



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

قطر در گراف جابجایی گروه‌های متناهی

معصومه جمال آبادی

استاد راهنما

دکتر سید حیدر جعفری

شهریور ۹۴

بارالها...

از کوی تو بیرون نشود پای خیالم

نکنند فرق به حالم...

چه برانی، چه بخوانی...

چه به اوجم برسانی، چه به خالم بکشی...

نه من آنم که بر نجم، نه تو آنی که برانی...

نه من آنم که ز فیض نکست چشم پوشم

نه تو آنی که کد ارانوازی به نگاهی

در اگر باز نکرد، نروم باز به جایی

پشت دیوار نشینم چو کدابر سر راهی

کس به غمیر از تو نخواهم

چه بخوایی چه نخواهی

باز کن در که جز این خانه نیست مرآته‌ای

تقدیم به همسر

به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

و تقدیم به دختر

امید بخش جانم که آسایش او آرامش من است.

تقدیم بہ استاد عزیزم....

تو کوہ علم و دانشی

تو بہترین نگارشی

خدا کہ نیستی ولی

تو لایق سائشی

تو کوہ صبر و طاقتی

تو سبز و با تراوتی

تو نوری و تواسیہ ای

تو اوج یک عبادتی

فرشتہ نیستی، سری

استاد نہ کہ برتری

ہزار واثرہ حیدم

ولی تو خیر دیگر سی

تعمدنامه

اینجانب معصومه جمال آبادی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان قطر در گراف جابجایی گروه های متناهی، تحت راهنمایی دکتر سید حیدر جعفری متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

معصومه جمال آبادی

شهریور ۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه باشد. مرکز G ، را با $Z(G)$ نشان می‌دهیم. گراف جابجایی از یک گروه ناآبلی G که با $\Gamma(G)$ نشان داده می‌شود گراف ساده بدون جهت است که رئوس آن عناصر غیر مرکزی G هستند و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = yx$. حال این سوال مطرح است که آیا می‌توان قطری برای گراف جابجایی گروه‌های متناهی پیدا کرد که بیشتر از قطر شناخته شده برای گروه متقارن S_n ، یعنی ۵ باشد. این سوال انگیزه‌ی اصلی ما برای این پایان‌نامه است. ما در این پایان‌نامه خواهیم دید که گروه تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر از بعد ۳ روی میدان $\mathbb{Z}_3$ همبند بوده و دارای گراف جابجایی با قطر بین ۴ و ۶ هستند. گروه تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر از بعد ۲ با درایه‌های اعداد صحیح دارای گراف جابجایی با قطر دقیقاً ۳ هستند. اگر G گروه حل‌پذیر نامتناهی غیربدیهی با مرکز بدیهی باشد آنگاه $\Gamma(G)$ همبند بوده و دارای قطر حدکثر ۷ است.

کلمات کلیدی: گراف جابجایی، قطر گراف، همبند، عدد خوشه.

فهرست مطالب

۱	تعاریف و قضایای مقدماتی	۱
۲	۱.۱ مقدمه	۲
۲	۲.۱ تعاریف و قضایای لازم	۲
۱۱	۲ قطر گراف جابجایی حاصل ضرب بعضی از گروه‌ها	۱۱
۱۲	۱.۲ مقدمه	۱۲
۱۲	۲.۲ قطر گراف جابجایی حاصل ضرب بعضی از گروه‌ها	۱۲
۱۸	۳.۲ قطر گراف حاصل ضرب مرکزی بعضی از گروه‌ها	۱۸
۲۲	۴.۲ قطر گراف جابجایی $\Gamma(W)$	۲۲
۳۳	۳ قطر گراف جابجایی بعضی از گروه‌های ماتریسی	۳۳
۳۴	۱.۳ مقدمه	۳۴
۳۴	۲.۳ قطر گراف برخی گروه‌ها و حلقه‌های ماتریسی از بعد n بر $\mathbb{Z}_m$	۳۴
۴۷	۳.۳ قطر گراف جابجایی گروه $ULT(n, p)$	۴۷
۵۵	مراجع	۵۵
۵۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۵۷
۵۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۵۹

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

گراف Γ یک سه تایی مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma), \psi(\Gamma))$ است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی $V(\Gamma)$ از رأس‌ها، یک مجموعه $E(\Gamma)$ از یال‌ها و یک تابع وقوع $\psi(\Gamma)$ که به هر یال یک زوج نامرتب از رأس‌های Γ را نسبت می‌دهد. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی و $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y, xy = yx\}$ مرکز آن باشد. گراف جابجایی G ، $\Gamma(G)$ ، گرافی است که رئوس آن $G - Z(G)$ است و دو رأس در صورتی مجاورند که باهم جا به جا شوند. مفهوم گراف جابجایی^۱ برای رده‌ی وسیعی از گروه‌ها و زیرمجموعه‌های متنوعی از آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. گراف جابجایی اولین بار توسط براور^۲ و فالر^۳ [۷] در سال ۱۹۵۵ به منظور طبقه‌بندی گروه‌های ساده مورد مطالعه قرار گرفت و در سال ۲۰۰۲، سجو^۴ و سایتز^۵ [۱۷] به بررسی گراف‌های جابجایی گروه‌های ساده متناهی و گروه A_n پرداختند. ایرانمنش^۶ و جعفرزاده^۷ [۱۱] به ادامه‌ی این بررسی‌ها پرداختند و حدس آن‌ها این بود که برای هر گروه ناآبلی متناهی، یک کران بالا برای قطر در یک گراف جابجایی همبند وجود دارد. در این پایان‌نامه یک خانواده از گروه‌ها با مرکز بدیهی و قطر ۶ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲.۱ تعاریف و قضایای لازم

تعریف ۱.۲.۱. اگر $g \in G$ و n یک عدد طبیعی باشد، کوچکترین n ممکن را که حاصل g^n در گروه G عضو خنثی شود، مرتبه‌ی g می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. هر عضو با مرتبه ۲ در یک گروه را یک برگشت می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. H را یک زیرگروه نرمال G می‌نامیم هر گاه

$$\forall x \in G, \forall h \in H; x^{-1}hx \in H$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. $Z(G)$ را مرکز گروه G نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \forall y \in G\}$$

برای هر $x \in G$ ، مرکزساز x در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$$

^۱commuting graph

^۲Brauer

^۳Fowler

^۴Segev

^۵Seitz

^۶Iranmanesh

^۷Jafarzadeh

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از گروه مفروض G باشد. زیرگروه تولید شده با X را که با $\langle X \rangle$ نشان می‌دهیم اشتراک همه‌ی زیرگروه‌هایی از G می‌گیریم که حاوی X اند. به بیان عادی $\langle X \rangle$ کوچکترین زیرگروه G است که حاوی X است.

تعریف ۶.۲.۱. گروه G و مجموعه ناتهی X را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم به ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \cdot g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که

$$1. \text{ به ازای هر } x \in X \text{ داشته باشیم } x \cdot 1 = x,$$

۲. به ازای هر $g_1, g_2 \in G$ و هر $x \in X$ داشته باشیم $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$ در این صورت گوییم G بر X عمل می‌کند و $\cdot$ را عمل G بر X گوییم، برای آسانی در نوشتن به جای $x \cdot y$ از xy استفاده می‌کنیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوییم g عضو x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه اعضایی از G که هر عضو X را ثابت نگه می‌دارند را هسته عمل می‌نامیم.

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند. برای هر g از G ، با در نظر گرفتن $\varphi_g : X \rightarrow S_X$ با ضابطه $x\varphi_g = xg$ و نگاشت $\varphi : G \rightarrow S_X$ با ضابطه $g \rightarrow \varphi_g$ یک همریختی است که هسته‌ی آن با هسته عمل برابر است.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۲۷]. □

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه ناتهی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعه $\{g \in G \mid xg = x\}$ را پایدارساز x در G می‌نامیم و آن را با علامت $St_G(x)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم. گوییم $x_1 \sim x_2$ در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g ، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل، یا گاهی اوقات یک G -مدار می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده‌ی هم‌ارزی شامل x را مدار x در G می‌نامیم و آن را با علامت $orb_G(x)$ (یا مختصراً با $orb(x)$) نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فوق، $orb_G(x) = \{xg \mid g \in G\}$. در صورتی که $orb_G(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد عناصر آن را طول مدار x در G می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. عمل را متعدی گوییم در صورتی که X تنها مدار عمل باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر دو عضو x_1 و x_2 ، $x_1 g = x_2$ عضو g از G مانند وجود داشته باشد به طوری که $x_1 g = x_2$.

قضیه ۱۲.۲.۱. (قضیه‌ی مدار- پایدار ساز). فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت تناظری یک به یک بین $orb_G(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی هم‌دسته‌های راست $st(x)$ در G وجود دارد. اگر $orb_G(x)$ متناهی باشد، آنگاه

$$|G : St(x)| = |orb_G(x)|$$

برهان. رجوع شود به [۱۶، ص ۳۴]. $\square$

تعریف ۱۳.۲.۱. در تعریف ۱۰.۲.۱، اگر عمل را تزویج در نظر بگیریم، آنگاه $y \sim x$ هر گاه در G عضوی مانند g وجود داشته باشد به طوری که $y = x^g$. در این صورت اعضای x و y را مزدوج گوئیم. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک رده‌ی مزدوجی G می‌نامیم و رده‌ی هم‌ارزی شامل x را با علامت $cl_G(x)$ (یا به طور اختصار با $cl(x)$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم F یک میدان و n یک عدد طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هر یک از آن‌ها در F اند با $GL(n, F)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. مجموعه‌ی همه ماتریس‌های با دترمینال ۱ را با $SL(n, F)$ نمایش می‌دهیم و گروه خطی خاص می‌نامیم که زیرگروه نرمال از $GL(n, F)$ است.

قضیه ۱۶.۲.۱. الف) تنها دو کلاس تزویج از عناصر مرتبه‌ی ۶ در $SL(2, 3)$ موجود است و اگر g عنصری از مرتبه‌ی ۶ باشد در این صورت g و g^{-1} در دو کلاس تزویج مختلف قرار دارند. ب) تنها یک کلاس تزویج از عناصر مرتبه‌ی ۴ در $SL(2, 3)$ موجود است. ج) اگر $g \in SL(2, 3)$ دارای مرتبه‌ی ۴ یا ۶ باشد در این صورت

$$C_{SL(2,3)}(g) = \langle g \rangle.$$

برهان. رجوع شود به [۱۶]. $\square$

تعریف ۱۷.۲.۱. به عنصر g از گروه G حقیقی می‌گوئیم اگر g و g^{-1} در G مزدوج باشند.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم g عنصری از گروه G باشد در این صورت

$$C_G^*(g) = \{x \in G : x^{-1}gx = g \text{ یا } g^{-1}\}$$

را مرکز سازتوسیع یافته g در G می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد هر تابع دوسویی روی X را یک جایگشت روی X می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌ها روی X را با S_X نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. هر گاه $X = \{1, 2, \dots, n\}$ آنگاه S_X را گروه متقارن از درجه n می‌نامیم و با S_n نمایش می‌دهیم. و هر زیر گروه S_n را یک گروه جایگشتی از درجه‌ی n می‌گوئیم.

تعریف ۲.۱.۲.۱. فرض کنیم $\sigma \in S_n$. رده‌ی هم‌ارزی در X معین شده با رابطه‌ی هم‌ارزی

$$\forall a, b \in X \quad a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} ; b = \sigma^m(a)$$

مدارهای σ هستند و می‌نویسیم:

$$\text{orb}_\sigma(a) = \{\sigma^m(a) : m \in \mathbb{Z}\}$$

تعریف ۲.۲.۲.۱. جایگشت $\sigma \in S_n$ را یک دور می‌نامیم اگر دارای حداکثر یک مدار شامل بیش از یک عنصر باشد. طول یک دور تعداد عناصر در بزرگترین مدار آن است. یک دور به طول r را با $(i_1 i_2 \dots i_r)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۳.۲.۱. فرض کنیم $\alpha = (i_1 i_2 \dots i_r)$ یک دور دلخواه در S_n باشد. در این صورت به ازای هر جایگشت $\pi \in S_n$ ، خواهیم داشت: $\alpha^\pi = (i_1 \pi i_2 \pi \dots i_r \pi)$.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۱۲]. □

تعریف ۲.۴.۲.۱. برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح $n \geq 2$ ، گروه ماتریس‌های پایین مثلثی از بعد n روی $\mathbb{Z}_p$ ، که درایه‌های قطر اصلی آن ۱ هستند را با $ULT(n, p)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۵.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $|G| = mn$ که در آن m و n دو عدد طبیعی متباین‌اند. هر زیرگروه G از مرتبه‌ی m را یک زیرگروه هال می‌نامیم. به عبارت دیگر، زیرگروه H از G را زیرگروه هال گوئیم، در صورتی که $|H|$ و $|G : H|$ نسبت به هم اول باشند.

قضیه ۲.۶.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی از مرتبه‌ی mn باشد که در آن m و n دو عدد طبیعی متباین‌اند. در این صورت:

(الف) G دارای یک زیرگروه هال از مرتبه‌ی m است؛

(ب) هر دو زیرگروه هال G از مرتبه‌ی m مزدوج‌اند؛

(ج) اگر $m' | m$ و S زیرگروهی از مرتبه‌ی m' باشد آنگاه S جزء یک زیرگروه هال از مرتبه‌ی m است.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۲۷۶]. □

تعریف ۲.۷.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه نابديهی باشد و M زیرگروهی سره از G باشد M را یک زیرگروه ماکسیمال G می‌نامیم در صورتی که از $M \leq H \leq G$ نتیجه شود که $H = M$ یا $H = G$.

تعریف ۲.۸.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد گروه G را یک p -گروه می‌نامیم در صورتی که مرتبه هر عضو G توانی صحیح و نامنفی از p باشد زیرگروه H از G را یک p -زیرگروه G گوئیم در صورتی که H یک p -گروه باشد.

قضیه ۲.۹.۲.۱. هر گروه از مرتبه‌ی $p^\alpha q$ که در آن p و q دو عدد اول هستند و $\alpha > 0$ ساده نیست.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۷۸]. □

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد، هر p -زیرگروه ماکسیمال G را یک p -سیلو زیرگروه G می‌نامیم.

قضیه ۳۱.۲.۱. (سیلو). فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد که در آن $n = p^\alpha \cdot n'$ ، $\alpha \geq 1$ و p عدد اولی است که $n' \nmid p$ در این صورت:

- (الف) G حداقل یک p -زیرگروه سیلو دارد،
- (ب) هر p -زیرگروه G جزء یک p -زیرگروه سیلو G است،
- (ج) هر دو p -زیرگروه سیلو G مزدوج‌اند،
- (د) تعداد همه p -زیرگروه‌های سیلو G همیشه ۱ به پیمانه p است.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۷۲]. □

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ و $G = HK$ و $H \cap K = \{e\}$ در این صورت گوئیم حاصل ضرب مستقیم (داخلی) زیرگروه‌های H و K است و از نماد $G = H \times K$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد، هر همریختی مانند $f : G \rightarrow G$ را یک درون‌ریختی G می‌نامیم و در صورتی که f یک‌ریختی باشد آن را یک خودریختی G می‌نامیم. مجموعه‌ی همه خودریختی‌های G با عمل ترکیب توابع را گروه خودریختی‌های G می‌نامیم و آن را با $\text{Aut}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۴.۲.۱. به ازای هر x و g از G تابع $T_g : G \rightarrow G$ با ضابطه‌ی $xT_g = x^g$ را خودریختی داخلی G القا شده با g می‌نامیم. مجموعه‌ی همه خودریختی‌های داخلی G که آن را با $\text{Inn}(G)$ نشان می‌دهیم یک زیرگروه نرمال $\text{Aut}(G)$ است.

به علاوه تابع $T : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ با ضابطه‌ی $gT = T_g$ یک همریختی است که هسته‌ی آن مجموعه‌ی اعضای G است که با هر عضو G جابه‌جا می‌شود و تصویر T عبارت است از $\text{Inn}(G)$.

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض کنیم H و K دو گروه دلخواه و $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ همریختی باشد در حاصل ضرب دکارتی H با K عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, (k_1 \varphi_{h_2}) k_2)$$

مجموعه $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصل ضرب نیم مستقیم H و K با عمل φ می‌نامیم و آن را با علامت $H \rtimes_\varphi K$ نشان می‌دهیم و اصطلاحاً گوئیم گروه H بر گروه K با φ عمل می‌کند و می‌توان به جای علامت مذکور از علامت $H \ltimes K$ استفاده کرد.

