



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

پیچش توابع شبه ستاره گون

فرزانه حمیدی نوده

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

شهریور ۱۳۹۴

تقدیم به...

تقدیم به روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه‌ی زندگی، ایستادگی را
تجربه‌نمایم و به مادر مهربانم که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر و به همسرم،
اسطوره‌ی زندگیم، پناه خستگی ام و امید بودم.

قبل از هر چیز خداوند را شاکرم که این موهبت را نصیب من نمود تا در وادی علم و دانش
قدمی هر چند ناچیز بردارم.

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر احمد زیره که به حق، در طی مراحل مختلف این تحقیق،
صبورانه و مشفقانه مراراً بنمایی نموده و از محضر علمیشان مستفید گردانیده اند کمال تشکر را دارم.
و با تقدیر و تشکر از خانواده ام و همه ی دوستانی که در این امر مرایاری نمودند.

فرزانه حبیبی نوده
شهریور ۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب فرزانه حبیبی نوده دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان پیچش توابع شبه ستاره گون، تحت راهنمایی دکتر احمد زیره متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فرزانه حبیبی نوده
شهریور ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه ، به بیان تعاریف و قضایای مربوط به توابع شبه ستاره گون می پردازیم. این توابع تعمیم توابع ستاره گون می باشند. مثلاً تابع $S_\alpha(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ با قرار دادن $\alpha = \frac{1}{2}$ خواهیم داشت

$$S_\alpha(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

$$f(z) * S_{\frac{1}{2}}(z) = f(z)$$

یعنی $S_{\frac{1}{2}}$ عضو خنثای ضرب هادامارد است.

یعنی ضرب هادامارد $S_{\frac{1}{2}}$ با هر تابعی مانند f ، خود f را می دهد.

یعنی تابع شبه ستاره گون در حالت خاص ، توابع ستاره گون را به ما می دهد.

واژه های کلیدی

توابع تحلیلی، توابع ستاره گون، توابع شبه ستاره گون، مشتق کسری و انتگرال کسری.

پیشگفتار

تابع تحلیلی که یک به یک است را تک‌ارز می‌نامیم. از نظر تحلیلی تابع تک‌ارز مشتق مخالف صفر دارد و از نظر خم‌های ساده را بر خم‌های ساده می‌نگارد. در این پایان‌نامه در فصل اول، به بیان تعاریف اولیه و مفاهیم مقدماتی پرداخته‌ایم. در فصل دوم، توابع ستاره‌گون و شبه‌ستاره‌گون، ضرب هادامارد و رده‌های توابع تک‌ارز و محدب را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در فصل سوم، توابع ستاره‌گون و شبه‌ستاره‌گون از مرتبه‌ی α و نوع β ، کران برای ضرایب رده‌ی این توابع و شعاع تک‌ارزی، ستاره‌گونی و تحدب را مورد تفسیر و بررسی قرار داده‌ایم. در فصل چهارم، به رده‌ی توابع $R_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ ، کران برای ضرایب رده‌ی این توابع، خصوصیات بستار، انتگرال کسری و تعمیم آن پرداخته‌ایم.

فهرست مطالب

۱	پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی	۱
۱	۱.۱ نمادگذاری و تعاریف	۱
۱	۲.۱ ردهی S	۱
۶	۳.۱ ردهی S^*	۶
۹	۴.۱ ردهی K	۹
۱۳	۵.۱ ردهی T	۱۳
۱۶	۶.۱ ردهی $T^*, C(\alpha)$	۱۶
۲۳	۲ ردهی توابع $R[\alpha, \beta]$	۲۳
۲۳	۱.۲ مقدمه	۲۳
۲۴	۲.۲ پیش‌چ	۲۴
۳۱	۳ ردهی توابع $R_\mu(\alpha, \beta)$	۳۱
۳۱	۱.۳ توابع ستاره‌گون از مرتبه‌ی α و نوع β	۳۱
۳۳	۲.۳ کران برای ضرایب ردهی توابع $R_\mu(\alpha, \beta)$	۳۳
۴۱	۳.۳ شعاع تک‌ارزی، ستاره‌گونی و تحذب	۴۱
۴۷	۴ ردهی توابع $R_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$	۴۷
۴۷	۱.۴	۴۷
۴۹	۲.۴ کران برای ضرایب ردهی توابع $R_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$	۴۹
۵۰	۳.۴ خصوصیات بستار	۵۰
۵۳	۴.۴ انتگرال کسری	۵۳
۵۶	۵.۴ تعمیم عملگر انتگرال کسری	۵۶
۶۱	مراجع	۶۱
۶۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۶۳

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه موردنیاز در فصول بعد می‌باشد.
 $\mathbb{C}$ را برابر با مجموعه‌ی اعداد مختلط در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. تابع f را در نقطه‌ی $z \in \mathbb{C}$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی z مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. H را رده‌ای از توابع به شکل $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ در نظر می‌گیریم که در دیسک
یکه‌ی باز $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ تحلیلی می‌باشند.

تعریف ۳.۱.۱. هر مجموعه‌ی همبند و باز در $\mathbb{C}$ را میدان می‌نامیم. میدان را معمولا با D نشان می‌دهیم.

لم ۴.۱.۱. (شوارتز)^۱ فرض کنید $f(z)$ بر دیسک $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ تابعی تحلیلی باشد و
برای ثابت M ، $|f(z)| < M$ اگر $f(z)$ در $z = 0$ با تعداد دفعات m صفر شود، در این صورت

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m} |z|^m \quad (z \in U)$$

. در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^m} z^m$$

به‌طوری‌که θ ثابت است.

۲.۱ رده‌ی S

تعریف ۱.۲.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ که در U تحلیلی و تک‌ارز (یعنی
یک‌به‌یک) می‌باشند و در شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کنند را با S نشان می‌دهیم.

^۱Schwarz

لم ۲.۲.۱. اگر $f(z) \in S$ آنگاه تابع $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ نیز در S است.

تذکر: به جای $\sqrt{f(z^2)}$ می‌نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدأ دارد که

$$\sqrt{f(z^2)} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)\log f(z^2)} \text{ را بی‌معنی می‌کند.}$$

برهان. اگر $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ آنگاه قرار می‌دهیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ لذا داریم

$$g(z) = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots} \quad (1.1)$$

(شاخه‌ی اصلی $\sqrt{}$ را در نظر گرفتیم). تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$.

اثبات تک‌ارزی: اگر $g(z_1) = g(z_2)$ یعنی $z_1\sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2\sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ آنگاه

$f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون f یک‌به‌یک می‌باشد، داریم $z_1^2 = z_2^2$ یعنی $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. و از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است پس $z_1 = z_2$ و تک‌ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود.

□

قضیه ۳.۲.۱. اگر $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ متعلق به S باشد، آنگاه $|a_2| \leq 2$. [۸]

مثال. (تابع کوئب) در قضیه‌ی ۳.۲.۱ با قرار دادن $a_2 = 2e^{i\alpha}$ که α حقیقی باشد، می‌توان $g(z)$ را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$g(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha} z^2} = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$$

لذا

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2} = z + 2e^{i\alpha} z^2 + 3^2 e^{2i\alpha} z^3 + \dots$$

با قراردادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می‌رسیم

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است می‌نگارد.

قضیه ۴.۲.۱. (پوشش) اگر $f(z) \in S$ و برای $|z| < 1$ ، $f(z) \neq c$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. چون $f(z) \in S$ پس $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ و چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به S می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{c})z^2 + \dots$$

بنا به قضیه‌ی ۳.۲.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$ از طرفی

$$|\frac{1}{c}| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \implies |\frac{1}{c}| \leq 2 + |a_2|$$

□

لم ۵.۲.۱. اگر $f(z) \in S$ و $z = re^{i\theta}$ آن‌گاه

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log|f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z| < 1$ ، $f'(z) \neq 0$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر گرفت.

حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log|f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}.$$

□

قضیه ۶.۲.۱. اگر $f(z) \in S$ آن‌گاه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. می‌دانیم برای $|z_0| < 1$ ، تابع $\omega = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ تحلیلی، یک‌به‌یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز است و

$$\begin{aligned} g(\circ) &= b_0 = f(z_0) & b_1 &= g'(\circ) = f'(z_0)(1-|z_0|^2) \\ b_2 &= \frac{g''(\circ)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1-|z_0|^2)) \end{aligned}$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد (یعنی در شرایط رده‌ی S صدق نمی‌کند)، پس متعلق به رده‌ی S نیست. باتوجه به این‌که تابع $\frac{g(z) - g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \dots$ در S قرار می‌گیرد لذا بنابر قضیه‌ی ۳.۲.۱ نتیجه می‌شود $2 \leq \left| \frac{b_2}{b_1} \right|$ یعنی

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\overline{z_0} \right| \leq 2$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و با ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$ داریم

$$\left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است قرار می‌دهیم

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{4r}{1 - r^2}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{4r}{1 - r^2}$ واقع است لذا

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}$$

بنا به لم ۵.۲.۱ داریم $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$ یعنی

$$\begin{aligned} \frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} &\leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2} \\ \Rightarrow \frac{2r - 4}{1 - r^2} &\leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2} \end{aligned}$$

حال از طرفین نامساوی از 0 تا r انتگرال می‌گیریم

$$\log(1 - r) - 3\log(1 + r) \leq \log |f'(z)| \leq \log(1 + r) - 3\log(1 - r)$$

$$\Rightarrow \log \frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq \log |f'(z)| \leq \log \frac{1 + r}{(1 - r)^3}$$

درنتیجه

$$\frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

□

مثال. مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ برابر است با $k'(z) = \frac{1 + z}{(1 - z)^3}$

لذا بنا به قضیه‌ی ۶.۲.۱ کران بالای این تابع در $z = r$ و کران پایین آن در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۷.۲.۱. اگر $f(z) \in S$ آن گاه

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. بنابه قضیه ۶.۲.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه‌ی $\circ$ را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم.

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ آن گاه $\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$ و نامساوی $\frac{1}{4} \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ همواره برقرار است و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ بنابه قضیه ۴.۲.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر آن پاره‌خط مستقیم c را از $\circ$ تا $f(z)$ می‌پوشاند. بنابراین

$$|f(z)| = \int_{c_0} |d\omega| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا به قضیه ۶.۲.۱

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \int_0^t \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

مثال. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ را در نظر بگیرید. بنا به قضیه ۷.۲.۱ کران بالای این تابع در $z = r$ و کران پایین آن در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۸.۲.۱. اگر تابع $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در ردهی S باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد آن گاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $z = re^{i\theta}$ که $r < 1$ ، قرار می‌دهیم

$$\operatorname{Im} f(z) = u(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

باضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از $\circ$ تا π داریم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \quad (2.1)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin \theta|$$

و به استقرا می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin \theta|$. لذا از رابطه‌ی (۲.۱) نتیجه می‌شود

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^\pi |u(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (3.1)$$

سپس نشان می‌دهیم $u(re^{i\theta}) \neq 0$ ، $0 < r < 1$ ، $0 < \theta < \pi$

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iu(re^{i\theta})$$

چون $u(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، باید در فاصله‌ی $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد لذا

$$r = |a_1 r| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |u(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (4.1)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱) رابطه‌ی $|a_n r^n| \leq nr$ به دست می‌آید و با $r \rightarrow 1$ قضیه ثابت می‌گردد.

□

۳.۱ رده‌ی S^*

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z ستاره‌گون گوئیم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون گوئیم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $\omega = 0$ ستاره‌گون است. این زیررده‌ی S را با S^* نشان می‌دهیم.

لم ۲.۳.۱. فرض کنید $f(z) \in S$ ، در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in S^*$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت تابع $f(z)$ باشد. اگر $\omega \in D$ ، آنگاه برای $0 < t < 1$ ، $t\omega \in D$ (چون D ستاره‌گون می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند چون $g(0) = f^{-1}(tf(0)) = 0$.

باتوجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$ ، اکنون نقطه‌ی $\omega_1 \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین برای نقطه‌ی z_1 که $|z_1| < r$ و برای t دلخواه که $0 < t < 1$ داریم

$$|f^{-1}(t\omega_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که $t\omega_1$ در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای هر ω_1 متعلق به D_r و هر $0 < t < 1$ درست است، میدان D_r نسبت به $\omega = 0$ ستاره‌گون می‌باشد. به عکس، اگر $f(z)$ در ردهی S^* قرار نداشته باشد آن‌گاه نقطه‌ی $\omega \in D$ وجود دارد به‌طوری‌که برای t_0 که $0 < t_0 < 1$ ، $t_0\omega_0$ متعلق به D نمی‌باشد.

اینک قرص $1 > r > |z|$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی ω_0 باشد. چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $t_0\omega_0$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ قرص $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. $\square$

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنید $f(z) \in S$ بنابراین $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0.$$

برهان. با توجه به لم ۲.۳.۱، $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به عبارت دیگر برای هر θ که $0 \leq \theta \leq 2\pi$ بردار شعاعی از $\omega = 0$ تا $\omega = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد. این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ صعودی اکید است. زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در S^* با شرط $0 < \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta})$ وجود دارد. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})$ بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{\operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

$\square$

مثال. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در ردهی S^* قرار دارد زیرا تصویر قرص $|z| < 1$ صفحه‌ی ω می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\} > 0.$$

قضیه ۴.۳.۱. اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ متعلق به S^* باشد، آن‌گاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. چون برای $1 > |z| > 0$ داریم $f(z) \neq 0$ ، پس تابع

$$P(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \quad (5.1)$$

در $|z| < 1$ تحلیلی است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$P(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n \quad (6.1)$$

از طرفی برای $|z| < 1$ ، $f(z) \in S^*$ پس $Re\{P(z)\} > 0$. بنا به قضیه ۳.۲.۱ می‌دانیم

$$|\alpha_n| \leq 2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = (1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}) (1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n)$$

با مساوی قراردادن ضرایب به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$k a_k = a_k + a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}$$

و این معادل است با

$$(k-1)a_k = a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (8.1)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) به‌کاربرد. لذا

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_2| + 1)$$

از رابطه‌ی فوق داریم $|a_2| \leq 2$. حال فرض کنیم برای $k = 2, 3, \dots, n-1$ ، $|a_k| \leq k$ در این صورت

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}$$

و این $|a_n| \leq n$ را نتیجه می‌دهد. لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. $\square$

تعریف ۵.۳.۱. تابع $f(z) \in S$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α که $0 \leq \alpha < 1$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

این زیردهی S را با $S^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ که $0 \leq \alpha < 1$. اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا به تعریف ۵.۳.۱ کافی است نشان دهیم $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1 - \alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد. داریم

$$\begin{aligned} \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| &= \left| \frac{zf'(z) - f(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n| z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n| |z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|} \end{aligned}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $1 - \alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n| \leq (1 - \alpha) \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \right)$$

که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha$.

