



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

L^p - حل معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک - بعدی با ضرایب پیوسته

استاد راهنما

خانم دکتر الهام دسترنج

استاد مشاور

آقای دکتر سید رضا حجازی

پژوهشگر

مجتبی ملکی

۱۳۹۴

سلام

نام خانوادگی دانشجو: ملکی

نام: مجتبی

عنوان: L^p -حل معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی با ضرایب پیوسته

استاد راهنما: خانم دکتر الهام دسترنج
استاد مشاور: آقای دکتر سید رضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: شاهرود تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۴
دانشکده علوم ریاضی تعداد صفحات: ۱۲۲

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی، L^p - حل، G -امید، توزیع G - نرمال، فرآیند G - برآونی، محاسبات ایتو وابسته، انتگرال ایتو، فرمول ایتو، G -مارتینگل.

چکیده

در این پایان نامه به L^p - حل معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی با ضرایب پیوسته می پردازیم. در فصل اول به پاره ای از تعاریف و مفاهیم اولیه ی مورد نیاز در سایر فصل ها می پردازیم. در فصل دوم معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی در حالت کلاسیک را بررسی می کنیم و نشان می دهیم اگر مولد f در (y, z) به طور یکنواخت پیوسته باشد و مقدار نهایی ξ عضوی از $L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ ($1 \leq p < 2$) باشد، معادله ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی دارای L^p - حل یکتا است. در فصل سوم مفاهیم G -امید و فرآیند G - برآونی آورده شده و سپس وجود و یکتایی حل G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بررسی شده است. در پایان در فصل چهارم G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی مورد مطالعه قرار گرفته و وجود و یکتایی حل این معادلات تحت شرط پیوستگی لیپشیتس توابع f و g ثابت شده است.

تقدیم به همه آنهایی که

می خوانند بیشتر بدانند

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جان‌شین همه نداشتن هست...

^۱ مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، سرکار خانم دکتر الهام دسترنج، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر سید رضا حجازی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. همچنین لازم می‌دانم از پدید آورندگان بسته زی‌پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان‌نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است و نیز از آقای دکتر محمدرضا ربیعی به خاطر پاسخ‌گویی به سوالاتم در مورد L^AT_EX، کمال قدردانی را داشته باشم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیز و همسر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

تعمدنامه

اینجانب مجتبی ملکی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان LP - حل معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی باضرایب پیوسته، تحت راهنمایی خانم دکتر الهام دسترنج متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام دانشگاه شاهرود یا University of Shahrood به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مجتبی ملکی
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Maleki, M., Dastranj, E., Hejazi, R. L^p Solutions of G -Backward Stochastic Differential Equations with Continuous Coefficients *Cumhuriyet University, Faculty of Science, Science Journal (CSJ), Vol., No. (2015) ISSN: 1300-1949*. 2015. Accepted
2. Maleki, M., Dastranj, E., Arazi, A. Existence of Solution for G -BSDE with Quadratic Growth and Unbounded Terminal Value. , Yazd, Iran, August 25-29 2015. University of Yazd.
3. Maleki, M., Dastranj, E., Arazi, A. Stochastic Terminal Times in G -Backward Stochastic Differential Equations. , Yazd, Iran, August 25-29 2015. University of Yazd.
4. Maleki, M., Dastranj, E. G -BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FIXED TERMINAL TIMES. in *12th Seminar on Differential Equations and Dynamical System*, Tabriz, Iran, 27-29 May 2015 . University of Tabriz.
5. Maleki, M., Dastranj, E. ONE-DIMENSIONAL G -BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS. in *12th Seminar on Differential Equations and Dynamical System*, Tabriz, Iran, 27-29 May 2015 . University of Tabriz.
6. Maleki, M., Dastranj, E., Shokri, F. G -Backward Stochastic Differential Equations with Random Terminal Times. in *International Conference on Research in Engineering, Science and Technology* , Istanbul, Turkey, 21 july 2015.

فهرست مطالب

۱	لیست تصاویر
۳	۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۴	۱.۱ مقدمه
۴	۲.۱ مفاهیمی از آنالیز
۷	۱.۲.۱ تکمیل فضاهای نرم‌دار
۸	۳.۱ مفاهیمی از نظریه‌ی اندازه و نظریه‌ی احتمال
۸	۱.۳.۱ فضای احتمال و متغیر تصادفی
۱۳	۲.۳.۱ فرآیند تصادفی
۱۵	۳.۳.۱ امید شرطی
۱۶	۴.۳.۱ مارتینگل
۱۸	۵.۳.۱ انتگرال تصادفی
۱۹	۶.۳.۱ فرمول ایتو
۲۱	۲ مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی در حالت کلاسیک
۲۲	۱.۲ مقدمه
۲۳	۲.۲ بررسی وجودی جواب معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی
۳۳	۳.۲ بررسی یکتایی جواب معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی
۴۵	۳ نگاهی به فرآیند G - برآونی و مفاهیم مشتق شده از آن
۴۶	۱.۳ مقدمه
۴۶	۲.۳ امید غیرخطی: چهارچوب کلی
۵۰	۳.۳ توزیع G - نرمال
۵۲	۴.۳ فرآیند G - برآونی یک بعدی تحت G - امید

۵.۳	انتگرال G - ایتو	۶۰
۱.۵.۳	انتگرال باکنر	۶۰
۲.۵.۳	انتگرال ایتو با استفاده از فرآیند G - برآونی	۶۲
۳.۵.۳	فرآیند با تغییرات مرتبه دوم تولید شده به وسیله فرآیند G - برآونی	۶۴
۴.۵.۳	فرمول ایتو برای فرآیند G - برآونی	۶۹
۶.۳	بیان یک تعمیم	۷۴
۷.۳	معادلات دیفرانسیل تصادفی	۷۶
۴	معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی تولید شده به وسیله فرآیند G - برآونی	۷۹
۱.۴	مقدمه	۸۰
۲.۴	تعاریف و پیش نیازها	۸۱
۳.۴	بیان چند تخمین قیاسی	۸۴
۴.۴	وجود و یکتایی جواب G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی	۹۴
۵.۴	G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی در حالات خاص	۱۰۱
۱.۵.۴	G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با ضرایب پیوسته	۱۰۱
۲.۵.۴	G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با زمان های نهایی ثابت	۱۰۳
۳.۵.۴	G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با زمان های نهایی تصادفی	۱۰۴
۴.۵.۴	G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با رشد درجه دوم و مقدار نهایی غیر کراندار	۱۰۵
۵.۵.۴	G - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی	۱۰۵
۱۰۷	مراجع	
۱۱۱	واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۱۱۵	واژه نامه انگلیسی به فارسی	
۱۱۹	نمایه	

لیست تصاویر

۱.۱ افراز واحد $\{\rho_U, \rho_V\}$ مطیع پوشش باز $\{U, V\}$ است. ۶

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

تعاریف و مفاهیم ارائه شده در این فصل، در سراسر این پایان نامه به کار گرفته می شود. این مفاهیم شامل موضوعاتی در آنالیز تابعی، نظریه اندازه و نظریه احتمال خواهد بود.

۲.۱ مفاهیمی از آنالیز

در این بخش به طور خلاصه مفاهیمی از [۳۶، ۱۰، ۳۹] را یادآوری می کنیم.

تعریف ۱.۱. فضای برداری V مجهز به ترتیب جزئی " $\leq$ " را یک شبکه برداری گوئیم، هرگاه برای هر $x, y \in V$

۱. V دارای کوچکترین عضو باشد که آن را با $x \wedge y$ نشان می دهیم،

۲. V دارای بزرگترین عضو باشد که آن را با $x \vee y$ نشان می دهیم،

۳. اگر $x \leq y$ ، آن گاه برای هر $z \in V$ ، $x + z \leq y + z$ ،

۴. اگر $x \leq y$ و $c \in \mathbb{R}^+$ ، آن گاه $cx \leq cy$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید V فضایی برداری باشد، تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی V گوئیم هرگاه

۱. برای هر $x \in V$ ، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ ،

۲. برای هر $x \in V$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ،

۳. برای هر $x, y \in V$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(V, \|\cdot\|)$ را فضای نرمدار می گوئیم. هرگاه V با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ یک فضای متریک کامل باشد، به آن فضای باناخ^۱ می گوئیم. در ادامه ی این بخش فرض کنید X ، E_1 و E_2 فضاهایی نرمدار باشند.

تعریف ۳.۱. فرض کنید V فضایی برداری باشد. نگاشت $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ را شبه نرم گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in V$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

۱. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

^۱Banach

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \quad ۲.$$

یادآوری ۴.۱. فضای پوچ نگاشت خطی $f : E_1 \rightarrow E_2$ را با $\ker(f)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\ker(f) = \{x \in E_1 \mid f(x) = 0\}.$$

تذکر ۵.۱. در هر فضای نرم‌دار $(E, \|\cdot\|)$ ، نگاشت $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت پیوسته است.

قضیه ۶.۱. نگاشت خطی $f : E_1 \rightarrow E_2$ پیوسته است اگر و فقط اگر در یک نقطه پیوسته باشد.

برهان. فرض کنید f در $x_0 \in E_1$ پیوسته باشد و فرض کنید $x \in E_1$ و $x \rightarrow (x_n)$ ، در این صورت $x_0 \rightarrow (x_n - x + x_0)$ ، بنابراین

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \|f(x_n - x + x_0) - f(x)\| \rightarrow 0.$$

□

قضیه ۷.۱. فرض کنید M زیر فضایی از فضای نرم‌دار X و f تابعی خطی و پیوسته روی M باشد. در این صورت f قابل گسترش به تابع خطی و پیوسته روی X است.

□

برهان. به [۳۶] مراجعه کنید.

تعریف ۸.۱. نگاشت خطی $f : E_1 \rightarrow E_2$ را کراندار گوییم هرگاه $K \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in E_1$

$$\|f(x)\| \leq K\|x\|.$$

قضیه ۹.۱. فرض کنید E_1 و E_2 فضاهایی نرم‌دار باشند. نگاشت خطی $f : E_1 \rightarrow E_2$ پیوسته است اگر و فقط اگر کراندار باشد.

توجه ۱۰.۱. برای هر نگاشت خطی، پیوستگی و پیوستگی یکنواخت با هم معادلند.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید E یک فضای نرم‌دار و $A \subseteq E$. نگاشت $f : A \rightarrow E$ را انقباضی گوییم هرگاه $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|, \quad 0 < \alpha < 1.$$

تعریف ۱۲.۱. تابع $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم، هرگاه

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1 : \varphi((1-s)a + sb) \leq (1-s)\varphi(a) + s\varphi(b).$$

تابع φ را مقعر گوییم هرگاه $(-\varphi)$ محدب باشد.

نامساوی یانگ^۲. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی نامنفی و p و q دو عدد حقیقی مثبت باشند که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ در این صورت

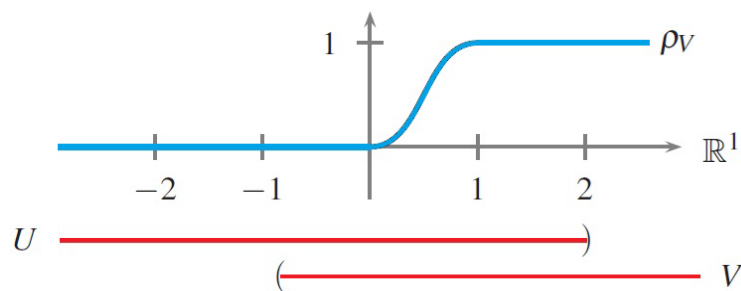
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید Y فضایی توپولوژیکی باشد و $E \subseteq Y$. افزایی واحد از E گردآیه‌ای مانند $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از توابع متعلق به $C(Y)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

- برای هر $x \in Y$ و $\alpha \in I$ ، $0 \leq h_\alpha(x) \leq 1$ ،
- برای هر $x \in Y$ ، همسایگی‌ای از x موجود باشد که تنها تعداد متناهی از h_α ‌ها روی آن غیرصفر باشند،
- برای هر $x \in E$ ، $\sum_{\alpha \in I} h_\alpha(x) = 1$.

تعریف ۱۴.۱. افزای واحد $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از $E \subseteq Y$ را مطیع (وابسته) پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از E می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\alpha \in I$ ، $\text{supp}(h_\alpha) \subseteq U_\alpha$.

مثال ۱۵.۱. فرض کنید U و V به ترتیب بازه‌های باز $(-\infty, 2)$ و $(-1, \infty)$ در $\mathbb{R}$ باشند و ρ_V تابعی با نمودار در شکل ۱۰.۱ باشد. فرض کنید $\rho_U = 1 - \rho_V$. در این صورت $\text{supp}(\rho_V) \subseteq V$ و $\text{supp}(\rho_U) \subseteq U$. در نتیجه $\{\rho_U, \rho_V\}$ یک افزای واحد مطیع پوشش باز $\{U, V\}$ است.



شکل ۱۰.۱: افزای واحد $\{\rho_U, \rho_V\}$ مطیع پوشش باز $\{U, V\}$ است.

^۲Young's inequality

۱.۲.۱ تکمیل فضاهای نرم‌دار

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ فضایی نرم‌دار باشد. فضای نرم‌دار $(\tilde{E}, \|\cdot\|_1)$ را تکمیل فضای $(E, \|\cdot\|)$ گوئیم هرگاه، نگاشت خطی و یک به یک $\Phi: E \rightarrow \tilde{E}$ وجود داشته باشد که

$$\bullet \text{ برای هر } x \in E, \quad \|x\| = \|\Phi(x)\|_1,$$

$$\bullet \Phi(E) \text{ در } \tilde{E} \text{ چگال باشد,}$$

$$\bullet \tilde{E} \text{ کامل باشد.}$$

فضای $\tilde{E}$ به صورت زیر ساخته می‌شود.

رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ را روی E به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای هر دو دنباله‌ی کوشی (x_n) و (y_n) در E داریم

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim \|x_n - y_n\| = 0.$$

قرار می‌دهیم

$$\tilde{E} = \frac{E}{\sim} = \{[(x_n)] \mid (x_n) \text{ دنباله‌ای کوشی در } E \text{ است}\}.$$

جمع و ضرب اسکالر را روی $\tilde{E}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)], \quad \lambda[(x_n)] = [(\lambda x_n)].$$

همچنین نرم $\|\cdot\|_1$ را روی $\tilde{E}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|[(x_n)]\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

روشن است که فضای E را می‌توان به کمک گردآیه‌ی تمام دنباله‌های کوشی ثابت از آن شناسایی کرد. نگاشت خطی و یک به یک $\Phi: E \rightarrow \tilde{E}$ به کمک این دنباله‌های کوشی ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi(x) = [(x_n)]; \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n = x.$$

روشن است که

$$\bullet \text{ برای هر } x \in E, \quad \|x\| = \|\Phi(x)\|_1,$$

$$\bullet \Phi(E) \text{ در } \tilde{E} \text{ چگال است:}$$

زیرا برای هر عضو $[(x_n)]$ از $\tilde{E}$ ، دنباله‌ی کوشی (x_n) از E وجود دارد که $\Phi((x_n)) \rightarrow [(x_n)]$.

• $\tilde{E}$ باناخ است:

فرض کنید $(\tilde{x}_n)$ دنباله‌ای کوشی در $\tilde{E}$ باشد. بنابراین دنباله‌ی (x_n) در E وجود دارد که

$$\|\Phi(x_n) - \tilde{x}_n\|_1 < \frac{1}{n}.$$

ادعا می‌کنیم که (x_n) یک دنباله‌ی کوشی است،

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|\Phi(x_n) - \Phi(x_m)\|_1 \\ &\leq \|\Phi(x_n) - \tilde{x}_n\|_1 + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_1 + \|\tilde{x}_m - \Phi(x_m)\|_1 \\ &\leq \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\tilde{x} = [(\tilde{x}_n)]$ در این صورت

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_1 &\leq \|\tilde{x}_n - \Phi(x_n)\|_1 + \|\Phi(x_n) - \tilde{x}\|_1 \\ &< \frac{1}{n} + \|\Phi(x_n) - \tilde{x}\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

۳.۱ مفاهیمی از نظریه‌ی اندازه و نظریه‌ی احتمال

در این بخش به طور خلاصه به یادآوری مفاهیمی از [۲۷، ۱، ۱۳، ۳۸، ۳۹] می‌پردازیم.

۱.۳.۱ فضای احتمال و متغیر تصادفی

تعریف ۱۷.۱. دسته‌ی ناتهی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω ، را یک σ -میدان می‌نامیم هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد.

$$\emptyset \in \mathcal{F},$$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F},$$

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σ -میدان روی Ω باشد. زوج $(\Omega, \mathcal{F})$ را یک فضای اندازه‌پذیر می‌گوییم.

تعریف ۱۸.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. تابع $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ را اندازه‌گویم هرگاه،

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad \bullet$$

• برای هر دنباله $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از مجموعه‌های دو به دو مجزای $\mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n).$$

سه تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را فضای اندازه می‌گوییم. مجموعه‌ی $A \in \mathcal{A}$ را μ -پوچ می‌نامیم هرگاه $\mu(A) = 0$.

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و رابطه‌ای متضمن عناصر X داشته باشیم. می‌گوییم این رابطه تقریباً همه جا (Almost everywhere یا a.e.) برقرار است هرگاه مجموعه‌ی A متشکل از همه‌ی نقاطی که به ازای آن‌ها این رابطه برقرار نیست، مجموعه‌ای μ -پوچ باشد.

تعریف ۲۰.۱. یک اندازه احتمال روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ تابعی مانند $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1,$$

برای هر دنباله $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از مجموعه‌های دو به دو مجزای $\mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n).$$

سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را فضای احتمال می‌گوییم.

تعریف ۲۱.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را کامل می‌نامیم هرگاه $\mathcal{F}$ شامل تمام زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی P -پوچ باشد.

به روشنی، هر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را می‌توان با اضافه کردن زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی P -پوچ به $\mathcal{F}$ کامل نمود.

تعریف ۲۲.۱.

قضیه ۲۳.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\},$$

و

$$\bar{\mathcal{A}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{A} \text{ و برای } N \in \mathcal{N} \text{ داشته باشیم } F \subset N\}.$$

در این صورت $\bar{\mathcal{A}}$ یک σ -میدان است و توسیع یکتای $\bar{\mu}$ از μ به عنوان یک اندازه کامل روی $\bar{\mathcal{A}}$ وجود دارد.

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۲۴.۱. σ -میدان $\mathcal{A}$ را کامل شده σ -میدان $\mathcal{A}$ نسبت به اندازه μ می‌نامیم.

زیر مجموعه‌ی A از Ω را $\mathcal{F}$ -اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه $A \in \mathcal{F}$ ، که در اصطلاح احتمال آن را پیشامد می‌نامند.

قرارداد ۲۵.۱. اگر $P(A) = 1$ می‌گوییم پیشامد A با احتمال ۱ رخ می‌دهد یا A قریب به یقین (*Almost surely* یا *a.s.*) رخ می‌دهد.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید $\mathcal{U}$ گردآیه‌ای از زیر مجموعه‌های Ω باشد. کوچکترین σ -میدان شامل $\mathcal{U}$ را σ -میدان تولید شده توسط $\mathcal{U}$ می‌گوییم. اگر $\Omega = \mathbb{R}^n$ ، σ -میدان تولید شده توسط زیر مجموعه‌های باز Ω را σ -میدان بورل می‌گوییم (توپولوژی مفروض روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ ، توپولوژی استاندارد است).

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ دو فضای اندازه باشند. برای $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{B}$ ، $A \times B$ را یک راست گوشه می‌گوییم. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

σ -میدان تولید شده توسط $A \times B$ را با $A \otimes B$ نشان می‌دهیم و به آن σ -میدان حاصلضربی می‌گوییم و در این صورت $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر است.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، تابع $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ را اندازه‌پذیر یا $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر می‌گوییم هرگاه

$$f^{-1}(U) := \{x \in X; f(x) \in U\} \in \mathcal{A}, \quad U \in \mathcal{B}.$$

تابع $Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ را در نظر بگیرید. σ -میدان $\mathcal{F}_Y$ تولید شده توسط Y ، کوچکترین σ -میدان روی Ω شامل مجموعه‌های

$$Y^{-1}(B); \quad B \in \mathcal{B},$$

می‌باشد، به عبارت دیگر

$$\mathcal{F}_Y = \{Y^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}.$$

به وضوح Y نسبت به $\mathcal{F}_Y$ ، اندازه‌پذیر است.

لم ۲۹.۱. فرض کنید $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ دو تابع باشند، در این صورت $\mathcal{F}_X, Y$ - اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر تابع بول اندازه‌پذیر $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که

$$Y = f \circ X.$$

برهان. به [۲۷] مراجعه شود. $\square$

قرارداد ۳۰.۱. از این پس، همه جا منظور از $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ - میدان مفروض روی آن σ - میدان بول است.

تعریف ۳۱.۱. تابع اندازه‌پذیر $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ را یک متغیر تصادفی می‌نامیم. هر متغیر تصادفی $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ یک اندازه احتمال روی $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ به صورت زیر القا می‌کند که آن را توزیع متغیر تصادفی X می‌نامیم و با نماد P_X نشان می‌دهیم.

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ باشند. اندازه μ_1 را نسبت به μ_2 مطلقاً پیوسته گوئیم و می‌نویسیم $\mu_1 \ll \mu_2$ ، هرگاه

$$\forall A \in \mathcal{F}; \mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0.$$

تعریف ۳۳.۱. متغیر تصادفی X را پیوسته گوئیم هرگاه P_X نسبت به اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ ، مطلقاً پیوسته باشد.

تعریف ۳۴.۱. برای متغیر تصادفی $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ، امید ریاضی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X) := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x).$$

لم ۳۵.۱. برای هر $0 < \lambda < 1$

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b. \quad (۱.۱)$$

برهان. نامساوی برای هر یک از حالت‌های $a = 0$ و $b = 0$ یا $a = b$ ، در این صورت تابع $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $g(t) = t^{1-\lambda}$ تعریف می‌کنیم. به روشنی این تابع پیوسته و مشتق پذیر است. بنا بر قضیه مقدار میانگین داریم

$$\exists c \in (a, b); g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{b - a} = (1-\lambda) \frac{1}{c^\lambda}.$$

$$\begin{aligned}
 0 < \lambda < 1 &\implies (1-\lambda)\frac{1}{c^\lambda} < (1-\lambda)\frac{1}{a^\lambda}, \\
 &\implies \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{b^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}}{b-a} < (1-\lambda)\frac{1}{a^\lambda}, \\
 &\implies b^{1-\lambda}-a^{1-\lambda} < (1-\lambda)(b-a)\frac{1}{a^\lambda}, \\
 &\implies a^\lambda b^{1-\lambda} - a < (1-\lambda)b + a\lambda - a, \\
 &\implies a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b.
 \end{aligned}$$

□

لم ۳۶.۱ (نامساوی هولدر^۲). فرض کنید $p, q > 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، در این صورت

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \cdot \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}.$$

برهان. در حالتی که $\mathbb{E}[|X|^p] = 0$ یا $\mathbb{E}[|Y|^q] = 0$ به روشنی نتیجه برقرار است. فرض کنید

$$\begin{aligned}
 &0 \neq \mathbb{E}[|X|^p] \text{ و } 0 \neq \mathbb{E}[|Y|^q], \text{ با فرض } \lambda = \frac{1}{p} \text{ قرار می‌دهیم} \\
 a &:= \frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]}, \quad b := \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]}.
 \end{aligned}$$

با توجه به این که $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ بنا بر لم قبل داریم

$$\begin{aligned}
 a^\lambda b^{1-\lambda} &\leq \lambda a + (1-\lambda)b. \\
 \frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]},
 \end{aligned}$$

از طرفین این نامساوی $\mathbb{E}[\cdot]$ می‌گیریم

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[\frac{|XY|}{\mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \cdot \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]}\right] \\
 &= \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\mathbb{E}[|Y|^q]}{\mathbb{E}[|Y|^q]} = 1, \\
 &\implies \mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \cdot \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

□

تعریف ۳۷.۱. واریانس متغیر تصادفی X را با $\sigma^2(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma^2(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

^۲Holder

به طور کلی اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد و $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| dP(\omega) < \infty$ آنگاه

$$E[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dP_X(x).$$

تعریف ۳۸.۱. دو پیشامد A و B را مستقل می‌نامیم هرگاه

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

تعریف ۳۹.۱. دو متغیر تصادفی $X, Y: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ را مستقل گوئیم هرگاه σ -میدان‌های تولید شده توسط X و Y یعنی $\mathcal{F}_X$ و $\mathcal{F}_Y$ مستقل از هم باشند. یعنی برای هر $A \in \mathcal{F}_X$ و $B \in \mathcal{F}_Y$ داشته باشیم

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

۲.۳.۱ فرآیند تصادفی

در سراسر این بخش مقصود از $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال مفروض است. همچنین σ -میدان مفروض روی فضاهاى اقلیدسی σ -میدان بورل است.

تعریف ۴۰.۱. خانواده‌ی $\{X_t\}_{t \in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک فرآیند تصادفی می‌نامیم (مجموعه‌ی اندیس‌گذار I می‌تواند شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر باشد).

تعریف ۴۱.۱. برای هر $\omega \in \Omega$ ، نگاشت $t \rightarrow X_t(\omega)$ را یک مسیر می‌نامیم.

تعریف ۴۲.۱. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \in I}$ را از راست پیوسته گوئیم هرگاه هر مسیر آن یک تابع از راست پیوسته باشد. فرآیند تصادفی X را کدلاگ^۴ گوئیم هرگاه، از راست پیوسته و از چپ دارای حد متناهی باشد.

تعریف ۴۳.۱. خانواده‌ی $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ از زیر σ -میدان‌های $\mathcal{F}$ را یک فیلتر می‌نامیم هرگاه برای هر $s \leq t$ داشته باشیم $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. گوئیم فیلتر $\mathbb{F}$ در شرایط معمول صدق می‌کند هرگاه،

• $\mathcal{F}_0$ شامل تمام مجموعه‌های P -پوچ باشد،

• $\mathbb{F}$ پیوسته راست باشد، یعنی $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$.

^۴Càdlàg

تعریف ۴۴.۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار می‌گوییم هرگاه برای هر $X_t \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$ ، یعنی، متغیر تصادفی $X_t, \mathcal{F}_t$ - اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۴۵.۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ و $\mathbb{G}$ دو فیلتر باشند. می‌گوییم فیلتر $\mathbb{G}$ از فیلتر $\mathbb{F}$ بزرگ‌تر است و می‌نویسیم $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ ، هرگاه

$$\forall t, \quad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t.$$

تعریف ۴۶.۱. فیلتر طبیعی فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ، کوچکترین فیلتر مانند $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ است که در شرایط معمول صدق می‌کند و $\{X_t\}_{t \geq 0}$ نسبت به آن سازگار است (و برای هر $t \geq 0$)
 $(\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t))$.

تعریف ۴۷.۱. فرآیند تصادفی از راست پیوسته‌ی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را روی بازه $[0, 1]$ با تغییر متناهی گوییم هرگاه

$$V_X(t, \omega) := \sup \sum_{i=1}^n |X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega)| = \int_0^t |dX_s(\omega)|,$$

a.s. متناهی باشد، که در آن سوپریم روی افرازهای متناهی $[0, 1]$ مانند

$$(0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1),$$

گرفته شده است.

تعریف ۴۸.۱. فرآیند تصادفی X را تدریجی یا به تدریج اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $t \geq 0$ نگاشت حقیقی $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ روی $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t)$ اندازه‌پذیر باشد.

توجه ۴۹.۱. هر فرآیند تدریجی سازگار و اندازه‌پذیر است. اگر X تدریجی باشد، آنگاه

$$E \left[\int_0^\infty X_t dt \right] = \int_0^\infty E[X_t] dt.$$

تعریف ۵۰.۱. فرآیند تصادفی سازگار $\{X_t\}_{t \in I}$ را صعودی گوییم هرگاه $X_0 = 0$ و داشته باشیم
 $(t_1 \leq t_2 \leq \dots) \Rightarrow (0 = X_0 \leq X_{t_1} \leq X_{t_2} \leq \dots)$.

به علاوه هرگاه مجموعه‌ی I پیوسته باشد، چنین فرآیندی را یک فرآیند صعودی پیوسته می‌نامیم.

تعریف ۵۱.۱. فرض کنید $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ یک فیلتر روی $\mathcal{F}$ باشد. به فرآیند تصادفی سازگار $W = \{W_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ حرکت براونی استاندارد^۵ گوییم هرگاه داشته باشیم

$$\text{الف) } W_0 = 0, \text{ a.s.}$$

^۵Standard Brownian motion

ب) برای هر $0 \leq s < t$ ، متغیر تصادفی $W_t - W_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $t - s$ باشد،

ج) متغیرهای تصادفی $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_r} - W_{t_{r-1}}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ برای $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ مستقل باشند (گوییم W_t دارای نمونه‌های مستقل است).

حرکت براونی استاندارد را فرآیند وینر^۶ نیز می‌گوییم. $-n$ تایی $(W_t^1, \dots, W_t^n)$ از فرآیندهای وینر مستقل $W_t^1, \dots, W_t^n$ (در $\mathbb{R}$) را یک فرآیند وینر $-n$ بعدی (در $\mathbb{R}^n$) می‌گوییم.

۳.۳.۱ امید شرطی

تعریف ۵۲.۱. فرض کنید μ یک اندازه روی $(X, \mathcal{A})$ باشد. μ را σ -متناهی گوییم هرگاه، دنباله‌ای مانند $X_1, X_2, \dots$ از اعضای $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و $\forall n \geq 1, \mu(X_n) < \infty$.

تعریف ۵۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد و فرض کنید $\mathcal{D}$ زیر σ -میدانی از $\mathcal{F}$ و Y متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Y به شرط $\mathcal{D}$ یک متغیر تصادفی $\mathcal{D}$ -اندازه‌پذیر است که آن را با $E(Y|\mathcal{D})$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall D \in \mathcal{D}, \int_D E(Y|\mathcal{D}) dP = \int_D Y dP.$$

قضیه ۵۴.۱ (رادون نیکودیم^۷). فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه σ -متناهی روی $(X, \mathcal{A})$ باشند به طوری که $\mu_1 \ll \mu_2$. تابع $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر و μ_2 -انتگرال‌پذیر f روی X وجود دارد که $f \geq 0$ و

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu_1(A) = \int_A f d\mu_2.$$

توجه ۵۵.۱. وجود امید شرطی برای متغیر تصادفی نامنفی Y ، از قضیه‌ی مشتق رادون نیکودیم به سادگی نتیجه می‌شود.

تعریف ۵۶.۱. برای متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر دلخواه، امید شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(Y|\mathcal{D}) = E(Y^+|\mathcal{D}) - E(Y^-|\mathcal{D}),$$

که در آن برای هر ω ، $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), 0\}$ و $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), 0\}$.

^۶Wiener process

^۷Radon-Nikodym

قضیه ۵۷.۱ (نامساوی جنسن)^۸. فرض کنید $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد و متغیرهای تصادفی Y و $\varphi(Y)$ انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت

$$\varphi(E(Y|\mathcal{D})) \leq E(\varphi(Y)|\mathcal{D}), \quad \text{a.s.}$$

فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.

لم ۵۸.۱ (فاتو)^۹. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی فضای $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشند، در این صورت

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

برهان. به $[۱۰]$ رجوع کنید. □

قضیه ۵۹.۱ (قضیه همگرایی تسلطی). فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر باشد و تابعی انتگرال‌پذیر مانند g وجود داشته باشد که برای هر n داشته باشیم $|f_n| \leq g$. اگر $f_n \rightarrow f$ *a.e.*، آنگاه f تابعی انتگرال‌پذیر است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

برهان. به $[۱۰]$ رجوع کنید. □

۴.۳.۱ مارتینگل

تعریف ۶۰.۱. دنباله‌ی $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ از متغیرهای تصادفی را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ مارتینگل^{۱۰} می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر n ، X_n انتگرال‌پذیر باشد. یعنی برای هر n ، $E(|X_n|) < \infty$ ،

۲. نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد،

۳. برای هر n ، $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ ، *a.s.*

تعریف ۶۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ قابل پیش‌بینی گوئیم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، متغیر تصادفی X_n ، $\mathcal{F}_{n-1}$ - اندازه‌پذیر باشد.

^۸Jensen's Inequality

^۹Fatou

^{۱۰}Martingale

تعریف ۶۲.۱. نگاشت $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ را زمان توقف (یا زمان مارکوف) نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ گوئیم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

گزاره ۶۳.۱. فرض کنید $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$. در این صورت τ یک زمان توقف است اگر و تنها اگر برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

برهان. به [۳۹] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۶۴.۱. فرض کنید τ و ν دو زمان توقف نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ باشند. بازه تصادفی $[\nu, \tau]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[\nu, \tau] = \{(t, \omega) : \nu(\omega) < t \leq \tau(\omega)\}.$$

به σ -میدان تولید شده در $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ به وسیله‌ی بازه‌های تصادفی $[\nu, \tau]$ ، که در آن $\nu \leq \tau$ ، σ -میدان قابل پیش‌بینی می‌گوئیم.