لم ۳۶.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و n عدد طبیعی مفروضی باشد. هم چنین فرض کنیم $H \leq S_n$ و $\sigma \in H$. اگر قرار دهیم $K = \underbrace{G \times \cdots \times G}_n$ ، و تابع $\sigma^* : K \rightarrow K$ را با ضابطه‌ی

$$\sigma^* : (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_{1\sigma^{-1}}, \dots, x_{n\sigma^{-1}})$$

تعریف کنیم آنگاه $\sigma^* \in \text{Aut}(K)$ و تابع $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ با ضابطه‌ی $\sigma \rightarrow \sigma^*$ یک تکریختی است.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۱۹۶]. $\square$

تعریف ۳۷.۲.۱. در لم ۳۶.۲.۱ حاصل ضرب نیم مستقیم $H \times_{\varphi} K$ را حاصل ضرب حلقوی G و H می‌نامیم و آن را با علامت $G \wr H$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۸.۲.۱. فرض کنیم $G = H \times_{\varphi} K$ که در آن H و K دو گروه و $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ یک همریختی است در این صورت G زیرگروه نرمالی مانند N و زیرگروهی مانند M دارد که $M \cong H$ و $N \cong K$ به طوری که $G = MN$ و $M \cap N = 1$.

برهان. کافی است M و N را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$M = \{(h, 1) | h \in H\}, \quad N = \{(1, k) | k \in K\}$$

$\square$

تعریف ۳۹.۲.۱. اگر H و K دو زیرگروه از گروه G باشند زیرگروه جابه‌جاگر H و K که با $[H, K]$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[H, K] = \langle [h, k] = h^{-1}k^{-1}hk | h \in H, k \in K \rangle$$

لم ۴۰.۲.۱. اگر $H, K \leq G$ آنگاه $HK \leq G$ اگر و تنها اگر $HK = KH$. به علاوه اگر $HK \leq G$ آنگاه $\langle H, K \rangle = HK$.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۴]. $\square$

لم ۴۱.۲.۱. فرض کنیم x و y عناصری از گروه G باشند. با در نظر گرفتن هم‌دسته‌هایی از $Z(G)$ برای هر $g \in xZ(G)$ و $h \in yZ(G)$ ، اگر $x \sim y$ آنگاه $g \sim h$.

برهان. رجوع شود به [۲۰]. $\square$

تعریف ۴۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و $G_1, G_2, \dots, G_n$ زیرگروه‌هایی از G باشند گروه G را یک حاصل ضرب مرکزی (داخلی) $G_1, G_2, \dots, G_n$ گوئیم در صورتی که

$$G = G_1 G_2 \cdots G_n \quad (\text{الف})$$

(ب) به ازای هر i, j که $1 \leq i \leq j \leq n$ ، $[G_i, G_j] = 1$.

قضیه ۴۳.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و $Z(G)$ مرکز آن باشد اگر $\frac{G}{Z(G)}$ دوری باشد آنگاه G آبلی است.

برهان. رجوع شود به [۱۲]. □

تعریف ۴۴.۲.۱. گروه G را حل پذیر^۹ می نامیم در صورتی که یک سری زیر نرمال مانند $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_r = G$ داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ گروه $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ آبلی باشد. اگر G حل پذیر باشد طول کوتاهترین سری با خاصیت مذکور را طول حل پذیری G می نامیم و آن را با $l(G)$ نشان می دهیم. گروه G را حل ناپذیر گوئیم هر گاه حل پذیر نباشد.

قضیه ۴۵.۲.۱. حاصل ضرب نیم مستقیم هر دو گروه حل پذیر، حل پذیر است.

برهان. فرض کنیم H و K دو گروه حل پذیر باشند و $G = H \rtimes K$. بنابر قضیه ۳۸.۲.۱، G زیرگروه نرمالی مانند N و زیرگروهی مانند M دارد به طوری که $M \cong H$ ، $N \cong K$ و $G/N \cong M$. حال چون G/N و N هر دو حل پذیرند، G نیز چنین است. □

تعریف ۴۶.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G,$$

را یک سری مرکزی G گوئیم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\frac{G}{G_{i-1}}\right).$$

تعریف ۴۷.۲.۱. گروه G را پوچ توان می نامیم در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را ردهی پوچ توانی G گوئیم و آن را با $c(G)$ نشان می دهیم.

قضیه ۴۸.۲.۱. فرض کنیم G یک p -گروه متناهی باشد، و $N \triangleleft G$. در این صورت، اگر $1 \neq N \cap Z(G)$ آنگاه $1 \neq N \cap Z(G)$.

برهان. رجوع شود به [۱، ص ۷۱]. □

قضیه ۴۹.۲.۱. هر p -گروه متناهی یک گروه پوچ توان است.

برهان. فرض کنیم G یک p -گروه متناهی باشد. اثبات به استقرا نسبت به $|G|$ است. اگر $|G| = 1$ ، حکم به وضوح برقرار است. فرض کنیم $1 \neq G$. بنابر ۴۸.۲.۱، داریم $1 \neq Z(G)$ و در نتیجه بنابر فرض استقرا، $G/Z(G)$ دارای یک سری مرکزی مانند

$$1 = \frac{G_0}{Z(G)} \leq \frac{G_1}{Z(G)} \leq \dots \leq \frac{G_r}{Z(G)} = \frac{G}{Z(G)}$$

^۹soluble

است. بنابراین به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ،

$$\frac{[G, G_i]Z(G)}{Z(G)} = \left[\frac{G}{Z(G)}, \frac{G_i}{Z(G)} \right] \leq \frac{G_{i-1}}{Z(G)}$$

و از آن جا $[G, G_i] \leq G_{i-1}$ ، و در نتیجه

$$1 \leq Z(G) = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

یک سری مرکزی برای G است.

□

قضیه ۵۰.۲.۱. فرض کنیم p و q اعداد اول متمایزی باشند و α عددی طبیعی باشد. در این صورت هر گروه از مرتبه‌های $p^\alpha q$ ، p^α حل پذیر است.

برهان. چون هر p -گروه متناهی پوچ توان است، پس حل پذیر است. بنابراین هر گروه از مرتبه p^α حل پذیر است. فرض کنیم G از حیث مرتبه کوچکترین گروهی باشد که مرتبه آن به صورت $p^m q$ است ولی G حل پذیر نیست (m عددی طبیعی است) بر طبق قضیه ۲۹.۲.۱، این گروه ساده نیست بنابراین زیرگروه نرمالی مانند N دارد که $1 \neq N \neq G$ و به موجب تعریف G واضح است که N و G/N هر دو حل پذیرند بنابراین G حل پذیر است که یک تناقض است.

□

توجه: در این پایان نامه گراف‌ها را ساده و بدون جهت در نظر می‌گیریم. برای هر گراف دلخواه Γ مجموعه‌ی رئوس و یال‌های Γ را به ترتیب با $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵۱.۲.۱. یک یال از یک رأس به خودش را طوقه می‌نامیم و اگر بین دو رأس بیش از یک یال موجود باشد، آن یال‌ها را یال‌های چندگانه می‌نامیم.

تعریف ۵۲.۲.۱. یک گراف ساده است اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال نباشد.

تعریف ۵۳.۲.۱. دو رأس v, w از گراف Γ را مجاور گوئیم هر گاه یالی بین آن دو وجود داشته باشد.

تعریف ۵۴.۲.۱. دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ که جمله‌های آن به طور متناوب رأس‌ها و یال‌ها هستند را یک مسیر گوئیم هر گاه یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ و رأس‌های $v_0, v_1, \dots, v_k$ متمایز باشند که برای $1 \leq i \leq k$ ، v_{i-1} و v_i دو انتهای e_i هستند. رأس‌های v_0 و v_k را به ترتیب ابتدا و انتهای W ، و $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ را رأس‌های داخلی آن می‌نامیم. عدد صحیح k را طول W می‌نامیم و یک مسیر به طول k را با P_k نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵۵.۲.۱. گراف‌های Γ_1 و Γ_2 را یکریخت می‌نامیم (و می‌نویسیم $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$)، اگر نگاشت‌های دوسویی $\theta : V(\Gamma_1) \rightarrow V(\Gamma_2)$ و $\varphi : E(\Gamma_1) \rightarrow E(\Gamma_2)$ وجود داشته باشد، به طوری که داشته باشیم $e = uv$ ، اگر و تنها اگر $\varphi(e) = \theta(u)\theta(v)$ که یال e راس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است.

تعریف ۵۶.۲.۱. گراف Γ را همبند گوئیم هر گاه بین هر دو رأس دلخواه u و v از Γ مسیری با رئوس انتهایی u و v در Γ موجود باشد در غیر این صورت Γ را ناهمبند می‌نامیم.

تعریف ۵۷.۲.۱. اگر بین u و v در Γ مسیری وجود داشته باشد فاصله بین u و v در Γ را که با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم، طول کوتاهترین مسیر بین u و v در Γ است و اگر چنین مسیری موجود نباشد فاصله u و v را ∞ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵۸.۲.۱. قطر گراف Γ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{diam}(\Gamma) = \sup\{d(u, v) : u, v \text{ رأس‌هایی در } \Gamma \text{ هستند}\}$$

تعریف ۵۹.۲.۱. فرض کنیم V' ، یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $V(\Gamma)$ باشد. زیرگرافی از Γ که مجموعه‌ی رأس‌های آن V' و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر مجموعه‌ی همه‌ی یال‌هایی از Γ باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است زیرگراف القا شده توسط V' نامیده می‌شود و با $\Gamma(V')$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۶۰.۲.۱. گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند را گراف کامل گوئیم. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۶۱.۲.۱. فرض کنیم Γ یک گراف باشد زیرمجموعه $\wedge$ از رئوس Γ را یک خوشه گوئیم هر گاه زیرگراف القایی توسط $\wedge$ یک گراف کامل باشد و مجموعه‌ی $\wedge$ ، را یک مجموعه‌ی کامل می‌نامیم. سوپریمم اندازه خوشه‌ها در Γ ، را عدد خوشه‌ای Γ می‌نامیم و با $\omega(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶۲.۲.۱. در یک گراف، مسیری که دارای طول مثبت بوده و مبدأ و انتهای آن یکی باشد را یک دور گوئیم و دوری به طول k را با C_k نمایش می‌دهیم.

فصل ۲

قطر گراف جابجایی حاصل ضرب بعضی از
گروه‌ها

۱.۲ مقدمه

یکی از کاربردهای خاص حاصل ضرب نیم مستقیم گروه‌ها، حاصل ضرب حلقوی دو گروه است که در ساختن مثال‌هایی از گروه‌ها و نیز بیان p -زیرگروه‌های متناهی بسیار مفید است. این فصل شامل سه بخش است که در بخش اول به معرفی گراف جابجایی $A \wr S_n$ یعنی حاصل ضرب حلقوی گروه متقارن S_n و گروه متناهی زوج مرتبه‌ی A می‌پردازیم و قطر آن را بدست می‌آوریم. بخش دوم شامل معرفی گراف جابجایی حاصل ضرب مرکزی زیرگروه‌هایی از گروه متناهی G است و قطر آن‌ها را بدست می‌آوریم سپس به معرفی گراف جابجایی گروه‌های خارج قسمتی پرداخته و همبندی آن‌ها را بررسی کرده و عدد خوشه^۱ در گراف G را بدست می‌آوریم. و در بخش سوم یک خانواده متناهی از گروه‌ها با مرکز بدیهی خواهیم ساخت که این گروه‌ها دارای گراف جابجایی همبند با قطر ۶ هستند.

۲.۲ قطر گراف جابجایی حاصل ضرب بعضی از گروه‌ها

در این بخش گراف جابجایی $A \wr S_n$ را برای اعداد صحیح مثبت $n \geq 2$ و گروه متناهی A از مرتبه زوج با مرکز بدیهی در نظر می‌گیریم به طوری که به ازای هر عدد اول $p \neq 2$ ، که شمارنده‌ی $|A|$ است تعداد کلاس‌های مزدوج شامل عناصر از مرتبه‌ی p در A کمتر از n باشد.

لم ۱.۲.۲. فرض کنیم A گروه دلخواه با مرتبه‌ی زوج باشد، در این صورت A دارای حداقل یک برگشت است.

برهان. فرض کنیم $T = \{x \in A : x^2 = 1\}$ و $D = \{x \in G : x^2 \neq 1\}$ ، در این صورت T و D زیرمجموعه‌هایی از A هستند به طوری که $A = T \cup D$ و $T \cap D = \emptyset$. حال اعضای D را می‌شماریم. ممکن است $D = \emptyset$ در این حالت $|D| = 0$. در غیر این صورت $t_1 \in D$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت $t_1 \neq t_1^{-1} \in D$. اگر $D = \{t_1, t_1^{-1}\}$. آنگاه $|D| = 2$. در غیر این صورت عضو دیگر $t_2 \in D$ را انتخاب می‌کنیم. پس $t_2 \neq t_2^{-1} \in D$ و هم چنین $t_1 \neq t_2^{-1}$ و $t_2^{-1} \neq t_1^{-1}$. اگر $D = \{t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-1}\}$ آنگاه $|D| = 4$. در غیر این صورت این عمل را ادامه می‌دهیم تا این که تمام اعضای D مورد بحث واقع شوند در هر حالت مشاهده می‌کنیم که $|D|$ زوج است. از آن جایی که $|A|$ نیز زوج است از $|A| = |T| + |D|$ ، نتیجه می‌گیریم که $|T|$ زوج است. اما $T \neq \emptyset$ ، زیرا $1 \in T$. از این رو $|T| \geq 2$. بنابراین عضوی چون $x \in T$ وجود دارد که $x \neq 1$. یک چنین عضو T ، یک برگشت است. $\square$

لم ۲.۲.۲. فرض کنیم $L = H \rtimes K$ ، اگر به ازای هر $k \in K, h \in H, y \in L$ داشته باشیم $y = hk$ آنگاه به ازای هر عدد صحیح m داریم $y^m = h'k^m$.

^۱clique

برهان. در رابطه‌ی $L = H \rtimes K$ از این که $H \triangleleft L$ داریم $\frac{L}{H} \cong K$ ، بنابراین $yH = kH$ در این صورت به ازای هر عدد صحیح m داریم $y^m H = k^m H$ در نتیجه $h' \in H$ وجود دارد که $y^m = h' k^m$. $\square$

لم ۳.۲.۲. در ضرب حلقوی $Awr S_n$ هر عنصری که دارای مرتبه‌ی اول p است با بعضی از برگشت‌ها جابه‌جا می‌شود.

برهان. قرار می‌دهیم $G := Awr S_n$ و فرض کنیم $g = (a_1, a_2, \dots, a_n)\pi$ که در آن هر $a_i \in A$ و $\pi \in S_n$ است، عنصری از G و دارای مرتبه عدد اول p باشد. حال برگشت‌های جابه‌جا شده با g را در دو مورد $\pi = 1$ و $\pi \neq 1$ بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $\pi = 1$ و $a_j = 1$ به طوری که $j \neq i$. قرار می‌دهیم $h := (c_1, c_2, \dots, c_n)$ به طوری که به ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم $c_j = x$ و $c_i = e$ و برگشتی متعلق به A باشد. در این صورت $h := (e_1, e_2, \dots, x, e_{j+1}, \dots, e_n)$ یک برگشت جابه‌جا شده با g می‌باشد چون

$$\begin{aligned} hg &= (e_1, e_2, \dots, x, e_{j+1}, \dots, e_n)(a_1, a_2, \dots, 1, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= (e_1 a_1, e_2 a_2, \dots, x, e_{j+1} a_{j+1}, \dots, e_n a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, x, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, 1, a_{j+1}, \dots, a_n)(e_1, e_2, \dots, x, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= gh \end{aligned}$$

حال فرض کنیم برای هر j داشته باشیم $a_j \neq 1$. از آنجایی که g دارای مرتبه عدد اول p است، پس هر a_i دارای مرتبه p است. با این فرض که a_i ‌ها حداکثر شامل $n-1$ کلاس مزدوج در A هستند بنابراین $s \neq t$ وجود دارد که a_s با a_t مزدوج است. فرض کنیم $s < t$ و $x \in A$ طوری باشد که $a_t = a_s^x$ ، بنابراین $a_s = a_t x^{-1}$. قرار می‌دهیم $T = (s\ t) \in S_n$ و $h := (c_1, c_2, \dots, c_n)T$ که در آن $c_s = x$ و $c_t = x^{-1}$ و برای $i \neq t, s$ $c_i = e$. در نتیجه h یک برگشت است و

$$\begin{aligned}
gh &= (a_1, a_2, \dots, a_s, \dots, a_t, \dots, a_n)(e_1, e_2, \dots, x, e_{s+1}, \dots, x^{-1}, e_{t+1}, \dots, e_n)\mathcal{T} \\
&= (a_1 e_1, a_2 e_2, \dots, a_s x, \dots, a_t x^{-1}, \dots, a_n e_n)\mathcal{T} \\
&= (a_1, a_2, \dots, a_t^{x^{-1}} x, \dots, a_s^x x^{-1}, \dots, a_n)\mathcal{T} \\
&= (a_1, a_2, \dots, x a_t x^{-1} x, \dots, x^{-1} a_s x x^{-1}, \dots, a_n)\mathcal{T} \\
&= (a_1, a_2, \dots, x a_t, \dots, x^{-1} a_s, \dots, a_n)\mathcal{T} \\
&= (e_1, e_2, \dots, x, \dots, x^{-1}, \dots, e_n)\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_s, \dots, a_t, \dots, a_n) \\
&= hg
\end{aligned}$$

پس h با g جابجا می‌شود. حال $1 \neq \pi$ را بررسی می‌کنیم. بنابر [لم ۲.۲.۲](#)، داریم $1 = g^p = ()^p$ پس

$$o(\pi) | p \implies o(\pi) = 1 \text{ یا } o(\pi) = p$$

و چون طبق فرض $1 \neq \pi$ پس $o(\pi) = p$. حال حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن π یک p -دور به صورت $\mathcal{T} = (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ p)$ باشد در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
1 &= g^p = ((a_1, a_2, \dots, a_n)\mathcal{T})^p \\
&= \underbrace{((a_1, a_2, \dots, a_n)\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)\mathcal{T} \dots (a_1, a_2, \dots, a_n)\mathcal{T})}_{p \text{ مرتبه}} \\
&= (a_1 a_2 \dots a_p, a_2 a_3 \dots a_p a_1, \dots, a_p a_1 \dots a_{p-1}, (a_{p+1})^p, \dots, a_n^p) \pi^p
\end{aligned}$$

با فرض $1 = (a_1 a_2 \dots a_p)$.