□

بنا به فرض این رابطه برقرار است بنابراین $\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq 1 - \alpha$

۴.۱ رده‌ی K

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوئیم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in S$ را محدب گوئیم هرگاه قرص $|z| < 1$ تحت تابع $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود. این زیررده‌ی S را با K نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. اگر $f(z) \in S$ آن‌گاه $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in K$ و تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط ω_1 و ω_2 را در D_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم پاره‌خط $t\omega_1 + (1-t)\omega_2$ که $0 < t < 1$ ، هم در D_r قرار دارد. باید نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < 1$ موجود باشند که $\omega_1 = f(z_1)$ و $\omega_2 = f(z_2)$. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $|z_1| \leq |z_2|$. در نتیجه تصویر $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و چون $f(z) \in S$ ، لذا در شرایط $|h(z)| < 1$ و $h(0) = 0$ صدق می‌کند. به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به‌ویژه

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(t\omega_1 + (1-t)\omega_2)| \leq |z_2| < r \quad (9.1)$$

چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی z_0 ای در قرص $|z| < 1$ موجود است که $t\omega_1 + (1-t)\omega_2 = f(z_0)$ ولی بنابر (۹.۱) نقطه‌ی $f^{-1}(f(z_0))$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < 1$ باشد، پس هر نقطه بر پاره‌خط $t\omega_1 + (1-t)\omega_2$ در D_r قرار دارد.

به‌عکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی K نباشد، آنگاه دو نقطه متعلق به D وجود دارد که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < 1$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد.

چون $D_r \subset D$ ، پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد. لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بریک میدان محدب تصویر نمی‌کند. $\square$

قضیه ۴.۴.۱. اگر $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ، آنگاه $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \quad (|z| < 1).$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۳.۴.۱، $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $\omega = f(re^{i\theta})$ دایره‌ی $|z| = r < 1$ را بر یک مرز ساده‌ی بسته می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی ω با محور حقیقی می‌سازد برابر است با

$$\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > 0$$

بنابراین داریم

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{Im} \log f'(re^{i\theta})) = 1 + \operatorname{Im} \left\{ ire^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

$\square$

قضیه ۵.۴.۱. (الکساندر)^۲ فرض کنید f یک تابع تحلیلی با شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ در D باشد. در این صورت $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in S^*$.

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ آنگاه

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}.$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. $\square$

^۲Alexander

قضیه ۶.۴.۱. اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ متعلق به K باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۴.۱، تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$ در S^* قرار دارد، لذا بنا به قضیه ۴.۳.۱ برای هر n ، $n|a_n| \leq 1$ و $|a_n| \leq 1$. $\square$

قضیه ۷.۴.۱. اگر $f(z) \in K$ و $f(z) \neq c$ که $|z| < 1$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{2}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است. دو نقطه‌ی متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم بنابراین

$$g(z_0) - g(z_1) = (c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2 = (f(z_0) - f(z_1))(f(z_0) + f(z_1) - 2c)$$

اما $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک‌ارز می‌باشد.

همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{1}{2}[f(z_0) + f(z_1)]$ متعلق به تصویر $|z| < 1$ است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$ و تک‌ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \dots$ ، تابع نرمال زیر متعلق به S است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + \left(\frac{-z^2}{2c}\right) + \dots$$

به‌علاوه در $|z| < 1$ ، $h(z) \neq \frac{c}{2}$ زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با به‌کار بردن قضیه‌ی پوشش درمی‌یابیم $\left|\frac{c}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$ و یا $|c| \geq \frac{1}{2}$. $\square$

قضیه ۸.۴.۱. اگر $f(z) \in K$ آنگاه برای $|z| = r < 1$ ،

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ که $|z| < 1$ ، تحلیلی، یک‌به‌یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$$

نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز است و داریم

$$g(0) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1 - |z_0|^2))$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در ردهی S قرار ندارد. با توجه به این‌که تابع

$$\frac{g(z) - g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$$

در S قرار می‌گیرد لذا متعلق به K نیز می‌باشد. پس بنا به قضیه ۶.۴.۱،

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\overline{z_0} \right| \leq 1$$

و با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$ داریم

$$\left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$$

چون z_0 دلخواه است داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| &\leq \frac{2r}{1 - r^2} \\ \Rightarrow \frac{2r^2 - 2r}{1 - r^2} &\leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 2r}{1 - r^2} \\ \frac{2r - 2}{1 - r^2} &\leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 2}{1 - r^2} \end{aligned}$$

حال از 0 تا r انتگرال می‌گیریم

$$-2 \log(1 + r) \leq \log |f'(z)| \leq -2 \log(1 - r)$$

لذا

$$\frac{1}{(1 + r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)^2}$$

□

قضیه ۹.۴.۱. اگر $f(z) \in K$ ، آنگاه برای $|z| = r < 1$ ،

$$\frac{1}{(1 + r)} \leq |f(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)}.$$

برهان. بنا به قضیه ۸.۴.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)^2}$. نقطه‌ی 0 را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم.

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1}{(1 - t)^2} dt = \frac{r}{1 - r}$$

نامساوی $\frac{1}{(1 + r)} \leq \frac{r}{1 - r}$ همواره برقرار است. حال اگر $\frac{1}{r} \leq |f(z)|$ ، لذا $\frac{r}{(1 + r)} \leq |f(z)|$ و همچنین اگر طبق قضیه پوششی، مسیر c داخل دایره‌ی یکه از 0 تا z موجود باشد به‌طوری‌که تصویر آن پاره‌خط مستقیم c از 0 تا $f(z)$ را بپوشاند، آنگاه

$$|f(z)| = \int_c |d\omega| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی قبل

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{r}{1+r}$$

لذا داریم

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$$

□

۵.۱ ردهی T

تعریف ۱.۵.۱. T را زیررده‌ای از S شامل توابعی با ضرایب منفی در نظر می‌گیریم. گوییم تابع تحلیلی و تک‌ارز f متعلق به ردهی T است هرگاه بتوانیم آن‌را به شکل $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ بیان کنیم.

قضیه ۲.۵.۱. تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در T قرار دارد اگر و تنها اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f(z) \in T$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. چون $f(z) \in T$ ، $f(z)$ در دیسک واحد U تک‌ارز است. بنابراین $f'(z) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1}$ پس

$$f'(r) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \neq 0 \quad (|z| = r)$$

فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| > 1$. آنگاه اندیس مثبت N وجود دارد به‌طوری‌که $\sum_{n=2}^N n|a_n| > 1$. بنابراین $0 < r_0 < 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $\sum_{n=2}^N n|a_n| r_0^{n-1} > 1$ لذا

$$f'(r_0) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r_0^{n-1} < 0$$

چون $f'(r)$ پیوسته است و $f'(0) = 1$ ، پس $0 < r_1 < r_0$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(r_1) = 0$ و این با فرض $f'(z) \neq 0$ در تناقض می‌باشد. لذا فرض خلف باطل و $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. به‌عکس، فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. بنابراین

$$Re(f'(z)) = Re\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1}\right) > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 0$$

پس برای $z_1, z_2 \in U$ و $z_1 \neq z_2$ ،

$$Re \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = \int_0^1 Re f'[z_1 + t(z_2 - z_1)] dt$$

□

لذا $f(z) \in T$ در U تک‌ارز است و $f(z) \in T$.

قضیه ۳.۵.۱. اگر $f(z) \in T$ آنگاه

$$r - \frac{1}{4}r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1}{4}r^2 \quad (|z| = r).$$

برهان. بنا به قضیه ۲.۵.۱ داریم $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. بنابراین

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq r + \frac{1}{4}r^2$$

و

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{1}{4}r^2$$

لذا داریم

$$r - \frac{1}{4}r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1}{4}r^2 \quad (|z| = r).$$

□

مثال. بنا به قضیه ۲.۵.۱ تابع $f(z) = z + \frac{1}{4}z^2$ متعلق به رده T است. زیرا با جایگزینی $n=2$ و $a_2 = \frac{1}{4}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می‌کند. لذا طبق قضیه ۳.۵.۱، کران بالای این تابع در $z=r$ و کران پایین آن در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۴.۵.۱. اگر $f(z) \in T$ آنگاه

$$1 - r \leq |f'(z)| \leq 1 + r.$$

برهان. می‌دانیم

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq 1 + r \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1 + r$$

و

$$|f'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \geq 1 - r \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - r$$

لذا داریم

$$1 - r \leq |f'(z)| \leq 1 + r \quad (|z| = r).$$

□

مثال. طبق قضیه ۴.۵.۱ کران بالای تابع $f(z) = z - \frac{1}{r}z^2$ در $z = r$ و کران پایین آن در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۵.۵.۱. اگر توابع $f_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} |a_{j,m}|z^j$ برای $m = 1, 2, \dots, n$ متعلق به ردهی T باشند، آنگاه تابع $h(z) = \sum_{m=1}^n c_m f_m(z)$ نیز در ردهی T قرار دارد به طوری که $c_m \geq 0$ و $\sum_{m=1}^n c_m = 1$.

برهان. طبق تعریف $h(z)$ می‌توانیم بنویسیم

$$h(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n c_m |a_{j,m}| \right) z^j$$

چون برای هر $m = 1, 2, \dots, n$ ، $f_m(z)$ در T قرار دارد، لذا داریم $\sum_{j=2}^{\infty} j |a_{j,m}| \leq 1$ که $m = 1, 2, \dots, n$ بنابراین می‌توانیم ببینیم

$$\sum_{j=2}^{\infty} j \left(\sum_{m=1}^n c_m |a_{j,m}| \right) = \sum_{m=1}^n c_m \left(\sum_{j=2}^{\infty} j |a_{j,m}| \right) \leq \sum_{m=1}^n c_m = 1$$

□

که نتیجه می‌دهد $h(z)$ در T قرار دارد.

قضیه ۶.۵.۱. (توابع اکسترمال) فرض کنید

$$f_n(z) = z - \frac{1}{n}z^n, \quad f_1(z) = z \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$

بنابراین $f(z) \in T$ اگر و تنها اگر بتوانیم آن را به شکل $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم به طوری که $\lambda_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$.

برهان. فرض کنیم

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \left(z - \frac{1}{n}z^n \right)$$

$$= \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n$$

در نتیجه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

لذا بنا بر قضیه (۲.۵.۱)، $f(z) \in T$.

به عکس، فرض کنیم $f(z) \in T$. چون $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ برای $n = 1, 2, \dots$

قرار می‌دهیم $\lambda_n = n|a_n|$ و $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$ لذا

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda_n z^n = z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n [z - f_n(z)] \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = (1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n) z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z). \end{aligned}$$

□

۶.۱ رده‌ی $T^*, C(\alpha)$

تعریف ۱.۶.۱. تابع $f(z) \in T$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α نامیده می‌شود هرگاه

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

که $0 \leq \alpha < 1$. این زیررده‌ی T را با $T^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۶.۱. تابع $f(z) \in T$ محدب از مرتبه‌ی α نامیده می‌شود هرگاه

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (|z| < 1)$$

. که $0 \leq \alpha < 1$. این زیررده‌ی T را با $C(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۶.۱. تابع $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در $T^*(\alpha)$ قرار دارد اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha.$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in T^*(\alpha)$. در این صورت

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{z - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n}\right\} > \alpha \quad (|z| < 1) \quad (۱۰.۱)$$

در رابطه‌ی (۱۰.۱) هرگاه $z \rightarrow 1$ (که z یک مقدار حقیقی است) داریم

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq \alpha(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|)$$

بنابراین

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha$$

حال اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha$$

کافی است نشان دهیم $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1 - \alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد. داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| &= \left| \frac{zf'(z) - f(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_n z^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^{n-1}} \\ &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|} \end{aligned}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $1 - \alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| \leq (1 - \alpha) \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \right).$$

که این رابطه نیز معادل است با $1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| \leq 1 - \alpha$ و این نامساوی بنا به فرض برقرار است. $\square$

نتیجه ۴.۶.۱. تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ متعلق به $C(\alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha.$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in C(\alpha)$ برای $|z| < 1$ داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ 1 - \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| z^{n-1}} \right\} > \alpha \end{aligned} \quad (11.1)$$

در رابطه‌ی (۱۱.۱) هرگاه $z \rightarrow 1$ (که z یک مقدار حقیقی است) داریم

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \geq \alpha \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \right)$$

بنابراین

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

برعکس، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

کافی است نشان دهیم $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد. لذا

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - 1 \right| &= \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| = \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1}} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|} \end{aligned}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $1-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|)$$

این رابطه‌ی نیز معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ و این نامساوی نیز بنا به فرض برقرار است. $\square$

قضیه ۵.۶.۱. اگر $f(z) \in T^*(\alpha)$ آن‌گاه

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \quad (|z|=r).$$

برهان. بنابه قضیه‌ی ۳.۶.۱ داریم

$$(2-\alpha) \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

بنابراین

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|r^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2$$

و به‌طور مشابه

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2$$

لذا نتیجه می‌شود

$$r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \quad (|z|=r).$$

$\square$

مثال. بنا به قضیه‌ی ۳.۶.۱ تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha}z^2$ متعلق به رده‌ی T^* است هرگاه

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

حال با جایگزینی $n=2$ و $a_2 = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می‌کند. لذا بنا به قضیه‌ی ۵.۶.۱ کران بالای این تابع در $z=r$ و کران پایین آن در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۶.۶.۱. اگر $f(z) \in T^*(\alpha)$ آن‌گاه

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}r \quad (|z|=r).$$

برهان. داریم

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq 1 + r \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \quad (12.1)$$

و همچنین بنا به قضیه‌ی ۳.۶.۱ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1-\alpha + \alpha \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq 1-\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \quad (13.1)$$

با جایگزینی عبارت (۱۳.۱) در (۱۲.۱) طرف راست حکم نتیجه می‌شود. از طرف دیگر

$$|f'(z)| \geq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \geq 1 - r \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}r.$$

□

مثال. تابع $f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha}z^2$ را در نظر بگیرید. بنا به قضیه‌ی ۶.۶.۱ کران بالای این تابع در $z=r$ و کران پایین آن در $z=-r$ تعیین می‌شود.

