دانشگاه صنعتی شاهرود

حوزه معاونت پژوهشي و فناوري

گزارش پایانی

طرح پژوهشی

حلقه سریهای توانی اریب و حلقه سریهای توانی اریب لوران روی حلقه شبه بئر اصلی

با کد ۲۳۰۵

مجری: ابراهیم هاشمی

عضو هیات علمی دانشکده ریاضی

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ های تصویب و خاتمه آن بترتیب ۱۳۸۳/۱۰/۵ و ۱۳۸۴/۱۱/۱۰ می باشد.

بسم الله الرحمن الرحيم

حلقه سریهای توانی اریب و سریهای توانی اریب لوران روی حلقه شبه بئر اصلی

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار و α یک همریختی از R باشد. R را یک حلقه شبه بئر اصلی راست گوییم هر گاه پوچساز راست هر ایده‌آل راست اصلی آن توسط یک عنصر خودتوان تولید گردد. در این طرح نشان می دهیم که اگر R یک حلقه α–سازگار باشد آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱– حلقه $R[[x, x^{-1}; \alpha]]$ شبه بئر اصلی راست است.

۲– حلقه $R[[x; \alpha]]$ شبه بئر اصلی راست است.

۳– حلقه R شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد.

فهرست

فصل ۱

۱.۱ مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. بنابر [۹]، حلقه R یک حلقه بئر[۱] نامیده می‌شود هرگاه پوچساز راست هر زیر مجموعه ناتهی آن، بعنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک خودتوان تولید گردد. این تعریف برای راست و چپ تقارن دارد. مطالعه حلقه‌های بئر ریشه در آنالیز تابعی دارد [بعنوان نمونه به [۱۱] می توان مراجعه کرد]. کاپلانسکی به معرفی و مطالعه حلقه‌های بئر پرداخته و خواص گوناگونی از جبرهای فون نیومن و حلقه‌های $*$– منظم کامل را بررسی نمود. یک $*$—حلقهٔ (یا حلقه‌ی برگشت پذیر، یا حلقه‌ی با برگشت) R عبارت است از حلقه‌ای که دارای یک تابع برگشت $x \to x^*$ باشد بقسمی که برای هر $x، y \in R$ دارای خواص زیر باشد:

۱) $(x^*)^* = x$،

۲) $(x+y)^* = x^* + y^*$،

۳) $(xy)^* = y^*x^*$.

هرگاه علاوه بر این حلقهٔ R یک جبر روی یک $*$—میدان با تابع برگشت $\lambda \to \lambda^*$ باشد و همچنین برای هر $x \in R$، $(\lambda x)^* = \lambda^* x^*$، یک $*$—جبر نامیده می‌شود. C^*—جبرها نمونه خاص و مهمی از $*$—حلقه‌ها می‌باشد. خانوادهٔ حلقه‌های بئر شامل جبرهای فون نیومن

[۱] Baer

(یعنی جبر همهٔ عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت[۲])، C^*—جبر جابجایی $C(T)$ از توابع با مقدار مختلط پیوسته روی یک فضای استونی[۳] T و حلقه‌های منظمی که شبکهٔ ایده‌آلهای راست اصلی آن کامل است (بعنوان نمونه حلقه‌های منظمی که خود انژکتیو راست هستند) می‌باشد. R را یک حلقه $p.p.$—چپ نامند هرگاه هر ایده‌آل چپ اصلی آن یک جمعوند از $_RR$ باشد. واضح است R یک حلقه $p.p.$—چپ است اگر و تنها اگر صفرساز چپ هر عنصر از R بعنوان یک ایده‌آل چپ توسط یک خودتوان تولید گردد. بطور مشابه $p.p.$—راست تعریف می‌شود. حلقه R را $p.p.$ (ریکارت[۴]) نامیم اگر هم $p.p.$—چپ و هم $p.p.$—راست باشد. کلاس حلقه‌های $p.p.$ شامل کلاس حلقه‌های بئر است. حلقه R را آبلی نامیم هرگاه هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد. اندو[۵] نشان داد که اگر حلقه R آبلی باشد آنگاه R یک حلقه $p.p.$—چپ است اگر و تنها اگر $p.p.$—راست باشد. کلارک در مقاله [۴] حلقه‌های شبه بئر را معرفی نمود، حلقه‌ای که پوچساز چپ هر ایده‌آل آن، بعنوان یک ایده‌آل چپ، توسط یک خودتوان تولید گردد. همچنین او تقارن چپ و راست این شرط را اثبات نمود (یعنی نشان داد حلقه R شبه بئر است اگر و تنها اگر پوچساز راست هر ایده‌آل آن، بعنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک خودتوان تولید گردد). هر حلقهٔ اول یک حلقه شبه بئر است. برکینمیر[۶] در مقاله [۲] حلقه شبه بئر اصلی را تعریف نمود و خواص گوناگونی از آن را بررسی نمود. حلقه R را شبه بئر اصلی راست (چپ) نامیم هرگاه صفر ساز هر ایده‌آل راست (چپ) اصلی آن به عنوان یک ایده آل راست (چپ) توسط یک خودتوان تولید گردد. اگر R یک حلقه کاهشی باشد می توان نشان داد R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است اگر و تنها اگر شبه بئر اصلی چپ باشد. همچنین اگر R یک حلقه کاهشی باشد مفهوم شبه بئر اصلی و p.p. یکسان می باشد.

---

[۲] Hilbert

[۳] Stonian

[۴] Rikart

[۵] Endo

[۶] Birkenmeier

برای حلقهٔ K، حلقهٔ سریهای توانی را با $K[[x]]$ و حلقهٔ سریهای توانی لوران را با $K[[x,x^{-1}]]$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم R یک حلقه و $\alpha : R \to R$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. حلقه سریهای توانی اریب $R[[x;\alpha]]$ شامل همهٔ مجموعهای صوری $\Sigma_{i=0}^{\infty} r_i x^i$ است که برای هر $i \geq 0$، $r_i \in R$. اعمال جمع و ضرب بطور طبیعی انجام می‌شود و عمل ضرب منوط به شرط $xr = \alpha(r)x$ می‌باشد. مجموعه $\{x^i\}_{i\geq 0}$ یک مجموعه اُر در حلقه $R[[x;\alpha]]$ تشکیل می دهد لذا می توان حلقه کسرهای آن را تشکیل داد. ما آن را به $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ نمایش می دهیم و به آن حلقه سریهای توانی اریب لوران گوییم. زیر حلقه ای از آن شامل اعضایی مانند $\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_i x^i$ که تعداد متناهی از جملات آن ناصفر است را به $R[x,x^{-1};\alpha]$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم Y یک زیر مجموعه غیر تهی از R باشد، در این صورت $\ell_R(Y) = \{r \in R \,|\, rY = 0\}$ و $r_R(Y) = \{r \in R \,|\, Yr = 0\}$ را بترتیب صفرسازهای راست و چپ Y در حلقه R نامیم. مجموعه تمام خودتوانهای حلقه R را با علامت $I(R)$ و مجموعه خودتوانهای مرکزی را با علامت $B(R)$ و مرکز R را با $C(R)$ نمایش می‌دهیم. حلقه R را آبلی[۷] نامند هرگاه $I(R) = B(R)$. عضو خودتوان e از حلقه R را نیم مرکزی چپ (راست) گوییم اگر برای هر $a \in R$ داشته باشیم $ae = eae$ $(ea = eae)$. واضح است که اگر برای یک ایده‌آل راست مانند I یک خودتوان $e \in R$ چنان موجود باشد که $r(I) = eR$، آنگاه e خودتوان نیم مرکزی چپ است. مجموعه تمام خودتوانهای نیم مرکزی چپ (راست) حلقه R را با $S_\ell(R)$ $(S_r(R))$ نمایش می‌دهیم.