حال فرض کنیم $x \in A$ یک برگشت باشد، قرار می‌دهیم

$$h := (x, x^{a_1}, x^{a_1 a_2}, \dots, x^{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}, 1, \dots, 1)$$

چون x یک برگشت است بنابراین برای تمام i ها $x^{a_1 a_2 \dots a_i}$ یک برگشت است در نتیجه h یک برگشت می‌باشد که با g جابجا می‌شود زیرا

$$\begin{aligned}
gh &= (a_1, a_2, \dots, a_n)\pi(x, x^{a_1}, x^{a_1 a_2}, \dots, x^{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}, 1, \dots, 1) \\
&= (a_1, a_2, \dots, a_n)(1 \ 2 \ \dots \ p)(x, x^{a_1}, x^{a_1 a_2}, \dots, x^{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}, 1, \dots, 1) \\
&= (a_1 x^{a_1}, a_2 x^{a_1 a_2}, \dots, a_p x, a_{p+1}, \dots, a_n)\pi
\end{aligned}$$

چون $۱ = (a_1 a_2 \cdots a_p)$ ،

$$\begin{aligned}
 &= (a_1 x^{a_1}, a_2 x^{a_1 a_2}, \dots, a_p x^{a_1 a_2 \cdots a_p}, a_{p+1}, \dots, a_n) \pi \\
 &= (a_1 a_1^{-1} x a_1, a_2 a_2^{-1} a_1^{-1} x a_1 a_2, \dots, a_p a_p^{-1} a_{p-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} x a_1 a_2 \cdots a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \pi \\
 &= (x a_1, x^{a_1} a_2, \dots, x^{a_1 a_2 \cdots a_{p-1}}, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \pi \\
 &= (x, x^{a_1}, x^{a_1 a_2}, \dots, x^{a_1 a_2 \cdots a_p}, 1, \dots, 1) (a_1, a_2, \dots, a_n) \pi \\
 &= hg
 \end{aligned}$$

□

لم ۴.۲.۲. اگر $H \leq S_n$ آنگاه گروه $Awr H$ شامل بیش از یک کلاس از برگشت‌هاست.

برهان. فرض کنیم g عنصری از $Awr H$ باشد، به طوری که $g = (x_1, x_2, \dots, x_n) \pi$ به ازای برگشت $x \in A$ داریم:

$$\begin{aligned}
 (x, 1, \dots, 1)^g &= (x, 1, \dots, 1)^{(x_1, \dots, x_n) \pi} = (x^{x_1}, 1^{x_2}, \dots, 1^{x_n}) \pi \\
 &= (x^{x_1}, 1, \dots, 1)^\pi = (y_1, \dots, y_n)
 \end{aligned}$$

که با توجه تعریف ضرب حلقوی، فقط یک عامل از y_i ها نابديهی است لذا با عنصر $(x, x, 1, \dots, 1)$ برابر نیست.

□

لم ۵.۲.۲. اگر A یک گروه غیر بدیهی با مرکز بدیهی باشد آنگاه برای هر زیرگروه H از S_n ، $Awr H$ دارای مرکز بدیهی است.

برهان. فرض کنیم $x := (a_1, a_2, \dots, a_n) \pi$ عضوی از مرکز $Awr H$ باشد. اگر $\pi \neq e_H$ آنگاه چند اندیس مانند j وجود دارد که π آن‌ها را جابه جا می‌کند یعنی $j^\pi \neq j$. فرض کنیم $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A^n$ که y_j تنها درایه غیر بدیهی از y باشد. بنابراین $y = (1, 1, \dots, y_j, 1, \dots, 1)$ لذا y_j تنها عضو غیر بدیهی از y^x واقع در مختصات داده شده توسط $j^\pi \neq j$ نیز می‌باشد. حال

$$y^x = y^{(a_1, a_2, \dots, a_n) \pi} = (1^{a_1}, 1^{a_2}, \dots, y_j^{a_j}, 1^{a_{j+1}}, \dots, 1^{a_n})^\pi$$

بنابراین درایه y^x و y برابر نیستند که تناقض است پس $\pi = 1$. لذا $x \in Z(A)$ حال چون A دارای مرکز بدیهی است پس $x = 1$ لذا $Awr H$ دارای مرکز بدیهی است.

□

لم ۶.۲.۲. فرض کنیم g_i ها نماینده‌ی عناصری از کلاس‌های تزویج گروه G بوده و برگشت نباشند. اگر (x, y) زوج مرتبی از برگشت‌ها باشد به طوری که $g_i = xy$ ، آنگاه برگشت‌های x و y ، g_i را به g_i^{-1} تبدیل می‌کنند.

برهان. چون x و y برگشت‌هایی از گروه G هستند بنابراین داریم $x = x^{-1}$ و $y = y^{-1}$ در نتیجه داریم

$$g_i^{-1} = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx = x^{-1}(xy)x = x^{-1}g_ix$$

□

قضیه ۷.۲.۲. الف) اگر عنصر g از گروه G غیر حقیقی، به علاوه یک برگشت باشد آنگاه $C_G^*(g) = C_G(g)$.

ب) اگر g حقیقی و از مرتبه‌ای بزرگتر از ۲ باشد آنگاه مرتبه $C_G^*(g)$ به صورت $2n(g)$ است.

برهان. الف) فرض کنیم عنصر g غیر حقیقی، به علاوه یک برگشت باشد در این صورت داریم $g = g^{-1}$ ، بنابراین بنا بر تعریف ۱۸.۲.۱

$$\begin{aligned} C_G^*(g) &= \{x \in G : x^{-1}gx = g \text{ یا } g^{-1}\} \\ &= \{x \in G : x^{-1}gx = g\} \\ &= C_G(g) \end{aligned}$$

ب) فرض کنیم g حقیقی و از مرتبه‌ای بزرگتر از ۲ باشد، در این صورت $g \neq g^{-1}$ و عضوی مانند $x \in G$ وجود دارد، به طوری که $g^x = g^{-1}$ بنابراین $x \in C_G^*(g) \setminus C_G(g)$. حال فرض می‌کنیم x' عضو دلخواهی از $C_G^*(g) \setminus C_G(g)$ باشد. در این صورت $g^{x'} = g^{-1} = g^x$ و در نتیجه $x'x^{-1} \in C_G(g)$ ، از این رو $x' \in C_G(g)x$ بنابراین $C_G^*(g) = C_G(g) \cup C_G(g)x$ و در نتیجه $|C_G^*(g) : C_G(g)| = 2$. پس اگر مرتبه‌ی $C_G(g)$ را $n(g)$ در نظر بگیریم آنگاه مرتبه‌ی $C_G^*(g)$ ، $2n(g)$ خواهد شد.

□

قضیه ۸.۲.۲. اگر برگشت‌های x و y از گروه G مزدوج نباشند آنگاه برگشتی مانند J در G وجود دارد که با x و y جابه‌جا می‌شود.

برهان. مجموعه $g = xy$ را در نظر می‌گیریم. در برهان ۶.۲.۲ دیدیم که هر دو برگشت x و y را به g^{-1} تبدیل می‌کنند بنابراین g و g^{-1} در G مزدوجند، پس طبق تعریف‌های ۱۷.۲.۱ و ۱۸.۲.۱، g حقیقی می‌باشد و x و y عناصری از گروه $C^*(g)$ می‌باشند. اگر $g = 1$ آنگاه از رابطه $g = xy$ خواهیم داشت $x = y$ که تناقض است.

حال اگر g دارای مرتبه ۲ باشد آنگاه g یک برگشت است که بنا بر قضیه ۷.۲.۲ با x و y جابه‌جا می‌شود پس در این صورت حکم ثابت است. حال فرض کنیم g مرتبه‌ای بزرگتر از ۲ دارد پس طبق قضیه ۷.۲.۲، $C^*(g)$ دارای مرتبه $2n(g)$ می‌باشد از طرفی داشتیم اگر $|G| = 2n$ و n فرد باشد آنگاه G زیرگروهی از اندیس ۲ دارد بنابراین اگر $n(g)$ فرد باشد آنگاه $\{y\}$ و $\{x\}$ زیرگروه‌های ۲-سیلو از $C^*(g)$ می‌باشند از طرفی طبق قضیه سیلوها هر دو p -زیرگروه سیلوی G مزدوجند بنابراین

x و y در $C^*(g)$ مزدوج هستند و این خلاف فرض است پس باید n زوج باشد بنابراین مرتبه‌ی $C(g)$ یعنی $n(g)$ نیز باید زوج باشد. فرض کنیم B^* یک زیرگروه ۲-سیلو از $C^*(g)$ شامل x باشد و طبق فرض چون x, g را به g^{-1} تبدیل می‌کند پس $x \notin C(g)$ بنابراین در $B = B^* \cap C(g)$ ، چون B^* دارای اندیس ۲ و $C(g)$ دارای مرتبه‌ی زوج است بنابراین B باید دارای اندیس ۲ در B^* باشد و B یک زیرگروه ۲-سیلو از $C(g)$ و مرتبه آن حداقل ۲ است و چون B در B^* نرمال است می‌توانیم یک زیرگروه نرمال مانند $\{J\}$ از مرتبه ۲ در B^* پیدا کنیم به طوری که $\{J\} \subseteq B$ پس J یک برگشت هست که با x و g جابه‌جا می‌شود از طرفی طبق فرض $g = xy$ بنابراین $y = x^{-1}g = xg$ و J با y نیز جابه‌جا می‌شود یعنی $x \sim J \sim y$ و $d(x, y) \leq 2$.

□

قضیه ۹.۲.۲. اگر G شامل بیش از یک کلاس از برگشت‌ها باشد آنگاه فاصله هر دو برگشت در G حداکثر ۳ است.

برهان. بنابر قضیه ۸.۲.۲، اگر x و z دو برگشت از کلاس‌های مختلف باشند، آنگاه $d(x, z) \leq 2$. اگر x و z در یک کلاس تزویج باشند آنگاه بنابر قضیه ۸.۲.۲، x با برگشتی مانند y از کلاس دیگر جابه‌جا می‌شود. حال چون z و y در دو کلاس تزویج متمایز قرار دارند پس $d(y, z) \leq 2$. از طرفی $d(x, y) = 1$ پس

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\leq 1 + 2 = 3$$

□

لم ۱۰.۲.۲. گراف جابجایی $Awr S_n$ همبند و دارای قطر حداکثر ۷ است.

برهان. فرض کنیم $g, h \in G \setminus Z(G)$ دلخواه و عناصر $a \in C_G(g)$ و $b \in C_G(h)$ دارای مرتبه اول باشند. بنابر لم ۳.۲.۲، برگشت‌هایی مانند $x, y \in G$ وجود دارند که $a \sim x$ و $b \sim y$. از طرفی بنابر لم ۴.۲.۲، G شامل دو کلاس از برگشت‌ها است. و طبق لم ۵.۲.۲، G دارای مرکز بدیهی است و هم چنین بنابر قضیه ۹.۲.۲، فاصله بین برگشت‌های x, y در $\Gamma(G)$ حداکثر ۳ است بنابراین

$$d(g, h) = d(g, a) + d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) + d(b, h) \leq 7$$

□

۳.۲ قطر گراف حاصل ضرب مرکزی بعضی از گروه‌ها

زیرگروه H از گروه G را در نظر می‌گیریم. برای نوشتن تمام عناصر غیرمرکزی G که مشمول در زیرگروه H هستند از نماد $\overline{H}$ استفاده می‌کنیم یعنی

$$\overline{H} := \bigcup_{hZ(G) \in H \setminus Z(G)} hZ(G).$$

در این بخش ابتدا قطر در گراف جابجایی حاصل ضرب مرکزی زیرگروه‌هایی از گروه متناهی G و هم چنین عدد خوشه در گراف جابجایی گروه‌هایی با مرکز غیربدیهی را بدست می‌آوریم.

لم ۱.۳.۲. فرض کنیم H و K دو زیرگروه از گروه متناهی و ناآبلی G باشند. اگر G حاصل ضرب مرکزی H و K باشد آنگاه $Z(H \times K) = Z(H) \times Z(K)$.

برهان. به ازای هر $h \in H$ و $k \in K$

$$\begin{aligned} Z(H \times K) &= \{(h, k) | \forall (x, y) \in H \times K : (h, k)(x, y) = (x, y)(h, k)\} \\ &= \{(h, k) | \forall (x, y) \in H \times K : (hx, ky) = (ky, hx)\} \\ &= \{h \in H | \forall x \in H, hx = xh\} \times \{k \in K | \forall y \in K : ky = yk\} \\ &= Z(H) \times Z(K) \end{aligned}$$

□

لم ۲.۳.۲. فرض کنیم G حاصل ضرب مرکزی دو زیرگروه H و K باشد در این صورت الف) اگر H و K ناآبلی باشند آنگاه

$$\text{diam}(\Gamma(G)) \leq \min\{3, \text{diam}(\Gamma(H)), \text{diam}(\Gamma(K))\}$$

ب) اگر K آبلی باشد آنگاه

$$\text{diam}(\Gamma(G)) = \text{diam}(\Gamma(H))$$

برهان. الف) فرض کنیم $g_1, g_2 \in G \setminus Z(G)$. پس عناصر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$ وجود دارند به طوری که $g_1 = h_1 k_1$ و $g_2 = h_2 k_2$ و چون $g_1, g_2 \notin Z(G)$ و $Z(G) = Z(H) \times Z(K)$ باید حداقل یکی از h_1 و k_1 و حداقل یکی از h_2 و k_2 در مرکز H یا K مربوطه نباشد بنابراین در مرکز G نیز قرار نخواهد گرفت. بدون کم شدن از کلیت مسأله سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم هیچ یک از h_1 و h_2 و k_1 یا k_2 مرکزی نباشند بنابراین داریم:

$$g_1 = h_1 k_1 \sim h_1 \sim k_2 \sim h_2 k_2 = g_2$$

یک مسیر از اجزاء غیرمرکزی به طول ۳ در $\Gamma(G)$ از g_1 به g_2 است. به علاوه اگر $diam(\Gamma(H)) = 2$ آنگاه $x \in H - Z(H)$ وجود دارد به طوری که $h_1 \sim x \sim h_2$. بنابراین $g_1 \sim x \sim g_2$ یک مسیر به طول ۲ بین g_1 و g_2 در $\Gamma(G)$ می‌باشد. به طور مشابه اگر $diam\Gamma(K) = 2$ آنگاه می‌توانیم مسیری به طول ۲ بین g_1 و g_2 ایجاد کنیم.

حالت دوم: h_1 مرکزی و h_2 مرکزی نیست پس $g_1 = h_1 k_1 \sim h_2 \sim h_2 k_2 = g_2$ یک مسیر از اجزاء غیرمرکزی به طول ۲ می‌باشد.