نتیجه ۷.۶.۱. اگر $f(z) \in C(\alpha)$ آن‌گاه

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2 \quad (|z|=r).$$

برهان. بنا به نتیجه‌ی ۴.۶.۱ داریم

$$2(2-\alpha) \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

بنابراین

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|r^n \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2$$

و به‌طور مشابه

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2$$

لذا نتیجه می‌شود

$$r - \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} r^2 \quad (|z| = r).$$

□

نتیجه ۸.۶.۱. اگر $f(z) \in C(\alpha)$ آنگاه

$$1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r \quad (|z| = r).$$

برهان. داریم

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| |z|^{n-1} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \quad (14.1)$$

و همچنین بنا به نتیجه‌ی ۴.۶.۱،

$$\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \leq 1 - \alpha + n\alpha \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq 1 - \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} r = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \quad (15.1)$$

یا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \leq \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \quad (16.1)$$

با جایگزینی عبارت (۱۶.۱) در (۱۴.۱) طرف راست حکم نتیجه می‌شود. ازطرف دیگر

$$|f'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| |z|^{n-1} \geq 1 - r \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \geq 1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} r.$$

□

قضیه ۹.۶.۱. فرض کنید

$$f_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha} z^n, \quad f_1(z) = z \quad (n = 2, 3, \dots)$$

آنگاه $f(z) \in T^*(\alpha)$ اگر و تنها اگر بتوانیم آن را به شکل $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم به‌طوری‌که $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1, \lambda_n \geq 0$.

برهان. فرض کنیم

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1-\alpha}{n-\alpha} z^n$$

در نتیجه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1-\alpha}{n-\alpha} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

لذا $f(z) \in T^*(\alpha)$ به عکس، فرض کنیم $f(z) \in T^*(\alpha)$ چون

$$|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{n-\alpha} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

قرار می‌دهیم

$$\lambda_n = \frac{(n-\alpha)|a_n|}{1-\alpha}, \quad \lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

□

در نتیجه $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ و این برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۱۰۶.۱. اگر $f(z) \in C(\alpha)$ آنگاه $f(z) \in T^*(\frac{2}{3-\alpha})$.

برهان. بنا به قضیه‌ی ۳.۶.۱ و نتیجه‌ی ۴.۶.۱ باید ثابت کنیم

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha} |a_n| \leq 1 \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \frac{2}{3-\alpha}}{1 - \frac{2}{3-\alpha}} |a_n| \leq 1$$

کافی است نشان دهیم

$$\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha} \geq \frac{n - \frac{2}{3-\alpha}}{1 - \frac{2}{3-\alpha}} = \frac{n(3-\alpha) - 2}{1-\alpha} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

و عبارت فوق معادل است با $n^2 - 3n + 2 \geq 0$ ، $n = 2, 3, \dots$ که این نامساوی نیز بدیهی است. □

فصل ۲

رده‌ی توابع $R[\alpha, \beta]$

۱.۲ مقدمه

طبق تعریف ۵.۳.۱ کلاس توابع ستاره‌گون از مرتبه‌ی α را با $S^*(\alpha)$ نمایش دادیم. یکی از توابع رده‌ی $S^*(\alpha)$ تابع $S_\alpha(z)$ می‌باشد.

$$S_\alpha(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c(\alpha, n)z^n$$

به‌طوری‌که

$$c(\alpha, n) = \frac{\prod_{k=2}^n (k - 2\alpha)}{(n-1)!} \quad (n \geq 2)$$

تعریف ۱.۱.۲. توابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ که $a_n \geq 0$ و $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ که $b_n \geq 0$ را در نظر می‌گیریم. ضرب هادامارد دو تابع f و g را به‌صورت

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

تعریف می‌کنیم.

فرض می‌کنیم T نشان‌دهنده‌ی کلاس توابع به شکل

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geq 0) \quad (1.2)$$

باشد که در دیسک واحد $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ تحلیلی هستند. اگر $f(z)$ داده شده در رابطه‌ی (۱.۲) و $g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ باشد، ضرب هادامارد تعمیم یافته‌ی f و g به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f * g)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

تعریف ۲.۱.۲. تابع $f \in T$ را α -شبه‌ستاره‌گون از مرتبه‌ی β با ضرایب منفی گوئیم اگر

$$(f * S_\alpha)(z) \in S^*(\beta) \quad (0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1)$$

رده‌ی این توابع را با $R[\alpha, \beta]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۲. تمام توابع $f \in T$ که در شرط $zf'(z) \in R[\alpha, \beta]$ صدق می‌کنند را با $C[\alpha, \beta]$ نمایش می‌دهیم ($C[\alpha, \beta]$ محدب و زیررده‌ای از T است).

لم ۴.۱.۲. [۹] اگر تابع $f(z)$ طبق (۱.۲) تعریف شده باشد، آنگاه $f(z)$ متعلق به رده‌ی $R[\alpha, \beta]$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \beta) c(\alpha, n) a_n \leq 1 - \beta.$$

لم ۵.۱.۲. [۵] اگر تابع $f(z)$ طبق (۱.۲) تعریف شده باشد، آنگاه $f(z)$ متعلق به رده‌ی $C[\alpha, \beta]$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n - \beta) c(\alpha, n) a_n \leq 1 - \beta.$$

اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n a_n \leq 1$ آنگاه $f(z)$ تعریف شده طبق (۱.۲) در دیسک واحد تکرارز است و اگر $0 \leq \alpha \leq \frac{3-\beta}{2(2-\beta)}$ ، آنگاه $f \in R[\alpha, \beta]$ تکرارز است. همچنین اگر $0 \leq \alpha \leq \frac{3-\beta}{2(2-\beta)}$ ، آنگاه تابع $f(z) \in C[\alpha, \beta]$ در دیسک واحد تکرارز است.

لم ۶.۱.۲. [۳] اگر تابع $f(z)$ تعریف شده طبق (۱.۲) متعلق به رده‌ی $C[\alpha, \beta]$ باشد، آنگاه f متعلق به رده‌ی $R[\alpha, \gamma]$ است که $\gamma = \frac{2}{3-\beta}$.

۲.۲ پیچش

قضیه ۱.۲.۲. اگر تابع $f(z)$ تعریف شده در (۱.۲) متعلق به رده‌ی $R[\alpha, \beta]$ باشد به‌طوری‌که $0 \leq \alpha \leq \frac{3-\beta}{2(2-\beta)}$ و $0 \leq \beta < 1$ باشد، آنگاه $(f * f * \dots * f)(z)$ متعلق به رده‌ی $R[\alpha, \beta]$ است که $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

برهان. با استفاده از لم ۴.۱.۲ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \beta) c(\alpha, n) a_n^m \leq \left[\frac{1 - \beta}{2(1 - \alpha)(2 - \beta)} \right]^{(m-1)} (1 - \beta) \leq 1 - \beta$$

که $0 \leq \beta < 1$ و $0 \leq \alpha \leq \frac{3-\beta}{2(2-\beta)}$

زیرا با استفاده از لم ۴.۱.۲ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \beta) c(\alpha, n) a_n \leq 1 - \beta$$

این نامساوی برای هر جمله نیز برقرار است. بنابراین

$$\begin{aligned} (n - \beta) c(\alpha, n) a_n \leq 1 - \beta &\Rightarrow a_n \leq \frac{1 - \beta}{(n - \beta) c(\alpha, n)} \\ \Rightarrow a_n^{m-1} &\leq \left(\frac{1 - \beta}{(n - \beta) c(\alpha, n)} \right)^{m-1} \leq \frac{1 - \beta}{2(2 - \beta)(1 - \alpha)} \end{aligned}$$

چون $c(\alpha, n)$ به ازای $n \geq 2$ صعودی است، پس $c(\alpha, 2)$ کمترین مقدار را دارد و داریم

$$c(\alpha, 2) = \frac{\prod_{k=2}^2 (k - 2\alpha)}{(2 - 1)!} = 2 - 2\alpha = 2(1 - \alpha)$$

حال کافی است ثابت کنیم

$$\frac{1 - \beta}{2(1 - \alpha)(2 - \beta)} \leq 1$$

نامساوی فوق برقرار است چون طبق فرض قضیه داریم $\frac{3-\beta}{2(2-\beta)} \leq \alpha \leq 0$ در نتیجه

$$1 - \alpha \geq 1 - \frac{3 - \beta}{2(2 - \beta)} = \frac{1 - \beta}{2(2 - \beta)} \Rightarrow \frac{1 - \beta}{2(1 - \alpha)(2 - \beta)} \leq 1$$

□

قضیه ۲.۲.۲. اگر تابع $f(z)$ تعریف شده در (۱.۲) متعلق به ردهی $C[\alpha, \beta]$ باشد که $\frac{\gamma-3\beta}{4(2-\beta)} \leq \alpha \leq 0$ و $0 \leq \beta < 1$ آن گاه $(f * \underbrace{f * \dots * f}_m)(z) \in C[\alpha, \beta]$

برهان. با استفاده از لم ۵.۱.۲ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n - \beta) c(\alpha, n) a_n^m \leq \left[\frac{1 - \beta}{4(1 - \alpha)(2 - \beta)} \right]^{m-1} (1 - \beta) \leq 1 - \beta.$$

که $\frac{\gamma-3\beta}{4(2-\beta)} \leq \alpha \leq 0$ و $0 \leq \beta < 1$

نامساوی فوق برقرار است زیرا طبق فرض قضیه داریم $\frac{\gamma-3\beta}{4(2-\beta)} \leq \alpha \leq 0$ در نتیجه

$$1 - \alpha \geq 1 - \frac{\gamma - 3\beta}{4(2 - \beta)} = \frac{1 - \beta}{4(2 - \beta)} \Rightarrow 1 \geq \frac{1 - \beta}{4(1 - \alpha)(2 - \beta)}$$

□

قضیه ۳.۲.۲. اگر تابع $f(z)$ تعریف شده در (۱.۲) متعلق به رده‌ی $R[\alpha, \beta]$ باشد و $0 \leq \alpha \leq \frac{2-\beta}{2(2-\beta)}$ و $0 \leq \beta < 1$ و تابع $g(z)$ تعریف شده به صورت $g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ متعلق به رده‌ی $C[\alpha, \beta]$ باشد که $0 \leq \alpha \leq \frac{2-\beta}{2(2-\beta)}$ و $0 \leq \beta < 1$ ، آنگاه

$$\underbrace{(f * f * \dots * f)}_p * \underbrace{(g * g * \dots * g)}_q(z) \in C[\alpha, \beta] \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

برهان. با استفاده از لم ۴.۱.۲ و ۵.۱.۲ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\beta)c[\alpha, n]a_n^p b_n^q \leq \left[\frac{1-\beta}{2(1-\alpha)(2-\beta)} \right]^p \left[\frac{1-\beta}{4(1-\alpha)(2-\beta)} \right]^q (1-\beta) \leq 1-\beta$$

مشابه دو قضیه‌ی قبل ثابت می‌شود که نامساوی فوق برقرار است. $\square$

فرض می‌کنیم $f_i \in T$

$$f_i(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,i} z^n \quad (a_{n,i} \geq 0, i = 1, 2) \quad (2.2)$$

قضیه ۴.۲.۲. [۲] فرض کنید تابع $f_1(z)$ تعریف شده در (۲.۲) متعلق به رده‌ی $R[\alpha, \beta]$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ و $0 \leq \beta < 1$ و تابع $f_2(z)$ تعریف شده در (۲.۲) متعلق به رده‌ی $R[\alpha, \tau]$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ و $0 \leq \tau < 1$. آنگاه $(f_1 * f_2)(z) \in R[\alpha, \psi]$ که

$$\psi = 1 - \frac{(1-\beta)(1-\tau)}{2(1-\alpha)(2-\beta)(2-\tau) - (1-\beta)(1-\tau)}.$$

و تساوی برای توابع

$$f_1(z) = z - \frac{1-\beta}{2(1-\alpha)(2-\beta)} z^2, \quad f_2(z) = z - \frac{1-\tau}{2(1-\alpha)(2-\tau)} z^2$$

برقرار است.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید تابع $f_1(z)$ تعریف شده در (۲.۲) در کلاس $C[\alpha, \beta]$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ و $0 \leq \beta < 1$ و تابع $f_2(z)$ تعریف شده در (۲.۲) در کلاس $C[\alpha, \beta]$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ و $0 \leq \tau < 1$ ، بنابراین $(f_1 * f_2)(z) \in C[\alpha, \psi]$ که

$$\psi = 1 - \frac{(1-\beta)(1-\tau)}{4(1-\alpha)(2-\beta)(2-\tau) - (1-\beta)(1-\tau)}.$$

و تساوی برای توابع

$$f_1(z) = z - \frac{1-\beta}{4(1-\alpha)(2-\beta)} z^2, \quad f_2(z) = z - \frac{1-\tau}{4(1-\alpha)(2-\tau)} z^2$$

برقرار است.

دو قضیه‌ی زیر تعمیم قضایای ۴.۲.۲ و ۵.۲.۲ هستند.