---

[۷] abelian

۲.۱ نتایج مقدماتی

لم ۱.۲.۱ شرایط زیر برای حلقه R هم ارزند:

الف) حلقه R بئر و آبلی است.

ب) حلقه R شبه بئر و کاهشی است.

مثال ۱.۲.۱ حلقه تبدیلات خطی یک فضای برداری روی یک حلقه تقسیم یک حلقه بئر و منظم است.

قضیه ۱.۲.۱ حلقه R اول است اگر و تنها اگر شبه بئر و نیم مرکزی کاهش یافته باشد.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم Z حلقه اعداد صحیح باشد و $R = M_2(Z)$. در این صورت حلقه R بئر است اما حلقه‌های $R[x]$ و $R[[x]]$ بئر نمی‌باشند. برای روشن شدن این موضوع صفرساز راست عنصر $x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ شامل هیچ عنصر خودتوانی از $R[x]$ یا $R[[x]]$ نمی‌باشد. در نتیجه حلقه‌های $R[x]$ و $R[[x]]$، $p.p.$—راست و در نتیجه بئر نیز نمی‌باشند. بطور مشابه می‌توان نشان داد $R[x]$ و $R[[x]]$، $p.p.$—چپ نیز نمی‌باشند.

قضیه ۲.۲.۱ [۳، قضیه ۱.۲] فرض کنیم حلقه R شبه بئر باشد. در اینصورت هر یک از توسیع‌های زیر شبه بئر می‌باشند، که در آن X مجموعه دلخواهی از متغیرها می‌باشد و α یک اتومورفیسم از R است:

۱) $R[X]$، ۲) $R[[X]]$، ۳) $R[x;\alpha]$، ۴) $R[[x;\alpha]]$، ۵) $R[x,x^{-1};\alpha]$ و ۶) $R[[x,x^{-1};\alpha]]$.

قضیه ۳.۲.۱ [۳، قضیه ۱.۸] فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه از متغیرها باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارز می‌باشند:

۱) حلقه R شبه بئر است.

۲) حلقه $R[X]$ شبه بئر است.

۳) حلقه $R[[X]]$ شبه بئر است.

۴) حلقه $R[x, x^{-1}]$ شبه بئر است.

۵) حلقه $R[[x, x^{-1}]]$ شبه بئر است.

تعریف **۱.۲.۱** حلقه R را شبه بئر اصلی راست (چپ) نامیم هرگاه صفرساز هر ایده‌آل راست (چپ) اصلی آن، توسط یک خودتوان تولید گردد. برکینمیر[8] نشان داد خانواده حلقه‌های شبه بئر اصلی راست (چپ)، موریتا پایا هستند و تحت حلقه‌های ماتریسی بالا مثلثی $n \times n$ بسته می‌باشد.

قضیه **۴.۲.۱** [۳، لم ۱.۲] شرایط زیر هم ارز می‌باشند:

۱) حلقه R اول است.

۲) حلقه R شبه بئر نیم مرکزی کاهش یافته است.

۳) حلقه R شبه بئر اصلی نیم مرکزی کاهش یافته است.

۴) حلقه R شبه بئر اصلی راست نیم مرکزی کاهش یافته است.

قضیه **۵.۲.۱** [۲، گزاره ۱.۷] شرایط زیر معادل می‌باشند:

۱) حلقه R شبه بئر اصلی راست است.

۲) صفر ساز راست هر ایده‌آل راست با تولید متناهی، بعنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک خودتوان تولید می‌شود.

۳) صفر ساز راست هر ایده‌آل اصلی، بعنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک خودتوان تولید می‌شود.

۴) صفر ساز راست هر ایده‌آل با تولید متناهی، بعنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک خودتوان تولید می‌شود.

---

[8] Birkenmeier

$.e(1 - f) = 0$

قضیه **۸.۲.۱** [۸] فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱— $S = R[[x;\alpha]]$ یک حلقه $p.p.$ است.

۲— R یک حلقه $p.p.$ است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان R یک اتصال در $I(R)$ دارد.

۳— $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ یک حلقه $p.p.$ است.

قضیه **۹.۲.۱** [۱۰] فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S_\ell(R) \subseteq B(R)$. در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱— $S = R[[x]]$ یک حلقه شبه بئر اصلی راست است.

۲— R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان R یک اتصال تعمیم یافته در $I(R)$ دارد.

فصل ۲

۱.۲ تعاریف و مثالها

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنیم $\alpha : R \to R$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. گوییم α یک همریختی سازگار است هرگاه برای هر $a, b \in R$، $a\alpha(b) = \circ$ اگر و تنها اگر $ab = \circ$. حلقه R را α—سازگار می‌نامیم هر گاه α یک همریختی سازگار از R باشد. واضح است که هر همریختی α—سازگار یک به یک می باشد.

مثال ۱.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. مجموعه $R_۳$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$.R_۳ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \circ & a & d \\ \circ & \circ & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

بوضوح $R_۳$ زیر حلقه‌ای از حلقه ماتریسهای ۳ × ۳ روی حلقه R می‌باشد. همریختی α را می‌توان به یک همریختی از $R_۳$ مانند $\overline{\alpha}$ با ضابطه $\overline{\alpha}(a_{ij}) = (\alpha(a_{ij}))$ توسیع داد. نشان می‌دهیم:

(i) $R_۳$ یک حلقه $\overline{\alpha}$—سازگار است.

(ii) $R_۳$ یک حلقه $\overline{\alpha}$—صلب نمی‌باشد.

اثبات : (i): فرض کنید $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \overline{\alpha} \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \right) = 0$. در نتیجه تساویهای زیر را خواهیم داشت:

(۱) $a_1\alpha(a_2) = 0$، (۲) $a_1\alpha(b_2) + b_1\alpha(a_2) = 0$،

(۳) $a_1\alpha(c_2) + b_1\alpha(d_2) + c_1\alpha(a_2) = 0$ و (۴) $a_1\alpha(d_2) + d_1\alpha(a_2) = 0$.