حالت سوم: فرض کنیم h_1 و h_2 مرکزی هستند. چون H غیرآبلی است یک عنصر غیر مرکزی از H مانند h' وجود دارد بنابراین $g_1 = h_1 k_1 \sim h' \sim h_2 k_2 = g_2$ ، مسیری به طول ۲ می‌باشد. در نتیجه در تمام حالات ممکن یا یک مسیر به طول حداکثر ۳ وجود دارد و یا اگر یکی از $\Gamma(H)$ یا $\Gamma(K)$ دارای قطر ۲ باشد آنگاه یک مسیر به طول حداکثر ۲ بین g_1 و g_2 در $\Gamma(G)$ وجود دارد. بنابراین $\Gamma(G)$ همبند است و

$$diam(\Gamma(G)) \leq \min\{3, diam(\Gamma(H)), diam(\Gamma(K))\}$$

ب) چون g_1 و g_2 غیرمرکزی هستند بنابراین h_1 و h_2 نیز غیرمرکزی می‌باشند یعنی $h_1, h_2 \in H - Z(H)$. فرض کنیم $\Gamma(H)$ همبند باشد بنابراین مسیری مانند $h_1 \sim x_1 \sim \dots \sim x_{d-1} \sim h_2$ وجود دارد به طوری که $x_i \in H - Z(H)$ و $d \leq diam\Gamma(H)$. پس $g_1 \sim x_1 \sim \dots \sim x_{d-1} \sim g_2$ یک مسیر به طول حداکثر d از g_1 به g_2 در $\Gamma(G)$ می‌باشد. بنابراین

$$diam\Gamma(G) \leq diam\Gamma(H) \quad (۱.۲)$$

برعکس فرض کنیم h_1 و h_2 دارای فاصله d در $\Gamma(H)$ باشند و $b_i \in K, a_i \in H$ در آن $g_1 = h_1 k_1 \sim a_1 b_1 \sim a_2 b_2 \sim \dots \sim a_{l-1} b_{l-1} \sim g_2 = h_2 k_2$ مسیری در گراف G باشد. چون هر $a_i b_i$ در G غیرمرکزی است هر a_i نیز در H غیرمرکزی است. هم چنین $h_1 \sim a_1 \sim a_2 \dots \sim a_{l-1} \sim h_2$ یک مسیر در $\Gamma(H)$ به طول l است از این رو

$$l \geq d$$

بنابراین

$$diam\Gamma(H) \leq diam\Gamma(G) \quad (۲.۲)$$

از رابطه‌های ۱.۲ و ۲.۲، داریم:

$$diam\Gamma(H) = diam\Gamma(G)$$

□

قضیه ۳.۳.۲. اگر $G' \leq Z(G)$ و $|G'| < |Z(G)|$ آنگاه $diam(\Gamma(G)) = 2$.

برهان. فرض کنیم $a, b \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$ به طوری که a و b جابه‌جا نشوند. قرار می‌دهیم $X := C_G(a) \cap C_G(b)$. اگر نشان دهیم $|X| > |\mathcal{Z}(G)|$ حکم ثابت می‌شود زیرا اگر $x \in X \setminus \mathcal{Z}(G)$ آنگاه x یک عنصر غیرمرکزی بوده که $a \sim x \sim b$ مسیری به طول ۲ از a به b در گراف $\Gamma(G)$ است. برای هر $g \in G$ نگاشت $\phi_g : G \rightarrow G'$ را با ضابطه $\phi_g(y) = [g, y]$ در نظر می‌گیریم. برای هر $h, k \in G$ داریم:

$$\begin{aligned}\phi_g(hk) &= [g, hk] = g^{-1}(hk)^{-1}ghk = g^{-1}k^{-1}h^{-1}ghk \\ &= g^{-1}k^{-1}gg^{-1}h^{-1}ghk = g^{-1}k^{-1}g[g, h]k\end{aligned}$$

بنابراین طبق فرض $[g, h] \in G' \leq \mathcal{Z}(G)$ در نتیجه $\phi_g(h)\phi_g(k) = [g, h][g, k] = \phi_g(hk)$. بنابراین ϕ_g یک همریختی است و

$$\ker(\phi_g) = \{y \in G \mid [g, y] = 1\} = C_G(g)$$

با استفاده از قضیه اول همریختی

$$\frac{G}{\ker(\phi_g)} \cong \phi_g(G) \leq G' \leq \mathcal{Z}(G)$$

بنابراین

$$\frac{|G|}{|C_G(g)|} \leq |G'| \leq |\mathcal{Z}(G)|$$

لذا برای هر $g \in G$

$$\frac{|G|}{|\mathcal{Z}(G)|} \leq |C_G(g)|$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$|\mathcal{Z}(G)|^3 < |G|$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{|\mathcal{Z}(G)|^3}{|\mathcal{Z}(G)|} &< \frac{|G|}{|\mathcal{Z}(G)|} \leq |C_G(g)| \\ \Rightarrow |\mathcal{Z}(G)|^2 &\leq |C_G(g)|\end{aligned}\quad (3.2)$$

با در نظر گرفتن همریختی $\phi_b : G \rightarrow G'$ ، فرض می‌کنیم ϕ'_b تحدیدی از ϕ_b به $C_G(a)$ باشد. بنابراین $\ker \phi'_b = C_G(a) \cap \ker \phi_b = C_G(a) \cap C_G(b) = X$ پس طبق قضیه اول همریختی داریم: $\frac{C_G(a)}{C_G(a) \cap \ker \phi_b} \cong \phi'_b(C_G(a)) \leq G' \leq \mathcal{Z}(G)$. پس با کاردینال گرفتن و تجدید آرایش داریم:

$$\begin{aligned}\frac{|C_G(a)|}{|X|} &\leq |\mathcal{Z}(G)| \Rightarrow \frac{|X|}{|C_G(a)|} \geq \frac{1}{|\mathcal{Z}(G)|} \Rightarrow \\ |X| &\geq \frac{|C_G(a)|}{|\mathcal{Z}(G)|}\end{aligned}\quad (4.2)$$

حال از رابطه‌های ۳.۲ و ۴.۲ داریم:

$$|X| \geq \frac{|C_G(a)|}{|\mathcal{Z}(G)|} \geq \frac{|\mathcal{Z}(G)|^2}{|\mathcal{Z}(G)|} = |\mathcal{Z}(G)| \Rightarrow |X| \geq |\mathcal{Z}(G)|$$

بنابراین حکم ثابت شد.

□

لم ۴.۳.۲. برای هر $x, y \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$ که $x \sim y$ یک خوشه در گراف $\Gamma(G)$ است.

برهان. داریم $\langle x\mathcal{Z}(G) \rangle = \{x^i\mathcal{Z}(G) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ و $\langle y\mathcal{Z}(G) \rangle = \{y^j\mathcal{Z}(G) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ و بنابر لم ۴.۲.۱، چون $x \sim y$ داریم $\langle x\mathcal{Z}(G), y\mathcal{Z}(G) \rangle = x^i y^j \mathcal{Z}(G)$ از طرفی بنابر لم ۴.۱.۲.۱، چون $x \sim y$ برای هر $i, j, z, l \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت $x^i y^j \sim x^k y^l$ بنابرین هر دو عنصر از G مشمول در عناصر $\langle x\mathcal{Z}(G), y\mathcal{Z}(G) \rangle$ جابه‌جا می‌شوند در نتیجه

$$\overline{\langle x\mathcal{Z}(G), y\mathcal{Z}(G) \rangle} := \bigcup_{x^i y^j \mathcal{Z}(G) \in xy\mathcal{Z}(G) \setminus \mathcal{Z}(G)} x^i y^j \mathcal{Z}(G)$$

□

یک خوشه در گراف G است.

قضیه ۵.۳.۲. اگر گروه G متناهی غیرآبلی و اندیس مرکز گروه G و حاصل ضرب حدکثر سه عدد اول نه لزوماً متمایز باشد آنگاه گراف جابجایی G ناهمبند است.

برهان. فرض کنیم $|G : \mathcal{Z}(G)|$ حاصل ضرب حدکثر سه عدد اول نه لزوماً متمایز باشد. بنابر قضیه ۴.۳.۱، اندیس مرکز گروه G اول نیست، بنابراین $|G : \mathcal{Z}(G)|$ حداقل بر دو عدد اول p و q بخش‌پذیر است. با استفاده از برهان خلف فرض کنیم $\Gamma(G)$ همبند باشد. چون $\left| \frac{G}{\mathcal{Z}(G)} \right| \mid p$ بنابر قضیه کوشی عضوی مانند $a \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$ وجود دارد که $|a\mathcal{Z}(G)| = p$. قرار می‌دهیم $A := \langle a\mathcal{Z}(G) \rangle$ بنابرین بنابر لم ۴.۳.۲، $\bar{A}$ یک خوشه از $\Gamma(G)$ است. چون $\Gamma(G)$ همبند است عناصری مانند $x \in \bar{A}$ و $b \in G \setminus (\bar{A} \cup \mathcal{Z}(G))$ وجود دارند به طوری که $x \sim b$. حال چون $|a\mathcal{Z}(G)|$ اول است و

$x\mathcal{Z}(G) \in A \setminus \{\mathcal{Z}(G)\}$ خواهیم داشت $\langle x\mathcal{Z}(G) \rangle = \langle a\mathcal{Z}(G) \rangle$. با توجه به لم ۴.۳.۲، رابطه‌ی $b \sim x$ نتیجه می‌دهد $b \sim a$ و $\bar{B}$ یک خوشه است به طوری که $B := \langle a\mathcal{Z}(G), b\mathcal{Z}(G) \rangle$. چون $b\mathcal{Z}(G) \notin A$ بنابرین $|A| < |B|$. فرض کنیم $B = \frac{G}{\mathcal{Z}(G)}$. پس برای هر $g \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$ خواهیم داشت $a \sim g$. بنابراین باید $a \in \mathcal{Z}(G)$ باشد در حالی که داشتیم $a \notin \mathcal{Z}(G)$ و این یک تناقض است. حال فرض کنیم $|B| = pq$ و به ازای عدد اول r ، $|G : \mathcal{Z}(G)| = pqr$. چون $\Gamma(G)$ همبند است مقادیری مانند $y \in \bar{B}$ و $c \in G \setminus (\bar{B} \cup \mathcal{Z}(G))$ وجود دارند به طوری که $y \sim c$. قرار می‌دهیم $C := \langle a\mathcal{Z}(G), b\mathcal{Z}(G), c\mathcal{Z}(G) \rangle$. بنابرین $B < C$ و چون B دارای اندیس اول در $\frac{G}{\mathcal{Z}(G)}$ می‌باشد با توجه به قضیه لاگرانژ خواهیم داشت $|C| \mid |B|$ در نتیجه خواهیم داشت $C = \frac{G}{\mathcal{Z}(G)}$.

بنابراین $\bar{C}$ شامل تمام عناصر $\Gamma(G)$ می‌باشد. از این که $y \in \bar{B}$ و $\bar{B}$ یک خوشه از $\Gamma(G)$ است می‌توان نتیجه گرفت y با a و b جابه‌جا می‌شود از طرفی y با c نیز جابه‌جا می‌شود بنابراین y با هر هم‌دسته‌ای در C جابه‌جا می‌شود پس بنابر لم ۴.۳.۲، y با هر عنصری از این هم‌دسته جابه‌جا می‌شود بنابراین به ازای هر $y \sim g, g \in \bar{C}$. در نتیجه $y \in Z(G)$ که یک تناقض است بنابراین گراف جابجایی G باید غیرهمبند باشد.

□

۴.۲ قطر گراف جابجایی $\Gamma(W)$

در این بخش یک خانواده متناهی از گروه‌ها با مرکز بدیهی به صورت حاصل ضرب نیم مستقیم $\mathbb{Z}_p^2$ و $SL(2, 3)$ خواهیم ساخت که برای عدد اول $p = 3n + 1$ ، این گروه دارای گراف جابجایی همبند با قطر ۶ است.

لم ۱.۴.۲. اگر α در $\mathbb{Z}_p^*$ عنصری از مرتبه ۳ باشد و $\beta := \alpha + 1$ آنگاه $\alpha \neq 1$ و $\beta \neq -1$ و $\alpha^2 + \beta^2 = -1$ و $\beta^3 = -1$.

برهان.

$$\alpha^3 = 1 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1) = -1 \Rightarrow \alpha^3(\alpha + 1)^3 = -1 \xrightarrow{\alpha+1=\beta} \alpha^3\beta^3 = -1$$

$$\xrightarrow{\alpha^3=1} \beta^3 = -1$$

برای قسمت دوم

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1) = -1 \Rightarrow \alpha\beta = -1$$

$$\beta^3 = -1 \Rightarrow \beta^6 = 1 \Rightarrow o(\beta) \mid 6 \xrightarrow[\beta^3=-1]{\beta \neq -1, 1} o(\beta) = 6$$

$$\Rightarrow o(\beta^2) = \frac{6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

از طرفی α دوری است پس $\beta^2 = \alpha$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1) = \alpha\beta = -1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = -1$$

□

لم ۲.۴.۲. $L := \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$ و $J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $K = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$ عناصری از $GL(2, p)$ با مرتبه ۴ هستند.

برهان.

$$K^2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\beta - \alpha\beta \\ \alpha\beta - \alpha\beta & \beta^2 + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

بررسی بقیه موارد مشابه است.

لم ۳.۴.۲. اگر قرار دهیم $\vartheta := \langle J, K, L \rangle$ ، آنگاه ϑ با Q_8 ایزومورفیزم است.

برهان. باید نشان دهیم $JK = L$ و $KL = J$ و $JL = K$.

$$JK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} = L$$

$$KL = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta - \alpha\beta & -\alpha^2 - \beta^2 \\ \beta^2 + \alpha^2 & -\alpha\beta + \alpha\beta \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J$$

□

بررسی بقیه خواص مشابه است.

$$\text{لم ۴.۴.۲. } Z = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ عضوی از } GL(2, p) \text{ با مرتبه ۳ است.}$$

برهان.

$$Z^3 = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta + \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -\beta^3 & \alpha\beta^2 - \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

لم ۵.۴.۲. اگر قرار دهیم $S := \langle J, K, L, Z \rangle$ ، آنگاه S با $SL(2, 3)$ ایزومورفیزم است.

برهان. باید نشان دهیم $J^Z = K$ ، $L^Z = J$ و $K^Z = L$. ابتدا نشان می‌دهیم $J^Z = K$.

$$\begin{aligned} J^Z &= Z^{-1} J Z = -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \cdot & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta} \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} & -\frac{1}{\beta} \\ -1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\alpha^2 - 1}{\beta} \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} = K. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} L^Z &= Z^{-1} L Z = -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \cdot & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \beta + \alpha^2 & -\alpha + \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} -\beta^2 + \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha^2\beta + \beta^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta + \alpha^2 & 1 \\ -1 & \alpha^2 + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{bmatrix} \\ &= J. \end{aligned}$$

□

بررسی بقیه‌ی موارد مشابه است.

توجه: فرض کنیم n یک عدد صحیح و $p = 3n + 1$ یک عدد اول باشد. قرار می‌دهیم، $W := \mathbb{Z}_p^2 \rtimes S$. فرض کنیم $x \in W$ پس برای $x \in \mathbb{Z}_p^2$ و $X \in S$ می‌توانیم x را به صورت (x, X) بنویسیم و برای عناصر دیگر $y = (y, Y) \in W$ داریم

$$xy = (x + yX^{-1}, XY) \quad (5.2)$$

و وارون x به صورت زیر می‌باشد

$$x^{-1} = (-xX, X^{-1}) \quad (6.2)$$

ما S و W و $\{(x, I) | x \in \mathbb{Z}_p^2\} \leq W$ و همچنین $\mathbb{Z}_p^2$ و $\{((\cdot, \cdot), X) | X \in S\} \leq W$ را یکسان در نظر می‌گیریم. وقتی در $x = (x, X)$ ، $x = (\cdot, \cdot) = e_{\mathbb{Z}_p^2}$ را حذف می‌کنیم و می‌نویسیم $x = X$.

$$\text{لم } ۶.۴.۲. C_W(-I) = S$$

برهان. می‌دانیم $L^2 = K^2 = J^2 = -I$ و واضح است که

$$S \leq C_W(-I) \quad (۷.۲)$$

حال $a \in C_W(-I)$ را طوری در نظر می‌گیریم که $a = (a, A)$ به طوری که $a \in \mathbb{Z}_p^2$ و $A \in S$. پس برای $b \in \mathbb{Z}_p^2$ و $B \in S$ داریم: $(-I)a = a(-I) = (b, B)$. در محاسبه $(-I)a$ داریم:

$$\begin{aligned} (-I)a &= (\cdot, -I)(a, A) = (\cdot + a(-I)^{-1}, (-I)A) = (-a, -A) = (b, B) \\ \Rightarrow b &= -a \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

و از محاسبه $a(-I)$ داریم:

$$a(-I) = (\alpha, A)(\cdot, -I) = (\alpha, -AI) = (b, B) \Rightarrow a = b \quad (۹.۲)$$

چون p فرد است از رابطه‌های ۸.۲ و ۹.۲ نتیجه می‌گیریم $a = (\cdot, \cdot)$ ، بنابراین $a \in S$ پس

$$C_W(-I) \leq S \quad (۱۰.۲)$$

□ پس از رابطه‌های ۷.۲ و ۱۰.۲ خواهیم داشت $C_W(-I) = S$.

$$\text{لم } ۷.۴.۲. C_W(g) \cong S, g \in W \text{ برای هر برگشت}$$

برهان. فرض کنیم g یک برگشت در W باشد بنابر قضایای سیلو هر p -زیرگروه از یک گروه متناهی جزء یک p -زیرگروه سیلوی آن گروه متناهی است بنابراین $\langle g \rangle$ مشمول در یک زیرگروه ۲-سیلو مانند H از W است از طرفی بنابر قضایای سیلو هر دو p -سیلو زیرگروه در W مزدوجند بنابراین $x \in W$ وجود دارد که $H^x = \vartheta$ و چون $-I$ تنها برگشت در φ_8 است بنابر لم ۶.۴.۲، $C_W(g) \cong C_W(-I) = S$ بنابراین $|C_W(g)| = |S| = 24$.

