\infty \left(\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}\right)(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)$$

و نیز مخرج کسر رابطه (۲۶.۱) به‌طور مشابه برابر است با:

$$\int_0^\infty \overline{\mathrm{F}}(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)$$

پس به‌طور کلی رابطه (۲۶.۱) برابر است با:

$$\frac{\int_0^\infty x^{[t]} e^{h_b(x)} (\mathrm{F} * \mathrm{F})(dx)}{\int_0^\infty x^{[t]} e^{h_b(x)} \mathrm{F}(dx)} = \frac{\int_0^\infty \left(\overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}\right)(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)}{\int_0^\infty \overline{\mathrm{F}}(x)\, d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)}$$

چون $\mathbb{E}\xi_1 e^{h_b(\xi_1)} = \infty$، در بخش دوم زمانی که $t \to \infty$، با توجه به تعریف توزیع‌های سنگین‌دم، هر دو انتگرال در صورت و مخرج کسر سمت راست رابطه فوق، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، لذا به $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم که باید رفع ابهام شود. برای همین منظور در مورد تابع صعودی $h_b(x)$ با توجه به فرض (۲۳.۱) نتیجه زیر را داریم:

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{\int_0^\infty \overline{\mathrm{F} * \mathrm{F}}(x) d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)}{\int_0^\infty \overline{\mathrm{F}}(x) d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)} \geq (2 + \delta) \liminf_{t \to \infty} \frac{\int_0^\infty \overline{\mathrm{F}}(x) d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)}{\int_0^\infty \overline{\mathrm{F}}(x) d\left(x^{[t]} e^{h_b(x)}\right)} = 2 + \delta$$

با جایگزین کردن رابطه فوق در (۲۶.۱)، تناقضی با رابطه (۲۵.۱) برای tهای به اندازه کافی بزرگ ایجاد می‌شود، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

در حالت خاص اگر توزیع F روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^+$ سنگین‌دم و رابطه‌ی زیر نیز برقرار باشد:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}*\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{F}}(x)} = c$$

که $c \in (۰,\infty)$، آنگاه با توجه به قضیه ۲.۶.۱، برای توزیع F، $\liminf$ باید برابر ۲ باشد، حال با توجه به این مطلب که زمانی $\lim$ وجود دارد که $\liminf = \limsup$ باشد، در نتیجه برای توزیع سنگین‌دم F و با توجه به وجود داشتن $\lim$ فوق، باید $\limsup$ نیز برابر ۲ باشد، لذا لزوماً باید $c = ۲$ باشد، که همان تعریف توزیع زیرنمایی است.

در قسمت بعد کران پایینی برای پیچش دمی توزیع‌های $\mathrm{F}_۱, \mathrm{F}_۲, \ldots, \mathrm{F}_n$ پیدا می‌کنیم.

قضیه ۳.۶.۱. *فرض کنید $\mathrm{F}_۱, \mathrm{F}_۲, \ldots, \mathrm{F}_n$ توزیع‌های تعریف‌شده روی مجموعه $\mathbb{R}^+$ با تکیه‌گاه نامحدود باشند، آنگاه*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}_۱ * \mathrm{F}_۲ * \cdots * \mathrm{F}_n}(x)}{\overline{\mathrm{F}_۱}(x) + \overline{\mathrm{F}_۲}(x) + \cdots + \overline{\mathrm{F}_n}(x)} \geq ۱$$

برهان. فرض می‌کنیم $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های به ترتیب $\mathrm{F}_۱, \mathrm{F}_۲, \ldots, \mathrm{F}_n$ باشند.

برای هر $j \neq k$ مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم:

$\{\xi_k > x, \xi_j \in [۰, x]\}$

از آن‌جا که پیشامدهای $\xi_k > x$ و $\xi_j \in [۰, x]$ برای kهای مختلف جدا از هم می‌باشند، پس کران پایین برای پیچش دمی توزیع‌های $\mathrm{F}_۱, \mathrm{F}_۲, \ldots, \mathrm{F}_n$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\overline{\mathrm{F}_۱ * \mathrm{F}_۲ * \cdots * \mathrm{F}_n}(x) \geq \sum_{k=۱}^{n} \mathbb{P}\{\xi_k > x, \xi_j \in [۰, x]; \forall j \neq k\} \qquad (۸)$$

$$= \sum_{k=۱}^{n} \overline{\mathrm{F}_k}(x) \prod_{j\neq k} \mathrm{F}_j(x) \qquad (۹)$$

$$\sim \sum_{k=۱}^{n} \overline{\mathrm{F}_k}(x) \qquad (۱۰)$$

با توجه به این که در رابطه (۸) یکی از حالت‌های ممکن را برای متغیرهای ξ_iها در نظر گرفتیم، لذا رابطه بزرگ‌تری نتیجه می‌شود. به‌علاوه رابطه (۹) به دلیل جدا از هم بودن ξ_k و ξ_jها و با توجه به تعریف تابع توزیع به‌دست می‌آید. در نهایت آخرین رابطه یعنی رابطه (۱۰)، با $\liminf$ گرفتن از طرفین حاصل می‌شود. □

به نظر می‌رسد که می‌توان از قضیه فوق این مطلب را استنتاج کرد که برای توزیع‌های مختلف روی مجموعه اعداد حقیقی مثبت، با تکیه‌گاه نامحدود، مقدار پیچش دمی توزیع‌های $F_1, F_2, \dots, F_n$ بزرگ‌تر یا مساوی مجموع تک‌تک پیچش دمی توزیع‌های ذکرشده می‌باشد.

قضیه زیر نتیجه‌ای را برای توزیع‌های غیر یکسان F_1 و F_2 نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۶.۱. *فرض‌کنید F_1 و F_2 دو توزیع روی $\mathbb{R}^+$ باشند و همچنین فرض‌کنید F_1 سنگین‌دم باشد. آن‌گاه:*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F_1 * F_2}(x)}{\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)} = 1 \tag{۲۸.۱}$$

برهان. با توجه به قضیه ۳.۶.۱، سمت چپ رابطه (۲۸.۱) حداقل ۱ است. حال فرض می‌کنیم اکیداً بزرگ‌تر از ۱ باشد. بنابراین برای تمام xهای به اندازه کافی بزرگ $\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\frac{\overline{F_1 * F_2}(x)}{\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)} \geq 1 + 2\varepsilon \tag{۲۹.۱}$$

توزیع $G = \frac{F_1 + F_2}{2}$ را در نظر می‌گیریم. چون F_1 سنگین‌دم است، لذا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} d\left(F_1(x)\right) = \infty$$

بنابراین در مورد تابع G داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} d\left(G(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} d\left(F_1(x)\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} d\left(F_2(x)\right)\right)$$

به وضوح توزیع G با توجه به این مطلب که F_1 سنگین‌دم است، نیز سنگین‌دم می‌باشد.
همچنین با توجه به قضیه ۲.۶.۱ برای توزیع سنگین‌دم G داریم:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G * G}(x)}{\overline{G}(x)} = 2 \tag{۳۰.۱}$$

از طرف دیگر، رابطه (۲۹.۱) و قضیه ۳.۶.۱ برای تمام xهای به اندازه کافی بزرگ نشان می‌دهد که:

$$\begin{aligned}
\overline{G * G}(x) &= \frac{\overline{F_1 * F_1}(x) + \overline{F_2 * F_2}(x) + 2\overline{F_1 * F_2}(x)}{4} \\
&\geq \frac{2(1-\varepsilon)\overline{F_1}(x) + 2(1-\varepsilon)\overline{F_2}(x) + 2(1+2\varepsilon)\left(\overline{F_1}(x)+\overline{F_2}(x)\right)}{4} \\
&= 2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\overline{G}(x)
\end{aligned}$$

با $\liminf$ گرفتن از طرفین رابطه فوق، رابطه‌ای ایجاد می‌شود که با رابطه (۳۰.۱) در تناقض است، در نتیجه حکم برقرار می‌باشد. □

فصل ۲

ماکزیمم مقادیر وزنی تصادفی با توزیع‌های درازدم

۱.۲ مجموع و ماکزیمم متغیرهای تصادفی

مطالب این فصل، برگرفته‌شده از مقاله چن و همکاران [۲]، می‌باشد.

در این فصل تمام روابط حدی برای حالت $x \to \infty$ در نظر گرفته شده است، در غیر این صورت آن را ذکر می‌کنیم.

اگر $\lim \dfrac{h(x)}{g(x)} = ۰$ باشد، آن را با نماد $h(x) = o\left(g(x)\right)$ نشان می‌دهیم.

هم‌چنین اگر $\lim \dfrac{a(x)}{b(x)} = ۱$ باشد، آن‌گاه آن را با نماد $a(x) \sim b(x)$ و اگر $\liminf \dfrac{a(x)}{b(x)} \geq ۱$، آن را با نماد $a(x) \gtrsim b(x)$ نمایش می‌دهیم.

برای هر عدد حقیقی x، $x^+ = \max\{x, ۰\}$ می‌باشد و به ازای هر توزیع F، توزیع دم $\overline{\mathrm{F}}$ به‌صورت $\overline{\mathrm{F}}(x) = ۱ - \mathrm{F}(x)$ تعریف می‌شود.

هم‌چنین برای راحتی در نوشتار، $\underline{X_n} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_n)'$ را به عنوان بردار ستونی n بعدی در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $\mathrm{X}_۱, \mathrm{X}_۲, \ldots, \mathrm{X}_n$ متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار و دو به دو مستقل به ترتیب با توزیع‌های $\mathrm{F}_۱, \mathrm{F}_۲, \ldots, \mathrm{F}_n$ باشند، مجموع جزئی متغیرهای تصادفی را با S_m نشان می‌دهیم که عبارت است از:

$$S_m = \sum_{k=۱}^{m} X_k \ ; \qquad m = ۱, ۲, \ldots, n$$

و هم‌چنین برای ماکزیمم آن‌ها داریم:
$$M_n = \max_{۱\leq m\leq n} S_m$$

۲.۲ کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی

تعریف ۱.۲.۲. توزیع F روی مجموعه اعداد حقیقی متعلّق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی [۱] است، اگر برای هر $y \in (۰, ۱)$ داشته باشیم:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}}(xy)}{\overline{\mathrm{F}}(x)} < \infty$$

خانواده تمام توزیع‌های مقادیر غالب دمی را با $\mathcal{D}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۲. برای $۰ < q < ۱$ چندک مرتبه $q-$ام متغیر تصادفی X را با $\gamma_q(\mathrm{X})$ نمایش داده و مقدار $\gamma_q(\mathrm{X})$ به‌طور دلخواه از مجموعه‌ی زیر انتخاب می‌شود:

$$\Gamma_q(\mathrm{X}) = \{x : \mathrm{P}(\mathrm{X} \le x) \ge q, \mathrm{P}(\mathrm{X} \ge x) \ge ۱ - q\}$$

۳.۲ توزیع‌های هم‌ارز دمی و قضایای مربوطه

تعریف ۱.۳.۲. دو توزیع F و G که از راست بی‌کران می‌باشند را هم‌ارز دمی می‌نامیم، اگر:

$$\overline{\mathrm{F}}(x) \sim \overline{\mathrm{G}}(x)$$

باشد، به این معنی که:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}}(x)}{\overline{\mathrm{G}}(x)} = ۱$$

قضیه ۲.۳.۲. *فرض کنید $\mathrm{F}_۱$، $\mathrm{F}_۲$ و G توزیع‌هایی روی مجموعه اعداد حقیقی باشند به‌طوری که $\overline{\mathrm{F}_۱}(x) \sim \overline{\mathrm{F}_۲}(x)$ باشد. به‌علاوه فرض کنید توزیع درازدم G وجود داشته باشد، آن‌گاه:*

$$\overline{\mathrm{F}_۱ * \mathrm{G}}(x) \sim \overline{\mathrm{F}_۲ * \mathrm{G}}(x)$$

برهان. به [۶] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۳.۲. *فرض کنید $\mathrm{F}_۱$، $\mathrm{F}_۲$، $\mathrm{G}_۱$ و $\mathrm{G}_۲$ توزیع‌هایی روی مجموعه اعداد حقیقی باشند به‌طوری که $\overline{\mathrm{F}_۱}(x) \sim \overline{\mathrm{F}_۲}(x)$ و $\overline{\mathrm{G}_۱}(x) \sim \overline{\mathrm{G}_۲}(x)$. علاوه بر این فرض کنید تابع $\overline{\mathrm{F}_۱} + \overline{\mathrm{G}_۱}$ درازدم باشد، آن‌گاه:*

$$\overline{\mathrm{F}_۱ * \mathrm{G}_۱}(x) \sim \overline{\mathrm{F}_۲ * \mathrm{G}_۲}(x).$$

برهان. به [۶] مراجعه شود. □

[۱] Dominatedly varying-tailed Distributions

۴.۲ خاصیت بسته بودن کلاس توزیع‌های درازدم تحت پیچش

اکنون با استفاده از قضیه ۳.۳.۲ نشان می‌دهیم که کلاس توزیع‌های درازدم تحت پیچش بسته است.

قضیه ۱.۴.۲. *توزیع‌های F و G را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که توزیع F درازدم، تابع $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ درازدم و اندازه $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ نیز درازدم باشد، (یعنی مجموع $\overline{\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{G}}$ از توابع دمی دو توزیع، درازدم می‌باشد). آن‌گاه $\mathrm{F}*\mathrm{G}$ نیز درازدم است.*

برهان. ثابت $y>0$ را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم $\mathrm{F}_1=\mathrm{F}$ و F_2 نیز برابر با F ولی با مقدار جابه‌جایی به اندازه y باشد، یعنی:

$$\overline{\mathrm{F}_2}(x)=\overline{\mathrm{F}}(x+y)$$

در نتیجه: $\mathrm{F}_2*\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}*\mathrm{G}(x+y)$.

از آن‌جا که توزیع F متعلّق به کلاس توزیع‌های درازدم می‌باشد، پس $\overline{\mathrm{F}_1}(x)\sim\overline{\mathrm{F}_2}(x)$ و نیز چون $\overline{\mathrm{F}_1}+\overline{\mathrm{G}}$ درازدم می‌باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه ۳.۳.۲ با در نظر گرفتن $\mathrm{G}_1=\mathrm{G}_2=\mathrm{G}$ داریم:

$$\overline{\mathrm{F}_1*\mathrm{G}}(x)\sim\overline{\mathrm{F}_2*\mathrm{G}}(x).$$

در نتیجه با توجه به تعریف F_1 و F_2:

$$\overline{\mathrm{F}*\mathrm{G}}(x)\sim\overline{\mathrm{F}*\mathrm{G}}(x+y).$$

که هم‌ارزی آخر همان تعریف توزیع درازدم برای $\mathrm{F}*\mathrm{G}$ می‌باشد، بنابراین $\mathrm{F}*\mathrm{G}$ متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم است. □

دو نتیجه‌ای که از قضیه ۱.۴.۲ به‌دست می‌آید، عبارت است از:

نتیجه ۲.۴.۲. *هرگاه دو توزیع F و G درازدم باشند، آن‌گاه پیچش آن‌ها یعنی $\mathrm{F}*\mathrm{G}$ نیز متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم است.*

نتیجه ۳.۴.۲. *اگر F و G دو توزیع باشند به‌طوری‌که توزیع F درازدم، و هم‌چنین $\overline{\mathrm{G}}(x)=o\left(\overline{\mathrm{F}}(x)\right)$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{F}*\mathrm{G}$ نیز درازدم می‌باشد.*

لم ۴.۴.۲. *فرض کنید تابع توزیع F_n برای هر $n\geq 1$، به کلاس توزیع‌های درازدم تعلّق داشته باشد، آن‌گاه برای هر $k\in\mathbb{N}$ داریم:*

$$V=\mathrm{F}_1*\mathrm{F}_2*\cdots*\mathrm{F}_k\in\mathcal{L}$$

برهان. طبق اولین نتیجه قضیه ۱.۴.۲ برای دو توزیع F و G، که هر دو متعلّق به کلاس توزیع‌های درازدم می‌باشد، $\mathrm{F}*\mathrm{G}\in\mathcal{L}$ است.

حال با استفاده از استدلال استقرایی فرض می‌کنیم که حکم مسأله برای $k=n-1$ برقرار باشد، یعنی:

$$V = \mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2 * \cdots * \mathrm{F}_{n-1} \in \mathcal{L}$$

اکنون باید نشان دهیم که حکم برای $k = n$ نیز برقرار است، برای این منظور داریم:

$$V = \mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2 * \cdots * \mathrm{F}_n = \left(\underbrace{\mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2 * \cdots * \mathrm{F}_{n-1}}_{Z} \right) * \underbrace{\mathrm{F}_n}_{T}$$

بنابراین با در نظر گرفتن $\mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2 * \cdots * \mathrm{F}_{n-1}$ به عنوان توزیع جدید Z و همچنین F_n به عنوان توزیع T و با توجه به اولین نتیجه قضیه ۱.۴.۲، $\mathrm{Z} * \mathrm{T} \in \mathcal{L}$ است، لذا نتیجه می‌شود:

$$V = \mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2 * \cdots * \mathrm{F}_k \in \mathcal{L}$$

□

با توجه به قضیه ۱.۴.۲ و همچنین لم ۴.۴.۲ درمی‌یابیم که کلاس توزیع‌های درازدم علاوه بر این که در حالت دوتایی نسبت به پیچش بسته است، بلکه در حالت nتایی نیز نسبت به عمل پیچش بسته می‌باشد.

لم ۵.۴.۲. *برای هر $0 < q < 1$ و هر عدد حقیقی x رابطه‌ی زیر برقرار است:*

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \le m \le n} S_m \ge x \right) \lesssim \frac{1}{q} \mathrm{P}\left(S_n \ge x - \max_{1 \le m \le n} \{\gamma_q (S_m - S_n)\} \right) \tag{۱.۲}$$

برهان. به [۱۰] مراجعه شود. □

۵.۲ احتمالات دمی مجانبی

در این بخش سعی ما بر این است که هم‌ارزی مجانبی بین احتمالات دمی مقادیر M_n و S_n را نشان دهیم.

قضیه ۱.۵.۲. *فرض کنید توزیع F_m برای هر $m \ge 1$ درازدم باشد، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:*

$$\mathrm{P}(M_n \ge x) \sim \mathrm{P}(S_n \ge x) \tag{۲.۲}$$

برهان. برای اثبات گزاره‌ی (۲.۲) نیاز داریم که دو رابطه‌ی زیر را نشان دهیم:

$$\mathrm{P}(M_n \ge x) \lesssim \mathrm{P}(S_n \ge x) \tag{۳.۲}$$

$$\mathrm{P}(M_n \ge x) \gtrsim \mathrm{P}(S_n \ge x) \tag{۴.۲}$$

رابطه‌ی (۴.۲) بدیهی است، زیرا این رابطه با توجه به تعریف S_n و M_n که $M_n = \max_{1 \le m \le n} S_m$ بلافاصله نتیجه می‌شود. برای اثبات رابطه (۳.۲) با توجه به لم ۴.۴.۲ می‌دانیم که S_n متعلق به کلاس توزیع‌های

درازدم می‌باشد، یعنی $S_n \in \mathcal{L}$.
همچنین با توجه به لم ۵.۴.۲ داریم:

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\leq m\leq n} S_m \geq x\right) \lesssim \frac{1}{q}\mathrm{P}\left(S_n \geq x - \max_{1\leq m\leq n}\left\{\gamma_q\left(S_m - S_n\right)\right\}\right)$$
$$\sim \frac{1}{q}\mathrm{P}\left(S_n \geq x\right)$$

که هم‌ارزی آخر به دلیل درازدمی توزیع S_n نتیجه می‌شود، حال با میل دادن q به سمت ۱، رابطه (۳.۲) و در نهایت رابطه (۲.۲) نتیجه می‌شود. □

مشابه نتیجه‌ی قضیه ۱.۵.۲ برای حالت خاصی که توزیع‌های $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ متعلق به کلاس یکسان $\mathcal{S}$ هستند، در قضیه ۱ اسگیبنف،[۲] [۱۱] وجود دارد.

۶.۲ کاربردی مختصر از مجموع وزنی تصادفی

مجموع وزنی تصادفی عمدتاً در نظریه بیمه و ریسک‌های مالی کاربرد فراوان دارد. در نظریه خطر اغلب با مدل‌های تصادفی که شامل مقادیر وزنی تصادفی هستند، روبه‌رو می‌شویم که از میان این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های خطر تصادفی زمان–گسسته اشاره کرد.