چون حلقه R کاهشی است از تساوی (۱) خواهیم داشت $\alpha(a_2)a_1 = 0$. با ضرب $\alpha(a_2)$ در تساوی (۲) از سمت چپ و استفاده از خاصیت کاهشی حلقه R، نتیجه می‌گیریم $a_1\alpha(b_2) = \alpha(a_2)b_1 = 0$. با ضرب $\alpha(a_2)$ در تساوی (۳) از سمت چپ و استفاده از خاصیت کاهشی حلقه R نتیجه می‌گیریم $c_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)c_1 = 0$. در نتیجه تساوی (۳) به تساوی (۵) $a_1\alpha(c_2) + b_1\alpha(d_2) = 0$ منجر می‌شود. با ضرب $\alpha(a_2)$ در تساوی (۴) از سمت چپ و استفاده از خاصیت کاهشی حلقه R، نتیجه می‌گیریم $d_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)d_1 = a_1\alpha(d_2) = \alpha(d_2)a_1 = 0$. باضرب a_1 در تساوی (۵) از سمت راست و استفاده از خاصیت کاهشی حلقه R، نتیجه می‌گیریم $a_1\alpha(c_2) = \alpha(c_2)a_1 = b_1\alpha(d_2) = \alpha(d_2)b_1 = 0$. چون R یک حلقه α—صلب است لذا $a_1a_2 = a_1b_2 = a_1c_2 = a_1d_2 = b_1a_2 = b_1d_2 = c_1a_2 = d_1a_2 = 0$. در نتیجه

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

حال فرض کنید

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

در نتیجه با استدلالی مشابه قبل خواهیم داشت:

$$a_1\alpha(a_2) = a_1\alpha(b_2) = b_1\alpha(a_2) = c_1\alpha(a_2) = 0$$

و

$$.d_1\alpha(a_2)=a_1\alpha(d_2)=a_1\alpha(c_2)=b_1\alpha(d_2)=0$$

لذا $0 = \left(\left(\begin{array}{ccc} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{array}\right)\right)\overline{\alpha}\left(\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{array}\right)$. بنابراین R_3 یک حلقه $\overline{\alpha}$—سازگار می‌باشد.

(ii): چون حلقه R_3 کاهشی نمی‌باشد لذا $\overline{\alpha}$—صلب نمی‌باشد.

مثال زیر نشان می دهد که وجود دارد یک همریختی یک به یک مانند α از حلقه R بقسمی که R یک حلقه α—سازگار و شبه بئر اصلی راست است اما α—صلب نمی باشد.

مثال ۲.۱.۲ فرض کنید Z مجموعه اعداد صحیح و Q مجموعه اعداد گویا باشد. مجموعه

$$R=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & d \\ 0 & a \end{array}\right) | a\in Z, d\in Q\right\}$$

را در نظر بگیرید. بوضوح R یک حلقه جابجائی می باشد. اتومورفیسم $\alpha : R\to R$ با ضابطه

$$\alpha(\left(\begin{array}{cc} a & d \\ 0 & a \end{array}\right))=\left(\begin{array}{cc} a & d/2 \\ 0 & a \end{array}\right)$$

را در نظر بگیرید.

(۱)— فرض کنید

$$.\left(\begin{array}{cc} a & d \\ 0 & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} b & d_1 \\ 0 & b \end{array}\right)=0$$

در نتیجه $ad_1+db = 0 = ab$. بنابراین $a=0$ یا $b=0$، در هر دو حالت $ad_1/2+db=0$.

در نتیجه

$$.\left(\begin{array}{cc} a & d \\ 0 & a \end{array}\right)\alpha(\left(\begin{array}{cc} b & d_1 \\ 0 & b \end{array}\right))=0$$

اگر

$$\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & a \end{pmatrix} \alpha(\begin{pmatrix} b & d_1 \\ 0 & b \end{pmatrix}) = 0$$

آنگاه با بحث مشابه‌ای می توان نشان داد $ad_1 + bd = 0$. در نتیجه

$$\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d_1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0.$$

بنابراین R یک حلقه α—سازگار می باشد.

(۲)— R یک حلقه α—صلب نیست:

چون

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha(\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$$

اما برای هر $t \neq 0$،

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

لذا R یک حلقه α—صلب نیست.

لم ۱.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—سازگار باشد. در اینصورت:

(۱)— اگر $ab = 0$ آنگاه برای هر عدد طبیعی n، $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$.

(۲)— اگر برای یک عدد طبیعی n داشته باشیم $\alpha^n(a)b = 0$ آنگاه $ab = 0$.

اثبات : (۱)— اگر $ab = 0$ آنگاه $\alpha^n(a)\alpha^n(b) = 0$. در نتیجه بنا به خاصیت α—سازگاری R، $\alpha^n(a)b = 0$.

(۲)— فرض کنیم برای یک عدد طبیعی n داشته باشیم $\alpha^n(a)b = 0$. در نتیجه بنا به خاصیت α—سازگاری R، $\alpha^n(a)\alpha^n(b) = 0$ و چون α یک تابع یک به یک است لذا $ab = 0$.

لم ۲.۱.۲ فرض کنید α یک ایندومرفیسم از حلقه R باشد. در این صورت R یک حلقهα—صلب است اگر و تنها اگر R یک حلقه α—سازگار و کاهشی باشد.

اثبات : فرض کنید R یک حلقه α—سازگار و کاهشی باشد و همچنین $r \in R$ بقسمی که $r\alpha(r) = 0$. در نتیجه بنا به لم ۲.۱.۱، $\alpha(r)\alpha(r) = 0$ و چون α یک به یک و R کاهشی است لذا $r = 0$. بنابراین R یک حلقه α—صلب است. حال فرض کنید R یک حلقه α—صلب باشد و $ab = 0$. چون حلقه های α—صلب کاهشی هستند لذا $ab = 0$ اگر و تنها اگر $ba = 0$. در نتیجه $a\alpha(b)\alpha(a\alpha(b)) = a\alpha(ba)\alpha^2(b) = 0$. چون R یک حلقه α—صلب است لذا $a\alpha(b) = 0$. به طور مشابه میتوان نشان داد $\alpha(a)b = 0$. حال فرض کنید $a\alpha(b) = 0$. در نتیجه $ba\alpha(ba) = 0$ و چون R یک حلقه α—صلب است لذا $ab = ba = 0$. بنابراین R یک حلقه α—سازگار است.

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنید α یک ایندومرفیسم از حلقه R باشد. گوئیم R در شرط

۱— (SQA1) صدق می کند هر گاه

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in R[[x;\alpha]]$ و $f(x)R[[x;\alpha]]g(x) = 0$ آنگاه برای هر i, j، $a_iRb_j = 0$.