□

$$\text{لم } ۸.۴.۲. C_W(g) = \langle g \rangle \text{ باشد آنگاه } ۴ \text{ یا } ۶$$

برهان. ابتدا فرض کنیم که $|g| = 4$ باشد. با استفاده از قضایای سیلو، هر p -زیرگروه، زیر مجموعه یک p -زیرگروه، سیلوی G است پس g مشمول در زیرگروهی ۲-سیلو مانند H از W است و چون هر دو p -زیرگروه سیلو مزدوجند، عنصر $x \in W$ موجود است که $\varphi_8 \cong \vartheta \in g^x$. از طرفی بنابر لم ۱۶.۲.۱، تمام عناصر از مرتبه ۴ در S مزدوجند بنابراین $g^x \in CL_W(J)$. از طرفی می‌دانیم

$$CL_W(g) = \{g^x \mid x \in W\}, \text{ پس } CL_W(g) \cong CL_W(J). \text{ هم چنین داریم}$$

$$CL_W(g) = [W : C_W(g)] \text{ در نتیجه}$$

$$C_W(g) \cong C_W(J) \quad (۱۱.۲)$$

حال نشان می‌دهیم $C_W(J) = \langle J \rangle$.

فرض کنیم $x = ((x_1, x_2), X) \in W$ و $J \in W$ جابه‌جا شود. برای بعضی از $a \in \mathbb{Z}_p^2$ و $A \in S$ قرار می‌دهیم $xJ = Jx = (a, A) = a$ در محاسبه‌ی Jx می‌بینیم

$$Jx = (\cdot, J)((x_1, x_2), X) = ((x_1, x_2)J^{-1}, JX) = (a, A) \Rightarrow$$

$$(x_1, x_2)J^{-1} = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = (x_2, -x_1) = a \Rightarrow a = (x_2, -x_1) \quad (12.2)$$

$$xJ = ((x_1, x_2), X)(\cdot, J) = ((x_1, x_2), XJ) = (a, A) \Rightarrow$$

$$a = (x_1, x_2) \quad (13.2)$$

از رابطه‌های ۱۲.۲ و ۱۳.۲، خواهیم داشت

$$(x_2, -x_1) = (x_1, x_2) \Rightarrow x_2 = x_1, \quad x_2 = -x_1$$

در نتیجه با جابه‌جایی و تجدید آرایش خواهیم داشت $2x_1 = 0$ و چون p فرد است نتیجه می‌گیریم $x_1 = x_2 = 0$ بنابراین $x = ((0, 0), X) \in S$. از طرفی بنابر لم ۱۶.۲.۱، $C_S(J) = \langle J \rangle$. پس $C_W(J) = C_S(J) = \langle J \rangle$ بنابراین $C_W(g) = \langle g \rangle$. حال فرض کنیم $|g| = 6$ پس $\langle g \rangle$ یک $\{2, 3\}$ -زیرگروه از W می‌باشد و چون W حل‌پذیر است، قضیه هال نتیجه می‌دهد که یک $\{2, 3\}$ -زیرگروه هال مانند H از W شامل $\langle g \rangle$ وجود دارد به علاوه بنابر قضیه هال همه‌ی $\{2, 3\}$ -زیرگروه‌های هال در W مزدوج هستند. از طرفی گروه S دارای اندیس p^2 در W می‌باشد، بنابراین $(|S|, |W : S|) = (24, p^2) = 1$. پس S یک $\{2, 3\}$ -زیرگروه هال از W است. بنابر قضیه هال اگر W یک گروه حل‌پذیر باشد همه‌ی زیرگروه‌های هال از یک مرتبه مزدوجند، بنابراین چون H و S هر دو $\{2, 3\}$ -زیرگروه هال از W هستند، عنصر $x \in W$ وجود دارد به طوری که $H^x \leq S$ و چون H شامل $\langle g \rangle$ است بنابراین g^x عنصری از مرتبه‌ی ۶ در S است. از طرفی بنابر قضیه ۱۶.۲.۱، فقط دو کلاس مزدوج از عناصر مرتبه‌ی ۶ در S وجود دارد و این دو کلاس نمونه‌هایی مانند JZ^{-1} و $(JZ^{-1})^{-1} = ZJ^{-1}$ دارند و چون

$$ZJ^{-1} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \beta \\ 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

و مرتبه‌ی β برابر ۶ است پس ZJ^{-1} دارای مرتبه‌ی ۶ است و ZJ^{-1} هم با انجام این محاسبات دارای مرتبه‌ی ۶ است. پس g^x با JZ^{-1} یا ZJ^{-1} مزدوج است. بنابر ۱۱.۲، داریم $C_W(JZ^{-1}) = C_W(ZJ^{-1})$. حال فرض کنیم $y = ((y_1, y_2), Y) \in C_W(JZ^{-1})$. قرار می‌دهیم

$$a := y(JZ^{-1}) = (JZ^{-1})y = (a, A)$$

از محاسبه‌ی معادله‌ی $y(JZ^{-1})$ با استفاده از رابطه‌ی ۵.۲ داریم

$$y(JZ^{-1}) = ((y_1, y_2), Y)(\cdot, JZ^{-1}) = ((y_1, y_2), YJZ^{-1}) = (a, A)$$

بنابراین

$$a = (y_1, y_2) \quad (14.2)$$

و محاسبه‌ی معادله‌ی $y(JZ^{-1})$ نشان می‌دهد که

$$(JZ^{-1})y = (\cdot, JZ^{-1})((y_1, y_2), Y) = ((y_1, y_2)JZ^{-1}, JZ^{-1}Y) = (a, A)$$

$$\begin{aligned} a = (y_1, y_2)JZ^{-1} &= (y_1, y_2) \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = (-\beta y_1, \alpha y_1 + y_2) \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \\ &= (\alpha y_1 + y_2, \beta y_1) \end{aligned}$$

بنابراین

$$a = (\alpha y_1 + y_2, \beta y_1) \quad (15.2)$$

با مساوی قرار دادن رابطه‌های ۱۴.۲ و ۱۵.۲ خواهیم داشت

$$(y_1, y_2) = (\alpha y_1 + y_2, \beta y_1) \Rightarrow y_1 = \alpha y_1 + y_2, \text{ و } y_2 = \beta y_1$$

$$\Rightarrow y_1 = \alpha y_1 + \beta y_1 \Rightarrow y_1(1 - \beta) = \alpha y_1 \Rightarrow -\alpha y_1 = \alpha y_1 \Rightarrow 2\alpha y_1 = \cdot \Rightarrow$$

$$y_1 = \cdot \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = \cdot \Rightarrow a = (\cdot, \cdot) \Rightarrow y \in S$$

بنابراین

$$C_W(JZ^{-1}) = C_S(JZ^{-1}) = \langle JZ^{-1} \rangle$$

□

نتیجه ۹.۴.۲. هیچ عضوی از مرتبه‌ی ۸ یا ۱۲ یا ۲۴ در W وجود ندارد.

برهان. فرض کنیم h عنصری از مرتبه‌ی ۸ در W باشد. بنابراین $|h^2| = 4$. در نتیجه $\langle h \rangle \subseteq C(h)$. پس $|C(h)| \geq 8$ ، که تناقض است. عناصر از مرتبه‌ی ۱۲ یا ۲۴ نیز در W شبیه نمونه داده شده در بالا دارای عنصری از مرتبه ۶ هستند اما با بیشتر از ۶ عنصر جابه‌جا می‌شوند و این یک تناقض است.

□

لم ۱۰.۴.۲. مرکز W بدیهی است.

برهان. با توجه به لم ۸.۴.۲، اگر یک عنصر مانند $g \in W$ از مرتبه ۴ داشته باشیم خواهیم داشت $C_W(g) = \langle g \rangle$ بنابراین $C_W(g)$ مرکزسازی از مرتبه ۴ دارد. از طرفی $C_W(g) = W \Leftrightarrow g \in \mathcal{Z}(W)$ بنابراین g مرکزی نیست. هم چنین داریم $\mathcal{Z}(W) \subseteq C_W(g) = \langle g \rangle$ پس g با یک عنصر مرکزی از W جابه‌جا می‌شود در نتیجه این عنصر مرکزی دارای مرتبه ۲ است اما با توجه به لم ۷.۴.۲، هر برگشت از مرتبه ۲ در W فقط با ۲۴ عنصر از W جابه‌جا می‌شود ولی $|W| = 24p^2$ بنابراین $|\mathcal{Z}(W)| = 1$ پس $\mathcal{Z}(W) = e$. $\square$

لم ۱۱.۴.۲. مرتبه $a := ((1, 1), -I)$ در W برابر ۲ است.

برهان.

$$\begin{aligned} a^2 &= (((1, 1), -I)((1, 1), -I) = ((1, 1) + (1, 1)(-I)^{-1}, I) \\ &= ((1, 1) + (1, 1)(-I)^{-1}, I) = ((1, 1) + (-1, -1), I) = \\ &= ((0, 0), I) = e_W \Rightarrow o(a) = 2 \end{aligned}$$

$\square$

لم ۱۲.۴.۲. اگر $a := ((1, 1), -I)$ عنصری از W باشد آنگاه $C_W(-I) \cap C_W(a) = \{e\}$.

برهان. فرض کنیم $x \in C_W(-I) \cap C_W(a)$ به طوری که $x = (x, X)$. بنابر لم ۶.۴.۲، $C_W(-I) = S$ پس $x \in C_W(-I) = S$ بنابراین x با a جابه‌جا می‌شود پس $Xa = aX$ بنابراین

$$Xa = ((0, 0), X)((1, 1), -I) = ((1, 1)X^{-1}, -XI) \quad (16.2)$$

$$aX = ((1, 1), -I)((0, 0), X) = ((1, 1), -XI) \quad (17.2)$$

از رابطه‌های ۱۶.۲ و ۱۷.۲، خواهیم داشت

$$(1, 1) = (1, 1)X^{-1} \quad (18.2)$$

پس هر توانی از X^{-1} باید $(1, 1)$ را ثابت نگه دارد. از طرفی می‌دانیم $(-I)$ تنها عنصر از مرتبه ۲ در S می‌باشد و $(-I)$ ، $(1, 1)$ را ثابت نگه نمی‌دارد. بنابراین هیچ توانی از X^{-1} نمی‌تواند $-I$ باشد و چون مرتبه $-I$ زوج و برابر ۲ می‌باشد پس مرتبه X^{-1} باید فرد باشد و چون $|S| = 2^3 \cdot 3$ و مرتبه X^{-1} فرد است پس باید مرتبه X^{-1} ، ۱ یا ۳ باشد و عناصر مرتبه ۳ در $SL(2, 3) \cong S$ عبارتند از

$$Z, JZ, KZ, LZ, Z^{-1}, J^{-1}Z^{-1}, K^{-1}Z^{-1}, L^{-1}Z^{-1} \in S$$

بنابراین X^{-1} باید یکی از آن‌ها باشد با این حال هیچ یک از آن‌ها $(1, 1)$ را ثابت نگه نمی‌دارند پس $X = I$ یعنی $x = e_W$. $\square$

$$\text{diam}\Gamma(W) \geq 6.13.4.2 \text{ لم}$$

برهان. فرض کنیم $a := (1, 1, -I)$ و $b := -I$ عناصری از گروه W باشند، نشان می‌دهیم که در $\Gamma(W)$ ، $d(a, b) \geq 4$ و از آن جا نتیجه می‌گیریم که دو عنصر از مرتبه‌ی ۴ در W وجود دارند که یکی از آن‌ها با a و دیگری با b جابه‌جا می‌شوند و فاصله‌ی این دو عنصر از مرتبه‌ی ۴ برابر ۶ است.

با توجه به لم ۱۲.۴.۲، هیچ یک از عناصر غیر بدیهی از W با a و b جابه‌جا نمی‌شوند. اکنون فرض کنیم $d(a, b) = 3$ پس $x \in C_W(a)$ و $y \in C_W(b)$ وجود دارند که $x \sim y$. چون a و b برگشت هستند بنابر لم ۷.۴.۲، $|C_W(a)| = |C_W(b)|$. بنابراین $|x|$ و $|y|$ ، ۲۴ را عاد می‌کنند. از طرفی بنابر لم ۸.۴.۲، هیچ عضوی از مرتبه‌ی ۸ و ۱۲ یا ۲۴ در W وجود ندارد بنابراین $|x|$ و $|y|$ باید یکی از اعداد ۲، ۳، ۴ یا ۶ باشند حال برای مرتبه‌های x و y این احتمالات متفاوت را بررسی می‌کنیم.

با توجه به قضیه ۷.۴.۲، a و b برگشت‌های منحصر به فرد در مرکزسازهایشان هستند. بنابراین هیچ یک از x و y از مرتبه‌ی ۲ نیستند. حال فرض کنیم یکی از $|x|$ یا $|y|$ ، ۴ یا ۶ است. بدون کم شدن از کلیت مسأله فرض کنیم ۶ یا $|x| = 4$ بنابر لم ۸.۴.۲، چون مرتبه‌ی $|x|$ ، ۴ یا ۶ می‌باشد پس $\langle x \rangle = C_W(x)$ بنابراین $C_W(x)$ دوری می‌باشد و وقتی که $y \in C_W(x)$ برای عدد صحیح k داریم: $y = x^k$ بنابراین چون $x \in C_W(a)$ خواهیم داشت $y \in C_W(a)$ از طرفی داشتیم $y \in C_W(b)$ پس $y \in C_W(a) \cap C_W(b)$ که بنابر لم ۱۲.۴.۲، این یک تناقض است.

حال فقط این احتمال باقی می‌ماند که $|x| = |y| = 3$. چون $x \sim y$ ، به ازای اعداد صحیح $0 \leq s, t \leq 2$ ، هر عنصری از $\langle x, y \rangle$ می‌تواند به صورت $x^s y^t$ نوشته شود بنابراین $|\langle x, y \rangle| \leq 9$. از طرفی ۳، $|\langle x, y \rangle|$ را عاد می‌کند و هم چنین $|\langle x, y \rangle|$ ، $2^3 \cdot 3^2 p^2$ را عاد می‌کند. و چون طبق فرض $1 \neq p \neq 3$ بنابرین $p \neq 3$ پس $|\langle x, y \rangle| = 3$ و $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle$ بنابراین $y \in \langle x \rangle$ و به ازای عدد صحیح k ، $y = x^k$ ، از طرفی داریم $x \in C_W(a)$ در نتیجه $y \in C_W(a) \cap C_W(b)$ که طبق لم ۱۲.۴.۲ یک تناقض است. بنابراین $d(a, b) \geq 4$. چون a و b برگشت هستند بنابر قضیه ۳۸.۲.۱، داریم $C_W(a) \cong C_W(b) \cong S$. از طرفی در S عناصری از مرتبه‌ی ۴ وجود دارند پس $q \in C_W(a)$ و $r \in C_W(b)$ موجود است به طوری که $|q| = |r| = 4$. از طرفی بنابر لم ۱۰.۴.۲، مرکز W بدیهی است، بنابراین a, b, q و r همه رئوسی از $\Gamma(W)$ می‌باشند و در مرکز W نمی‌باشند. چون $|q| = 4$ ، لم ۸.۴.۲، نشان می‌دهد که $\langle q \rangle = C_W(q)$ ، بنابراین تنها عناصر غیربدیهی که با q و q^3 جابه‌جا می‌شوند عبارتند از q و $q^2 = a$ و q^3 و هنگامی که $d(a, b) \geq 4$ هیچ کدام از q و q^3 با r معادل نیستند. بنابراین اگر کوتاهترین مسیر از q تا r در $\Gamma(W)$ وجود داشته باشد، a باید رأس دوم و b رأس ماقبل آخر باشد، پس $2 + d(a, b) \geq 6$. $\text{diam}\Gamma(W) = 2 + d(a, b) \geq 6$.

□

لم ۱۴.۴.۲. $((0, 1), I) \in W$ با عنصر $Z \in W$ جابه‌جا می‌شود.

برهان. قرار می‌دهیم $a := ((\circ, 1), I)$. داریم

$$aZ = ((\circ, 1), I)(\circ, Z) = ((\circ, 1), IZ) \quad (19.2)$$

$$Za = (\circ, Z)((\circ, 1), I) = ((\circ, 1)Z^{-1}, ZI)$$

$$(\circ, 1)Z^{-1} = (\circ, 1) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta} \\ \circ & 1 \end{bmatrix} = (\circ, 1) \Rightarrow Za = ((\circ, 1), ZI) \quad (20.2)$$

بنابراین از ۱۹.۲ و ۲۰.۲ نتیجه می‌گیریم $aZ = Za$.

□

لم ۱۵.۴.۲. اگر $g \in W$ و $|g| = 3$ ، آنگاه عنصری از مرتبه‌ی p در W وجود دارد که با g جابه‌جا می‌شود.