۷.۲ متغیرهای تصادفی وزن‌دار

در ادامه به متغیرهای تصادفی وزن‌دار اشاره می‌کنیم:
مانند قبل فرض کنید $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$، متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار با توابع توزیع به ترتیب $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ و دو به دو مستقل باشند. همچنین فرض کنید هر X_k دارای وزن تصادفی می‌باشد، که با W_k نشان می‌دهیم و به ازای هر k، $\mathrm{W}_k \geq 0$.
مقادیر $S_m^{(w)}$ و $M_n^{(w)}$ را مشابه قبل به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_m^{(w)} = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k \quad ; m = 1, 2, \ldots, n$$
$$M_n^{(w)} = \max_{1\leq m\leq n} S_m^{(w)} \tag{۵.۲}$$

مقادیر $S_m^{(w)}$ و $M_n^{(w)}$ تعریف‌شده در (۵.۲) را در نظر می‌گیریم. تانگ و تسیتسیاشویلی،[۳] [۱۳] فرض کردند که وزن‌های تصادفی برای این مقادیر از دوطرف کران‌دار می‌باشند، یعنی مقادیر $0 < a \leq b < \infty$ وجود دارد به‌طوری که برای $k = 1, 2, \ldots, n$:

[۲] Sgibnev
[۳] Tang and Tsitsiashvili

$$\mathrm{P}\left(a \leq \mathrm{W}_k \leq b\right) = ۱. \tag{۶.۲}$$

هدف در این‌جا ایجاد رابطه‌ای مشابه رابطه‌ی (۲.۲) است. برای این منظور ابتدا به بیان چند لم مهم می‌پردازیم:

لم ۱.۷.۲. *فرض کنید $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$، n متغیر تصادفی مستقل باشند، که توزیع هر X_k درازدم می‌باشد، یعنی $\mathrm{F}_k \in \mathcal{L}$. آن‌گاه برای هر ثابت دلخواه $0 < a \leq b < \infty$ و $A > 0$، رابطه*

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x - A\right) \sim \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x\right) \tag{۷.۲}$$

به‌طور یکنواخت برای هر $\underline{w_n} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)' \in [a,b]^n$ برقرار است به این معنی‌که:

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n} \left| \frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x - A\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x\right)} - 1 \right| = 0.$$

برهان. قضیه را به روش استقراء اثبات می‌کنیم:

برای $n = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \sup_{w_1\in[a,b]} \left| \frac{\mathrm{P}\left(w_1 \mathrm{X}_1 > x - A\right)}{\mathrm{P}\left(w_1 \mathrm{X}_1 > x\right)} - 1 \right| &= \limsup_{x\to\infty} \sup_{w_1\in[a,b]} \left| \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{x}{w_1} - \frac{A}{w_1}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{x}{w_1}\right)} - 1 \right| \\
&\leq \limsup_{x\to\infty} \sup_{w_1\in[a,b]} \left(\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{x}{w_1} - \frac{A}{a}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{x}{w_1}\right)} - 1 \right) \\
&= \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{x}{b} - \frac{A}{a}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{x}{a}\right)} - 1 \right) = 0
\end{aligned}$$

که مساوی صفر شدن آخرین کسر به دلیل تعلق داشتن تابع توزیع F_1 به کلاس توزیع‌های درازدم است.

حال فرض می‌کنیم رابطه (۷.۲) برای n برقرار باشد، لذا باید نشان دهیم که رابطه (۷.۲) برای $n+1$ نیز برقرار است، به این صورت که رابطه

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n+1} w_k \mathrm{X}_k > x - A\right) \sim \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n+1} w_k \mathrm{X}_k > x\right) \tag{۸.۲}$$

به‌طور یکنواخت برای $\underline{w_{n+1}} \in [a,b]^{n+1}$ برقرار می‌باشد.

اکنون رابطه (۸.۲) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{w_k}{w_{n+1}}\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>\frac{x}{w_{n+1}}-\frac{A}{w_{n+1}}\right)\sim\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{w_k}{w_{n+1}}\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>\frac{x}{w_{n+1}}\right)$$

بدون از دست دادن کلیّت مسأله، می‌توان در رابطه (۸.۲)، $w_{n+1}=1$ در نظر گرفت، بنابراین کافی است ثابت کنیم که به‌طور یکنواخت برای $\underline{w_n}\in[a,b]^n$ رابطه زیر برقرار است:

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x-A\right)\sim\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x\right).$$

از آن‌جا که $A>0$ است، لذا رابطه

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x-A\right)\gtrsim\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x\right)$$

بدیهی است.

بنابراین اثبات رابطه هم‌ارزی فوق معادل این است که برای $\underline{w_n}\in[a,b]^n$ به‌طور یکنواخت ثابت کنیم:

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x-A\right)\lesssim\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x\right)\qquad(۹.۲)$$

با توجه به فرض استقراء، برای هر $\varepsilon>0$ مقدار $B_1>A$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\sup_{x\geq B_1}\ \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n}\frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k>x-A\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k>x\right)}\leq 1+\varepsilon.\qquad(۱۰.۲)$$

با انتخاب مقدار $B_1>0$ برای $x\geq B_1$، با توجه به تعریف پیچش داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x-A\right)&=\left(\int_{-\infty}^{x-B_1}+\int_{x-B_1}^{\infty}\right)\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k>x-y-A\right)d\left(\mathrm{F}_{n+1}(y)\right)\\&=I_{11}(x)+I_{12}(x)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x\right)&=\left(\int_{-\infty}^{x-B_1}+\int_{x-B_1}^{\infty}\right)\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k>x-y\right)d\left(\mathrm{F}_{n+1}(y)\right)\\&=I_{21}(x)+I_{22}(x)\end{aligned}$$

چن و همکاران [۲]، نشان دادند که:

$$\frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x-A\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+1}>x\right)}\leq\max\left\{\frac{I_{11}(x)}{I_{21}(x)},\frac{I_{12}(x)}{I_{22}(x)}\right\}.\qquad(۱۱.۲)$$

در ابتدا، $\frac{I_{11}(x)}{I_{21}(x)}$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه (۱۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n} \frac{I_{11}(x)}{I_{21}(x)} &\le \sup_{y\le x-B_1} \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n} \frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x-y-A\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x-y\right)} \\
&= \sup_{x\ge B_1} \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n} \frac{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x-A\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x\right)} \\
&\le 1+\varepsilon. \qquad (12.2)
\end{aligned}$$

حال به بررسی $\frac{I_{12}(x)}{I_{22}(x)}$ می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}
\frac{I_{12}(x)}{I_{22}(x)} &= \frac{\left(\int_{x-B_1}^{x-A} + \int_{x-A}^{\infty}\right) \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x-y-A\right) d\left(\mathrm{F}_{n+1}(y)\right)}{\left(\int_{x-B_1}^{x} + \int_{x}^{\infty}\right) \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x-y\right) d\left(\mathrm{F}_{n+1}(y)\right)} \\
&\le \frac{\mathrm{F}_{n+1}\left(x-B_1, x-A\right] + \int_{x-A}^{\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x-y-A\right) d\left(\mathrm{F}_{n+1}(y)\right)}{\int_{x}^{\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > x-y\right) d\left(\mathrm{F}_{n+1}(y)\right)} \\
&= I_3(x) + I_4(x). \qquad (13.2)
\end{aligned}$$

برای $I_3(x)$، با توجه به این که $\mathrm{F}_{n+1} \in \mathcal{L}$ است، مقدار ثابت $B_2 \ge B_1$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\ge B_2} \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n} I_3(x) &\le \sup_{x\ge B_2} \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n} \frac{\mathrm{F}_{n+1}\left(x-B_1, x-A\right]}{\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > 0\right) \overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x)} \\
&\le \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{F}_k}(0)} \sup_{x\ge B_2} \frac{\mathrm{F}_{n+1}\left(x-B_1, x-A\right]}{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x)} \le \varepsilon \qquad (14.2)
\end{aligned}$$

و

$$\sup_{x\ge B_2} \frac{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x-A)}{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x)} \le 1+\varepsilon. \qquad (15.2)$$

در رابطه (۱۴.۲) این نکته لازم به ذکر است که احتمال مثبت بودن تمام متغیرهای تصادفی X_kها همواره از احتمال این که مجموع این متغیرها مثبت باشد، کوچک‌تر است، لذا احتمال مجموع متغیرهای تصادفی X_kها به حاصل‌ضرب احتمال دمی این متغیرهای تصادفی تبدیل می‌شود و نامساوی (۱۴.۲) نتیجه می‌شود.

برای $I_4(x)$ با انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر داریم:
با خلاصه‌نویسی عبارت $I_4(x)$ و با در نظر گرفتن $t := x - A$، $T := \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k$ و $\mathrm{F}_{n+1} := \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}$ و u و dv به‌صورت زیر می‌توان نوشت که:

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{P}\left(T > t - y\right) &&\Rightarrow du = d\left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right) \\ dv &= f_{\mathrm{Y}}(y)\, d(y) &&\Rightarrow v = \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} \mathrm{P}\left(T > t - y\right) \underbrace{d\,\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y)}_{f_{\mathrm{Y}}(y)dy} &= \mathrm{P}\left(T > t - y\right) \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y)\Big|_t^{\infty} - \int_t^{\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y)\, d\left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(T > 0\right) \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(t) - \int_t^{\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y)\, d\left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right) \\ &= \underbrace{1 - \mathrm{P}\left(T > 0\right)\left[1 - \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}}(t)\right]}_{B} - \int_t^{\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y)\, d\left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right) \\ &= B - \int_t^{\infty} d\ \left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right) + \int_t^{\infty} \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}}(y)\, d\ \left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right) \\ &= \mathrm{P}\left(T > 0\right) \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}}(t) + \underbrace{\int_t^{\infty} \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}}(y)\, d\ \left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right)}_{C} \end{aligned}$$

که در آن انتگرال C با تغییر متغیر $t - y = z$ برابر است با:

$$\int_t^{\infty} \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}}(y)\, d\ \left(\mathrm{P}\left(T > t - y\right)\right) = \int_{-\infty}^{0} \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}}(t - z)\, d\ \left(\mathrm{P}\left(T > z\right)\right)$$

در نتیجه برای $I_4(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \frac{\mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > 0\right) \overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - A) + \int_{-\infty}^{0} \overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - y - A) \mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k \in dy\right)}{\mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k > 0\right) \overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x) + \int_{-\infty}^{0} \overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - y) \mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k \in dy\right)} \\ &\le \max\left\{\frac{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - A)}{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x)}, \frac{\int_{-\infty}^{0} \overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - y - A) \mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k \in dy\right)}{\int_{-\infty}^{0} \overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - y) \mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mathrm{X}_k \in dy\right)}\right\} \\ &\le \max\left\{\frac{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - A)}{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x)}, \sup_{y \le 0} \frac{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - y - A)}{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(x - y)}\right\} = \sup_{t \ge x} \frac{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(t - A)}{\overline{\mathrm{F}_{n+1}}(t)}. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۲.۱۵) داریم:

$$\sup_{x \ge B_2} \sup_{\underline{w_n} \in [a,b]^n} I_4(x) \le 1 + \varepsilon. \tag{۲.۱۶}$$

با جایگزینی روابط (۲.۱۴) و (۲.۱۶) در (۲.۱۳) به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\sup_{x\geq B_۲}\ \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n}\frac{I_{۱۲}(x)}{I_{۲۲}(x)}\leq ۱+۲\varepsilon. \tag{۱۷.۲}$$

به‌علاوه با جایگزینی روابط (۱۲.۲) و (۱۷.۲) در رابطه (۱۱.۲) داریم:

$$\sup_{x\geq B_۲}\ \sup_{\underline{w_n}\in[a,b]^n}\frac{\mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=۱}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+۱}>x-A\right)}{\mathrm{P}\left(\sum\limits_{k=۱}^{n}w_k\mathrm{X}_k+\mathrm{X}_{n+۱}>x\right)}\leq ۱+۲\varepsilon.$$

رابطه فوق با توجه به دلخواه بودن ε، نتیجه مطلوب که همان رابطه (۹.۲) است را به‌دست می‌دهد. □

از لم فوق می‌توان نتیجه گرفت، همانند تعریف توزیع درازدم، چون درازدمی خاصیتی بود که در دم‌های توزیع مورد بررسی قرار می‌گرفت، در اینجا نیز برای n متغیر تصادفی مستقل، اضافه کردن مقدار مثبت A تاثیری بر مقدار احتمال موردنظر ندارد.

لم ۲.۷.۲. *اگر شرایط زیر برقرار باشد، آن‌گاه مجموع* $S_n^{(w)}=\sum\limits_{k=۱}^{n}\mathrm{W}_k\mathrm{X}_k$ *متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم می‌باشد.*

الف) متغیرهای تصادفی $\mathrm{X}_۱,\mathrm{X}_۲,\ldots,\mathrm{X}_n$ *دو به دو مستقل و تابع توزیع هر* X_k *به کلاس توزیع‌های درازدم تعلق داشته باشد.*

ب) برای وزن‌های تصادفی مستقل $\mathrm{W}_۱,\mathrm{W}_۲,\ldots,\mathrm{W}_n$ *به ازای هر* $k=۱,۲,\ldots,n$ *رابطه‌ی (۶.۲) برقرار باشد.*

ج) دنباله‌های $\{\mathrm{X}_۱,\mathrm{X}_۲,\ldots,\mathrm{X}_n\}$ *و* $\{\mathrm{W}_۱,\mathrm{W}_۲,\ldots,\mathrm{W}_n\}$ *از هم مستقل باشند.*

برهان. برای هر ثابت $A>۰$، با توجه به شرایط روی $\underline{\mathrm{W}_n}$ و استفاده از لم ۱.۷.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(S_n^{(w)}>x-A\right)&=\int\cdots\int_{\underline{w_n}\in[a,b]^n}\mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n}w_k\mathrm{X}_k>x-A\right)\mathrm{P}\left(\underline{\mathrm{W}_n}\in d\underline{w_n}\right)\\&\sim\int\cdots\int_{\underline{w_n}\in[a,b]^n}\mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n}w_k\mathrm{X}_k>x\right)\mathrm{P}\left(\underline{\mathrm{W}_n}\in d\underline{w_n}\right)\\&=\mathrm{P}\left(S_n^{(w)}>x\right).\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد توزیع $S_n^{(w)}$ متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم می‌باشد. □

لم ۳.۷.۲. *اختلاف* $\mathrm{X}=Z-Y$ *را در نظر بگیرید، که* Z *و* Y *متغیرهای تصادفی مستقل هستند و* Y *نامنفی و ناتباهیده در صفر* ($\mathrm{P}(\mathrm{X}=۰)\neq ۱$) *است. در این صورت:*

$$\mathrm{F_X}\in\mathcal{L}\iff\mathrm{F_Z}\in\mathcal{L}\iff\overline{\mathrm{F_X}}(x)\sim\overline{\mathrm{F_Z}}(x).$$

برهان. مفهوم "$\mathrm{F_Z}\in\mathcal{L}\Longrightarrow\overline{\mathrm{F_X}}(x)\sim\overline{\mathrm{F_Z}}(x)$" به خوبی از تعریف $\mathrm{X}=\mathrm{Z}-\mathrm{Y}$ و درازدمی توزیع $\mathrm{F_Z}$ نتیجه می‌شود.

اکنون مفهوم "$\mathrm{F_X} \in \mathcal{L} \Longrightarrow \mathrm{F_Z} \in \mathcal{L}$" را اثبات می‌کنیم. از آن‌جا که متغیر تصادفی Y نامنفی است، لذا برای هر $M > ۰$، $y > ۰$ و $x \geq M$ داریم:

$$\{\mathrm{Z} > x, \mathrm{Y} \leq M\} \subset \{\mathrm{X} > x - M\}$$

و

$$\{\mathrm{X} > x + y\} \subset \{\mathrm{Z} > x + y\}.$$

از این‌رو با احتمال گرفتن از طرفین مجموعه‌های فوق داریم:

$$\overline{\mathrm{F_Z}}(x)\mathrm{F_Y}(M) \leq \overline{\mathrm{F_X}}(x - M) \tag{۱۸.۲}$$

و

$$\overline{\mathrm{F_X}}(x + y) \leq \overline{\mathrm{F_Z}}(x + y). \tag{۱۹.۲}$$

در نتیجه داریم:
ابتدا رابطه (۱۹.۲) را بر $\overline{\mathrm{F_Z}}(x)$ تقسیم می‌کنیم، لذا:

$$\frac{\overline{\mathrm{F_X}}(x + y)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)} \leq \frac{\overline{\mathrm{F_Z}}(x + y)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)}. \tag{۲۰.۲}$$

به‌علاوه از رابطه (۱۸.۲) داریم:

$$\overline{\mathrm{F_Z}}(x) \leq \frac{\overline{\mathrm{F_X}}(x - M)}{\mathrm{F_Y}(M)} \Longrightarrow \frac{۱}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)} \geq \frac{\mathrm{F_Y}(M)}{\overline{\mathrm{F_X}}(x - M)} \tag{۲۱.۲}$$

بنابراین با جایگزینی رابطه (۲۱.۲) در رابطه (۲۰.۲) داریم:

$$\frac{\overline{\mathrm{F_Z}}(x + y)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)} \geq \frac{\overline{\mathrm{F_X}}(x + y)}{\overline{\mathrm{F_X}}(x - M)}\mathrm{F_Y}(M).$$

چون $\mathrm{F_X} \in \mathcal{L}$ می‌باشد، لذا اول با میل دادن $x \to \infty$ و سپس $M \to \infty$ در نامعادله فوق و در نهایت lim inf گرفتن، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{F_Z}}(x + y)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)} \geq ۱ \qquad (*)$$

از طرف دیگر با توجه به روابط (۱۸.۲) و (۱۹.۲) داریم:

$$\frac{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x + y)} \leq \frac{\overline{\mathrm{F_X}}(x - M)}{\overline{\mathrm{F_X}}(x + y)} \frac{۱}{\mathrm{F_Y}(M)}$$

مانند قبل با میل دادن $x \to \infty$ و سپس $M \to \infty$ در نامعادله فوق و در نهایت lim sup گرفتن، داریم:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x + y)} \leq ۱ \qquad (**)$$

که نامساوی‌های (*) و (**) بیان می‌کند که: $\mathrm{F_Z} \in \mathcal{L}$.
حال مفهوم "$\overline{\mathrm{F_X}}(x) \sim \overline{\mathrm{F_Z}}(x) \Longrightarrow \mathrm{F_X} \in \mathcal{L}$" را ثابت می‌کنیم. برای این منظور مقدار $y_\circ > \circ$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که $\overline{\mathrm{F_Y}}(y_\circ) > \circ$ می‌باشد.
لذا داریم:

$$\overline{\mathrm{F_X}}(x) \leq \overline{\mathrm{F_Z}}(x)\mathrm{F_Y}(y_\circ) + \overline{\mathrm{F_Z}}(x+y_\circ)\overline{\mathrm{F_Y}}(y_\circ).$$

بنابراین:

$$۱ \leq \mathrm{F_Y}(y_\circ) + \overline{\mathrm{F_Y}}(y_\circ) \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F_Z}}(x+y_\circ)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)}$$

که عبارت فوق بیان می‌کند که:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F_Z}}(x+y_\circ)}{\overline{\mathrm{F_Z}}(x)} \geq ۱.$$

که رابطه فوق اثبات می‌کند که $\mathrm{F_Z} \in \mathcal{L}$ و لذا $\mathrm{F_X} \in \mathcal{L}$. $\square$

قضیه ۴.۷.۲. *اگر شرایط لم ۲.۷.۲ برقرار باشد، آن‌گاه رابطه‌ی*

$$\mathrm{P}\left(M_n^{(w)} > x\right) \sim \mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) \sim \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x\right) \qquad (۲۲.۲)$$

نیز برقرار است.