تعریف ۶۵.۱. خانواده‌ی $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ از متغیرهای تصادفی انتگرال‌پذیر را به طور یکنواخت انتگرال‌پذیر گوئیم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، $M > 0$ موجود باشد که

$$\forall \alpha \in I \quad E(|X_\alpha| \chi_{\{|X_\alpha| > M\}}) = \int_{\{|X_\alpha| > M\}} |X_\alpha| dP < \epsilon.$$

تعریف ۶۶.۱. دنباله‌ی $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ از زمان‌های توقف را یک دنباله‌ی موضعی می‌نامیم هرگاه، برای هر $n \geq 1$ و $T_n \geq T_{n-1}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ a.s.

تعریف ۶۷.۱. فرآیند سازگار و از راست پیوسته‌ی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را مارتینگل موضعی می‌نامیم هرگاه دنباله‌ای موضعی از زمان‌های توقف $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر n فرآیند

$$\{X_{T_n \wedge t} \chi_{\{T_n > 0\}} : t \geq 0\},$$

یک مارتینگل به طور یکنواخت انتگرال‌پذیر باشد.

تعریف ۶۸.۱. فرآیند با تغییر متناهی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را یک فرآیند با تغییر متناهی موضعی (موضعا با تغییر متناهی) می‌نامیم هرگاه دنباله‌ای موضعی از زمان‌های توقف $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ وجود داشته باشد به طوری که فرآیند $\{X_{T_n \wedge t}\}_{t \geq 0}$ یک فرآیند با تغییر متناهی باشد.

تعریف ۶۹.۱. فرآیند تصادفی $\mathbb{R}^d$ -مقدار X را یک نیم مارتینگل پیوسته d -بعدی می‌نامیم هرگاه هر مولفه‌ی X^i از آن دارای تجزیه‌ای به صورت $X^i = M^i + A^i$ باشد، که M^i یک مارتینگل موضعی پیوسته با $M^i_0 = 0$ و A^i یک فرآیند پیوسته و سازگار موضعا با تغییر متناهی است.

۵.۳.۱ انتگرال تصادفی

فرض کنید $0 \leq s < T$ و $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد. می‌خواهیم انتگرال

$$\int_s^T f(t, \omega) dB_t(\omega),$$

را تعریف کنیم که $B_t(\omega)$ یک حرکت براونی یک-بعدی است. برای این منظور، ابتدا این انتگرال را برای رده‌ای از توابع ساده تعریف می‌کنیم و آنگاه توابع کلی‌تر را از طریق تقریب آن‌ها با توابع ساده بررسی می‌کنیم. ابتدا فرض کنید f یک تابع ابتدایی باشد؛ یعنی اعداد حقیقی a و b که $a < b$ و متغیر تصادفی X موجود باشد که $\mathcal{F}_a, X$ اندازه پذیر است و

$$f(t, \omega) = X(\omega)I_{(a,b]}(t),$$

که I تابع مشخصه است. در این صورت

$$\int_a^t f(s, \omega) dB_s(\omega) = X(\omega)(B_{b \wedge t}(\omega) - B_{a \wedge t}(\omega)). \quad (2.1)$$

حال فرض کنید f یک تابع ساده باشد، یعنی

$$f = \sum_{j=0}^N f_j,$$

که f_j ها توابع ابتدایی به صورت بالا هستند. در این صورت

$$\int_a^t f(s, \omega) dB_s(\omega) = \sum_{j=0}^N \int_a^t f_j(s, \omega) dB_s(\omega). \quad (3.1)$$

تعریف ۷۰.۱. رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t, \omega)$ روی مجموعه‌ی $[0, \infty) \times \Omega$ ، رده‌ای از توابع است با این ویژگی‌ها

• تابع $f(t, \omega) \rightarrow (t, \omega) \in \mathcal{B} \times \mathcal{F}$ اندازه‌پذیر باشد،

• به ازای هر t ، تابع $f(t, \cdot) \in \mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیر باشد،

• برای هر $0 \leq T < \infty$ ، $E \left[\int_0^T f^2(s, \omega) ds \right] < \infty$.

لم ۷۱.۱ (لم ایزومتري ایتو). اگر تابع $\phi(t, \omega)$ کراندار و ابتدایی باشد، آنگاه

$$E \left[\left(\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \phi^2(t, \omega) dt \right].$$

□

برهان. به [۲۷] مراجعه کنید.

قضیه ۷۲.۱. اگر $f \in \mathcal{P}_2$ ، آنگاه دنباله‌ی $\{f_n\}$ از توابع ساده موجود است که برای هر T ،

$$E \left[\int_0^T (f(s) - f_n(s))^2 ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

برهان. به [۲۷] مراجعه کنید.

نتیجه ۷۳.۱. برای $f \in \mathcal{P}_2$ ، دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}$ موجود است که

$$E \left[\int_0^T |f(s) - \phi_n(s)|^2 ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$I[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega).$$

این حد به عنوان عضوی از $L^2(\Omega, P)$ وجود دارد زیرا طبق لم ایزومتري ایتو دنباله‌ی

$$\int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

دنباله‌ای کوشی در $L^2(\Omega, P)$ است.

۶.۳.۱ فرمول ایتو

تعریف ۷۴.۱. فرض کنید $(B_t)_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. یک انتگرال تصادفی یک-بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s(\omega).$$

که معادل است با

$$dX_t = u dt + v dB_t.$$

قضیه ۷۵.۱ (فرمول یک-بعدی ایتو^{۱۱}). فرض کنید $dX_t = u dt + v dB_t$ و $Y_t = g(t, X_t)$ ، در این صورت

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2.$$

توجه ۷۶.۱. داریم

$$(dB)^2 = dt, \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0.$$

مثال ۷۷.۱. فرض کنید $Y_t = B_t^2$ ، در این صورت $g(t, x) = x^2$ لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2,$$

با استفاده از فرمول ایتو داریم

$$dY_t = 2B_t dB_t + dt.$$

^{۱۱}Ito

قضیه ۷۸.۱ (فرمول کلی ایتو). فرض کنید $dX_t = udt + vdB_t$ یک انتگرال تصادفی n -بعدی و $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک نگاشت C^2 باشد. در این صورت

$$Y(t, \omega) = g(t, X_t),$$

یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_i dX_j.$$

توجه ۷۹.۱. داریم

$$dB_i \cdot dB_j = \delta_{ij} dt, \quad dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0.$$

مثال ۸۰.۱. اگر $X_t = B_1(t) + B_2(t)$ ، آنگاه $g(t, x) = x_1 + x_2$ لذا $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$ ، $\frac{\partial g}{\partial x_i} = 1$ ، $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \delta_{ij}$.

بنابراین

$$dX_t = \sum_{i=1}^2 1 \cdot B_i dB_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta_{ij} dB_i dB_j = 1(B_1 dB_1 + B_2 dB_2 + dt).$$

فصل ۲

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل تصادفی
بازگشتی یک- بعدی در حالت کلاسیک

در این فصل معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک- بعدی با ضرایب پیوسته را در حالت کلاسیک مورد مطالعه قرار می‌دهیم. پس به پاره‌ای از قضایای اساسی، در وجود و یکتایی حل این معادلات می‌پردازیم.

یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی (BSDE) معادله‌ای به شکل زیر است

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

که در آن فرآیندهای تصادفی Y و Z نامعلوم هستند و تابع تصادفی $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ و متغیر تصادفی ξ که به ترتیب مولد و مقدار نهایی نامیده می‌شوند، داده شده‌اند.

۱.۲ مقدمه

BSDEها برای اولین بار توسط بیسموت^۱ [۲] در یک فرم خطی در سال ۱۹۷۳ معرفی شدند. او پس از آن وجود و یکتایی جوابی کراندار را برای معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی ریکاتی غیرخطی نشان داد [۳]. پارادوکس^۲ و پنگ^۳ [۲۸] از جمله افرادی بودند که روی BSDEهای غیرخطی معمولی مطالعه و در سال ۱۹۹۰ وجود و یکتایی جواب‌های سازگار این نوع معادلات را اثبات کردند. از آن پس BSDEها به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفتند و در شاخه‌های مختلف علوم مانند ریاضیات مالی، کنترل تصادفی و معادلات دیفرانسیل جزئی ورود پیدا کردند. یک سوال مهم در این زمینه این است که چطور می‌توان نتایج وجود و یکتایی پارادوکس و پنگ را با تضعیف شرط پیوستگی لپشیتس^۴ روی مولد f بهبود بخشید؟ در این جا به بیان برخی تلاش‌های انجام شده در این زمینه می‌پردازیم. در حالت یک- بعدی، لپلتیر^۵ و سان‌مارتین^۶ با ساختن دنباله‌ای یکنوا از توابع پیوسته‌ی لپشیتس که به مولد f میل می‌کند و استفاده از قضیه‌ی مقایسه در [۱۸] وجود جوابی مینیمال را برای BSDE که در آن مولد f در (y, z) پیوسته است و رشدی خطی دارد، اثبات کردند. کابیلانسکی^۷ [۱۶] نتیجه‌ای وجودی را زمانی که f در (y, z) پیوسته است و دارای رشدی درجه دوم در z بوده و شرط نهایی کراندار است،

^۱Bismut

^۲Pardoux

^۳Peng

^۴Lipschitz

^۵Lepeltier

^۶San Martin

^۷Kobylanski

اثبات نمود. زمانی که شرط نهایی کراندار نیست، براینده^۸ و هو^۹ [۵، ۴] به ترتیب نتایج وجود و یکتایی را ارائه کردند. جی‌آی^{۱۰} در [۱۴] یکتایی جواب را زمانی که مولد f به طور یکنواخت در z پیوسته، و در y پیوسته‌ی لپشیتس یا یکنواخت است را به دست آورده است.

در این فصل وجود و یکتایی L^p - حل یک BSDE یک- بعدی را زمانی که مولد f نسبت به (y, z) به طور یکنواخت پیوسته است و مقدار نهایی $\xi \in L^p$ ($1 < p \leq 2$) را اثبات می‌کنیم. این فصل به صورت زیر طبقه بندی شده است. بخش ۲.۲ به وجود L^p - حل BSDE ها با ضرایب پیوسته پرداخته است. بخش ۳.۲ شامل اثبات یکتایی L^p - حل BSDE ها با ضرایب پیوسته یکنواخت است.

۲.۲. بررسی وجودی جواب معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی

در این بخش به طور خلاصه به بررسی وجود L^p - حل BSDE ها می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا به یادآوری چند لم و قضیه از [۶، ۱۸] می‌پردازیم و سپس مفاهیم و قضایای اصلی [۷] را بیان می‌کنیم. در زیر به معرفی نمادهایی که در سراسر این بخش استفاده می‌شود، می‌پردازیم.

قرارداد ۱.۲. در سراسر این بخش فرض کنید

- (۱) فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال کامل و $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ حرکت براونی استاندارد d - بعدی (با مقادیر در $\mathbb{R}^d$) روی آن باشد و T عددی ثابت و مثبت باشد.
- (۲) مجموعه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ نشانگر فیلتر طبیعی حرکت براونی W ، کامل شده به وسیله‌ی مجموعه‌های P - پوچ $\mathcal{F}$ است.
- (۳) $\mathcal{D}$ زیر σ - میدان قابل پیش بینی $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}^0[0, T]$ و p عددی دلخواه و از این پس ثابت از بازه‌ی $(1, 2]$ است.

(۴) برای $n \in \mathbb{N}$ و $x, y \in \mathbb{R}^n$ ، تعریف می‌کنیم

$$|x| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \langle x, y \rangle \triangleq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(۵) مجموعه‌ی تمام فرایندهای $\mathcal{D}$ - اندازه‌پذیر و $\mathbb{R}^d$ - مقدار $\{\eta_t\}_{t \in [0, T]}$ را با $H^p(\cdot, T; \mathbb{R}^d)$ یا به صورت

^۸ Braind

^۹ Hu

^{۱۰} Jia

ساده‌تر با H_d^p نشان می‌دهیم، که

$$\|\eta\|_{H_d^p} \triangleq \left\{ E \left[\left(\int_0^T |\eta(t)|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

(۶) مجموعه‌ی تمام فرآیندهای سازگار و پیوسته‌ی یک- بعدی $\{\eta(t)\}_{t \in [0, T]}$ را که

$$\|\eta\|_{S^p} \triangleq \left[E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

را با $S^p(0, T; \mathbb{R})$ و یا به طور ساده‌تر با S^p نشان می‌دهیم.

(۷) $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ یا به طور ساده‌تر L^p نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار $\mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر ξ است به طوری که

$$\|\xi\|_{L^p} \triangleq (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که فضاهای $(H_d^p, \|\cdot\|_{H_d^p})$ و $(S^p, \|\cdot\|_{S^p})$ باناخ هستند.

از این پس فرض کنید

A1 مولد $f: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\mathcal{D} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1})$ -اندازه‌پذیر است، داریم

$$\forall (t, \omega, y, z) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad |f(t, \omega, y, z)| \leq K(1 + |y| + |z|),$$

که در آن K عددی ثابت و مثبت است.

A2 برای هر $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ ، $f(t, y, z)$ در (y, z) پیوسته است.

A3 مقدار نهایی ξ متعلق به L^p می‌باشد.

قضیه ۲.۲. اگر $\xi \in L^2$ و $A1$ و $A2$ برقرار باشند، معادله (۱.۲) دارای جواب (Y, Z) در $S^2 \times H_d^2$ است.

□

برهان. به [۱۸] مراجعه کنید.

توجه ۳.۲. به طریقی مشابه با [۱۸] ثابت می‌کنیم که تحت شرایط $A3$ - $A1$ معادله‌ی (۱.۲) دارای

جواب ماکسیمال $(\bar{Y}, \bar{Z}) \in S^p \times H_d^p$ و جواب مینیمال $(\underline{Y}, \underline{Z}) \in S^p \times H_d^p$ به مفهوم زیر است.

برای هر جواب $(Y, Z) \in S^p \times H_d^p$ از معادله‌ی (۱.۲) داریم

$$\forall 0 \leq t \leq T, \quad \underline{Y}_t \leq Y_t \leq \bar{Y}_t, \quad \text{a.s.}$$

قرارداد ۴.۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم

$$\underline{f}_n(t, y, z) \triangleq \inf_{(u, v) \in \mathbb{R}^{d+1}} \{f(t, u, v) + n(|y - u| + |z - v|)\}, \quad (2.2)$$

$$\bar{f}_n(t, y, z) \triangleq \sup_{(u, v) \in \mathbb{R}^{d+1}} \{f(t, u, v) - n(|y - u| + |z - v|)\}. \quad (3.2)$$

$\underline{f}_n$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \underline{f}_n(t, y, z) = \inf_{(u, v) \in \mathbb{R}^{d+1}} \{f(t, y - u, z - v) + n(|u| + |v|)\}.$$

لم ۵.۲. برای هر $n \geq K$ توابع $\bar{f}_n$ و $\underline{f}_n$ دارای ویژگی‌های زیر هستند

(i) رشد خطی: برای هر (t, ω, y, z) داریم

$$-K(|y| + |z| + 1) \leq \underline{f}_n(t, y, z) \leq f(t, y, z) \leq \bar{f}_n(t, y, z) \leq K(|y| + |z| + 1);$$

(ii) یکنوایی در n : برای هر (t, ω, y, z) ، $\bar{f}_n \geq \bar{f}_{n+1}$ و $\underline{f}_n \leq \underline{f}_{n+1}$ ؛

(iii) پیوستگی لپشیتس: برای $(t, \omega, y, z), (t, \omega, y', z') \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ داریم

$$|\underline{f}_n(t, y, z) - \underline{f}_n(t, y', z')| \leq n(|y - y'| + |z - z'|),$$

$$|\bar{f}_n(t, y, z) - \bar{f}_n(t, y', z')| \leq n(|y - y'| + |z - z'|);$$

(iv) همگرایی قوی: اگر $(y_n, z_n) \rightarrow (y, z)$ آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n(t, y_n, z_n) = f(t, y, z),$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(t, y_n, z_n) = f(t, y, z).$$

□

برهان. به [۱۸] مراجعه کنید.

دو BSDE زیر را در نظر می‌گیریم.

$$Y_t = \xi + \int_t^T \underline{f}_n(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad n \geq K, \quad (4.2)$$

و

$$U_t = \xi + \int_t^T K(1 + |U_s| + |V_s|) ds - \int_t^T V_s dW_s. \quad (5.2)$$

قضیه‌ی زیر وجود و یکتایی $-L^p$ حل BSDE ها را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۲. فرض کنید $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l \times d} \rightarrow \mathbb{R}^l$ ، $\mathcal{D} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{l+d})$ -اندازه‌پذیر باشد و داشته باشیم:

(i) ثابت $\lambda \geq 0$ و $\mu \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که، برای هر

$$(t, y, y', z, z') \in [0, T] \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l \times d} \times \mathbb{R}^{l \times d}$$

داشته باشیم

$$|g(t, y, z) - g(t, y, z')| \leq \lambda |z - z'|, \quad \langle y - y', g(t, y, z) - g(t, y', z) \rangle \leq \mu |y - y'|^2, \quad \text{a.s.},$$

(ii) $a.s.$ ، برای هر $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{l \times d}$ ، نگاشت $y \mapsto g(t, y, z)$ پیوسته است،

(iii) $\forall r > 0$ ، $\Phi_r(t) \triangleq \sup_{|y| \leq r} |g(t, y, 0) - g(t, 0, 0)| \in L^1([0, T] \times \Omega, dt \times dP)$

اگر (Y, Z) یکتای حل $BSDE$ (۱.۲) بسته به (ξ, g) دارای حل یکتای (Y, Z) در $(S^p \times H_d^p)^l$ است. به علاوه ثابت C وابسته به μ, λ و p و T وجود دارد، به طوری که

$$E \left[\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^p \right) + \left(\int_0^T |Z_t|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} \right] \leq CE \left[|\xi|^p + \left(\int_0^T |g(t, 0, 0)|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} \right].$$

□

برهان. به [۶] مراجعه کنید.

توجه ۷.۲. از قضیه ۶.۲ می دانیم که دو معادله (۳۲.۴) و (۳۳.۴) دارای جوابهای یکتایی در $S^p \times H_d^p$ هستند، که به ترتیب آنها را با $(\underline{Y}^n, \underline{Z}^n)$ و (U, V) نشان می دهیم. از قضیه مقایسه در [۹] داریم

$$\forall n \geq m \geq K, \quad \underline{Y}_t^m \leq \underline{Y}_t^n \leq U_t, \quad \forall t \in [0, T], \quad a.s. \quad (6.2)$$

لم ۸.۲. عدد ثابت L وجود دارد، به طوری که

$$\forall n \geq K, \quad \|(\underline{Y}^n, \underline{Z}^n)\|_{S^p \times H_d^p} \leq L, \quad \|(U, V)\|_{S^p \times H_d^p} \leq L.$$

برهان. با توجه به قضیه ۶.۲ و رابطه (۶.۲) ثابت D موجود است که

$$\sup_{n \geq K} \|\underline{Y}^n\|_{S^p} \leq D, \quad \|U\|_{S^p} \leq D, \quad \|V\|_{H_d^p} \leq D. \quad (7.2)$$

از فرمول ایتو برای $(\underline{Y}^n)^2$ و نامساوی $2ab \leq \epsilon a^2 + (\epsilon)^{-1} b^2$ داریم

$$\begin{aligned} (\underline{Y}^n)^2 + \int_0^T |\underline{Z}_t^n|^2 dt &= \xi^2 + 2 \int_0^T \underline{Y}_t^n f_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) dt - 2 \int_0^T \underline{Y}_t^n \underline{Z}_t^n dW_t \\ &\leq \xi^2 + 2K \int_0^T |\underline{Y}_t^n| (1 + |\underline{Y}_t^n| + |\underline{Z}_t^n|) dt + 2 \left| \int_0^T \underline{Y}_t^n \underline{Z}_t^n dW_t \right| \\ &\leq \xi^2 + 2KT \sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n| + 2KT \sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n|^2 \\ &\quad + \int_0^T \left(\frac{K^2}{\epsilon} |\underline{Y}_t^n|^2 + \epsilon |\underline{Z}_t^n|^2 \right) dt + 2 \left| \int_0^T \underline{Y}_t^n \underline{Z}_t^n dW_t \right|. \end{aligned}$$

قرار می دهیم $\epsilon = \frac{1}{K}$ ، در این صورت

$$\int_0^T |\underline{Z}_t^n|^2 dt \leq 2\xi^2 + 4KT \sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n| + 4KT(K+1) \sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n|^2 + 4 \left| \int_0^T \underline{Y}_t^n \underline{Z}_t^n dW_t \right|.$$

و در نتیجه

$$E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} \right] \leq C_p E \left(|\xi|^p + \sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n|^{\frac{p}{2}} + \sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n|^p + \left| \int_0^T \underline{Y}_t^n \underline{Z}_t^n dW_t \right|^{\frac{p}{2}} \right),$$

که C_p ثابتی وابسته به K ، T و p است. به علاوه از نامساوی BDG داریم

$$\begin{aligned} C_p E \left(\left| \int_0^T \underline{Y}_t^n \underline{Z}_t^n dW_t \right|^{\frac{p}{p-1}} \right) &\leq C_p E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \underline{Y}_s^n \underline{Z}_s^n dW_s \right|^{\frac{p}{p-1}} \right) \\ &\leq C_p E \left[\left(\int_0^T |\underline{Y}_t^n|^2 |\underline{Z}_t^n|^2 dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \right] \\ &\leq C_p E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n|^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n|^2 dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \right] \\ &\leq \epsilon E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n|^2 dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \right] + \epsilon^{-1} C_p^p E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n|^p \right). \end{aligned}$$

□ مجدداً قرار می‌دهیم $\epsilon = \frac{1}{p}$. به این ترتیب به موجب رابطه‌ی (۷.۲) به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

اکنون به بیان توسیعی از فرمول معروف ایتو می‌پردازیم. فرض کنید $\hat{y} \triangleq \frac{y}{|y|} \chi_{\{y \neq 0\}}$

لم ۹.۲. نیم-مارتینگال $\mathbb{R}^l$ -مقدار $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ تعریف شده به صورت

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

را در نظر بگیرید که در آن $\{K_t\}_{t \in [0, T]}$ و $\{H_t\}_{t \in [0, T]}$ دو فرآیند به تدریج اندازه‌پذیر و به ترتیب دارای مقادیر در $\mathbb{R}^l$ و $\mathbb{R}^{l \times d}$ هستند و

$$\int_0^T (|K_t| + |H_t|^2) dt < \infty \quad \text{a.s.}$$

در این صورت برای هر $p \geq 1$ داریم

$$\begin{aligned} &|X_t|^p - \chi_{\{p=1\}} L_t \\ &= |X_0|^p + p \int_0^t |X_s|^{p-1} \langle \widehat{X}_s, K_s \rangle ds + p \int_0^t |X_s|^{p-1} \langle \widehat{X}_s, H_s dW_s \rangle \\ &\quad + \frac{p}{2} \int_0^t |X_s|^{p-2} \chi_{\{X_s \neq 0\}} \{ (2-p)(|H_s|^2 - \langle \widehat{X}_s, H_s H_s^* \widehat{X}_s \rangle) + (p-1)|H_s|^2 \} ds, \end{aligned}$$

که در آن $\{L_t\}_{t \in [0, T]}$ فرآیندی صعودی و پیوسته است و $L_0 = 0$. این فرآیند تنها روی مرز مجموعه تصادفی $\{t \in [0, T], X_t = 0\}$ صعود می‌کند.

□ برهان. به [۶] مراجعه کنید.

لم ۱۰.۲. $(\underline{Y}^n, \underline{Z}^n)$ دنباله‌ای کوشی^{۱۱} در $S^p \times H_d^p$ است.

^{۱۱}Cauchy

برهان. حد دنباله‌ی صعودی (Y^n) را با $\underline{Y}$ نشان می‌دهیم. دنباله‌ی $(\underline{Y}^n)$ در S^p کراندار است، پس از لم فاتو و قضیه‌ی همگرایی تسلطی داریم

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t|^p \right) < \infty, \quad (۸.۲)$$

$$E \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t|^p dt \rightarrow 0. \quad (۹.۲)$$

اکنون نشان می‌دهیم $(\underline{Y}^n)_{n \geq K}$ دنباله‌ای کوشی در S^p است. طبق لم ۹.۲ برای هر $m, n \geq K$ با قرار دادن $X_t = \underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m$ ، $K_t = \underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)$ و $H_t = -(\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m)$ داریم

$$\begin{aligned} & |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p + \frac{p(p-1)}{2} \int_t^T |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{p-2} \chi_{\{\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m \neq 0\}} |\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s^m|^2 ds \\ & \leq p \int_t^T |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m}) [\underline{f}_n(s, \underline{Y}_s^n, \underline{Z}_s^n) - \underline{f}_m(s, \underline{Y}_s^m, \underline{Z}_s^m)] ds \\ & \quad - p \int_t^T |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m}) (\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s^m) dW_s. \end{aligned} \quad (۱۰.۲)$$

از نامساوی BDG و نامساوی هولدر داریم

$$\begin{aligned} & E \left(\left| \int_0^T |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m}) (\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s^m) dW_s \right| \right) \\ & \leq E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m}) (\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s^m) dW_s \right| \right) \\ & \leq C_p E \left[\left(\int_0^T |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{2p-2} |\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s^m|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \leq C_p E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-1} \left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \leq C_p \left(E \sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left\{ E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \\ & < \infty, \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد مارتینگل موضعی

$$\int_0^t |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m}) (\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s^m) dW_s, \quad t \in [0, T]$$

یک مارتینگل است. بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱۰.۲) داریم

$$\begin{aligned} & E \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-2} \chi_{\{\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m \neq 0\}} |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \\ & \leq \frac{2}{p-1} E \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m}) [\underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)] dt. \quad (11.2) \end{aligned}$$

همچنین از نامساوی هولدر و نامساوی $2ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1} b^2$ داریم

$$\begin{aligned} & E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p \right) \\ & \leq pE \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-1} |\underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)| dt \\ & \quad + 2pE \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t |\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^n - \underline{Y}_s^m}) (\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s^m) dW_s \right| \right) \\ & \leq pE \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-1} |\underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)| dt \\ & \quad + 2pC_p E \left[\left(\int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{2p-2} \chi_{\{\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m \neq 0\}} |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \leq pE \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-1} |\underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)| dt \\ & \quad + 2pC_p E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-2} \chi_{\{\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m \neq 0\}} |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \leq pE \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-1} |\underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)| dt \\ & \quad + \epsilon^{-1} p^2 C_p^2 E \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-2} \chi_{\{\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m \neq 0\}} |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \\ & \quad + \epsilon E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p \right). \quad (12.2) \end{aligned}$$

با قرار دادن $\epsilon = \frac{1}{p}$ و استفاده از روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} & E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p \right) \\ & \leq C_p E \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{p-1} |\underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)| dt \\ & \leq C_p \left(E \int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(E \int_0^T |\underline{f}_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - \underline{f}_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

از رشد خطی f_n ، لم ۸.۲ و نامساوی هولدر داریم

$$\begin{aligned}
 & E \int_0^T |f_n(t, Y_t^n, Z_t^n) - f_m(t, Y_t^m, Z_t^m)|^p dt \\
 & \leq C_p E \int_0^T (1 + |Y_t^n|^p + |Z_t^n|^p + |Y_t^m|^p + |Z_t^m|^p) dt \\
 & \leq C_p \left(T + T \|Y_t^n\|_{S^p}^p + T \|Y_t^m\|_{S^p}^p + T^{\frac{p-1}{p}} \|Z_t^n\|_{H_d^p}^p + T^{\frac{p-1}{p}} \|Z_t^m\|_{H_d^p}^p \right) \\
 & < \infty.
 \end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

بنابراین از روابط (۹.۲) و (۱۳.۲)، خواهیم داشت

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t^m|^p \right) = 0.$$

اکنون ثابت می‌کنیم که دنباله‌ی (Z^n) دنباله‌ای کوشی در H_d^p است. از فرمول ایتو برای $(Y_t^n - Y_t^m)^2$ ، داریم

$$\begin{aligned}
 & (Y_t^n - Y_t^m)^2 + \int_0^t |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \\
 & = 2 \int_0^t (Y_s^n - Y_s^m) [f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)] ds \\
 & \quad - 2 \int_0^t (Y_s^n - Y_s^m) (Z_s^n - Z_s^m) dW_s \\
 & \leq 2 \int_0^t |Y_s^n - Y_s^m| |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)| ds \\
 & \quad + 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (Y_s^n - Y_s^m) (Z_s^n - Z_s^m) dW_s \right|.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 & E \left[\left(\int_0^T |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\
 & \leq C_p E \left[\left(\int_0^T |Y_s^n - Y_s^m| |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)| ds \right)^{\frac{p}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (Y_s^n - Y_s^m) (Z_s^n - Z_s^m) dW_s \right| \right)^{\frac{p}{2}} \right].
 \end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

از طرفی از نامساوی BDG و $ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1}b^2$ داریم

$$\begin{aligned} & C_p E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m)(\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m) dW_t \right|^{\frac{p}{q}} \right) \\ & \leq C_p E \left[\left(\int_0^T |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^2 |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] \\ & \leq C_p E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] \\ & \leq \epsilon E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] + \epsilon^{-1} C_p^2 E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p \right). \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\epsilon = \frac{1}{p}$ ، در این صورت با توجه به رابطه‌ی (۱۴.۲) و نامساوی هولدر داریم

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] \\ & \leq C_p \left[E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p \right) \right]^{\frac{1}{q}} \left\{ E \left[\left(\int_0^T |f_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) - f_m(t, \underline{Y}_t^m, \underline{Z}_t^m)|^2 dt \right)^p \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{1}{p} E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] + 2C_p^2 E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^n - \underline{Y}_t^m|^p \right). \end{aligned}$$

از طرفی دنباله‌ای کوشی در S^p است، پس

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^2 dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] = 0.$$

□

قرارداد ۱۱.۲. حد دنباله‌ی $(\underline{Z}^n)$ در H_d^p را با $\underline{Z}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۲. $(\underline{Y}, \underline{Z})$ جوابی مینیمال برای معادله‌ی (۱۰.۲) است.

برهان. از تعریف $\underline{Y}$ داریم

$$\underline{Y}^n \rightarrow \underline{Y}, \quad \text{a.s..}$$

از لم ۸.۲ و رابطه‌ی (۶.۲) خواهیم داشت

$$G \triangleq \sup_{n \geq K} |\underline{Y}^n| \in L^1([0, T] \times \Omega, dt \otimes dP).$$

پس از نامساوی هولدر، داریم

$$\begin{aligned} E \int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m| dt &\leq T^{\frac{1}{p}} E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &\leq T^{\frac{1}{p}} \left\{ E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t^m|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

بنابراین در صورت نیاز می‌توان زیر دنباله‌ای را در نظر گرفت، که

$$\underline{Z}^n \rightarrow \underline{Z}, \quad \text{a.s.},$$

$$H \triangleq \sup_{n \geq K} |\underline{Z}^n| \in L^1([0, T] \times \Omega, dt \otimes dP).$$

در این صورت، از (i) و (iv) در لم ۵.۲ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n) = f(t, \underline{Y}_t, \underline{Z}_t), \quad \text{a.s.},$$

و

$$\begin{aligned} |f_n(t, \underline{Y}_t^n, \underline{Z}_t^n)| &\leq K \left(1 + \sup_{n \geq K} |\underline{Y}_t^n| + \sup_{n \geq K} |\underline{Z}_t^n| \right) \\ &= K(1 + G_t + H_t) \in L^1([0, T], dt). \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^T f_n(s, \underline{Y}_s^n, \underline{Z}_s^n) ds = \int_t^T f(s, \underline{Y}_s, \underline{Z}_s) ds, \quad \text{a.s.}$$

از نامساوی BDG، داریم

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_t^T (\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s) dW_s \right| \right) \leq C_p E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^n - \underline{Z}_t|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

بنابراین، مجدداً در صورت نیاز می‌توان زیر دنباله‌ای در نظر گرفت، که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_t^T (\underline{Z}_s^n - \underline{Z}_s) dW_s \right| \right) = 0, \quad \text{a.s.}$$

در نهایت

$$|Y_t^n - Y_t^m| \leq \int_t^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)| ds + \left| \int_t^T (Z_s^n - Z_s^m) dW_s \right|.$$

با حد گرفتن از دو طرف رابطه‌ی فوق نسبت به m و سوپریم‌گیری روی t ، خواهیم داشت

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t| \leq \int_0^T |f_n(t, Y_t^n, Z_t^n) - f(t, Y_t, Z_t)| dt + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_t^T (Z_s^n - Z_s) dW_s \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{a.s.},$$

که نتیجه می‌دهد (Y^n) در t به طور یکنواخت به Y همگراست.

بنابراین Y فرآیندی پیوسته و $(Y, Z) \in S^p \times H_d^p$ جوابی برای معادله‌ی (۱.۲) است.

برای هر جواب $(Y, Z) \in S^p \times H_d^p$ از (۱.۲)، قضیه مقایسه برای $n \geq K$ نتیجه می‌دهد

$$Y_t^n \leq Y_t, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{a.s.}$$

□ اشاره دارد به $Y \leq Y$ ، بنابراین (Y, Z) جوابی مینیمال برای معادله‌ی (۱.۲) است.

تذکر ۱۳.۲. برای $n \geq K$ ، جواب $BSDE$ زیر را با $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)$ نشان می‌دهیم

$$Y_t = \xi + \int_t^T \bar{f}_n(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s. \quad (15.2)$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد، فرآیند حدی $(\bar{Y}, \bar{Z})$ از دنباله‌ی $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)_{n \geq K} \subset S^p \times H_d^p$ جوابی ماکسیمال برای معادله‌ی (۱.۲) است.