برهان. ابتدا مشاهده می‌کنیم که $((\circ, 1), I) \in W$ دارای مرتبه‌ی p است. و بنابر لم ۱۴.۴.۲، $((\circ, 1), I) \in W$ با عنصر $Z \in W$ جابه‌جا می‌شود و بنابر قضیه سیلوها هر دو p -زیرگروه سیلو مزدوجند و چون مرتبه‌ی g و Z و Z^{-1} ، ۳ می‌باشد پس g با Z یا Z^{-1} مزدوج است و نتیجه حاصل می‌شود. □

لم ۱۶.۴.۲. فاصله‌ی هر برگشت با $((\circ, 1), I)$ در $\Gamma(W)$ حداکثر ۲ است.

برهان. فرض کنیم a یک برگشت در W باشد. برای هر $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_p^\times$ و $A \in S$ قرار می‌دهیم $a = ((a_1, a_2), A)$ به طوری که $A^2 = I$. اگر $A = I$ باشد آنگاه $a = ((a_1, a_2), I)$ است و a یک برگشت نخواهد بود پس نتیجه می‌گیریم $A \neq I$. چون عناصر $\mathbb{Z}_p^\times$ دارای مرتبه‌ی ۱ یا p می‌باشند بنابراین $|a| = |(a_1, a_2)|$ و برابر ۱ یا p می‌باشد. پس $A = -I$ و $-I$ تنها برگشت در S می‌باشد حال عنصر غیر بدیهی $((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), Z) \in W$ را در نظر می‌گیریم که این عنصر با a جابه‌جا می‌شود زیرا

$$\begin{aligned} & ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), Z)((a_1, a_2), I) \\ &= ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta) + (a_1, a_2)Z^{-1}, ZI) \end{aligned} \quad (21.2)$$

از طرفی

$$(a_1, a_2)Z^{-1} = (a_1, a_2)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} & ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), Z)((a_1, a_2), I) \\ &= ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta) + (a_1, a_2), ZI) \end{aligned} \quad (22.2)$$

هم چنین

$$\begin{aligned}
& ((a_1, a_2), I) ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), Z) \\
&= (a_1, a_2) + (a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta) I^{-1}, IZ) \\
&= (a_1, a_2) + (a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), IZ) \quad (23.2)
\end{aligned}$$

که روابط ۲۲.۲ و ۲۳.۲ باهم برابرند، هم چنین عنصر $((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), Z) \in W$ با عنصر $((0, 1), I)$ جابه‌جا می‌شود چون

$$\begin{aligned}
& ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), Z) ((0, 1), I) \\
&= ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta) + (0, 1)Z^{-1}, ZI) \\
&= ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta) + (0, 1), ZI) \quad (24.2)
\end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned}
& ((0, 1), I) ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), Z) \\
&= ((0, 1) + ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta)I^{-1}, IZ)) \\
&= ((0, 1) + ((a_1(1+\beta)/2\beta, -a_1\alpha/2\beta), IZ)) \quad (25.2)
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه‌های ۲۴.۲ و ۲۵.۲ برابرند پس این عنصر با هر دو عنصر a و $((0, 1), I)$ جابه‌جا می‌شود بنابراین فاصله a تا $((0, 1), I)$ حداکثر ۲ است. $\square$

لم ۱۷۰۴۰۲. همه‌ی عناصر از مرتبه‌ی p در W باهم جابه‌جا می‌شوند.

برهان. چون $W := \mathbb{Z}_p^2 \rtimes S$ بنابراین $\{(X, I) | X \in \mathbb{Z}_p^2\} \leq W$ یک زیرگروه آبدی و نرمال در W از مرتبه‌ی p^2 است پس یک p -زیرگروه سیلوی منحصر به فرد از W است و مرتبه‌ی عناصر آن ۱ یا p است. بنابراین شامل همه‌ی عناصر از مرتبه‌ی p می‌باشد و چون آبدی است این عناصر جابه‌جا می‌شوند. $\square$

$$\text{لم } 180402. \text{diam}(\Gamma(W)) \leq 6.$$

برهان. قرار می‌دهیم $a := ((0, 1), I) \in W \setminus Z(G)$ نشان می‌دهیم که فاصله‌ی هر $g \in W \setminus Z(G)$ و a در $\Gamma(W)$ حداکثر ۳ است. یک مسیر به طول حداکثر ۶ بین هر دو عنصر غیر مرکزی g, h از W با استفاده از حداکثر ۳ گام از g به a و ۳ گام از a به h می‌توان ایجاد کرد برای محاسبه‌ی این نتیجه می‌توان از لم ۱۰۰۴۰۲، کمک گرفت که در آن هر عنصر غیر بدیهی از W در

$\Gamma(W)$ غیر مرکزی است. فرض کنیم $g \in W$ یک عنصر غیر بدیهی و x یک عنصر از مرتبه‌ی عدد اول p در $C_W(g)$ باشد آنگاه چون $|W| = 2^3 \cdot 3p^2$ بنابراین مرتبه‌ی x برابر ۲، ۳ یا p است. اگر $|x| = p$ چون داریم $|a| = p$ آنگاه بنابر لم ۱۷.۴.۲، همه‌ی عناصر از مرتبه‌ی p جابه‌جا می‌شوند بنابراین

$$x \sim a \quad (26.2)$$

از طرفی چون $x \in C_W(g)$ بنابراین

$$g \sim x \quad (27.2)$$

با توجه به ۲۶.۲ و ۲۷.۲، خواهیم داشت $g \sim x \sim a$ که یک مسیر به طول ۲ در $\Gamma(W)$ است. اگر $|x| = 3$ آنگاه با توجه به لم ۱۵.۴.۲، مقدار $y \in W$ از مرتبه‌ی p وجود دارد که با x جابه‌جا می‌شود و $a \sim y \sim x \sim g$ که مسیری به طول ۳ از a به g در $\Gamma(W)$ است. اگر $|x| = 2$ آنگاه با توجه به لم ۱۷.۴.۲، $d(x, u) \leq 2$ و از آن نتیجه می‌گیریم $d(g, a) \leq 3$ به همین روش می‌توان نتیجه گرفت $d(a, h) \leq 3$ بنابراین $d(g, h) \leq 6$.

□

$$\text{لم } 19.4.2. \quad \text{diam}(\Gamma(W)) = 6.$$

برهان. با توجه به لم‌های ۱۳.۴.۲ و ۱۸.۴.۲، می‌توان نتیجه گرفت $\text{diam}(\Gamma(W)) = 6$.

□

فصل ۳

قطر گراف جابجایی بعضی از گروه‌های ماتریسی

۱.۳ مقدمه

این فصل شامل دو بخش است که در آن به معرفی گراف جابجایی بعضی از گروه‌های ماتریس‌ها پرداخته و قضایا و نتایجی را به اثبات می‌رسانیم که با استفاده از آن‌ها می‌توان قطر یا کرانی از قطر گراف این گروه‌ها را بدست آورد و همبندی آن‌ها را ثابت کرد.

۲.۳ قطر گراف برخی گروه‌ها و حلقه‌های ماتریسی از بعد n بر $\mathbb{Z}_m$

در این بخش ماتریس همانی $r \times r$ را با I_r و ماتریس صفر $r \times s$ را با $O_{r,s}$ و ماتریسی را که دارای i, j آن ۱ و بقیه درایه‌های آن صفر باشد را با $E_{i,j}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $\mathbb{Z}_m$ حلقه‌ای تعویض‌پذیر از کلاس‌های هم‌ارزی باشد به طوری که این کلاس‌ها شامل اعداد صحیح هم‌نهشت به هنگ m باشند گروه تمام ماتریس‌ها از درجه‌ی n بر $\mathbb{Z}_m$ را با $M(n, \mathbb{Z}_m)$ نشان می‌دهیم و قطر گراف و همبندی آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. $\mathcal{Z}(M(n, R)) = \{\lambda I \mid \lambda \in R\}$

برهان. فرض کنیم $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ داریم

$$A(I + E_{i,j}) = (I + E_{i,j})A$$

$$AI + AE_{i,j} = IA + E_{i,j}A$$

$$\Rightarrow AE_{i,j} = E_{i,j}A$$

از طرفی

$$AE_{i,j} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & a_{1,i} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & a_{2,i} & \cdots & \cdot \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & a_{n,i} & \cdots & \cdot \end{bmatrix}$$

همچنین

$$E_{i,j}A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,j} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر $a \neq t \Rightarrow a_{i,t} = \circ$ و اگر $a = t \Rightarrow a_{i,i} = a_{j,j}$ بنابراین حکم ثابت شد.

□

قضیه ۲.۲.۳. اگر R دامنه‌ی صحیح باشد آنگاه $\Gamma(M(2, R))$ و $\Gamma(GL(2, R))$ و $\Gamma(SL(2, R))$ ناهمبند هستند.

برهان. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \circ & a_1 \end{bmatrix} \in M(2, R) \mid a_1, a_2 \in R, a_2 \neq \circ \right\} \subseteq M(2, R) \setminus \mathcal{Z}(M(2, R))$$

فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \circ & a_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

و

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in C_{M(2, R)}(A) \setminus \mathcal{Z}(M(2, R))$$

حال

$$XA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \circ & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_1 + a_1 x_2 \\ a_1 x_3 & a_2 x_3 + a_1 x_4 \end{bmatrix}$$

و

$$AX = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \circ & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_3 & a_1 x_2 + a_2 x_4 \\ a_1 x_3 & a_1 x_4 \end{bmatrix}$$

چون $AX = XA$ پس

$$a_1 x_1 = a_1 x_1 + a_2 x_3 \longrightarrow a_2 x_3 = \circ$$

و چون طبق فرض $a_2 \neq 0$ بنابراین $x_3 = 0$ هم چنین داریم:

$$a_2 x_1 + a_1 x_2 = a_1 x_2 + a_2 x_4$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_2 x_1 = a_2 x_4$$

که با حذف a_2 خواهیم داشت $x_1 = x_4$ بنابراین $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$ از طرفی ماتریس‌هایی که در

$\mathcal{Z}(M(2, R))$ قرار دارند باید قطری باشند و چون $X \notin \mathcal{Z}(M(2, R))$ ، در نتیجه $x_2 \neq 0$ پس $X \in \mathcal{A}$ ، بنابراین در $\Gamma(M(2, R))$ ، $\mathcal{A}$ از یک مؤلفه‌ی همبند یکتا تشکیل شده است. در نتیجه

ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{A} \cap SL(2, R)$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, R) \setminus \mathcal{Z}(SL(2, R))$ در مؤلفه‌های همبندی متفاوتی از $\Gamma(M(2, R))$ ، $\Gamma(GL(2, R))$ و $\Gamma(SL(2, R))$ قرار دارند، بنابراین $\Gamma(M(2, R))$ ، $\Gamma(GL(2, R))$ و $\Gamma(SL(2, R))$ همبند نیستند.

□

لم ۳.۲.۳. فرض کنیم t, s, v, u عددهای صحیح مثبتی باشند به طوری که t, s, u و t, s, v متباین باشند در این صورت برای هر دو عدد صحیح l, k ، دو عدد صحیح $us^k + vt^l$ و st متباین هستند.

برهان. فرض کنیم t, s, v, u اعداد صحیحی باشند به طوری که t, s, u و t, s, v دوه‌دو نسبت به هم اول باشند، قرار می‌دهیم $d = \gcd(us^k + vt^l, st)$. فرض کنیم $d \neq 1$ و p عدد اولی باشد که d را عاد کند، چون $p|d \Rightarrow p|st$ ، هم چنین چون p یک عدد اول است $p|s$ یا $p|t$. بدون کم شدن از کلیت مسأله فرض کنیم $p|s$ بنابراین $p|us^k$. چون طبق فرض

$$(s, v) = 1 \quad \text{و} \quad p|s \Rightarrow p \nmid v$$

$$(s, t) = 1 \quad \text{و} \quad p|s \Rightarrow p \nmid t$$

در نتیجه $p \nmid vt^l$ بنابراین $p \nmid us^k + vt^l$ که یک تناقض است پس $(us^k + vt^l, st) = 1$.

□

لم ۴.۲.۳. برای اعداد طبیعی و متباین s و t بزرگتر از ۱، اگر X و Y عناصری از $GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ باشند آنگاه $sX + tY$ هم عنصری از $GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ هستند.

برهان. فرض کنیم s و t اعداد طبیعی بزرگتر از ۱، متباین و $X, Y \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ باشند. در این

صورت با استفاده از فرمول دترمینان یک ماتریس $n \times n$ ،

$$\begin{aligned}
 \det(sX + tY) &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (sX + tY)_{i, \sigma(i)} \right) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(sX_{1, \sigma(1)} + tY_{1, \sigma(1)} \right) \left(sX_{2, \sigma(2)} + tY_{2, \sigma(2)} \right) \cdots \left(sX_{n, \sigma(n)} + tY_{n, \sigma(n)} \right) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left((sX_{1, \sigma(1)} sX_{2, \sigma(2)} \cdots sX_{n, \sigma(n)}) + (tY_{1, \sigma(1)} tY_{2, \sigma(2)} \cdots tY_{n, \sigma(n)}) \right) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n sX_{i, \sigma(i)} + \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n tY_{i, \sigma(i)} \right) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n sX_{i, \sigma(i)} \right) + \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n tY_{i, \sigma(i)} \right) \\
 &= \det(sX) + \det(tY) = s^n \det(X) + t^n \det(Y)
 \end{aligned}$$

چون $\det(X)$ و $\det(Y)$ در $\mathbb{Z}_{st}$ یکه هستند بنابراین با s و t متباین هستند در نتیجه بنابر لم ۳.۲.۳، داریم $\gcd(s^n \det(X) + t^n \det(Y), st) = 1$. بنابراین $s^n \det(X) + t^n \det(Y)$ در $\mathbb{Z}_{st}$ یکه است. در نتیجه $sX + tY$ وارون‌پذیر و عنصری از $GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ است. $\square$

لم ۵.۲.۳. برای هر $m, n \geq 2$ فرض کنیم

$$P = I_n + \begin{bmatrix} \cdot_{n-1 \times 1} & I_{n-1} \\ \cdot & \cdot_{1 \times n-1} \end{bmatrix} \in GL(n, \mathbb{Z}_m) \setminus \mathcal{Z}(GL(n, \mathbb{Z}_m))$$

در این صورت

$$\mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_m)}(P) \cap \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_m)}(P^T) = \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_m))$$

برهان. فرض کنیم P ماتریس تعریف شده در فرض لم باشد بنابراین

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $X \in \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_m)}(P)$ و

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix}$$

پس

$$PX = \begin{bmatrix} x_{1,1} + x_{2,1} & x_{1,2} + x_{2,2} & \cdots & x_{1,n} + x_{2,n} \\ x_{2,1} + x_{3,1} & x_{2,2} + x_{3,2} & \cdots & x_{2,n} + x_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} + x_{n,1} & x_{n-1,2} + x_{n,2} & \cdots & x_{n-1,n} + x_{n,n} \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix}$$

و

$$XP = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,1} + x_{1,2} & \cdots & x_{1,n-1} + x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,1} + x_{2,2} & \cdots & x_{2,n-1} + x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,1} + x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n-1} + x_{n-1,n} \\ x_{n,1} & x_{n,1} + x_{n,2} & \cdots & x_{n,n-1} + x_{n,n} \end{bmatrix}$$

چون $PX = XP$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{1,1} + x_{2,1} = x_{1,1} & x_{1,2} + x_{2,2} = x_{1,1} + x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} + x_{2,n} = x_{1,n-1} + x_{1,n} \\ x_{2,1} + x_{3,1} = x_{2,1} & x_{2,2} + x_{3,2} = x_{2,1} + x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} + x_{3,n} = x_{2,n-1} + x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} = x_{n,1} & x_{n,2} = x_{n,1} + x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} = x_{n,n-1} + x_{n,n} \end{array}$$

ستون سمت چپ از معادله $PX = XP$ نتیجه می‌دهد که:

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{2,1} = x_{1,1} &\implies x_{2,1} = 0 \\ x_{2,1} + x_{3,1} = x_{3,1} &\implies x_{3,1} = 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1,1} + x_{n,1} = x_{n-1,1} &\implies x_{n,1} = 0 \end{aligned}$$

از ستون دوم داریم:

$$\begin{aligned} x_{1,2} + x_{2,2} = x_{1,1} + x_{1,2} &\implies x_{2,2} = x_{1,1} \\ x_{2,2} + x_{3,2} = x_{2,1} + x_{2,2} &\implies x_{3,2} = 0 \\ x_{3,2} + x_{4,2} = x_{3,1} + x_{3,2} &\implies x_{4,2} = 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1,2} + x_{n,2} = x_{n-1,1} + x_{n-1,2} &\implies x_{n,2} = 0 \end{aligned}$$

ستون سوم نتیجه می‌دهد که $x_{3,3} = x_{2,2}$ بنابراین مانند دو ستون قبل برای هر $k \geq 4$ خواهیم داشت $x_{k,3} = 0$ با ادامه این روند روی ستون‌ها به ازای هر i داریم $x_{i,i} = x_{1,1}$ و به ازای هر $j > 4$ داریم $x_{j,k} = 0$ به طوری که X دارای فرم زیر خواهد بود:

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & x_{1,1} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{1,1} \end{bmatrix}$$

حال فرض کنیم $Y \in \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_m)}(P^T)$ پس $YP^T = P^TY$ و اگر ترانهاده‌ی هر دو طرف را بگیریم آنگاه خواهیم داشت $(YP^T) = (P^TY)^T \Rightarrow PY^T = Y^TP$ حال چون که Y^T با P جابه‌جا

می‌شود پس Y^T باید فرمی شبیه به X در بالا داشته باشد پس باید داشته باشیم:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{1,1} & * & \cdots & * \\ y_{2,1} & y_{1,1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots & y_{1,1} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_m)}(P) \cap \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_m)}(P^T) = \left\{ \begin{bmatrix} s & * & \cdots & * \\ * & s & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & s \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_m \right\} = \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_m))$$

□

نتیجه ۶.۲.۳. برای هر $m, n \geq 2$ ، $\text{diam}(\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_m)))$ و $\text{diam}(\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_m)))$ حداقل ۳ است.