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید توابع $f_i(z)$ که $i = 1, 2, \dots, m$ تعریف شده در (۲.۲) متعلق به ردهی $R[\alpha, \beta_i]$ باشد به طوری که $\frac{1}{p} \leq \alpha \leq 1$ و $0 \leq \beta_i < 1$ ، برای هر $i = 1, 2, \dots, m$.
آنگاه $(f_1 * f_2 * \dots * f_m)(z) \in R[\alpha, \psi]$ که

$$\psi = 1 - \frac{\prod_{i=1}^m (1 - \beta_i)}{2^{m-1} (1 - \alpha)^{m-1} \prod_{i=1}^m (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^m (1 - \beta_i)}.$$

تساوی برای توابع تعریف شده به صورت

$$f_i(z) = z - \frac{1 - \beta_i}{2(1 - \alpha)(2 - \beta_i)} z^2$$

برقرار است.

برهان. حکم را به استقرا ثابت می‌کنیم.

برای $m = 2$ و $\beta_1 = \beta$ و $\beta_2 = \tau$ قضیه، به قضیه ۴.۲.۲ تبدیل می‌شود. پس حکم برقرار است.

$$\psi = 1 - \frac{(1 - \beta)(1 - \tau)}{2(1 - \alpha)(2 - \beta) - (1 - \beta)(1 - \tau)}$$

فرض کنیم

$$f_i(z) \in R[\alpha, \beta_i] \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$$

اگر حکم برای $m = k$ درست باشد آنگاه $(f_1 * f_2 * \dots * f_k)(z) \in R[\alpha, \psi']$ که

$$\psi' = 1 - \frac{\prod_{i=1}^k (1 - \beta_i)}{2^{k-1} (1 - \alpha)^{k-1} \prod_{i=1}^k (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^k (1 - \beta_i)}.$$

اگر $f_{k+1} \in R[\alpha, \beta_{k+1}]$ آنگاه از قضیه ۴.۲.۲ برای $m = k + 1$ داریم

$$\left((f_1 * f_2 * \dots * f_k) * f_{k+1} \right)(z) \in R[\alpha, \psi]$$

$$\psi = 1 - \frac{(1 - \beta_{k+1})(1 - \psi')}{2(1 - \alpha)(2 - \psi')(2 - \beta_{k+1}) - (1 - \beta_{k+1})(1 - \psi')}$$

$$= 1 - \frac{\frac{\prod_{i=1}^{k+1} (1 - \beta_i)}{2^{k-1} (1 - \alpha)^{k-1} \prod_{i=1}^k (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^k (1 - \beta_i)}}{\frac{2^k (1 - \alpha)^k \prod_{i=1}^k (2 - \beta_i) - 2(1 - \alpha)(2 - \beta_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1 - \beta_i) + 2(1 - \alpha)(2 - \beta_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1 - \beta_i) - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \beta_i)}{2^{k-1} (1 - \alpha)^{k-1} \prod_{i=1}^k (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^k (1 - \beta_i)}}$$

$$= 1 - \frac{\prod_{i=1}^{k+1} (1 - \beta_i)}{2^k (1 - \alpha)^k \prod_{i=1}^{k+1} (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \beta_i)}.$$

□

پس حکم برای $m = k + 1$ نیز برقرار است.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید توابع $f_i(z)$ که $i = 1, \dots, m$ تعریف شده در (۲.۲) متعلق به رده‌های $C[\alpha, \beta_i]$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ و $0 \leq \beta_i < 1$ برای هر $i = 1, \dots, m$. آن‌گاه $(f_1 * f_2 * \dots * f_m)(z)$ متعلق به رده‌ی $C[\alpha, \psi]$ است که

$$\psi = 1 - \frac{\prod_{i=1}^m (1 - \beta_i)}{2^{m-1} (1 - \alpha)^{m-1} \prod_{i=1}^m (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^m (1 - \beta_i)}.$$

تساوی برای توابع تعریف شده به صورت

$$f_i(z) = z - \frac{1 - \beta_i}{2(1 - \alpha)(2 - \beta_i)} z^2, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

برقرار است.

برهان. به استقرا حکم را ثابت می‌کنیم.

برای $m = 2$ و $\beta_1 = \beta$ و $\beta_2 = \tau$ قضیه به قضیه ۵.۲.۲ تبدیل می‌شود که درست است. فرض کنیم

$$f_i(z) \in C[\alpha, \beta_i] \quad (i = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$$

$$\Rightarrow (f_1 * f_2 * \dots * f_k)(z) \in C[\alpha, \psi']$$

که

$$\psi' = 1 - \frac{\prod_{i=1}^k (1 - \beta_i)}{2^{k-1} (1 - \alpha)^{k-1} \prod_{i=1}^k (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^k (1 - \beta_i)}$$

اگر $f_{k+1} \in [\alpha, \beta_{k+1}]$ آن‌گاه از قضیه ۵.۲.۲ داریم

$$\left((f_1 * \dots * f_k) * f_{k+1} \right)(z) \in C[\alpha, \psi]$$

که

$$\psi = 1 - \frac{(1 - \psi')(1 - \beta_{k+1})}{2(1 - \alpha)(2 - \psi')(2 - \beta_{k+1}) - (1 - \psi')(1 - \beta_{k+1})}$$

و این معادل است با

$$\psi = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{k+1} (1 - \beta_i)}{2^k (1 - \alpha)^k \prod_{i=1}^{k+1} (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \beta_i)} \quad (3.2)$$

□

بنابراین قضیه برای $m \geq 2$ درست است.

قضیه ۸.۲.۲. اگر $f_i(z) \in C[\alpha, \beta_i]$ که $i = 1, 2, \dots, m$ باشد به طوری که $0 \leq \beta_i < 1$ و $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p}$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ ، آنگاه $(f_1 * f_2 * \dots * f_m)(z) \in R[\alpha, \tau]$ که

$$\tau = 1 - \frac{\prod_{i=1}^m (1 - \beta_i)}{2 \times 2^{m-1} (1 - \alpha)^{m-1} \prod_{i=1}^m (2 - \beta_i) - \prod_{i=1}^m (1 - \beta_i)}$$

از قضیه‌ی ۶.۲.۲ و ۷.۲.۲ و لم ۶.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه ۹.۲.۲. فرض کنید توابع $f_i(z)$ که $i = 1, 2$ تعریف شده در (۲.۲) متعلق به رده‌ی $C[\alpha, \beta]$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p}$ و $0 \leq \beta < 1$ ، آنگاه تابع $h(z) \in R[\alpha, \gamma]$ که

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n,1}^{(2)} + a_{n,2}^{(2)}] z^n$$

تعریف شده است و تساوی برای

$$\gamma = 1 - \frac{(1 - \beta)^2}{4(1 - \alpha)(2 - \beta)^2 - (1 - \beta)^2}$$

برقرار است.

با استفاده از قضیه‌ی ۸.۲.۲ و لم ۶.۱.۲ نتیجه به دست می‌آید.

فصل ۳

رده‌ی توابع $R_\mu(\alpha, \beta)$

تعریف ۱۰۰.۳. فرض کنیم $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ که $a_n \geq 0$ و $g(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\gamma)}}$ و $h(z) = (f * g)(z)$. تابع f را γ - شبه‌ستاره‌گون از مرتبه‌ی α و نوع β می‌نامیم اگر نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\frac{\left| \left(z \frac{h'(z)}{h(z)} \right) - 1 \right|}{\left| z \frac{h'(z)}{h(z)} + (1 - 2\alpha) \right|} < \beta \quad 0 \leq \alpha < 1, 0 < \beta \leq 1.$$

در این بخش این خانواده را از نظر ضرایب، مجموعه‌ی توابع بحرانی، یک‌به‌یکی و ستاره‌گونی بررسی می‌کنیم.

۱.۳ توابع ستاره‌گون از مرتبه‌ی α و نوع β

فرض کنیم S رده‌ی همه‌ی توابع به شکل $f(z) = z + \sum a_n z^n$ باشد که در دیسک واحد $U = \{z : |z| < 1\}$ تحلیلی و تک‌ارز هستند. تابع $f \in S$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α و نوع β نامیده می‌شود اگر نامساوی

$$\frac{\left| \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) - 1 \right|}{\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} + (1 - 2\alpha) \right|} < \beta$$

برای $0 \leq \alpha < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ و هر z در U برقرار باشد. رده‌ی این توابع را با نماد $S^*(\alpha, \beta)$ نمایش می‌دهیم. حالت‌های مختلف برای α و β را بررسی می‌کنیم.

۱- اگر $\beta = 1$ ، آن‌گاه $S^*(\alpha, 1) \equiv S^*(\alpha)$.

۲- اگر $\alpha = 0$ ، آن‌گاه $S^*(0, \beta)$ یک زیررده از توابع ستاره‌گون است که توسط پادمانابخان^۱ بررسی شده است.

^۱Padmanabhan

برای $f \in S^*(\alpha, \beta)$ که $0 < \alpha < 1$ ، مقادیر $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ در دیسک به مرکز $\frac{(1+(1-2\alpha)\beta^2)}{(1-\beta^2)}$ و شعاع $\frac{2\beta(1-\alpha)}{(1-\beta^2)}$ قرار دارد.

زیرا با فرض $\frac{zf'(z)}{f(z)} = u$ طبق تعریف صفحه‌ی قبل داریم

$$\left| \frac{u-1}{u+(1-2\alpha)} \right| < \beta$$

اگر مرکز $\frac{1+(1-2\alpha)\beta^2}{1-\beta^2}$ و شعاع $\frac{2\beta(1-\alpha)}{1-\beta^2}$ باشد،

$$\left| u - \frac{1+(1-2\alpha)\beta^2}{1-\beta^2} \right| < \frac{2\beta(1-\alpha)}{1-\beta^2}$$

با ضرب طرفین در $1-\beta^2$ ،

$$|u - u\beta^2 - 1 - (1-2\alpha)\beta^2| < 2\beta(1-\alpha)$$

درنتیجه

$$|(u-1) - (u+(1-2\alpha))\beta^2| < 2\beta(1-\alpha)$$

با تقسیم طرفین بر $|u+(1-2\alpha)|$ نتیجه می‌شود

$$\left| \frac{u-1}{u+(1-2\alpha)} - \beta^2 \right| < \frac{2\beta(1-\alpha)}{|u+(1-2\alpha)|}$$

همچنین داریم

$$\left| \frac{u-1}{u+(1-2\alpha)} \right| - |\beta^2| \leq \left| \frac{u-1}{u+(1-2\alpha)} - \beta^2 \right|$$

درنتیجه

$$\left| \frac{u-1}{u+(1-2\alpha)} \right| - |\beta^2| < \frac{2\beta(1-\alpha)}{1-\beta^2} < \beta.$$

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم $S_\gamma(z) = \frac{z}{(1-z)^{\frac{1}{1-\gamma}}}$ که $0 \leq \gamma < 1$ و $0 \leq \alpha < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ ، تابع تحلیلی $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ را γ -شبه‌ستاره‌گون از مرتبه‌ی α و نوع β می‌نامیم هرگاه

$$f * S_\gamma \in S^*(\alpha, \beta)$$

رده‌ی این توابع را با نماد $R_\gamma(\alpha, \beta)$ نمایش می‌دهیم.

رده‌ی توابع γ -شبه‌ستاره‌گون از مرتبه‌ی γ توسط روشه وی^۲ بررسی شده است.

^۲Ruscheweyh

۲.۳ کران برای ضرایب ردهی توابع $R_\mu(\alpha, \beta)$

در فصل قبل گفتیم تابع $S_\gamma(z)$ را می‌توان به صورت

$$S_\gamma(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\gamma)}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)z^n$$

نمایش داد که

$$c(\gamma, n) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-2\gamma)}{(n-1)!} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (1.3)$$

در ادامه با توجه به بسط تابع $S_\gamma(z)$ ضرایب توابع ردهی $R_\mu(\alpha, \beta)$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. تابع $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ که $a_n \geq 0$ متعلق به ردهی $R_\gamma[\alpha, \beta]$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)a_n}{2\beta(1-\alpha)} \leq 1 \quad (2.3)$$

برهان. اگر $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ ، آنگاه برای هر $z \in U$ داریم

$$\begin{aligned} g(z) &= (f * S_\gamma)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^n \in S^*[\alpha, \beta] \\ \Rightarrow \frac{|(z \frac{g'(z)}{g(z)}) - 1|}{|(z \frac{g'(z)}{g(z)}) + (1-2\alpha)|} &= \frac{\left| z \frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n c(\gamma, n)a_n z^{n-1}}{z - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1}} - 1 \right|}{\left| \frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n c(\gamma, n)a_n z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1}} + (1-2\alpha) \right|} \\ &= \frac{\left| \frac{z(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n c(\gamma, n)a_n z^{n-1})}{z(1 - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1})} - 1 \right|}{\left| \frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n c(\gamma, n)a_n z^{n-1} + 1 - 2\alpha - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1} + 2\alpha \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1}} \right|} \\ &= \frac{\left| \frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n c(\gamma, n)a_n z^{n-1} - 1 + 1 - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1}} \right|}{\left| \frac{(2-2\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-2\alpha)c(\gamma, n)a_n z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^{n-1}} \right|} \\ &= \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)c(\gamma, n)a_n z^{n-1}}{2(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-2\alpha)c(\gamma, n)a_n z^{n-1}} \right| < \beta \end{aligned}$$

در عبارت اخیر اگر مخرج کسر را $h(z)$ بنامیم ، $h(\circ) = 2(1 - \alpha) > \circ$ و h پیوسته است. بنابراین برای $0 < z < r$ ، $h(z) > \circ$ و چون $r < 1$ در نتیجه $0 < z < 1$. پس مخرج کسر برای مقادیر خیلی کوچک مثبت z ، مثبت است. در نتیجه برای هر $0 < z < 1$ ، مخرج مثبت می ماند و با حدگیری $z \rightarrow 1^-$ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)c(\gamma, n)a_n \leq \beta[2(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-2\alpha)c(\gamma, n)a_n]$$

که عبارت (۲.۳) را نتیجه می دهد.