۳.۲ بررسی یکتایی جواب معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی

در این بخش ابتدا به یادآوری مفاهیم و قضایای مربوط به یکتایی $-L^p$ حل از [۷، ۱۴، ۱۱] می‌پردازیم و سپس یکتایی جواب معادله‌ی (۱.۲) را زمانی که f به طور یکنواخت نسبت به (y, z) پیوسته است، بررسی می‌کنیم.

همدین در [۱۱] فرضیات زیر را روی مولد $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l \times d} \rightarrow \mathbb{R}^l$ در نظر گرفت.

A4 f به طور یکنواخت در y پیوسته است، (به طور یکنواخت نسبت به (t, ω, z)). تابع غیرنزولی و پیوسته $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ وجود دارد که

$$\phi(0) = 0,$$

$$\forall x > 0, \quad 0 < \phi(x) \leq A(x + 1),$$

که A عددی ثابت و مثبت است. و

$$\int_{\circ+} [\phi(x)]^{-1} dx = \infty,$$

و داریم

$$\forall t, y, y', z, \quad |f(t, y, z) - f(t, y', z)| \leq \phi(|y - y'|), \quad \text{a.s.};$$

A5 f به طور یکنواخت در z پیوسته است، (به طور یکنواخت نسبت به (t, ω, y)) پیوسته است، تابع پیوسته‌ی $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ وجود دارد، که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$\varphi(\circ) = \circ,$$

$$\forall x > \circ, \quad \circ \leq \varphi(x) \leq B(x + 1),$$

که B عددی ثابت و مثبت است. و

$$\forall t, y, z, z', \quad |f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq \varphi(|z - z'|), \quad \text{a.s.};$$

A5' تابع $z \rightarrow f(t, y, z)$ نسبت به (ω, t, y) به طور یکنواخت پیوسته‌ی لیشیتس است؛

A6 i -امین مولفه‌ی f_i از f فقط به i -امین سطر ماتریس z ، برای $1 \leq i \leq l$ وابسته است.

تذکر ۱۴.۲. معادله بازگشتی غیر احتمالی

$$u(t) = \gamma + \int_t^T \phi(u(s)) ds, \quad \circ \leq t \leq T, \quad (16.2)$$

دارای جواب یکتای $u^\gamma \in \mathbb{R}^+$ است. به علاوه

$$\lim_{\gamma \rightarrow \circ+} u^\gamma(\circ) = \circ.$$

□

برهان. به [۱۱] مراجعه کنید.

قضیه ۱۵.۲. فرض کنید $\xi \in (L^2)^l$. تابع $\mathcal{D} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2l+d})$ -اندازه‌پذیر

$$f: [\circ, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l \times d} \rightarrow \mathbb{R}^l,$$

و $\{f(t, \circ, \circ)\}_{t \in [\circ, T]} \in H_l^2$ را در نظر بگیرید. اگر f در $A6$ - $A4$ صدق کند، آنگاه $BSDE$ دارای جوابی در $(S^2 \times H_d^2)^l$ خواهد بود. به علاوه، اگر f در $A4$ ، $(A5')$ و $(A6)$ صدق کند، آنگاه $BSDE$ وابسته به (f, ξ) دارای جواب یکتایی در $S^2 \times H_d^2$ است.

□

برهان. به [۱۱] مراجعه کنید.

قضیه ۱۶.۲. فرض کنید $f: [\circ, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی $\mathcal{D} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -اندازه‌پذیر باشد و در $A1$ و $A5$ صدق کند. در این صورت اگر $\xi \in L^2$ ، $BSDE$ وابسته به (f, ξ) دارای جواب یکتایی در $S^2 \times H_d^2$ خواهد بود.

□

برهان. به [۱۴] مراجعه کنید.

قضیه ۱۷.۲. تحت شرایط (A1)، (A3)–(A5) زوج یکتای $(Y, Z) \in S^p \times H_d^p$ وجود دارد که معادله (۱۰.۲) را حل می‌کند.

برای اثبات این قضیه ابتدا به بیان چند لم به صورت زیر می‌پردازیم.

لم ۱۸.۲. فرض کنید $C \triangleq \max\{K, A, B\}$. برای $n > C$ توابع $\underline{f}_n$ و $\bar{f}_n$ تعریف شده در بخش ۲.۲ ویژگی‌های زیر را دارند

$$(v) \quad (t, \omega, y, y', z, z') \in [\circ, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

$$|\underline{f}_n(t, y, z) - \underline{f}_n(t, y', z)| \leq \phi(|y - y'|), \quad |\underline{f}_n(t, y, z) - \underline{f}_n(t, y, z')| \leq \varphi(|z - z'|),$$

$$|\bar{f}_n(t, y, z) - \bar{f}_n(t, y', z)| \leq \phi(|y - y'|), \quad |\bar{f}_n(t, y, z) - \bar{f}_n(t, y, z')| \leq \varphi(|z - z'|).$$

$$(vi) \quad (t, \omega, y, z) \in [\circ, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

$$\circ \leq f(t, y, z) - \underline{f}_n(t, y, z) \leq \phi\left(\frac{3C}{n-C}\right) + \varphi\left(\frac{3C}{n-C}\right),$$

$$\circ \leq \bar{f}_n(t, y, z) - f(t, y, z) \leq \phi\left(\frac{3C}{n-C}\right) + \varphi\left(\frac{3C}{n-C}\right).$$

□

برهان. به [۷] مراجعه کنید.

برای $n > C$ دلخواه و ثابت، دو دنباله‌ی $(\bar{Y}^{n,k}, \bar{Z}^{n,k})_{k \geq \circ}$ و $(\underline{Y}^{n,k}, \underline{Z}^{n,k})_{k \geq \circ}$ را به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(\bar{Y}^{n,\circ}, \bar{Z}^{n,\circ}) \equiv (\circ, \circ), \quad (17.2)$$

$$\bar{Y}_t^{n,k} = \xi + \int_t^T \bar{f}_n(s, \bar{Y}_s^{n,k-1}, \bar{Z}_s^{n,k}) ds - \int_t^T \bar{Z}_s^{n,k} dW_s,$$

و

$$(\underline{Y}^{n,\circ}, \underline{Z}^{n,\circ}) \equiv (\circ, \circ), \quad (18.2)$$

$$\underline{Y}_t^{n,k} = \xi + \int_t^T \underline{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \underline{Z}_s^{n,k}) ds - \int_t^T \underline{Z}_s^{n,k} dW_s.$$

چون L^p -حل را برای $1 < p \leq 2$ در نظر می‌گیریم، نیاز داریم، ثابت کنیم که دنباله‌های $(\bar{Y}^{n,k}, \bar{Z}^{n,k})_{k \geq \circ}$ و $(\underline{Y}^{n,k}, \underline{Z}^{n,k})_{k \geq \circ}$ به ترتیب به $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)$ و $(\underline{Y}^n, \underline{Z}^n)$ در $S^p \times H_d^p$ همگرا هستند.

لم ۱۹.۲. زمانی که $k \rightarrow \infty$ داریم

$$(\underline{Y}^{n,k}, \underline{Z}^{n,k}) \rightarrow (\underline{Y}^n, \underline{Z}^n),$$

و

$$(\overline{Y}^{n,k}, \overline{Z}^{n,k}) \rightarrow (\overline{Y}^n, \overline{Z}^n),$$

به‌طور قوی در $S^p \times H_d^p$.

برهان. نخست اثبات می‌کنیم که $(\underline{Y}^{n,k})_{k \geq 0}$ دنباله‌ای کوشی در S^p است. از ۹.۲ برای $e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p$ داریم

$$\begin{aligned} & e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \\ & + \frac{p(p-1)}{2} \int_t^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-2} \chi_{\{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k} \neq 0\}} |\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}|^2 ds \\ & = p \int_t^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}}) [f_n(\underline{Y}_s^{n,k}, \underline{Z}_s^{n,k+1}) \\ & - f_n(s, \underline{Y}_s^{n,k}, \underline{Z}_s^{n,k})] ds - p\beta \int_t^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^p ds \\ & - p \int_t^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}}) (\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s \\ & \leq np \int_t^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}}) (|\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}| + |\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}|) ds \\ & - p \int_t^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}}) (\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s \\ & - p\beta \int_t^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^p ds, \end{aligned} \quad (۱۹.۲)$$

که β عددی مثبت است که بعداً تعیین می‌شود. برای هر $\epsilon > 0$ و $\lambda > 0$ از نامساوی یانگ^{۱۲} $ab \leq \lambda a^2 + \lambda^{-1} b^2$ و نامساوی $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ ، $ab \leq p^{-1} a^p + q^{-1} b^q$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} & np |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1} (\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}}) |\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}| \\ & \leq |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1} \cdot \epsilon |\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}| \\ & \leq \frac{p-1}{p} \left(\frac{np}{\epsilon} \right)^{\frac{p}{p-1}} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^p + \frac{\epsilon^p}{p} |\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}|^p, \end{aligned}$$

^{۱۲}Young

$$\begin{aligned}
& np|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1}(\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}})|\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}| \\
&= np|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{\frac{p}{\epsilon}}|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{\frac{p-\epsilon}{\epsilon}}(\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}})|\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}| \\
&\leq \lambda|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-\epsilon}\chi_{\{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k} \neq 0\}}|\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}|^{\epsilon} + \lambda^{-1}n^{\epsilon}p^{\epsilon}|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^p.
\end{aligned}
\tag{۲۰.۲}$$

قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{p(p-1)}{\epsilon}$ و $\beta = \frac{p-1}{p^{\epsilon}}\left(\frac{np}{\epsilon}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \frac{\epsilon n^{\epsilon}}{p-1}$ از رابطه‌ی (۱۹.۲) داریم

$$\begin{aligned}
& e^{p\beta t}|\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \\
&+ \frac{p(p-1)}{\epsilon} \int_t^T e^{p\beta s}|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-\epsilon}\chi_{\{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k} \neq 0\}}|\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}|^{\epsilon} ds \\
&\leq \frac{\epsilon^p}{p} \int_t^T e^{p\beta s}|\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}|^p ds \\
&- p \int_t^T e^{p\beta s}|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1}(\widehat{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}})(\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s.
\end{aligned}
\tag{۲۱.۲}$$

با گرفتن امید از دو طرف رابطه‌ی (۲۱.۲)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
& E \int_0^T e^{p\beta s}|\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-\epsilon}\chi_{\{\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k} \neq 0\}}|\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}|^{\epsilon} ds \\
&\leq \frac{\epsilon^p}{p^{\epsilon}(p-1)} E \int_0^T e^{p\beta s}|\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}|^p ds \\
&\leq \frac{\epsilon^p T}{p^{\epsilon}(p-1)} E \left(\sup_{0 \leq s \leq T} e^{p\beta s}|\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}|^p \right).
\end{aligned}
\tag{۲۲.۲}$$

به‌علاوه، با استفاده از نامساوی BDG از رابطه‌ی (۲۱.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}
& E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \right) \\
& \leq \frac{\epsilon^p}{p} E \int_0^T e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k} - \underline{Y}_s^{n,k-1}|^p ds \\
& \quad + \mathfrak{V}_p E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t e^{p\beta s} |\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k}|^{p-1} (\widehat{Y_s^{n,k+1}} - \widehat{Y_s^{n,k}}) (\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s \right| \right) \\
& \leq \frac{\epsilon^p T}{p} E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k-1}|^p \right) \\
& \quad + C_p E \left[\left(\int_0^T e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^{p-1} \chi_{\{\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k} \neq 0\}} |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
& \leq \frac{\epsilon^p T}{p} E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k-1}|^p \right) \\
& \quad + C_p E \left[\left(\int_0^T e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^{p-1} \chi_{\{\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k} \neq 0\}} |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\frac{p\beta t}{p}} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^{\frac{p}{p-1}} \right) \right] \\
& \leq \frac{\epsilon^p T}{p} E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k-1}|^p \right) + \frac{1}{p} E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \right) \\
& \quad + \frac{C_p^{\mathfrak{V}}}{p} E \int_0^T e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^{p-1} \chi_{\{\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k} \neq 0\}} |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt. \quad (23.2)
\end{aligned}$$

با تحقیق روابط (۲۲.۲) و (۲۳.۲)، خواهیم داشت

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \right) \leq \left(\frac{\mathfrak{V} \epsilon^p T}{p} + \frac{\mathfrak{V} C_p^{\mathfrak{V}} \epsilon^p T}{p^{\mathfrak{V}}(p-1)} \right) E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k-1}|^p \right).$$

برای ϵ به اندازه کافی کوچک، قرار می‌دهیم

$$\eta \triangleq \frac{\mathfrak{V} \epsilon^p T}{p} + \frac{\mathfrak{V} C_p^{\mathfrak{V}} \epsilon^p T}{p^{\mathfrak{V}}(p-1)} < 1.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \right) & \leq E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \right) \\
& \leq \eta^k E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} e^{p\beta t} |\underline{Y}_t^{n,1} - \underline{Y}_t^{n,0}|^p \right), \quad (24.2)
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $(\underline{Y}_t^{n,k})_{k \geq 0}$ دنباله‌ای کوشی در S^p است.

اکنون نشان می‌دهیم که $(\underline{Z}^{n,k})_{k \geq 0}$ دنباله‌ای کوشی در H_d^p است. با به کار بردن فرمول ایتو برای $(\underline{Y}_t^{n,k+1}, \underline{Y}_t^{n,k})^\top$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & (\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k})^\top + \int_0^T |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt \\ &= \int_0^T (\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}) [f_n(t, \underline{Y}_t^{n,k}, \underline{Z}_t^{n,k+1}) - f_n(t, \underline{Y}_t^{n,k-1}, \underline{Z}_t^{n,k})] dt \\ &\quad - \int_0^T (\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k})(\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}) dW_t. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \int_0^T |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt \\ & \leq \int_0^T |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}| (|\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}| + |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|) dt \\ & \quad + \int_0^T (\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k})(\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s \\ & \leq \left(n + \frac{n}{\epsilon}\right) T \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^2 \right) + nT \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k-1}|^2 \right) \\ & \quad + \epsilon \int_0^T |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt + \int_0^T (\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k})(\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s. \end{aligned}$$

با قرار دادن $\epsilon = \frac{1}{n}$ ، داریم

$$\begin{aligned} & \int_0^T |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt \\ & \leq (1 + n)T \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^2 \right) + nT \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k-1}|^2 \right) \\ & \quad + \int_0^T (\underline{Y}_s^{n,k+1} - \underline{Y}_s^{n,k})(\underline{Z}_s^{n,k+1} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\int_0^T |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \right] \\ & \leq C_p \left\{ E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^p \right) + E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\underline{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k-1}|^p \right) \right. \\ & \quad \left. + E \left[\left(\int_0^T |\underline{Y}_t^{n,k+1} - \underline{Y}_t^{n,k}|^2 |\underline{Z}_t^{n,k+1} - \underline{Z}_t^{n,k}|^2 dt \right)^{\frac{p}{p-1}} \right] \right\} \\ & \leq (C_p + \frac{1}{2} C_p^2) \|\underline{Y}^{n,k+1} - \underline{Y}^{n,k}\|_{S^p}^p + C_p \|\underline{Y}^{n,k} - \underline{Y}^{n,k-1}\|_{S^p}^p + \frac{1}{2} \|\underline{Z}^{n,k+1} - \underline{Z}^{n,k}\|_{H_d^p}^p. \end{aligned}$$

از رابطه‌ی (۲۴.۲) نتیجه می‌گیریم که $(\underline{Z}^{n,k})_{k \geq 0}$ دنباله‌ای کوشی در H_d^p است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد $(\overline{Y}^{n,k}, \overline{Z}^{n,k})_{k \geq 0}$ دنباله‌ای کوشی در $S^p \times H_d^p$ است. $\square$

اثبات قضیه ۱۷.۲. مشابه با [۱۴]، نشان می‌دهیم که جواب‌های ماکسیمال و مینیمال با هم برابر هستند. با کم کردن رابطه‌ی (۱۸.۲) از رابطه‌ی (۱۷.۲)، داریم

$$\begin{aligned} \bar{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k} &= \int_t^T [\bar{f}_n(s, \bar{Y}_s^{n,k-1}, \bar{Z}_s^{n,k}) - \underline{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \underline{Z}_s^{n,k})] ds - \int_t^T (\bar{Z}_s^{n,k} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s \\ &= \int_t^T [\bar{f}_n(s, \bar{Y}_s^{n,k-1}, \bar{Z}_s^{n,k}) - \bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \bar{Z}_s^{n,k}) + \bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \bar{Z}_s^{n,k}) \\ &\quad - \bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \underline{Z}_s^{n,k}) + \bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \underline{Z}_s^{n,k}) \\ &\quad - \underline{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \underline{Z}_s^{n,k})] ds - \int_t^T (\bar{Z}_s^{n,k} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s. \end{aligned} \quad (25.2)$$

برای $i = 1, \dots, d$ ، فرض کنید $\bar{Z}^{n,k,i}$ و $\underline{Z}^{n,k,i}$ به ترتیب مولفه‌ی i -ام $\bar{Z}^{n,k}$ و $\underline{Z}^{n,k}$ باشند. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t^{n,k,\circ} &\triangleq \bar{Z}_t^{n,k}, \quad \tilde{Z}_t^{n,k,d} \triangleq \underline{Z}_t^{n,k}, \\ \tilde{Z}_t^{n,k,i} &\triangleq (\underline{Z}_t^{n,k,1}, \dots, \underline{Z}_t^{n,k,i}, \underline{Z}_t^{n,k,i+1}, \dots, \underline{Z}_t^{n,k,d}), \quad 1 \leq i \leq d-1, \end{aligned}$$

و برای $i = 1, \dots, d$

$$b_s^{n,k,i} \triangleq \begin{cases} \frac{\bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \tilde{Z}_s^{n,k,i-1}) - \bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \tilde{Z}_s^{n,k,i})}{\bar{Z}_s^{n,k,i} - \underline{Z}_s^{n,k,i}} & \text{if } \bar{Z}_s^{n,k,i} - \underline{Z}_s^{n,k,i} \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

مشابه با [۱۱]، اندازه احتمال $P^{n,k}$ و فرآیند $W^{n,k}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{dP^{n,k}}{dP} &\triangleq \mathcal{E} \left(\int_0^T b_t^{n,k} dW_t \right) \triangleq \exp \left\{ \int_0^T b_t^{n,k} dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T |b_t^{n,k}|^2 dt \right\}, \\ W_t^{n,k} &\triangleq W_t - \int_0^t b_s^{n,k} ds. \end{aligned}$$

قضیه‌ی گیرسانو نتیجه می‌دهد که $W^{n,k}$ یک حرکت براونی روی $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ تحت اندازه $P^{n,k}$ است. اکنون می‌توان رابطه‌ی (۲۵.۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \bar{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k} &= \int_t^T [\bar{f}_n(s, \bar{Y}_s^{n,k-1}, \bar{Z}_s^{n,k}) \\ &\quad - \bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \bar{Z}_s^{n,k}) + \bar{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \underline{Z}_s^{n,k}) \\ &\quad - \underline{f}_n(s, \underline{Y}_s^{n,k-1}, \underline{Z}_s^{n,k})] ds - \int_t^T (\bar{Z}_s^{n,k} - \underline{Z}_s^{n,k}) dW_s^{n,k}. \end{aligned} \quad (26.2)$$

با گرفتن امید شرطی روی $\mathcal{F}_t$ نسبت به $P^{n,k}$ ، از دو طرف رابطه‌ی (۲۶.۲) و استفاده از نامساوی جنسن^{۱۳} و لم ۱۸.۲، داریم

$$\begin{aligned} & |\bar{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k}| \\ & \leq E^{n,k} \left[\int_t^T \left\{ \phi(|\bar{Y}_s^{n,k-1} - \underline{Y}_s^{n,k-1}|) + \mathfrak{Y} \phi \left(\frac{\mathfrak{Y}C}{n-C} \right) + \mathfrak{Y} \varphi \left(\frac{\mathfrak{Y}C}{n-C} \right) \right\} ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (۲۷.۲)$$

حل معادله‌ی بازگشتی غیر احتمالی زیر را با u^n نشان می‌دهیم:

$$u(t) = \mathfrak{Y} \phi \left(\frac{\mathfrak{Y}C}{n-C} \right) T + \mathfrak{Y} \varphi \left(\frac{\mathfrak{Y}C}{n-C} \right) T + \int_t^T \phi(u(s)) ds. \quad (۲۸.۲)$$

از (A4)، (A5) و تذکر ۱۴.۲، می‌دانیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(\circ) = \circ. \quad (۲۹.۲)$$

با کم کردن رابطه‌ی (۲۸.۲) از رابطه‌ی (۲۷.۲)، خواهیم داشت

$$|\bar{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k}| - u^n(t) \leq E^{n,k} \left[\int_t^T \{ \phi(|\bar{Y}_s^{n,k-1} - \underline{Y}_s^{n,k-1}|) - \phi(u^n(s)) \} ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

به استقرا روی k داریم

$$|\bar{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k}| \leq u^n(t), \quad \forall k \geq \circ, t \in [\circ, T], \quad \text{a.s.}$$

در واقع، برای $k = \circ$ نامساوی به روشنی برقرار است. فرض کنید نامساوی برای $k - ۱$ برقرار باشد، در این صورت داریم

$$|\bar{Y}_t^{n,k-1} - \underline{Y}_t^{n,k-1}| \leq u^n(t), \quad \forall t \in [\circ, T], \quad \text{a.s.}$$

چون ϕ غیرنزولی بوده و فرآیند $\{\bar{Y}_t^{n,k-1} - \underline{Y}_t^{n,k-1}\}_{t \in [\circ, T]}$ پیوسته است، داریم

$$|\bar{Y}_t^{n,k} - \underline{Y}_t^{n,k}| \leq u^n(t), \quad \forall t \in [\circ, T], \quad \text{a.s.}$$

با نگاهی به لم ۱۹.۲ و گرفتن حد زمانی که $k \rightarrow \infty$ ، داریم، $|\bar{Y}_t^n - \underline{Y}_t^n| \leq u^n(t)$.

^{۱۳}Jensen

از رابطه‌ی (۱۹.۲)، نتیجه می‌گیریم

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Y}_t^n - \underline{Y}_t^n|^p \right) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} (u^n(t))^p \leq (u^n(0))^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

از لم ۱۰.۲، قضیه‌ی ۱۲.۲ و تذکر ۱۳.۲ نتیجه می‌گیریم که

$$\bar{Y}_t = \underline{Y}_t, \quad t \in [0, T], \quad \text{a.s.}$$

□

مثال ۲۰.۲. برای δ به اندازه کافی کوچک، تعریف می‌کنیم

$$h(x) \triangleq x \ln \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq \delta\}} + [h'(\delta-)(x - \delta) + h(\delta)] \mathbb{1}_{\{x > \delta\}}, \quad x \in [0, \infty).$$

برای $\xi \in (\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ BSDE زیر را در نظر بگیرید

$$Y_t = \xi + \int_t^T h(|Y_s| + |Z_s|) ds - \int_t^T Z_s dW_s. \quad (30.2)$$

چون h صعودی مقعر است و رشد خطی دارد، برای هر $x, x' \in \mathbb{R}^+$ داریم

$$h(x + x') \leq h(x) + h(x'),$$

که نتیجه می‌دهد

$$|h(x) - h(x')| \leq h(|x - x'|).$$

بعلاوه،

$$\int_{0+} (x \ln \frac{1}{x})^{-1} dx = \infty.$$

بنابراین، مولد $f(y, z) \triangleq h(|y| + |z|)$ با $\phi = \varphi = h$ شرایط قضیه‌ی (۱۷.۲) را برآورده می‌کند. BSDE (۳۰.۲) دارای حل یکتای $(Y, Z) \in S^p \times H_d^p$ است.

تذکر ۲۱.۲. مثال (۲۰.۲)، درحقیقت حالتی یک- بعدی از مثال ۲ در [۱۱] است. در [۱۱]، مولد به صورت زیر تعریف شده است

$$f(t, y, z) = [h(|y| + |z^1|), \dots, h(|y| + |z^l|)], \quad (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l \times d},$$

که $z^i, -i$ - امین سطر از z است. چون $BSDE$ در [۱۱] چند- بعدی است، همین ثابت کرد که اگر $\xi \in (L^2)^l$ ، آنگاه $BSDE$ دارای حلی در $(S^2 \times H_d^2)^l$ خواهد بود. اما او یکتایی حل را اثبات نکرد. ما در حالت یک- بعدی ثابت کردیم که اگر $\xi \in L^p$ و $p \in (1, 2]$ ، آنگاه $BSDE$ (۳۰.۲) دارای حلی یکتا در $S^p \times H_d^p$ است.

فصل ۳

نگاهی به فرآیند $-G$ - برآونی و مفاهیم مشتق
شده از آن

۱.۳ مقدمه

در این فصل نوعی امید غیرخطی به نام G -امید را که به وسیله‌ی یک معادله‌ی گرمای غیرخطی به نام معادله‌ی G -گرما تولید می‌شود، معرفی می‌کنیم، ضریب این معادله‌ی گرما دارای یک پارامتر بیشتر نسبت به معادله‌ی گرمایی است که توسط باچلیر^۱ (۱۹۰۰) و انیشتین^۲ (۱۹۰۵) برای توصیف حرکت برآونی استفاده شد. اما این تعمیم کوچک، تغییرات بزرگی را در پی دارد. تحت این معادله‌ی گرما، متغیر تصادفی با توزیع G -نرمال را تعریف کرده و با استفاده از این توزیع یک فرآیند کانونی به نام فرآیند G -برآونی را تعریف می‌کنیم. سپس محاسبات تصادفی وابسته به آن، از جمله انتگرال ایتو^۳ نسبت به فرآیند G -برآونی را ارائه می‌دهیم. نوع جدیدی از فرمول ایتو را بیان کرده و وجود و یکتایی حل معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی (SDE) تولید شده به وسیله‌ی حرکت G -برآونی را بررسی می‌کنیم.

مطالب ارائه شده در این فصل به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است، از مرجع [۳۳] آورده شده است. این فصل به صورت زیر طبقه‌بندی شده است: در بخش ۲.۳ به یادآوری مفهوم امید غیرخطی و چهارچوب ارائه شده در [۳۱] می‌پردازیم. در بخش ۳.۳ متغیر تصادفی با توزیع G -نرمال استاندارد را تعریف کرده و برخی ویژگی‌های اصلی آن را بیان می‌کنیم. در بخش ۴.۳ مفهوم حرکت G -برآونی یک-بعدی و G -امید متناظر با آن را معرفی کرده و برخی ویژگی‌های اصلی آن را بیان می‌کنیم. بخش ۵.۳ به معرفی انتگرال ایتو نسبت به حرکت G -برآونی و فرمول ایتو متناظر با آن می‌پردازد. در نهایت در بخش ۷.۳ وجود و یکتایی حل SDE تولید شده به وسیله‌ی حرکت G -برآونی را بررسی می‌کنیم.

۲.۳ امید غیرخطی: چهارچوب کلی

در سراسر این فصل فرض کنید Ω یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{H}$ یک شبکه برداری از توابع حقیقی مقدار روی Ω شامل تابع ثابت ۱ باشد؛ یعنی $\mathcal{H}$ یک فضای خطی است که $1 \in \mathcal{H}$ و برای هر $X \in \mathcal{H}$ ، $|X| \in \mathcal{H}$. در حقیقت $\mathcal{H}$ فضایی از متغیرهای تصادفی است. در ادامه فرض می‌کنیم کلیه توابع موجود در $\mathcal{H}$ کراندار هستند. یادآوری می‌کنیم که

$$a \wedge b = \min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|), \quad a \vee b = -[(-a) \wedge (-b)].$$

بنابراین اگر $X, Y \in \mathcal{H}$ نتیجه می‌گیریم، $X \vee Y, X \wedge Y, X^+$ و X^- نیز به $\mathcal{H}$ تعلق دارند.

تعریف ۱.۳. به تابع $\mathbb{E}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ امید غیرخطی گوئیم هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

^۱Bachelier^۲Einstein^۳Ito

(a) یکنوایی: اگر $X, Y \in \mathcal{H}$ و $X \geq Y$ آنگاه $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ ؛

$$(b) \mathbb{E}[c] = c$$

(c) زیر جمع پذیری (یا ویژگی خود-تسلطی):

$$\forall X, Y \in \mathcal{H}, \quad \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X - Y];$$

یا

$$\forall X, Y \in \mathcal{H}, \quad \mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y];$$

(d) برای هر $\lambda \geq 0$ و $X \in \mathcal{H}$ ؛ $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$ ؛

$$(e) \mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c.$$

تذکر ۲.۳. ویژگی (e) از ویژگی‌های (b) و (c) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] + c &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[-c] \\ &\leq \mathbb{E}[X + c] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[c] = \mathbb{E}[X] + c. \end{aligned}$$

تذکر ۳.۳. شرط (d) در تعریف فوق دارای معادل $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda^+ \mathbb{E}[X] + \lambda^- \mathbb{E}[-X]$ می‌باشد که در مطالعه امیدهای شرطی در ادامه این رساله مفید خواهد بود. (قسمت (vi) از گزاره ۲۴.۳ را ببینید).

مثال ۴.۳. فرض کنید $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, P^1)$ یک فضای احتمال و X متغیری تصادفی روی آن باشد. به روشنی امید $E[\cdot]$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک امید غیرخطی است.

$$E[X] = \int_{\Omega^1} X(\omega) dP^1(\omega),$$

تذکر ۵.۳. روشن است که تابع $\|\cdot\|: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $\|X\| := \mathbb{E}[|X|]$ تعریف می‌شود یک شبه نرم است.

تذکر ۶.۳. به روشنی اگر $\|X\| = 0$ ، آنگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\|\alpha X\| = 0$.

لم ۷.۳. مجموعه‌ی

$$\mathcal{H}_0 = \{X \in \mathcal{H}, \|X\| = 0\},$$

زیر فضایی خطی از $\mathcal{H}$ است.

برهان. با توجه به تذکر ۶.۳، اگر $X \in \mathcal{H}_0$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ آنگاه $\alpha X \in \mathcal{H}_0$. حال فرض کنید $X, Y \in \mathcal{H}_0$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ در این صورت

$$\|\alpha X + \beta Y\| \leq \|\alpha X\| + \|\beta Y\| = 0,$$

□

در نتیجه $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{H}_0$.

با در نظر گرفتن فضای $\mathcal{H}_0$ به عنوان فضای پوچ، فضای خارج قسمتی $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\text{رابطه هم ارزی } \sim \text{ را روی } \mathcal{H} \text{ به صورت زیر تعریف می‌کنیم} \\ X \sim Y \iff X - Y \in \mathcal{H}_0. \quad (1.3)$$

کلاس هم ارزی متناظر با عنصر $X \in \mathcal{H}$ تحت این رابطه هم ارزی را با $\{X\}$ نشان می‌دهیم، در این صورت فضای خارج قسمتی $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0} = \frac{\mathcal{H}}{\sim} := \{\{X\}, X \in \mathcal{H}\}. \quad (2.3)$$

جمع و ضرب اسکالر را روی $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{X\} + \{Y\} = \{X + Y\}, \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha\{X\} = \{\alpha X\}.$$

تعریف ۸.۳. [۳۱] امید ریاضی را برای هر $\{X\} \in \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}$ با $X \in \mathcal{H}$ به صورت

$$\mathbb{E}[\{X\}] := \mathbb{E}[X], \quad (3.3)$$

تعریف می‌کنیم، که به روشنی در ویژگی‌های (a)-(e) از تعریف ۱.۳ صدق می‌کند.

تابع $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0} \rightarrow \mathbb{R} : \|\cdot\|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall \{X\} \in \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}, \quad \|\{X\}\| := \|X\| = \mathbb{E}[|X|], \quad (4.3)$$

که به روشنی یک شبه نرم است.

پس $\left(\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}, \|\cdot\|\right)$ یک فضای شبه نرم‌دار خطی است.

لم ۹.۳. فرض کنید $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک شبه نرم روی فضای X باشد و فرض کنید

$$\mathcal{N} = \{x \in X, p(x) = 0\},$$

زیر فضایی از X باشد. در این صورت $\bar{p}: \frac{X}{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\bar{p}(x + \mathcal{N}) = p(x)$ یک نرم روی $\frac{X}{\mathcal{N}}$ خواهد بود.

□

برهان. به [۳۶] مراجعه کنید.

در نتیجه $\left(\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}, \|\cdot\|\right)$ یک فضای نرم‌دار است. تکمیل^۴ این فضا تحت نرم $\|\cdot\|$ را با $[\mathcal{H}]$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فضای تکمیل، $([\mathcal{H}], \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ است.

^۴Completion

از طرفی برای هر $X, Y \in \mathcal{H}$ داریم

$$\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X - Y] \leq \mathbb{E}[|X - Y|], \quad (۵.۳)$$

و

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X] &\leq \mathbb{E}[Y - X] \leq \mathbb{E}[|Y - X|] = \mathbb{E}[|X - Y|], \\ \Rightarrow -\mathbb{E}[|X - Y|] &\leq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y], \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

$$(۶.۳) \text{ و } (۵.۳) \Rightarrow |\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]| \leq \mathbb{E}[|X - Y|] = \|X - Y\|. \quad (۷.۳)$$

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید $\mathbb{E}[\cdot]$ امید غیرخطی تعریف شده روی $\mathcal{H}$ باشد. $\mathbb{E}[\cdot]$ می‌تواند به طور پیوسته از $\mathcal{H}$ به $[\mathcal{H}]$ توسیع یابد. به علاوه

$$\forall X, Y \in [\mathcal{H}], \quad |\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]| \leq \|X - Y\|.$$

□

برهان. به [۳۱] مراجعه کنید.