۲— (SQA2) صدق می کند هرگاه

$f(x) = \sum_{i=r}^{\infty} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=s}^{\infty} b_j x^j \in R[[x,x^{-1};\alpha]]$ و $f(x)R[[x,x^{-1};\alpha]]g(x) = 0$ آنگاه برای هر i, j، $a_iRb_j = 0$.

توجه داریم هر حلقه α—صلب در هر دو شرط (SQA1) و (SQA2) صدق می کند.

۲.۲ حلقه سریهای توانی اریب لوران روی حلقه شبه بئر اصلی راست

برای حلقه R قرارداد می کنیم:

$$rAnn_R(id(R)) = \{r_R(U) | \text{ می باشد} R \text{ یک ایده آل } U\}$$

لم ۱.۲.۲ فرض کنید α یک اتومورفیسم از حلقه R باشد و R یک حلقه α−سازگار و S نمایانگر حلقه $R[[x,x^{-۱};\alpha]]$ باشد. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

(۱)− R در شرط (SQA2) صدق می کند.

(۲)− نگاشت $\psi : rAnn_R(id(R)) \to rAnn_S(id(S))$ با ضابطه $\psi(A) = A[[x,x^{-۱};\alpha]]$ دو سوئی است که در آن $A[[x,x^{-۱};\alpha]]$ نمایانگر مجموعه عناصری از S با ضرایب از A می باشد.

اثبات : (۲)⇐(۱). فرض کنید $A \in rAnn_R(id(R))$. در نتیجه وجود دارد یک ایده آل مانند I از R بقسمی که $A = r_R(I)$. چون R یک حلقه α−سازگار است لذا $\alpha(A) \subseteq A$ و در نتیجه $A[[x,x^{-۱};\alpha]]$ یک ایده آل S می باشد. نشان می دهیم $r_S(SIS) = A[[x,x^{-۱};\alpha]]$. چون R یک حلقه α−سازگار است لذا $A \subseteq r_S(SIS)$ و در نتیجه $A[[x,x^{-۱};\alpha]] \subseteq r_S(SIS)$. حال فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^i \in r_S(SIS)$. در نتیجه برای هر $i \geq k$، $a_i \in r_R(I)$. بنابراین $f(x) \in A[[x,x^{-۱};\alpha]]$ و در نتیجه $r_S(SIS) = A[[x,x^{-۱};\alpha]]$. بنابراین ψ خوشتعریف می باشد. فرض کنید $B \in rAnn_S(id(S))$. لذا وجود دارد یک ایده آل مانند J از حلقه S بقسمی که $B = r_S(J)$. فرض کنید $J_۱$ و $B_۱$ بترتیب ضرائب عناصر J و B باشند. بدیهی است که $J_۱$ و $B_۱$ ایده آلهایی از R می باشند. نشان می دهیم $r_R(J_۱) = B_۱$. فرض کنید

$f(x) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^i \in J$ و $g(x) = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i \in B$. در نتیجه $f(x)Sg(x) = 0$. چون R در شرط (SQA2) صدق می کند لذا برای هر i, j، $a_i R b_j = 0$. بنابراین $J_1 B_1 = 0$، در نتیجه $B_1 \subseteq r_R(J_1)$. از طرفی چون R یک حلقه α−سازگار است لذا $r_R(J_1 R) \subseteq B_1$ و در نتیجه $r_R(J) = B_1[[x, x^{-1}; \alpha]]$.

(۱)⇒(۲). فرض کنید $f(x) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^i \in S$، $g(x) = \sum_{j=k}^{\infty} b_j x^j$ بقسمی که $f(x)Sg(x) = 0$. در نتیجه وجود دارد ایده‌آلی از R مانند A بقسمی که $g(x) \in r_S(Sf(x)S) = A[[x, x^{-1}; \alpha]]$. لذا برای هر $i \geq k$، $b_j \in A$ و در نتیجه برای هر $i \geq k$، $f(x)Rb_j = 0$. بنابراین شرط α−سازگاری R نتیجه می دهد برای هر i, j، $a_i R b_j = 0$.

تعریف ۱.۲.۲ ایده‌آل I از حلقه R را s−یکال [1] چپ نامیم هر گاه برای هر $a \in I$ وجود داشته باشد $e \in I$ بقسمی که $ea = a$. اگر ایده‌آل I از حلقه R، s−یکال چپ باشد آنگاه برای هر زیر مجموعه متناهی از I وجود دارد $e \in I$ بقسمی که برای هر $x \in I$، $ex = x$.

لم ۲.۲.۲ فرض کنید α یک اتومورفیسم از حلقه R و R یک حلقه α−سازگار باشد. در این صورت (۳)⇒(۲)⇒(۱):

(۱)− $r_S(f(x)S)$ برای هر $f(x) \in S$ یک ایده‌آل s−یکال چپ است.

(۲)− $r_R(aR)$ برای هر $a \in S$ یک ایده‌آل s−یکال چپ است.

(۳)− R در شرط (SQA2) صدق می کند.

اثبات : (۲)⟸(۱). فرض کنیم a یک عنصر دلخواه از R باشد. چون R یک حلقه α−سازگار است لذا $r_R(aR) \subseteq r_S(aS)$. در نتیجه برای هر $b \in r_R(aR)$ وجود دارد $f(x) \in r_S(aS)$ بقسمی که $f(x)b = b$. در نتیجه $a_0 b = b$، که در آن a_0 جمله ثابت $f(x)$ می باشد. بنابراین (۲) نتیجه می شود.

(۳)⟸(۲). فرض کنید $(\sum_{i=m}^{\infty} a_i x^i)S(\sum_{j=n}^{\infty} b_j x^j) = 0$. فرض کنید c یک عنصر

[1] s-unital

دلخواه از R باشد. در نتیجه $\sum_k(\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(cb_j))x^{i+j} = \circ$ و لذا برای هر $k \geq n+m$،

$$\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(cb_j) = \circ \quad (۱.۲.۲)$$