به عکس ، اگر (۲.۳) برقرار باشد، نشان می دهیم که $g = f * S_\alpha$ متعلق به رده‌ی $S^*[\alpha, \beta]$ است. برای $1 > r = |z|$ داریم

$$\begin{aligned} g(z) &= (f * S_\gamma)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} c(\gamma, n)a_n z^n \in S^*[\alpha, \beta] \\ \Rightarrow \frac{|(z \frac{g'(z)}{g(z)}) - 1|}{|(z \frac{g'(z)}{g(z)}) + (1 - 2\alpha)|} &= \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)c(\gamma, n)a_n z^{n-1}}{2(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-2\alpha)c(\gamma, n)a_n z^{n-1}} \right| < \beta \\ \Rightarrow \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)c(\gamma, n)a_n}{2(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-2\alpha)c(\gamma, n)a_n} &< \beta \end{aligned}$$

تابع g متعلق به رده‌ی $S^*[\alpha, \beta]$ است، اگر عبارت آخر کمتر از β باشد. این نامساوی معادل است با

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)c(\gamma, n)a_n &< \beta[2(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1-2\alpha)c(\gamma, n)a_n] \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} ((n-1) + \beta(n+1-2\alpha))c(\gamma, n)a_n &< 2\beta(1-\alpha) \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین بر $2\beta(1-\alpha)$ داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)a_n}{2\beta(1-\alpha)} < 1$$

که با نامساوی (۲.۳) معادل است.

□

بنابراین $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ و قضیه ثابت می شود.

نتیجه ۲.۲.۳. اگر $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ آن گاه

$$a_n \leq \frac{2\beta(1-\alpha)}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)} \quad n \geq 2$$

رابطه‌ی (۲.۳) برای هر جمله نیز برقرار است پس

$$\frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)a_n}{2\beta(1-\alpha)} \leq 1$$

$$\Rightarrow a_n \leq \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1-\alpha)}$$

و تساوی برای توابع به شکل

$$f_n(z) = z - \frac{2\beta(1-\alpha)z^n}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)} \quad (3.3)$$

برقرار است.

اکنون باید نشان دهیم که ترکیب خطی محدب توابع بحرانی معرفی شده در (۳.۳) پوش محدب مجموعه‌ی $R_\gamma[\alpha, \beta]$ را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید $0 \leq \alpha, \gamma < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ و

$$f_1 = z, \quad f_n = z - \frac{2\beta(1-\alpha)z^n}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)} \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

آن‌گاه $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ اگر و فقط اگر

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \quad \lambda_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$$

برهان. اگر $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ آن‌گاه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1-\alpha)} \cdot \frac{\lambda_n(2\beta)(1-\alpha)}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1, \quad f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$$

زیرا با قرار دادن

$$a_n = \frac{2\beta(1-\alpha)}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}$$

و با استفاده از صورت قضیه داریم

$$f_1 = z$$

$$f_2 = z - \frac{2\beta(1-\alpha)z^2}{[(2-1) + \beta(2+1-2\alpha)]c(\gamma, 2)}$$

$$f_3 = z - \frac{2\beta(1-\alpha)z^3}{[(3-1) + \beta(3+1-2\alpha)]c(\gamma, 3)}$$

$$\vdots$$

لذا

$$\begin{aligned}\lambda_1 f_1 &= \lambda_1 z \\ \lambda_2 f_2 &= \lambda_2 z - a_2 z^2 \\ \lambda_3 f_3 &= \lambda_3 z - a_3 z^3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

از جمع تساوی‌های فوق داریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1 \\ \implies f(z) &= z - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\end{aligned}$$

λ_n را وارون ضریب f_n ها در رابطه‌ی (۴.۳) در نظر گرفته و در a_n ضرب می‌کنیم، نتیجه به‌دست می‌آید.

به‌عکس، اگر $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$\lambda_n = \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)a_n}{2\beta(1-\alpha)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

و $\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$ ، چون $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \leq 1$ در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۱.۲.۳، $\lambda_1 \geq 0$.

چون $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ ، اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ که $0 \leq \alpha < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ و اگر $0 \leq \gamma \leq \frac{(2+3\beta-\alpha\beta)}{(2+4\beta-2\alpha\beta)}$ یا $r \leq \frac{(1+2\beta-\alpha\beta)}{(1+3\beta-2\alpha\beta)}$ ، آن‌گاه برای $|z| \leq r$ ،

$$\begin{aligned}\max\{0, r - \max_n \frac{2\beta(1-\alpha)r^n}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}\} &\leq |f(z)| \\ &\leq r + \max_n \frac{2\beta(1-\alpha)r^n}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\max\{0, r - \beta(1-\alpha)r^2/[1 + \beta(3-2\alpha)](1-\gamma)\} &\leq |f(z)| \\ &\leq r + \beta(1-\alpha)r^2/[1 + \beta(3-2\alpha)](1-\gamma)\end{aligned}$$

نامساوی فوق برای تابع $f_2(z) = z - \beta(1-\alpha)z^2/[1 + \beta(3-2\alpha)](1-\gamma)$ به تساوی تبدیل

می‌شود.

برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم تابع

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n) = \frac{2\beta(1-\alpha)r^n}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)} \quad (5.3)$$

برای $n \geq 2$ ، بر حسب n ، نزولی است.

از رابطه‌ی (۱.۳) می‌توان نتیجه گرفت که $c(\gamma, n+1) = [\frac{(n+1-2\gamma)}{n}]c(\gamma, n)$.

در نتیجه $\psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n) \geq \psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n+1)$ اگر و فقط اگر

$$h(\alpha, \beta, \gamma, r, n) = (n+1-2\gamma)[n+\beta(n+2-2\alpha)] - rn[n-1+\beta(n+1-2\alpha)] \geq 0. \quad (6.3)$$

زیرا اگر نامساوی $\psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n) \geq \psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n+1)$ برقرار باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned} \frac{2\beta(1-\alpha)r^n}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)} &\geq \frac{2\beta(1-\alpha)r^{n+1}}{[n + \beta(n+2-2\alpha)]c(\gamma, n+1)} \\ &= \frac{2\beta(1-\alpha)r^{n+1}}{[n + \beta(n+2-2\alpha)][\frac{n+1-2\gamma}{n}]c(\gamma, n)} \\ \implies r[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)] &\leq [n + \beta(n+2-2\alpha)](\frac{n+1-2\gamma}{n}) \end{aligned}$$

طرفین نامساوی را در n ضرب نموده و همی جملات را به یک طرف نامساوی می‌بریم که رابطه‌ی (۶.۳) به دست می‌آید. عکس این رابطه‌ی دوشرطی نیز به روش بازگشتی قابل اثبات است.

برای α و β ثابت، h بر حسب γ و r نزولی و بر حسب n صعودی است. (کافی است α و β را ثابت در نظر بگیریم می‌بینیم با افزایش γ یا r ، h کاهش می‌یابد و با افزایش n ، h افزایش می‌یابد.)

$$h(\alpha, \beta, \gamma, r, n) \geq h(\alpha, \beta, \frac{(2+3\beta-\alpha\beta)}{(2+4\beta-2\alpha\beta)}, 1, 2) = 0$$

$$0 \leq \gamma \leq \frac{(2+3\beta-\alpha\beta)}{(2+4\beta-2\alpha\beta)} \text{ و } r < 1 \text{ و } n \geq 2$$

به‌طورمشابه

$$h(\alpha, \beta, \gamma, r, n) \geq h(\alpha, \beta, 1, \frac{(1+2\beta-\alpha\beta)}{(1+3\beta-2\alpha\beta)}, 2) = 0$$

$$0 \leq \gamma < 1 \text{ و } r \leq \frac{(1+2\beta-\alpha\beta)}{(1+3\beta-2\alpha\beta)} \text{ و } n \geq 2$$

بنابراین $\max_{n \geq 2} \psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n)$ در $n=2$ حاصل می‌شود و اثبات کامل می‌شود. $\square$

نتیجه ۵.۲.۳. اگر $f \in R_\alpha[\alpha, 1]$ و $0 \leq \alpha < 1$ آن‌گاه

$$r - \frac{r^2}{2(2-\alpha)} \leq |f(z)| \leq r + \frac{r^2}{2(2-\alpha)} \quad (|z| = r).$$

برهان. طبق قضیه‌ی ۴.۲.۳ داریم $\frac{(2+3\beta-\alpha\beta)}{(2+4\beta-2\alpha\beta)} \leq \gamma \leq 1$. حال با قرار دادن $\beta = 1$ و $\gamma = \alpha$ خواهیم داشت

$$\gamma = \alpha \leq \frac{(5-\alpha)}{(6-2\alpha)}$$

بنابراین اولین شرط در قضیه‌ی ۴.۲.۳ برقرار است. پس نتیجه به دست می‌آید. $\square$

توجه. با قرار دادن تابع $f_2(z) = 0$ در قضیه‌ی ۴.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} f_2(z) &= z - \frac{\beta(1-\alpha)z^2}{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)} = 0 \\ \Rightarrow z(1-\gamma)[1+\beta(3-2\alpha)] - \beta(1-\alpha)z^2 &= 0 \\ \Rightarrow z((1-\gamma)[1+\beta(3-2\alpha)] - \beta(1-\alpha)z) &= 0 \end{aligned}$$

چون $z \neq 0$ بنابراین

$$\begin{aligned} (1-\gamma)[1+\beta(3-2\alpha)] &= \beta(1-\alpha)z \\ \Rightarrow z &= \frac{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)}{\beta(1-\alpha)} \end{aligned}$$

بنابراین طبق اصل می‌نیم

$$|f(z)| \geq r - \frac{\beta(1-\alpha)r^2}{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)}$$

اگر و تنها اگر

$$0 \leq \gamma \leq \frac{[1+\beta(2-\alpha)]}{[1+\beta(3-2\alpha)]}$$

حال برای حالت‌هایی که شرایط قضیه‌ی ۴.۲.۳ برای γ و r برقرار نباشد، طبق قضیه‌ی زیر کران بالایی برای $|f|$ به دست می‌آوریم.

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنید

$$r_{n_0}(\alpha, \beta, \gamma) = (n_0 + 1 - 2\gamma) / [n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)] n_0 [n_0 - 1 + \beta(n_0 + 1 - 2\alpha)]$$

اگر $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ به‌طوری‌که $0 \leq \alpha < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ و

$$\gamma_0 = \frac{(1+\beta)n_0 + \beta(1-\alpha)}{n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)} < \gamma \leq \frac{1 + (1+\beta)n_0 + \beta(2-\alpha)}{1 + (1+\beta)n_0 + \beta(3-2\alpha)} = \gamma_1 \quad (n_0 = 2, 3, \dots)$$

و $1 < r < r_{n_0}(\alpha, \beta, \gamma)$ ، آن‌گاه

$$|f(z)| \leq r + \frac{2\beta(1-\alpha)r^{n_0+1}}{[n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)]c(\gamma, n_0 + 1)} \quad (|z| = r).$$

تساوی برای f_{n_0+1} داده شده در (۴.۳) برقرار است.

برهان. کافی است تعیین کنیم که $\psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n)$ تعریف شده در (۵.۳) برای $n = n_0 + 1 > 2$ برقرار است.

گفتیم $\psi(n) \geq \psi(n+1)$. در نتیجه $h(n) \geq 0$ و چون h صعودی و $n \geq 2$ ، پس $h(2) = 0$. از صعودی بودن h نتیجه می شود برای $n > 2$ ، h مثبت و برای $n < 2$ ، h منفی می شود. حال اگر به جای ۲، $n_0 + 1$ بگذاریم، ψ در $n_0 + 1$ ماکزیمم می شود. در نتیجه $h(n_0 + 1) \geq 0$ و $h(n_0) < 0$ خواهد بود.

حال $\gamma \geq \gamma_0 \iff r_{n_0} < 1$ زیرا

$$h(\alpha, \beta, \beta\gamma, r, n_0) < 0$$

$$\iff (n_0 + 1 - 2\gamma)[n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)] - rn_0(n_0 - 1 + \beta(n_0 + 1 - 2\alpha)) < 0$$

با قرار دادن $r = 1$ و ساده تر کردن نامساوی فوق داریم

$$\begin{aligned} \gamma &> \frac{1}{2} \left[\frac{n_0[n_0 - 1 + \beta(n_0 + 1 - 2\alpha)]}{[n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)]} + (n_0 + 1) \right] \\ \iff \gamma &> \frac{1}{2} \left[\frac{2n_0 + 2(n_0 + 1)\beta - 2\alpha\beta}{n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)} \right] = \frac{n_0(1 + \beta) + \beta(1 - \alpha)}{n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)} = \gamma_0. \end{aligned}$$

و $\gamma < \gamma_1 \iff r_{n_0+1} > 1$ زیرا

$$h(\alpha, \beta, \beta\gamma, r, n_0 + 1) > 0$$

$$\iff (n_0 + 2 - 2\gamma)[n_0 + 1 + \beta(n_0 + 3 - 2\alpha)] - r(n_0 + 1)(n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha)) \geq 0$$

با قرار دادن $r = 1$ و ساده تر کردن رابطه‌ی فوق داریم

$$\begin{aligned} \iff \gamma &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{-(n_0 + 1)(n_0 + \beta(n_0 + 2 - 2\alpha))}{n_0 + 1 + \beta(n_0 + 3 - 2\alpha)} + (n_0 + 2) \right] \\ \iff \gamma &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{2\beta n_0 - 2\alpha\beta + 4\beta + 2n_0 + 2}{n_0 + 1 + \beta(n_0 + 3 - 2\alpha)} \right] \\ \iff \gamma &\leq \frac{1 + (1 + \beta)n_0 + \beta(2 - \alpha)}{1 + (1 + \beta)n_0 + \beta(3 - 2\alpha)} = \gamma_1 \end{aligned}$$

بنابراین تابع ψ در $n = n_0 + 1$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد هرگاه تابع h تعریف شده در (۶.۳) برای $n = n_0$ منفی و برای $n = n_0 + 1$ مثبت باشد، که برای $r_{n_0}(\alpha, \beta, \gamma) < r < r_{n_0+1}(\alpha, \beta, \gamma)$ رخ می‌دهد. با این حال $r_{n_0}(\alpha, \beta, \gamma) < 1$ برای $\gamma \geq \gamma_0$ و $r_{n_0+1}(\alpha, \beta, \gamma) \geq 1$ برای $\gamma \geq \gamma_1$.
بنابراین $\max_n \psi(\alpha, \beta, \gamma, r, n)$ در $n = n_0 + 1$ برای $r_{n_0}(\alpha, \beta, \gamma) < r < 1$ و $\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_1$ رخ می‌دهد. (چون دامنه‌ی f برابر دیسک واحد است باید با شرط $r = |z| < 1$ نتیجه به دست آید) و اثبات کامل می‌شود. $\square$

به روش مشابه در مورد رشد تابع $|f'|$ قضیه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنید $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ که $0 \leq \alpha < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ اگر $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{3}$ یا $r \leq \frac{2+4\beta-2\alpha\beta}{3+9\beta-6\alpha\beta}$ آن‌گاه

$$1 - \frac{2\beta(1-\alpha)r}{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)} \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{2\beta(1-\alpha)\mu}{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)}.$$

برای $|z| = r$. همچنین نامساوی فوق برای تابع

$$f_2(z) = z - \frac{2\beta(1-\alpha)z^2}{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)}$$

به تساوی تبدیل می‌شود.