اما می‌دانیم

$$\forall X \in \mathcal{H}, \quad \mathbb{E}[\{X\}] = \mathbb{E}[X],$$

بنابراین اگر $\mathbb{E}[\cdot]$ امید غیرخطی تعریف شده روی $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}$ باشد، آنگاه $\mathbb{E}[\cdot]$ می‌تواند به طور پیوسته از $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}$ به $[\mathcal{H}]$ گسترش یابد؛ که به وضوح در ویژگی‌های (a)-(e) از تعریف ۱.۳ صدق می‌کند. برای هر $X \in \mathcal{H}$ نگاشت‌های

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

را در نظر بگیرید، داریم

$$|X^+ - Y^+| \leq |X - Y|, \quad |X^- - Y^-| = |(-X)^+ - (-Y)^+| \leq |X - Y|,$$

یعنی این نگاشت‌ها تحت $\|\cdot\|$ انقباضی و لذا پیوسته هستند و بنابراین می‌توانند به طور پیوسته به فضای باناخ $([\mathcal{H}], \|\cdot\|)$ گسترش یابند.

ترتیب جزئی "≥" را در این فضای باناخ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۳. عنصر X در فضای $([\mathcal{H}], \|\cdot\|)$ را غیر منفی گوئیم و می‌نویسیم $X \geq 0$ (یا $0 \leq X$)، هرگاه $X = X^+$. همچنین می‌نویسیم $X \geq Y$ (یا $Y \leq X$) هرگاه $X - Y \geq 0$. روشن است که اگر $X \geq Y$ و $Y \geq X$ آنگاه $X = Y$.

امید غیرخطی $\mathbb{E}[\cdot]$ به طور پیوسته می‌تواند به فضای $([\mathcal{H}], \|\cdot\|)$ توسیع یابد؛ طوری که ویژگی‌های (a)-(e) همچنان برقرار باشند.

۳.۳ توزیع G -نرمال

فضای تمام توابع حقیقی مقدار، لپشیتس^۵ و کراندار روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را با $lip(\mathbb{R}^n)$ نشان می‌دهیم که در آن n عددی صحیح و مثبت است.

در این بخش فرض می‌کنیم که $\Omega = \mathbb{R}$ و $\mathcal{H} = lip(\mathbb{R})$.

در حالت خطی کلاسیک، متغیر تصادفی $X(x) = x$ با توزیع نرمال استاندارد، یعنی $X \sim N(0, 1)$ ، به صورت زیر توصیف می‌شود

$$\forall \phi \in lip(\mathbb{R}), \quad E[\phi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \phi(x) dx.$$

با توجه به یافته‌های باچلیر ۱۹۰۰ و انیشیتن ۱۹۵۰، $E[\phi(X)] = u(1, 0)$ ، که $u = u(t, x)$ جواب معادله گرمای

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u, \quad (۸.۳)$$

با شرط کوشی $u(0, x) = \phi(x)$ است.

از این پس فرض می‌کنیم $G(a) = \frac{1}{2}(a^+ - \sigma_0^2 a^-)$ ، $a \in \mathbb{R}$ ، $\sigma_0 \in [0, 1]$ عددی ثابت است.

تعریف ۱۲.۳. متغیر تصادفی X با توزیع G -نرمال استاندارد به وسیله امید غیرخطی آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall \phi \in lip(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E}[\phi(X)] = P_1^G(\phi) := u(1, 0),$$

که در آن $u = u(t, x)$ تابعی حقیقی، پیوسته و کراندار روی $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ است و جواب چسبندگی (منحصر به فرد) معادله دیفرانسیل جزئی سهمی‌وار (PDE) و غیرخطی زیر است.

$$\partial_t u - G(\partial_{xx}^2 u) = \partial_t u - \frac{1}{2} ((\partial_{xx}^2 u)^+ - \sigma_0^2 (\partial_{xx}^2 u)^-) = 0, \quad u(0, x) = \phi(x). \quad (۹.۳)$$

در مواردی که ابهامی وجود نداشته باشد، تابع P_1^G را توزیع G -نرمال استاندارد می‌نامیم. اگر $\sigma_0 = 1$ ، آن‌گاه PDE بالا همان معادله گرمای استاندارد (۸.۳) است و بنابراین در این حالت توزیع G -نرمال همان توزیع نرمال استاندارد $N(0, 1)$ است.

$$P_1^G(\phi) = P_1(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \phi(x) dx.$$

تذکر ۱۳.۳. تعریف معادلی برای توزیع G -نرمال در [۳۲] ارائه شده است.

تذکر ۱۴.۳. روشن است که $u(t, \cdot) \in lip(\mathbb{R})$ کراندار به سادگی از قضیه مقایسه (یا اصل ماکزیم) این PDE نتیجه می‌شود.

در حالت کلی، از قضیه مقایسه PDE ها داریم

$$P_1^G(\phi) \geq P_1(\phi), \quad \forall \phi \in lip(\mathbb{R}). \quad (۱۰.۳)$$

^۵Lipschitz

توزیع G -نرمال با میانگین $x \in \mathbb{R}$ و واریانس $t > 0$ برابر است با $P_t^G(\phi(x + \sqrt{t} \times \cdot))$.

قرارداد ۱۵.۳. قرار می‌دهیم

$$P_t^G(\phi)(x) = P_t^G(\phi(x + \sqrt{t} \times \cdot)) = u(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.3)$$

لم ۱۶.۳. برای هر $\phi \in \text{lip}(\mathbb{R})$ قاعده زنجیر کلموگروف-چاپمن^۶ را به صورت زیر داریم

$$P_t^G(P_s^G(\phi))(x) = P_{t+s}^G(\phi)(x), \quad s, t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}. \quad (12.3)$$

برهان. می‌دانیم $P_t^G(\cdot)(x) = \mathbb{E}[(\cdot)(x + \sqrt{t} \times \cdot)]$ ، لذا

$$\begin{aligned} P_t^G(P_s^G(\phi))(x) &= \mathbb{E}\left[P_s^G(\phi)(x + \sqrt{t} \times \cdot)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[u(s, x + \sqrt{t} \times \cdot)\right], \end{aligned}$$

با توجه به [۳۲]، گزاره ۳.۳.۶ داریم:

$$P_{t+s}^G(\phi)(x) = u(t+s, x) = \mathbb{E}\left[u(s, x + \sqrt{t} \times \cdot)\right].$$

لذا نتیجه برقرار است. $\square$

برای هر $t > 0$ ، تکمیل فضای $\mathcal{H} = \text{lip}(\mathbb{R})$ تحت نرم $\|\phi\| := P_t^G(|\phi|)(0)$ که $\phi = x^n$ یا $\phi = \psi x^n$ و $\psi \in \text{lip}(\mathbb{R})$ و $n = 1, 2, \dots$ را با $[\mathcal{H}] = [\text{lip}(\mathbb{R})]_t$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۷.۳. برای هر $t > 0$ ، توزیع G -نرمال P_t^G یک امید غیر خطی روی $\mathcal{H} = \text{lip}(\mathbb{R})$ با $\Omega = \mathbb{R}$ است که در ویژگی‌های (a)-(e) از تعریف ۱.۳ صدق می‌کند. همچنین ویژگی‌های زیر برقرار است

$$1. \text{ تقارن مرکزی: } P_t^G(\phi(\cdot)) = P_t^G(\phi(-\cdot));$$

$$2. \text{ برای هر تابع محدب } \phi \in [\text{lip}(\mathbb{R})] \text{ داریم}$$

$$P_t^G(\phi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx;$$

$$3. \text{ برای هر تابع مقعر } \phi \in [\text{lip}(\mathbb{R})] \text{ و } \sigma_0 > 0 \text{ داریم}$$

$$P_t^G(\phi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2t \sigma_0^2}\right) dx;$$

$$4. \text{ برای } \sigma_0 = 0, P_t^G(\phi)(0) = \phi(0), \text{ در حالت خاص، داریم}$$

$$P_t^G((x)_{x \in \mathbb{R}}) = 0, \quad P_t^G((x^{n+1})_{x \in \mathbb{R}}) = P_t^G((-x^{n+1})_{x \in \mathbb{R}}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$P_t^G((x^2)_{x \in \mathbb{R}}) = t, \quad P_t^G((-x^2)_{x \in \mathbb{R}}) = -\sigma_0^2 t.$$

^۶Kolmogorov-Chapman

برهان. (۱). فرض کنید $\bar{X} = -X$ و $u(t, x) = \mathbb{E}[\phi(x + \sqrt{t}X)]$ و $\bar{u}(t, x) = \mathbb{E}[\phi(x + \sqrt{t}\bar{X})]$. با توجه به تعریف $P_t^G(\cdot)$ ، u و $\bar{u}$ حل‌های چسبندگی معادله $-G$ گرمای (۹.۳) با شرط‌های کوشی $u|_{t=0} = \phi$ و $\bar{u}|_{t=0} = \phi$ هستند. بنابراین با توجه به یکتایی حل چسبندگی معادله (۹.۳) ، نتیجه برقرار است.

(۲). فرض کنید ϕ محدب باشد و فرض کنید $u(t, x) = \mathbb{E}[\phi(x + \sqrt{t}X)]$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} u(t, \alpha x + (1 - \alpha)x) &= \mathbb{E}[\phi(\alpha x + (1 - \alpha)x + \sqrt{t}X)] \\ &\leq \alpha \mathbb{E}[\phi(x + \sqrt{t}X)] + (1 - \alpha) \mathbb{E}[\phi(x + \sqrt{t}X)] \\ &= \alpha u(t, x) + (1 - \alpha)u(t, x). \end{aligned}$$

بنابراین $u(t, x)$ نیز محدب است، لذا $(\partial_{xx}^2 u)^- = 0$. بنابراین معادله (۹.۳) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\partial_t u = \frac{1}{\gamma} \partial_{xx}^2 u, \quad u(0, x) = \phi(x),$$

از حل این معادله به روشنی نتیجه برقرار است.

(۳). اگر ϕ مقعر باشد به روشنی $-\phi$ محدب است. بنابراین مشابه قسمت قبل

$$(-\partial_{xx}^2 u)^- = (\partial_{xx}^2 u)^+ = 0$$

لذا معادله ۹.۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\partial_t u = \frac{1}{\gamma} \sigma_0^2 \partial_{xx}^2 u, \quad u(0, x) = \phi(x),$$

از حل این معادله به روشنی نتیجه برقرار است.

□

(۴). با توجه به قسمت‌های (۳) و (۴) به روشنی برقرار است.

۴.۳ فرآیند $-G$ - برآونی یک بعدی تحت $-G$ - امید

فضای تمام مسیرهای پیوسته و حقیقی مقدار $(\omega_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ با $\omega_0 = 0$ را با $C_0(\mathbb{R}^+)$ نشان می‌دهیم. در ادامه فرض می‌کنیم $\Omega = C_0(\mathbb{R}^+)$. متر ρ را روی این فضا به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall \omega^1, \omega^2 \in \Omega; \quad \rho(\omega^1, \omega^2) := \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\max_{t \in [0, i]} |\omega_t^1 - \omega_t^2| \right) \wedge 1 \right].$$

تذکر ۱۸.۳. (Ω, ρ) یک فضای متریک است.

برای هر $t \in [0, \infty)$ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} W_t &:= \{\omega_{\cdot \wedge t}, \omega \in \Omega\}; \\ \mathcal{F}_t &:= \mathcal{B}_t(W) = \mathcal{B}(W_t); \\ \mathcal{F}_{t+} &:= \mathcal{B}_{t+}(W) = \bigcap_{s>t} \mathcal{B}_s(W); \\ \mathcal{F} &:= \bigvee_{s>t} \mathcal{F}_s = \sigma\left(\bigcup_{s>t} \mathcal{F}_s\right). \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F})$ را به عنوان فضای کانونی، مجهز به فیلتر طبیعی فرآیند تصادفی $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید $s < t$ ، در این صورت $\bigcap_{u \in (s, \infty)} \mathcal{F}_u \subseteq \bigcap_{u \in (t, \infty)} \mathcal{F}_u$ ، لذا $\mathcal{F}_{s+} \subseteq \mathcal{F}_{t+}$ و این یعنی خانواده $\{\mathcal{F}_{t+}, t \geq 0\}$ نیز یک فیلتر است.

برای هر $T \geq 0$ ، فضای زیر از متغیرهای تصادفی را روی Ω در نظر بگیرید.

$$L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T) := \{X(\omega) = \phi(\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_m}), \forall m \geq 1, t_1, \dots, t_m \in [0, T], \forall \phi \in lip(\mathbb{R}^m)\}.$$

روشن است که برای هر $t \leq T$ ، $L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_t) \subseteq L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ قرار می‌دهیم

$$L_{ip}^\circ(\mathcal{F}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_n).$$

تذکر ۱۹.۳. می‌دانیم فضای $lip(\mathbb{R}^m)$ یک شبکه برداری است. بنابراین فضای $L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ نیز یک شبکه برداری است؛ از طرفی چون برای هر n ، $L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_n) \subseteq L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_{n+1})$ ، لذا $L_{ip}^\circ(\mathcal{F})$ نیز یک شبکه برداری است. بعلاوه اگر $\phi, \psi \in lip(\mathbb{R}^m)$ ، آنگاه $\phi \cdot \psi \in lip(\mathbb{R}^m)$ ، بنابراین اگر $X, Y \in L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ آنگاه $X \cdot Y \in L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$.

قرار می‌دهیم $B_t(\omega) = \omega_t$ که $t \in [0, \infty)$ و $\omega \in \Omega$.

تعریف ۲۰.۳. به فرآیند کانونی B ، حرکت G -برآونی^۷ تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}$ تعریف شده روی $L_{ip}^\circ(\mathcal{F})$ گوئیم، هر گاه برای هر $T > 0$ و $m = 1, 2, \dots$ و هر $\phi \in lip(\mathbb{R}^m)$ و $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq T$ داشته باشیم

$$\mathbb{E}[\phi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})] = \phi_m,$$

^۷G-Brownian Motion

که در آن $\phi_m \in \mathbb{R}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) &= P_{t_m - t_{m-1}}^G[\phi(x_1, \dots, x_{m-1}, \cdot)](x_{m-1}) \\ &= \mathbb{E}[\phi(x_1, \dots, x_{m-1}, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})], \\ \phi_2(x_1, \dots, x_{m-2}) &= P_{t_{m-1} - t_{m-2}}^G[\phi_1(x_1, \dots, x_{m-2}, \cdot)](x_{m-2}), \\ &\vdots \\ \phi_{m-j}(x_1, \dots, x_j) &= P_{t_{j+1} - t_j}^G[\phi_{m-j-1}(x_1, \dots, x_j, \cdot)](x_j), \\ &\vdots \\ \phi_{m-1}(x_1) &= P_{t_1 - t_0}^G[\phi_{m-2}(x_1, \cdot)](x_1), \\ \phi_m &= P_{t_1}^G[\phi_{m-1}(\cdot)](x_0) = \mathbb{E}[\phi_{m-1}(B_{t_1})].\end{aligned}$$

امید شرطی متناظر با متغیر تصادفی $X = \phi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})$ تحت $\mathcal{F}_{t_j}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{t_j}] &= \mathbb{E}[\phi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}) | \mathcal{F}_{t_j}] \\ &= \phi_{m-j}(B_{t_1}, \dots, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).\end{aligned}\quad (۱۳.۳)$$

تعریف دیگری از حرکت G -برآونی به صورت زیر می‌باشد.

تعریف ۲۱.۳. [۳۴] به فرآیند کانونی B ، حرکت G -برآونی تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}$ تعریف شده روی $L_{ip}^\circ(\mathcal{F})$ گوئیم، هرگاه

$$\begin{aligned}۱. \text{ برای هر } s, t \geq 0 \text{ و } \psi \in lip(\mathbb{R}) \text{ و } B_t \text{ و } B_{t+s} - B_s \text{ هم توزیع باشند} \\ \mathbb{E}[\psi(B_{t+s} - B_s)] = \mathbb{E}[\psi(B_t)] = P_t^G(\psi).\end{aligned}$$

۲. برای هر $m = 1, 2, \dots$ و $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < \infty$ ، نمو $B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ به طور

برگردان از $B_{t_1}, \dots, B_{t_{m-1}}$ با مفهوم زیر مستقل باشد: برای هر $\psi \in lip(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbb{E}[\psi(B_{t_1}, \dots, B_{t_{m-1}}, B_{t_m})] = \mathbb{E}[\psi_1(B_{t_1}, \dots, B_{t_{m-1}})],$$

که $x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}$ و $\psi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) = \mathbb{E}[\psi(x_1, \dots, x_{m-1}, B_{t_m} - B_{t_{m-1}} + x_{m-1})]$

در [۳۱] ثابت شده است که $\mathbb{E}[\cdot]$ یک امید غیرخطی روی شبکه برداری $L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ و همچنین $L_{ip}^\circ(\mathcal{F})$

تعریف می‌کند که در ویژگی‌های (a)-(e) از تعریف ۱۰.۳ صدق می‌کند. بنابراین بنا به آنچه در بخش ۲.۳ گذشت، $\mathbb{E}[|X|]$ ، برای هر $X \in L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ (به ترتیب $X \in L_{ip}^\circ(\mathcal{F})$) یک نرم است و بنابر قضیه‌ی

۱۰.۳، $\mathbb{E}[\cdot]$ به طور پیوسته می‌تواند از فضای $L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T)$ (به ترتیب $(L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}))$ به فضای تکمیل خود (که یک فضای باناخ است) که آن را با $L_G^1(\mathcal{F}_T)$ (به ترتیب $(L_G^1(\mathcal{F}))$ نشان می‌دهیم گسترش یابد. به روشنی برای هر $0 \leq t \leq T < \infty$ ، داریم $L_G^1(\mathcal{F}_t) \subseteq L_G^1(\mathcal{F}_T) \subseteq L_G^1(\mathcal{F})$. همچنین روشن است که $\mathbb{E}[\cdot]$ روی فضای $L_G^1(\mathcal{F}_T)$ (به ترتیب $(L_G^1(\mathcal{F}))$ در ویژگی‌های (a)-(e) از تعریف ۱.۳ صدق می‌کند.

تعریف ۲۲.۳. امید $\mathbb{E}[\cdot]: L_G^1(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت بالا تعریف شد را G -امید می‌نامیم. فرآیند کانونی B را نیز حرکت G -برآونی تحت G -امید $\mathbb{E}[\cdot]$ می‌نامیم.

فرض کنید $p > 1$. قرار می‌دهیم $L_G^p(\mathcal{F}) = \{X \in L_G^1(\mathcal{F}), |X|^p \in L_G^1(\mathcal{F})\}$.

قضیه ۲۳.۳. برای هر $p \geq 1$ ، تابع $\|\cdot\|_p: L_G^p(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$\forall X \in L_G^p(\mathcal{F}); \|X\|_p := \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}}, \quad (14.3)$$

یک نرم روی $L_G^p(\mathcal{F})$ است.

برهان. حالت $p = 1$ به روشنی برقرار است. فرض کنید $p > 1$. $q > 1$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ برای هر $X, Y \in L_G^p(\mathcal{F})$ داریم

$$\begin{aligned} \|X + Y\|_p^p &= \mathbb{E}[|X + Y|^p] = \mathbb{E}[|X + Y| \cdot |X + Y|^{p-1}] \\ &\leq \mathbb{E}[|X| \cdot |X + Y|^{p-1}] + \mathbb{E}[|Y| \cdot |X + Y|^{p-1}] \\ &\leq \|X\|_p (\mathbb{E}[|X + Y|^{p-1}]^q)^{\frac{1}{q}} + \|Y\|_p (\mathbb{E}[|X + Y|^{p-1}]^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|X\|_p + \|Y\|_p) \mathbb{E}[|X + Y|^p]^{\frac{1}{q}}, \\ \implies \|X + Y\|_p^p &\leq (\|X\|_p + \|Y\|_p) \|X + Y\|_p^{\frac{p}{q}}, \\ \implies \|X + Y\|_p &\leq \|X\|_p + \|Y\|_p. \end{aligned}$$

□

سایر ویژگی‌های نرم به روشنی برقرار است.

تحت این نرم فضای $L_G^p(\mathcal{F})$ یک فضای باناخ است. برای هر $X \in L_G^p(\mathcal{F})$ و $Y \in L_G^q(\mathcal{F})$ با $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ داریم

$$\|XY\| = \mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

به روشنی اگر $p \leq p'$ ، آنگاه $\|X\|_p \leq \|X\|_{p'}$.

اکنون به مطالعه ویژگی‌های امید شرطی تعریف شده در (۱۳.۳) می‌پردازیم. فرض کنید $t = t_j$ ثابت باشد و $t \leq T$. امید شرطی $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]: L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T) \rightarrow L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_t)$ تحت نرم $\|\cdot\|$ یک نگاشت پیوسته

است؛ در حقیقت برای هر $X \in L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T)$ با توجه به تعریف $P_t^G(\cdot)$ ، $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[X]$ و چون P_t^G زیر جمع‌پذیر است، داریم

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[X - Y|\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[|X - Y||\mathcal{F}_t]. \quad (۱۵.۳)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X - Y|\mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[X - Y]. \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[Y - X|\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[|X - Y||\mathcal{F}_t]. \quad (۱۶.۳)$$

پس با توجه به روابط (۱۵.۳) و (۱۶.۳) داریم

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]| \leq \mathbb{E}[|X - Y||\mathcal{F}_t]. \quad (۱۷.۳)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]\| &= \mathbb{E}[\|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]\|] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X - Y||\mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[|X - Y|] = \|X - Y\|. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$ دارای توسیعی پیوسته مانند $L_G^1(\mathcal{F}_T) \rightarrow L_G^1(\mathcal{F}_t)$ است. اگر T در روابط بالا ثابت نباشد، می‌توان $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t] : L_G^1(\mathcal{F}) \rightarrow L_G^1(\mathcal{F}_t)$ را نیز به دست آورد.

گزاره ۲۴.۳. $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t] : L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T) \rightarrow L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_t)$ دارای ویژگی‌های زیر است، این ویژگی‌ها برای هر $X, Y \in L_G^1(\mathcal{F})$ نیز برقرار هستند:

۱. اگر $X \in L_G^1(\mathcal{F}_t)$ و $t \leq T$ ، آن‌گاه $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] = X$.

۲. اگر $X \geq Y$ آن‌گاه $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$.

۳. $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[X - Y|\mathcal{F}_t]$.

۴. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[X]$ ، $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{t \wedge s}]$.

۵. برای هر $\eta \in L_G^1(\mathcal{F}_t)$ داریم $\mathbb{E}[X + \eta|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] + \eta$.

۶. برای هر $\eta \in L_G^1(\mathcal{F}_t)$ کراندار $\mathbb{E}[\eta X|\mathcal{F}_t] = \eta^+ \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] + \eta^- \mathbb{E}[-X|\mathcal{F}_t]$.

۷. برای هر $X \in L_G^1(\mathcal{F}_T^t)$ داریم $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X]$.

که $L_G^1(\mathcal{F}_T^t)$ توسیع فضای $L_{ip}^1(\mathcal{F}_T^t)$ تحت نرم $\|\cdot\|$ می‌باشد و $L_{ip}^1(\mathcal{F}_T^t)$ فضایی از متغیرهای تصادفی به شکل $\phi(B_{t_1} - B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})$ است که $m = 1, 2, \dots$ و $\phi \in lip(\mathbb{R}^m)$ و $t_1, \dots, t_m \in [t, T]$ و

□

برهان. به [۳۲، ۳۴] مراجعه کنید.

تعریف ۲۵.۳. فرض کنید $t \in [0, \infty)$ ، عنصر $X \in L_G^1(\mathcal{F})$ را تحت G -امید $\mathbb{E}[\cdot]$ از $\mathcal{F}_t$ مستقل گوئیم، هرگاه برای هر تابع $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که $\Phi(X) \in L_G^1(\mathcal{F})$ داشته باشیم

$$\mathbb{E}[\Phi(X)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\Phi(X)].$$

تذکر ۲۶.۳. روشن است که هر $X \in L_G^1(\mathcal{F})$ از $\mathcal{F}_0$ مستقل است. مانند حالت کلاسیک، نموهای حرکت G -برآونی $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ از $\mathcal{F}_s$ مستقل هستند. در حقیقت این فرآیند یک فرآیند G -برآونی جدید است، زیرا مانند حالت کلاسیک نموهای B هم توزیع هستند.

مثال ۲۷.۳. برای هر $s \leq t$ ، $B_t - B_s \in L_G^1(\mathcal{F}_T^s)$ ، لذا با توجه به قسمت (۷) از گزاره ۲۴.۳ داریم

$$\mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = \mathbb{E}[B_{t-s}] = 0,$$

در حالت کلی

$$\mathbb{E}[\psi(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\psi(B_t - B_s)]. \quad (۱۸.۳)$$

برای $n = 1, 2, \dots$ با توجه به این که $\phi(B_t - B_s) = |B_t - B_s|^n \in L_G^1(\mathcal{F}_T^s)$

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^n|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[|B_{t-s}|^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx.$$

همچنین

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^n|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[|B_{t-s}|^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)\sigma_0}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)\sigma_0^2}\right) dx.$$

در حالت کلی برای هر تابع محدب و حقیقی ϕ روی $\mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X\phi(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] &= X^+ \mathbb{E}[\phi(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + X^- \mathbb{E}[-\phi(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] \\ &= \frac{X^+}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx \\ &\quad - \frac{X^-}{\sqrt{2\pi(t-s)\sigma_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)\sigma_0^2}\right) dx. \end{aligned}$$

مانند حالت کلاسیک داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= t - s, \quad \mathbb{E}[(B_t - B_s)^4 | \mathcal{F}_s] = 3(t - s)^2, \\ \mathbb{E}[(B_t - B_s)^6 | \mathcal{F}_s] &= 15(t - s)^3, \quad \mathbb{E}[(B_t - B_s)^8 | \mathcal{F}_s] = 105(t - s)^4, \\ \mathbb{E}[|B_t - B_s| | \mathcal{F}_s] &= \frac{\sqrt{2(t - s)}}{\sqrt{\pi}}, \quad \mathbb{E}[|B_t - B_s|^3 | \mathcal{F}_s] = \frac{2\sqrt{2}(t - s)^{3/2}}{\sqrt{\pi}}, \\ \mathbb{E}[|B_t - B_s|^5 | \mathcal{F}_s] &= \frac{8\sqrt{2}(t - s)^{5/2}}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

مثال ۲۸.۳. برای هر $n = 1, 2, \dots$ و $0 \leq s \leq t < T$ ، با توجه به گزاره ۱۷.۳ می‌دانیم

$$\mathbb{E}[B_{T-t}^{n-1}] = \mathbb{E}[-B_{T-t}^{n-1}].$$

بنابراین با توجه به قسمت (۶) از گزاره ۲۴.۳ برای هر $X \in L_G^1(\mathcal{F}_s)$ داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(B_T - B_t)^{n-1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(B_T - B_t)^{n-1} | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[X^+ \mathbb{E}[(B_T - B_t)^{n-1} | \mathcal{F}_t] \\ &\quad + X^- \mathbb{E}[-(B_T - B_t)^{n-1} | \mathcal{F}_t]] = *\end{aligned}$$

اما $(B_T - B_t)^{n-1} \in L_G^1(\mathcal{F}_T^t)$ لذا $\mathbb{E}[(B_T - B_t)^{n-1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[(B_{T-t})^{n-1}]$ و بنابراین

$$\begin{aligned}* &= \mathbb{E}[X^+ \mathbb{E}[(B_{T-t})^{n-1}]] \\ &\quad + X^- \mathbb{E}[-(B_{T-t})^{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[|X| \mathbb{E}[(B_{T-t})^{n-1}]] \\ &= \mathbb{E}[|X|] \cdot \mathbb{E}[(B_{T-t})^{n-1}],\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X(B_T - B_t) | \mathcal{F}_t] = X^+ \mathbb{E}[(B_T - B_t) | \mathcal{F}_t] + X^- \mathbb{E}[-(B_T - B_t) | \mathcal{F}_t] = 0,$$

به طور مشابه

$$\mathbb{E}[-X(B_T - B_t) | \mathcal{F}_t] = 0.$$

همچنین

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(B_T - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] &= X^+ \mathbb{E}[(B_T - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] + X^- \mathbb{E}[-(B_T - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] \\ &= X^+(T - t) - \sigma^2 X^-(T - t).\end{aligned}$$

تذکره ۲۹.۳. به طریقی مشابه با تعریف ۲۰.۳ می‌توان امید $E[\cdot]$ را روی $l_{ip}^0(\mathcal{F})$ با توزیع نرمال استاندارد

$P_1(\cdot)$ به جای $P_1^G(\cdot)$ تعریف کرد. چون $P_1(\cdot)$ تحت تسلط $P_1^G(\cdot)$ است، یعنی

$$P_1(\phi) - P_1(\psi) \leq P_1^G(\phi - \psi),$$

لذا $E[.]$ می‌تواند به طور پیوسته به فضای $L_G^1(\mathcal{F})$ توسیع یابد. $E[.]$ یک امید خطی است و $(B_t)_{t \geq 0}$ به عنوان حرکت برآونی رفتار می‌کند.

داریم

$$E[X] \leq \mathbb{E}[X], \quad \forall X \in L_G^1(\mathcal{F}). \quad (۱۹.۳)$$

در حالت کلی $\mathbb{E}[B_{T-t}^{n-1}] = \mathbb{E}[-B_{T-t}^{n-1}] \geq E[-B_{T-t}^{n-1}] = 0$. این نوع از توسیع‌ها (تحت یک رابطه تسلطی) با جزئیات کامل در [۳۱] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

گزاره ۳۰.۳. فرض کنید $X, Y \in L_G^1(\mathcal{F})$ و $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y]$ (در این صورت با توجه به رابطه (۱۹.۳)، $\mathbb{E}[Y] = E[Y]$ و $E[Y] = -E[-Y] \geq -\mathbb{E}[-Y] = \mathbb{E}[Y]$)، بنابراین

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

در حالت خاص اگر $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[-Y] = 0$ ، آنگاه $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X]$.

برهان. این رابطه به روشنی برقرار است زیرا، $\mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ ، به علاوه

$$\mathbb{E}[X + Y] \geq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[-Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

□

مثال ۳۱.۳. داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}(B_t - B_s)B_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}(B_t - B_s)B_s | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbb{E}[B_s^+ \mathbb{E}[\mathbf{1}(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] + B_s^- \mathbb{E}[-\mathbf{1}(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbb{E}[B_s^+ \mathbb{E}[\mathbf{1}(B_t - B_s)] + B_s^- \mathbb{E}[-\mathbf{1}(B_t - B_s)]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1} B_s^+ \mathbb{E}[(B_t - B_s)] + \mathbf{1} B_s^- \mathbb{E}[-(B_t - B_s)]] \\ &= \mathbf{1} \mathbb{E}[|B_s|] \cdot \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0. \end{aligned}$$

به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که $\mathbb{E}[-\mathbf{1}(B_t - B_s)B_s] = 0$ ، بنابراین بنا به گزاره فوق داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^\mathbf{1} - B_s^\mathbf{1} | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^\mathbf{1} - B_s^\mathbf{1} | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^\mathbf{1} + \mathbf{1}(B_t - B_s)B_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^\mathbf{1} | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\mathbf{1}(B_t - B_s)B_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^\mathbf{1}] + (B_s^+ \mathbb{E}[\mathbf{1}(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] + B_s^- \mathbb{E}[-\mathbf{1}(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s]) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

به علاوه

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(B_t^\vee - B_s^\vee)^\vee | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\{(B_t - B_s + B_s)^\vee - B_s^\vee\}^\vee | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[\{(B_t - B_s)^\vee + \vee(B_t - B_s)B_s\}^\vee | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^\vee + \vee(B_t - B_s)^\vee B_s + \vee(B_t - B_s)^\vee B_s^\vee | \mathcal{F}_s] \\
&\leq \mathbb{E}[(B_t - B_s)^\vee | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\vee(B_t - B_s)^\vee B_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\vee(B_t - B_s)^\vee B_s^\vee | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^\vee] + (B_s^+ \mathbb{E}[\vee(B_t - B_s)^\vee | \mathcal{F}_s] + B_s^- \mathbb{E}[-\vee(B_t - B_s)^\vee | \mathcal{F}_s]) \\
&\quad + ((B_s^\vee)^+ \mathbb{E}[\vee(B_t - B_s)^\vee | \mathcal{F}_s] + (B_s^\vee)^- \mathbb{E}[-\vee(B_t - B_s)^\vee | \mathcal{F}_s]) \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^\vee] + \vee \mathbb{E}[|B_t - B_s|^\vee] |B_s| + \vee(t - s)B_s^\vee \\
&= \vee(t - s)^\vee + \wedge(t - s)^\vee |B_s| + \vee(t - s)B_s^\vee.
\end{aligned}$$

۵.۳ انتگرال G -ایتو

۱.۵.۳ انتگرال باکنر

تعریف ۳۲.۳. فرض کنید $T \in \mathbb{R}_+$ ، افراز π_T از بازه $[\circ, T]$ ، زیرمجموعه‌ای مرتب متناهی مانند $\pi_T = \{t_1, \dots, t_N\}$ است به طوری که $\circ = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ قرار می‌دهیم

$$\mu(\pi_T) = \max\{|t_{i+1} - t_i| \mid i = 0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

از $\{\circ = t_0^N < t_1^N < \dots < t_N^N = T\}$ برای نشان دادن دنباله‌ای از افرازا روی بازه $[\circ, T]$ به طوری که $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\pi_T^N) = \circ$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳۳.۳. فرض کنید $p \geq 1$ ثابت باشد. نوعی از فرآیندهای ساده را، به صورت زیر معرفی می‌کنیم: برای افراز $\pi_T = \{t_0, \dots, t_N\}$ از $[\circ, T]$ ، قرار می‌دهیم

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_{j+1}-t_j)}(t),$$

که برای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ، $\xi_i \in L_G^p(\mathcal{F}_{t_i})$ داده شده است. گردآیه تمام این فرآیندها را با $M_G^{p,\circ}(\circ, T)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۴.۳. انتگرال باکنر^۱ $\eta \in M_G^{1,\circ}(\circ, T)$ با $\eta_t(\omega) = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_{j+1}-t_j)}(t)$ را به صورت

^۱Bochner

زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_0^T \eta_t(\omega) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)(t_{j+1} - t_j).$$

تذکر ۳۵.۳. برای هر $\eta \in M_G^{\lambda, \circ}(\circ, T)$ ، قرار می‌دهیم

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[\eta] := \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[\eta_t] dt = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[\xi_j(\omega)](t_{j+1} - t_j).$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\tilde{\mathbb{E}}_T[\cdot] : M_G^{\lambda, \circ}(\circ, T) \rightarrow \mathbb{R}$ یک امید غیرخطی است. از آنچه در بخش ۲.۳ گذشت تابع

$$\|\eta\|_T = \tilde{\mathbb{E}}_T[\|\eta\|] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[\|\eta_t\|] dt,$$

یک نرم روی $M_G^{\lambda, \circ}(\circ, T)$ است. تحت این نرم فضای $M_G^{\lambda, \circ}(\circ, T)$ می‌تواند به طور پیوسته به فضای باناخ $M_G^{\lambda}(\circ, T)$ توسیع یابد.