برهان. واضح است که $S_n^{(w)} \leq M_n^{(w)} \leq \sum\limits_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+$، از این رو کافی است ثابت کنیم:

$$\mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) \gtrsim \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x\right) \qquad (۲۳.۲)$$

با توجه به اینکه هر X_k هم مثبت می‌تواند باشد هم منفی، کل فضای Ω را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$\Omega = \bigcup_{K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \{\forall\, k \in K,\, \mathrm{X}_k \geq \circ \text{ و } \forall\, l \notin K,\, \mathrm{X}_l < \circ\} = \bigcup_{K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \Omega_K$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) &= \sum_{\varnothing\neq K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x, \Omega_K\right) \\
&\geq \sum_{\varnothing\neq K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \mathrm{P}\left(\left(\sum_{k\in K} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k + b\sum_{l\notin K} \mathrm{X}_l\right) > x, \Omega_K\right) \qquad (۲۴.۲)
\end{aligned}$$

هم‌چنین توجه داریم که اگر $K = \emptyset$ باشد، در نتیجه تمام X_kها منفی می‌باشند، لذا:

$$\mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) = ۰.$$

برای $k = ۱, ۲, \ldots, n$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{X}_k^+ := \max\{۰, \mathrm{X}_k\}$$

$$\mathrm{X}_k^- := -\min\{۰, \mathrm{X}_k\}$$

برای هر $K \neq \varnothing$، چون حداقل یک kای در K وجود دارد که به ازای آن $\mathrm{X}_k \geq ۰$ است، پس $\mathrm{X}_k^+ = \mathrm{X}_k$ می‌باشد، در نتیجه با توجه به لم ۲.۷.۲، $\sum_{k\in K} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+$ متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم است.
علاوه بر این، $\sum_{k\in K} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+$ از $\sum_{l\notin K} \mathrm{W}_l\mathrm{X}_l^-$ مستقل می‌باشد.
بنابراین با توجه به شرایطی که روی Ω_K است و هم‌چنین با استفاده از لم ۳.۷.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\Big(\sum_{k\in K} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k + b\sum_{l\notin K} \mathrm{X}_l\Big) > x, \Omega_K\right) &\sim \mathrm{P}\left(\sum_{k\in K} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k > x, \Omega_K\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x, \Omega_K\right)\end{aligned} \tag{۲۵.۲}$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۲۵.۲) در (۲۴.۲) داریم:

$$\mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) \gtrsim \sum_{\varnothing\neq K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x, \Omega_K\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x\right)$$

در نتیجه رابطه‌ی (۲۳.۲) اثبات شد. □

باید توجه داشته باشیم که در قضیه ۴.۷.۲ هیچ فرضی روی ساختار وابستگی $\{\mathrm{W}_۱, \mathrm{W}_۲, \ldots, \mathrm{W}_n\}$ نداریم.
در ادامه هدف ما ضعیف کردن شرط کران‌داری دوطرفه (۶.۲) به شرط کران‌داری یک‌طرفه است.
هزینه انجام این کار ایجاد یک محدودیت روی ساختار وابستگی وزن‌های تصادفی است.

تعریف ۵.۷.۲. وزن‌های تصادفی $\mathrm{W}_۱, \mathrm{W}_۲, \ldots, \mathrm{W}_n$ هم‌پیوند مثبت [۴] گفته می‌شوند اگر نامعادله

$$\mathbb{E}f_۱(\mathrm{W}_۱, \ldots, \mathrm{W}_n)f_۲(\mathrm{W}_۱, \ldots, \mathrm{W}_n) \geq \mathbb{E}f_۱(\mathrm{W}_۱, \ldots, \mathrm{W}_n)\mathbb{E}f_۲(\mathrm{W}_۱, \ldots, \mathrm{W}_n) \tag{۲۶.۲}$$

برای تمام توابع افزایشی و همسوی $f_۱$ و $f_۲$ که گشتاورهای موجود، وجود داشته باشند، برقرار باشد.

[۴] Positively Associated

برای معرفی مفهوم فوق، ایساری و همکاران،[۵] [۵] را ببینید. بدیهی است که اگر در تعریف فوق تابع f_1 افزایشی همسو و تابع f_2 کاهشی همسو باشند آن‌گاه نامعادله (۲۶.۲) به نامعادله زیر تغییر پیدا می‌کند:

$$\mathbb{E}f_1(W_1,\dots,W_n)f_2(W_1,\dots,W_n) \le \mathbb{E}f_1(W_1,\dots,W_n)\mathbb{E}f_2(W_1,\dots,W_n) \qquad (۲۷.۲)$$

در قضیه بعدی که برگرفته‌شده از کار تانگ،[۶] [۱۲] است، وزن‌های تصادفی همپیوند مثبت هستند که اغلب مربوط به اطلاعات مالی می‌باشد، سپس شرط کران‌داری دوطرفه (۶.۲) را به شرط کران‌داری یک‌طرفه زیر تغییر می‌دهیم:
برای هر $k=1,2,\dots,n$:

$$\exists b>0 \quad \text{s.t} \quad P(0\le W_k\le b)=1 \quad \text{و} \quad P(W_k=0)<1. \qquad (۲۸.۲)$$

قضیه ۶.۷.۲. *اگر شرایط زیر برقرار باشد:*
الف) متغیرهای تصادفی $X_1,X_2,\dots,X_n$ *دو به دو مستقل و تابع توزیع هر* X_k *به کلاس توزیع‌های درازدم تعلق داشته باشد.*
ب) وزن‌های تصادفی $W_1,W_2,\dots,W_n$ *همپیوند مثبت می‌باشند و برای مقدار* $0<b<\infty$ *رابطه (۲۸.۲) برقرار باشد.*
ج) دنباله‌های $\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ *و* $\{W_1,W_2,\dots,W_n\}$ *از هم مستقل باشند.*
در این صورت رابطه (۲۲.۲) برقرار است.

برهان. مانند قضیه ۴.۷.۲ کافی است رابطه (۲۳.۲) را ثابت کنیم یعنی:

$$P\left(S_n^{(w)}>x\right) \gtrsim P\left(\sum_{k=1}^{n} W_kX_k^+>x\right)$$

قضیه را در دو مرحله بخش‌بندی می‌کنیم:
مرحله اول: در ابتدا فرض می‌کنیم که وزن‌های تصادفی اکیداً مثبت باشند. همچنین فرض می‌کنیم $\delta\in(0,b)$ ثابت کوچک و دلخواه باشد. با استفاده از قضیه ۴.۷.۲ داریم:

$$\begin{aligned} P\left(S_n^{(w)}>x\right) &\ge P\left(S_n^{(w)}>x,\ \bigcap_{k=1}^{n}(W_k\ge\delta)\right)\\ &\sim P\left(\sum_{k=1}^{n} W_kX_k^+>x,\ \bigcap_{k=1}^{n}(W_k\ge\delta)\right). \end{aligned} \qquad (۲۹.۲)$$

از آن‌جا که وزن‌های تصادفی $W_1,W_2,\dots,W_n$ همپیوند مثبت و مستقل از $X_1,X_2,\dots,X_n$ می‌باشد، در نتیجه با یادآوری رابطه (۲۷.۲) داریم:

---
[۵] Esary et al.
[۶] Tang

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x\right)\\
&= \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x, \bigcup_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k < \delta)\right) + \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x, \bigcap_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k \geq \delta)\right)\\
&\leq \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x\right) \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k < \delta)\right) + \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x, \bigcap_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k \geq \delta)\right).
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x, \bigcap_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k \geq \delta)\right)\\
&\geq \left(1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k < \delta)\right)\right) \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x\right). \qquad (۳۰.۲)
\end{aligned}$$

با جایگزینی (۳۰.۲) در (۲۹.۲) داریم:

$$\mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) \gtrsim \left(1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k < \delta)\right)\right) \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}_k \mathrm{X}_k^+ > x\right).$$

چون δ ثابت کوچک و دلخواه است و هر W_k اکیداً مثبت می‌باشد، پس $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\mathrm{W}_k < \delta)\right) = 0$ و آخرین رابطه، نتیجه مطلوب را به‌دست می‌دهد.

مرحله دوم: اکنون حالت کلی‌تری را در نظر می‌گیریم که به وزن‌های تصادفی جرم احتمالی به مقدار صفر اختصاص داده شود. مانند اثبات قضیه ۴.۷.۲ کل فضای Ω را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\Omega = \bigcup_{K \subset \{1,2,\dots,n\}} \{\forall k \in K \quad \mathrm{W}_k > 0 \quad \text{و} \quad \forall l \notin K \quad \mathrm{W}_l = 0\} = \bigcup_{K \subset \{1,2,\dots,n\}} \Omega_K^*$$

با استفاده از نتیجه اثبات‌شده در مرحله اول، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) &= \mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x, \bigcup_{K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \Omega_K^*\right)\\
&= \sum_{\emptyset\neq K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \mathrm{P}\left(\sum_{k\in K} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k > x, \Omega_K^*\right)\\
&\gtrsim \sum_{\emptyset\neq K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \mathrm{P}\left(\sum_{k\in K} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x, \Omega_K^*\right)\\
&= \sum_{\emptyset\neq K\subset\{۱,۲,\ldots,n\}} \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x, \Omega_K^*\right)\\
&= \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x\right).
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه

$$\mathrm{P}\left(S_n^{(w)} > x\right) \gtrsim \mathrm{P}\left(\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{W}_k\mathrm{X}_k^+ > x\right)$$

هنوز هم برقرار است و در نتیجه حکم ثابت شد. □

فصل ۳

هم‌ارزی مجموع و ماکزیمم مقادیر وزنی تصادفی تحت توزیع‌های مختلف

مطالب این فصل، برگرفته‌شده از مقاله یانگ و همکاران [۱۶]، می‌باشد.

به‌علاوه در این فصل فرض می‌کنیم $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ دو متغیر تصادفی حقیقی‌مقدار و وابسته، متناظر با توزیع‌های به ترتیب $\mathrm{F}_۱$ و $\mathrm{F}_۲$ باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم $\Theta_۱$ و $\Theta_۲$ دو متغیر تصادفی وابسته دلخواه و مستقل از $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ باشند.

اگر $\lim f(x) = a$ باشد، آنگاه آن را با نماد $f(x) \equiv a$ نشان می‌دهیم.

به‌علاوه فرض می‌کنیم وزن‌های تصادفی کران‌دار می‌باشند، به این معنی که ثابت‌های $۰ < a \leq b < \infty$ وجود دارند به‌طوری که برای $k = ۱, ۲$ داریم:

$$\mathrm{P}\left(a \leq \Theta_k \leq b\right) = ۱$$

مجموع وزنی تصادفی و ماکزیمم آن‌ها را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$S_۲^{\Theta} = \Theta_۱\mathrm{X}_۱ + \Theta_۲\mathrm{X}_۲ \quad \text{و} \quad M_۲^{\Theta} = \max\left\{\Theta_۱\mathrm{X}_۱, \Theta_۱\mathrm{X}_۱ + \Theta_۲\mathrm{X}_۲\right\}. \qquad (۱.۳)$$

در ادامه دو متغیر تصادفی $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ را، با همان خواصی که در ابتدا مطرح شد، در نظر می‌گیریم به‌طوری که برای هر $k = ۱, ۲$ توابع توزیع $\mathrm{F}_k \in \mathcal{L}$ یا $\mathrm{F}_k \in \mathcal{D}$ هستند و به‌علاوه بین دو متغیر تصادفی $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ ساختار وابستگی زیر:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_۲ > x \middle| \mathrm{X}_۱ = y\right) \sim h_۱(y)\overline{\mathrm{F}_۲}(x), \\ &\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_۱ > x \middle| \mathrm{X}_۲ = y\right) \sim h_۲(y)\overline{\mathrm{F}_۱}(x). \end{aligned} \qquad (۲.۳)$$

به‌طور یکنواخت برای همه $y \in \mathbb{R}$ برقرار است، که در آن توابع $h_k(.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ := (۰, \infty)$، $k = ۱, ۲$، توابع اندازه‌پذیر هستند و در آن مفهوم یکنواختی به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_i > x \middle| \mathrm{X}_j = y\right)}{h_j(y)\overline{\mathrm{F}_i}(x)} - ۱ \right| = ۰, \quad i, j = ۱, ۲, \quad i \neq j.$$

لازم به ذکر است که اگر y یک مقدار ممکن هر X_j نباشد، آنگاه احتمال $\mathrm{P}(\mathrm{X}_k = y) = ۰$ است، بنابراین چنین احتمالی هر عددی می‌تواند باشد، لذا احتمالات شرطی (۲.۳) غیرشرطی می‌شود و بنابراین برای چنین yای، $h_j(y) = ۱$ می‌شود. واضح است که یکنواختی در (۲.۳) دلالت دارد بر این که $\mathbb{E}h_۱(\mathrm{X}_۱) = \mathbb{E}h_۲(\mathrm{X}_۲) = ۱$ است.

همچنین اگر $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ مستقل از هم باشند، آنگاه $h_۱(y) = h_۲(y) \equiv ۱$ می‌باشد.

ساختار وابستگی (۲.۳) اولین بار توسط آسیمیت و بادسکو، [۱] [۱] پیشنهاد شد.

۱.۳ احتمالات دمی مجانبی و خاصیت بسته بودن تحت پیچش

در ابتدا فضای احتمال را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. سه‌گانه $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ یک فضای احتمال است هرگاه:

۱) Ω یک فضای نمونه باشد.

۲) $\mathcal{F}$ یک σ-میدان از مجموعه‌ها (پیشامدها)یی باشد که زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر از Ω هستند.

۳) P یک اندازه احتمال باشد.

و برای P اصول موضوعه کلموگروف زیر برقرار است:

i: برای هر $A \in \mathcal{F}$، $\mathrm{P}(A) \geq ۰$ به عنوان احتمالی از A می‌باشد.

ii: $\mathrm{P}(\Omega) = ۱$.

iii: فرض کنید $\{A_n; n \geq ۱\}$ مجموعه (پیشامد)های جدا از هم باشند، آنگاه:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

۱.۱.۳ فضای حاصل‌ضرب با بعد متناهی

فرض کنید $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathrm{P}_k)$، که $۱ \leq k \leq n$ می‌باشد، یک فضای احتمالی باشد. اکنون نماد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_۱ \times \mathcal{F}_۲ \times \cdots \times \mathcal{F}_n = \sigma\left\{\mathrm{F}_۱ \times \mathrm{F}_۲ \times \cdots \times \mathrm{F}_n \ : \mathrm{F}_k \in \mathcal{F}_k \,, k = ۱, ۲, \ldots, n\right\}.$$

با توجه به این تعریف و نماد، می‌توان فضای حاصل‌ضربی $\left(\times_{k=۱}^{n} \Omega_k, \times_{k=۱}^{n} \mathcal{F}_k\right)$ را با یک اندازه احتمال وابسته $\mathbb{P}$ ساخت، به‌طوری که:

$$\mathbb{P}\left(A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n\right) = \prod_{k=۱}^{n} \mathrm{P}_k(A_k) \quad : A_k \in \mathcal{F}_k \ , k = ۱, ۲, \ldots, n.$$

[۱] Asimit and Badescu

به‌علاوه باید توجه داشت که اندازه احتمالی فوق یک ساختار مستقل دارد، همچنین فضای احتمالی حاصل‌شده‌ی $\left(\times_{k=1}^{n}\Omega_k, \times_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k, \times_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\right)$ منحصر به فرد است.

۲.۱.۳ قضیه فوبینی

تعریف ۲.۱.۳. متغیر تصادفی X را انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه:

$$\mathbb{E}\mathrm{X} < \infty$$

باشد، به عبارت دیگر امیدریاضی متغیر تصادفی X متناهی باشد.

نتیجه ۳.۱.۳. *اگر* $\mathbb{E}\left(\mid \mathrm{X} \mid\right) < \infty$ *باشد، آن‌گاه* $\mathbb{E}\mathrm{X} < \infty$ *می‌باشد.*

با توجه به تعریف ۲.۱.۳ و نتیجه ۳.۱.۳ نتیجه می‌گیریم که متغیر تصادفی X انتگرال‌پذیر است، اگر $\mid \mathrm{X} \mid$ انتگرال‌پذیر باشد.

حال قضیه‌ای را که به قضیه فوبینی [۲] معروف است، بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۳ (قضیه فوبینی). *فرض کنید* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathrm{P}_1)$ *و* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_2)$ *فضاهای احتمال باشند، و همچنین فضای ضربی* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mathrm{P})$ *را که* $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ *اندازه ضربی تعریف‌شده در بالا است، در نظر می‌گیریم. فرض کنید* $\boldsymbol{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)'$ *متغیر تصادفی دو بعدی باشد و همچنین* g*،* $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$*–اندازه‌پذیر و نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}g(\boldsymbol{X}) &= \int_{\Omega} g(\boldsymbol{X})d\mathrm{P} = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} g(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)d(\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2)\\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} g(\boldsymbol{X})d\mathrm{P}_2\right)d\mathrm{P}_1 = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} g(\boldsymbol{X})d\mathrm{P}_1\right)d\mathrm{P}_2.\end{aligned}$$

برهان. به [۷] مراجعه شود. □

در ادامه به بیان چند لم و قضیه اساسی می‌پردازیم که قبل از آن می‌بایست فرضیه‌ای را مطرح کنیم.
فرضیه A: X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار متناظر با توزیع‌های به ترتیب F_1 و F_2 می‌باشند و همچنین برای آن‌ها رابطه (۲.۳) برقرار است. فرض کنید Θ_1 و Θ_2 متغیرهای تصادفی وابسته دلخواه و مثبت هستند که از X_1 و X_2 مستقل می‌باشند به‌طوری که ثابت‌های مثبت $0 < a \le b < \infty$ وجود دارد که برای $k = 1, 2$:

$$\mathrm{P}\left(a \le \Theta_k \le b\right) = 1$$

در این فصل نشان خواهیم داد که S_2^{Θ} تحت عمل پیچش بسته است و احتمال دمی مجانبی را برای S_2^{Θ} و M_2^{Θ} اثبات خواهیم کرد، برای این منظور نیاز به مقدماتی داریم که آن‌ها را در پیوست بیان کرده‌ایم.

[۲] Fubini's Theorem

لم ۵.۱.۳. *فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی حقیقی‌مقدار با توابع توزیع به ترتیب F_1 و F_2 باشند، و همچنین فرض کنید ساختار وابستگی (۲.۳) برقرار باشد. اگر $\mathrm{F}_k \in \mathcal{L}$ باشد آن‌گاه برای هر $A > 0$ رابطه*

$$\mathrm{P}\left(w_1\mathrm{X}_1 + w_2\mathrm{X}_2 > x - A\right) \sim \mathrm{P}\left(w_1\mathrm{X}_1 + w_2\mathrm{X}_2 > x\right) \tag{۳.۳}$$

به‌طور یکنواخت برای همه $(w_1, w_2) \in [a,b] \times [a,b]$ که $0 < a \leq b < \infty$ برقرار است و مفهوم یکنواختی به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

$$\limsup \sup_{w_1, w_2 \in [a,b]} \left| \frac{\mathrm{P}\left(w_1\mathrm{X}_1 + w_2\mathrm{X}_2 > x - A\right)}{\mathrm{P}\left(w_1\mathrm{X}_1 + w_2\mathrm{X}_2 > x\right)} - 1 \right| = 0.$$

برهان. از آن‌جا که $A > 0$ است، لذا اثبات رابطه (۳.۳) معادل است با این که اثبات کنیم:

$$\limsup \sup_{w_1, w_2 \in [a,b]} \frac{\mathrm{P}\left(w_1\mathrm{X}_1 + w_2\mathrm{X}_2 > x - A\right)}{\mathrm{P}\left(w_1\mathrm{X}_1 + w_2\mathrm{X}_2 > x\right)} \leq 1 \tag{۴.۳}$$

در ابتدا فرض می‌کنیم $\varepsilon \in (0, 1)$ باشد. با توجه به این که $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{L}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\begin{aligned}
\limsup \sup_{w_2 \in [a,b]} \frac{\mathrm{P}\left(w_2\mathrm{X}_2 > x - A\right)}{\mathrm{P}\left(w_2\mathrm{X}_2 > x\right)} &= \limsup \sup_{w_2 \in [a,b]} \frac{\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{w_2} - \frac{A}{w_2}\right)}{\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{w_2}\right)} \\
&\leq \limsup \sup_{w_2 \in [a,b]} \frac{\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{w_2} - \frac{A}{a}\right)}{\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{w_2}\right)} \\
&\leq \limsup \sup_{z \geq \frac{x}{b}} \frac{\overline{\mathrm{F}_2}\left(z - \frac{A}{a}\right)}{\overline{\mathrm{F}_2}(z)} = 1.
\end{aligned}$$

از این رو، $x_1 > A$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x \geq x_1$:

$$1 \leq \sup_{w_2 \in [a,b]} \frac{\mathrm{P}\left(w_2\mathrm{X}_2 > x - A\right)}{\mathrm{P}\left(w_2\mathrm{X}_2 > x\right)} \leq 1 + \varepsilon \tag{۵.۳}$$

به‌علاوه از رابطه (۲.۳) نتیجه زیر برای $y \in \mathbb{R}$ و برای هر x به اندازه کافی بزرگ $(x \geq x_2 > 2x_1)$ به‌دست می‌آید:

$$(1 - \varepsilon)h_1(y)\overline{\mathrm{F}_2}(x) \leq \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_2 > x \middle| \mathrm{X}_1 = y\right) \leq (1 + \varepsilon)h_1(y)\overline{\mathrm{F}_2}(x) \tag{۶.۳}$$

اگر $x \geq x_2$ باشد، آن‌گاه با توجه به تعریف پیچش برای صورت و مخرج کسر داریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{P}\left(w_۱\mathrm{X}_۱+w_۲\mathrm{X}_۲>x-A\right)}{\mathrm{P}\left(w_۱\mathrm{X}_۱+w_۲\mathrm{X}_۲>x\right)}\\
&=\frac{\left(\int_{-\infty}^{(x-x_۲-A)/w_۱}+\int_{(x-x_۲-A)/w_۱}^{\infty}\right)\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u-A\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}{\left(\int_{-\infty}^{(x-x_۲)/w_۱}+\int_{(x-x_۲)/w_۱}^{\infty}\right)\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}\\
&:=\frac{I_{۱۱}(x)+I_{۱۲}(x)}{I_{۲۱}(x)+I_{۲۲}(x)}\\
&\le\max\left\{\frac{I_{۱۱}(x)}{I_{۲۱}(x)},\frac{I_{۱۲}(x)}{I_{۲۲}(x)}\right\}.
\end{aligned}
\tag{۷.۳}
$$