برهان. بنا به قضیه‌ی ۳.۲.۳ داریم

$$f_n(z) = z - \frac{2\beta(1-\alpha)z^n}{[(n-1)+\beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}$$

و بنا به قضیه‌ی ۴.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} \max\{0, r - \max_n \frac{2\beta(1-\alpha)r^n}{[(n-1)+\beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}\} &\leq |f(z)| \\ &\leq r + \max_n \frac{2\beta(1-\alpha)r^n}{[(n-1)+\beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)} \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از طرفین و با فرض

$$A(\alpha, \beta, \gamma, r, n) = \frac{2\beta(1-\alpha)nr^{n-1}}{[(n-1)+\beta(n+1-2\beta)]c(\gamma, n)}$$

داریم

$$1 - \max_{n \geq 2} A(\alpha, \beta, \gamma, r, n) \leq |f'(z)| \leq 1 + \max_{n \geq 2} A(\alpha, \beta, \gamma, r, n)$$

A بر حسب n نزولی است یعنی $A_n \geq A_{n+1}$ اگر و تنها اگر

$$h_1(\alpha, \beta, \gamma, r, n) = (n+1-2\gamma)[n+\beta(n+2-2\alpha)] - (n+1)r[(n-1)+\beta(n+1-2\alpha)] \geq 0$$

چون h_1 برای $\frac{1}{4} \leq \gamma \leq 1$ بر حسب r و γ نزولی و بر حسب n صعودی است، داریم

$$h_1(\alpha, \beta, \gamma, r, n) \geq h_1(\alpha, \beta, \frac{1}{4}, 1, 2) = 1 - \beta(1 - 2\alpha) \geq 0$$

و برای $1 \leq \gamma < \frac{1}{4}$ و $r < r_0$ تابع بر حسب r و γ نزولی است.

$$h_1(\alpha, \beta, \gamma, r, n) \geq h_1(\alpha, \beta, 1, r_0, 2) = 0$$

□

و این اثبات را کامل می‌کند.

۳.۳ شعاع تک‌ارزی، ستاره‌گونی و تحدب

همان‌طور که در قضیه‌ی ۴.۲.۳ دیدیم ممکن است برای f در $R_\gamma[\alpha, \beta]$ داشته باشیم $f(z_0) = 0$ که $0 < |z_0| < 1$. به این معنی که f تک‌ارز نیست. حال شرایطی را بررسی می‌کنیم که خانواده شامل توابع تک‌ارز باشد.

لم ۱.۳.۳. اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ آن‌گاه $z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$

قضیه ۲.۳.۳. $R_\gamma[\alpha, \beta] \subset S$ اگر و تنها اگر $\frac{1}{4} \leq \gamma$.

برهان. طبق لم فوق و قضیه‌ی ۱.۲.۳ کافی است نشان دهیم برای $\frac{1}{4} \leq \gamma$,

$$\frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1-\alpha)} \geq n \quad n = 2, 3, \dots \quad (7.3)$$

اما برای $\frac{1}{4} \leq \gamma$ داریم $c(\frac{1}{4}, n) = 1$ زیرا داریم

$$c(\gamma, n) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-2\gamma)}{(n-1)!} = \frac{(2-2\delta)(3-2\delta)(4-2\delta) \cdots (n-2\delta)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)} > 1$$

$$c(\frac{1}{4}, n) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)}{(n-1)!} = \frac{(2-1)(3-1)(4-1) \cdots (n-1)}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = 1$$

$$\Rightarrow c(\gamma, n) > c(\frac{1}{4}, n) = 1$$

بنابراین کافی است (۷.۳) را فقط برای $\gamma = \frac{1}{4}$ ثابت کنیم. با جایگذاری $\gamma = \frac{1}{4}$ و $c(\frac{1}{4}, n) = 1$ در رابطه‌ی (۷.۳) داریم

$$\frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]}{2\beta(1-\alpha)} \geq n$$

$$\Rightarrow n-1 + \beta n + \beta - 2\alpha\beta \geq 2\beta(1-\alpha)n$$

که معادل است با

$$n[1 + \beta - 2\beta(1 - \alpha)] \geq 1 - \beta(1 - 2\alpha)$$

نامساوی اخیر برای $n = 2$ درست است زیرا

$$n = 2 \implies 2[1 + \beta - 2\beta(1 - \alpha)] \geq 1 - \beta(1 - 2\alpha)$$

$$2(1 - \beta + 2\alpha\beta) \geq 1 - \beta(1 - 2\alpha)$$

$$2(1 - \beta(1 - 2\alpha)) \geq 1 - \beta(1 - 2\alpha)$$

که این نامساوی بدیهی است. در نتیجه برای هر $n \geq 2$ نیز درست است. به عکس، چون برای $\frac{1}{4} < \gamma$ ، $c(\gamma, n) \rightarrow 0$ بنابراین $f_n(z)$ تعریف شده در (۴.۳) را در نظر می‌گیریم و

$$f'_n(z) = 1 - \frac{2\beta(1 - \alpha)nz^{n-1}}{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)} = 0$$

برای

$$z^{n-1} = \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1 - \alpha)n}$$

برای n های به قدر کافی بزرگ، برای $\frac{1}{4} < \gamma$ ، $c(\gamma, n)$ به سمت صفر می‌رود. پس $z^{n-1} \rightarrow 0$. یعنی برای n های بزرگ، ریشه‌ی f' داخل دایره‌ی یک می‌افتد. یعنی مشتق داخل دایره‌ی یک، صفر است. پس تابع f تک‌ارز نیست. $\square$

نشان دادیم که توابع متعلق به $R_\gamma[\alpha, \beta]$ به شرط این که $\frac{1}{4} \leq \gamma \leq 1$ ، همه ستاره‌گون هستند. حال بزرگترین شعاع r_0 را می‌یابیم به طوری که چنین توابع ستاره‌گونی از مرتبه‌ی δ که $0 \leq \delta < 1$ ، در دیسک $|z| < r_0$ قرار گیرند.

قضیه ۳.۳.۳. اگر $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in R[\alpha, \beta]$ که $0 \leq \alpha < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ و $\frac{1}{4} \leq \gamma \leq 1$ ، آن‌گاه f ستاره‌گون از مرتبه‌ی δ است که $0 \leq \delta < 1$ و در دیسک $|z| < r_0$ واقع است به طوری که

$$r_0 = \inf \left[\frac{(1 - \delta)[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1 - \alpha)(n - \delta)} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

تساوی برای تابعی به شکل (۴.۳) برقرار است.

برهان. کافی است نشان دهیم برای $|z| < r_0$ ، $|(z \frac{f'(z)}{f(z)}) - 1| < 1 - \delta$ ، اما

$$z \in S^*(\delta) \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \delta \quad 0 \leq \delta < 1$$

برای این‌که نامساوی $\delta < \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)$ برقرار باشد، باید فاصله‌ی آن نقاط از ۱ کمتر از فاصله‌ی آن‌ها از δ باشد.

اگر $\delta < 1 - \left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) - 1 \right|$ ، آن‌گاه نقاط داخل دایره‌ای به شعاع $1 - \delta$ واقع‌اند. پس این دایره همچنین داخل نیم‌صفحه‌ی $\delta < \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)$ قرار دارد. اما داریم

$$\begin{aligned} \left| \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) - 1 \right| &= \left| \frac{z(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1})}{z(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1})} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \right| \end{aligned}$$

می‌دانیم

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

و با فرض $a = 1$ و $b = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}$ داریم

$$\left| 1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-1}$$

همچنین

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-1}$$

و چون $a_n \geq 0$ داریم

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n |z|^{n-1}$$

بنابراین با استفاده از توضیحات فوق،

$$\begin{aligned} \left| \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) - 1 \right| &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n |z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n |z|^{n-1}} \leq 1 - \delta \quad (|z| = r) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n |z|^{n-1} &\leq (1 - \delta) \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n |z|^{n-1} \right) \\ &= 1 - \delta - (1 - \delta) \sum_{n=2}^{\infty} a_n |z|^{n-1} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n-1 + 1 - \delta) a_n |z|^{n-1} &\leq 1 - \delta \end{aligned}$$

و چون $|z| = r$ ، پس

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\delta}{1-\delta} a_n r^{n-1} \leq 1$$

با در نظر گرفتن قضیه‌ی ۱.۲.۳ فقط نیاز به پیدا کردن متغیرهای r داریم که

$$n \left(\frac{n-\delta}{1-\delta} \right) r^{n-1} \leq \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1-\alpha)} \quad (n=2, 3, \dots)$$

□ وقتی $r \leq r_0$ درست خواهد بود و قضیه اثبات می‌شود.

نتیجه ۴.۳.۳. اگر $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ که $0 \leq \alpha < 1$ و $0 < \beta \leq 1$ و $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$ ، آنگاه f محدب از مرتبه‌ی δ است که $0 \leq \delta < 1$ و در دیسک $|z| < r_1$ واقع است به‌طوری‌که

$$r_1 = \inf_n \left[\frac{[(1-\delta)(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1-\alpha)n(n-\delta)} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

برهان. می‌دانیم که $z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ محدب از مرتبه‌ی δ است اگر و تنها اگر $z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی δ باشد.

بنابراین برای اثبات کافی است در قضیه‌ی ۳.۳.۳ ، a_n را با $n a_n$ جایگزین کنیم.

با قرار دادن $\delta = 0$ در قضیه‌ی ۳.۳.۳ می‌توانیم شعاع تکارزی (و ستاره‌گونی) از $R_\gamma[\alpha, \beta]$ که $\frac{1}{2} < \gamma$ را تعیین کنیم.

نتیجه ۵.۳.۳. اگر $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ که $0 \leq \alpha < 1$ ، $0 < \beta \leq 1$ و $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ ، آنگاه برای $|z| < r_2$ ، f تکارز و ستاره‌گون است و

$$r_2 = \inf_n \left[\frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta n(1-\alpha)} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

اگر $0 \leq \delta < 1$ ، آنگاه کلیه‌ی توابع رده‌ی $R_\gamma(\alpha, \beta)$ ستاره‌گون می‌باشند. حال رتبه‌ی این توابع را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۶.۳.۳. اگر $f \in R_\gamma[\alpha, \beta]$ که $0 \leq \alpha < 1$ و $0 \leq \beta < 1$ و $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$ ، آنگاه f ستاره‌گون از مرتبه‌ی $\lambda = \frac{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)-2\beta(1-\alpha)}{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)-\beta(1-\alpha)}$ است. تساوی برای تابع

$$f(z) = z - \frac{\beta(1-\alpha)z^2}{[1+\beta(3-2\alpha)](1-\gamma)}$$

برقرار است.

برهان. از قضیه‌ی ۱.۲.۳ کافی است نشان دهیم برای $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in R_\gamma[\alpha, \beta]$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)a_n}{2\beta(1-\alpha)} \leq 1 \quad (۸.۳)$$

نتیجه می‌دهد

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n-\lambda}{1-\lambda} \right] a_n \leq 1 \quad (9.3)$$

کافی است نشان دهیم ضریب a_n در رابطه‌ی (۹.۳) کمتر یا مساوی ضریب a_n در رابطه‌ی (۸.۳) است. یعنی

$$\frac{n-\lambda}{1-\lambda} \leq \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)}{2\beta(1-\alpha)}$$

و این درست خواهد بود اگر

$$g(\alpha, \beta, \gamma, n) = \frac{[(n-1) + \beta(n+1-2\alpha)]c(\gamma, n)(1-\lambda)}{2\beta(1-\alpha)(n-\lambda)} \geq 1 \quad (n=2, 3, \dots)$$

برای α و β ثابت، می‌توان نشان داد که g برای $\frac{1}{4} \leq \gamma \leq 1$ و $n \geq 2$ برحسب n صعودی است. بنابراین داریم

$$g(\alpha, \beta, \gamma, n) \geq g(\alpha, \beta, \frac{1}{4}, 2) = 1 \quad (10.3)$$

□

و این اثبات را کامل می‌کند.

با انتخاب $\beta = 1$ و $\gamma = \alpha$ در قضیه‌ی ۶.۳.۳ نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۷.۳.۳. اگر $f \in R_\alpha[\alpha, 1]$ که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ ، آنگاه f ستاره‌گون از مرتبه‌ی $\frac{(2-2\alpha)}{(3-2\alpha)}$ است. زیرا

$$\lambda = \frac{[1 + \beta(3-2\alpha)](1-\gamma) - 2\beta(1-\alpha)}{[1 + \beta(3-2\alpha)](1-\gamma) - \beta(1-\alpha)}$$

با قرار دادن $\gamma = \alpha$ و $\beta = 1$ داریم

$$\lambda = \frac{[1 + (3-2\alpha)](1-\alpha) - 2(1-\alpha)}{[1 + (3-2\alpha)](1-\alpha) - (1-\alpha)} = \frac{(1-\alpha)[1+3-2\alpha-2]}{(1-\alpha)[1+3-2\alpha-2]}$$

در نتیجه

$$\lambda = \frac{2-2\alpha}{3-2\alpha}.$$

فصل ۴

رده‌ی توابع $R_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$

۱.۴

یادآوری. فرض کنیم A رده‌ی توابع تحلیلی به شکل

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.4)$$

در دیسک واحد $U = \{z : |z| < 1\}$ و S نماد زیررده‌ای از A ، شامل توابع به شکل (۱.۴) باشد که در U نرمال و تک‌ارزند.