تعریف ۳۶.۳. برای هر $p \geq 1$ ، تکمیل فضای $M_G^{p, \circ}(\circ, T)$ ، تحت نرم زیر را با $M_G^p(\circ, T)$ نشان می‌دهیم

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{M_G^p} &= \left(\tilde{\mathbb{E}}_T[\|\eta\|^p] \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[\|\eta_t\|^p] dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|\eta_t\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[|\xi_j(\omega)|^p](t_{j+1} - t_j) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

تذکر ۳۷.۳. روشن است که

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \eta_t(\omega) dt \right| \right] \leq \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[|\xi_j(\omega)|](t_{j+1} - t_j) = \int_0^T \mathbb{E}[\|\eta_t\|] dt.$$

بنابراین داریم

گزاره ۳۸.۳. نگاشت خطی $\int_0^T \eta_t(\omega) dt : M_G^{\lambda, \circ}(\circ, T) \rightarrow L_G^{\lambda}(\mathcal{F})$ پیوسته است و بنابراین می‌تواند به طور پیوسته به نگاشت $M_G^{\lambda}(\circ, T) \rightarrow L_G^{\lambda}(\mathcal{F})$ گسترش یابد. این نگاشت گسترش یافته را همچنان با $\int_0^T \eta_t(\omega) dt$ نشان می‌دهیم که در آن $\eta \in M_G^{\lambda}(\circ, T)$ داریم

$$\forall \eta \in M_G^{\lambda}(\circ, T), \quad \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \eta_t(\omega) dt \right| \right] \leq \int_0^T \mathbb{E}[\|\eta_t\|] dt. \quad (۲۰.۳)$$

برهان. با توجه به تذکر فوق نگاشت خطی $\int_0^T \eta_t(\omega) dt : M_G^{\lambda, \circ}(\circ, T) \rightarrow L_G^{\lambda}(\mathcal{F})$ کراندار و لذا پیوسته است، بنابراین می‌تواند به طور پیوسته به نگاشت $M_G^{\lambda}(\circ, T) \rightarrow L_G^{\lambda}(\mathcal{F})$ گسترش یابد. $\square$

چون برای هر $p \geq 1$ ، $L_G^p(\circ, T) \subseteq L_G^{\lambda}(\circ, T)$ ، لذا $M_G^p(\circ, T) \subset M_G^{\lambda}(\circ, T)$ ، بنابراین این تعریف برای هر $\eta \in M_G^p(\circ, T)$ برقرار است.

۲.۵.۳ انتگرال ایتو با استفاده از فرآیند G -برآونی

تعریف ۳.۹.۳. برای هر $\eta \in M_G^{\mathfrak{Y}, \circ}(\circ, T)$ به شکل

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{I}(\eta) = \int_{\circ}^T \eta(s) dB_s(\omega) := \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

لم ۴.۰.۳. نگاشت $\mathcal{I} : M_G^{\mathfrak{Y}, \circ}(\circ, T) \rightarrow L_G^{\mathfrak{Y}}(\mathcal{F}_T)$ یک نگاشت خطی و پیوسته است و بنابراین می‌تواند به طور پیوسته به نگاشت $M_G^{\mathfrak{Y}}(\circ, T) \rightarrow L_G^{\mathfrak{Y}}(\mathcal{F}_T)$ گسترش یابد. در حقیقت

$$\mathbb{E} \left[\int_{\circ}^T \eta(s) dB_s \right] = \circ, \quad (21.3)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{\circ}^T \eta(s) dB_s \right)^{\mathfrak{Y}} \right] \leq \int_{\circ}^T \mathbb{E}[(\eta(t))^{\mathfrak{Y}}] dt. \quad (22.3)$$

برهان. با توجه به مثال ۲۸.۳ برای هر j داریم

$$\mathbb{E}[\xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}] = \mathbb{E}[-\xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}] = \circ,$$

$$\mathbb{E}[\xi_j^{\mathfrak{Y}}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^{\mathfrak{Y}} | \mathcal{F}_{t_j}] = (\xi_j^{\mathfrak{Y}})^+(t_{j+1} - t_j) + \sigma_{\circ}^{\mathfrak{Y}}(\xi_j^{\mathfrak{Y}})^-(t_{j+1} - t_j) = \xi_j^{\mathfrak{Y}}(t_{j+1} - t_j).$$

پس

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{\circ}^{t_N=T} \eta(s) dB_s \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \xi_{N-1}(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\circ}^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s + \xi_{N-1}(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\circ}^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s + \mathbb{E} [\xi_{N-1}(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) | \mathcal{F}_{t_{N-1}}] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\circ}^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right]. \end{aligned}$$

با تکرار این روند برای $\circ, \dots, N-2, N-1$ رابطه (۲۱.۳) برقرار است.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_N=T} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^2 + 2 \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right) \right. \\
&\quad \left. \times (\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})) + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[2 \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right) \right. \\
&\quad \left. \times (\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})) + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{N-1}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[2 \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right) \right. \\
&\quad \left. \times (\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})) \middle| \mathcal{F}_{t_{N-1}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{N-1}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] + \left(2 \int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^+ \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[(\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})) \middle| \mathcal{F}_{t_{N-1}} \right] \\
&\quad + \left(2 \int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^- \mathbb{E} \left[(-\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})) \middle| \mathcal{F}_{t_{N-1}} \right] \\
&\quad + \xi_{N-1}^2 (t_N - t_{N-1}) \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] + \xi_{N-1}^2 (t_N - t_{N-1}).
\end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_N=T} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] + \mathbb{E} [\xi_{N-1}^2] (t_N - t_{N-1})$ با تکرار این روند برای هر j خواهیم داشت

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_N=T} \eta(s) dB_s \right)^2 \right] \leq \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E} [\xi_j^2] (t_{j+1} - t_j) = \int_0^T \mathbb{E}[(\eta(t))^2] dt.$$

با توجه به رابطه (۲۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T \eta(s) dB_s \right\|_2^2 &= \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta(s) dB_s \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^T \mathbb{E}[(\eta(t))^2] dt \right)^{\frac{1}{2}} = T \|\eta\|_{M_G^2}, \end{aligned}$$

این یعنی نگاشت $\mathcal{I} : M_G^2(\circ, T) \rightarrow L_G^2(\mathcal{F}_T)$ کراندار و لذا پیوسته است، بنابراین $\mathcal{I}$ قابل گسترش به نگاشت خطی و پیوسته $M_G^2(\circ, T) \rightarrow L_G^2(\mathcal{F}_T)$ می‌باشد. $\square$

تعریف ۴۱.۳. برای هر $\eta \in M_G^2(\circ, T)$ انتگرال تصادفی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_0^T \eta(s) dB_s := \mathcal{I}(\eta).$$

به روشنی روابط (۲۱.۳) و (۲۲.۳) برای هر $\eta \in M_G^2(\circ, T)$ همچنان برقرار هستند.

اکنون به بیان برخی ویژگی‌های اصلی انتگرال ایتو می‌پردازیم. برای هر $0 \leq s \leq t \leq T$ قرار می‌دهیم

$$\int_s^t \eta_u dB_u := \int_0^T I_{[s,t]}(u) \eta_u dB_u.$$

گزاره ۴۲.۳. فرض کنید $\eta, \theta \in M_G^2(\circ, T)$ و $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. در این صورت در فضای $L_G^1(\mathcal{F}_T)$ خواهیم داشت

$$\int_s^t \eta_u dB_u = \int_s^r \eta_u dB_u + \int_r^t \eta_u dB_u. \quad ۱.$$

۲. اگر $\alpha \in L_G^1(\mathcal{F}_s)$ کراندار باشد، آنگاه $\int_s^t \alpha \eta_u dB_u = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u + \int_s^t \theta_u dB_u$.

۳. برای هر $X \in L_G^1(\mathcal{F})$

$$\mathbb{E} \left[X + \int_r^T \eta_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}[X].$$

۳.۵.۳ فرآیند با تغییرات مرتبه دوم تولید شده به وسیله فرآیند $-G$ - برآونی

هم اکنون به مطالعه فرآیند خاصی که از فرآیند $-G$ - برآونی مشتق می‌شود، می‌پردازیم. فرض کنید π_t^N ، $N = 1, 2, \dots$ دنباله‌ای از افرازهای بازه $[0, t]$ باشد. داریم

$$\begin{aligned} B_t^N &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[B_{t_{j+1}^N}^N - B_{t_j^N}^N \right] \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 2 B_{t_j^N}^N \left(B_{t_{j+1}^N}^N - B_{t_j^N}^N \right) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N}^N - B_{t_j^N}^N \right)^2. \end{aligned} \quad (۲۳.۳)$$

در این صورت

$$\lim_{\mu(\pi_t^N) \rightarrow \circ} \sum_{j=0}^{N-1} {}^2 B_{t_j^N} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right) = {}^2 \int_{\circ}^t B_s dB_s.$$

عبارت دوم از سمت راست تساوی (۲۳.۳) نیز همگرا می‌باشد که حد آن را با $\langle B \rangle_t$ نشان می‌دهیم:

$$\langle B \rangle_t = \lim_{\mu(\pi_t^N) \rightarrow \circ} \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right)^2 = B_t^2 - {}^2 \int_{\circ}^t B_s dB_s. \quad (24.3)$$

با توجه به ساختار ذکر شده در بالا، $\langle B \rangle_t$ ، $t \geq \circ$ ، یک فرآیند صعودی با $\langle B \rangle_{\circ} = \circ$ است که به آن فرآیند با تغییرات مرتبه دوم تولید شده به وسیله حرکت G -برآونی B می‌گوییم.

لم ۴۳.۳. برای هر $\circ \leq s \leq t < \infty$ داریم

$$\mathbb{E} [\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s | \mathcal{F}_s] = t - s, \quad (25.3)$$

$$\mathbb{E} [-(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s) | \mathcal{F}_s] = -\sigma_{\circ}^2(t - s). \quad (26.3)$$

برهان. با توجه به تعریف $\langle B \rangle$ و قسمت (۳) از گزاره ۴۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left[B_t^2 - B_s^2 - {}^2 \int_s^t B_u dB_u | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} [B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{F}_s] = t - s. \end{aligned}$$

بنابراین رابطه‌ی (۲۵.۳) برقرار است. رابطه‌ی (۲۶.۳) نیز با توجه به رابطه‌ی

$$\mathbb{E} [-(B_t^2 - B_s^2) | \mathcal{F}_s] = -\sigma_{\circ}^2(t - s),$$

□

به روشنی برقرار است.

برای تعریف انتگرال $\eta \in M_G^1(\circ, T)$ نسبت به $d\langle B \rangle$ ، نگاشت $Q_{\circ, T} : M_G^{1, \circ}(\circ, T) \rightarrow L_G^1(\mathcal{F}_T)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Q_{\circ, T}(\eta) = \int_{\circ}^T \eta(s) d\langle B \rangle_s := \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j}).$$

لم ۴۴.۳. برای هر $\eta \in M_G^{1, \circ}(\circ, T)$ داریم

$$\mathbb{E}[|Q_{\circ, T}(\eta)|] \leq \int_{\circ}^T \mathbb{E}[|\eta_s|] ds. \quad (27.3)$$

بنابراین $Q_{\circ, T} : M_G^{1, \circ}(\circ, T) \rightarrow L_G^1(\mathcal{F}_T)$ نگاشتی خطی و پیوسته است و در نتیجه به طور یکتا می‌تواند به فضای $M_G^1(\circ, T)$ گسترش یابد. این نگاشت گسترش یافته را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\forall \eta \in M_G^1(\circ, T) \quad \int_{\circ}^T \eta(s) d\langle B \rangle_s = Q_{\circ, T}(\eta).$$

داریم

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \eta(s) d\langle B \rangle_s \right| \right] \leq \int_0^T \mathbb{E} [|\eta(t)|] dt. \quad (28.3)$$

برهان. با توجه به لم ۴۳.۳، رابطه (۲۷.۳) به صورت زیر برقرار است

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j}) \right| \right] &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_j| \cdot (\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j})] \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_j| \mathbb{E} [(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_j|] (t_{j+1} - t_j) \\ &= \int_0^T \mathbb{E} [|\eta_s|] ds. \end{aligned}$$

□

یک نکته جالب توجه در مورد فرآیند با تغییرات مرتبه دوم $\langle B \rangle$ ، این است که مانند فرآیند $-G$ براونی B ، نمو $\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s$ برای هر $t \geq 0$ از $\mathcal{F}_s$ مستقل و با $\langle B \rangle_t$ هم توزیع است. در حقیقت لم زیر را داریم.

لم ۴۵.۳. برای هر $s \geq 0$ ثابت، $(\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s)_{t \geq 0}$ از $\mathcal{F}_s$ مستقل است. این فرآیند با تغییرات مرتبه دوم تولید شده به وسیله حرکت براونی $B_t^s = B_{s+t} - B_s$ است که $t \geq 0$ ، یعنی

$$\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s = \langle B^s \rangle_t \quad \text{داریم}$$

$$\mathbb{E}[\langle B^s \rangle_t^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\langle B \rangle_t^2] = t^2, \quad (29.3)$$

همچنین

$$\mathbb{E}[\langle B^s \rangle_t^3 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\langle B \rangle_t^3] = t^3, \quad (30.3)$$

$$\mathbb{E}[\langle B^s \rangle_t^4 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\langle B \rangle_t^4] = t^4.$$

برهان. استقلال با توجه به تعریف و رابطه زیر به سادگی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s &= B_{t+s}^2 - \int_0^{t+s} B_r dB_r - \left[B_s^2 - \int_0^s B_r dB_r \right] \\ &= (B_{s+t} - B_s)^2 - 2 \int_s^{s+t} (B_r - B_s) d(B_r - B_s) \\ &= \langle B^s \rangle_t. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به مستقل بودن $\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s$ از $\mathcal{F}_s$ و قسمت (۳) از گزاره ۴۲.۳ داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s] &= \mathbb{E}[\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}\left[(B_{s+t} - B_s)^{\mathfrak{V}} - \mathfrak{V} \int_s^{s+t} (B_r - B_s) d(B_r - B_s) | \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}[(B_{s+t} - B_s)^{\mathfrak{V}}] = \mathbb{E}[B_{t+s-s}^{\mathfrak{V}}] = t = \mathbb{E}[\langle B \rangle_t].\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\phi(t) := \mathbb{E}[\langle B \rangle_t^{\mathfrak{V}}]$.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \mathbb{E}\left[\left\{(B_t)^{\mathfrak{V}} - \mathfrak{V} \int_0^t B_u dB_u\right\}^{\mathfrak{V}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}[(B_t)^{\mathfrak{V}}] + \mathfrak{V} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B_u dB_u\right)^{\mathfrak{V}}\right] + \mathfrak{V} \mathbb{E}\left[-(B_t)^{\mathfrak{V}} \left(\int_0^t B_u dB_u\right)\right] \\ &\leq \mathfrak{V} \mathbb{E}[(B_t)^{\mathfrak{V}}] + \mathfrak{A} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B_u dB_u\right)^{\mathfrak{V}}\right] + \circ \\ &\leq \mathfrak{E} t^{\mathfrak{V}} + \mathfrak{A} \int_0^t \mathbb{E}[(B_u)^{\mathfrak{V}}] du \\ &= \mathfrak{I} \circ t^{\mathfrak{V}}.\end{aligned}$$

همچنین $s \in [0, t)$ برای هر $\mathbb{E}[(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)^{\mathfrak{V}}] = \phi(t-s) \leq \mathfrak{I} \circ (t-s)^{\mathfrak{V}}$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \mathbb{E}[(\langle B \rangle_s + \langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)^{\mathfrak{V}}] \\ &\leq \mathbb{E}[(\langle B \rangle_s)^{\mathfrak{V}}] + \mathbb{E}[(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)^{\mathfrak{V}}] + \mathfrak{V} \mathbb{E}[(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)(\langle B \rangle_s)] \\ &= \phi(s) + \phi(t-s) + \mathfrak{V} \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s) | \mathcal{F}_s] \langle B \rangle_s] \\ &= \phi(s) + \phi(t-s) + \mathfrak{V}(t-s)s.\end{aligned}$$

برای هر عدد صحیح و مثبت N قرار می‌دهیم $\delta_N = t/N$ و $t_k^N = kt/N = k\delta_N$ از نامساوی‌های بالا داریم

$$\begin{aligned}\phi(t_N^N) &\leq \phi(t_{N-1}^N) + \phi(\delta_N) + \mathfrak{V} t_{N-1}^N \delta_N \\ &\leq \phi(t_{N-2}^N) + \mathfrak{V} \phi(\delta_N) + \mathfrak{V} (t_{N-1}^N + t_{N-2}^N) \delta_N \\ &\vdots\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\phi(t) \leq N\phi(\delta_N) + \mathfrak{V} \sum_{k=0}^{N-1} t_k^N \delta_N \leq \mathfrak{I} \circ \frac{t^{\mathfrak{V}}}{N} + \mathfrak{V} \sum_{k=0}^{N-1} t_k^N \delta_N.$$

فرض کنید $N \rightarrow \infty$ ، در این صورت $\phi(t) \leq 2 \int_0^t s ds = t^2$ ، بنابراین $\mathbb{E}[\langle B \rangle_t^2] \leq t^2$. این رابطه به همراه $\mathbb{E}[\langle B \rangle_t^2] \geq E[\langle B \rangle_t^2] = t^2$ رابطه (۲۹.۳) را نتیجه می‌دهد. با توجه به مستقل بودن $\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s$ از $\mathcal{F}_s$ داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle B \rangle_t^2] &= \mathbb{E}[\langle B^s \rangle_t^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s)^2 | \mathcal{F}_s] (\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s) | \mathcal{F}_s] \\ &= t^2 \cdot t = t^3.\end{aligned}$$

□

گزاره ۴۶.۳. فرض کنید $t \leq s \leq \infty$ ، $\xi \in L_G^1(\mathcal{F}_s)$ و $X \in L_G^1(\mathcal{F})$. در این صورت

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X + \xi(B_t^2 - B_s^2)] &= \mathbb{E}[X + \xi(B_t - B_s)^2] \\ &= \mathbb{E}[X + \xi(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)].\end{aligned}$$

برهان. با توجه به رابطه (۲۴.۳) و گزاره ۳۰.۳، داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X + \xi(B_t^2 - B_s^2)] &= \mathbb{E}\left[X + \xi\left(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s + 2 \int_s^t B_u dB_u\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[X + \xi(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)] + 2\mathbb{E}\left[\xi\left(\int_s^t B_u dB_u\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[X + \xi(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)].\end{aligned}$$

به طریقی مشابه با مثال ۳۱.۳ می‌توان نشان داد که

$$\mathbb{E}[2\xi(B_t - B_s)B_s] = \mathbb{E}[-2\xi(B_t - B_s)B_s] = 0.$$

بنابراین با توجه به گزاره ۳۰.۳ داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X + \xi(B_t^2 - B_s^2)] &= \mathbb{E}[X + \xi((B_t - B_s + B_s)^2 - B_s^2)] \\ &= \mathbb{E}[X + \xi((B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)B_s)] \\ &= \mathbb{E}[X + \xi(B_t - B_s)^2] + 2\mathbb{E}[\xi(B_t - B_s)B_s] \\ &= \mathbb{E}[X + \xi(B_t - B_s)^2].\end{aligned}$$

□

گزاره ۴۷.۳. برای هر $\eta \in M_G^{\vee}(\circ, T)$ داریم

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{\circ}^T \eta(s) dB_s \right)^{\vee} \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\circ}^T \eta^{\vee}(s) d\langle B \rangle_s \right]. \quad (31.3)$$

برهان. فرض کنید $\eta \in M_G^{\vee}(\circ, T)$ به صورت زیر باشد

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t).$$

در این صورت $\int_{\circ}^T \eta(s) dB_s := \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$. با توجه به گزاره ۳۰.۳ برای هر $i \neq j$ و $X \in L_G^1(\mathcal{F})$ داریم

$$\mathbb{E}[X + \vee \xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \xi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \mathbb{E}[X].$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_{\circ}^T \eta(s) dB_s \right)^{\vee} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right)^{\vee} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j^{\vee}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right]. \end{aligned}$$

این رابطه به همراه گزاره ۴۶.۳ نتیجه می‌دهد

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{\circ}^T \eta(s) dB_s \right)^{\vee} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j^{\vee}(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j}) \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\circ}^T \eta^{\vee}(s) d\langle B \rangle_s \right].$$

بنابراین رابطه (۳۱.۳) برای هر $\eta \in M_G^{\vee}(\circ, T)$ برقرار است.

از طرفی می‌دانیم نگاشت $\int_{\circ}^T \eta(s) dB_s : M_G^{\vee}(\circ, T) \rightarrow L_G^{\vee}(\mathcal{F}_T)$ پیوسته است، بنابراین دارای گسترشی به فضای $M_G^{\vee}(\circ, T)$ می‌باشد. لذا رابطه‌ی (۳۱.۳) برای هر $\eta \in M_G^{\vee}(\circ, T)$ برقرار است.

□

۴.۵.۳ فرمول ایتو برای فرآیند G -برآونی

اکنون به بیان فرمول ایتو^۹ از $\Phi(X_t)$ می‌پردازیم که X یک فرآیند G -ایتو می‌باشد. برای سادگی تنها حالتی را در نظر می‌گیریم که تابع Φ به اندازه کافی هموار باشد.

لم ۴۸.۳. فرض کنید $\Phi \in C^{\vee}(\mathbb{R}^n)$ تابعی کراندار با مشتقات کراندار باشد و $\{\partial_{x^{\mu}x^{\nu}}^{\vee} \Phi\}_{\mu, \nu=1}^n$ تابعی به طور یکنواخت لپشیتس باشند. فرض کنید $s \in [\circ, T]$ ثابت باشد و فرض کنید $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)^T$ یک فرآیند n -بعدی روی $[s, T]$ به شکل زیر باشد

$$X_t^{\nu} = X_s^{\nu} + \alpha^{\nu}(t - s) + \eta^{\nu}(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s) + \beta^{\nu}(B_t - B_s),$$

^۹Ito's Formula

که برای $n, \nu = 1, \dots, n$ ، α^ν ، η^ν و β^ν عناصری کراندار از $L_G^\nu(\mathcal{F}_s)$ هستند و $X_s = (X_s^1, \dots, X_s^n)^T$ یک $\mathbb{R}^n$ -برددار داده شده در فضای $L_G^\nu(\mathcal{F}_s)$ است. داریم

$$\begin{aligned} \Phi(X_t) - \Phi(X_s) &= \int_s^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u) \beta^\nu dB_u + \int_s^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u) \alpha^\nu du \\ &\quad + \int_s^t \left[D_{x^\nu} \Phi(X_u) \eta^\nu + \frac{1}{2} \partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_u) \beta^\mu \beta^\nu \right] d\langle B \rangle_u. \end{aligned} \quad (32.3)$$

در اینجا از قرارداد مجموع انیشتین^{۱۰} استفاده می‌کنیم، یعنی هر تک عبارت با اندیس‌های تکراری μ و ν (یا $\sum$) دلالت دارد.

برهان. برای هر عدد صحیح و مثبت N ، قرار می‌دهیم $\delta = (t - s)/N$. افراز زیر را در نظر بگیرید

$$\pi_{[s,t]}^N = \{t_0^N, t_1^N, \dots, t_N^N\} = \{s, s + \delta, \dots, s + N\delta = t\}.$$

با استفاده از سری تیلور^{۱۱} برای توابع چند متغیره داریم

$$\begin{aligned} \Phi(X_t) &= \Phi(X_s) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Phi(X_{t_{k+1}^N}) - \Phi(X_{t_k^N}) \right] \\ &= \Phi(X_s) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\partial_{x^\mu} \Phi(X_{t_k^N}) (X_{t_{k+1}^N}^\mu - X_{t_k^N}^\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_{t_k^N}) (X_{t_{k+1}^N}^\mu - X_{t_k^N}^\mu) (X_{t_{k+1}^N}^\nu - X_{t_k^N}^\nu) + \eta_k^N \right] \right]. \end{aligned} \quad (33.3)$$

که

$$\begin{aligned} \eta_k^N &= \left[\partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_{t_k^N} + \theta_k (X_{t_{k+1}^N} - X_{t_k^N})) - \partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_{t_k^N}) \right] \\ &\quad (X_{t_{k+1}^N}^\mu - X_{t_k^N}^\mu) (X_{t_{k+1}^N}^\nu - X_{t_k^N}^\nu), \end{aligned}$$

با $\theta_k \in [0, 1]$. با توجه به مثال ۲۷.۳ و رابطه‌ی (۳۰.۳) داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\eta_k^N|] &= \mathbb{E} \left[\left| \left[\partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_{t_k^N} + \theta_k (X_{t_{k+1}^N} - X_{t_k^N})) - \partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_{t_k^N}) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (X_{t_{k+1}^N}^\mu - X_{t_k^N}^\mu) (X_{t_{k+1}^N}^\nu - X_{t_k^N}^\nu) \right| \right] \\ &\leq c \mathbb{E} \left[|X_{t_{k+1}^N} - X_{t_k^N}|^3 \right] \leq C [\delta^3 + \delta^{3/2}], \end{aligned}$$

^{۱۰}Einstein convention

^{۱۱}Taylor series

که c ثابت لیشیتس تابع $\{\partial_{x^\mu x^\nu}^\gamma \Phi\}_{\mu, \nu=1}^n$ است. بنابراین $\sum_k \mathbb{E}[|\eta_k^N|] \rightarrow 0$. مجموع سمت راست رابطه‌ی (۳۳.۳)، برابر است با $\xi_t^N + \zeta_t^N$ ، که

$$\begin{aligned} \xi_t^N = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \partial_{x^\mu} \Phi \left(X_{t_k^N} \right) \left[\alpha^\mu (t_{k+1}^N - t_k^N) \right. \right. \\ & + \eta^\mu \left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) + \beta^\mu \left(B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N} \right) \left. \right] \\ & + \frac{1}{2} \partial_{x^\mu x^\nu}^\gamma \Phi \left(X_{t_k^N} \right) \beta^\mu \beta^\nu \left(B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N} \right) \left(B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N} \right) \left. \right\}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \zeta_t^N = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \partial_{x^\mu x^\nu}^\gamma \Phi \left(X_{t_k^N} \right) \left[\alpha^\mu (t_{k+1}^N - t_k^N) + \eta^\mu \left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) \right] \\ & \times \left[\alpha^\nu (t_{k+1}^N - t_k^N) + \eta^\nu \left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) \right] \\ & + \beta^\nu \left[\alpha^\mu (t_{k+1}^N - t_k^N) + \eta^\mu \left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) \right] \left(B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N} \right). \end{aligned}$$

برای هر $u \in [t_k^N, t_{k+1}^N)$ ، با توجه به قرارداد مجموع انیشتین، مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| \partial_{x^\mu} \Phi(X_u) - \sum_{k=0}^{N-1} \partial_{x^\mu} \Phi \left(X_{t_k^N} \right) I_{[t_k^N, t_{k+1}^N)}(u) \right|^2 \right] \\ & = \mathbb{E} \left[\left| \partial_{x^\mu} \Phi(X_u) - \partial_{x^\mu} \Phi \left(X_{t_k^N} \right) \right|^2 \right] \\ & \leq c^2 \mathbb{E} \left[\left| X_u - X_{t_k^N} \right|^2 \right] \leq C[\delta + \delta^2]. \end{aligned}$$

بنابراین زمانی که $N \rightarrow \infty$ ، در فضای $M_G^{\gamma}(\circ, T)$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \partial_{x^\mu} \Phi \left(X_{t_k^N} \right) I_{[t_k^N, t_{k+1}^N)}(\cdot) \rightarrow \partial_{x^\mu} \Phi(X).$$

به طریقی مشابه در فضای $M_G^{\gamma}(\circ, T)$ داریم

$$\sum_{k=0}^{N-1} \partial_{x^\mu x^\nu}^\gamma \Phi \left(X_{t_k^N} \right) I_{[t_k^N, t_{k+1}^N)}(\cdot) \rightarrow \partial_{x^\mu x^\nu}^\gamma \Phi(X).$$

فرض کنید $N \rightarrow \infty$ ، در این صورت با توجه به تعریف‌های انتگرال نسبت به dB_t ، $d\langle B \rangle_t$ و ξ_t^N حد $L_G^{\gamma}(\circ, T)$ برابر است با عبارت سمت راست رابطه‌ی (۳۲.۳). همچنین با توجه به تخمین‌های ارائه شده در تذکر بعد، در فضای $L_G^{\gamma}(\circ, T)$ داریم $\zeta_t^N \rightarrow 0$. بنابراین رابطه‌ی (۳۲.۳) برقرار است. $\square$

تذکر ۴۹.۳. برای ثابت کردن اینکه در فضای $L_G^{\gamma}(\circ, T)$ ، $\zeta_t^N \rightarrow 0$ ، از تخمین‌های زیر استفاده می‌کنیم:

برای هر $N = 1, 2, \dots$ و برای $\psi^N \in M_G^{\gamma}(\circ, T)$ به طوری که $\psi_t^N = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_{t_k^N}^N I_{[t_k^N, t_{k+1}^N)}(t)$ و

داریم $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\pi_T^N) = \circ$ با $\pi_T^N = \{\circ = t_\circ, \dots, t_N = T\}$ و $\sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E}[|\xi_k^N|] (t_{k+1}^N - t_k^N) \leq C$

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=\circ}^{N-1} \xi_k^N (t_{k+1}^N - t_k^N) \right|^2 \right] \leq \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E}[|\xi_k^N|] (t_{k+1}^N - t_k^N)^2 \leq C (|t_{k+1}^N - t_k^N|) \rightarrow \circ,$$

و در نتیجه با توجه به لم ۴۵.۳ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=\circ}^{N-1} \xi_k^N \left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) \right|^2 \right] &\leq \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E} \left[|\xi_k^N| \cdot \mathbb{E} \left[\left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_k^N} \right] \right] \\ &= \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E}[|\xi_k^N|] (t_{k+1}^N - t_k^N)^2 \rightarrow \circ. \end{aligned}$$

بعلاوه از نامساوی هولدر داریم

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=\circ}^{N-1} \xi_k^N \left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) \left(B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N} \right) \right|^2 \right] \\ &\leq \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_k^N|] \mathbb{E} \left[\left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) \left| B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N} \right| \right] \\ &\leq \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_k^N|] \mathbb{E} \left[\left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right)^2 \right]^{1/2} \mathbb{E} \left[\left| B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &= \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_k^N|] (t_{k+1}^N - t_k^N)^{3/2} \rightarrow \circ. \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=\circ}^{N-1} \xi_k^N \left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) (t_{k+1}^N - t_k^N) \right|^2 \right] \\ &\leq \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E} \left[|\xi_k^N| (t_{k+1}^N - t_k^N) \cdot \mathbb{E} \left[\left(\langle B \rangle_{t_{k+1}^N} - \langle B \rangle_{t_k^N} \right) \middle| \mathcal{F}_{t_k^N} \right] \right] \\ &= \sum_{k=\circ}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_k^N|] (t_{k+1}^N - t_k^N)^2 \rightarrow \circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k^N (t_{k+1}^N - t_k^N) (B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N}) \right| \right] \\
& \leq \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1}^N - t_k^N) \mathbb{E} \left[\left| \xi_k^N (B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N}) \right| \right] \\
& \leq \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1}^N - t_k^N) \mathbb{E} [|\xi_k^N|] \mathbb{E} \left[\left| (B_{t_{k+1}^N} - B_{t_k^N}) \right| \right] \\
& = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} [|\xi_k^N|] (t_{k+1}^N - t_k^N)^{3/2} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

اکنون شکل کلی‌تری از فرمول ایتو را معرفی می‌کنیم. فرض کنید

$$X_t^\nu = X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^\nu ds + \int_0^t \eta_s^\nu d\langle B \rangle_s + \int_0^t \beta_s^\nu dB_s. \quad (34.3)$$

گزاره ۵.۳. فرض کنید $\nu = 1, \dots, n$ و α^ν و β^ν و η^ν ، فرآیندهایی کراندار از فضای $M_G^\nu(0, T)$ باشند. در این صورت برای هر $t \geq 0$ و $\Phi \in L_G^2(\mathcal{F}_t)$ داریم

$$\begin{aligned}
\Phi(X_t) - \Phi(X_s) &= \int_s^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u) \beta_u^\nu dB_u + \int_s^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u) \alpha_u^\nu du \\
&\quad + \int_s^t \left[\partial_{x^\nu} \Phi(X_u) \eta_u^\nu + \frac{1}{2} \partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_u) \beta_u^\mu \beta_u^\nu \right] d\langle B \rangle_u.
\end{aligned} \quad (35.3)$$

برهان. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که α ، β و η فرآیندهایی به صورت زیر باشند

$$\eta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega) I_{[t_k, t_{k+1})}(t).$$

در این صورت با توجه به لم بالا، رابطه (۳۵.۳) به روشنی برقرار است. حال فرض کنید

$$X_t^{\nu, N} = X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^{\nu, N} ds + \int_0^t \eta_s^{\nu, N} d\langle B \rangle_s + \int_0^t \beta_s^{\nu, N} dB_s, \quad (36.3)$$

که α^N ، η^N و β^N ، فرآیندهایی هستند که به طور یکنواخت کراندارند و زمانی که $N \rightarrow \infty$ به α ، η و β در $M_G^\nu(0, T)$ همگرا می‌باشند. از لم ۴۸.۳ داریم

$$\begin{aligned}
\Phi(X_t^{\nu, N}) - \Phi(X_0) &= \int_0^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u^N) \beta_u^{\nu, N} dB_u + \int_0^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u^N) \alpha_u^{\nu, N} du \\
&\quad + \int_0^t \left[\partial_{x^\nu} \Phi(X_u^N) \eta_u^{\nu, N} + \frac{1}{2} \partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi(X_u^N) \beta_u^{\mu, N} \beta_u^{\nu, N} \right] d\langle B \rangle_u.
\end{aligned} \quad (37.3)$$

از طرفی با توجه به روابط (۲۰.۳)، (۲۲.۳) و (۲۸.۳) داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| X_t^{\nu, N} - X_t^\nu \right|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left| X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^{\nu, N} ds + \int_0^t \eta_s^{\nu, N} d\langle B \rangle_s + \int_0^t \beta_s^{\nu, N} dB_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^\nu ds + \int_0^t \eta_s^\nu d\langle B \rangle_s + \int_0^t \beta_s^\nu dB_s \right) \right|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (\alpha_s^{\nu, N} - \alpha_s^\nu) ds + \int_0^t (\eta_s^{\nu, N} - \eta_s^\nu) d\langle B \rangle_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t (\beta_s^{\nu, N} - \beta_s^\nu) dB_s \right|^2 \right] \\ &\leq 3 \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (\alpha_s^{\nu, N} - \alpha_s^\nu) ds \right|^2 \right] + 3 \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (\eta_s^{\nu, N} - \eta_s^\nu) d\langle B \rangle_s \right|^2 \right] \\ &\quad + 3 \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (\beta_s^{\nu, N} - \beta_s^\nu) dB_s \right|^2 \right] \\ &\leq 3 \int_0^t \mathbb{E} [(\alpha_s^{\nu, N} - \alpha_s^\nu)^2] ds + 3 \int_0^t \mathbb{E} [(\eta_s^{\nu, N} - \eta_s^\nu)^2] ds \\ &\quad + 3 \int_0^t \mathbb{E} [(\beta_s^{\nu, N} - \beta_s^\nu)^2] ds. \end{aligned}$$

بنابراین زمانی که $N \rightarrow \infty$ ، در فضای $M_G^\gamma(\circ, T)$ داریم $X_t^{\nu, N} \rightarrow X_t^\nu$.