حال با به‌کارگیری روابط (۵.۳) و (۶.۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]}\frac{I_{۱۱}(x)}{I_{۲۱}(x)}&\le\frac{۱+\varepsilon}{۱-\varepsilon}\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]}\frac{\int_{-\infty}^{(x-x_۲-A)/w_۱}\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u-A\right)h_۱(u)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}{\int_{-\infty}^{(x-x_۲)/w_۱}\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u\right)h_۱(u)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}\\
&\le\frac{۱+\varepsilon}{۱-\varepsilon}\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]}\ \sup_{u\le(x-x_۲)/w_۱}\frac{\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u-A\right)}{\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u\right)}\\
&\le\frac{(۱+\varepsilon)^۲}{۱-\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{۸.۳}
$$

حال به بررسی $\frac{I_{۱۲}(x)}{I_{۲۲}(x)}$ می‌پردازیم، لذا داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{I_{۱۲}(x)}{I_{۲۲}(x)}&=\frac{\left(\int_{(x-x_۲-A)/w_۱}^{(x-A)/w_۱}+\int_{(x-A)/w_۱}^{\infty}\right)\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u-A\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}{\left(\int_{(x-x_۲)/w_۱}^{x/w_۱}+\int_{x/w_۱}^{\infty}\right)\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}\\
&\le\frac{\mathrm{P}\left(\left(x-x_۲-A\right)/w_۱<\mathrm{X}_۱\le\left(x-A\right)/w_۱\right)}{\int_{x/w_۱}^{\infty}\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}\\
&+\frac{\int_{(x-A)/w_۱}^{\infty}\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u-A\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}{\int_{x/w_۱}^{\infty}\mathrm{P}\left(w_۲\mathrm{X}_۲>x-w_۱u\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)}\\
&:=I_۳(x)+I_۴(x).
\end{aligned}
\tag{۹.۳}
$$

اکنون به تخمین‌هایی برای $I_۳(x)$ و $I_۴(x)$ می‌پردازیم:
برای $\varepsilon>۰$ فوق، یک مقدار بزرگ $x_۳\ge x_۲$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x\ge x_۳$ و هر $w_۱\in[a,b]$ با توجه به رابطه (۶.۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
\int_{x/w_۱}^{\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_۲>۰\middle|\mathrm{X}_۱=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۱(u)\right)&=\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_۱>\frac{x}{w_۱},\mathrm{X}_۲>۰\right)\\
&=\int_۰^{\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_۱>\frac{x}{w_۱}\middle|\mathrm{X}_۲=u\right)\,d\left(\mathrm{F}_۲(u)\right)\\
&\ge(۱-\varepsilon)\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{w_۱}\right)\mathbb{E}h_۲(\mathrm{X}_۲)I_{\{\mathrm{X}_۲>۰\}}.
\end{aligned}
\tag{۱۰.۳}
$$

که در رابطه (۱۰.۳)، امید ریاضی تعریف‌شده، به دلیل سنگین‌دمی توزیع $F_۲$ مثبت است، یعنی:

$$\mathbb{E}h_۲(X_۲)I_{\{X_۲>۰\}} > ۰$$

از این‌رو با توجه به رابطه (۱۰.۳) و این که $F_۱ \in \mathcal{L}$ است، مقدار بزرگ $x_۴ \geq x_۳$ وجود دارد به‌طوری که برای $x \geq x_۴$ داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]} I_۳(x) &\leq \sup_{w_۱\in[a,b]} \frac{\overline{F_۱}\left(\left(x-x_۲-A\right)/w_۱\right)-\overline{F_۱}\left(\left(x-A\right)/w_۱\right)}{\int_{x/w_۱}^{\infty} P\left(X_۲>۰\middle|X_۱=u\right)\, d\left(F_۱(u)\right)} \\
&\leq \frac{۱}{(۱-\varepsilon)\mathbb{E}h_۲(X_۲)I_{\{X_۲>۰\}}} \sup_{w_۱\in[a,b]} \frac{\overline{F_۱}\left(\left(x-x_۲-A\right)/w_۱\right)-\overline{F_۱}\left(\left(x-A\right)/w_۱\right)}{\overline{F_۱}(x/w_۱)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{(۱-\varepsilon)\mathbb{E}h_۲(X_۲)I_{\{X_۲>۰\}}} \qquad (۱۱.۳)
\end{aligned}$$

برای مخرج $I_۴(x)$ با توجه به روابط (۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{x/w_۱}^{\infty} P\left(w_۲X_۲>x-w_۱u\middle|X_۱=u\right)\, d\left(F_۱(u)\right) &= P\left(w_۱X_۱+w_۲X_۲>x, X_۱>x/w_۱\right) \\
&= \int_{-\infty}^{۰} P\left(w_۱X_۱>x-w_۲u\middle|X_۲=u\right)\, d\left(F_۲(u)\right) \\
&+ \int_{۰}^{\infty} P\left(w_۱X_۱>x\middle|X_۲=u\right)\, d\left(F_۲(u)\right).
\end{aligned}$$

حال برای یک مقدار بزرگ $x \geq x_۵ \geq x_۴$ داریم:

$$\inf_{w_۱,w_۲\in[a,b]} \inf_{u\leq۰} \frac{P\left(w_۱X_۱>x-w_۲u\middle|X_۲=u\right)}{P\left(w_۱X_۱>x-w_۲u\right)h_۲(u)} \geq \inf_{z\geq\frac{x}{b}} \inf_{u\leq۰} \frac{P\left(X_۱>z\middle|X_۲=u\right)}{P\left(X_۱>z\right)h_۲(u)} \geq ۱-\varepsilon$$

و همچنین:

$$\inf_{w_۱\in[a,b]} \inf_{u>۰} \frac{P\left(w_۱X_۱>x\middle|X_۲=u\right)}{P\left(w_۱X_۱>x\right)h_۲(u)} \geq ۱-\varepsilon,$$

دو inf فوق، این مطلب را به‌طور یکنواخت برای $w_۱,w_۲\in[a,b]$ به‌دست می‌دهد که:

$$\begin{aligned}
&\int_{x/w_۱}^{\infty} P\left(w_۲X_۲>x-w_۱u\middle|X_۱=u\right)\, d\left(F_۱(u)\right) \\
&\geq (۱-\varepsilon)\left(\int_{-\infty}^{۰} P\left(w_۱X_۱>x-w_۲u\right)h_۲(u)\, d\left(F_۲(u)\right)+P\left(w_۱X_۱>x\right)\mathbb{E}h_۲(X_۲)I_{\{X_۲>۰\}}\right).
\end{aligned}$$

به طریق مشابه، صورت کسر $I_۴(x)$ برای هر $x \geq x_۶ \geq x_۵$ به طور یکنواخت برای $w_۱,w_۲\in[a,b]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\int_{(x-A)/w_۱}^{\infty} P\left(w_۲X_۲>x-w_۱u-A\middle|X_۱=u\right)\, d\left(F_۱(u)\right) \\
&\leq (۱+\varepsilon)\left(\int_{-\infty}^{۰} P\left(w_۱X_۱>x-w_۲u-A\right)h_۲(u)\, d\left(F_۲(u)\right)+P\left(w_۱X_۱>x-A\right)\mathbb{E}h_۲(X_۲)I_{\{X_۲>۰\}}\right).
\end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به این که $F_۱ \in \mathcal{L}$، برای مقدار بزرگ $x \geq x_۷ \geq x_۶$ رابطه زیر برقرار است:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]} I_۴(x) \\
&\leq \frac{۱+\varepsilon}{۱-\varepsilon}\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]}\frac{\int_{-\infty}^{۰}\overline{\mathrm{F}_۱}((x-w_۲u-A)/w_۱)h_۲(u)\,d\left(\mathrm{F}_۲(u)\right)+\overline{\mathrm{F}_۱}((x-A)/w_۱)\mathbb{E}h_۲(\mathrm{X}_۲)I_{\{\mathrm{X}_۲>۰\}}}{\int_{-\infty}^{۰}\overline{\mathrm{F}_۱}((x-w_۲u)/w_۱)h_۲(u)\,d\left(\mathrm{F}_۲(u)\right)+\overline{\mathrm{F}_۱}(x/w_۱)\mathbb{E}h_۲(\mathrm{X}_۲)I_{\{\mathrm{X}_۲>۰\}}} \\
&\leq \frac{۱+\varepsilon}{۱-\varepsilon}\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]}\max\left\{\sup_{u\leq ۰}\frac{\overline{\mathrm{F}_۱}((x-w_۲u-A)/w_۱)}{\overline{\mathrm{F}_۱}((x-w_۲u)/w_۱)},\frac{\overline{\mathrm{F}_۱}((x-A)/w_۱)}{\overline{\mathrm{F}_۱}(x/w_۱)}\right\} \\
&\leq \frac{(۱+\varepsilon)^۲}{۱-\varepsilon}
\end{aligned}
$$

(۱۲.۳)

در نتیجه با ادغام و جایگزین کردن روابط (۱۱.۳) و (۱۲.۳) در رابطه (۹.۳) داریم:

$$\sup_{x\geq x_۷}\sup_{w_۱,w_۲\in[a,b]}\frac{I_{۱۲}(x)}{I_{۲۲}(x)}\leq\frac{(۱+\varepsilon)^۲}{۱-\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{(۱-\varepsilon)\mathbb{E}h_۲(\mathrm{X}_۲)I_{\{\mathrm{X}_۲>۰\}}}. \qquad (۱۳.۳)$$

در نهایت رابطه (۴.۳)، از روابط (۷.۳)، (۸.۳) و (۱۳.۳) و با توجه به این که ε دلخواه است، به‌دست می‌آید. □

لم ۶.۱.۳. *فرض کنید $\mathrm{G}_۱$، $\mathrm{G}_۲$ و H توزیع‌هایی روی مجموعه اعداد حقیقی باشند، به‌طوری که برای مقدار متناهی $d_۱>۰$، $\overline{\mathrm{G}_۱}(x)\lesssim d_۱\overline{\mathrm{G}_۲}(x)$ و $\mathrm{H}\in\mathcal{D}$ می‌باشند. در این صورت یک ثابت متناهی $d_۲>۰$ وجود دارد به‌طوری که:*

$$\overline{\mathrm{G}_۱*\mathrm{H}}(x)\lesssim d_۲\overline{\mathrm{G}_۲*\mathrm{H}}(x).$$

برهان. به [۱۶] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۱.۳. *فرض کنید که فرضیه A برقرار باشد. اگر برای $k=۱,۲$، F_k متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم باشد، آن‌گاه توزیع $S_۲^{\Theta}$ نیز درازدم است و به‌علاوه رابطه:*

$$\mathrm{P}\left(M_۲^{\Theta}>x\right)\sim\mathrm{P}\left(S_۲^{\Theta}>x\right)\sim\mathrm{P}\left(S_۲^{\Theta^+}>x\right). \qquad (۱۴.۳)$$

برقرار است، که در آن $S_۲^{\Theta^+}=\Theta_۱\mathrm{X}_۱^+ +\Theta_۲\mathrm{X}_۲^+$.

برهان. از آن‌جا که بردارهای $(\Theta_۱,\Theta_۲)$ و $(\mathrm{X}_۱,\mathrm{X}_۲)$ مستقل از هم هستند، با استفاده از لم ۵.۱.۳ برای هر $A>۰$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_۲^{\Theta}>x-A\right)&=\int_{a-}^{b}\int_{a-}^{b}\mathrm{P}\left(w_۱\mathrm{X}_۱+w_۲\mathrm{X}_۲>x-A\right)\mathrm{P}\left(\Theta_۱\in dw_۱,\Theta_۲\in dw_۲\right) \\
&\sim\int_{a-}^{b}\int_{a-}^{b}\mathrm{P}\left(w_۱\mathrm{X}_۱+w_۲\mathrm{X}_۲>x\right)\mathrm{P}\left(\Theta_۱\in dw_۱,\Theta_۲\in dw_۲\right) \\
&=\mathrm{P}\left(S_۲^{\Theta}>x\right),
\end{aligned}
$$

این رابطه به این معنی است که: $S_{۲}^{\Theta} \in \mathcal{L}$.
حال رابطه (۱۴.۳) را اثبات می‌کنیم. برای این منظور می‌دانیم:

$$S_{۲}^{\Theta} \leq M_{۲}^{\Theta} \leq \Theta_{۱}\mathrm{X}_{۱}{}^{+} + \Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲}{}^{+} := S_{۲}^{\Theta^{+}}$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$\mathrm{P}\left(S_{۲}^{\Theta} > x\right) \gtrsim \mathrm{P}\left(S_{۲}^{\Theta^{+}} > x\right). \tag{۱۵.۳}$$

برای هر $x > ۰$، احتمال دمی سمت چپ رابطه (۱۵.۳) را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(S_{۲}^{\Theta} > x\right) &= \mathrm{P}\left(\Theta_{۱}\mathrm{X}_{۱} + \Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲}{}^{+} > x, \mathrm{X}_{۱} \leq ۰, \mathrm{X}_{۲} > ۰\right)\\ &+ \mathrm{P}\left(\Theta_{۱}\mathrm{X}_{۱}{}^{+} + \Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x, \mathrm{X}_{۱} > ۰, \mathrm{X}_{۲} \leq ۰\right),\\ &+ \mathrm{P}\left(\Theta_{۱}\mathrm{X}_{۱}{}^{+} + \Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲}{}^{+} > x, \mathrm{X}_{۱} > ۰, \mathrm{X}_{۲} > ۰\right)\\ &:= j_{۱}(x) + j_{۲}(x) + j_{۳}(x).\end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

حالت دیگر، عبارت $\mathrm{P}\left(\Theta_{۱}\mathrm{X}_{۱} + \Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x, \mathrm{X}_{۱} \leq ۰, \mathrm{X}_{۲} \leq ۰\right)$ می‌باشد که با توجه به حوزه تعریف $\mathrm{X}_{۱}$ و $\mathrm{X}_{۲}$ و هم‌چنین مثبت بودن x حاصل احتمال فوق برابر با صفر می‌شود، به همین دلیل از نوشتن آن صرف‌نظر کرده‌ایم.
ابتدا $j_{۱}(x)$ را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{۱} \leq ۰\right) > ۰$ باشد. (در حالتی‌که $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{۱} \leq ۰\right) = ۰$ باشد، با توجه به این که $j_{۱}(x) \leq \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{۱} \leq ۰\right) = ۰$ می‌باشد، آن‌گاه: $j_{۱}(x) = ۰$).
با توجه به لم ۲.۷.۲ در فصل ۲ توزیع $\Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲}$ درازدم می‌باشد. از این رو با توجه به وابستگی (۲.۳) و قضیه ۴.۱.۳ (قضیه فوبینی) برای هر $\varepsilon \in (۰, ۱)$ دلخواه و x بزرگ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{J_{۱}(x)}{\mathrm{P}\left(\Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x\right)} &\geq \frac{\mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_{۱} + \Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲}^{+} > x, \mathrm{X}_{۱} \leq ۰, \mathrm{X}_{۲} > ۰\right)}{\mathrm{P}\left(\Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x\right)}\\ &= \frac{۱}{\mathrm{P}\left(\Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x\right)} \int_{a-}^{b} \int_{-\infty}^{۰} \mathrm{P}\left(w_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x - bu \middle| \mathrm{X}_{۱} = u\right) \, d\left(\mathrm{F}_{۱}(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_{۲} \in dw_{۲}\right)\\ &\geq \frac{۱ - \varepsilon}{\mathrm{P}\left(\Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x\right)} \int_{a-}^{b} \int_{-\infty}^{۰} \mathrm{P}\left(w_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x - bu\right) h_{۱}(u) \, d\left(\mathrm{F}_{۱}(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_{۲} \in dw_{۲}\right)\\ &= (۱ - \varepsilon) \int_{-\infty}^{۰} \frac{\mathrm{P}\left(\Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x - bu\right)}{\mathrm{P}\left(\Theta_{۲}\mathrm{X}_{۲} > x\right)} h_{۱}(u) \, d\left(\mathrm{F}_{۱}(u)\right).\end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

با توجه به قضیه ۱۶.۱.آ، انتگرال رابطه (۱۷.۳) به سمت $\mathbb{E}h_{۱}(X_{۱}) I_{\{\mathrm{X}_{۱} \leq ۰\}} > ۰$ میل می‌کند. از

طرف دیگر با توجه به ساختار وابستگی (۲.۳)، برای xهای بزرگ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\Theta_2 X_2^+ > x, X_1 \leq 0, X_2 > 0\right) &= \mathrm{P}\left(\Theta_2 X_2 > x, X_1 \leq 0\right) \\
&= \int_{a-}^{b}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(w_2 X_2 > x \middle| X_1 = u\right)\, d\left(F_1(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_2 \in dw_2\right) \\
&\leq (1+\varepsilon)\int_{a-}^{b}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(w_2 X_2 > x\right) h_1(u)\, d\left(F_1(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_2 \in dw_2\right) \\
&= (1+\varepsilon)\mathrm{P}\left(\Theta_2 X_2 > x\right) \mathbb{E} h_1(X_1)\, I_{\{X_1 \leq 0\}}. \qquad (18.3)
\end{aligned}$$

با استفاده از (۱۷.۳) و (۱۸.۳) داریم که:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\Theta_2 X_2^+ > x, X_1 \leq 0, X_2 > 0\right) &\leq (1+\varepsilon)\mathrm{P}\left(\Theta_2 X_2 > x\right) \mathbb{E} h_1(X_1)\, I_{\{X_1 \leq 0\}} \\
&\leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\, j_1(x).
\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$j_1(x) \gtrsim \mathrm{P}\left(\Theta_2 X_2^+ > x, X_1 \leq 0, X_2 > 0\right) = \mathrm{P}\left(S_2^{\Theta^+} > x, X_1 \leq 0, X_2 > 0\right). \qquad (19.3)$$

برای $j_2(x)$ به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{J_2(x)}{\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x\right)} &\geq \frac{\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1^+ + bX_2 > x, X_1 > 0, X_2 \leq 0\right)}{\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x\right)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x\right)}\int_{a-}^{b}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(w_1 X_1 > x - bu \middle| X_2 = u\right)\, d\left(F_2(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_1 \in dw_1\right) \\
&\geq \frac{1-\varepsilon}{\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x\right)}\int_{a-}^{b}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(w_1 X_1 > x - bu\right) h_2(u)\, d\left(F_2(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_1 \in dw_1\right) \\
&= (1-\varepsilon)\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x - bu\right)}{\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x\right)} h_2(u)\, d\left(F_2(u)\right). \qquad (20.3)
\end{aligned}$$

مانند قبل با توجه به قضیه ۱۶.۱.آ، انتگرال (۲۰.۳) به سمت $\mathbb{E} h_2(X_2)\, I_{\{X_2 \leq 0\}} > 0$ میل می‌کند.
همچنین با توجه به روابط (۲.۳)، برای xهای بزرگ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1^+ > x, X_1 > 0, X_2 \leq 0\right) &= \mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x, X_2 \leq 0\right) \\
&= \int_{a-}^{b}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(w_1 X_1 > x \middle| X_2 = u\right)\, d\left(F_2(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_1 \in dw_1\right) \\
&\leq (1+\varepsilon)\int_{a-}^{b}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(w_1 X_1 > x\right) h_2(u)\, d\left(F_2(u)\right) \mathrm{P}\left(\Theta_1 \in dw_1\right) \\
&= (1+\varepsilon)\mathrm{P}\left(\Theta_1 X_1 > x\right) \mathbb{E} h_2(X_2)\, I_{\{X_2 \leq 0\}}. \qquad (21.3)
\end{aligned}$$

پس در نتیجه اگر $\mathrm{P}\left(X_2 \leq 0\right) > 0$ و در حالت دیگر $j_2(x) = 0$ باشد، داریم:

$$j_2(x) \gtrsim \mathrm{P}\left(S_2^{\Theta^+} > x, X_1 > 0, X_2 \leq 0\right). \qquad (22.3)$$

با جایگزینی روابط (۱۹.۳) و (۲۲.۳) در (۱۶.۳) داریم:

$$\mathrm{P}\left(S_{۲}^{\Theta}>x\right) \gtrsim \mathrm{P}\left(S_{۲}^{\Theta^{+}}>x\right).$$