با استفاده از استقراء روی $i+j$، نشان می دهیم برای هر i,j، $a_iRb_j = \circ$. چون R یک حلقه α—سازگار و α یک اتومورفیسم است لذا می توان فرض نمود $n = m = \circ$. در نتیجه از رابطه (۱.۲.۲) نتیجه می گیریم $a_\circ Rb_\circ = \circ$. بنابراین برای $i+j = \circ$ ثابت شد. حال فرض کنیم برای هر $\circ \leq i+j \leq t-۱$ درست باشد. در نتیجه برای هر $j = o,\cdots,t-۱$ و $i = \circ,\cdots,t-۱-j$، $b_j \in r_R(a_iR)$. چون $r_R(a_iR)$ یک ایده آل s—یکال چپ است لذا وجود دارد $e_{ij} \in r_R(a_iR)$ بقسمی که $e_{ij}b_j = b_j$ برای هر $j = o,\cdots,t-۱$ و $i = \circ,\cdots,t-۱-j$. برای هر $j = o,\cdots,t-۱$ فرض کنیم $f_j = e_{jt-۱-j}\cdots e_{jm}$. در نتیجه $f_jb_j = b_j$ و $f_j \in r_R(a_mR)\cap\cdots\cap r_R(a_{t-۱-j}R)$. برای $k = t$ در رابطه (۱.۲.۲) بجای c عنصر $cf_\circ$ را قرار می‌دهیم لذا خاصیت α—سازگاری R نتیجه می دهد $a_t\alpha^t(cf_\circ b_\circ) = \circ$. در نتیجه $a_tcb_\circ = a_tcf_\circ b_\circ = \circ$ و لذا $a_tRb_\circ = \circ$. اگر این روند را تکرار کنیم یعنی در رابطه (۱.۲.۲) بجای c عنصر cf_j را قرار دهیم نتیجه می گیریم برای $i+j = t$، $a_iRb_j = \circ$. بنابراین R در شرط (SQA2) صدق می کند.

تعریف ۲.۲.۲ [۱۰] فرض کنیم $\{e_\circ, e_۱, \cdots\}$ یک زیر مجموعه شمارا از عناصر خودتوان R باشد. $e \in I(R)$ را یک اتصال تعمیم یافته برای $\{e_\circ, e_۱, \cdots\}$ نامند هرگاه:

الف — برای هر i، $e_iR(۱-e) = \circ$.

ب — اگر وجود داشته باشد $f \in I(R)$ بقسمی که برای هر i، $e_iR(۱-f) = \circ$، آنگاه $eR(۱-f) = \circ$.

قضیه ۱.۲.۲ فرض کنیم α یک اتومورفیسم از حلقه R و R یک حلقه α—سازگار باشد و $S_\ell(R) \subseteq C(R)$. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $S = R[[x, x^{-۱}; \alpha]]$ شبه بئر اصلی راست است.

(۲) R شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد.

اثبات : (۲)$\Leftarrow$(۱). فرض کنید $a \in R$. در نتیجه وجود دارد یک عنصر نیم مرکزی چپ از S مانند $e(x) = \sum_{i=m}^{\infty} e_i x^i \in S$ بقسمی که $r_S(aS) = e(x)S$. بنا به لم ۱.۲.۲ وجود دارد یک ایده آل از R مانند A بقسمی که $r_S(aS) = A[[x, x^{-1}; \alpha]]$. در نتیجه برای هر $i \geq m$، $e_i \in A$ و $e_\circ r = r$ که در آن $e_\circ$ جمله ثابت $e(x)$ می‌باشد. بنابراین $A = e_\circ R$ و لذا $r_S(aS) = e_\circ S$. در نتیجه $r_R(aR) = e_\circ R$ و لذا R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است. فرض کنیم $\{f_\circ, f_1, \cdots\}$ یک زیر مجموعه شمارا از عناصر خودتوان R باشد. فرض کنیم $g(x) = \sum_{i=\circ}^{\infty} f_i x^i \in S$. چون حلقه S شبه بئر اصلی راست است لذا وجود دارد یک عنصر خودتوان از S مانند $e(x) = \sum_{i=m}^{\infty} e_i x^i$ بقسمی که $r_S(g(x)S) = e(x)S$. مشابه بحث بالا می توان نشان داد $r_S(g(x)S) = e_\circ S$ که در آن $e_\circ$ جمله ثابت $e(x)$ می باشد. در نتیجه برای هر $r \in R$، $f_i r(1 - (1 - e_\circ)) = \circ$. حال فرض کنیم h یک عنصر خودتوان از R باشد بقسمی که برای هر i، $f_i R(1 - h) = \circ$. در نتیجه خاصیت α—سازگاری R ایجاب می کند که برای هر $r \in R$، $r(1 - h) \in r_S(g(x)S)$. بنابراین $r(1 - h) = e_\circ r(1 - h)$ و $(1 - e_\circ) r(1 - h) = \circ$. در نتیجه $(1 - e_\circ)$ یک اتصال تعمیم یافته $\{f_\circ, f_1, \cdots\}$ می باشد.

(۱)$\Leftarrow$(۲). فرض کنید $f(x) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^i \in S$. در نتیجه برای هر $i \geq m$ عنصر خودتوان e_i وجود دارد بقسمی که $r_R(a_i R) = e_i R$. فرض کنیم h یک اتصال تعمیم یافته $\{1 - e_i | i = m, m+1, \cdots\}$ باشد. لذا برای هر $i \geq m$، $(1 - e_i) R(1 - h) = \circ$. در نتیجه برای هر $r \in R$، $r(1 - h) = e_i r(1 - h)$. چون $S_\ell(R) \subseteq C(R)$ لذا برای هر i و هر $r \in R$، $a_i r(1 - h) = a_i e_i r(1 - h) = \circ$. در نتیجه با توجه به خاصیت α—سازگاری R، $(1 - h) \in r_S(f(x)S)$. بنابراین $(1 - h)S \subseteq r_S(f(x)S)$. حال فرض کنید $g(x) = \sum_{j=k}^{\infty} b_j x^j \in r_S(f(x)S)$. در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۲ برای هر $i \geq m$ و $j \geq k$، $a_i R b_j = \circ$. بنابراین برای هر $i \geq m$ و $j \geq k$، $b_j = e_i b_j$. چون $S_\ell(R) \subseteq C(R)$ لذا برای

هر $i \geq m$ و $j \geq k$، $b_jR(1-e_i) = 0$. چون حلقه R شبه بئر اصلی راست است لذا برای هر $j \geq k$ وجود دارد عنصر خودتوان نیم مرکزی مانند f_j بقسمی که $r_R(b_jR) = f_jR$. بنابراین $(1-e_i) \in r_R(b_jR) = f_jR$ و در نتیجه برای هر i, j، $(1-e_i) = f_j(1-e_i)$. چون $(1-e_i)$ در مرکز R قرار دارد لذا برای هر i, j، $(1-e_i)R(1-f_j) = 0$. چون h یک اتصال تعمیم یافته برای $\{1-e_i | i = m, m+1, \cdots\}$ می باشد لذا برای هر j، $hR(1-f_j) = 0$. بنابراین $b_j = b_j - b_jf_j = (1-f_j)b_j = (1-h)(1-f_j)b_j \in (1-h)R$. در نتیجه $g(x) \in (1-f)S$. بنابراین $r_R(f(x)S) = (1-f)S$ و لذا T یک حلقه شبه بئر اصلی راست است.