به علاوه زمانی که $N \rightarrow \infty$ ، در فضای $M_G^\gamma(\circ, T)$ داریم

$$\begin{aligned} \partial_{x^\nu} \Phi(X^N) \eta_s^{\nu, N} &\rightarrow \partial_{x^\nu} \Phi(X) \eta_s^\nu, \\ \partial_{x^\mu x^\nu}^\gamma \Phi(X^N) \beta_s^{\mu, N} \beta_s^{\nu, N} &\rightarrow \partial_{x^\mu x^\nu}^\gamma \Phi(X) \beta_s^\mu \beta_s^\nu, \\ \partial_{x^\nu} \Phi(X^N) \alpha_s^{\nu, N} &\rightarrow \partial_{x^\nu} \Phi(X) \alpha_s^\nu, \\ \partial_{x^\nu} \Phi(X^N) \beta_s^{\nu, N} &\rightarrow \partial_{x^\nu} \Phi(X) \beta_s^\nu. \end{aligned}$$

□

با حد گرفتن از طرفین رابطه (۳۷.۳)، رابطه‌ی (۳۵.۳) به روشنی برقرار است.

۶.۳ بیان یک تعمیم

در بخش ۴.۳ فضای $l_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ را برای هر $T \geq 0$ و ثابت تعریف کردیم و مفاهیم و تعاریف متناظر با آن را نیز بیان نمودیم. اکنون به بیان تعمیمی از این فضا می‌پردازیم و تعاریف و مفاهیم متناظر با آن را بیان می‌کنیم. مطالب ارائه شده در این بخش از مرجع [۲۲] آورده شده‌اند.

فرض کنید $\mathbb{F}$ فیلتر طبیعی فرآیند $(\omega_t)_{t \geq 0}$ و τ یک زمان توقف متناهی نسبت به $\mathbb{F}$ باشد. فضای زیر از متغیرهای تصادفی را در نظر بگیرید

$$l_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_{\tau}) := \{X(\omega) = \varphi(\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_m}), \quad \forall m \geq 1, t_1, \dots, t_m \in [0, \tau(\omega)], \forall \varphi \in \text{lip}(\mathbb{R}^m)\}.$$

قرار می‌دهیم

$$l_{ip}^{\circ}(F) := \bigcup_{n=1}^{\infty} l_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_{n \wedge \tau}).$$

امید $\mathbb{E}[\cdot]$ را روی فضای $l_{ip}^{\circ}(F)$ به طریقی مشابه با تعریف ۲۱.۳ تعریف می‌کنیم که به روشنی یک امید غیر خطی روی فضای $l_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_{\tau})$ (و به ترتیب روی $l_{ip}^{\circ}(F)$) است. بنابراین برای هر $X \in l_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_{\tau})$ ، $\mathbb{E}[|X|]$ یک نرم روی فضای $l_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_{\tau})$ (و همچنین روی $l_{ip}^{\circ}(F)$) است. تحت این نرم $\mathbb{E}[\cdot]$ می‌تواند به طور پیوسته به فضای تکمیل خود که آن را با $L_G^1(\mathcal{F}_{\tau})$ (به ترتیب $L_G^1(F)$) نشان می‌دهیم گسترش یابد. برای هر $p > 1$ قرار می‌دهیم

$$L_G^p(F) = \{X \in L_G^1(F), |X|^p \in L_G^1(F)\}.$$

$L_G^p(F)$ نیز تحت نرم $\|X\|_p := (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۵۱.۳. برای هر افراز $\pi_{\tau} = \{t_0, \dots, t_N\}$ از $[0, \tau(\omega)]$ ، گردایه‌ی تمام فرآیندهای تصادفی به صورت $\mu_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t)$ را با $M_G^{p, \circ}(\circ, \tau)$ نشان می‌دهیم، که در آن $p \geq 1$ و $\xi_j \in L_G^p(\mathcal{F}_{t_j})$ داده شده‌اند.

تعریف ۵۲.۳. برای هر $p > 1$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، قرار می‌دهیم $\|\eta\|_{H_G^{p, \alpha}} = \left[\mathbb{E} \left[\left(\int_0^{\infty} e^{\alpha s} |\eta_s|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] \right]^{\frac{1}{p}}$ و $\|\eta\|_{M_G^p} = \left[\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau} |\eta_s|^p ds \right] \right]^{\frac{1}{p}}$. تکمیل فضای $M_G^{p, \circ}(\circ, \tau)$ تحت نرم‌های $\|\eta\|_{H_G^{p, \alpha}}$ و $\|\eta\|_{M_G^p}$ را به ترتیب با $H_G^{p, \alpha}(\mathbb{R})$ و $M_G^p(\circ, \tau)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵۳.۳. فرض کنید

$$S_G^{p, \circ}(\circ, \tau) = \{h(t, B_{t_1 \wedge t}, \dots, B_{t_n \wedge t}) : t_1, \dots, t_n \in [0, \tau(\omega)], h \in \text{lip}(\mathbb{R}^{n+1})\}.$$

برای هر $\eta \in S_G^{p, \circ}(\circ, \tau)$ قرار می‌دهیم $\|\eta\|_{S_G^{p, \alpha, \tau}} = \left[\mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} e^{(p/2)\alpha(t \wedge \tau)} |\eta_t|^p \right] \right]^{\frac{1}{p}}$. تکمیل فضای $S_G^{p, \circ}(\circ, \tau)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{S_G^{p, \alpha, \tau}}$ را با $S_G^{p, \alpha, \tau}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵۴.۳. برای هر $\eta \in M_G^{1, \circ}(\circ, \tau)$ به شکل $\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t)$ تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{I}(\eta) = \int_0^{\tau} \eta(s) dB_s := \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

نگاشت $\mathcal{I} : M_G^{1, \circ}(\circ, \tau) \rightarrow L_G^1(F_{\tau})$ نگاشتی خطی و پیوسته است و بنابراین دارای گسترش پیوسته‌ی $\mathcal{I} : M_G^1(\circ, \tau) \rightarrow L_G^1(F_{\tau})$ می‌باشد.

تعریف ۵۵.۳. برای $\eta \in M_G^\vee(\circ, \tau)$ انتگرال تصادفی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_{\circ}^{\tau} \eta(s) dB_s := \mathcal{I}(\eta).$$

۷.۳ معادلات دیفرانسیل تصادفی

یک معادله دیفرانسیل تصادفی (SDE) روی فضای $M_G^\vee(\circ, T; \mathbb{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X_t = X_{\circ} + \int_{\circ}^t b(X_s) ds + \int_{\circ}^t h(X_s) d\langle B \rangle_s + \int_{\circ}^t \sigma(X_s) dB_s, \quad t \in [\circ, T], \quad (38.3)$$

که شرط اولیه $X_{\circ} \in \mathbb{R}^n$ و توابع پیوسته لپشیتس $b, h, \sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ داده شده‌اند. بازه $[\circ, T]$ می‌تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ باشد. یک جواب برای معادله‌ی (۳۸.۳)، فرآیندی تصادفی مانند $X \in M_G^\vee(\circ, T; \mathbb{R}^n)$ است که در آن صدق کند. فرض کنید $[\circ, T]$ یک بازه ثابت باشد. نگاشت $\Lambda.(Y)$ را روی این بازه به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Lambda.(Y) := Y \in M_G^\vee(\circ, T; \mathbb{R}^n) \rightarrow M_G^\vee(\circ, T; \mathbb{R}^n),$$

با قرار دادن $\Lambda_t = X_t$ برای هر $t \in [\circ, T]$ ، با

$$\Lambda_t(Y) = X_{\circ} + \int_{\circ}^t b(Y_s) ds + \int_{\circ}^t h(Y_s) d\langle B \rangle_s + \int_{\circ}^t \sigma(Y_s) dB_s, \quad t \in [\circ, T].$$

داریم

لم ۵۶.۳. برای هر $Y, Y' \in M_G^\vee(\circ, T; \mathbb{R}^n)$ ، تخمین زیر را داریم

$$\mathbb{E} \left[|\Lambda_t(Y) - \Lambda_t(Y')|^2 \right] \leq C \int_{\circ}^t \mathbb{E} [|Y_s - Y'_s|^2] ds, \quad t \in [\circ, T]. \quad (39.3)$$

که $C = 3K^2$ و K ثابت لپشیتس است.

برهان. با توجه به روابط (۲۰.۳)، (۲۲.۳) و (۲۸.۳) داریم

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[|\Lambda_t(Y) - \Lambda_t(Y')|^2 \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\left| \int_{\circ}^t (b(Y_s) - b(Y'_s)) ds \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| \int_{\circ}^t (h(Y_s) - h(Y'_s)) d\langle B \rangle_s \right|^2 \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\left| \int_{\circ}^t (\sigma(Y_s) - \sigma(Y'_s)) dB_s \right|^2 \right] \\ & \leq \int_{\circ}^t \mathbb{E} \left[(b(Y_s) - b(Y'_s))^2 \right] ds + \int_{\circ}^t \mathbb{E} \left[(h(Y_s) - h(Y'_s))^2 \right] ds \\ & \quad + \int_{\circ}^t \mathbb{E} \left[(\sigma(Y_s) - \sigma(Y'_s))^2 \right] ds \\ & \leq 3K^2 \int_{\circ}^t \mathbb{E} [|Y_s - Y'_s|^2] ds. \end{aligned}$$

□

اکنون ثابت می‌کنیم که معادله‌ی (۳۸.۳) دارای جوابی یکتا است. با ضرب $e^{-\gamma Ct}$ در طرفین رابطه‌ی (۳۹.۳) و انتگرال‌گیری روی $[0, T]$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbb{E} \left[|\Lambda_t(Y) - \Lambda_t(Y')|^2 \right] e^{-\gamma Ct} dt &\leq C \int_0^T e^{-\gamma Ct} \int_0^t \mathbb{E} [|Y_s - Y'_s|^2] ds dt \\ &= C \int_0^T \int_s^T e^{-\gamma Ct} dt \mathbb{E} [|Y_s - Y'_s|^2] ds \\ &= (\gamma C)^{-1} C \int_0^T (e^{-\gamma Cs} - e^{-\gamma CT}) \mathbb{E} [|Y_s - Y'_s|^2] ds \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \int_0^T \mathbb{E} [|Y_s - Y'_s|^2] e^{-\gamma Cs} ds. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\int_0^T \mathbb{E} \left[|\Lambda_t(Y) - \Lambda_t(Y')|^2 \right] e^{-\gamma Ct} dt \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^T \mathbb{E} [|Y_t - Y'_t|^2] e^{-\gamma Ct} dt.$$

از طرفی می‌توان دید که دو نرم زیر در فضای $M_G^\gamma(0, T; \mathbb{R}^n)$ با هم برابرند (معادلند):

$$\int_0^T \mathbb{E} \left[|\Lambda_t(Y)|^2 \right] e^{-\gamma Ct} dt \sim \int_0^T \mathbb{E} [|Y_t|^2] e^{-\gamma Ct} dt.$$

بنابراین از تخمین فوق می‌توان نتیجه گرفت که نگاشت $\Lambda(Y)$ تحت نرم فوق یک نگاشت انقباضی است. در نتیجه، داریم

قضیه ۵۷.۳. معادله دیفرانسیل تصادفی (۳۸.۳) دارای جواب منحصر به فرد $X \in M_G^\gamma(0, T, \mathbb{R}^n)$ است.

فصل ۴

معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی تولید
شده به وسیلهی فرآیند G - برآونی

۱.۴ مقدمه

در سال ۲۰۰۶ شینگ پنگ^۱ مفهوم G - امید را معرفی کرد. تحت ساختار G - امید نوع جدیدی از حرکت برآونی به نام حرکت G - برآونی ساخته شد و محاسبات ایتو^۲ متناظر با آن نیز تعریف گردید. وجود و یکتایی جواب یک معادلهی دیفرانسیل تصادفی (SDE) تولید شده به وسیلهی حرکت G - برآونی به طریقی مشابه با حالت کلاسیک ثابت می شود. اما معادلهی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی تولید شده به وسیلهی حرکت G - برآونی $(B_t)_{t \geq 0}$ (G -BSDE) به یک مسالهی چالش برانگیز تبدیل شده است. مانند حالت کلاسیک، قضیهی نمایش G - مارتینگل ها کلید حل این مشکل در ساختار G - امید است. برای یک خانوادهی چگال از G - مارتینگل ها، پنگ به این نتیجه رسید برای هر G - مارتینگل مانند M نمایشی به صورت زیر می توان نوشت.

$$M_t = M_0 + \bar{M}_t + K_t, \\ \bar{M}_t := \int_0^t Z_s B_s, \quad K_t := \int_0^t \eta_s \langle B \rangle_s - \int_0^t \Psi G(\eta_s) ds,$$

که در آن M به دو G - مارتینگل ناسازگار تجزیه شده است و به $\bar{M}$ ، G - مارتینگل متقارن می گوئیم که $\bar{M} -$ نیز یک G - مارتینگل است. K نیز یک فرآیند نزولی است.

با توجه به این قضیه یک جواب طبیعی برای معادلهی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی تولید شده به وسیلهی فرآیند G - برآونی، یک سه تایی مانند (Y, Z, K) است که در معادلهی زیر صدق می کند

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) d\langle B \rangle_s - \int_t^T Z_s dB_s - (K_T - K_t), \quad (۱.۴)$$

که K یک G - مارتینگل نزولی است.

در این فصل وجود و یکتایی L^p - حل معادلهی (۱.۴)، را برای $p > 1$ تحت شرط پیوستگی لپشیتس توابع f و g ثابت می کنیم.

مطالب ارائه شده در این فصل به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است از مرجع [۱۲] آورده شده است.

این فصل به صورت زیر طبقه بندی شده است: در بخش ۲.۴ به بیان برخی تعاریف و پیش نیازها از ساختار G - امید می پردازیم. در بخش ۳.۴ چندین تخمین اساسی را برای حل G -BSDE (۱.۴) بیان می کنیم. در نهایت در بخش ۴.۴ قضیه های وجود و یکتایی را برای حل معادلهی (۱.۴) (قضیه های ۱۶.۴ و ۱۷.۴) ارائه می دهیم.

^۱Shige Peng

^۲calculus of Ito's type

۲.۴ تعاریف و پیش نیازها

در زیر به معرفی نمادهایی که در این فصل استفاده می‌شوند می‌پردازیم.

(۱) فرض کنید $p \geq 1$ و $M_G^{p,\circ}(\circ, T)$ فضای فرایندهای تصادفی تعریف شده در تعریف ۳۳.۳ از فصل قبل باشد. برای هر $\eta \in M_G^{p,\circ}(\circ, T)$ قرار می‌دهیم

$$\|\eta\|_{H_G^p} = \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_{\circ}^T |\eta_s|^2 ds \right)^{p/2} \right] \right\}^{1/p}$$

تکمیل فضای $M_G^{p,\circ}(\circ, T)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{H_G^p}$ را با $H_G^p(\circ, T)$ نشان می‌دهیم.

(۲) فرض کنید

$$S_G^{\circ}(\circ, T) = \{h(t, B_{t_1 \wedge t}, \dots, B_{t_n \wedge t}), \quad t_1, \dots, t_n \in [\circ, T], h \in \text{lip}(\mathbb{R}^{n+1})\}.$$

برای هر $p \geq 1$ و $\eta \in S_G^{\circ}(\circ, T)$ قرار می‌دهیم

$$\|\eta\|_{S_G^p} = \left\{ \mathbb{E} [\sup_{t \in [\circ, T]} |\eta_t|^p] \right\}^{1/p}$$

تکمیل فضای $S_G^{\circ}(\circ, T)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{S_G^p}$ را با $S_G^p(\circ, T)$ نشان می‌دهیم.

به فضاهای $L_G^p(\mathcal{F}_T)$ ، $M_G^p(\circ, T)$ ، $H_G^p(\circ, T)$ و $S_G^p(\circ, T)$ فضاهای G -چهارچوب می‌گوییم.

(۳) فرض کنید $\mathcal{M}_1(\Omega_T)$ فضای تمام اندازه‌های احتمال روی $(\Omega_T, \mathcal{B}(\Omega_T))$ باشد که $\Omega_T = C_{\circ}([\circ, T])$ فرض کنید $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\Omega_T)$ برای هر $p \geq 1$ قرار می‌دهیم

$$\mathbb{L}^p(\Omega_T) := \left\{ X \in \mathcal{B}(\Omega_T) : \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[|X|^p] < \infty \right\}.$$

G -امید $\mathbb{E}$ را به فضای $\mathbb{L}^p(\Omega_T)$ به صورت زیر گسترش می‌دهیم

$$\forall X \in \mathbb{L}^1(\Omega_T), \quad \mathbb{E}[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[X].$$

فضای $\mathbb{L}^p(\Omega_T)$ تحت نرم $(\mathbb{E}[|\cdot|^p])^{1/p}$ یک فضای باناخ است.

(۴) فرض کنید $p \geq 1$ قرار می‌دهیم

$$\mathbb{M}^{p,\circ}(\circ, T) := \left\{ \sum_{i=\circ}^{N-1} \xi_{t_i} I_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad \circ = t_{\circ} < \dots < t_N = T, \xi_{t_i} \in \mathbb{L}^p(\Omega_{t_i}) \right\}.$$

تکمیل فضای $\mathbb{M}^{p,\circ}(\circ, T)$ تحت نرم‌های

$$\|\eta\|_{\mathbb{M}^p} = (\mathbb{E}[\int_{\circ}^T |\eta_t|^p dt])^{1/p},$$

$$\|\eta\|_{\mathbb{H}^p} = \left\{ \mathbb{E}[(\int_{\circ}^T |\eta_t|^2 dt)^{p/2}] \right\}^{1/p},$$

$$\|\eta\|_{\mathbb{S}^p} = (\mathbb{E}[\sup_{t \in [\circ, T]} |\eta_t|^p])^{1/p},$$

را به ترتیب با $\mathbb{M}^p(\circ, T)$ ، $\mathbb{H}^p(\circ, T)$ و $\mathbb{S}^p(\circ, T)$ نشان می‌دهیم.

با توجه به [۱۹]، انتگرال ایتو $\int_{\circ}^T \eta_s dB_s$ را می‌توان برای هر $\eta \in \mathbb{H}^p(\circ, T)$ تعریف کرد. به علاوه با توجه به گزاره ۲.۱۰ از [۱۹] و حالت کلاسیک نامساوی بورکالد-دیویس-گاندی^۳ (BDG)،

^۳Burkholder-Davis-Gundy inequality

ویژگی‌های زیر را داریم.

گزاره ۱.۴. فرض کنید $\alpha \geq 1$ و $p > 0$. برای هر $\eta, \theta \in \mathbb{H}^\alpha(0, T)$ و $\xi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega_T)$ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_s dB_s \right] &= 0, \\ \sigma_0 c_p \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |\eta_s|^2 ds \right)^{p/2} \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \eta_s dB_s \right|^p \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |\eta_s|^2 ds \right)^{p/2} \right], \\ \int_t^T (\xi \eta_s + \theta_s) dB_s &= \xi \int_t^T \eta_s dB_s + \int_t^T \theta_s dB_s. \end{aligned}$$

که c_p و C_p دو ثابت هستند و $0 < c_p < C_p < \infty$.

تعریف ۲.۴. فرآیند تصادفی $(M_t)_{t \geq 0}$ را یک $-G$ -مارتینگل گویم هرگاه برای هر $0 \leq s \leq t < \infty$ داشته باشیم $M_t \in L_G^1(\mathcal{F}_t)$ و

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

مثال ۳.۴. فرض کنید $X \in L_G^1(\mathcal{F})$ ، با توجه به ویژگی (۴) از گزاره ۲.۳، $(\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t])_{t \geq 0}$ یک $-G$ -مارتینگل است.

مثال ۴.۴. فرض کنید $(B_t)_{t \geq 0}$ یک فرآیند $-G$ -برآونی باشد، در این صورت $(B_t)_{t \geq 0}$ یک $-G$ -مارتینگل است:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] &\leq \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] \\ &= B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s] \\ &= B_s + 0 = B_s. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] &\geq \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[-B_s | \mathcal{F}_s] \\ &= B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s] \\ &= B_s + 0 = B_s. \end{aligned}$$

برای هر $\xi \in L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ ، قرار می‌دهیم $\mathcal{E}[\xi] = \mathbb{E}[\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]]$.
برای هر $p \geq 1$ و $\xi \in L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ ، قرار می‌دهیم $\|\xi\|_{p, \mathcal{E}} = \{\mathcal{E}[|\xi|^p]\}^{1/p}$. تکمیل فضای $L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{p, \mathcal{E}}$ را با $L_{\mathcal{E}}^p(\mathcal{F}_T)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۴. برای هر $\alpha \geq 1$ و $\delta > 0$ داریم، $L_G^{\alpha+\delta}(\mathcal{F}_T) \subset L_{\mathcal{E}}^{\alpha}(\mathcal{F}_T)$. به طور دقیق تر برای هر $\xi \in L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T)$ و برای $\gamma \leq 2, 1 < \gamma < \beta := (\alpha + \delta)/\alpha$ داریم

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \mathbb{E} [|\xi|^{\alpha} | \mathcal{F}_t] \right] \leq C \left\{ \left(\mathbb{E} [|\xi|^{\alpha+\delta}] \right)^{\alpha/(\alpha+\delta)} + \left(\mathbb{E} [|\xi|^{\alpha+\delta}] \right)^{1/\gamma} \right\}, \quad (2.4)$$

$$C = \frac{\gamma}{\gamma-1} (1 + 14 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\beta/\gamma})$$

□

برهان. به [۳۷] مراجعه کنید.

قضیه ۶.۴. فرض کنید $1 < \frac{1}{\gamma} < \frac{\alpha}{\alpha+\delta}$ ، در این صورت

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \mathbb{E} [|\xi|^{\alpha} | \mathcal{F}_t] \right] \leq 2C \left\{ \left(\mathbb{E} [|\xi|^{\alpha+\delta}] \right)^{\alpha/(\alpha+\delta)} + \mathbb{E} [|\xi|^{\alpha+\delta}] \right\}.$$

قرار می دهیم $C_1 = 2 \inf \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} (1 + 14 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\beta/\gamma}) : 1 < \gamma < \beta, \gamma \leq 2 \right\}$ ، در این صورت

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \mathbb{E} [|\xi|^{\alpha} | \mathcal{F}_t] \right] \leq C_1 \left\{ \left(\mathbb{E} [|\xi|^{\alpha+\delta}] \right)^{\alpha/(\alpha+\delta)} + \mathbb{E} [|\xi|^{\alpha+\delta}] \right\}, \quad (3.4)$$

که C_1 ثابتی وابسته به α و δ است.

□

برهان. به [۳۷] مراجعه کنید.

برای راحتی خوانندگان مفاهیم اصلی این فصل و فصل قبل را به صورت زیر یادآوری می کنیم.

- ضرب داخلی و نرم اقلیدسی روی فضای $\mathbb{R}^n$ را به ترتیب با $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و $\|\cdot\|$ نشان می دهیم.
- $L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T) := \{X(\omega) = \phi(\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_m}), \forall m \geq 1, t_1, \dots, t_m \in [\circ, T], \forall \phi \in \text{lip}(\mathbb{R}^m)\}.$
- $\|\xi\|_{p, \mathcal{E}} = \{\mathcal{E}[|\xi|^p]\}^{1/p}$ و $\|X\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$.
- $\|\cdot\|_p$ تحت نرم $L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T)$ ، تکمیل فضای $L_G^p(\mathcal{F}_T)$.
- $\|\cdot\|_{p, \mathcal{E}}$ تحت نرم $L_{ip}^{\circ}(\mathcal{F}_T)$ ، تکمیل فضای $L_{\mathcal{E}}^p(\mathcal{F}_T)$.
- $M_G^{p, \circ}(\circ, T) := \{\eta_t = \sum_{j=1}^{N-1} \xi_j I_{[t_j, t_{j+1})}(t) : \circ = t_0 < \dots < t_N = T, \xi_j \in L_G^p(\mathcal{F}_{t_j})\}$.
- $\|\eta\|_{H_G^p} = \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_{\circ}^T |\eta_s|^2 ds \right)^{p/2} \right] \right\}^{1/p}$ و $\|\eta\|_{M_G^p} := \left\{ \mathbb{E} \left[\int_{\circ}^T |\eta_s|^p ds \right] \right\}^{1/p}$.
- $\|\cdot\|_{M_G^p(\circ, T)} =:$ تکمیل فضای $M_G^{p, \circ}(\circ, T)$ تحت نرم M_G^p .
- $\|\cdot\|_{H_G^p(\circ, T)} =:$ تکمیل فضای $M_G^{p, \circ}(\circ, T)$ تحت نرم H_G^p .

- $\mathbb{L}^p(\Omega_T) := \{X \in \mathcal{B}(\Omega_T) : \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[|X|^p] < \infty\}.$
- $\mathbb{M}^{p,\circ}(\circ, T) := \left\{ \sum_{i=\circ}^{N-1} \xi_{t_i} I_{[t_i, t_{i+1})}(t), \circ = t_\circ < \dots < t_N = T, \xi_{t_i} \in \mathbb{L}^p(\Omega_{t_i}) \right\}$
- $\|\eta\|_{\mathbb{H}^p} = \{\mathbb{E}[(\int_\circ^T |\eta_t|^2 dt)^{p/2}]\}^{1/p}$ و $\|\eta\|_{\mathbb{M}^p} = (\mathbb{E}[\int_\circ^T |\eta_t|^p dt])^{1/p}$
- $\|\eta\|_{\mathbb{S}^p} = (\mathbb{E}[\sup_{t \in [\circ, T]} |\eta_t|^p])^{1/p}$
- $\|\cdot\|_{\mathbb{M}^p} =$ تکمیل فضای $\mathbb{M}^{p,\circ}(\circ, T)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{\mathbb{M}^p}$
- $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^p} =$ تکمیل فضای $\mathbb{M}^{p,\circ}(\circ, T)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^p}$
- $\|\cdot\|_{\mathbb{S}^p} =$ تکمیل فضای $\mathbb{M}^{p,\circ}(\circ, T)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{\mathbb{S}^p}$
- $S_G^\circ(\circ, T) = \{h(t, B_{t_1 \wedge t}, \dots, B_{t_n \wedge t}), t_1, \dots, t_n \in [\circ, T], h \in \text{lip}(\mathbb{R}^{n+1})\}$
- $\|\eta\|_{S_G^p} = \{\mathbb{E}[\sup_{t \in [\circ, T]} |\eta_t|^p]\}^{1/p}$
- $\|\cdot\|_{S_G^p} =$ تکمیل فضای $S_G^\circ(\circ, T)$ تحت نرم $\|\cdot\|_{S_G^p}$
- $\mathfrak{S}_G^\alpha(\circ, T) =$ گردآیهی تمام فرآیندهای (Y, Z, K) که $Y \in S_G^\alpha(\circ, T)$ و $Z \in H_G^\alpha(\circ, T)$ و K یک G -مارتینگل نزولی است که $K_\circ = \circ$ و $K_T \in L_G^\alpha(\mathcal{F}_T)$

۳.۴ بیان چند تخمین قیاسی

فرض کنید $(\Omega_T, L_G^1(\mathcal{F}_T), \mathbb{E})$ فضای G -امید باشد. برای سادگی شکل جدیدی از معادلهی (۱.۴) را به صورت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s - (K_T - K_t), \quad (۴.۴)$$

که $f(t, \omega, y, z) : [\circ, T] \times \Omega_T \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند: $\beta > 1$ وجود دارد به طوری که

$$\text{H1. } f(\cdot, \cdot, y, z) \in M_G^\beta(\circ, T), \text{ برای هر } y \text{ و } z,$$

$$\text{H2. } |f(t, \omega, y, z) - f(t, \omega, y', z')| \leq L(|y - y'| + |z - z'|) \text{ که } L > \circ.$$

گردآیهی تمام فرآیندهای (Y, Z, K) که $Y \in S_G^\alpha(\circ, T)$ و $Z \in H_G^\alpha(\circ, T)$ و K یک G -مارتینگل نزولی با $K_\circ = \circ$ و $K_T \in L_G^\alpha(\mathcal{F}_T)$ را با $\mathfrak{S}_G^\alpha(\circ, T)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۴. فرض کنید $\beta > 1$ ، $\xi \in L_G^\beta(\mathcal{F}_T)$ و f در ویژگی‌های (H1) و (H2) صدق کند. فرآیندهای تصادفی (Y, Z, K) را جواب معادله‌ی (۴.۴) گوئیم هرگاه برای $1 < \alpha \leq \beta$ ، ویژگی‌های زیر برقرار باشند.

$$1. (Y, Z, K) \in \mathfrak{G}_G^\alpha(\circ, T)$$

$$2. Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s - (K_T - K_t)$$

لم ۸.۴. فرض کنید $\alpha > 1$ و $X \in S_G^\alpha(\circ, T)$ ، قرار می‌دهیم

$$X_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k^n} I_{[t_k^n, t_{k+1}^n)}(t),$$

که $t_k^n = \frac{kT}{n}$ در این صورت زمانی که $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |X_t^n - X_t|^\alpha \right] \rightarrow \circ. \quad (۵.۴)$$

برهان. روشن است که برای هر $m, n \geq 1$ تابع

$$\sup_{i \leq n-1} \sup_{t_k^m \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} |B_{t_k^m} - B_{t_i^n}|^\alpha,$$

یک تابع محدب است، بنابراین با توجه به گزاره (۱۷.۳) داریم

$$\mathbb{E} \left[\sup_{i \leq n-1} \sup_{t_k^m \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} |B_{t_k^m} - B_{t_i^n}|^\alpha \right] = E_P \left[\sup_{i \leq n-1} \sup_{t_k^m \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} |B_{t_k^m} - B_{t_i^n}|^\alpha \right],$$

که P یک اندازه وینر روی Ω_T است و $E_P[B_t^\alpha] = 1$.