□

قضیه ۸.۱.۳. *فرض کنید* $\{(\mathrm{X}_{۲k-۱},\mathrm{X}_{۲k}),\, k\geq ۱\}$ *دنباله‌ای از بردارهای تصادفی مستقل با توزیع‌های حاشیه‌ای به ترتیب* $\mathrm{F}_{۲k-۱}$ *و* $\mathrm{F}_{۲k}$ *باشد و نیز فرض کنید* $\{(\Theta_{۲k-۱},\Theta_{۲k}),\, k\geq ۱\}$ *دنباله‌ای از بردارهای تصادفی مستقل باشد به‌طوری‌که برای هر* $k\geq ۱$ *و ثابت‌های* $a\leq b$، $\mathrm{P}\left(a\leq\Theta_k\leq b\right)=۱$ *می‌باشد. هم‌چنین فرض کنید دنباله‌های* $\{(\mathrm{X}_{۲k-۱},\mathrm{X}_{۲k}),\, k\geq ۱\}$ *و* $\{(\Theta_{۲k-۱},\Theta_{۲k}),\, k\geq ۱\}$ *مستقل از هم هستند. علاوه بر این فرض کنید‌که برای هر* $k\geq ۱$ *تابع اندازه‌پذیر* $h_k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{+}$ *وجود دارد به‌طوری که روابط:*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{۲k-۱}>x\middle|\mathrm{X}_{۲k}=y\right)&\sim h_{۲k}(y)\overline{\mathrm{F}_{۲k-۱}}(x)\\ \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{۲k}>x\middle|\mathrm{X}_{۲k-۱}=y\right)&\sim h_{۲k-۱}(y)\overline{\mathrm{F}_{۲k}}(x)\end{aligned}$$

برای $y\in\mathbb{R}$ *به‌طور یکنواخت برقرار است. حال اگر برای* $k\geq ۱$، $\mathrm{F}_k\in\mathcal{L}$ *باشد آن‌گاه برای هر* $n\geq ۱$ *داریم:*

$$\mathrm{P}\left(M_{۲n}^{\Theta}>x\right)\sim\mathrm{P}\left(S_{۲n}^{\Theta}>x\right)\sim\mathrm{P}\left(S_{۲n}^{\Theta^{+}}>x\right).$$

برهان. چون رابطه $S_{۲n}^{\Theta}\leq M_{۲n}^{\Theta}\leq S_{۲n}^{\Theta^{+}}:=\sum_{k=۱}^{۲n}\Theta_k\mathrm{X}_k^{+}$ برقرار می‌باشد، پس تنها کافی است برای $n\geq ۱$ دلخواه ثابت کنیم:

$$\mathrm{P}\left(S_{۲n}^{\Theta}>x\right)\sim\mathrm{P}\left(S_{۲n}^{\Theta^{+}}>x\right). \qquad (۲۳.۳)$$

اثبات را به وسیله استقراء ادامه می‌دهیم:
با توجه به قضیه ۷.۱.۳ رابطه هم‌ارزی (۲۳.۳) برای $n=۱$ برقرار است. اکنون فرض می‌کنیم رابطه (۲۳.۳) برای $n=N$ برقرار باشد یعنی:

$$\mathrm{P}\left(S_{۲N}^{\Theta}>x\right)\sim\mathrm{P}\left(S_{۲N}^{\Theta^{+}}>x\right). \qquad (۲۴.۳)$$

با توجه به قضیه ۷.۱.۳ برای هر $k\geq ۱$ داریم:

$$\mathrm{P}\left(\Theta_{۲k-۱}\mathrm{X}_{۲k-۱}+\Theta_{۲k}\mathrm{X}_{۲k}>x\right)\sim\mathrm{P}\left(\Theta_{۲k-۱}\mathrm{X}_{۲k-۱}^{+}+\Theta_{۲k}\mathrm{X}_{۲k}^{+}>x\right) \qquad (۲۵.۳)$$

و هم‌چنین توزیع‌های متغیرهای تصادفی $\Theta_{۲k-۱}\mathrm{X}_{۲k-۱}+\Theta_{۲k}\mathrm{X}_{۲k}$ و $\Theta_{۲k-۱}\mathrm{X}_{۲k-۱}^{+}+\Theta_{۲k}\mathrm{X}_{۲k}^{+}$ متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم می‌باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم $\widehat{\mathrm{G}}$ تابع توزیع متغیر تصادفی

$$\Theta_{۲N+۱}\mathrm{X}_{۲N+۱}+\Theta_{۲N+۲}\mathrm{X}_{۲N+۲}$$

باشد.

چون $\widehat{\mathrm{G}}$ درازدم است، بنابراین با توجه به رابطه (۲۴.۳) و قضیه ۲.۳.۲ در فصل ۲ داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(S_{۲(N+۱)}^{\Theta}>x\right) &= \mathrm{P}\left(S_{۲N}^{\Theta}+\Theta_{۲N+۱}\mathrm{X}_{۲N+۱}+\Theta_{۲N+۲}\mathrm{X}_{۲N+۲}>x\right)\\ &\sim \mathrm{P}\left(S_{۲N}^{\Theta^+}+\Theta_{۲N+۱}\mathrm{X}_{۲N+۱}+\Theta_{۲N+۲}\mathrm{X}_{۲N+۲}>x\right). \end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

اکنون فرض می‌کنیم $\widetilde{\mathrm{G}}$ تابع توزیع $S_{۲N}^{\Theta^+}$ باشد، پس با توجه به اولین نتیجه قضیه ۱.۴.۲ در فصل ۲، $\widetilde{\mathrm{G}}$ نیز درازدم می‌باشد. لذا با توجه به رابطه (۲۵.۳) و دوباره قضیه ۲.۳.۲ در فصل ۲ داریم که:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(S_{۲N}^{\Theta^+}+\Theta_{۲N+۱}\mathrm{X}_{۲N+۱}+\Theta_{۲N+۲}\mathrm{X}_{۲N+۲}>x\right) &\sim \mathrm{P}\left(S_{۲N}^{\Theta^+}+\Theta_{۲N+۱}\mathrm{X}_{۲N+۱}^{+}+\Theta_{۲N+۲}\mathrm{X}_{۲N+۲}^{+}>x\right)\\ &= \mathrm{P}\left(S_{۲(N+۱)}^{\Theta^+}>x\right). \end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

در نتیجه با در نظر گرفتن روابط (۲۶.۳) و (۲۷.۳) و استدلال استقرایی به کار گرفته‌شده رابطه (۲۳.۳) برای هر n برقرار است یعنی:

$$\mathrm{P}\left(S_{۲n}^{\Theta}>x\right)\sim \mathrm{P}\left(S_{۲n}^{\Theta^+}>x\right).$$

□

قضیه ۹.۱.۳. *فرض کنید فرضیه A برقرار باشد. اگر برای $k=۱,۲$، F_k متعلق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی باشد، آن‌گاه توزیع $S_۲^{\Theta}$ نیز متعلق به همین کلاس است و برای بعضی $c>۰$ رابطه*

$$c\mathrm{P}\left(S_۲^{\Theta^+}>x\right)\lesssim \mathrm{P}\left(S_۲^{\Theta}>x\right)\le \mathrm{P}\left(M_۲^{\Theta}>x\right)\le \mathrm{P}\left(S_۲^{\Theta^+}>x\right). \tag{۲۸.۳}$$

برقرار می‌باشد.

برهان. برای اثبات این که تابع توزیع $S_۲^{\Theta}=\Theta_۱\mathrm{X}_۱+\Theta_۲\mathrm{X}_۲$ متعلق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی است، کافی است نشان دهیم:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\mathrm{P}\left(\Theta_۱\mathrm{X}_۱+\Theta_۲\mathrm{X}_۲>\frac{x}{۲}\right)}{\mathrm{P}\left(\Theta_۱\mathrm{X}_۱+\Theta_۲\mathrm{X}_۲>x\right)}<\infty. \tag{۲۹.۳}$$

برای هر $x>۰$ و همچنین تعریف $X^+:=\max\{X,۰\}$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\Theta_۱\mathrm{X}_۱+\Theta_۲\mathrm{X}_۲>\frac{x}{۲}\right) &\le \mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_۱^{+}+b\mathrm{X}_۲^{+}>\frac{x}{۲}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(b\left(\mathrm{X}_۱^{+}+\mathrm{X}_۲^{+}\right)>\frac{x}{۲}\right)\\ &\overbrace{\le \mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_۱^{+}>\frac{x}{۴}\right)+\mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_۲^{+}>\frac{x}{۴}\right)}^{(۱)}\\ &= \overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{۴b}\right)+\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{۴b}\right). \end{aligned} \tag{۳۰.۳}$$

که نامساوی (۱) با توجه به این نکته نتیجه می‌شود که زمانی مجموع دو متغیر تصادفی از مقداری خاص بیش‌تر است که حداقل یکی از آن دو متغیر تصادفی از نصف مقدار مورد نظر بیش‌تر باشد.
هم‌چنین مانند قضیه ۷.۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(S_{2}^{\Theta} > x\right) &= \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1 + \Theta_2 {\mathrm{X}_2}^{+} > x, \mathrm{X}_1 \le 0, \mathrm{X}_2 > 0\right) \\ &\quad + \mathrm{P}\left(\Theta_1 {\mathrm{X}_1}^{+} + \Theta_2 \mathrm{X}_2 > x, \mathrm{X}_1 > 0, \mathrm{X}_2 \le 0\right), \\ &\quad + \mathrm{P}\left(\Theta_1 {\mathrm{X}_1}^{+} + \Theta_2 {\mathrm{X}_2}^{+} > x, \mathrm{X}_1 > 0, \mathrm{X}_2 > 0\right) \\ &:= j_1(x) + j_2(x) + j_3(x). \end{aligned} \tag{۳۱.۳}$$

بدون از دست دادن کلیّت مسأله فرض می‌کنیم برای $k = 1, 2$: $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_k \le 0\right) > 0$.
حال با توجه به ساختار وابستگی (۲.۳) برای xهای به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\begin{aligned} j_2(x) &\ge \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1^{+} + b\mathrm{X}_2 > x, \mathrm{X}_1 > 0, \mathrm{X}_2 \le 0\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1 + b\mathrm{X}_2 > x, \mathrm{X}_2 \le 0\right) \\ &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1 > x - bu \middle| \mathrm{X}_2 = u\right)\, d\left(\mathrm{F}_2(u)\right) \\ &\ge \int_{-\frac{x}{b}}^{0} \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1 > 2x \middle| \mathrm{X}_2 = u\right)\, d\left(\mathrm{F}_2(u)\right) \\ &\ge \frac{1}{2} \int_{-\frac{x}{b}}^{0} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{2x}{a}\right) h_2(u)\, d\left(\mathrm{F}_2(u)\right) \\ &= \frac{1}{2} \overline{\mathrm{F}_1}\left(\frac{2x}{a}\right) \mathbb{E} h_2(\mathrm{X}_2) I_{\left\{-\frac{x}{b} < \mathrm{X}_2 \le 0\right\}}. \end{aligned} \tag{۳۲.۳}$$

هم‌چنین دوباره برای xهای به اندازه کافی بزرگ به‌طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1^{+} > x, \mathrm{X}_1 > 0, \mathrm{X}_2 \le 0\right) &\le \mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_1 > x, \mathrm{X}_2 \le 0\right) \\ &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 > \frac{x}{b} \middle| \mathrm{X}_2 = u\right)\, d\left(\mathrm{F}_2(u)\right) \\ &\le 2\overline{\mathrm{F}_1}\left(\frac{x}{b}\right) \mathbb{E} h_2(\mathrm{X}_2) I_{\{\mathrm{X}_2 \le 0\}}. \end{aligned} \tag{۳۳.۳}$$

بنابراین با توجه به روابط (۳۲.۳) و (۳۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \liminf_{x\to\infty} \frac{j_2(x)}{\mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1^{+} > x, \mathrm{X}_1 > 0, \mathrm{X}_2 \le 0\right)} &\ge \frac{1}{4} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}_1}\left(\frac{2x}{a}\right)}{\overline{\mathrm{F}_1}\left(\frac{x}{b}\right)} \liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E} h_2(\mathrm{X}_2) I_{\left\{-\frac{x}{b} < \mathrm{X}_2 \le 0\right\}}}{\mathbb{E} h_2(\mathrm{X}_2) I_{\{\mathrm{X}_2 \le 0\}}} \\ &\ge c_1 > 0. \end{aligned}$$

از این‌رو برای xهای بزرگ و مقدار ثابت $c_2 > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} j_2(x) &\ge c_2 \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1^{+} > x, \mathrm{X}_1 > 0, \mathrm{X}_2 \le 0\right) \\ &= c_2 \mathrm{P}\left(\Theta_1 \mathrm{X}_1^{+} + \Theta_2 \mathrm{X}_2^{+} > x, \mathrm{X}_1 > 0, \mathrm{X}_2 \le 0\right). \end{aligned}$$

به‌طور مشابه برای $j_1(x)$ واضح است که:

$$\begin{aligned} j_1(x) &\geq \mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_1+\Theta_2\mathrm{X}_2^+>x, \mathrm{X}_1\leq 0, \mathrm{X}_2>0\right)\\ &=\mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_1+\Theta_2\mathrm{X}_2>x, \mathrm{X}_1\leq 0\right)\\ &=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{P}\left(\Theta_2\mathrm{X}_2>x-bu\middle|\mathrm{X}_1=u\right)\, d\left(\mathrm{F}_1(u)\right)\\ &\geq\int_{-\frac{x}{b}}^{0}\mathrm{P}\left(\Theta_2\mathrm{X}_2>2x\middle|\mathrm{X}_1=u\right)\, d\left(\mathrm{F}_1(u)\right)\\ &\geq\frac{1}{2}\int_{-\frac{x}{b}}^{0}\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_2>\frac{2x}{a}\right)h_1(u)\, d\left(\mathrm{F}_1(u)\right)\\ &=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{2x}{a}\right)\mathbb{E}h_1(\mathrm{X}_1)I_{\left\{-\frac{x}{b}<\mathrm{X}_1\leq 0\right\}}. \end{aligned} \tag{۳۴.۳}$$

و هم‌چنین داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\Theta_2\mathrm{X}_2^+>x, \mathrm{X}_1\leq 0, \mathrm{X}_2>0\right) &\leq \mathrm{P}\left(b\mathrm{X}_2>x, \mathrm{X}_1\leq 0\right)\\ &=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_2>\frac{x}{b}\middle|\mathrm{X}_1=u\right)\, d\left(\mathrm{F}_1(u)\right)\\ &\leq 2\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{b}\right)\mathbb{E}h_1(\mathrm{X}_1)I_{\{\mathrm{X}_1\leq 0\}}. \end{aligned} \tag{۳۵.۳}$$

اکنون با در نظر گرفتن روابط (۳۴.۳) و (۳۵.۳) به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} \liminf_{x\to\infty}\frac{j_1(x)}{\mathrm{P}\left(\Theta_2\mathrm{X}_2^+>x, \mathrm{X}_1\leq 0, \mathrm{X}_2>0\right)} &\geq \frac{1}{4}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{2x}{a}\right)}{\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{b}\right)}\liminf_{x\to\infty}\frac{\mathbb{E}h_1(\mathrm{X}_1)I_{\left\{-\frac{x}{b}<\mathrm{X}_1\leq 0\right\}}}{\mathbb{E}h_1(\mathrm{X}_1)I_{\{\mathrm{X}_1\leq 0\}}}\\ &\geq c_3>0. \end{aligned}$$

بنابراین مقدار ثابت $c_4>0$ وجود دارد که:

$$j_1(x)\geq c_4\mathrm{P}\left(\Theta_1\mathrm{X}_1^++\Theta_2\mathrm{X}_2^+>x, \mathrm{X}_1\leq 0, \mathrm{X}_2>0\right).$$

اکنون با در نظر گرفتن تخمین‌های فوق برای $j_1(x)$ و $j_2(x)$ و نیز رابطه (۳۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\Theta_1\mathrm{X}_1+\Theta_2\mathrm{X}_2>x\right) &\geq \min\{1,c_2,c_4\}\,\mathrm{P}\left(\Theta_1\mathrm{X}_1^++\Theta_2\mathrm{X}_2^+>x\right)\\ &\geq \min\{1,c_2,c_4\}\,\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1^++\mathrm{X}_2^+>\frac{x}{a}\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\min\{1,c_2,c_4\}\left(\overline{\mathrm{F}_1}\left(\frac{x}{a}\right)+\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{a}\right)\right). \end{aligned} \tag{۳۶.۳}$$

روابط (۳۰.۳) و (۳۶.۳) برای xهای بزرگ این مطلب را نتیجه می‌دهد که:

$$\frac{\mathrm{P}\left(\Theta_۱\mathrm{X}_۱+\Theta_۲\mathrm{X}_۲>\frac{x}{۲}\right)}{\mathrm{P}\left(\Theta_۱\mathrm{X}_۱+\Theta_۲\mathrm{X}_۲>x\right)} \leq \frac{۲}{\min\{۱,c_۲,c_۴\}} \frac{\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{۴b}\right)+\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{۴b}\right)}{\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{a}\right)+\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{a}\right)}$$
$$\leq \frac{۲}{\min\{۱,c_۲,c_۴\}} \max\left\{\frac{\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{۴b}\right)}{\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{a}\right)}, \frac{\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{۴b}\right)}{\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{a}\right)}\right\}.$$

در نتیجه با توجه به این که برای $k=۱,۲$، $\mathrm{F}_k\in\mathcal{D}$ است، لذا مقدار آخرین رابطه متناهی می‌باشد، بنابراین توزیع $S_۲^{\Theta}$ نیز متعلق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی است. در آخر رابطه (۲۸.۳) از مراحل اثبات نتیجه می‌شود. □

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که برای دو توزیع $\mathrm{F}_۱$ و $\mathrm{F}_۲$، در کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی، خاصیت بسته بودن تحت پیچش برقرار است.

قضیه ۱۰.۱.۳. *اگر $\mathrm{F}_۱,\mathrm{F}_۲\in\mathcal{D}$ باشند، آن‌گاه $\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲\in\mathcal{D}$ می‌باشد.*

برهان. برای هر دو توزیع $\mathrm{F}_۱$ و $\mathrm{F}_۲$ تعریف‌شده روی $[۰,\infty)$ داریم:

$$\overline{\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲}(x)\leq\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{۲}\right)+\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{۲}\right) \quad ,x\geq ۰ \tag{۳۷.۳}$$

و همچنین داریم:

$$\overline{\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲}(x)\geq\overline{\mathrm{F}_۱}(x)$$
$$\overline{\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲}(x)\geq\overline{\mathrm{F}_۲}(x)$$

حال با جمع طرفین دو رابطه فوق نتیجه زیر را داریم:

$$\overline{\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲}(x)\geq\frac{۱}{۲}\left(\overline{\mathrm{F}_۱}(x)+\overline{\mathrm{F}_۲}(x)\right) \quad ,x\geq ۰ \tag{۳۸.۳}$$

بنابراین با توجه به روابط (۳۷.۳) و (۳۸.۳) و با توجه به این که $\mathrm{F}_۱,\mathrm{F}_۲\in\mathcal{D}$ است، داریم:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{۲}\right)}{\overline{\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲}(x)}\leq ۲\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{۴}\right)+\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{۴}\right)}{\overline{\mathrm{F}_۱}(x)+\overline{\mathrm{F}_۲}(x)}$$
$$\leq ۲\left(\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}_۱}\left(\frac{x}{۴}\right)}{\overline{\mathrm{F}_۱}(x)}+\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}_۲}\left(\frac{x}{۴}\right)}{\overline{\mathrm{F}_۲}(x)}\right)<\infty.$$

آخرین رابطه نشان می‌دهد که $\mathrm{F}_۱*\mathrm{F}_۲\in\mathcal{D}$. □

قضیه ۱۱.۱.۳. *فرض کنید* $\{(X_{2k-1}, X_{2k}), k \geq 1\}$ *و* $\{(\Theta_{2k-1}, \Theta_{2k}), k \geq 1\}$ *دو دنباله از بردارهای تصادفی مستقل باشند که تمام شرایط اساسی قضیه ۸.۱.۳ برای آن‌ها برقرار باشد. اگر برای* $k \geq 1$، $F_k \in \mathcal{D}$ *باشد، آن‌گاه برای هر ثابت* $n \geq 1$ *رابطه:*

$$\widehat{c}\,P\left(S_{2n}^{\Theta^+} > x\right) \lesssim P\left(S_{2n}^{\Theta} > x\right) \leq P\left(M_{2n}^{\Theta} > x\right) \leq P\left(S_{2n}^{\Theta^+} > x\right),$$

برقرار است که در آن $\widehat{c}$ *یک مقدار ثابت مثبت است که ممکن است به* n *وابسته باشد.*

برهان. کافی است که برای مقدار مثبت $\widehat{c}_{2n}$ ثابت کنیم:

$$\widehat{c}_{2n}P\left(S_{2n}^{\Theta^+} > x\right) \lesssim P\left(S_{2n}^{\Theta} > x\right) \tag{۳۹.۳}$$