برهان. چون بین P و P^T هیچ مسیری وجود ندارد بنابراین $\text{diam}(\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_m)))$ و $\text{diam}(\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_m)))$ حداقل ۳ است.

□

لم ۷.۲.۳. اگر p یک عدد اول و $t \geq 2$ باشد آنگاه برای هر $X \in M(n, \mathbb{Z}_{p^t})$ ، $Y \in M(n, \mathbb{Z}_{p^t})$ طوری وجود دارد که X با $p^{t-1}Y + I \in GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ جابه‌جا می‌شود و $p^{t-1}Y + I \in GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ است.

برهان. فرض کنیم p عددی اول و $t \geq 2$ عددی طبیعی باشد قرار می‌دهیم $X \in M(n, \mathbb{Z}_{p^t})$ ، برای پیدا کردن Y دو قسمت خواهیم داشت:

قسمت اول: برای هر $j \neq i$ ، $u_{i,j} \in \mathbb{Z}_{p^t}$ وجود دارد به طوری که $X_{i,j} = pu_{i,j}$. حال اگر داشته باشیم:

$$T = p^{t-1}E_{1,1} + I \in M(n, \mathbb{Z}_{p^t}) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$$

آنگاه

$$XT = pu_{i,j}(p^{t-1}E_{1,1} + I) = p^t u_{i,j} E_{1,1} + pu_{i,j} I = pu_{i,j} I$$

و

$$TX = (p^{t-1}E_{1,1} + I)(pu_{i,j}) = p^t E_{1,1} u_{i,j} + pu_{i,j} I = pu_{i,j} I$$

بنابراین $TX = XT$. به علاوه

$$\begin{aligned} & (p^{t-1}E_{\lambda,1} + I)((-p^{t-1})E_{\lambda,1} + I) \\ &= p^{t-1}(-p^{t-1})E_{\lambda,1} + p^{t-1}E_{\lambda,1}I - p^{t-1}E_{\lambda,1}I + I \\ &= p^{t-1}(-p^{t-1})E_{\lambda,1} + I = p^t(-p^{t-2})E_{\lambda,1} + I = I \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس $p^{t-1}E_{\lambda,1} + I$ وارون‌پذیر است از طرفی چون تمام عناصر $GL(n, \mathbb{Z}_{p^t})$ ماتریس‌های وارون‌پذیر هستند در نتیجه $p^{t-1}E_{\lambda,1} + I \in GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}) \setminus \mathcal{Z}((n, \mathbb{Z}_{p^t}))$.

قسمت دوم: فرض کنیم v, w متمایز وجود داشته باشد به طوری که برای هر $u \in \mathbb{Z}_{p^t}$ داشته باشیم $X_{v,w} \neq pu$. قرار می‌دهیم $A = p^{t-1}X + I \in M(n, \mathbb{Z}_{p^t})$. چون p فاکتور $X_{v,w}$ نیست پس $A_{v,w} = p^{t-1}X_{v,w} \neq p^{t-1}pu = p^t u = 0$ و از طرفی طبق فرض داریم $u \neq w$ پس ماتریس A قطری نخواهد بود بنابراین اسکالر نیز نیست از طرفی

$$AX = (p^{t-1}X + I)X = p^{t-1}X^2 + IX$$

$$XA = X(p^{t-1}X + I) = p^{t-1}X^2 + IX$$

بنابراین A و X جابه‌جا می‌شوند از طرفی

$$\begin{aligned} & A(-p^{t-1}X + I) \\ &= (p^{t-1}X + I)(-p^{t-1}X + I) \\ &= p^{t-1}(-p^{t-1})X + p^{t-1}XI - p^{t-1}XI + I \\ &= p^t(-p^{t-2})X + I \\ &= I \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس A دارای وارون می‌باشد پس $A = p^{t-1}X + I \in GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}) \setminus \mathcal{Z}((n, \mathbb{Z}_{p^t}))$. $\square$

لم ۸.۲.۳. اگر p یک عدد اول و t یک عدد طبیعی و بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ و $\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ همبند هستند و

$$\text{diam}(\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))) = \text{diam}(\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}))) = 3$$

برهان. فرض کنیم p یک عدد اول و $t \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد و X و Y دو رأس دلخواه در $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ باشند با استفاده از لم ۷.۲.۳، ماتریس‌های $A, B \in M(n, \mathbb{Z}_{p^t})$ وجود دارند، به طوری که

$$p^{t-1}A + I \in \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_{p^t})}(X) \cap GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$$

و

$$p^{t-1}B + I \in \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_{p^t})}(Y) \cap GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} (p^{t-1}A + I)(p^{t-1}B + I) &= p^{t-1}p^{t-1}AB + p^{t-1}AI + p^{t-1}IB + I \\ &= p^t p^{t-2}AB + p^{t-1}AI + p^{t-1}IB + I \\ &= \bullet + p^{t-1}AI + p^{t-1}IB + I \\ &= p^{t-1}p^{t-1}BA + p^{t-1}IA + p^{t-1}BI + I \\ &= (p^{t-1}B + I)(p^{t-1}A + I) \end{aligned}$$

بنابراین $X, Y \in GL(n, \mathbb{Z}_{p^t})$ و اگر $X \sim p^{t-1}A + I \sim p^{t-1}B + I \sim Y$ و $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ نیز مسیری به طول ۳ بین X و Y وجود دارد. بنابراین $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ و $\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}))$ همبند هستند و

$$\text{diam}(\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{p^t}))) = \text{diam}(\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{p^t}))) = 3$$

□

لم ۹.۲.۳. اگر t, s اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ و متباین باشند آنگاه برای هر $X \in M(n, \mathbb{Z}_{st})$ ، $Y \in M(n, \mathbb{Z}_{st})$ و $k \in \mathbb{Z}_{st}$ وجود دارد به طوری که $sY + kI \in \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_{st})}(X) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{st}))$. به علاوه اگر $X \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ آنگاه Y و k می‌توانند طوری انتخاب شوند که $sY + kI \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$.

برهان. فرض کنیم برای هر $i, j \in \mathbb{Z}_{st}$ ، $i \neq j$ وجود دارد به طوری که $X_{i,j} = tu_{i,j}$. حال ماتریس

$$C = sE_{1,1} + I \in M(n, \mathbb{Z}_{st}) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{st}))$$

را در نظر می‌گیریم در این صورت

$$CX = (sE_{1,1} + I)tu = stuE_{1,1} + tIu = tuI$$

$$XC = tu(sE_{1,1} + I) = stuE_{1,1} + tuI = tuI$$

بنابراین $CX = XC$. حال فرض کنیم v, w متمایزی وجود داشته باشند، به طوری که برای هر $u \in \mathbb{Z}_{st}$ داشته باشیم $X_{v,w} \neq tu$ و اگر داشته باشیم $D = sX + I \in M(n, \mathbb{Z}_{st})$ آنگاه

$$XD = tu(sX + I) = stuX + tuI = \bullet + tuI = tuI$$

$$DX = (sX + I)tu = stuX + tIu = \bullet + tuI = tIu$$

بنابراین $DX = XD$. به علاوه $X_{v,w}$ ضربی از t نیست در نتیجه $stu \neq 0$ و چون $v \neq w$ پس $sX + I$ قطری نیست و در نتیجه اسکالر نیز نخواهد بود پس قسمت اول لم ثابت شد. اکنون فرض کنیم X وارون‌پذیر باشد. برای پیدا کردن k, Y مناسب سه حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: $t = 2$ و برای هر $i \neq j$ $u_{i,j} \in \mathbb{Z}_{st}$ وجود دارد به طوری که $X_{i,j} = tu_{i,j}$.

حالت دوم: $t \neq 2$ و برای $i \neq j$ $u_{i,j} \in \mathbb{Z}_{st}$ وجود دارد به طوری که $X_{i,j} = tu_{i,j}$.

حالت سوم: w, v متمایز وجود دارد به طوری که برای هر $u \in \mathbb{Z}_{st}$ داریم $X_{v,w} \neq tu$.

حالت اول: برای هر $x_{i,i}, u_{i,j} \in \mathbb{Z}_{st}$ ماتریس X به فرم زیر می‌باشد:

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & tu_{1,2} & \cdots & tu_{1,n} \\ tu_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & tu_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tu_{n,1} & tu_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم که $\det(X)$ مجموعه ضربی از جایگشت‌های n درایه از ماتریس X با دقیقاً یک درایه از هر سطر و ستون باشد. تمام آن عبارت‌ها در آن مجموعه ضربی از t خواهند داشت بجز عبارت $x_{1,1}x_{2,2}\cdots x_{n,n}$. اگر یکی از $x_{i,i}$ ‌ها ضربی از t باشد آنگاه z ای وجود دارد که $\det(X) = zt$. پس X وارون‌پذیر نیست. بنابراین چون $x_{i,i}$ ‌ها دارای مضربی از t نیستند، با t متباین هستند و چون $t = 2$ بنابراین $x_{i,i}$ ‌ها باید فرد باشند. در صورتی که z زوج باشد خواهیم داشت، $zs \equiv 0 \pmod{st}$ و اگر z فرد باشد آنگاه:

$$zs \equiv s \pmod{st} \quad (1.3)$$

از طرفی چون $x_{i,i}$ ‌ها با t متباین هستند در نتیجه فرد هستند بنابراین برای هر i داریم $sx_{i,i} = s$. فرض کنیم $A = s(E_{1,n} + I) + tI \in M(n, \mathbb{Z}_{st})$ چون طبق فرض t, s اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ و نسبت به هم متباین هستند و چون دترمینان $E_{1,n} + I$ و I مخالف صفر است در نتیجه $I, E_{1,n} + I \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ و بنابر لم ۴.۲.۳،

$$A = \begin{bmatrix} s+t & 0 & \cdots & s \\ 0 & s+t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس وارون‌پذیر است از طرفی چون A یک ماتریس اسکالر نیست بنابراین

$$A \in GL(n, \mathbb{Z}_{st}) \setminus \mathcal{Z}(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))$$

بنابراین

$$AX = \begin{bmatrix} (s+t)x_{1,1} + stu_{n,1} & (s+t)tu_{1,2} + stu_{n,2} & \cdots & (s+t)tu_{1,n} + sx_{n,n} \\ (s+t)tu_{2,1} & (s+t)x_{2,2} & \cdots & (s+t)tu_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s+t)tu_{n,1} & (s+t)tu_{n,2} & \cdots & (s+t)x_{n,n} \end{bmatrix}$$

چون $st = 0$ و $sx_{i,i} = s$ ، پس

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} (s+t)x_{1,1} & (s+t)tu_{1,2} & \cdots & (s+t)tu_{1,n} + s \\ (s+t)tu_{2,1} & (s+t)x_{2,2} & \cdots & (s+t)tu_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s+t)tu_{n,1} & (s+t)tu_{n,2} & \cdots & (s+t)x_{n,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s+t)x_{1,1} & (s+t)tu_{1,2} & \cdots & (s+t)tu_{1,n} + sx_{1,1} \\ (s+t)tu_{2,1} & (s+t)tu_{2,2} & \cdots & (s+t)tu_{2,n} + stu_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s+t)tu_{n,1} & (s+t)tu_{n,2} & \cdots & (s+t)x_{n,n} + stu_{n,1} \end{bmatrix} \\ &= XA \end{aligned}$$

بنابراین $A \in \mathcal{C}_{GL(n, \mathbb{Z}_{st})}(X) \setminus \mathcal{Z}(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))$ و حالت اول برقرار است.

حالت دوم: قرار می‌دهیم

$$A = s(I - 2E_{1,1}) + tI \in M(n, \mathbb{Z}_{st})$$

چون در این رابطه

$$I - 2E_{1,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$$

و هم چنین $I \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ بنابراین A وارون‌پذیر است و چون $t \neq 2$ پس $s \neq -s$ و بنابراین در

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} -s+t & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & s+t & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & s+t \end{bmatrix}$$

$$A_{1,1} = -s+t \neq s+t = A_{2,2}$$

بنابراین A یک ماتریس اسکالر نیست.

حال قرار می‌دهیم $X_{i,i} = x_{i,i}$ و برای هر $i \neq j$ قرار می‌دهیم $X_{i,j} = tu_{i,j}$ در این صورت مانند نمونه قبلی خواهیم داشت:

$$AX = \begin{bmatrix} (-s+t)x_{1,1} & (-s+t)tu_{1,2} & \cdots & (-s+t)tu_{1,n} \\ (s+t)tu_{2,1} & (s+t)x_{2,2} & \cdots & (s+t)tu_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s+t)tu_{n,1} & (s+t)tu_{n,2} & \cdots & (s+t)x_{n,n} \end{bmatrix}$$

از طرفی

$$(-s+t)tu_{i,j} = -stu_{i,j} + t^\vee u_{i,j} = t^\vee u_{i,j},$$

و

$$(s+t)tu_{i,j} = stu_{i,j} + t^\vee u_{i,j} = t^\vee u_{i,j}$$

بنابراین

$$AX = \begin{bmatrix} (-s+t)x_{1,1} & t^\vee u_{1,2} & \cdots & t^\vee u_{1,n} \\ t^\vee u_{2,1} & (s+t)x_{2,2} & \cdots & t^\vee u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^\vee u_{n,1} & t^\vee u_{n,2} & \cdots & (s+t)x_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-s+t)x_{1,1} & (s+t)tu_{1,2} & \cdots & (s+t)tu_{1,n} \\ (-s+t)tu_{2,1} & (s+t)x_{2,2} & \cdots & (s+t)tu_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-s+t)tu_{n,1} & (s+t)tu_{n,2} & \cdots & (s+t)x_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$= XA$$

بنابراین $A \in \mathcal{C}_{GL(n, \mathbb{Z}_{st})} \setminus \mathcal{Z}(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))$ و در این حالت نیز حکم برقرار است.
حالت سوم: در این حالت یک w, v متمایزی وجود دارد به طوری که به ازای هر $u \in \mathbb{Z}_{st}$ داریم:
 $X_{v,w} \neq tu$. قرار می‌دهیم $A = sX + tI \in M(n, \mathbb{Z}_{st})$. که طبق لم ۴.۲.۳، A یک ماتریس وارون‌پذیر است. از طرفی $A_{v,w} = sX_{v,w} \neq stu = 0$ بنابراین $A_{v,w} \neq 0$ و چون $v \neq w$ بنابراین A یک ماتریس اسکالر نیست و

$$AX = (sX + tI)X = sX^2 + tIX$$

$$XA = X(sX + tI) = sX^2 + tXI$$

و بنابراین $AX = XA$ و $A \in \mathcal{C}_{GL(n, \mathbb{Z}_{st})} \setminus \mathcal{Z}(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))$.

□

لم ۱۰.۲.۳. اگر t, s اعداد صحیح بزرگتر از ۱ و نسبت به هم اول باشند آنگاه $\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))$ و $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{st}))$ همبند هستند و $\text{diam}(\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{st}))) = \text{diam}(\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))) = 3$.

برهان. فرض کنیم X, Y رأس‌های دلخواهی در $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{st}))$ باشند با استفاده از ۹.۲.۳،
 $sA + kI \in \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_{st})}(X) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{st}))$ وجود دارند که $k, l \in \mathbb{Z}_{st}$ و $A, B \in M(n, \mathbb{Z}_{st})$
 بنابراین $sA + kl \sim X$ هم چنین $tB + lI \in \mathcal{C}_{M(n, \mathbb{Z}_{st})}(Y) \setminus \mathcal{Z}(M(n, \mathbb{Z}_{st}))$ بنابراین $tB + lI \sim Y$ هم چنین

$$(sA + kI)(tB + lI) = stAB + slAI + ktIB + klI$$

$$= 0 + lsIA + tkBI + klI$$

$$= tsBA + lsIA + tkBI + klI$$

$$= (tB + lI)(sA + kI)$$

بنابراین $(sA + kI) \sim (tB + lI)$ پس $X \sim sA + kl \sim tB + lI \sim Y$ بنابراین $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{st}))$ همبند و با توجه به نتیجه ۶.۲.۳، $\text{diam} \Gamma(M(n, \mathbb{Z}_{st})) = 3$. به علاوه اگر $X, Y \in \Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))$ آنگاه بنابر لم ۹.۲.۳، A, B, l, k می‌توانند طوری انتخاب شوند که $sA + kI \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ و هم چنین $tB + lI \in GL(n, \mathbb{Z}_{st})$ بنابراین رأس‌های متناوب روی مسیرهای داده شده در بالا می‌توانند با معکوس‌هایشان جایگزین شوند، بنابراین $\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{st}))$ همبند است و با توجه به نتیجه ۶.۲.۳، $\text{diam} \Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_{st})) = 3$.