فرض کنید $m \rightarrow \infty$ ، در این صورت

$$\sup_{i \leq n-1} \sup_{t_k^m \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} |B_{t_k^m} - B_{t_i^n}|^\alpha \rightarrow \sup_{i \leq n-1} \sup_{t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} |B_t - B_{t_i^n}|^\alpha,$$

لذا

$$\mathbb{E} \left[\sup_{i \leq n-1} \sup_{t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} |B_t - B_{t_i^n}|^\alpha \right] = E_P \left[\sup_{i \leq n-1} \sup_{t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]} |B_t - B_{t_i^n}|^\alpha \right] \rightarrow \circ$$

بنابراین برای هر $\eta \in S_G^\alpha(\circ, T)$ ، داریم

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |\eta_t - \eta_t^n|^\alpha \right] \rightarrow \circ.$$

چون $X \in S_G^\alpha(\circ, T)$ ، با توجه به تعریف $S_G^\alpha(\circ, T)$ ، می‌توان دنباله‌ی $(\eta^m)_{m=1}^\infty \subset S_G^\alpha(\circ, T)$ را طوری انتخاب کرد که

$$\|X - \eta^m\|_{S_G^\alpha}^\alpha = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |X_t - \eta_t^m|^\alpha \right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \circ.$$

از طرفی

$$\sup_{t \in [\circ, T]} |X_t - X_t^n|^\alpha \leq 2 \left(\sup_{t \in [\circ, T]} |X_t - \eta_t^m|^\alpha + \sup_{t \in [\circ, T]} |\eta_t^m - (\eta^m)_t^n|^\alpha \right),$$

بنابراین

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |X_t - X_t^n|^\alpha \right] \leq 2 \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |X_t - \eta_t^m|^\alpha \right] + \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |\eta_t^m - (\eta^m)_t^n|^\alpha \right] \right),$$

با حد گرفتن از طرفین این رابطه زمانی که $n \rightarrow \infty$ و سپس $m \rightarrow \infty$ ، رابطه‌ی (۵.۴) به روشنی برقرار خواهد بود. $\square$

لم ۹.۴. فرض کنید X_t و X_t^n مانند لم ۸.۴ تعریف شده باشند و $\alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. همچنین فرض کنید K یک G -مارتینگل نزولی باشد که $K_\circ = \circ$ و $K_T \in L_G^{\alpha^*}(\mathcal{F}_T)$ ، در این صورت زمانی که $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \left| \int_\circ^t X_s^n dK_s - \int_\circ^t X_s dK_s \right| \right] \rightarrow \circ. \quad (۶.۴)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\circ, T]} \left| \int_\circ^t X_s^n dK_s - \int_\circ^t X_s dK_s \right| &\leq - \int_\circ^T |X_s^n - X_s| dK_s \\ &\leq \sup_{s \in [\circ, T]} |X_s^n - X_s| (-K_T). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \left| \int_\circ^t X_s^n dK_s - \int_\circ^t X_s dK_s \right| \right] \leq \left\| \sup_{s \in [\circ, T]} |X_s^n - X_s|^\alpha \right\|_{L_G^\alpha} \|K_T\|_{L_G^{\alpha^*}} \rightarrow \circ.$$

$\square$

لم ۱۰.۴. فرض کنید $\alpha > 1$ و $\alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ ، $X \in S_G^{\alpha^*}(\circ, T)$ و همچنین فرض کنید K^j که $j = 1, 2$ دو G -مارتینگل نزولی باشند که $K_\circ^j = \circ$ و $K_T^j \in L_G^{\alpha^*}(\mathcal{F}_T)$ ، در این صورت فرآیند زیر نیز یک G -مارتینگل نزولی است.

$$\int_\circ^t X_s^+ dK_s^1 + \int_\circ^t X_s^- dK_s^2.$$

برهان. فرض کنید X^n مانند لم ۸.۴ و لم ۹.۴ تعریف شده باشد. بنا به لم ۹.۴

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \left| \int_\circ^t X_s^n dK_s - \int_\circ^t X_s dK_s \right| \right] \rightarrow \circ.$$

لذا زمانی که $n \rightarrow \infty$ ، $\int_\circ^t X_s^n dK_s \rightarrow \int_\circ^t X_s dK_s$ ، بنابراین کافی است نشان دهیم که فرآیند

$$\int_\circ^t (X_s^n)^+ dK_s^1 + \int_\circ^t (X_s^n)^- dK_s^2,$$

یک $-G$ -مارتینگل است.

فرض کنید $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ ، از $-G$ -مارتینگل بودن K^j داریم

$$\mathbb{E}[(K_{t_{i+1}}^j - K_{t_i}^j) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[K_{t_{i+1}}^j | \mathcal{F}_t] - K_{t_i}^j = K_t^j - K_{t_i}^j, \quad j = 1, 2.$$

بنابراین بنا به گزاره ۳.۳ داریم

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[X_{t_i}^+(K_{t_{i+1}}^1 - K_{t_i}^1) + X_{t_i}^-(K_{t_{i+1}}^2 - K_{t_i}^2) | \mathcal{F}_t] \\ &= X_{t_i}^+ \mathbb{E}[K_{t_{i+1}}^1 - K_{t_i}^1 | \mathcal{F}_t] + X_{t_i}^- \mathbb{E}[K_{t_{i+1}}^2 - K_{t_i}^2 | \mathcal{F}_t] \\ &= X_{t_i}^+(K_t^1 - K_{t_i}^1) + X_{t_i}^-(K_t^2 - K_{t_i}^2). \end{aligned}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\int_0^t (X_s^n)^+ dK_s^1 + \int_0^t (X_s^n)^- dK_s^2$ یک $-G$ -مارتینگل است. $\square$

اکنون به ارائه‌ی تخمین‌های قیاسی برای حل معادله‌ی (۴.۴) می‌پردازیم. برای این منظور شرط زیر را در نظر بگیرید.

H2' $L^w, \epsilon > 0$ ، که $|f(t, \omega, y, z) - f(t, \omega, y', z')| \leq L^w(|y - y'| + |z - z'| + \epsilon)$

گزاره ۱۱.۴. فرض کنید $\beta > 1$ و f در شرط‌های (H1) و (H2') صدق کند. فرض کنید

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s - (K_T - K_t),$$

که برای $\beta \geq \alpha > 1$ ، $Y \in \mathbb{S}^\alpha(\cdot, T)$ ، $Z \in \mathbb{H}^\alpha(\cdot, T)$ و K یک فرایند نزولی است که $K_\cdot = 0$ و $K_T \in \mathbb{L}^\alpha(\mathcal{F}_T)$ در این صورت ثابت $C_\alpha := C(\alpha, T, \sigma_\cdot, L^w) > 0$ وجود دارد که

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Z_s|^2 ds \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right] &\leq C_\alpha \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\cdot, T]} |Y_t|^\alpha \right] + \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\cdot, T]} |Y_t|^\alpha \right] \right)^{\frac{1}{\beta}} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f_s^\circ ds \right)^\alpha \right] \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\mathbb{E} [|K_T|^\alpha] \leq C_\alpha \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\cdot, T]} |Y_t|^\alpha \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f_s^\circ ds \right)^\alpha \right] \right\}. \quad (8.4)$$

که $f_s^\circ = |f(s, \cdot, \cdot)| + L^w \epsilon$

برهان. با به کار بردن فرمول ایتو برای $\phi(Y_t) = |Y_t|^2$ داریم

$$|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2 d\langle B \rangle_s = |\xi|^2 + \int_t^T 2Y_s f(s) ds - \int_t^T 2Y_s Z_s dB_s - \int_t^T 2Y_s dK_s.$$

که $f(s) = f(s, Y_s, Z_s)$.

با قرار دادن $t = 0$ و به کار بردن نامساوی $ab \leq \lambda a^2 + \frac{1}{\lambda} b^2$ داریم

$$\begin{aligned}
 & |Y_0|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 d\langle B \rangle_s \\
 &= |\xi|^2 + 2 \int_0^T Y_s f(s) ds - 2 \int_0^T Y_s Z_s dB_s - 2 \int_0^T Y_s dK_s \\
 &\leq |\xi|^2 + 2 \int_0^T |Y_s| (f_s^\circ + L^w |Y_s| + L^w |Z_s|) ds + 2 \left| \int_0^T Y_s Z_s dB_s \right| + 2 \left| \int_0^T Y_s dK_s \right| \\
 &\leq \xi^2 + 2T \sup_{s \in [0, T]} |Y_s| \int_0^T f_s^\circ ds + 2L^w T \sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^2 + \int_0^T \left(\frac{(L^w)^2}{\lambda} |Y_s|^2 + \lambda |Z_s|^2 \right) ds \\
 &\quad + 2 \left| \int_0^T Y_s Z_s dB_s \right| + 2 \sup_{s \in [0, T]} |Y_s| |K_T|.
 \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{1}{4}$ ، در این صورت

$$\begin{aligned}
 \int_0^T |Z_s|^2 d\langle B \rangle_s &\leq 2\xi^2 + 2T \sup_{s \in [0, T]} |Y_s| \int_0^T f_s^\circ ds + 2L^w T (L^w + 1) \sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^2 \\
 &\quad + 2 \left| \int_0^T Y_s Z_s dB_s \right| + 2 \sup_{s \in [0, T]} |Y_s| |K_T|.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Z_s|^2 d\langle B \rangle_s \right)^{\frac{\alpha}{4}} \right] &\leq C_\alpha \mathbb{E} \left[|\xi|^\alpha + \sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{\frac{\alpha}{4}} \left(\int_0^T f_s^\circ ds \right)^{\frac{\alpha}{4}} + \sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^\alpha \right. \\
 &\quad \left. + \left| \int_0^T Y_s Z_s dB_s \right|^{\frac{\alpha}{4}} + \sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{\frac{\alpha}{4}} |K_T|^{\frac{\alpha}{4}} \right].
 \end{aligned}$$

از نامساوی هولدر داریم

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{\frac{\alpha}{4}} \left(\int_0^T f_s^\circ ds \right)^{\frac{\alpha}{4}} \right] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^\alpha \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f_s^\circ ds \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{4}}; \quad (9.4)$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{\frac{\alpha}{4}} |K_T|^{\frac{\alpha}{4}} \right] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^\alpha \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \mathbb{E} [|K_T|^\alpha]^{\frac{1}{4}}. \quad (10.4)$$

همچنین با توجه به گزاره ۱.۴ داریم

$$\begin{aligned} C_\alpha \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T Y_s Z_s dB_s \right|^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] &\leq C_\alpha \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} \left| \int_0^s Y_s Z_s dB_s \right|^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] \\ &\leq C_\alpha \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Y_s|^\gamma |Z_s|^\gamma ds \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] \\ &\leq C_\alpha \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\int_0^T |Z_s|^\gamma ds \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] \\ &\leq \lambda \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Z_s|^\gamma ds \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] + \frac{1}{\lambda} C_\alpha^\gamma \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^\alpha \right]. \end{aligned}$$

مجدداً قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{1}{\gamma}$. در این صورت با توجه به این رابطه و روابط (۹.۴) و (۱۰.۴) داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Z_s|^\gamma ds \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] &\leq C_\alpha \left\{ \|Y\|_{\mathbb{S}^\alpha}^\alpha + \|Y\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left[(\mathbb{E}[|K_T|^\alpha])^{\frac{1}{\gamma}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f_s^\circ ds \right)^\alpha \right] \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

از طرفی

$$K_T = \xi - Y_\circ + \int_0^t f(s) ds - \int_0^T Z_s dB_s.$$

بنابراین

$$|K_T|^\alpha \leq C_\alpha \left\{ |\xi|^\alpha + \left| \int_0^t f(s) ds \right|^\alpha + \left| \int_0^T Z_s dB_s \right|^\alpha \right\}.$$

از گزاره ۱.۴ و محاسبه‌ای ساده داریم

$$\mathbb{E}[|K_T|^\alpha] \leq C_\alpha \left\{ \|Y\|_{\mathbb{S}^\alpha}^\alpha + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Z_s|^\gamma ds \right)^{\alpha/\gamma} \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f_s^\circ ds \right)^\alpha \right] \right\}. \quad (12.4)$$

□

با توجه به روابط (۱۱.۴) و (۱۲.۴)، روابط (۷.۴) و (۸.۴) برقرار هستند.

گزاره ۱۲.۴. فرض کنید $\beta > 1$ و فرض کنید $\xi \in L_G^\beta(\mathcal{F}_T)$ و f در ویژگی‌های (H1) و (H2') صدق کند. همچنین فرض کنید $(Y, Z, K) \in \mathfrak{G}_G^\alpha(\circ, T)$ جوابی برای معادله‌ی (۴.۴) باشد که $1 < \alpha < \beta$. در این صورت

(i) ثابت $\circ := (\alpha, T, \sigma_\circ, L^w) > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$|Y_t|^\alpha \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[|\xi|^\alpha + \int_t^T |f_s^\circ|^\alpha ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (13.4)$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |Y_t|^\alpha \right] \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \mathbb{E} \left[|\xi|^\alpha + \int_\circ^T |f_s^\circ|^\alpha ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \right], \quad (14.4)$$

که $f_s^\circ = |f(s, \circ, \circ)| + L^w \epsilon$

(ii) برای هر α' ، که $\alpha < \alpha' < \beta$ ، ثابت $C_{\alpha, \alpha'}$ وابسته به σ ، T ، α' ، α وجود دارد که

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\cdot, T]} |Y_t|^\alpha \right] &\leq C_{\alpha, \alpha'} \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\cdot, T]} \mathbb{E} [|\xi|^\alpha | \mathcal{F}_t] \right] \right. \\ &\quad + \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\cdot, T]} \mathbb{E} \left[\left(\int_{\cdot}^T f_s^\circ ds \right)^{\alpha'} | \mathcal{F}_t \right] \right] \right)^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\cdot, T]} \mathbb{E} \left[\left(\int_{\cdot}^T f_s^\circ ds \right)^{\alpha'} | \mathcal{F}_t \right] \right] \right\}. \quad (15.4) \end{aligned}$$

برهان. برای هر $\gamma, \varepsilon > 0$ ، قرار می‌دهیم $\tilde{Y}_t = |Y_t|^2 + \varepsilon_\alpha$ که $\varepsilon_\alpha = \varepsilon(1 - \frac{\alpha}{\gamma})^+$. با به کار بردن فرمول ایتو برای $\tilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma t} = \phi(Y_t)$ داریم

$$\begin{aligned} &\tilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma t} + \gamma \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}} ds + \frac{\alpha}{\gamma} \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} Z_s^\gamma d\langle B \rangle_s \\ &= (|\xi|^2 + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma T} + \alpha(1 - \frac{\alpha}{\gamma}) \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} Y_s^\gamma Z_s^\gamma d\langle B \rangle_s \\ &\quad + \int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} Y_s f(s) ds - \int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} (Y_s Z_s dB_s + Y_s dK_s) \\ &\leq (|\xi|^2 + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma T} + \alpha(1 - \frac{\alpha}{\gamma}) \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} Z_s^\gamma d\langle B \rangle_s \\ &\quad + \int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} |f(s)| ds - (M_T - M_t), \quad (16.4) \end{aligned}$$

که $f(s) = f(s, Y_s, Z_s)$ و

$$M_t = \int_{\cdot}^t \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} Y_s Z_s dB_s + \int_{\cdot}^t \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} Y_s^+ dK_s.$$

با توجه به ویژگی (H2') داریم

$$\begin{aligned} \int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} |f(s)| ds &\leq \int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} (f_s^\circ + L^w |Y_s| + L^w |Z_s|) ds \\ &\leq \left(\alpha L^w + \frac{\alpha(L^w)^2}{\sigma_\circ^2(\alpha-1)} \right) \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}} ds \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\gamma} \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} Z_s^\gamma d\langle B \rangle_s \\ &\quad + \int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} |f_s^\circ| ds. \quad (17.4) \end{aligned}$$

(i) فرض کنید $\alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ ، در این صورت $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1$. بنابراین با استفاده از نامساوی یانگ داریم

$$\int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} |f_s^\circ| ds \leq (\alpha-1) \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}} ds + \int_t^T e^{\gamma s} |f_s^\circ|^\alpha ds. \quad (18.4)$$

با توجه به روابط (۱۶.۴)–(۱۸.۴) داریم

$$\begin{aligned} & \tilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma t} + (\gamma + \tilde{\alpha}) \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma}} ds + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\gamma} \int_t^T e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma} - 1} Z_s^\gamma d\langle B \rangle_s \\ & \leq (|\xi|^\gamma + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma T} + \int_t^T e^{\gamma s} |f_s^\circ|^\alpha ds - (M_T - M_t). \end{aligned}$$

که $\tilde{\alpha} = \alpha L^w + \alpha + \frac{\alpha(L^w)^\gamma}{\sigma_\circ^\gamma(\alpha - 1)} - 1$ قرار می‌دهیم $\gamma = \tilde{\alpha} + 1$ ، در این صورت

$$\tilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma t} + M_T - M_t \leq (|\xi|^\gamma + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma T} + \int_t^T e^{\gamma s} |f_s^\circ|^\alpha ds. \quad (۱۹.۴)$$

با استفاده از لم ۱۰.۴، M_t یک G -مارتینگل است، بنابراین $\mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_t] = M_t$ و لذا

$$\tilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma t} \leq \mathbb{E} \left[(|\xi|^\gamma + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma T} + \int_t^T e^{\gamma s} |f_s^\circ|^\alpha ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

فرض کنید $\varepsilon \rightarrow 0$ ، در این صورت $\varepsilon_\alpha \rightarrow 0$ و ثابتی مانند $C_\alpha := C_\alpha(T, L^w, \sigma_\circ)$ وجود دارد که

$$|Y_t|^\alpha \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[(|\xi|^\alpha + \int_t^T |f_s^\circ|^\alpha ds) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

بنابراین

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t|^\alpha \right] \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[(|\xi|^\alpha + \int_t^T |f_s^\circ|^\alpha ds) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right].$$

(ii) قرار می‌دهیم $\gamma = \alpha L^w + \frac{\alpha(L^w)^\gamma}{\sigma_\circ^\gamma(\alpha - 1)} + 1$ ، با توجه به روابط (۱۶.۴) و (۱۷.۴)، داریم

$$\tilde{Y}_t^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma t} \leq \mathbb{E} \left[(|\xi|^\gamma + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma T} + \int_t^T \alpha e^{\gamma s} \tilde{Y}_s^{\frac{\alpha}{\gamma} - 1} f_s^\circ ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (۲۰.۴)$$

فرض کنید $\varepsilon \rightarrow 0$ ، در این صورت

$$|Y_t|^\alpha \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[(|\xi|^\alpha + \int_t^T |Y_s|^{\alpha-1} f_s^\circ ds) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (۲۱.۴)$$

در نتیجه با توجه به نامساوی هولدر داریم

$$\begin{aligned} |Y_t|^\alpha & \leq C_\alpha \left\{ \mathbb{E} [|\xi|^\alpha | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{\alpha-1} \int_t^T f_s^\circ ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\} \\ & \leq C_\alpha \left\{ \mathbb{E} [|\xi|^\alpha | \mathcal{F}_t] + \left(\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{(\alpha-1)\alpha'^*} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^{\frac{1}{\alpha'^*}} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_t^T f_s^\circ ds \right)^{\alpha'} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \right\}, \end{aligned} \quad (۲۲.۴)$$

که $\alpha'^* = \frac{\alpha'}{\alpha' - 1}$ ، لذا

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t|^\alpha \right] \leq C_\alpha \left\{ \|\xi\|_{\alpha, \mathcal{E}}^\alpha + \left\| \sup_{s \in [0, T]} |Y_s|^{\alpha-1} \right\|_{\alpha'^*, \mathcal{E}} \left\| \int_0^T f_s^\circ ds \right\|_{\alpha', \mathcal{E}} \right\}.$$

روشن است که $\alpha(\alpha-1)^{\alpha^*} < \alpha$ ، بنابراین با توجه به رابطه (۳.۴)، ثابت C وابسته به α و α' وجود دارد که

$$\left\| \sup_{s \in [\circ, T]} |Y_s|^{\alpha-1} \right\|_{\alpha^*, \mathcal{E}} \leq C \left\{ \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |Y_t|^\alpha \right] \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \left(\mathbb{E} [\sup_{t \in [\circ, T]} |Y_t|^\alpha] \right)^{\frac{1}{\alpha^*}} \right\}.$$

با استفاده از نامساوی یانگ، داریم

$$CC_\alpha \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |Y_t|^\alpha \right] \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left\| \int_\circ^T f_s^\circ ds \right\|_{\alpha', \mathcal{E}} \leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |Y_t|^\alpha \right] + C_\alpha C_\alpha \left\| \int_\circ^T f_s^\circ ds \right\|_{\alpha', \mathcal{E}}^\alpha.$$

و همچنین

$$CC_\alpha \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |Y_t|^\alpha \right] \right)^{\frac{1}{\alpha^*}} \left\| \int_\circ^T f_s^\circ ds \right\|_{\alpha', \mathcal{E}} \leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |Y_t|^\alpha \right] + C_\alpha C_\alpha \left\| \int_\circ^T f_s^\circ ds \right\|_{\alpha', \mathcal{E}}^{\alpha'}.$$

که C_α ثابتی وابسته به α و α' است. بنابراین رابطه (۱۵.۴) برقرار است. $\square$

گزاره ۱۳.۴. فرض کنید $\beta > 1$ و توابع f_i که $i = 1, 2$ در ویژگی‌های $(H1)$ و $(H2')$ صدق کنند. فرض کنید

$$Y_t^i = \xi^i + \int_t^T f_i(s, Y_s^i, Z_s^i) ds - \int_t^T Z_s^i dB_s - (K_T^i - K_t^i),$$

که $K_T^i \in \mathbb{L}^\alpha(\Omega_T)$ و $K_\circ^i = \circ$ یک فرآیند نزولی است که $K^i \in \mathbb{H}^\alpha(\circ, T)$ ، $Y^i \in \mathbb{S}^\alpha(\circ, T)$ و $\beta \geq \alpha > 1$. قرار می‌دهیم $\hat{Y}_t = Y_t^1 - Y_t^2$ ، $\hat{Z}_t = Z_t^1 - Z_t^2$ و $\hat{K}_t = K_t^1 - K_t^2$. در این صورت ثابت $C_\alpha := C_\alpha(\alpha, T, \sigma_\circ, L^w) > \circ$ وجود دارد که

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_\circ^T |\hat{Z}_s|^2 ds \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right] \leq C_\alpha \left\{ \|\hat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^\alpha + \|\hat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{\beta}} \sum_{i=1}^2 \left[\|Y^i\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{\beta}} + \left\| \int_\circ^T f_s^{i, \circ} ds \right\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} \right] \right\}. \quad (23.4)$$

و در آن $f_s^{i, \circ} = |f_i(s, \circ, \circ)| + L^w \epsilon$ و $i = 1, 2$.

برهان. با به کار بردن فرمول ایتو برای $|\hat{Y}_t|^2$ ، مشابه با اثبات گزاره ۱۱.۴ داریم

$$\|\hat{Z}\|_{\mathbb{H}^\alpha}^\alpha \leq C_\alpha \left\{ \|\hat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^\alpha + \|\hat{Y}\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{\beta}} \left[\|K_T^1\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} + \|K_T^2\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} + \left\| \int_\circ^T \hat{f}_s ds \right\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} \right] \right\},$$

که $\widehat{f}_s = |f_1(s, Y_s^\gamma, Z_s^\gamma) - f_2(s, Y_s^\gamma, Z_s^\gamma)| + L^w \epsilon$ از طرفی با توجه به گزاره ۱۱.۴ (رابطه ۸.۴)، داریم

$$\begin{aligned} & \|K_T^\gamma\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \|K_T^\gamma\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \left\| \int_0^T \widehat{f}_s ds \right\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\gamma}} \\ & \leq C_\alpha \left\{ \|Y^\gamma\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \|Y^\gamma\|_{\mathbb{S}^\alpha}^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \left\| \int_0^T f_s^{\gamma, \circ} ds \right\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \left\| \int_0^T f_s^{\gamma, \circ} ds \right\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\}. \end{aligned}$$

□

بنابراین رابطه (۲۳.۴) برقرار است.

گزاره ۱۴.۴. فرض کنید $\beta > 1$ و فرض کنید $\xi^i \in L_G^\beta(\mathcal{F}_T)$ که $i = 1, 2$ و توابع f_i دارای ویژگی‌های $(H1)$ و $(H2')$ باشند. همچنین فرض کنید $1 < \alpha < \beta$ و $(Y^i, Z^i, K^i) \in \mathfrak{G}_G^\alpha(\circ, T)$ جوابی‌هایی برای معادله (۴.۴) متناظر با ξ^i و f_i باشند. قرار می‌دهیم $\widehat{Y}_t = Y_t^1 - Y_t^2$ و $\widehat{Z}_t = Z_t^1 - Z_t^2$ در این صورت $\widehat{K}_t = K_t^1 - K_t^2$

(i) ثابت $C_\alpha := (\alpha, T, \sigma_\circ, L^w) > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$|\widehat{Y}_t|^\alpha \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[|\widehat{\xi}|^\alpha + \int_t^T |\widehat{f}_s|^\alpha ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (24.4)$$

که $\widehat{f}_s = |f_1(s, Y_s^\gamma, Z_s^\gamma) - f_2(s, Y_s^\gamma, Z_s^\gamma)| + L^w \epsilon$

(ii) برای هر α' که $\alpha < \alpha' < \beta$ ، ثابت $C_{\alpha, \alpha'}$ وابسته به $\alpha, \alpha', T, \sigma_\circ$ و L^w وجود دارد که

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} |\widehat{Y}_t|^\alpha \right] & \leq C_{\alpha, \alpha'} \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \mathbb{E} [|\widehat{\xi}|^\alpha \mid \mathcal{F}_t] \right] \right. \\ & \quad + \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \widehat{f}_s ds \right)^{\alpha'} \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \right)^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \\ & \quad \left. + \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [\circ, T]} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \widehat{f}_s ds \right)^{\alpha'} \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \right\}. \quad (25.4) \end{aligned}$$

برهان. فرض کنید $\gamma, \epsilon > \circ$. مشابه با گزاره ۱۲.۴، با به کار بردن فرمول ایتو برای $(|\widehat{Y}_t|^\gamma + \epsilon_\alpha) e^{\gamma t}$ که $\epsilon_\alpha = \epsilon(1 - \frac{\alpha}{\gamma})^+$ و قرار دادن $\gamma = \alpha L^w + \alpha + \frac{\alpha(L^w)^\gamma}{\sigma_\circ^\gamma(\alpha-1)}$ داریم

$$\begin{aligned} & (|\widehat{Y}_t|^\gamma + \epsilon_\alpha) e^{\gamma t} + \int_t^T \alpha e^{\gamma s} (|\widehat{Y}_s|^\gamma + \epsilon_\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}-1} \widehat{Y}_s \widehat{Z}_s dB_s + J_T - J_t \\ & \leq (|\widehat{\xi}|^\gamma + \epsilon_\alpha) e^{\gamma T} + \int_t^T e^{\gamma s} |\widehat{f}_s|^\alpha ds. \end{aligned}$$

و

$$(|\hat{Y}_t|^2 + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma t} + \int_t^T \alpha e^{\gamma s} (|\hat{Y}_s|^2 + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} \hat{Y}_s \hat{Z}_s dB_s + J_T - J_t \\ \leq (|\hat{\xi}|^2 + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}} e^{\gamma T} + \int_t^T \alpha e^{\gamma s} (|\hat{Y}_s|^2 + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} \hat{f}_s ds.$$

که

$$J_t = \int_0^t \alpha e^{\gamma s} (|\hat{Y}_s|^2 + \varepsilon_\alpha)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} (\hat{Y}_s^+ dK_s^+ + \hat{Y}_s^- dK_s^-).$$

با توجه به لم ۱۰.۴، J_t یک $-G$ مارتینگل است. بنابراین با گرفتن امید شرطی و فرض $\varepsilon \rightarrow 0$ ، ثابتی مانند $C_\alpha(T, L^w, \sigma_0)$ وجود دارد که

$$|\hat{Y}_t|^\alpha \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[(|\hat{\xi}|^\alpha + \int_t^T |\hat{f}_s|^\alpha ds) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

و

$$|\hat{Y}_t|^\alpha \leq C_\alpha \mathbb{E} \left[(|\hat{\xi}|^\alpha + \int_t^T |\hat{Y}_s|^{\alpha-1} \hat{f}_s ds) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

□

مشابه با اثبات قسمت (ii) از گزاره ۱۲.۴، رابطه‌ی (۲۵.۴) برقرار است.

تذکر ۱۵.۴. یادآور می‌شویم که، گزاره‌های ۱۲.۴ و ۱۴.۴ برای معادله‌ی (۱۰.۴) نیز برقرارند و برای هر $\int_0^T \eta_s d\langle B \rangle_s \leq \int_0^T \eta_s ds$ ، $\eta \in M_G^1(0, T)$

۴.۴ وجود و یکتایی جواب $-G$ - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی

برای اثبات وجود جواب معادله‌ی (۴.۴)، با حالت ساده‌ی $f(t, \omega, y, z) = h(y, z)$ و $\xi = \varphi(B_T)$ شروع می‌کنیم، که $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ و $\varphi \in lip(\mathbb{R}^2)$. با شروع از این حالت، می‌توان جواب معادله‌ی (۴.۴) را به کمک معادله دیفرانسیل جزئی و غیر خطی زیر به دست آورد

$$\partial_t u + G(\partial_{xx}^2 u) + h(u, \partial_x u) = 0, \quad u(T, x) = \varphi(x). \quad (۲۶.۴)$$

فرض کنید $\|f_n - f\|_{M_G^\beta} \rightarrow 0$ و (Y^n, Z^n, K^n) جوابی برای G -BSDE زیر باشد

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^T Z_s^n dB_s - (K_T^n - K_t^n).$$

ثابت می‌کنیم که (Y^n, Z^n, K^n) به (Y, Z, K) همگرا است و جواب معادله‌ی زیر است

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s - (K_T - K_t).$$

قضیه‌ی زیر یکی از نتایج اصلی این فصل است.

قضیه ۱۶.۴. فرض کنید $\beta > 1$. همچنین فرض کنید $\xi \in L_G^\beta(\mathcal{F}_T)$ و f در ویژگی‌های $(H1)$ و $(H2)$ صدق کند. در این صورت معادله‌ی (۴.۴) دارای جواب یکتای (Y, Z, K) است. به علاوه برای هر α ، که $1 < \alpha < \beta$ ، داریم $Y \in S_G^\alpha(\circ, T)$ ، $Z \in H_G^\alpha(\circ, T)$ و $K_T \in L_G^\alpha(\mathcal{F}_T)$.

برهان. یکتایی جواب یک نتیجه مستقیم از تخمین‌های قیاسی در گزاره‌های ۱۳.۴ و ۱۴.۴ است. با توجه به این تخمین‌ها کافی است تنها وجود جواب را برای حالت $\xi \in L_{ip}^\circ(\mathcal{F}_T)$ ثابت کنیم. **گام اول.** $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ که $f(t, \omega, y, z) = h(y, z)$.

قسمت اول. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $\xi = \varphi(B_T - B_{t_1})$ که $\varphi \in \text{lip}(\mathbb{R})$ و $t_1 < T$. فرض کنید u جواب معادله‌ی (۲۶.۴) با شرط نهایی φ باشد. با توجه به قضیه‌ی ۶.۴.۳ از [۱۷] (یا قضیه‌ی ۴.۴ در پیوست C از [۳۵])، ثابت $\alpha \in (\circ, 1)$ وجود دارد به طوری که برای هر $\kappa > \circ$

$$\|u\|_{C^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}([0, T-\kappa] \times \mathbb{R})} < \infty.$$

با به کار بردن فرمول ایتو برای $u(t, B_t, B_{t_1})$ روی $[t_1, T - \kappa]$ ، داریم

$$\begin{aligned} u(t, B_t - B_{t_1}) = & u(T - \kappa, B_{T-\kappa} - B_{t_1}) + \int_t^{T-\kappa} h(u, \partial_x u)(s, B_s - B_{t_1}) ds \\ & - \int_t^{T-\kappa} \partial_x u(s, B_s - B_{t_1}) dB_s - (K_{T-\kappa} - K_t), \end{aligned} \quad (27.4)$$

که $K_t = \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \partial_{xx}^2 u(s, B_s - B_{t_1}) d\langle B \rangle_s - \int_{t_1}^t G(\partial_{xx}^2 u(s, B_s - B_{t_1})) ds$ یک G -مارتینگل ناصعودی است. اکنون ثابت می‌کنیم که ثابت $L_1 > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$|u(t, x) - u(s, y)| \leq L_1(\sqrt{|t - s|} + |x - y|), \quad t, s \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}. \quad (28.4)$$

برای هر $x_\circ \in \mathbb{R}$ ثابت که قرار می‌دهیم، $\tilde{u}(t, x) = u(t, x + x_\circ)$ روشن است که $\tilde{u}$ جوابی برای PDE زیر است

$$\partial_t \tilde{u} + G(\partial_{xx}^2 \tilde{u}) + h(\tilde{u}, \partial_x \tilde{u}) = \circ, \quad \tilde{u}(T, x) = \varphi(x + x_\circ). \quad (29.4)$$

تعریف می‌کنیم $\hat{u}(t, x) = u(t, x) + L_\varphi |x_\circ| \exp(L_h(T - t))$ ، که L_h و L_φ ، به ترتیب ثوابت لپشیتس مربوط به توابع h و φ هستند. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\hat{u}$ یک supersolution از معادله‌ی (۲۹.۴) است. بنابراین با توجه به قضیه‌ی مقایسه (قضیه‌ی ۲.۴ در پیوست C از [۳۵]) داریم

$$u(t, x + x_\circ) \leq u(t, x) + L_\varphi |x_\circ| \exp(L_h(T - t)), \quad t \in [0, T], x \in \mathbb{R}.$$

چون $x_\circ$ دلخواه است، لذا $|u(t, x) - u(t, y)| \leq \hat{L}|x - y|$ که $\hat{L} = L_\varphi \exp(L_h T)$. بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $t \in [0, T]$ داریم $|\partial_x u(t, x)| \leq \hat{L}$. به علاوه برای هر $\bar{t}$ و $\hat{t}$ ثابت که $\bar{t} < \hat{t} < T$ و به کار بردن فرمول ایتو برای $u(s, x + B_s - B_{\bar{t}})$ روی $[\bar{t}, \hat{t}]$ داریم

$$u(\bar{t}, x) = \mathbb{E} \left[u(\hat{t}, x + B_{\hat{t}} - B_{\bar{t}}) + \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} h(u, \partial_x u)(s, x + B_s - B_{\bar{t}}) ds \right].$$

این نتیجه می‌دهد که

$$|u(\bar{t}, x) - u(\hat{t}, x)| \leq \mathbb{E} \left[\hat{L} |B_{\hat{t}} - B_{\bar{t}}| + \tilde{L} |\hat{t} - \bar{t}| \right] \leq (\hat{L} + \tilde{L} \sqrt{T}) \sqrt{|\hat{t} - \bar{t}|},$$

که $\tilde{L} = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |h(x, y)|$. با قرار دادن $L_1 = \max\{\hat{L}, \tilde{L} \sqrt{T}\}$ ، رابطه‌ی (۲۸.۴) برقرار است.