بنا به تعریف ۵.۳.۱ و توضیحات فصل ۲ تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۱.۴. تابع $f \in S$ در U ستاره‌گون از مرتبه‌ی μ نامیده می‌شود اگر

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq \mu. \quad (2.4)$$

که $0 < \mu < 1$.

رده‌ی همه‌ی توابع ستاره‌گون از مرتبه μ را با $S^*(\mu)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که $S^*(\mu) \subseteq S^*(0) \equiv S^*$ زیرا $f \in S$ ، هرگاه f در رابطه‌ی (۲.۴) صدق کند و چون $\mu > 0$ پس $S^*(\mu) \subseteq S^*(0)$.

رده‌ی $S^*(\mu)$ اولین بار توسط رابرتسون^۱ [۶] تعریف شد و به‌طور گسترده‌تر توسط مک‌گرگور^۲ [۴] مورد مطالعه قرار گرفت.

تابع

$$S_\mu(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\mu)}} \quad (3.4)$$

^۱Robertson

^۲Mac Gregor

متعلق به رده‌ی $S^*(\mu)$ است و

$$c(\mu, n) = \frac{\prod_{k=2}^n (k - 2\mu)}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad (4.4)$$

تابع $S_\mu(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$S_\mu(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c(\mu, n) z^n. \quad (5.4)$$

توجه می‌کنیم که $c(\mu, n)$ بر حسب μ تابعی نزولی است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(\mu, n) = \begin{cases} \infty & \mu < \frac{1}{2} \\ 1 & \mu = \frac{1}{2} \\ 0 & \mu > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.4)$$

زیرا

$$\begin{aligned} \mu < \frac{1}{2} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c(\mu, n) = \frac{(2-2\mu)(3-2\mu) \cdots (n-2\mu)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)} \rightarrow \infty \\ \mu = \frac{1}{2} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c(\mu, n) = \frac{(2-1)(3-1) \cdots (n-1)}{(n-1)!} = 1 \\ \mu > \frac{1}{2} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c(\mu, n) = \frac{(2-2\mu)(3-2\mu) \cdots (n-2\mu)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۱.۴. تابع $f \in S$ متعلق به رده‌ی $S^*(\alpha, \beta, \gamma)$ است اگر در شرط زیر صدق کند.

$$\left| \frac{z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1}{\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)} + 1 - (1+\gamma)\alpha} \right| < \beta. \quad (7.4)$$

$$0 \leq \alpha < 1 \text{ و } 0 < \beta \leq 1 \text{ و } 0 \leq \gamma \leq 1$$

تعریف ۳.۱.۴. تابع f متعلق به رده‌ی $K(\alpha, \beta, \gamma)$ است اگر

$$zf'(z) \in S^*(\alpha, \beta, \gamma).$$

تعریف ۴.۱.۴. گوئیم $f \in R_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ اگر

$$\left| \frac{z \frac{h'(z)}{h(z)} - 1}{\gamma \frac{zh'(z)}{h(z)} + 1 - (1+\gamma)\alpha} \right| < \beta. \quad (8.4)$$

که

$$h(z) = (f * S_\mu(z)) \quad 0 \leq \mu < 1 \quad (9.4)$$

تعریف ۵.۱.۴. گوئیم $f \in C_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ اگر

$$zf'(z) \in R_\mu(\alpha, \beta, \gamma).$$

اگر $\alpha = \beta = 1$ ، آنگاه رده‌ی $R_\mu(\alpha, 1, 1) = R_\mu(\alpha)$ به دست می‌آید که قبلاً توسط شل - اسمیل^۳ [۷] معرفی شد و همچنین توسط آهوجا و سیلورمن^۴ [۱] مطالعه شده است.

تعریف ۶.۱.۴. اگر T زیررده‌ی S شامل توابعی به شکل زیر باشد،

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq 0 \quad (10.4)$$

رده‌های به دست آمده از اشتراک کلاس‌های $R_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ ، $K(\alpha, \beta, \gamma)$ ، $S^*(\alpha, \beta, \gamma)$ و $C_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ با رده‌ی T را با نمادهای $T^*(\alpha, \beta, \gamma)$ ، $C^*(\alpha, \beta, \gamma)$ ، $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ و $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ نشان می‌دهیم. در بخش‌های بعد، خواص ضرایب $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ و $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ را بررسی خواهیم کرد.

۲.۴ کران برای ضرایب رده‌ی توابع $R_\mu(\alpha, \beta, \gamma)$

قضیه ۱۰.۲.۴. تابع $f(z)$ تعریف شده در (۱۰.۴) متعلق به رده‌ی $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} c(\mu, n) \{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\} a_n \leq \beta(1+\gamma)(1-\alpha). \quad (11.4)$$

در حالت کلی نامساوی اکید است و در حالت خاص، برای توابع

$$f(z) = z - \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n) \{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}} z^n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (12.4)$$

به تساوی تبدیل می‌شود.

□

برهان. واضح است.

قضیه ۲۰.۲.۴. اگر $f(z) \in T$ ، آنگاه $f(z)$ متعلق به رده‌ی $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} c(\mu, n) n \{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\} a_n \leq \beta(1+\gamma)(1-\alpha). \quad (13.4)$$

در حالت کلی نامساوی اکید است و در حالت خاص، برای توابع

$$f(z) = z - \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n) n \{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}} z^n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (14.4)$$

به تساوی تبدیل می‌شود.

^۳Sheil-Small

^۴Ahuja and Silverman

برهان. چون $f(z) \in C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ ، این قضیه با جایگذاری na_n به جای a_n در قضیه ۱.۲.۴ به دست می‌آید. $\square$

نتیجه ۳.۲.۴. اگر $f(z) \in T$ متعلق به رده‌ی $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ باشد، آنگاه

$$a_n \leq \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (15.4)$$

زیرا طبق رابطه‌ی (۱۱.۴) داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}a_n \leq \beta(1+\gamma)(1-\alpha)$$

بنابراین

$$c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \beta(1+\gamma)(1-\alpha)$$

در نتیجه

$$(a_2 + a_3 + \cdots a_n) \leq \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}}$$

پس به ازای هر $i \geq 2$ ، a_i از سمت راست نامساوی کمتر است. پس

$$a_n \leq \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}}$$

تساوی برای تابع $f(z)$ داده شده در (۱۲.۴) برقرار است.

نتیجه ۴.۲.۴. اگر $f(z) \in T$ متعلق به رده‌ی $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ باشد، آنگاه

$$a_n \leq \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n)n\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (16.4)$$

این نامساوی نیز مشابه نتیجه‌ی قبل از رابطه‌ی (۱۳.۴) به دست می‌آید.

تساوی در رابطه‌ی (۱۶.۴) برای $f(z)$ داده شده در (۱۴.۴) برقرار است.

۳.۴ خصوصیات بستار

قضیه ۱.۳.۴. رده‌ی $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ نسبت به ترکیبات خطی محدب، بسته است.

برهان. فرض کنیم دو تابع $f_1(z)$ و $f_2(z)$ داده شده به صورت

$$f_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n, \quad a_{n,j} \geq 0, \quad j = 1, 2 \quad (17.4)$$

متعلق به ردهی $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ باشند. کافی است نشان دهیم تابع

$$h(z) = \lambda f_1(z) + (1 - \lambda)f_2(z), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (18.4)$$

نیز متعلق به ردهی $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ است.

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} [\lambda a_{n,1} + (1 - \lambda)a_{n,2}]z^n \quad (19.4)$$

بنا به قضیه ۱.۲.۴،

$$\sum_{n=2}^{\infty} c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1 + \gamma)\alpha]\}[\lambda a_{n,1} + (1 - \lambda)a_{n,2}] \leq \beta(1 + \gamma)(1 - \alpha) \quad (20.4)$$

□

که این ثابت می‌کند $h(z) \in R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$.

به طور مشابه خواهیم داشت

قضیه ۲.۳.۴. ردهی $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ نسبت به ترکیبات خطی محدب، بسته است.

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید

$$f_1(z) = z \quad (21.4)$$

و

$$f_n(z) = z - \frac{\beta(1 + \gamma)(1 - \alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1 + \gamma)\alpha]\}}z^n \quad (22.4)$$

آنگاه $f(z)$ متعلق به ردهی $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ است اگر و تنها اگر بتوان آن را به صورت

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \quad (23.4)$$

بیان کرد که $\lambda_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$.

برهان. فرض کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta(1 + \gamma)(1 - \alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1 + \gamma)\alpha]\}} \lambda_n z^n \end{aligned} \quad (24.4)$$

با قرار دادن

$$a_n = \frac{\beta(1 + \gamma)(1 - \alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1 + \gamma)\alpha]\}} \lambda_n$$

در رابطه‌ی (۱۱.۴) و تقسیم طرفین نامساوی بر $\beta(1+\gamma)(1-\alpha)$ نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}} \lambda_n \frac{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}}{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)} \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 < 1 \quad (25.4)$$

بنابراین بنا بر قضیه‌ی ۱.۲.۴، $f(z) \in R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ ، به عکس، فرض کنیم تابع $f(z)$ تعریف شده در (۱۰.۴) متعلق به رده‌ی $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ باشد، دراین صورت

$$a_n \leq \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (26.4)$$

با جای‌گذاری

$$\lambda_n = a_n \frac{c(\mu, n)\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}}{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (27.4)$$

و

$$\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \quad (28.4)$$

می‌دانیم که $f(z)$ می‌تواند به شکل (۲۳.۴) بیان شود که این موضوع اثبات قضیه‌ی ۳.۳.۴ را کامل می‌کند. $\square$

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید

$$f_1(z) = z \quad (29.4)$$

و

$$f_n(z) = z - \frac{\beta(1+\gamma)(1-\alpha)}{c(\mu, n)n\{(n-1) + \beta[\gamma n + 1 - (1+\gamma)\alpha]\}} z^n \quad (30.4)$$

آنگاه $f(z)$ متعلق به رده‌ی $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ است اگر و تنها اگر بتوان آنرا به صورت

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \quad (31.4)$$

بیان کرد که $\lambda_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$

۴.۴ انتگرال کسری

در این بخش تغییرات قضایا را برای توابع متعلق به ردهی $R_\alpha[\mu, \beta, \xi]$ بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۴. انتگرال کسری از مرتبهی λ که $0 \leq \lambda < 1$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\lambda}} d\xi. \quad (32.4)$$

$f(z)$ یک تابع تحلیلی در یک میدان پیوسته‌ی ساده از صفحه‌ی z شامل مبدأ است و چندگانگی $(z-\xi)^{\lambda-1}$ با محاسبه‌ی $\log(z-\xi)$ بسط داده می‌شود، که باید $z-\xi > 0$ حقیقی باشد.

تعریف ۲.۴.۴. مشتق کسری از مرتبه‌ی λ که $0 \leq \lambda < 1$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D_z^\lambda f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^\lambda} d\xi. \quad (33.4)$$

$f(z)$ یک تابع تحلیلی در یک میدان پیوسته‌ی ساده از صفحه‌ی z شامل مبدأ است و چندگانگی $(z-\xi)^{-\lambda}$ در تعریف ۱.۴.۴ محاسبه شده است.

تعریف ۳.۴.۴. با استفاده از تعریف ۲.۴.۴ مشتق کسری از مرتبه‌ی $n + \lambda$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^\lambda f(z). \quad (34.4)$$

که $0 \leq \lambda < 1$ و $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

قضیه ۴.۴.۴. اگر $f(z)$ داده شده در (۱.۲) متعلق به ردهی $R_\alpha[\mu, \beta, \xi]$ باشد، آنگاه

$$\left| D_z^{-\lambda} f(z) \right| \geq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left(1 - \frac{\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-2\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z| \right) \quad (35.4)$$

و

$$\left| D_z^{-\lambda} f(z) \right| \leq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left(1 + \frac{\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-2\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z| \right). \quad (36.4)$$

برای $0 < \lambda$ و $z \in U$ تساوی برقرار است.

برهان. فرض کنیم برای $0 < \lambda$ ،

$$\begin{aligned} F(z) &= \Gamma(2+\lambda) z^{-\lambda} D_z^{-\lambda} f(z) \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)} a_n z^n \end{aligned} \quad (37.4)$$

همچنین

$$0 < \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+1+\lambda)} < n \quad (38.4)$$

برای $0 < \lambda < 1$ و $n \geq 2$ و $0 \leq \alpha < \frac{1}{\lambda}$ ، $c(\alpha, n+1) \geq c(\alpha, n)$. در نتیجه با استفاده از؟؟ داریم

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq |z| - |z|^\lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+1+\lambda)} a_n \\ &\geq |z| - \frac{\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-2\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z|^\lambda \end{aligned}$$

که (35.4) را نتیجه می‌دهد و

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq |z| + |z|^\lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+1+\lambda)} a_n \\ &\leq |z| + \frac{\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-2\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z|^\lambda \end{aligned}$$

که (36.4) را نتیجه می‌دهد.

تساوی برای تابع

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{z^{1+\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} \left(1 - \frac{\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-2\xi\mu-1))(1-\alpha)} z \right)$$

□

برقرار است.

نتیجه ۵.۴.۴. فرض کنید تابع $f(z)$ تعریف شده به صورت (1.2) متعلق به رده‌ی $R_\alpha[\mu, \beta, \xi]$ باشد که $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{\lambda}$ و $\frac{1}{\lambda} < \xi \leq 1$ و $0 < \beta \leq 1$ و $0 \leq \mu < 1$. آنگاه $D_z^{-\lambda} f(z)$ مشمول در یک دیسک با مرکز مبدأ و شعاع r_1 داده شده به صورت زیر است.

$$r_1 = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(1 + \frac{\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-2\xi\mu-1))(1-\alpha)} \right) \quad (39.4)$$

که $0 < \lambda$.

قضیه ۶.۴.۴. اگر تابع $f(z)$ داده شده در (1.2) متعلق به رده‌ی $R_\alpha[\mu, \beta, \xi]$ باشد، آنگاه

$$|D_z^\lambda f(z)| \geq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \left(1 - \frac{2\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-2\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z| \right) \quad (40.4)$$

$$|D_z^\lambda f(z)| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(\gamma-\lambda)} \left(1 + \frac{\gamma\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(\gamma\xi-\gamma\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z| \right) \quad (41.4)$$

برای $1 > \lambda \geq 0$ و $z \in U$.