تعریف ۳.۲.۲ فرض کنیم α یک همریختی یک به یک از حلقه R باشد. زیر مجموعه $A = \{x^{-i}rx^i | r \in R, i \geq 0\}$ از حلقه $R[[x, x^{-1}; \alpha]]$ را در نظر می گیریم. بوضوح برای هر $j \geq 0$، $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{(i+j)}$. لذا A یک زیر حلقه از $R[[x, x^{-1}; \alpha]]$ تشکیل می دهد که در آن جمع و ضرب بصورت زیر می باشد:

برای هر $i, j \geq 0$ و هر $r, s \in R$، $x^{-i}rx^i + x^{-j}sx^j = x^{-(i+j)}(\alpha^j(r) + \alpha^i(s))x^{(i+j)}$ و $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)\alpha^i(s)x^{(i+j)}$. حلقه A را توسیع جوردن [۲] حلقه R می نامیم و گاهی آن را با علامت $A(R, \alpha)$ نمایش می دهیم. توجه داریم که می توان α را به اتومورفیسمی از حلقه A توسیع دهیم بقسمی که برای هر $x^{-i}rx^i \in A$، $\alpha(x^{-i}rx^i) = x^{-i}\alpha(r)x^i$. بنابراین برای هر $f(x) \in R[[x, x^{-1}; \alpha]]$، وجود دارد $t_n \geq 0$ بقسمی که $f(x) = (x^{-t_p}r_px^{t_p})x^p + \cdots + (x^{-t_{n-1}}r_{n-1}x^{t_{n-1}})x^{n-1} + \sum_{j=n}^{\infty}(x^{-t_n}r_jx^{t_n})x^j$.

لم ۳.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در اینصورت R یک حلقه α—سازگار است اگر و تنها اگر A یک حلقه α—سازگار باشد.

اثبات : بوضوح زیر حلقه هر حلقه α—سازگار، α—سازگار می‌باشد. فرض کنیم

---

[۲] Jordan's extension

R یک حلقه α—سازگار باشد و وجود داشته باشد $i,j \geq ۰$ و $r,s \in R$ بقسمی که $(x^{-i}rx^{i})(x^{-j}sx^{j}) = ۰$. در نتیجه $\alpha^{j}(r)\alpha^{i}(s) = ۰$. چون R یک حلقه α—سازگار است لذا $\alpha^{j}(r)\alpha^{i+۱}(s) = ۰$. بنابراین $(x^{-i}rx^{i})\alpha(x^{-j}sx^{j}) = ۰$. با همین استدلال می‌توان نتیجه گرفت اگر $(x^{-i}rx^{i})\alpha(x^{-j}sx^{j}) = ۰$، آنگاه $(x^{-i}rx^{i})(x^{-j}sx^{j}) = ۰$. در نتیجه A یک حلقه α—سازگار است.

لم ۴.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—سازگار باشد. در این صورت هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان حلقه R یک اتصال تعمیم یافته دارد اگر و تنها اگر هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان حلقه $A(R,\alpha)$ یک اتصال تعمیم یافته داشته باشد.

اثبات : فرض کنیم $\{e'_i \,|\, i = ۰,۱,\cdots\}$ یک خانواده شمارا از عناصر خودتوان A باشد. برای هر i، یک عنصر خودتوان از R مانند e_i و عدد صحیح نامنفی n_i وجود دارد بقسمی که $e'_i = x^{-n_i}e_ix^{n_i}$. طبق فرض، خانواده $\{e_i \,|\, i = ۰,۱,\cdots\}$ یک اتصال تعمیم یافته در R مانند e دارد. نشان می‌دهیم e یک اتصال تعمیم یافته مجموعه $\{e'_i \,|\, i = ۰,۱,\cdots\}$ می‌باشد. چون $e_iR(۱-e) = ۰$، لذا بنا به لم ۱.۱.۲ برای هر i، $e'_iA(۱-e) = ۰$. فرض کنیم f' خودتوانی از A باشد بقسمی که برای هر i، $e'_iA(۱-f') = ۰$. در نتیجه یک عنصر خودتوان از R مانند f و یک عدد صحیح نامنفی مانند n وجود دارد بقسمی که $f' = x^{-n}fx^{n}$. بنا به لم ۱.۱.۲ برای هر i، $e_iR(۱-f) = ۰$. چون e یک اتصال تعمیم یافته خانواده $\{e_i \,|\, i = ۰,۱,\cdots\}$ است، لذا $eR(۱-f) = ۰$. بنا به لم ۱.۱.۲، $eA(۱-f') = ۰$ و در نتیجه e یک اتصال تعمیم یافته خانواده $\{e'_i \,|\, i = ۰,۱,\cdots\}$ می‌باشد.

حال فرض کنیم $\{e_i \,|\, i = ۰,۱,\cdots\}$ یک خانواده شمارا از عناصر خودتوان R باشد. در نتیجه خانواده فوق در حلقه A یک اتصال تعمیم یافته مانند e' دارد. یک عنصر خودتوان از R مانند e و یک عدد صحیح نامنفی مانند n وجود دارد بقسمی که $e' = x^{-n}ex^{n}$. با روشی مشابه قبل می‌توان نشان داد e یک اتصال تعمیم یافته خانواده

$\{e_i \,|\, i = ۰, ۱, \cdots\}$ می‌باشد.

لم ۵.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه α−سازگار باشد. اگر $S_\ell(R) \subseteq C(R)$ آنگاه $S_\ell(A) \subseteq C(A)$.

اثبات : فرض کنیم $e' \in S_\ell(A)$. در نتیجه وجود دارد $e \in I(R)$ و یک عدد صحیح نامنفی مانند n بقسمی که $e' = x^{-n}ex^n$. لذا برای هر $x^{-i}rx^i \in A$، $(x^{-n}ex^n)(x^{-i}rx^i)(x^{-n}ex^n) = (x^{-i}rx^i)(x^{-n}ex^n)$. در نتیجه بنا به لم ۱.۱.۲ برای هر $r \in R$، $ere = re$. بنابراین $e \in S_\ell(R)$. ادعا می کنیم برای هر طبیعی t، $\alpha(e) \in C(R)$. برای این منظور کافی است نشان دهیم $\alpha(e) \in C(R)$. چون $e^۲ = e$ لذا بنا به لم ۱.۱.۲، $\alpha(e)e = e$. از طرفی $e \in C(R)$، لذا برای هر $r \in R$، $r\alpha(e)e = \alpha(e)er = \alpha(e)re$. در نتیجه بنا به لم ۱.۱.۲ برای هر $r \in R$، $r\alpha(e) = \alpha(e)r\alpha(e)$. بنابراین $\alpha(e) \in C(R)$ و در نتیجه $x^{-n}ex^n \in C(A)$.