اثبات را به روش استقراء ادامه می‌دهیم:
با توجه به قضیه ۹.۱.۳، رابطه (۳۹.۳) برای $n = 1$ برقرار است. اکنون فرض می‌کنیم رابطه (۳۹.۳) برای $n = N$ برقرار باشد به این معنی که برای $\widehat{c}_{2N} > 0$ داریم:

$$\widehat{c}_{2N}P\left(S_{2N}^{\Theta^+} > x\right) \lesssim P\left(S_{2N}^{\Theta} > x\right) \tag{۴۰.۳}$$

هم‌چنین با توجه به قضیه ۹.۱.۳ برای هر $k \geq 1$ با $\widetilde{c}_k > 0$ داریم:

$$\widetilde{c}_kP\left(\Theta_{2k-1}X_{2k-1}^+ + \Theta_{2k}X_{2k}^+ > x\right) \lesssim P\left(\Theta_{2k-1}X_{2k-1} + \Theta_{2k}X_{2k} > x\right) \tag{۴۱.۳}$$

با توجه به قضیه ۹.۱.۳، متغیرهای تصادفی $\Theta_{2k-1}X_{2k-1}^+ + \Theta_{2k}X_{2k}^+$ و $\Theta_{2k-1}X_{2k-1} + \Theta_{2k}X_{2k}$ متعلق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی است.
فرض کنید $\widehat{H}$ تابع توزیع $\Theta_{2N+1}X_{2N+1}^+ + \Theta_{2N+2}X_{2N+2}^+$ باشد. از آن‌جا که $\widehat{H} \in \mathcal{D}$ می‌باشد، لذا رابطه (۴۰.۳) و لم ۶.۱.۳، برای $\widetilde{c}_{2N}$ این مطلب را بیان می‌کند که:

$$\begin{aligned} P\left(S_{2(N+1)}^{\Theta^+} > x\right) &= P\left(S_{2N}^{\Theta^+} + \Theta_{2N+1}X_{2N+1}^+ + \Theta_{2N+2}X_{2N+2}^+ > x\right) \\ &\lesssim \frac{1}{\widetilde{c}_{2N}}P\left(S_{2N}^{\Theta} + \Theta_{2N+1}X_{2N+1}^+ + \Theta_{2N+2}X_{2N+2}^+ > x\right) \end{aligned} \tag{۴۲.۳}$$

حال فرض می‌کنیم $\widetilde{H}$ تابع توزیع S_{2N}^{Θ} باشد که بنابر قضیه ۱۰.۱.۳ متعلق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی است.
لذا با به‌کارگیری رابطه (۴۱.۳) و دوباره لم ۶.۱.۳ برای $\widetilde{c}_{2N+2} > 0$ نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &P\left(S_{2N}^{\Theta} + \Theta_{2N+1}X_{2N+1}^+ + \Theta_{2N+2}X_{2N+2}^+ > x\right) \\ &\lesssim \frac{1}{\widetilde{c}_{2N+2}}P\left(S_{2N}^{\Theta} + \Theta_{2N+1}X_{2N+1} + \Theta_{2N+2}X_{2N+2} > x\right) \\ &= \frac{1}{\widetilde{c}_{2N+2}}P\left(S_{2(N+1)}^{\Theta} > x\right). \end{aligned} \tag{۴۳.۳}$$

با ترکیب روابط (۴۲.۳) و (۴۳.۳) درمی‌یابیم که رابطه (۳۹.۳) برای حالت $n = N + 1$ برقرار است که در آن با در نظر گرفتن $\widehat{c}_{2(N+1)} = \widetilde{c}_{2N}\,\widetilde{c}_{2N+2}$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود، بنابراین رابطه (۳۹.۳) برای هر n دلخواه برقرار است. $\square$

۲.۳ همارزی مجموع و ماکزیمم مقادیر وزنی تصادفی تحت ساختار وابستگی خاص

در این بخش احتمالات دمی مجانبی قبل را با تغییر فرضیاتی روی X_kها و Θ_kها بررسی می‌کنیم.
فرض می‌کنیم $(\mathrm{X}_1, \Theta_1), (\mathrm{X}_2, \Theta_2), \dots, (\mathrm{X}_n, \Theta_n)$، n بردار تصادفی دو به دو مستقل باشند، که در آن $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n$ متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار متناظر با توابع توزیع به ترتیب $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \dots, \mathrm{F}_n$ و هم‌چنین $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ متغیرهای تصادفی نامنفی متناظر با توابع توزیع به ترتیب $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \dots, \mathrm{G}_n$ و ناتباهیده در صفر می‌باشند. به‌علاوه برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ متغیرهای تصادفی X_k و Θ_k می‌توانند وابسته نیز در نظر گرفته شوند.
در سال‌های اخیر، تعدادی از مقالات رفتار مجانبی $\mathrm{P}\left(S_n^{\Theta} > x\right)$ و $\mathrm{P}\left(M_n^{\Theta} > x\right)$ را در مواردی که $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n$ مستقل و توزیع مشابهی دارند و هم‌چنین مستقل از $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ می‌باشند، بررسی کرده‌اند، در حالی که هیچ فرض استقلال و فرض توزیع یکسانی روی $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ وجود ندارد. به عنوان مثال برای درک بهتر مطلب فوق تانگ و تسیتسیاشویلی [۱۳] را ببینید که در این مقاله تانگ و تسیتسیاشویلی حالتی را که متغیرهای تصادفی $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n$ دارای توزیع مشترک زیرنمایی هستند و وزن‌های تصادفی $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ دوطرفه کران‌دار می‌باشند را در نظر گرفته‌اند.
در مقاله تانگ و تسیتسیاشویلی [۱۳] ثابت شده است که برای هر $n \geq 1$:

$$\mathrm{P}\left(M_n^{\Theta} > x\right) \sim \mathrm{P}\left(S_n^{\Theta} > x\right) \sim \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\Theta_k \mathrm{X}_k > x\right). \tag{۴۴.۳}$$

هم‌چنین نتایج مشابهی را می‌توان در [۲، ۳، ۱۴، ۱۵] پیدا کرد.
و طبق قضیه ۴.۷.۲ در فصل ۲ داریم:

$$\mathrm{P}\left(M_n^{\Theta} > x\right) \sim \mathrm{P}\left(S_n^{\Theta} > x\right) \sim \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \Theta_k \mathrm{X}_k^{+} > x\right). \tag{۴۵.۳}$$

هدف اصلی ما در این بخش مطالعه و بررسی رفتار مجانبی متغیرهای تصادفی $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n$ است که به طور یکسان توزیع نشده‌اند و هم‌چنین بردارهای تصادفی $(\mathrm{X}_1, \Theta_1), (\mathrm{X}_2, \Theta_2), \dots, (\mathrm{X}_n, \Theta_n)$ دو به دو مستقل می‌باشند و برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ بین X_k و Θ_k ساختار وابستگی خاصی وجود دارد.
برای هر جفت (X_k, Θ_k)، ما از ساختار وابستگی معرفی‌شده توسط آسیمیت و بادسکو، [۱] استفاده می‌کنیم به این معنی که برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ یک تابع اندازه‌پذیر $h_k := [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ وجود دارد به‌طوری که رابطه:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_k > x \middle| \Theta_k = t\right) \sim \overline{\mathrm{F}}_k(x) h_k(t) \tag{۴۶.۳}$$

به‌طور یکنواخت برای هر $t \geq ۰$ برقرار است که در آن مفهوم یکنواختی به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{t\geq ۰} \left| \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_k > x \middle| \Theta_k = t\right)}{\overline{\mathrm{F}}_k(x) h_k(t)} - ۱ \right| = ۰.$$

نمونه مثال‌هایی که متغیرهای تصادفی $\mathrm{X}_۱, \mathrm{X}_۲, \ldots, \mathrm{X}_n$ از شرط وابستگی (۴۶.۳) برخوردار هستند را می‌توان در آسیمیت و بادسکو، [۱] و لی و همکاران، [۳] [۸] یافت.

تعریف ۱.۲.۳. دو توزیع $\mathrm{F}_۱$ و $\mathrm{F}_۲$ را هم‌ارز مجموع-ماکزیمم گوییم، اگر:

$$\overline{\mathrm{F}_۱ * \mathrm{F}_۲}(x) \sim \overline{\mathrm{F}_۱}(x) + \overline{\mathrm{F}_۲}(x).$$

اگر دو توزیع $\mathrm{F}_۱$ و $\mathrm{F}_۲$ هم‌ارز مجموع-ماکزیمم باشند، آن‌گاه این هم‌ارزی را با نماد $\mathrm{F}_۱ \sim_M \mathrm{F}_۲$ نمایش می‌دهیم.

حال اگر دو متغیر تصادفی مستقل $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ را در نظر بگیریم که به ترتیب دارای توزیع $\mathrm{F}_۱$ و $\mathrm{F}_۲$ هستند، آن‌گاه $\mathrm{F}_۱ \sim_M \mathrm{F}_۲$ معادل است با:

$$\mathrm{P}\left\{\mathrm{X}_۱ + \mathrm{X}_۲ \geq x\right\} \sim \mathrm{P}\left\{\max\left\{\mathrm{X}_۱, \mathrm{X}_۲\right\} \geq x\right\}$$

گزاره بالا به این معنی است که، احتمال دمی مجموع دو متغیر تصادفی مستقل، تقریباً توسط ماکزیمم یکی از آن دو متغیر تصادفی تعیین می‌شود.
در ادامه به بیان چند لم مهم می‌پردازیم و در نهایت قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم که در آن فرض می‌کنیم $\Theta_۱, \Theta_۲, \ldots, \Theta_n$ اکیداً مثبت می‌باشند.

لم ۲.۲.۳. *فرض کنید ξ متغیر تصادفی حقیقی‌مقدار متناظر با تابع توزیع F_ξ و η متغیر تصادفی نامنفی و ناتباهیده در صفر، متناظر با تابع توزیع F_η باشند. علاوه بر این فرض کنید یک تابع اندازه‌پذیر مانند $h := [۰, \infty) \longrightarrow (۰, \infty)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $t \in [۰, \infty)$ رابطه:*

$$\mathrm{P}\left(\xi > x \middle| \eta = t\right) \sim \overline{\mathrm{F}}_\xi(x) h(t) \tag{۴۷.۳}$$

به‌طور یکنواخت برقرار است. حال اگر $\mathrm{F}_\xi \in \mathcal{L}$ و برای مقدار $c > ۰$، $\overline{\mathrm{F}}_\eta(x) = o\left(\overline{\mathrm{F}}_\xi(cx)\right)$ باشد، آن‌گاه تابع توزیع $\mathrm{F}_{\xi\eta}$ مربوط به حاصل‌ضرب $\xi\eta$ متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم می‌باشد.

برهان. برای اثبات لم کافی است ثابت شود که:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}_{\xi\eta}}(x+۱)}{\overline{\mathrm{F}_{\xi\eta}}(x)} \geq ۱. \tag{۴۸.۳}$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon \in \left(۰, \frac{۱}{۲}\right)$ باشد. با توجه به رابطه (۴۷.۳) و هم‌چنین تعریف کلاس $\mathcal{L}$ مقادیر به اندازه کافی بزرگ $D_۱ > ۱$ و $D_۲ > ۱$ وجود دارد به‌طوری که برای $t \in (۰, \infty)$ و $z \geq D_۱$:

[۳] Li, et al.

$$(1-\varepsilon)\overline{\mathrm{F}_\xi}(z)h(t) \leq \mathrm{P}\left(\xi > z \middle| \eta = t\right) \leq (1+\varepsilon)\overline{\mathrm{F}_\xi}(z)h(t), \tag{۴۹.۳}$$

و

$$\frac{\mathbb{E}\left(h(\eta)I_{\left\{0<\eta\leq\frac{1}{D_1}\right\}}\right)}{\mathbb{E}\left(h(\eta)I_{\left\{\frac{1}{D_1}\leq\eta\leq D_1\right\}}\right)} < \varepsilon \tag{۵۰.۳}$$

و همچنین داریم:

$$\overline{\mathrm{F}_\xi}(z+D_1) \geq (1-\varepsilon)\overline{\mathrm{F}_\xi}(z), \quad z \geq D_1 D_2. \tag{۵۱.۳}$$

برای D_1 و D_2 انتخاب‌شده و $x > D_1 D_2$ داریم:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{F}_{\xi\eta}}(x+1) &= \int_{(0,\infty)} \mathrm{P}\left(\xi > \frac{x+1}{y} \middle| \eta = y\right) d\mathrm{F}_\eta(y) \\
&\geq \int_{\left(\frac{1}{D_1},\frac{x}{D_1 D_2}\right]} \mathrm{P}\left(\xi > \frac{x}{y} + D_1 \middle| \eta = y\right) d\mathrm{F}_\eta(y).
\end{aligned}$$

اکنون با توجه به روابط (۴۹.۳) و (۵۱.۳) برای xهای به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{F}_{\xi\eta}}(x+1) &\geq (1-\varepsilon)\int_{\left(\frac{1}{D_1},\frac{x}{D_1 D_2}\right]} \overline{\mathrm{F}_\xi}\left(\frac{x}{y}+D_1\right) h(y) d\mathrm{F}_\eta(y) \\
&\geq (1-\varepsilon)^2 \int_{\left(\frac{1}{D_1},\frac{x}{D_1 D_2}\right]} \overline{\mathrm{F}_\xi}\left(\frac{x}{y}\right) h(y) d\mathrm{F}_\eta(y).
\end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

اگر x به اندازه کافی بزرگ باشد آن‌گاه $x > D_1^2 D_2$ و

$$\begin{aligned}
\int_{\left(\frac{1}{D_1},\frac{x}{D_1 D_2}\right]} \overbrace{\overline{\mathrm{F}_\xi}\left(\frac{x}{y}\right) h(y) d\mathrm{F}_\eta(y)}^{A} &= \int_{(0,x/(D_1 D_2)]} A\left(1 - \frac{\int_{(0,1/D_1]} A}{\int_{(0,x/(D_1 D_2)]} A}\right) \\
&\geq \int_{(0,x/(D_1 D_2)]} A\left(1 - \frac{\int_{(0,1/D_1]} A}{\int_{[1/D_1,D_1]} A}\right).
\end{aligned}$$

که در انتگرال‌های فوق داریم:

$$\int_{(0,1/D_1]} \overline{\mathrm{F}_\xi}\left(\frac{x}{y}\right) h(y) d\mathrm{F}_\eta(y) \leq \overline{\mathrm{F}_\xi}(xD_1) \int_{(0,1/D_1]} h(y) d\mathrm{F}_\eta(y)$$

نامساوی فوق با توجه به این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$0 < y \leq \frac{1}{D_1} \Longrightarrow D_1 \leq \frac{1}{y}$$

و چون تابع زیر انتگرال، تابع دم می‌باشد و با توجه به این که $D_1 \leq \frac{1}{y}$ است، لذا نامساوی موردنظر به‌دست می‌آید.
و هم‌چنین داریم:

$$\int_{[1/D_1, D_1]} \overline{F_\xi}\left(\frac{x}{y}\right) h(y) dF_\eta(y) \geq \overline{F_\xi}(xD_1) \int_{[1/D_1, D_1]} h(y) dF_\eta(y)$$

مانند قبل نامساوی فوق با توجه به این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$\frac{1}{D_1} \leq y \leq D_1 \Longrightarrow \frac{1}{D_1} \leq \frac{1}{y} \leq D_1$$

بنابراین با توجه به روابط (۴۹.۳) و (۵۰.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{\left(\frac{1}{D_1}, \frac{x}{D_1 D_2}\right]} \overbrace{\overline{F_\xi}\left(\frac{x}{y}\right) h(y) dF_\eta(y)}^{A} &\geq \int_{(0, x/(D_1 D_2)]} A \left(1 - \frac{\mathbb{E}\left(h(\eta) I_{\left\{0 < \eta \leq \frac{1}{D_1}\right\}}\right)}{\mathbb{E}\left(h(\eta) I_{\left\{\frac{1}{D_1} \leq \eta \leq D_1\right\}}\right)}\right) \\
&\geq (1 - \varepsilon) \int_{(0, x/(D_1 D_2)]} A \\
&\geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \int_{(0, x/(D_1 D_2)]} P\left(\xi > \frac{x}{y} | \eta = y\right) dF_\eta(y) \\
&= \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \left(\overline{F_{\xi\eta}}(x) - \int_{(x/(D_1 D_2), \infty)} P\left(\xi > \frac{x}{y} | \eta = y\right) dF_\eta(y)\right) \\
&\geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \left(\overline{F_{\xi\eta}}(x) - \overline{F_\eta}(x/(D_1 D_2))\right). \qquad (۵۳.۳)
\end{aligned}$$

روابط (۵۲.۳) و (۵۳.۳) برای $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ و D_1 و D_2 انتخاب‌شده نتیجه‌ی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi\eta}}(x + 1)}{\overline{F_{\xi\eta}}(x)} \geq \frac{(1 - \varepsilon)^3}{1 + \varepsilon} \left(1 - \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_\eta}(x/(D_1 D_2))}{\overline{F_{\xi\eta}}(x)}\right). \qquad (۵۴.۳)$$

اگر η کران‌دار باشد، آن‌گاه از آن‌جا که η ناتباهیده در صفر است، $a > 0$ وجود دارد به‌طوری که $\mathbb{E}\left(h(\eta) I_{\{\eta \geq a\}}\right) > 0$ می‌باشد و لذا با توجه به رابطه (۴۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_\eta}(x/(D_1 D_2))}{\overline{F_{\xi\eta}}(x)} &= \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_\eta}(x/(D_1 D_2))}{\int_{[0, \infty)} P(\xi > \frac{x}{y} | \eta = y) dF_\eta(y)} \\
&\leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_\eta}(x/(D_1 D_2))}{\int_{[a, \infty)} P(\xi > \frac{x}{a} | \eta = y) dF_\eta(y)} \\
&= \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_\eta}(x/(D_1 D_2))}{\overline{F_\xi}\left(\frac{x}{a}\right) \int_{[a, \infty)} h(y) dF_\eta(y)} = 0. \qquad (۵۵.۳)
\end{aligned}$$

اگر η بی‌کران باشد، آن‌گاه برای هر x، با توجه به این که $\mathrm{F}_\xi \in \mathcal{L}$ است، لذا $\overline{\mathrm{F}_\xi}(x) > ۰$ است، هم‌چنین رابطه (۴۷.۳) و شرط $\overline{\mathrm{F}}_\eta(x) = o\left(\overline{\mathrm{F}}_\xi(cx)\right)$ برای هر $D > ۰$ این نتیجه را می‌دهد که:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}_\eta}(x)}{\overline{\mathrm{F}_{\xi\eta}}(xD)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}_\eta}(x)}{\int_{[D/c,\infty)} \mathrm{P}(\xi > cx | \eta = y) d\mathrm{F}_\eta(y)}$$
$$= \frac{۱}{\mathbb{E}\left(h(\eta) I_{\{\eta \geq D/c\}}\right)} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}_\eta}(x)}{\overline{\mathrm{F}_\xi}(cx)} = ۰.$$

از این‌رو $\limsup$ تعریف‌شده در رابطه (۵۴.۳) در هر دو مورد برابر صفر شد و رابطه (۴۸.۳) بلافاصله از روابط (۵۴.۳) و (۵۵.۳) و با توجه به دلخواه بودن ε نتیجه می‌شود. □

لم ۳.۲.۳. *فرض کنید ξ متغیر تصادفی حقیقی‌مقدار و η متغیر تصادفی نامنفی و ناتباهیده در صفر باشند به‌طوری که برای آن‌ها رابطه (۴۷.۳) برقرار باشد. اگر $\mathrm{F}_\xi \in \mathcal{D}$ باشد و $\overline{\mathrm{F}}_\eta(x) = o\left(\overline{\mathrm{F}}_\xi(x)\right)$، آن‌گاه $\mathrm{F}_{\xi\eta} \in \mathcal{D}$ می‌باشد.*

برهان. کافی است تنها ثابت شود که:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(۲x)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(x)} > ۰. \tag{۵۶.۳}$$

با توجه به رابطه (۴۷.۳) و تعریف کلاس $\mathcal{D}$، مقادیر $c_۱ > ۰$ و $D \geq ۲$ وجود دارد به طوری که برای هر $z \geq \frac{D}{۲}$ و $t \geq ۰$ روابط زیر را داریم:

$$\frac{۱}{۲}\overline{\mathrm{F}}_\xi(z)h(t) \leq \mathrm{P}\left(\xi > z \middle| \eta = t\right) \leq \frac{۳}{۲}\overline{\mathrm{F}}_\xi(z)h(t) \tag{۵۷.۳}$$

و هم‌چنین:

$$\overline{\mathrm{F}}_\xi(۲z) \geq c_۱\overline{\mathrm{F}}_\xi(z) \tag{۵۸.۳}$$

برای xهای به اندازه کافی بزرگ، در صورت کسر (۵۶.۳) با توجه به روابط (۵۷.۳) و (۵۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(۲x) &= \int_{(۰,\infty)} \mathrm{P}\left(\xi > \frac{۲x}{y} \middle| \eta = y\right) d\mathrm{F}_\eta(y) \\
&\geq \frac{۱}{۲}\int_{(۰,۲x/D]} \mathrm{P}\left(\xi > \frac{۲x}{y}\right) h(y) d\mathrm{F}_\eta(y) \\
&\geq \frac{c_۱}{۲}\int_{(۰,۲x/D]} \mathrm{P}\left(\xi > \frac{x}{y}\right) h(y) d\mathrm{F}_\eta(y) \\
&\geq \frac{c_۱}{۳}\int_{(۰,۲x/D]} \mathrm{P}\left(\xi > \frac{x}{y} \middle| \eta = y\right) d\mathrm{F}_\eta(y) \\
&= \frac{c_۱}{۳}\left(\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(x) - \int_{(۲x/D,\infty)} \mathrm{P}\left(\xi > \frac{x}{y} \middle| \eta = y\right) d\mathrm{F}_\eta(y)\right) \\
&\geq \frac{c_۱}{۳}\left(\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(x) - \overline{\mathrm{F}}_\eta\left(\frac{۲x}{D}\right)\right).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(۲x)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(x)}\geq\frac{c_۱}{۳}\left(۱-\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}\left(\frac{۲x}{D}\right)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(x)}\right).$$

حال اگر ثابت کنیم $\limsup$ فوق برابر صفر است، یعنی:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}\left(\frac{۲x}{D}\right)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(x)}=۰. \qquad (۵۹.۳)$$

آنگاه رابطه (۵۶.۳) نتیجه می‌شود.