برهان. فرض کنیم برای $1 > \lambda \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} G(z) &= \Gamma(\gamma-\lambda) z^\lambda D_z^\lambda f(z) \\ &= z - \sum_{n=\gamma}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n z^n. \end{aligned}$$

مشابه نتیجه ۳.۲.۴ داریم

$$\sum_{n=\gamma}^{\infty} \left((n-1) + \beta(\gamma\xi(n-\mu) - (n-1)) \right) c(\alpha, n) a_n \leq \gamma\beta\xi(1-\mu)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} (1 + \beta(\gamma\xi - \gamma\xi\mu - 1)) c(\alpha, \gamma) \sum_{n=\gamma}^{\infty} n a_n \\ & \leq \sum_{n=\gamma}^{\infty} ((n-1) + \beta(\gamma\xi(n-\mu) - (n-1))) c(\alpha, n) a_n \\ & \leq \gamma\beta\xi(1-\mu) \end{aligned} \quad (42.4)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\sum_{n=\gamma}^{\infty} n a_n \leq \frac{\gamma\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(\gamma\xi-\gamma\xi\mu-1))(1-\alpha)} \quad (43.4)$$

به علاوه $n < \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} < 1$ برای $1 > \lambda \geq 0$ و $n \geq \gamma$. بنابراین

$$\begin{aligned} |G(z)| &\geq |z| - |z|^\gamma \sum_{n=\gamma}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n \\ &\geq |z| - |z|^\gamma \sum_{n=\gamma}^{\infty} n a_n \\ &\geq |z| - \frac{\gamma\beta\xi(1-\mu)}{(1+\beta(\gamma\xi-\gamma\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z|^\gamma \end{aligned}$$

که (۴۰.۴) را ثابت می‌کند و

$$\begin{aligned}
 |G(z)| &\leq |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n \\
 &\leq |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \\
 &\leq |z| + \frac{2\xi\beta(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-4\xi\mu-1))(1-\alpha)} |z|^2
 \end{aligned}$$

که (۴۱.۴) را نتیجه می‌دهد.

در روابط (۴۰.۴) و (۴۱.۴) تساوی برای توابع

$$D_z^\lambda f(z) = \frac{z^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left(1 - \frac{2\xi\beta(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-4\xi\mu-1))(1-\alpha)} \right)$$

□

برقرار است.

نتیجه ۷.۴.۴. اگر تابع $f(z)$ داده شده در (۱.۲) متعلق به رده‌ی $R_\alpha[\mu, \beta, \xi]$ باشد، آنگاه $D_z^\lambda f(z)$ مشمول در یک دیسک با مرکز مبدأ و شعاع r_2 داده شده به صورت زیر است.

$$r_2 = \frac{1}{\Gamma(2-\lambda)} \left(1 + \frac{2\xi\beta(1-\mu)}{(1+\beta(4\xi-4\xi\mu-1))(1-\alpha)} \right)$$

که $0 \leq \lambda < 1$.

در نهایت، نقاط حدی $R_\alpha[\mu, \beta, \xi]$ را با محاسبه معمولی به دست آوریم.

قضیه ۸.۴.۴. اگر $f_1(z) = z$ و

$$f_n(z) = z - \frac{2\xi\beta(1-\mu)}{\left((n-1) + \beta(2\xi(n-\mu) - (n-1))\right)C(\alpha, n)} z^n \quad (44.4)$$

که $n = 2, 3, \dots$ ، آنگاه $f \in R_\alpha[\mu, \beta, \xi]$ اگر و تنها اگر بتوان آنرا به شکل زیر بیان کرد.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$$

که $\lambda_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$.

۵.۴ تعمیم عملگر انتگرال کسری

تعریف ۱.۵.۴. برای اعداد حقیقی $\lambda > 0$ و δ و η تعمیم انتگرال کسری $I_{\sigma, z}^{\lambda, \delta, \eta}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I_{o,z}^{\lambda,\delta,\eta} f(z) \frac{z^{-\lambda-\delta}}{\Gamma(z)} \int_o^z (z-t)^{\lambda-1} F_1(\lambda+\delta-\eta, 1-\frac{t}{z}) f(t) dt \quad (45.4)$$

که $f(z)$ یک تابع تحلیلی در یک ناحیه پیوسته از صفحه z شامل مبدأ از مرتبه η

$$f(z) = o(|z|^\epsilon), (z \rightarrow o, \epsilon > \max[o, \delta - \eta] - 1) \quad (46.4)$$

$${}_1F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n} \quad (47.4)$$

می باشد و

$$(\nu)_n = \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \nu(\nu+1)\dots(\nu+n-1), & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (48.4)$$

$(nu \neq 0, -1, -2, \dots)$

تکرار $(z-t)^{\lambda-1}$ با تبدیل $\log(z-t)$ به اعداد حقیقی بسط داده می شود که $(z-t) > 0$.

برای اثبات نتایج تعمیم عملگر انتگرال کسری $I_{o,z}^{\lambda,\delta,\eta}$ ، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۲.۵.۴. اگر $\lambda > 0$ و $k > \delta - \eta - 1$ ، آنگاه

$$I_{o,z}^{\lambda,\delta,\eta} z^k = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\delta+\eta+1)}{\Gamma(k-\delta+1)\Gamma(k+\lambda+\eta+1)} z^{k-\delta} \quad (49.4)$$

قضیه ۳.۵.۴. فرض کنید $\delta > 2$ ، $\lambda > 0$ ، $\delta - \eta < 2$ ، $\lambda + \eta > -2$ و $\delta(\lambda + \eta) \leq 3\lambda$.

اگر $f(z) \in T$ متعلق به رده $R_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ باشد که $0 \leq \alpha < 1$ ، $0 < \beta \leq 1$ ، $0 \leq \mu \leq \frac{1}{\gamma}$ و $0 \leq \gamma \leq 1$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2-\delta+\eta)|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)\Gamma(2+\lambda+\eta)} \left\{ 1 - \frac{(2-\delta+\eta)\beta(1-\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta\{\gamma(2-\alpha)+1-\alpha\}(1-\mu)(2-\delta)(2+\lambda+\eta)} |z| \right\} \\ & \leq \left| I_{o,z}^{\lambda,\delta,\eta} f(z) \right| \leq \\ & \frac{\Gamma(2-\delta+\eta)|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)\Gamma(2+\lambda+\eta)} \left\{ 1 + \frac{(2-\delta+\eta)\beta(1-\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta\{\gamma(2-\alpha)+1-\alpha\}(1-\mu)(2-\delta)(2+\lambda+\eta)} |z| \right\} \end{aligned} \quad (50.4)$$

که

$$U_o = \begin{cases} U & \delta \leq 1 \\ U \setminus \{1\} & \delta > 1 \end{cases} \quad (51.4)$$

در رابطه (50.4) تساوی برای تابع

$$f(z) = z - \frac{\beta(1-\alpha)(1+\gamma)}{2\{1+\beta[\gamma(2-\alpha)+1-\alpha]\}} z^2 \quad (52.4)$$

برقرار است.

برهان. با استفاده از لم ۲.۵.۴ داریم

$$I_{o,z}^{\lambda,\delta,\eta} f(z) = \frac{\Gamma(2-\delta+\eta)}{\Gamma(2-\delta)\gamma(2+\lambda+n)} z^{1-\delta} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\delta+\eta+1)}{\Gamma(n-\delta+1)\Gamma(n+\lambda+\eta+1)} a_n z^{n-\delta} \quad (53.4)$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\Gamma(2-\delta)\Gamma(2+\lambda+\eta)}{\Gamma(2-\delta+\eta)} z^\delta I_{o,z}^{\lambda,\delta,\eta} \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \Psi(n) a_n z^n \end{aligned} \quad (54.4)$$

که

$$\Psi(n) = \frac{(2-\delta+\eta)(1)_n}{(2-\delta)_{n-1}(2+\lambda+\eta)} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (55.4)$$

می‌بینیم که $\Psi(n)$ برای تمام n های صحیح که $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ، غیرصعودی است و داریم

$$0 < \Psi(n) \leq \Psi(2) = \frac{2(2-\delta+\eta)}{(2-\delta)(2+\lambda+\eta)} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (56.4)$$

حال با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۴ و (۵۶.۴)،

$$\begin{aligned} |H(z)| &\geq |z| - \Psi(2)|z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \\ &\geq |z| - \frac{(2-\delta+\eta)\beta(1-\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta[\gamma(2-\alpha)+1-\alpha](1-\mu)(2-\delta)(2+\lambda+\eta)} |z|^2 \end{aligned} \quad (57.4)$$

و

$$\begin{aligned} |H(z)| &\leq |z| + \Psi(2)|z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \\ &\leq |z| + \frac{(2-\delta+\eta)\beta(1-\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta[\gamma(2-\alpha)+1-\alpha](1-\mu)(2-\delta)(2+\lambda+\eta)} |z|^2 \end{aligned} \quad (58.4)$$

□

و این اثبات قضیه‌ی ۳.۵.۴ را کامل می‌کند.

حال با استفاده از قضیه ۲.۲.۴ برای توابع $f(z)$ متعلق به ردهی $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ به نتیجهی مطلوب می‌رسیم.

قضیه ۴.۵.۴. فرض کنید $0 < \lambda < 2, \delta < 2, \lambda + \eta > -2, \delta - \eta < 2$ و $\delta(\lambda + \eta) \leq 3\lambda$. اگر $f(z) \in T$ متعلق به ردهی $C_\mu[\alpha, \beta, \gamma]$ باشد که $0 \leq \alpha < 1, 0 < \beta \leq 1, 0 \leq \mu \leq \frac{1}{4}$ و $0 \leq \gamma \leq 1$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2 - \delta + \eta)|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)\Gamma(2 + \lambda + \eta)} \left\{ 1 - \frac{(2 - \delta + \eta)\beta(1 - \alpha)(1 + \gamma)}{2[1 + \beta\{\gamma(2 - \alpha) + 1 - \alpha\}](1 - \mu)(2 - \delta)(2 + \lambda + \eta)} |z| \right\} \\ \leq \left| I_{\sigma, z}^{\lambda, \delta, \eta} f(z) \right| \leq \\ \frac{\Gamma(2 - \delta + \eta)|z|^{1-\delta}}{\Gamma(2 - \delta)\Gamma(2 + \lambda + \eta)} \left\{ 1 + \frac{(2 - \delta + \eta)\beta(1 - \alpha)(1 + \gamma)}{2[1 + \beta\{\gamma(2 - \alpha) + 1 - \alpha\}](1 - \mu)(2 - \delta)(2 + \lambda + \eta)} |z| \right\} \end{aligned}$$

که U_σ تعریف شده در (۵۱.۴) است. در رابطه‌ی (۵۰.۴) تساوی برای تابع

$$f(z) = z - \frac{\beta(1 - \alpha)(1 + \gamma)}{2\{1 + \beta[\gamma(2 - \alpha) + 1 - \alpha]\}} z^2. \quad (59.4)$$

برقرار است.

مراجع

- [1] O.P Ahuja , H. Silverman. *Convolutions of prestarlike functions*, *Internat J.Math Sci.* 6(1983), 59-68.
- [2] M. K. Aouf and G. S. Salagean, *Certain subclasses of prestarlike functions with negative coefficients*, *Studia Univ. Babes-Bolyia, Math.* 39(1994), no. 1, 19-30.
- [3] T. Jakab, *Subclasses of prestarlike functions with negative coefficients* , *Math.* 11(2010) .
- [4] T. H. MacGregor. *The radius of convexity for starlike functions of order $1/2$* , *Proc. Amer. Math. Soc.* 14(1963), 71-76.
- [5] S. Owa and B. A. Uralegaddi, *A class of functions α -prestarlike of order β* , *Bull. Korean Math.Soc.* 21 (1984), No.2, 77-85.
- [6] M. S. Robertson. *On the theory of univalent functions*, *Ann. Math.* 37(1936), 374-408.
- [7] T. Sheil-Small . H. Silverman.E.M. Silvia. *Convolutions multipliers and starlike functions*, *J. Anal. Math.* 41(1982), 181-192.
- [8] H. Silverman. *Complex Variables. Cengage Learning*, March 1975. 3,7.
- [9] H. Silverman and E. Silvia, *Subclasses of prestarlike functions*, *Math. Japon.* 29 (1984), No.6, 929-935.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

<i>Analytic function</i>	تابع تحلیلی
<i>Bound</i>	کران
<i>Constant</i>	ثابت
<i>Continuous</i>	پیوسته
<i>Convex function</i>	تابع محدب
<i>Convolution</i>	پیچیدگی یا هادامارد
<i>Derivativ</i>	مشتق
<i>Differential</i>	دیفرانسیل
<i>Doman</i>	دامنه
<i>Extermal</i>	اکسترمال
<i>Extremal function</i>	تابع حدی
<i>Field</i>	میدان
<i>Hadamard product</i>	ضرب هادامارد
<i>Metod</i>	روش
<i>positive</i>	مثبت
<i>Prestarlike function</i>	تابع شبه‌ستاره‌گون
<i>Solution</i>	راه حل
<i>Starlike function</i>	تابع ستاره‌گون
<i>Starlikeness</i>	ستاره‌گونی
<i>Theory</i>	قضیه
<i>Univalence</i>	تک‌ارزی
<i>Univaleness</i>	تحدب
<i>Univalent function</i>	تابع تک‌ارز

Abstract

In this thesis, we explain definitions and theorems related to pre-starlike functions . These functions are extended starlike functions.

For example, in this function $S_{\alpha}(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ if $\alpha = \frac{1}{2}$ We have It means , $S_{\frac{1}{2}}$ is a neutral member of Hadamard product.

It means that Hadamard product of $S_{\frac{1}{2}}$ With every function similar to f , is f .

In other words, pre-starlike functions $\frac{1}{2}$ give us starlike functions, In the special way.



University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Convolutions of prestarlike functions

Farzaneh Habibi Nodeh

Supervisor

Dr. Ahmad Zireh

October 2015