لم ۶.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه α−سازگار باشد. در اینصورت R شبه بئر اصلی راست است اگر و تنها اگر A شبه بئر اصلی راست باشد.

اثبات : فرض کنیم R شبه بئر اصلی راست باشد و $a = x^{-i}tx^i \in A$. فرض کنیم $x^{-j}bx^j \in r_A(aA)$. در نتیجه بنا به لم ۱.۱.۲، $b \in r_R(tR)$. چون R شبه بئر اصلی راست است لذا وجود دارد یک عنصر خودتوان مرکزی مانند e بقسمی که $r_R(tR) = eR$. در نتیجه $eb = b$ و بنا به لم ۱.۱.۲ برای هر n، $\alpha^n(e)b = b$. بنابراین $e(x^{-j}bx^j) = x^{-j}bx^j$ و لذا $r_A(aA) \subseteq eA$. چون R یک حلقه α−سازگار است لذا $eA \subseteq r_A(aA)$. در نتیجه $r_A(aA) = eA$، یعنی حلقه A شبه بئر اصلی راست است.

حال فرض کنیم حلقه A شبه بئر اصلی راست باشد و $r \in R$. چون حلقه A شبه بئر اصلی راست است لذا وجود دارد عنصر خودتوان $e \in R$ و عدد صحیح نامنفی j بقسمی که $r_A(rA) = (x^{-j}ex^j)A$. با استفاده از لم ۱.۱.۲ براحتی می توان نشان داد $r_R(rR) = eR$. در نتیجه حلقه R شبه بئر اصلی راست می باشد.

قضیه ۲.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه α–سازگار باشد و $S_\ell(R) \subseteq C(R)$. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

(i) $T = R[[x, x^{-1}; \alpha]]$ شبه بئر اصلی راست است.

(ii) حلقه R شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد.

اثبات : $(i) \Longrightarrow (ii)$. بنا به لمهای ۳.۲.۲، ۴.۲.۲، ۵.۲.۲ و ۶.۲.۲ نشان می دهیم حلقه A شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد. فرض کنیم $a \in A$. در نتیجه وجود دارد $e(x)^{2} = e(x) \in T$ بقسمی که $r_A(aA) = e(x)T$. فرض کنیم e_0 جمله ثابت $e(x)$ باشد. بوضوح $e_0 A \subseteq r_A(aA)$. فرض کنیم $b \in r_A(aA)$. چون حلقه A، α–سازگار است لذا $aTb = 0$. بنابراین $r_A(aA) = e_0 A$ و لذا حلقه A شبه بئر اصلی راست است. فرض کنیم $\{f_i' \,|\, i = 0, 1, \cdots\}$ یک خانواده شمارا از عناصر خودتوان A باشد. برای هر f_i' یک عنصر خودتوان از R مانند f_i و عدد صحیح نامنفی j_i وجود دارد بقسمی که $f_i' = x^{-j_i} f_i x^{j_i}$. در نتیجه $\{f_i \,|\, i = 0, 1, \cdots\}$ یک خانواده شمارا از عناصر خودتوان A می باشد. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in T$. در نتیجه وجود دارد عنصر خودتوانی از T مانند $h(x)$ بقسمی که $r_T(f(x)T) = h(x)T$. لذا برای هر $a \in A$ و هر عدد صحیح m، $f(x)(ax^m)h(x) = 0$. بنابراین $h(x) \in r_{A[[x,x^{-1};\alpha]]}(f(x)A[[x, x^{-1}; \alpha]])$. چون حلقه A شبه بئر اصلی راست است لذا بنا به لم ۲.۲.۲ حلقه A در شرط $(SQA2)$ صدق می کند. چون T زیر حلقه $A[[x, x^{-1}; \alpha]]$ می باشد و حلقه A، α–سازگار می باشد لذا $r_T(f(x)T) = h_0 T$ که در آن h_0 جمله ثابت $h(x)$ در حلقه A می باشد. بنابراین با روشی مشابه روش اثبات قضیه ۱.۲.۲، می توان نشان داد $1 - h_0$ یک اتصال تعمیم یافته از $\{f_i' \,|\, i = 0, 1, \cdots\}$ می باشد.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. فرض کنید $f(x) \in R[[x, x^{-1}; \alpha]]$. بنا به لم ۶.۲.۲ حلقه A شبه بئر اصلی راست است. در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲ وجود دارد عنصر خودتوانی از A مانند e_0 بقسمی که $r_{A[[x,x^{-1};\alpha]]}(f(x)A[[x, x^{-1}; \alpha]]) = e_0 A[[x, x^{-1}; \alpha]]$. چون T زیر حلقه ای از

$A[[x,x^{-1};\alpha]]$ می باشد و حلقه A، α—سازگار است لذا $r_T(f(x)T) = e_\circ T$. در نتیجه T شبه بئر اصلی راست است.

نتیجه ۱.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S_\ell(R) \subseteq C(R)$. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

(i) $T = R[[x,x^{-1}]]$ شبه بئر اصلی راست است.

(ii) حلقه R شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد.

نتیجه ۲.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه آبلی باشد. در اینصورت حلقه $T = R[[x,x^{-1}]]$ شبه بئر اصلی راست است اگر و تنها اگر حلقه R شبه بئر اصلی راست باشد و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال داشته باشد.

مثال زیر نشان می‌دهد حلقه‌ای جابجایی مانند R و اتومورفیسمی از آن مانند α وجود دارد بقسمی که هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد و حلقه $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ شبه بئر است اما حلقه R شبه بئر نمی باشد. لذا شرط α—سازگاری در قضیه ۲.۲.۲ قابل حذف نمی باشد.

مثال ۱.۲.۲ فرض کنیم Z نمایانگر حلقه اعداد صحیح باشد و
$R = \{(a,b) \in Z \oplus Z \,|\, a \equiv b\,(mod ۲)\}$. در این صورت R زیر حلقه‌ای جابجایی و کاهشی از $Z \oplus Z$ می‌باشد. توجه داریم تنها عناصر خودتوان R همان $(\circ,\circ)$ و $(۱,۱)$ می‌باشند. چون $r_R((۲,\circ)) = \{(\circ, ۲n) \,|\, n \in Z\}$، لذا $r_R((۲,\circ))$ شامل هیچ عنصر خودتوانی نیست، بنابراین حلقه R شبه بئر نمی‌باشد. حال نگاشت $\alpha : R \to R$ با ضابطه $\alpha((a,b)) = (b,a)$ را در نظر می گیریم. بوضوح α اتومورفیسمی از R می‌باشد. نشان می‌دهیم حلقه $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ شبه بئر است. فرض کنیم I یک ایده‌آل راست غیر