برای این منظور داریم:

اگر η کران‌دار و طبق شرط لم، ناتباهیده در صفر باشد، آنگاه مقدار $c_۲>۰$ وجود دارد به‌طوری که $\mathbb{E}\left(h(\eta)I_{\{\eta\geq c_۲\}}\right)$ مثبت می‌باشد و بنابراین با توجه به رابطه (۴۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}\left(\frac{۲x}{D}\right)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}(x)}&=\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}\left(\frac{۲x}{D}\right)}{\int_{(۰,\infty)}\mathrm{P}\left(\xi>\frac{x}{y}\middle|\eta=y\right)d\mathrm{F}_{\eta}(y)}\\&\leq\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}\left(\frac{۲x}{D}\right)}{\int_{[c_۲,\infty)}\mathrm{P}\left(\xi>\frac{x}{c_۲}\middle|\eta=y\right)d\mathrm{F}_{\eta}(y)}\\&=\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}\left(\frac{۲x}{D}\right)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi}\left(\frac{x}{c_۲}\right)\int_{[c_۲,\infty)}h(y)d\mathrm{F}_{\eta}(y)}=۰.\end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر η کران‌دار نباشد، آنگاه برای هر x، $\overline{\mathrm{F}}_{\eta}(x)>۰$ است و با توجه به رابطه (۴۷.۳) و شرط $\overline{\mathrm{F}}_{\eta}(x)=o\left(\overline{\mathrm{F}}_{\xi}(x)\right)$ از لم، برای هر ثابت مثبت D داریم:

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}(x)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi\eta}\left(\frac{xD}{۲}\right)}&\leq\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}(x)}{\int_{[D/۲,\infty)}\mathrm{P}\left(\xi>x\middle|\eta=y\right)d\mathrm{F}_{\eta}(y}\\&=\frac{۱}{\mathbb{E}\left(h(\eta)I_{\{\eta\geq D/۲\}}\right)}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{F}}_{\eta}(x)}{\overline{\mathrm{F}}_{\xi}(x)}=۰.\end{aligned}$$

از این‌رو، رابطه (۵۹.۳) در هردو مورد برقرار است و اثبات لم تمام است. □

حال در لم زیر خاصیت بسته بودن تحت پیچش را برای اشتراک دو خانواده از توزیع‌های دارزدم و مقادیر غالب دمی بیان و خاصیت همارزی مجموع-ماکزیمم را برای دو تابع توزیع $\mathrm{F}_۱$ و $\mathrm{F}_۲$ بررسی می‌کنیم.

لم ۴.۲.۳. *اگر توابع توزیع* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ *باشند، آنگاه* $\mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ *می‌باشد و به‌علاوه نیز رابطه:*

$$\overline{\mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2}(x) \sim \overline{\mathrm{F}_1}(x) + \overline{\mathrm{F}_2}(x)$$

برقرار است.

برهان. با توجه به قضیه ۱.۴.۲ در فصل ۲ (بسته بودن کلاس توزیع‌های درازدم تحت پیچش) و هم‌چنین قضیه ۱۰.۱.۳ (بسته بودن کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی تحت پیچش)، نتیجه می‌گیریم که خاصیت بسته بودن برای اشتراک این دو خانواده از توزیع‌ها نیز برقرار است.
اکنون تنها کافی است ثابت کنیم خاصیت هم‌ارزی مجموع-ماکزیمم برای کلاس $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ برقرار است، که برای این منظور امی [۹]، در سال ۱۹۹۴ نشان داد که رابطه زیر برقرار است:

$$0 \leq \mathrm{F}_1(x)\mathrm{F}_2(x) - \mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2(x) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{۶۰.۳}$$

که در آن برابری‌های زیر را برای I_1، I_2 و I_3 به اثبات رساند:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{x/2} \left(\overline{\mathrm{F}_1}(x-y) - \overline{\mathrm{F}_1}(x)\right) d\mathrm{F}_2(y), \\
I_2 &= \int_0^{x/2} \left(\overline{\mathrm{F}_2}(x-y) - \overline{\mathrm{F}_2}(x)\right) d\mathrm{F}_1(y), \\
I_3 &= \left(\overline{\mathrm{F}_1}\left(\frac{x}{2}\right) - \overline{\mathrm{F}_1}(x)\right)\left(\overline{\mathrm{F}_2}\left(\frac{x}{2}\right) - \overline{\mathrm{F}_2}(x)\right).
\end{aligned}$$

واضح است که چون $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{D}$ است، لذا نسبت

$$\frac{\overline{\mathrm{F}_1}(x-y) - \overline{\mathrm{F}_1}(x)}{\overline{\mathrm{F}_1}(x)}$$

به‌طور یکنواخت برای هر $y \in \left[0, \frac{x}{2}\right]$ و $x \geq 0$ کران‌دار می‌باشد. از این‌رو با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی لبگ و شرط $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{L}$ واضح است که:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I_1}{\overline{\mathrm{F}_1}(x)} = \int_0^{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{F}_1}(x-y) - \overline{\mathrm{F}_1}(x)}{\overline{\mathrm{F}_1}(x)} d\mathrm{F}_2(y) = 0.$$

هم‌چنین به‌طور مشابه چون $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{D}$ می‌باشد، پس نسبت

$$\frac{\overline{\mathrm{F}_2}(x-y) - \overline{\mathrm{F}_2}(x)}{\overline{\mathrm{F}_2}(x)}$$

کران‌دار می‌باشد و طبق قضیه همگرایی تسلطی لبگ:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I_2}{\overline{\mathrm{F}_2}(x)} = 0.$$

و همین‌طور برای I_3، چون $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{D}$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$I_3 = o\left(\overline{\mathrm{F}_1}(x)\right).$$

حال با جایگزینی نتایج فوق در رابطه (۶۰.۳) داریم:

$$\overline{F_۱ * F_۲}(x) = ۱ - F_۱(x)F_۲(x) + o\left(\overline{F_۱}(x) + \overline{F_۲}(x)\right) \sim \overline{F_۱}(x) + \overline{F_۲}(x).$$

که همارزی آخر با توجه به قسمت اول" گزاره ۴-۴ " از امی [۴] [۹] نتیجه می‌شود. □

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنید $(X_۱, \Theta_۱), (X_۲, \Theta_۲), \ldots, (X_n, \Theta_n)$ بردارهای تصادفی دو به دو مستقل که $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار، متناظر با توابع توزیع به ترتیب $F_۱, F_۲, \ldots, F_n$ و $\Theta_۱, \Theta_۲, \ldots, \Theta_n$ متغیرهای تصادفی مثبت، متناظر با توابع توزیع به ترتیب $G_۱, G_۲, \ldots, G_n$ می‌باشند. همچنین فرض کنید برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n$، در جفت (X_k, Θ_k) شرط وابستگی (۴۶.۳) برقرار باشد. اگر $F_k \in \mathcal{L}$ باشد، (و به ترتیب $F_k \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$) و برای مقدار مثبت c_k، داشته باشیم:*

$$\overline{G}_k(x) = o\left(\overline{F}_k(c_k x)\right).$$

آن‌گاه رابطه (۴۵.۳)، (و به ترتیب رابطه (۴۴.۳)) برقرار می‌باشد.

برهان. در ابتدا فرض می‌کنیم که برای هر n, $k = ۱, ۲, \ldots$، $F_k \in \mathcal{L}$ باشد. از آن‌جا که رابطه $S_n^\Theta \leq M_n^\Theta \leq \sum_{k=۱}^{n} \Theta_k X_k^+$ برقرار است، لذا کافی است ثابت کنیم:

$$P\left(\sum_{k=۱}^{n} \Theta_k X_k > x\right) \sim P\left(\sum_{k=۱}^{n} \Theta_k X_k^+ > x\right). \qquad (۶۱.۳)$$

رابطه (۶۱.۳) با توجه به این مطلب که $(\Theta_k X_k)^+ = \Theta_k X_k^+$ و همچنین این که تابع توزیع $\Theta_k X_k$ با توجه به لم ۲.۲.۳ متعلق به کلاس توزیع‌های درازدم می‌باشد، بلافاصله با استفاده از قضیه ۴.۷.۲ در فصل ۲ نتیجه می‌شود.

اکنون حالت دیگری را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم $F_k \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ باشد.

با توجه به لم ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که متغیر تصادفی $\Theta_k X_k^+$ برای هر k متعلق به کلاس $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ می‌باشد.

با توجه به این که بردارهای $(X_۱, \Theta_۱), (X_۲, \Theta_۲), \ldots, (X_n, \Theta_n)$ مستقل می‌باشند، و متغیر تصادفی $\Theta_k X_k^+ \in \mathcal{L}$ است، لذا با توجه به قضیه ۴.۷.۲ در فصل ۲ داریم:

$$P\left(\sum_{k=۱}^{n} \Theta_k X_k > x\right) \sim P\left(\sum_{k=۱}^{n} \Theta_k X_k^+ > x\right). \qquad (۶۲.۳)$$

همچنین چون $\Theta_k X_k^+ \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ است لذا با توجه به لم ۴.۲.۳ داریم:

$$P\left(\sum_{k=۱}^{n} \Theta_k X_k^+ > x\right) \sim \sum_{k=۱}^{n} P\left(\Theta_k X_k^+ > x\right). \qquad (۶۳.۳)$$

که با ادغام دو رابطه (۶۲.۳) و (۶۳.۳) داریم:

[۴] Omey

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\Theta_k \mathrm{X}_k > x\right) \sim \sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(\Theta_k \mathrm{X}_k^+ > x\right).$$

که در رابطه فوق برای $x \geq 0$، $\mathrm{P}\left(\Theta_k \mathrm{X}_k^+ > x\right) = \mathrm{P}\left(\Theta_k \mathrm{X}_k > x\right)$ می‌باشد، لذا رابطه (۴۴.۳) ثابت شد. □

۳.۳ نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

در این پایان‌نامه تمام حالت‌های ممکن را در مورد استقلال و وابستگی متغیرهای تصادفی $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ بررسی کردیم، هم‌چنین در مورد متغیرهای تصادفی وزن‌دار نیز نتایجی را به اثبات رساندیم. در مورد ادامه این تحقیق خواننده می‌تواند n متغیر تصادفی وزن‌دار و وابسته را در نظر بگیرد که در روند بیان نتایج، ساختار وابستگی بین وزن‌های تصادفی، هم‌پیوند مثبت، هم‌پیوند منفی، آمیخته قوی و... می‌باشد.

پیوست آ

اندازه‌پذیری و اندازه لبگ

آ.۱ اندازه خارجی لبگ

قضیه آ.۱.۱ . *برای اندازه خارجی لبگ در مورد مجموعه‌ای دلخواه مانند A گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند:*

۱) $m^*(A) \geq 0$

۲) $m^*(\emptyset) = 0$

۳) *اگر* $A \subseteq B$ *باشد، آن‌گاه* $m^*(A) \leq m^*(B)$.

۴) *برای هر* $x \in \mathbb{R}$، $m^*([x]) = 0$.

برهان. اثبات ۱): می‌دانیم طول هر بازه نامنفی است، پس $\ell(I_n) \geq 0$، بنابراین هر پوششی که در نظر بگیریم نیز نامنفی است، به این معنی که:

$$\sum \ell(I_n) \geq 0$$

در نتیجه inf مقادیر نامنفی، نامنفی خواهد بود، پس:

$$m^*(A) \geq 0$$

اثبات ۲): یک پوشش تک عضوی در نظر می‌گیریم که تهی است، $A = \emptyset$.
لذا با توجه به قسمت (۱) داریم:

$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq \ell(\emptyset) = 0 \Longrightarrow m^*(\emptyset) = 0$$

اثبات ۳): فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ باشد و $\{J_n\}$ یک پوشش دلخواه برای B باشد، بنابراین $\{J_n\}$ یک پوشش برای A هم می‌باشد. بدیهی است که پوشش‌های A بیش‌تر از پوشش‌های B است، زیرا A پوشش‌های خود را دارد و مجموعه پوشش‌های B هم به آن اضافه می‌شود، در نتیجه داریم:

$$\left\{\sum \ell(J_n); \quad B \subseteq \bigcup J_n\right\} \subseteq \left\{\sum \ell(I_n); \quad A \subseteq \bigcup I_n\right\}$$

حال از طرفین inf می‌گیریم:

$$\inf\left\{\sum \ell(J_n);\quad B\subseteq \bigcup J_n\right\}=m^*(B)$$

و

$$\inf\left\{\sum \ell(I_n);\quad A\subseteq \bigcup I_n\right\}=m^*(A)$$

در نتیجه:

$$m^*(A)\leq m^*(B)$$

اثبات ۴): برای x یک پوشش به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$I_n=\left[x,x+\frac{۱}{n}\right)$$

پس:

$$\circ\leq m^*\left([x]\right)\leq \ell(I_n)=\frac{۱}{n}\longrightarrow \circ.$$

بنابراین

$$\circ\leq m^*\left([x]\right)\leq \circ \Longrightarrow m^*\left([x]\right)=\circ.$$

□

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، از قسمت (۴) قضیه فوق این نتیجه به‌دست می‌آید که اندازه خارجی مجموعه‌های تک عضوی برابر صفر است. برای درک بهتر مطلب فوق به مثال زیر توجه کنید.

مثال آ.۱.۲. هر مجموعه شمارا دارای اندازه خارجی صفر است.

حل: مجموعه $A=\{X_۱,X_۲,\dots\}$ را در نظر می‌گیریم، طبق تعریف اندازه خارجی لبگ برای مجموعه A داریم:

$$m^*(A)=\inf\left\{\sum \ell(I_n);\quad A\subseteq \bigcup I_n\right\}.$$

برای مجموعه A پوشش زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A=\bigcup_{i=۱}^{\infty}\{X_i\}$$

لذا نتیجه می‌شود که:

$$\circ\leq m^*(A)=m^*\left(\bigcup_{i=۱}^{\infty}\{X_i\}\right)\leq \sum_{i=۱}^{\infty} m^*(X_i)=\circ$$

بنابراین $m^*(A)=\circ$.

قضیه آ.۱.۳. *برای هر دنباله $\{E_i\}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، رابطه زیر که به خاصیّت زیرجمعی معروف است، را داریم:*

$$m^*\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i m^*(E_i)$$

برهان.

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad ;\exists \left\{\underbrace{I_{i,j}}_{\text{پوشش}}\right\} \quad , E_i \subseteq \bigcup_j I_{i,j} \tag{آ.۱}$$

بنابر خاصیّت دوم اینفیموم داریم:

$$\sum_j \ell\left(I_{i,j}\right) \leq m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{۲^i} \tag{آ.۲}$$

هم‌چنین با اجتماع گرفتن از رابطه (آ.۱) داریم:

$$\bigcup_i E_i \subseteq \bigcup_i \bigcup_j I_{i,j}$$

در نتیجه با توجه به رابطه (آ.۲) و قسمت (۳) قضیه آ.۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_i E_i\right) &\leq \sum_i \sum_j \ell\left(I_{i,j}\right) \leq \sum_i \left(m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{۲^i}\right) \\ &= \sum_i m^*(E_i) + \varepsilon \sum_i \frac{۱}{۲^i} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$m^*\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i m^*(E_i) + \varepsilon.$$

چون ε دلخواه است، لذا حکم برقرار می‌باشد. □

قضیه آ.۱.۴. *مجموعه E اندازه‌پذیر است، اگر برای هر مجموعه دلخواه مانند A داشته باشیم:*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$$

برهان. واضح است که:

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E')$$

طبق قضیه آ.۱.۳ و با m^* گرفتن از رابطه فوق داریم:

$$m^*(A) = m^*\left((A \cap E) \cup (A \cap E')\right) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E').$$

در نتیجه:

$$m^*(A) \leq m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E') \qquad (\text{آ.۳})$$

حال اگر ثابت کنیم:

$$m^*(A) \geq m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E')$$

آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که E اندازه‌پذیر است.
قسمت دوم را برای حالتی که $m^*(E) = \circ$ باشد، اثبات می‌کنیم.
می‌دانیم که $(A\cap E) \subseteq E$، بنابراین با توجه به قسمت (۳) قضیه آ.۱.۱ داریم:

$$\circ \leq m^*(A\cap E) \leq m^*(E) = \circ \Longrightarrow m^*(A\cap E) = \circ$$

از طرف دیگر، می‌دانیم $(A\cap E') \subseteq A$، بنابراین:

$$m^*(A\cap E') \leq m^*(A)$$

لذا داریم:

$$m^*(A) \geq m^*(A\cap E') + \circ = m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E') \qquad (\text{آ.۴})$$

در نهایت با توجه به روابط (آ.۳) و (آ.۴) داریم:

$$m^*(A) = m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E')$$

لذا مجموعه E اندازه‌پذیر است. □

با توجه به قضیه فوق این نتیجه به‌دست می‌آید که، اگر اندازه خارجی هر مجموعه دلخواهی برابر با صفر شود، آن‌گاه آن مجموعه اندازه‌پذیر می‌باشد. با توجه به این مطلب، چون اندازه خارجی مجموعه $\emptyset$ برابر با صفر است، پس $\emptyset$ اندازه‌پذیر می‌باشد.

مثال آ.۱.۵. نشان دهید مجموعه اعداد حقیقی اندازه‌پذیر است.

حل: می‌دانیم که $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ است، لذا می‌توان بنابر قضیه آ.۱.۴ مجموعه‌ای یافت که:

$$m^*(\mathbb{R}) = m^*(\mathbb{R}\cap\mathbb{R}) + m^*(\mathbb{R}\cap\emptyset) = m^*(\mathbb{R}) + \circ = m^*(\mathbb{R})$$

چون مجموعه‌ای مانند $\mathbb{R}$ یافت شد که تساوی فوق برای آن برقرار است، لذا مجموعه اعداد حقیقی اندازه‌پذیر است.

آ.۱.۱ دستگاه توسعه‌یافته اعداد حقیقی

می‌دانیم که مجموعه اعداد حقیقی را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

که در عمل ∞ در اعداد حقیقی قابل لمس و درک نمی‌باشد.
حال اگر همین $-\infty$ و $+\infty$ را به مجموعه اعداد حقیقی اضافه کنیم به مجموعه جدیدی که به آن دستگاه توسعه‌یافته اعداد حقیقی می‌گوییم، می‌رسیم. این دستگاه را با $\mathbb{R}^*$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$$

تعریف آ.۱.۶. تابع $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ را در نظر بگیرید که E مجموعه اندازه‌پذیر باشد. تابع f را اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، مجموعه

$$\{x : f(x) > \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$$

اندازه‌پذیر باشد.

مثال آ.۱.۷. آیا تابع $f(x) = ۱$ اندازه‌پذیر است؟

حل: باید نشان دهیم مجموعه

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

اندازه‌پذیر است.
برای این منظور داریم:

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \alpha < ۱ \\ \emptyset & \alpha \geq ۱ \end{cases}$$

چون مجموعه‌های $\mathbb{R}$ و $\emptyset$ اندازه‌پذیر می‌باشند، لذا تابع f نیز اندازه‌پذیر است.