□

لم ۱۱.۲.۳. فرض کنیم $n \geq 2$ و m یک عدد طبیعی مرکب باشد در این صورت $\Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_m))$ و $\Gamma(M(n, \mathbb{Z}_m))$ همبند هستند و $\text{diam} \Gamma(M(n, \mathbb{Z}_m)) = \text{diam} \Gamma(GL(n, \mathbb{Z}_m)) = 3$.

برهان. چون هر عدد مرکب توانی از یک عدد اول یا حاصل ضربی از دو عدد متباین است پس از قضایای ۸.۲.۳ و ۱۰.۲.۳، حکم ثابت می‌شود.

□

۳.۳ قطر گراف جابجایی گروه $ULT(n, p)$

در این بخش برای عدد اول p و عدد صحیح $n \geq 2$ گروه ماتریس‌های پایین مثلثی از درجه n بر $\mathbb{Z}_p$ را که درایه‌های روی قطر اصلی همه ۱ هستند با $ULT(n, p)$ نشان می‌دهیم و همبندی آن را ثابت کرده و قطر گراف آن را بدست می‌آوریم.

لم ۱۰.۳.۳. مرکز گروه $ULT(n, p)$ به صورت زیر است

$$\mathcal{Z}(ULT(n, p)) = \{I_n + aE_{n,1} \mid a \in \mathbb{Z}_p\}$$

برهان. فرض کنیم $M = \{I_n + aE_{n,1} \mid a \in \mathbb{Z}_p\}$ و

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
 XM &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} + a & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned}
 MX &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

پس $\{I_n + aE_{n,1} | a \in \mathbb{Z}_p\} \subseteq \mathcal{Z}(ULT(n, p))$ برعکس فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{Z}(ULT(n, p))$$

. قرار می‌دهیم $B = I_n + E_{i,j}$ که $(i, j) \neq (n, 1)$ و $i > j$.
بنابراین

$$AB = A(I + E_{i,j}) = AI + AE_{i,j}$$

$$BA = (I + E_{i,j})A = IA + E_{i,j}A$$

$$AB = BA \Rightarrow AE_{i,j} = E_{i,j}A$$

با مساوی قراردادن درایه‌های هر دو ماتریس حکم ثابت می‌شود. $\square$

لم ۲.۳.۳. برای عدد اول p و $n \geq 3$ داریم

$$|ULT(n, p) : \mathcal{Z}(ULT(n, p))| = p^2$$

برهان. ابتدا مقدار $|ULT(n, p)|$ و $|\mathcal{Z}(ULT(n, p))|$ را بدست می‌آوریم. ماتریس پایین مثلثی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

چون برای هر درایه، p انتخاب داریم بنابراین

$$p^{n-1} \times p^{n-2} \times \cdots \times p^1 = p^{1+2+\cdots+n-1} = p^{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}} = p^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

حال برای $|\mathcal{Z}(ULT(n, p))|$ داریم $\{I_n + aE_{n,1} | a \in \mathbb{Z}_p\}$.

پس خواهیم داشت $|\mathcal{Z}(ULT(n, p))| = p$ بنابراین اگر $n = 3$ داریم $|\mathcal{Z}(ULT(n, p))| = p$

$\square$ $|\mathcal{Z}(ULT(n, p))| = \frac{p^3}{p} = p^2$ آنگاه $p^{\frac{3(2)}{2}} = p^3$

گزاره ۳.۳.۳. برای عدد اول p ، گروه $ULT(3, p)$ گراف جابجایی غیرهمبند دارد در حالی که برای $n \geq 4$ ، $ULT(n, p)$ دارای قطر ۳ است.

برهان. بنابر لم ۲.۳.۳، $|ULT(3, p) : Z(ULT(3, p))| = p^2$. در نتیجه بنابر قضیه ۵.۳.۲، $\Gamma(ULT(3, p))$ غیرهمبند است. حال فرض کنیم

$$\chi = \{I_n + xE_{n-1,1} + yE_{n,2} | x, y \in \mathbb{Z}_p; x \neq 0 \text{ یا } y \neq 0\}$$

و برای $n \geq 4$ عناصر χ دوبه‌دو جابه‌جا می‌شوند. ماتریس دلخواه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \in ULT(n, p) \setminus Z(ULT(n, p))$$

و عنصر دلخواه

$$X = I_n + xE_{n-1,1} + yE_{n,2} \in \chi$$

را در نظر می‌گیریم. مقادیر x و y را طوری می‌یابیم که $A \sim X$. وقتی که $n \geq 4$ داریم

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} + x & a_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n,1} + xa_{n,n-1} & a_{n,2} + y & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} + x & a_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n,1} + ya_{2,1} & a_{n,2} + y & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

طبق تعریف χ ، یکی از x یا y باید مخالف صفر باشد اگر $a_{2,1} \neq 0$ ، قرار می‌دهیم $x := 1$ آنگاه $y := \frac{a_{n,n-1}}{a_{2,1}}$ است در نتیجه $XA = AX$. و اگر $a_{2,n} = 0$ قرار می‌دهیم $x := 0$ آنگاه $y := 1$

است در نتیجه $AX = XA$. بنابراین برای هر $A \in ULT(n, p) \setminus \mathcal{Z}(ULT(n, p))$ یک $X \in \chi$ وجود دارد به طوری که A با X جابه‌جا می‌شود یعنی $A \sim X$. فرض کنیم $A, B \in ULT(n, p) \setminus \mathcal{Z}(ULT(n, p))$ پس $X, Y \in \chi$ وجود دارند به طوری که $A \sim X$ و $B \sim Y$. از طرفی چون عناصر χ دوبه‌دو جابه‌جا می‌شوند بنابراین $A \sim X \sim Y \sim B$ مسیری به طول ۳ بین A و B در $\Gamma(ULT(n, p))$ است. بنابراین $\Gamma(ULT(n, p))$ همبند و دارای قطر حداکثر ۳ است. در مرحله بعد برای این که نشان دهیم $diam(\Gamma(ULT(n, p))) = ۳$ ، دو ماتریس متعلق به اشتراک مرکزسازهای $ULT(n, p)$ ایجاد می‌کنیم به طوری که درایه‌های آن‌ها روی مرکز $ULT(n, p)$ باشند. قرار می‌دهیم

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

و

$$X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_{۲,۱} & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_{۳,۱} & x_{۳,۲} & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,۱} & x_{n,۲} & x_{n,۳} & \cdots & ۱ \end{bmatrix} \in ULT(n, p)$$

$$\begin{aligned}
 AX &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda + x_{2,1} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ x_{2,1} + x_{3,1} & \lambda + x_{3,2} & \cdots & 0 & 0 \\ x_{3,1} + x_{4,1} & x_{3,2} + x_{4,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} + x_{n,1} & x_{n-1,2} + x_{n,2} & \cdots & \lambda + x_{n,n-1} & \lambda \end{bmatrix} \\
 \\
 XA &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \lambda \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda + x_{2,1} & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{3,2} + x_{3,1} & \lambda + x_{3,2} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ x_{4,1} + x_{4,2} & x_{4,2} + x_{4,3} & x_{4,3} + \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} + x_{n-1,2} & x_{n-1,2} + x_{n-1,3} & x_{n-1,3} & \cdots & \lambda & 0 \\ x_{n,1} + x_{n,2} & x_{n,2} + x_{n,3} & x_{n,3} + x_{n,4} & \cdots & x_{n,n-1} + \lambda & \lambda \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

از طرفی ماتریس A را طوری انتخاب کردیم که درایه‌های آن روی مرکز $ULT(n, p)$ باشند بنابراین $XA = AX$ در نتیجه درایه‌های روی قطر اصلی و همه‌ی درایه‌هایی که در زیر قطر اصلی از چپ بالا تا راست پایین کشیده شده‌اند باهم معادند بنابراین در ستون اول داریم:

$$x_{۳,۱} + x_{۳,۲} = x_{۲,۱} + x_{۳,۱} \Rightarrow x_{۳,۲} = x_{۲,۱}$$

$$x_{۳,۱} + x_{۴,۱} = x_{۴,۱} + x_{۴,۲} \Rightarrow x_{۴,۲} = x_{۳,۱}$$

$\vdots$

$$x_{n,۱} + x_{n,۲} = x_{n-۱,۱} + x_{n-۱,۲} \Rightarrow x_{n,۲} = x_{n-۱,۱}$$

هم چنین در ستون دوم داریم

$$x_{۳,۲} + x_{۴,۲} = x_{۴,۲} + x_{۴,۳} \Rightarrow x_{۳,۲} = x_{۴,۳}$$

$\vdots$

$$x_{n,۲} + x_{n,۳} = x_{n-۱,۲} + x_{n,۲} \Rightarrow x_{n-۱,۲} = x_{n,۳}$$

بنابراین به ازای هر $k \in \{۱, \dots, n\}$ و هر $i \in \{۱, \dots, n-۲\}$ داریم $x_{k+i, ۱+i} = x_{k, ۱}$ و هم چنین همه‌ی درایه‌ها، غیر از قطر اصلی و $x_{n, ۱}$ صفر هستند، حال فرض کنیم X و B با یکدیگر جابه‌جا شوند. قرار می‌دهیم $T := XB = BX = (t_{ij})$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} XB &= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_{۲,۱} & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_{۳,۱} & x_{۳,۲} & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,۱} & x_{n,۲} & x_{n,۳} & \cdots & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ x_{۲,۱} + ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ x_{۳,۱} + x_{۳,۲} & x_{۳,۲} & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-۱,۱} + x_{n-۱,۲} & x_{n-۱,۲} & x_{n-۱,۳} & \cdots & ۱ & ۰ \\ x_{n,۱} + x_{n,۲} & x_{n,۲} & x_{n,۳} & \cdots & x_{n,n-۱} & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ t_{۲,۱} & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n,۱} & t_{n,۲} & \cdots & t_{n,n-۱} & ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

هم چنین

$$\begin{aligned}
 BX &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1+x_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & x_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ستون اول از T را در نظر می‌گیریم پس از محاسبه‌ی BX برای هر $n \geq 3$ داریم $t_{n,1} = x_{n,1}$ و محاسبه‌ی XB نتیجه می‌دهد $t_{n,1} = x_{n,1} + x_{n,2}$ و با معادل قرار دادن این رابطه‌ها برای هر $n \geq 3$ داریم $x_{n,2} = 0$. بنابراین به ازای هر $n \geq 3$ درایه‌های روی $x_{n,2}$ برابر صفر می‌باشد و با معادل قرار دادن درایه‌های XB و BX تمام درایه‌ها غیر از درایه‌های روی قطر اصلی و $x_{n,1}$ برابر صفر است. بنابراین خواهیم داشت

$$\mathcal{C}_{ULT(n,p)}(A) \cap \mathcal{C}_{ULT(n,p)}(B) = \mathcal{Z}(ULT(n,p))$$

□

بنابراین در $\Gamma(ULT(n,p))$ داریم $d(A,B) \geq 3$.

مراجع

- [۱] علیرضا جمالی، مقدمه‌ای بر نظریه‌ی گروه‌های متناهی، چاپ اول، مبتکران، ۱۳۹۱.
- [۲] جان. اس رز، درسی در نظریه‌ی گروه‌ها، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۵.
- [3] S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian and A. Mohammadian, *On commuting graphs of semisimple rings*, Linear algebra and its applications **390** (2004), 345–355.
- [4] S. Akbari, H. Bidkhori and A. Mohammadian, *Commuting graphs of matrix algebras*, Communications in Algebra® **36** (2008), no. 11, 4020–4031.
- [5] J. Araújo, M. Kinyon and J. Konieczny, *Minimal paths in the commuting graphs of semigroups*, European Journal of Combinatorics **32** (2011), no. 2, 178–197.
- [6] C. Bates, D. Bundy, S. Perkins and P. Rowley, *Commuting involution graphs in special linear groups*, Communications in Algebra **32** (2004), no. 11, 4179–4196.
- [7] R. Brauer and K. Fowler, *On groups of even order*, Annals of Mathematics (1955), 565–583.
- [8] B. Fischer, *Finite groups generated by 3-transpositions*, I Inventiones mathematicae **13** (1971), no. 3, 232–246.
- [9] J. A. Galian, *Contemporary Abstract algebra*, Brooks/Cole (2010).
- [10] M. Giudici and A. Pope, *The diameters of commuting graphs of linear groups and matrix rings over the integers modulo m* , arXiv preprint arXiv:1003.0156 (2010).

- [11] A. Iranmanesh and A. Jafarzadeh, *On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups*, Journal of Algebra and its Applications **7** (2008), no. 01, 129–146.
- [12] J. A. Bondy and J. S. R. Murty. *Graph theory with applications*, Elsevier, (1977).
- [13] G. Mackiw, *The linear group $sl(2, 3)$ as a source of examples*, The Mathematical Gazette (1997), 64–67.
- [14] M. B. Nathanson, *Elementary methods in number theory*, vol. 195, Springer Science & Business Media, 2008.
- [15] S. Akbari , A. Mohammadian, H. Radjavi and P. Raja, *On the diameters of commuting graphs*, Linear algebra and its applications **418** (2006), no. 1, 161–176.
- [16] Y. Segev, *The commuting graph of minimal nonsolvable groups*, Geometriae Dedicata **88** (2001), no. 1-3, 55–66.
- [17] Y. Segev and G. M. Seitz, *Anisotropic groups of type A_n and the commuting graph of finite simple groups*, Pacific journal of mathematics **202** (2002), no. 1, 125–225.
- [18] J. Vahidi and A. Talebi, *The commuting graphs on groups $d2n$ and qn* , J. Math. Comput. Sci **1** (2010), 123–127.
- [19] M. Weinstein, *Examples of groups*. Polygonal Publishing House, 1977.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Intersect	اشتراک
Evidently	بدیهی
Involutions	برگشت
Nilpotency	پوچ توان
Contradiction	تناقض
Central product	حاصل ضرب مرکزی
Degree	درجه
Cycle	دور
Vertex	رأس
Conjugacy Class	رده‌ی تزویج
Subgraph Induced	زیر گراف القایی
Cyclic Subgroup	زیر گروه دوری
Critbrion	ضابطه
Wearth product	ضرب حلقوی
Clique Number	عدد خوشه
Element	عنصر
Non-tririal	غیر بدیهی
Diameter	قطر
Bound	کران
Commuting Gragh	گراف جابجایی
Symetric Group	گروه متقارن
Loop	طوقه
Matrix	قطر
Adjacent	مجاور

Disjoint	مجزا
Centraliser	مرکزساز
Orbit	مدار
Path	مسیر
Connected	همبند

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bound	کران
Centraliser	مرکزساز
Central product	حاصل ضرب مرکزی
Clique Number	عدد خوشه
Conjugacy Class	رده‌ی تزویج
Connected	همبند
Contradiction	تناقض
Commuting Gragh	گراف جابجایی
Critbrion	ضابطه
Cycle	دور
Cyclce Subgroup	زیر گروه دوری
Degree	درجه
Diameter	قطر
Disjoint	مجزا
Element	عنصر
Evidently	بدیهی
Intersect	اشتراک
Involutions	برگشت
Loop	طوقه
Matrix	ماتریس
Nilpotency	پوچ توان
Non-tririal	غیر بدیهی
Orbit	مدار

Path.....	مسیر
Subgraph Induced.....	زیر گراف القایی
Symetric Group.....	گروه متقارن
Vertex.....	رأس
Wearth product	ضرب حلقوی

Aabstract

Let G be a group, we denote the center of G , by $\mathcal{Z}(G)$. The commuting graph of a non-abelian group G , denoted by $\Gamma(G)$, is the simple undirected graph whose vertices are the non-central elements of G and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $xy = yx$.

Now this question consider that whether may finding diametrical for commuting graph of finite groups that is more than diameter of S_n which is 5. This question is our primary motivation for this dissertation.

In this dissertation will see the group of all invertible matrices with rank at least 3 over a field of order at least 3 has commuting graph with diameter between 4 and 6 when connected. The group of all invertible matrices with rank at least 2 on $\mathbb{Z}$ has commuting graph with diameter exactly 3. If G is a non-trivial finite solvable group with trivial centre, $\Gamma(G)$ is connected with diameter at most 7.

keywords: commuting graph, diameter graph,connected, clique number.



University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

The Diameter in the Commuting Graph of Group

Masomeh Jamalabady

Supervisor

Dr. Sayyed Heidar Jafari

September 2015