صفر از $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ است و $0 \neq p \in I$. قرار می‌دهیم $p = (a_i,b_i)x^i + \cdots$، بطوری که i کوچکترین عدد صحیحی باشد که $(a_i,b_i) \neq (0,0)$. چون I یک ایده‌آل راست $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ است، لذا می‌توانیم فرض کنیم $i \geq 0$. پس برای هر عدد طبیعی $2k-i$،

$$p(1,1)x^{2k-i} = (a_i,b_i)x^{2k} + \cdots \in I$$

و

$$.p(1,1)x^{2k+1-i} = (a_i,b_i)x^{2k+1} + \cdots \in I$$

فرض کنید $0 \neq q \in r_{R[x,x^{-1};\alpha]}(I)$. قرار می‌دهیم $q = (u_j,v_j)x^j + \cdots$، بقسمی که j کوچکترین عدد صحیحی است که $(u_j,v_j) \neq (0,0)$. می‌توانیم فرض کنیم $j \geq 0$. پس $p(1,1)x^{2k+1-i}q = p(1,1)x^{2k-i}q = (0,0)$. بنابراین

$$(a_i,b_i)x^{2k}(u_j,v_j)x^j + \cdots = (a_i,b_i)(u_j,v_j)x^{2k+j} + \cdots = 0$$

و

$$.(a_i,b_i)x^{2k+1}(u_j,v_j)x^j + \cdots = (a_i,b_i)(u_j,v_j)x^{2k+1+j} + \cdots = 0$$

در نتیجه $(a_iv_j,b_iu_j) = (a_iu_j,b_iv_j) = (0,0)$. چون $(a_i,b_i) \neq (0,0)$، لذا $a_i \neq 0$ یا $b_i \neq 0$. در نتیجه $(u_j,v_j) = (0,0)$ که یک تناقض است. بنابراین $r_{R[[x,x^{-1};\alpha]]}(I) = 0$، و در نتیجه حلقه $R[[x,x^{-1};\alpha]]$ شبه بئر است.

۳.۲ حلقه سریهای توانی اریب روی حلقه شبه بئر اصلی راست

لم ۱.۳.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—سازگار و S نمایانگر حلقه $R[[x;\alpha]]$ باشد. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

(۱)— R در شرط (SQA1) صدق می کند.

(۲)— نگاشت $\psi : rAnn_R(id(R)) \to rAnn_S(id(S))$ با ضابطه $\psi(A) = A[[x;\alpha]]$ دو سوئی است که در آن $A[[x;\alpha]]$ نمایانگر مجموعه تمام عناصری از S با ضرایبی از A می باشد.

اثبات : با روشی مشابه اثبات لم ۱.۲.۲ می توان معادل بودن (۱) و (۲) را نتیجه گرفت.

لم ۲.۳.۲ فرض کنید R یک حلقه α—سازگار و S نمایانگر حلقه $R[[x;\alpha]]$ باشد. در این صورت (۳)⇒(۲)⇒(۱):

(۱)— $r_S(f(x)S)$ برای هر $f(x) \in S$ یک ایده آل s—یکال چپ است.

(۲)— $r_R(aR)$ برای هر $a \in S$ یک ایده آل s—یکال چپ است.

(۳)— R در شرط (SQA1) صدق می کند.

اثبات : مشابه اثبات لم ۲.۲.۲ می توان آن را ثابت نمود.

قضیه ۱.۳.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—سازگار باشد و $S_\ell(R) \subseteq C(R)$. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $S = R[[x;\alpha]]$ شبه بئر اصلی راست است.

(۲) R شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد.

اثبات : با روشی مشابه اثبات قضیه ۱.۲.۲ می توان معادل بودن (۱) و (۲) را نتیجه گرفت.

چون حلقه‌های α—صلب، آبلی و α—سازگار می باشند و اتصال تعمیم یافته همان اتصال می باشد لذا نتیجه زیر برقرار می باشد:

نتیجه ۱.۳.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در اینصورت حلقه $R[[x;\alpha]]$ شبه بئر اصلی راست است اگر و تنها اگر حلقه R شبه بئر اصلی راست باشد و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال داشته باشد.

نتیجه ۲.۳.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S_\ell(R) \subseteq C(R)$. در اینصورت شرایط زیر معادلند.

(۱)— حلقه $R[[x]]$ شبه بئر اصلی راست است.

(۲)— حلقه R شبه بئر اصلی راست است و هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان آن یک اتصال تعمیم یافته دارد.

مثال زیر نشان می دهد که شرط وجود یک اتصال برای هر خانواده شمارا از عناصر خودتوان حلقه R در قضایای ۲.۲.۲ و ۱.۳.۲ قابل حذف نمی باشد.

مثال ۱.۳.۲ فرض کنیم F یک میدان باشد و برا هر عدد طبیعی n، $F_n = F$. فرض کنیم

$$R = \{(a_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n | \text{ ها از مرحله ای به بعد یکسان می باشند } a_n \}.$$

بدیهی است که R زیر حلقه‌ای از $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ می باشد. حلقه R جابجای و فون نیومن منظم[۳] می باشد. در نتیجه یک حلقه شبه بئر اصلی می باشد. اگر α تابع همانی فرض شود در اینصورت R یک حلقه α—سازگار می باشد. اما برکینمیر در مقاله [۱] نشان داد که حلقه $R[[x;\alpha]]$ شبه بئر اصلی راست نمی باشد.

---

[۳] von Neuman regular

کتاب‌نامه

[1] G.F. Birkenmeier, J. Y. Kim and J.K. Park, On quasi-Baer rings, *Contemporary Mathematics 259 (2000), 67-92.*

[2] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim and J.K. Park, Principally quasi-Baer rings, *Comm. Algebra 29(2) (2001), 639-660.*

[3] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim and J.K. Park, Polynomial extentions of Baer and quasi-Baer rings, *J. Pure Appl. Algebra 159 (2001), 25-42.*

[4] W.E. Clark, Twisted matrix units semigroup algebra, *Duke Math. J. 34 (1967), 417-424.*

[5] S. Endo, Note on PP rings, *Nagoya Math. J. 17 (1960), 167-170.*

[6] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial ore extensions of Baer and p.p.-rings, *Bull. of the Iranian Math. Soc. 29(2)(2003), 65-85.*

[7] E. Hashemi and A. Moussavi, Skew power series extensions of α-rigid p.p.-rings, *Bull. Korian Math. Soc. 41(4)(2004), 657-665.*

[8] C.Y. Hong, N.K. Kim and T.K. Kwak, Ore extensions of Baer and PP rings, *J. Pure Appl. Algebra 151 (2000), 215-226.*

[9] I. Kaplansky, Rings of operators, Benjamin, New York, 1995.

[10] Z. Liu, A note on principally quasi-Baer rings, *Comm. Algebra 30(8) (2002), 3885-3890.*

[11] C.E. Rickart, Banach algebras with an adjoint operation, *Ann. of Math. 47 (1946), 528-550.*