آ.۱.۲ قضیه همگرایی یکنوایی لبگ و لم فاتو

تعریف آ.۱.۸. برای مجموعه دلخواه A، تابع نشانگر این مجموعه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_w(A) = \begin{cases} ۱ & w \in A \\ ۰ & w \notin A \end{cases}$$

تعریف آ.۱.۹. متغیر تصادفی X را ساده گوییم، اگر بتوان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{X} = \sum_{k=۱}^{n} x_k \, I\left(A_k\right)$$

به‌علاوه اگر $x_k \geq ۰$ باشد، آنگاه X را یک تابع ساده نامنفی گوییم.

مثال آ.۱.۱۰. فرض می‌کنیم $\mathrm{X}_n \nearrow \mathrm{X}$، یک نمونه دنباله از متغیرهای تصادفی ساده به شکل زیر است:

$$\mathrm{X}_n = \begin{cases} \frac{k-۱}{۲^n} & \frac{k-۱}{۲^n} \leq \mathrm{X} < \frac{k}{۲^n}\,; \quad k = ۱, ۲, \ldots, n۲^n \\ n & \mathrm{X} \geq n \end{cases}$$

حال در مورد متغیرهای تصادفی ساده قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم، که در آن اشاره داریم به این مطلب که امیدریاضی دنباله‌ای صعودی از متغیرهای تصادفی ساده نامنفی مانند X_n، که به سمت X میل می‌کند، به سمت امیدریاضی X میل می‌کند.

قضیه آ.۱۱.۱ . *اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، دنباله‌ای صعودی از متغیرهای ساده نامنفی وجود دارد به‌طوری که $\mathrm{X}_n \nearrow \mathrm{X}$. در این صورت*

$$\mathbb{E}\mathrm{X}_n \nearrow \mathbb{E}\mathrm{X}$$

برهان. به [۴] مراجعه شود. $\square$

حال در قضیه زیر که به قضیه همگرایی یکنوایی لبگ موسوم است، حالت کلی‌تری از قضیه آ.۱۱.۱ را اثبات می‌کنیم، به این صورت که فرضیه ساده بودن متغیرهای تصادفی را حذف کردیم و فقط حالت کلی‌تر نامنفی بودن متغیرهای تصادفی را در نظر می‌گیریم.

قضیه آ.۱۲.۱ (قضیه همگرایی یکنوایی لبگ). *فرض کنید $\{\mathrm{X}_n\,; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد، اگر $\mathrm{X}_n \nearrow \mathrm{X}$ میل کند، آن‌گاه*

$$\mathbb{E}\mathrm{X}_n \nearrow \mathbb{E}\mathrm{X}$$

برهان. فرض می‌کنیم به ازای هر X_n، دنباله‌ای از متغیرهای ساده نامنفی وجود دارد که به سمت X_n میل می‌کند، بنابراین با تعریف چنین دنباله‌ای به‌صورت زیر داریم:

$$\mathrm{Y}_{k,n} \nearrow \mathrm{X}_n \quad k \to \infty$$

متغیر تصادفی Z_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Z}_n = \max_{۱ \leq k \leq n} \mathrm{Y}_{k,n}$$

که Z_nها متغیرهای تصادفی ساده نامنفی هستند. همواره داریم:

$$\mathrm{Y}_{k,n} \leq \mathrm{Z}_n \leq \mathrm{X}_n \tag{آ.۵}$$

لذا:

$$\mathbb{E}\mathrm{Y}_{k,n} \leq \mathbb{E}\mathrm{Z}_n \leq \mathbb{E}\mathrm{X}_n \tag{آ.۶}$$

حال از رابطه (آ.۵) نسبت به زمانی که $n \to \infty$ میل می‌کند، حد می‌گیریم، در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Y}_{k,n} \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{Z}_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{X}$$

بنابراین:

$$X_k \leq \lim_{n\to\infty} Z_n \leq \lim_{n\to\infty} X_n = X \qquad (\text{آ.۷})$$

اکنون از رابطه (آ.۷) نسبت به زمانی که $k \to \infty$ میل می‌کند، حد می‌گیریم، در نتیجه:

$$X = \lim_{k\to\infty} X_k \leq \lim_{n\to\infty} Z_n \leq X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = X$$

لذا با توجه به رابطه فوق داریم:

$$\mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} Z_n\right) = \mathbb{E}(X) \quad \text{و} \quad Z_n \nearrow X \qquad (\text{آ.۸})$$

بنابراین با توجه به این که Z_nها متغیرهای ساده نامنفی هستند و همچنین قضیه آ.۱.۱۱ داریم:

$$\mathbb{E}Z_n \nearrow \mathbb{E}X$$

در نتیجه با توجه به رابطه فوق و همچنین رابطه (آ.۸) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} Z_n\right) \qquad (\text{آ.۹})$$

حال از رابطه (آ.۶)، نسبت به زمانی که $n \to \infty$ میل می‌کند، حد می‌گیریم، در نتیجه:

$$\mathbb{E}X_k \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

دوباره از رابطه فوق نسبت به زمانی که $k \to \infty$ میل می‌کند، حد می‌گیریم، در نتیجه:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}X_k \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \qquad (\text{آ.۱۰})$$

در نهایت از روابط (آ.۸)، (آ.۹) و (آ.۱۰) به‌دست می‌آید که:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} Z_n\right) = \mathbb{E}X.$$

□

لم فاتو

قضیه آ.۱.۱۳ (لم فاتو). *فرض کنید $\{X_n; n \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد، آن‌گاه:*

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$$

برهان. ابتدا دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی Y_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$$

حال چون Y_n دنباله صعودی است، لذا:

$$Y_n = \inf_{k\geq n} X_k \nearrow \liminf_{k\to\infty} X_k$$

در نتیجه بنابر قضیه همگرایی یکنوایی لبگ داریم:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) \nearrow \mathbb{E}\left(\liminf_{k\to\infty} \mathrm{X}_k\right) \tag{آ.۱۱}$$

به‌علاوه برای هر n داریم:

$$\mathrm{Y}_n \leq \mathrm{X}_k \Longrightarrow \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_k\right)$$

بنابراین:

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_k\right) \tag{آ.۱۲}$$

همچنین از رابطه (آ.۱۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_n\right) = \mathbb{E}\left(\liminf_{k\to\infty} \mathrm{X}_k\right) \tag{آ.۱۳}$$

در نهایت از روابط (آ.۱۲) و (آ.۱۳) به‌دست می‌آید که:

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{k\to\infty} \mathrm{X}_k\right) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_k\right)$$

□

تعریف آ.۱.۱۴ . هرگاه خاصیتی در همه‌جا برقرار باشد، مگر جاهایی که احتمال وقوع آن‌ها صفر است، در این صورت گوییم برقراری خاصیت موردنظر تقریباً محتمل است. اگر خاصیت فوق برقرار باشد آن را با نماد "$a.s.$" [۱]، نمایش می‌دهیم.
به عنوان مثال اگر داشته باشیم:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} = ۲\right) = ۰/۹ \quad a.s.$$

عبارت احتمالی فوق به این معنی است که احتمال وقوع جاهایی که متغیر تصادفی X مقدار ۲ را اختیار نمی‌کند، برابر صفر است.

در ادامه به بیان قضیه‌ای مشابه لم فاتو می‌پردازیم، با این تفاوت که فرضیه انتگرال‌پذیری را به متغیرهای تصادفی نسبت می‌دهیم و نتیجه‌ای را بیان می‌کنیم.

قضیه آ.۱.۱۵ . *اگر Y و Z دو متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر باشند، به‌طوری که*

$$\mathrm{Y} \leq \mathrm{X}_n \leq \mathrm{Z} \quad a.s.$$

آن‌گاه:

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} \mathrm{X}_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right) \leq \mathbb{E}\left(\limsup_{n\to\infty} \mathrm{X}_n\right)$$

برهان. برای اثبات قضیه نیاز است که دنباله‌های نامنفی به‌صورت زیر بسازیم:

$$\left\{\mathrm{Z} - \mathrm{X}_n\right\} \quad \text{و} \quad \left\{\mathrm{X}_n - \mathrm{Y}\right\}.$$

اکنون با به‌کارگیری لم فاتو در مورد دنباله‌های فوق داریم:

---

[۱] Almost Surely

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty}\ (\mathrm{X}_n - \mathrm{Y})\right) \le \liminf_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n - \mathrm{Y}\right)$$

در نتیجه:

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty}\ \mathrm{X}_n\right) - \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}\right) \le \liminf_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right) - \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}\right) \tag{آ.۱۴}$$

هم‌چنین

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty}\ (\mathrm{Z} - \mathrm{X}_n)\right) \le \liminf_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{Z} - \mathrm{X}_n\right)$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}\right) - \mathbb{E}\left(\limsup_{n\to\infty}\ \mathrm{X}_n\right) \le \mathbb{E}\left(\mathrm{Z}\right) - \limsup_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right)$$

لذا

$$\limsup_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right) \le \mathbb{E}\left(\limsup_{n\to\infty}\ \mathrm{X}_n\right) \tag{آ.۱۵}$$

در نهایت نتیجه مطلوب با ادغام روابط (آ.۱۴) و (آ.۱۵) به‌دست می‌آید. □

حال قضیه‌ای موسوم به قضیه همگرایی تسلطی لبگ [۲] را بیان می‌کنیم.

آ.۱.۳ قضیه همگرایی تسلطی لبگ

قضیه آ.۱.۱۶ (قضیه همگرایی تسلطی لبگ). *فرض کنید برای هر n، $|\mathrm{X}_n| \le \mathrm{Y}$ باشد، به‌طوری‌که $\mathbb{E}\mathrm{Y} < \infty \quad a.s.$ است و زمانی‌که $n \to \infty$، داشته باشیم:*

$$\mathrm{X}_n \to \mathrm{X} \quad a.s.$$

در این صورت:

$$\mathbb{E}\big|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}\big| \to \circ$$

و در حالت خاص:

$$\mathbb{E}\mathrm{X}_n \to \mathbb{E}\mathrm{X}$$

برهان. از $|\mathrm{X}_n| \le \mathrm{Y}$ و $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ داریم:

$$\big|\mathrm{X}_n\big| - \big|\mathrm{X}\big| \le \big|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}\big| \le \big|\mathrm{X}_n\big| + \big|\mathrm{X}\big| \le ۲\mathrm{Y} \Longrightarrow \underbrace{-۲\mathrm{Y}}_{\mathrm{Y}} \le \underbrace{\mathrm{X}_n - \mathrm{X}}_{\mathrm{X}_n} \le \underbrace{۲\mathrm{Y}}_{\mathrm{Z}}$$

[۲] The Lebesgue Dominated Convergence Theorem

حال با به‌کارگیری قضیه آ.۱.۱۵ داریم:

$$\underbrace{\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty}\ (\mathrm{X}_n-\mathrm{X})\right)}_{\circ} \leq \liminf_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n-\mathrm{X}\right) \leq \limsup_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n-\mathrm{X}\right)$$
$$\leq \underbrace{\mathbb{E}\left(\limsup_{n\to\infty}\ (\mathrm{X}_n-\mathrm{X})\right)}_{\circ}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n-\mathrm{X}\right)=\circ \Longrightarrow \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right)\longrightarrow \mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) \tag{آ.۱۶}$$

به‌علاوه اگر هم رابطه $\text{۲}\mathrm{Y} \leq \mathrm{X}-\mathrm{X}_n \leq \text{۲}\mathrm{Y}-$ را داشته باشیم، باز هم نتایج به‌دست‌آمده فوق برقرار است، به این صورت که:

$$\lim_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{X}-\mathrm{X}_n\right)=\circ \tag{آ.۱۷}$$

در آخر از روابط (آ.۱۶) و (آ.۱۷) به‌دست می‌آید که:

$$\mathbb{E}\left|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}\right| \longrightarrow \circ$$

$\square$

مراجع

[1] Asimit, A.V., Badescu, A.L. (2010). *Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model*, Scand. Actuar. J. 2: 93-104.

[2] Chen, Y., Ng, K. Yuen, K. (2011). *The maximum of randomly weighted sums with long tails in insurance and finance*, Stoch. Anal. Appl. 29: 1033-1044.

[3] Chen, Y., Yuen, K. (2009). *Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation*, Stoch. Models. 25: 176-189.

[4] De barra, G. (1981). *Measure theory and integration*, Department of Mathematics, Royal Holloway College, University of London.

[5] Esary, J.D., Proschan, F., and Walkup, D.W. (1967). *Association of random variables, with applications*, Ann. Math. Statist. 38: 1466-1474.

[6] Foss, S., Korshunov, D., Zachary, S. (2013). *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions.*

[7] Gut, A. (1944). *Probability: A Graduate Course*, Department of Mathematics, University of Uppsala, SE-751 06 Uppsala, Sweden.

[8] Li, J., Tang, Q., Wu, R. (2010). *Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model*, Adv. Appl. Probab. 42: 1126-1146.

[9] Omey, E. (1994). *On the difference between the product and the convolution product of distribution functions*, Publ. Inst. Math. (Béograd) 55(69): 111-145.

[10] Petrov, V.V. (1975). *A generalization of an inequality of Levy*, Theory Prob. AppL. 20(1): 141-145.

[11] Sgibnev, M.S. (1996). *On the distribution of the maxima of partial sums*, Statist. Probab. Lett. 28: 235-238.

[12] Tang, Q. (2006). *Asymptotic ruin probabilities in finite horizon with subexponential losses and associated discount factors*, Probab. Engrg. Inform. Sci. 20: 103-113.

[13] Tang, Q., Tsitsiashvili, G. (2003). *Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory*, Extremes. 6: 171-188.

[14] Wang, K. (2011). *Randomly weighted sums of dependent subexponential random variables*, Lith. Math. J. 51: 573-586.

[15] Wang, D., Tang, Q. (2006). *Tails probabilities of randomly weighted sums of random variables with dominated variation*, Stoch. Models. 22: 253-272.

[16] Yang, Y., ,Remigijus, L., Jonas, S. (2014). *Closure property and maximum of randomly weighted sums with heavy-tailed increments*, Statistics and Probability Letters. 91: 162-170.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اپیدمیولوژیک	Epidemiologic
اجتماع	Aggregation
احتمالات دمی مجانبی	Asymptotic Tail Probability
احتمال شرطی	Conditional Probability
استقراء	Induction
اشتراک	Intersection
اصول موضوعه کلموگروف	Kolmogorov Axioms
امید ریاضی	Expectation
انتگرال‌پذیر	Integrable
انتگرال‌گیری	Integration
اندازه احتمال	Probability Measure
اندازه‌پذیر	Measurable
برآورد	Estimate
بردار تصادفی	Random Vector
بردار ستونی	Column Vector
بعد متناهی	Finite Dimensional
بی‌کران	Unbounded
پوشش باز	Open Cover
پیچش	Convolutions
پیشامد	Event
تابع افزایشی همسو	Coordinatewise Increasing Function
تابع دم	Tail Function
تابع کاهشی همسو	Coordinatewise Decreasing Function
تابع خطر	Hazard Function
تابع مقعر	Concave Function

تکیه‌گاه .... Support
توزیع حاشیه‌ای .... Marginal Distribution
توزیع درازدم .... Long-Tailed Distribution
توزیع زیرنمایی .... Subexponential Distribution
توزیع سنگین‌دم .... Heavy-Tailed Distribution
توزیع مقادیر غالب دمی .... Dominatedly Varying-Tailed Distribution
توزیع هم‌ارز دمی .... Tail Equivalence Distribution
جرم احتمال .... Probability Mass
چندک .... Quantile
حقیقی‌مقدار .... Real-Valued
خاصیت بسته بودن .... Closure Property
دنباله .... Sequence
دو به دو مستقل .... Mutually Independent
رفتار مجانبی .... Asymptotic Behavior
زیرمجموعه .... Subset
ضعیف کردن .... Weakened
فضای احتمال .... Probability Space
فضای حاصل‌ضرب .... Product Space
فضای متریک .... Metric Space
فضای نمونه .... Sample Space
کران بالا .... Upper Bound
کران پایین .... Lower Bound
کران‌دار .... Bounded
گشتاور .... Moment
ماکزیمم .... Maximum
متغیر تصادفی .... Random Variable
متمّم .... Complement
متناهی .... Finite
مجموع جزئی .... Partial Sum
مجموعه بورل .... Borel Set
مجموعه بسته .... Closed Set
مجموعه مرجع .... Reference Set

مرتبه	Degree
مستقل	Independent
مقادیر وزنی تصادفی	Randomly Weighted Sums
ناتباهیده در صفر	Nondegenerate at Zero
نامتناهی	Infinite
نامعادله	Inequality
نانزولی	Nondecreasing
نرخ خطر	Hazard Rate
وابستگی	Dependence
وزن تصادفی	Random Weight
هم‌ارزی مجموع-ماکزیمم	Max-Sum Equivalence
هم‌پیوند مثبت	Positively Associated
هم‌توزیع	Identically Distributed
یکنواختی	Uniformity

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Aggregation	اجتماع
Asymptotic Behavior	رفتار مجانبی
Asymptotic Tail Probability	احتمالات دمی مجانبی
Borel Set	مجموعه بورل
Bounded	کران‌دار
Closed Set	مجموعه بسته
Closure Property	خاصیت بسته بودن
Column Vector	بردار ستونی
Complement	متمّم
Concave Function	تابع مقعر
Conditional Probability	احتمال شرطی
Convolutions	پیچش
Coordinatewise Decreasing Function	تابع کاهشی همسو
Coordinatewise Increasing Function	تابع افزایشی همسو
Degree	مرتبه
Dependence	وابستگی
Dominatedly Varying-Tailed Distribution	توزیع مقادیر غالب دمی
Epidemiologic	اپیدمیولوژیک
Estimate	برآورد
Event	پیشامد
Expectation	امید ریاضی
Finite	متناهی
Finite Dimensional	بعد متناهی
Hazard Function	تابع خطر
Hazard Rate	نرخ خطر

Heavy-Tailed Distribution .... توزیع سنگین‌دم
Identically Distributed .... هم‌توزیع
Independent .... مستقل
Induction .... استقراء
Inequality .... نامعادله
Infinite .... نامتناهی
Integrable .... انتگرال‌پذیر
Integration .... انتگرال‌گیری
Intersection .... اشتراک
Kolmogorov Axioms .... اصول موضوعه کلموگروف
Long-Tailed Distribution .... توزیع درازدم
Lower Bound .... کران پایین
Marginal Distribution .... توزیع حاشیه‌ای
Maximum .... ماکزیمم
Max-Sum Equivalence .... هم‌ارزی مجموع–ماکزیمم
Measurable .... اندازه‌پذیر
Metric Space .... فضای متریک
Moment .... گشتاور
Mutually Independent .... دو به دو مستقل
Nondecreasing .... نانزولی
Nondegenerate at Zero .... ناتباهیده در صفر
Open Cover .... پوشش باز
Partial Sum .... مجموع جزئی
Positively Associated .... هم‌پیوند مثبت
Probability Mass .... جرم احتمال
Probability Measure .... اندازه احتمال
Probability Space .... فضای احتمال
Product Space .... فضای حاصل‌ضرب
Quantile .... چندک
Randomly Weighted Sums .... مقادیر وزنی تصادفی
Random Variable .... متغیر تصادفی
Random Vector .... بردار تصادفی

Random Weight .... وزن تصادفی
Real-Valued .... حقیقی‌مقدار
Reference Set .... مجموعه مرجع
Sample Space .... فضای نمونه
Sequence .... دنباله
Subexponential Distribution .... توزیع زیرنمایی
Subset .... زیرمجموعه
Support .... تکیه‌گاه
Tail Equivalence Distribution .... توزیع هم‌ارز دمی
Tail Function .... تابع دم
Unbounded .... بی‌کران
Uniformity .... یکنواختی
Upper Bound .... کران بالا
Weakened .... ضعیف کردن

نمایه

Aabstract

Three important type of statistical distributions family, family heavy-tailed distributions, long-tailed and are subexponential. The largest of these families, the family of heavy-tailed distributions. In this thesis, at first express distribution arrangements and the definitions of these three families and bring proven results. In addition, in the second chapter the definition of family to give the dominatedly varying-tailed distributions and show the family class is closure under the action of convolutions long-tailed and dominatedly varying-tailed distributions. Finally, the last chapter of this thesis by considering the a weighted random variables X_1 and X_2 and create a certain dependence structure between these two variables, is proof Close family long-tailed and dominatedly varying-tailed distributions under convolutions and expressed planned equivalence results.

keywords: *Heavy-Tailed distribution, Long-Tailed distribution, Subexponential distribution, Convolutions, Dominatedly Varying-Tailed distributions*

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Asymptotic tail probabilities for randomly weighted sums and maximum of randomly weighted sums for heavy-tailed random variables

Mohammad Abedi

Supervisor

Dr. Ahmad Nezakati Rezazadeh

November 2015