رابطه‌ی (۲۷.۴) را در نظر بگیرید، با فرض $\kappa \rightarrow 0$ ، داریم

$$\mathbb{E} \left[|Y_{T-\kappa} - \xi|^2 + \int_{T-\kappa}^T |Z_t|^2 dt + (K_{T-\kappa} - K_T)^2 \right] \rightarrow 0,$$

که $Y_t = u(t, B_t - B_{t_1})$ و $Z_t = \partial_x u(t, B_t, B_{t_1})$. بنابراین $(Y_t, Z_t, K_t)_{t \in [t_1, T]}$ جوابی برای

معادله‌ی (۴.۴) با مقدار نهایی $\xi = \varphi(B_T - B_{t_1})$ می‌باشد. به علاوه برای هر $\alpha > 1$ ، روشن است که $K_T \in L_G^\alpha(\mathcal{F}_T)$ و $Z \in H_G^\alpha(t_1, T)$ ، $Y \in S_G^\alpha(t_1, T)$

قسمت دوم. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $\xi = \psi(B_{t_1}, B_T - B_{t_1})$ ، که $\psi \in \text{lip}(\mathbb{R}^2)$ ، حالت کلی تر به طور مشابه اثبات می‌شود. برای هر $x \in \mathbb{R}$ فرض کنید $u(., x, .)$ جوابی برای معادله‌ی (۲۶.۴) با شرط نهایی $\psi(x, .)$ باشد. با توجه به قسمت اول داریم

$$\begin{aligned} u(t, x, B_t - B_{t_1}) &= u(T, x, B_T - B_{t_1}) + \int_t^T h(u, \partial_y u)(s, x, B_s - B_{t_1}) ds \\ &\quad - \int_t^T \partial_y u(s, x, B_s - B_{t_1}) dB_s - (K_T^x - K_t^x), \end{aligned} \quad (30.4)$$

که $K_t^x = \frac{1}{\gamma} \int_{t_1}^t \partial_{yy}^\gamma u(s, x, B_s - B_{t_1}) d\langle B \rangle_s - \int_{t_1}^t G(\partial_{yy}^\gamma u(s, x, B_s - B_{t_1})) ds$ با جایگزین کردن B_{t_1} با x داریم

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_T + \int_t^T h(Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s - (K_T - K_t), \\ \text{که } Z_t &= \partial_y u(t, B_{t_1}, B_t - B_{t_1}), Y_t = u(t, B_{t_1}, B_t - B_{t_1}) \text{ و} \\ K_t &= \frac{1}{\gamma} \int_{t_1}^t \partial_{yy}^\gamma u(s, B_{t_1}, B_s - B_{t_1}) d\langle B \rangle_s - \int_{t_1}^t G(\partial_{yy}^\gamma u(s, B_{t_1}, B_s - B_{t_1})) ds. \end{aligned}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که $(Y, Z, K) \in \mathfrak{G}_G^\alpha(., T)$. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داده شده، با توجه به افراز واحد قضیه، تابع $h_i^n \in C^\infty(\mathbb{R})$ وجود دارد که $\frac{1}{n} \leq h_i^n \leq 1$ ، $\lambda(\text{supp}(h_i^n)) \leq \frac{1}{n}$ و

$$I_{[-n, n]}(x) \leq \sum_{i=1}^{k_n} h_i^n \leq 1,$$

که $\lambda(\text{supp}(h_i^n))$ قطر مجموعه‌ی $\text{supp}(h_i^n)$ است.

$x_i^n \in \mathbb{R}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $h_i^n(x_i^n) > 0$. با توجه به معادله‌ی (۳۰.۴) داریم

$$Y_t^n = Y_T^n + \int_t^T \sum_{i=1}^n h(Y_s^{n,i}, Z_s^{n,i}) h_i^n(B_{t_1}) ds - \int_t^T Z_s^n dB_s - (K_T^n - K_t^n),$$

که $Y_t^n = \sum_{i=1}^n y_t^{n,i} h_i^n(B_{t_1})$ ، $z_t^{n,i} = \partial_y u(t, x_i^n, B_t - B_{t_1})$ ، $y_t^{n,i} = u(t, x_i^n, B_t - B_{t_1})$ که $K_t^n = \sum_{i=1}^n K_t^{x_i^n} h_i^n(B_{t_1})$ و $Z_t^n = \sum_{i=1}^n z_t^{n,i} h_i^n(B_{t_1})$

مشابه با قسمت اول، ثابت $L_2 > 0$ وجود دارد که برای هر $t, s \in [0, T]$ و $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

$$|u(t, x, y) - u(s, x', y')| \leq L_2(\sqrt{|t - s|} + |x - x'| + |y - y'|).$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} |Y_t - Y_t^n| &\leq \sum_{i=1}^{k_n} h_i^n(B_{t_1}) |u(t, x_i^n, B_t - B_{t_1}) - u(t, B_{t_1}, B_t - B_{t_1})| + |Y_t| I_{[|B_{t_1}| > n]} \\ &\leq \frac{L_2}{n} + \frac{\|u\|_\infty}{n} |B_{t_1}|. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $\alpha > 1$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [t_1, T]} |Y_t - Y_t^n|^\alpha \right] \leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{L_2}{n} + \frac{\|u\|_\infty}{n} |B_{t_1}| \right)^\alpha \right] \rightarrow 0. \quad (31.4)$$

لذا $Y \in S_G^\alpha(t_1, T)$ با توجه به گزاره ۱۳.۴ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_1}^T |Z_s - Z_s^n|^\gamma ds \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] &\leq C_\alpha \left\{ \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [t_1, T]} |Y_t - Y_t^n|^\alpha \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [t_1, T]} |Y_t - Y_t^n|^\alpha \right] \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}, \end{aligned}$$

که $c_\alpha > 0$ ، ثابتی وابسته به α, T, L^w و σ_0 است. بنابراین با توجه به رابطه (۳۱.۴)، داریم

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{t_1}^T |Z_s - Z_s^n|^\gamma ds \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] \rightarrow 0.$$

این نتیجه می‌دهد که $Z \in H_G^\alpha(t_1, T)$. از طرفی $k_t = Y_t - Y_{t_1} + \int_{t_1}^t h(Y_s, Z_s) ds - \int_{t_1}^t Z_s dB_s$ بنابراین $K_t \in L_G^\alpha(\mathcal{F}_t)$.

اکنون ثابت می‌کنیم که K یک $-G$ -مارتینگل است. برای این منظور، با توجه به چهارچوب ارائه شده در [۱۹] قرار می‌دهیم

$$h_i^n(x) = i_{[-n+\frac{i}{n}, -n+\frac{i+1}{n})}(x), \quad i = 0, \dots, 2n-1,$$

با توجه به معادله (۳۰.۴) داریم $h_{2n}^n = 1 - \sum_{i=0}^{2n-1} h_i^n$

$$\tilde{Y}_t^n = \tilde{Y}_T^n + \int_t^T h(\tilde{Y}_s^n, \tilde{Z}_s^n) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s^n dB_s - (\tilde{K}_T^n - \tilde{K}_t^n),$$

که $\tilde{Z}_t^n = \sum_{i=0}^{2n-1} \partial_y u(t, -n+\frac{i}{n}, B_t - B_{t_1}) h_i^n(B_{t_1})$ ، $\tilde{Y}_t^n = \sum_{i=0}^{2n-1} u(t, -n+\frac{i}{n}, B_t - B_{t_1}) h_i^n(B_{t_1})$ و $\tilde{K}_t^n = \sum_{i=0}^{2n-1} K_t^{-n+\frac{i}{n}} h_i^n(B_{t_1})$ ، داریم

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{t_1}^T |Z_s - \tilde{Z}_s^n|^\gamma ds \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right] \rightarrow 0.$$

بنابراین برای هر $\alpha > 1$ ، $\mathbb{E}[|K_t - \tilde{K}_t^n|^\alpha] \rightarrow 0$ ، برای هر $t_1 \leq t < s \leq T$ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[K_s|\mathcal{F}_t] - K_t|] &= \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[K_s|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[\tilde{K}_s^n|\mathcal{F}_t] + \tilde{K}_t^n - K_t\right|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|K_s - \tilde{K}_s^n| \mid \mathcal{F}_t\right]\right] + \mathbb{E}\left[|\tilde{K}_t^n - K_t|\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|K_s - \tilde{K}_s^n|\right] + \mathbb{E}\left[|\tilde{K}_t^n - K_t|\right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{E}[K_s|\mathcal{F}_t] = K_t$ برای $Y_{t_1} = u(t_1, B_{t_1}, \circ)$ می‌توان از روشی مشابه با قسمت اول روی بازه $[0, t_1]$ استفاده کرد.

گام دوم. $f^i \in M_G^{\beta, \circ}(\circ, T)$ و $h^i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ، $f(t, \omega, y, z) = \sum_{i=1}^N f^i h^i(y, z)$

مشابه با قسمت دوم از گام اول برقرار است.

گام سوم. $f^i \in M_G^{\beta, \circ}(\circ, T)$ و کراندار است و $h^i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ و $\sum_{i=1}^N h^i \leq 1$

$f_n^i \in M_g^{\beta, \circ}(\circ, T)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\|f_n^i - f^i\|_{M_G^\beta} < \frac{1}{n}$ و $|f_n^i| \leq \|f^i\|_\infty$ قرار می‌دهیم $f_n = \sum_{i=1}^N f_n^i h^i(y, z)$ و فرض می‌کنیم f_n ها پیوسته لیپشیتس باشند. فرض کنید (Y^n, Z^n, K^n) جوابی برای معادله (۴.۴) با مولد f_n باشد. ملاحظه می‌کنیم که

$$\hat{f}^{m,n} := |f_m(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)| \leq \sum_{i=1}^N |f_m^i - f_n^i| + \sum_{i=1}^N |f_m^i - f^i| =: \hat{f}_n + \hat{f}_m,$$

برای هر $1 < \alpha < \beta$ داریم

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \hat{f}^{m,n} ds\right)^\alpha \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (|\hat{f}_n(s)| + |\hat{f}_m(s)|) ds\right)^\alpha \mid \mathcal{F}_t\right].$$

فرض کنید $m, n \rightarrow \infty$ در این صورت با توجه به قضیه ۵.۴، برای هر $\alpha \in (1, \beta)$ داریم

$$\left\|\int_0^T \hat{f}_s^{m,n} ds\right\|_{\alpha, \mathcal{E}} \rightarrow 0.$$

با توجه به گزاره ۱۴.۴، می‌دانیم که دنباله $\{Y^n\}$ تحت نرم $\|\cdot\|_{S_G^\alpha}$ کوشی است. همچنین با توجه به گزاره‌های ۱۲.۴ و ۱۳.۴، دنباله $\{Z^n\}$ نیز تحت نرم $\|\cdot\|_{H_G^\alpha}$ یک دنباله کوشی است. نشان می‌دهیم که دنباله $\{K_T^n\}$ ، تحت نرم $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ ، یک دنباله کوشی است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم دنباله $\{\int_0^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) ds\}$ تحت نرم $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ یک دنباله کوشی است:

$$\begin{aligned} |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| &\leq |f_m(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| \\ &\quad + |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^n, Z^n)| \\ &\leq L(|\hat{Y}_s| + |\hat{Z}_s|) + \hat{f}_n + \hat{f}_m, \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از طرفین این رابطه نتیجه برقرار است.

گام چهارم. f کراندار و پیوسته لپشیتس باشد. $|f(t, \omega, y, z)| \leq CI_{B(R)}(y, z)$ که $C, R > 0$ و $B(R) = \{(y, z) | y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، با توجه به افراز واحد قضیه، $\{h_n^i\}_{i=1}^{N_n}$ وجود دارد که $h_n^i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ، $0 \leq h_n^i \leq 1$ ، $\lambda(\text{supp}(h_n^i)) < \frac{1}{n}$ و $I_{B(R)} \leq \sum_{i=1}^{N_n} h_n^i \leq 1$ ، $\lambda(\text{supp}(h_n^i)) < \frac{1}{n}$ است. بنابراین $f(t, \omega, y, z) = \sum_{i=1}^{N_n} f(t, \omega, y, z) h_n^i$ و z_n^i و y_n^i را طوری انتخاب می‌کنیم که $h_n^i(y_n^i, z_n^i) > 0$. قرار می‌دهیم $f_n(t, \omega, y, z) = \sum_{i=1}^{N_n} f(t, \omega, y_n^i, z_n^i) h_n^i$. در این صورت

$$|f(t, \omega, y, z) - f_n(t, \omega, y, z)| \leq \sum_{i=1}^{N_n} |f(t, \omega, y, z) - f(t, \omega, y_n^i, z_n^i)| h_n^i \leq \frac{L}{n}$$

و

$$|f_n(t, \omega, y, z) - f_n(t, \omega, y', z')| \leq L \left(|y - y'| + |z - z'| + \frac{2}{n} \right).$$

ملاحظه می‌کنیم که $|f_m(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)| \leq (\frac{L}{n} + \frac{L}{m})$ ، بنابراین داریم

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \left(|f_m(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)| + \frac{2L}{m} \right) ds \right|^\alpha \middle| \mathcal{F}_t \right] \leq T^\alpha \left(\frac{L}{n} + \frac{2L}{m} \right)^\alpha.$$

از گزاره ۱۴.۴ نتیجه می‌گیریم که دنباله $\{Y^n\}$ ، تحت نرم $\|\cdot\|_{S_G^\alpha}$ یک دنباله‌ی کوشی است. بنابراین با توجه به گزاره‌های ۱۲.۴ و ۱۳.۴، دنباله‌ی $\{Z^n\}$ نیز تحت نرم $\|\cdot\|_{H_G^\alpha}$ ، یک دنباله‌ی کوشی است. اکنون ثابت می‌کنیم که دنباله‌ی $\{\int_0^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) ds\}$ تحت نرم $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ یک دنباله‌ی کوشی است:

$$\begin{aligned} |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| &\leq |f_m(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| \\ &\quad + |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^n, Z^n)| \\ &\leq L \left(|\hat{Y}_s| + |\hat{Z}_s| + \frac{2}{m} \right) + \frac{L}{n} + \frac{L}{m}, \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه، نتیجه برقرار است.

گام پنجم. f پیوسته لپشیتس و کراندار باشد.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $h^n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $I_{B(n)} \leq h^n \leq I_{B(n+1)}$ و $\{h^n\}$ نسبت به n به طور یکنواخت پیوسته لپشیتس هستند. قرار می‌دهیم $f_n = f h^n$ که f_n ها به طور یکنواخت پیوسته لپشیتس است. ملاحظه می‌کنیم که برای هر $m > n$

$$\begin{aligned} |f_m(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)| &\leq |f(s, Y_s^n, Z_s^n)| I_{[|Y_s^n|^2 + |Z_s^n|^2 > n^2]} \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{|Y_s^n| + |Z_s^n|}{n}, \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |f_m(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)| ds \right)^\alpha \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & \leq \frac{\|f\|_\infty^\alpha}{n^\alpha} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Y_s^n| + |Z_s^n| ds \right)^\alpha \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & \leq \frac{\|f\|_\infty^\alpha}{n^\alpha} C(\alpha, T) \mathbb{E} \left[\int_0^T |Y_s^n|^\alpha ds + \left(\int_0^T |Z_s^n|^2 ds \right)^{\frac{\alpha}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right], \\ & \text{که } C(\alpha, T) := 2^{\alpha-1} (T^{\alpha-1} + T^{\frac{\alpha}{2}}) \end{aligned}$$

بنابراین زمانی که $m, n \rightarrow \infty$ ، با توجه به قضیه ۵.۴ و گزاره ۱۲.۴، برای هر $\alpha \in (1, \beta)$ داریم
 $\circ \quad \|\int_0^T \hat{f}_s^{m,n} ds\|_{\alpha, \mathcal{E}} \rightarrow 0$ از گزاره ۱۴.۴ نتیجه می‌گیریم که دنباله‌ی $\{Y^n\}$ تحت نرم $\|\cdot\|_{S_G^\alpha}$ یک دنباله‌ی کوشی است و در نتیجه، دنباله‌ی $\{Z^n\}$ نیز تحت نرم $\|\cdot\|_{H_G^\alpha}$ یک دنباله‌ی کوشی است. اکنون ثابت می‌کنیم که دنباله‌ی $\{\int_0^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) ds\}$ تحت نرم $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ یک دنباله کوشی است:

$$\begin{aligned} |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| & \leq |f_m(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| \\ & \quad + |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^n, Z^n)| \\ & \leq L \left(|\hat{Y}_s| + |\hat{Z}_s| \right) + |f(s, Y_s^n, Z_s^n)| I_{[|Y_s^n| + |Z_s^n| > n]}, \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به گزاره ۱۲.۴، نتیجه برقرار است.

گام ششم. فرض کنید f دلخواه باشد.

قرار می‌دهیم $f_n = [f \vee (-n)] \wedge n$ و فرض می‌کنیم f_n ها به طور یکنواخت پیوسته لپشیتس باشند. ثابت δ را طوری انتخاب می‌کنیم که $0 < \delta < \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \wedge 1$. بنابراین $\alpha < \alpha' = (1+\delta)\alpha < \beta$. چون برای هر $m > n$

$$\begin{aligned} |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| & \leq |f(s, Y^n, Z^n)| I_{[|f(s, Y_s^n, Z_s^n)| > n]} \\ & \leq \frac{1}{n^\delta} |f(s, Y_s^n, Z_s^n)|^{1+\delta}, \end{aligned}$$

لذا داریم

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)| ds \right)^\alpha \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & \leq \frac{1}{n^{\alpha\delta}} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |f(s, Y_s^n, Z_s^n)|^{1+\delta} ds \right)^\alpha \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & \leq \frac{C(\alpha, T, L, \delta)}{n^{\alpha\delta}} \mathbb{E} \left[\int_0^T |f(s, \circ, \circ)|^{\alpha'} ds + \int_0^T |Y_s^n|^{\alpha'} ds + \left(\int_0^T |Z_s^n|^2 ds \right)^{\frac{\alpha'}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

که $C(\alpha, T, L, \delta) := 3^{\alpha'-1} (T^{\alpha-1} L^{\alpha'} T^{\frac{\alpha(1-\delta)}{2}} + T^{\alpha-1} L^{\alpha'})$ بنابرین زمانی که $m, n \rightarrow \infty$ با توجه به قضیه ۵.۴ و گزاره ۱۲.۴، برای هر $\alpha \in (1, \beta)$ داریم $\circ \rightarrow \left\| \int_0^T \hat{f}_s^{m,n} ds \right\|_{\alpha, \mathcal{E}}$ با توجه به گزاره ۱۴.۴ می‌دانیم که دنباله‌ی $\{Y^n\}$ تحت نرم $\|\cdot\|_{S_G^\alpha}$ یک دنباله‌ی کوشی است، در نتیجه دنباله‌ی $\{Z^n\}$ نیز تحت نرم $\|\cdot\|_{H_G^\alpha}$ یک دنباله‌ی کوشی است. اکنون نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{\int_0^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) ds\}$ تحت نرم $\|\cdot\|_{L_G^\alpha}$ یک دنباله‌ی کوشی است:

$$\begin{aligned} |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| &\leq |f_m(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^m, Z^m)| \\ &\quad + |f_n(s, Y^n, Z^n) - f_m(s, Y^n, Z^n)| \\ &\leq L \left(|\hat{Y}_s| + |\hat{Z}_s| \right) + \frac{3^\delta}{n^\delta} (|f_s^\circ|^{1+\delta} + |Y_s^n|^{1+\delta} + |Z_s^n|^{1+\delta}), \end{aligned}$$

بنابرین با توجه به گزاره ۱۲.۴، نتیجه برقرار است. $\square$

همچنین، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۷.۴. فرض کنید $\beta > 1$. همچنین فرض کنید $\xi \in L_G^\beta(\mathcal{F}_T)$ و f و g در ویژگی‌های $(H1)$ و $(H2)$ صدق کنند. در این صورت معادله‌ی (۱۰.۴) دارای جواب یکتای (Y, Z, K) است. به علاوه برای هر α ، که $1 < \alpha < \beta$ ، داریم $Y \in S_G^\alpha(\circ, T)$ ، $Z \in H_G^\alpha(\circ, T)$ و $K_T \in L_G^\alpha(\mathcal{F}_T)$.

برهان. مشابه با قضیه ۱۶.۴ ثابت می‌شود. $\square$

۵.۴. $-G$ - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی در حالات خاص

در این بخش $-G$ - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی را در حالات خاص مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۵.۴. $-G$ - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با ضرایب پیوسته

معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بازگشتی (۴.۴) را در نظر بگیرید و فرض کنید f در فرضیات زیر صدق کند.

B1

$$\forall (t, \omega, y, z) \in [\circ, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad |f(t, \omega, y, z)| \leq K'(1 + |y| + |z|),$$

که در آن K عددی ثابت و مثبت است.

B2 برای هر $(t, \omega) \in [\circ, T] \times \Omega$ ، $f(t, y, z)$ در (y, z) پیوسته است.

B3 برای هر y و z ، $f(\cdot, y, z) \in M_G^Y(\cdot, T)$.

قضیه ۱۸.۴. [۲۴] فرض کنید $\xi \in L_G^Y(\mathcal{F}_T)$ و f در ویژگی‌های (B1)–(B3) صدق کند، در این صورت معادلهی (۴.۴) دارای جواب $(Y, Z, K) \in S_G^Y(\cdot, T) \times H_G^Y(\cdot, T) \times L_G^Y(\mathcal{F}_T)$ است.

برهان. فرض کنید

$$f_n(t, y, z) := \inf_{(u, v) \in \mathbb{R}^2} \{f(t, u, v) + n(|y - u| + |z - v|)\},$$

و فرض کنید (Y^n, Z^n, K^n) جوابی برای G -BSDE زیر باشد

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^T Z_s^n dB_s - (K_T - K_t), \quad n \geq K', \quad (32.4)$$

و

$$U_t = \xi + \int_t^T K(1 + |U_s| + |V_s|) ds - \int_t^T V_s dB_s - (K_T^n - K_t^n). \quad (33.4)$$

ثابت می‌کنیم که (Y^n, Z^n, K^n) به (Y, Z, K) همگرا است و (Y, Z, K) جواب معادلهی (۴.۴) است. با استفاده از قضیهی مقایسه از پنگ (۱۹۹۲) داریم

$$\forall n \geq m \geq K, \quad Y^m \leq Y^n \leq U \quad (34.4)$$

مشابه با لم ۱۰.۲ دنبالهی (Y^n, Z^n, K^n) در $S_G^Y(\cdot, T) \times H_G^Y(\cdot, T) \times L_G^Y(\mathcal{F}_T)$ همگراست. برای هر $n \geq n_0 \geq K'$ داریم $Y_{n_0} \leq Y_n \leq U$. همچنین Y^n در $S_G^Y(\cdot, T)$ همگرا است. فرض کنید $Y^n \rightarrow Y$. بنابراین $G = \sup_n |Y^n|$ با توجه به لم فاتو انتگرال پذیر است یعنی

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^p \right) < \infty.$$

از سوی دیگر چون $Z^n \rightarrow Z$ لذا هر زیر دنباله از آن نیز همگرا است، بنابراین $H = \sup_n |Z^n|$ نیز انتگرال پذیر است. پس با توجه به قسمت‌های (i) و (iv) از لم ۵.۲،

$$f_n(t, Y_t^n, Z_t^n) \rightarrow f(t, Y_t, Z_t).$$

و

$$\begin{aligned} |f_n(t, Y_t^n, Z_t^n)| &\leq K'(1 + \sup_n |Y_t^n| + \sup_n |Z_t^n|) \\ &= K'(1 + G_t + H_t) \in L_G^1(\mathcal{F}_T). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر ω و t داریم

$$\int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) ds \rightarrow \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds. \quad (35.4)$$

از ویژگی پیوستگی انتگرال تصادفی داریم

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_t^T Z_s^n dB_s - \int_t^T Z_s dB_s \right| \rightarrow 0. \quad (36.4)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |Y_t^n - Y_t^m| &\leq \int_t^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)| ds \\ &\quad + \left| \int_t^T Z_s^n dB_s - \int_t^T Z_s^m dB_s \right| + |(K_T^n - K_t^n) - (K_T^m - K_t^m)|, \end{aligned}$$

بنابراین با گرفتن حد روی m و سوپریم روی t داریم

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T} |Y_t^n - Y_t| &\leq \int_t^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s, Z_s)| ds \\ &\quad + \sup_{t \leq T} \left| \int_t^T Z_s^n dB_s - \int_t^T Z_s dB_s \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

پس $Y^n \rightarrow Y$ و لذا نتیجه برقرار است.

۲.۵.۴ $-G$ - معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با زمان های نهایی ثابت

در این قسمت وجود و یکتایی جواب معادله (۴.۴) را تحت شرایط (H3) و (H4) بررسی می کنیم.

فرض کنید $B_G^p = S_G^p \times H_G^p$ و

$$\|(Y, Z)\|_{B_G^p} = [\mathbb{E} [\sup_{t \in [\cdot, T]} |\eta_t|^p]]^{\frac{1}{p}} + \left[\mathbb{E} \left[\left(\int_{\cdot}^T |\eta_s|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] \right]^{\frac{1}{p}}.$$

در این صورت $(B_G^p, \|(\cdot, \cdot)\|_{B_G^p})$ یک فضای باناخ است. فرضیات زیر را در نظر بگیرید.

H3. ثابت های $\gamma \geq 0, \mu \in \mathbb{R}, c \geq 0$ و $p > 1$ وجود دارند به طوری که

$$1. \quad \forall t, y, (z, z'), \quad |f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq \gamma |z - z'|$$

$$2. \quad \forall t, z, (y, y'), \quad (y - y') \cdot (f(t, y, z) - f(t, y', z)) \leq -\mu |y - y'|^2$$

$$3. \quad \forall y, z, \quad f(\cdot, \cdot, y, z) \in M_G^p(\cdot, T)$$

$$4. \quad \forall t, y, z, \quad |f(t, y, z)| \leq |f(t, \cdot, z)| + c(1 + |y|^p)$$

۵. برای هر t و z ، تابع $y \rightarrow f(t, y, z)$ پیوسته است.

H4. $\xi \in L_G^p(\mathcal{F}_T)$ ، به طوری که

$$\mathbb{E} [|\xi|^p] + \mathbb{E} \left[\left(\int_{\cdot}^T |f(s, \cdot, \cdot)|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] < \infty.$$

قضیه ۱۹.۴. [۲۳] فرض کنید $\xi \in L_G^p(\mathcal{F}_T)$ و f در ویژگی های (H3)، $1 - 3$ صدق کند. در این

صورت معادله (۴.۴) حداکثر دارای حل $(Y, Z, K) \in B_G^p \times L_G^p$ است.

قضیه ۲۰.۴. [۲۳] تحت فرضیات (H3) و (H4)، معادله (۴.۴) دارای جواب یکتای (Y, Z, K)

در فضای $B_G^p \times L_G^p$ است.

۳.۵.۴ G -معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با زمان های نهایی تصادفی

با توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۶.۳ یک معادله دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با زمان نهایی تصادفی τ به صورت

$$Y_t = \xi + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} g(s, Y_s, Z_s) d\langle B \rangle_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} Z_s dB_s - (K_{\tau} - K_{t \wedge \tau}), \quad (37.4)$$

یا به طور ساده تر

$$Y_t = \xi + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} Z_s dB_s - (K_{\tau} - K_{t \wedge \tau}), \quad (38.4)$$

تعریف می شود، که در آن $f(t, \omega, y, z) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

روشن است که اگر $t > \tau$ ، $Z_t = 0$. بعلاوه چون τ متناهی است از معادله (۳۸.۴) نتیجه می گیریم که اگر $t \geq \tau$ ، آن گاه $Y_t = \xi$.

در این قسمت وجود و یکتایی جواب معادله (۳۸.۴) را تحت فرضیاتی مشابه با G -BSDE با زمان های نهایی ثابت ارائه می کنیم. فرض کنید f در ویژگی های زیر صدق کند.

H5. ثابت های $\mu \in \mathbb{R}$ ، $\gamma \geq 0$ ، $c \geq 0$ ، $p > 1$ و $\kappa \in \{0, 1\}$ وجود دارند به طوری که

$$1. \quad \forall t, y, (z, z'), \quad |f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq \gamma |z - z'|$$

$$2. \quad \forall t, z, (y, y'), \quad (y - y') \cdot (f(t, y, z) - f(t, y', z)) \leq -\mu |y - y'|^2$$

$$3. \quad \forall y, z, \quad f(\cdot, \cdot, y, z) \in M_G^p(0, \tau)$$

$$4. \quad \forall t, y, z, \quad |f(t, y, z)| \leq |f(t, 0, z)| + c(\kappa + |y|^p)$$

۵. برای هر t و z ، تابع $f(t, y, z) \rightarrow y$ پیوسته است.

H6. $\xi \in L_G^p(\mathcal{F}_{\tau})$ عدد حقیقی ρ وجود دارد به طوری که $\rho > \gamma^2 - 2\mu$ و

$$\mathbb{E} \left[\kappa e^{\rho \tau} + \{e^{\rho \tau} + e^{p \rho \tau}\} |\xi|^p + \left(\int_0^{\tau} e^{\rho s} |f(s, 0, 0)|^2 ds \right)^p + \left(\int_0^{\tau} e^{(\rho/2)s} |f(s, 0, 0)| ds \right)^{2p} \right] < \infty.$$

قضیه ۲۱.۴. [۲۲] فرض کنید $\xi \in L_G^p(\mathcal{F}_{\tau})$ و f در ویژگی های (H5) و (H6) صدق کند. در این صورت معادله (۳۸.۴) حداکثر دارای یک جواب $(Y, Z, K) \in S_G^{\gamma, \alpha, \tau}(\mathbb{R}) \times H_G^{\gamma, \alpha}(\mathbb{R}) \times L_G^p(\mathcal{F}_{\tau})$ است.

۴.۵.۴ G -معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی با رشد درجه دوم و مقدار نهایی غیر کراندار

در این قسمت وجود جواب را برای G -BSDE با رشد درجه دوم و مقدار نهایی غیر کراندار، بررسی می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید f در معادله (۴.۴)، دارای رشدی خطی در y و رشد درجه دوم در z باشد. در حقیقت فرضیات زیر را داریم.

H7 $\alpha \geq 0$ ، $\beta \geq 0$ و $\gamma \geq 0$ وجود دارند به طوری که

$$\bullet \text{ برای هر } (y, z) \rightarrow f(t, y, z), t \in [0, T] \text{ پیوسته است،}$$

$$\bullet \forall t, y, z \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |f(t, y, z)| \leq \alpha + \beta|y| + \frac{\gamma}{2}|z|^2.$$

H8 فرض کنید

$$\mathbb{E} \left[e^{\gamma e^{\beta T} |\xi|} \right] < \infty.$$

$\forall y, z, f(\cdot, \cdot, y, z) \in M_G^\gamma(0, T)$ **H9**

$\exists \lambda > \gamma e^{\beta T}, \quad \mathbb{E} [e^{\lambda |\xi|}] < \infty$ **H10**

قضیه ۲۲.۴. [۲۱] فرض کنید فرضیات (H7)–(H10) برقرار باشند. در این صورت معادله (۴.۴) دارای حداقل یک جواب (Y, Z, K) در فضای $S_G^\gamma \times H_G^\gamma \times L_G^\gamma$ است.

۵.۵.۴ G -معادلات دیفرانسیل تصادفی بازگشتی یک-بعدی

در این قسمت وجود و یکتایی جواب را برای معادله (۴.۴) تحت شرایط زیر بررسی می‌کنیم.

$(f(t, \cdot, \cdot))_{t \leq T} \in H_G^\gamma$ **H11**

H12 ثابت $C \geq 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall (y, y', z, z'), \quad |f(t, \omega, y, z) - f(t, \omega, y', z')| \leq C(|y - y'| + |z - z'|),$$

$\forall y, z, f(\cdot, \cdot, y, z) \in M_G^\gamma(0, T)$ **H13**

$\xi \in L_G^\gamma(\mathcal{F}_T)$, **H14**

H15 تابع $b_k(y, z) := k(|y| + |z|)$ وجود دارد به طوری که

$$\forall (y, z, \cdot) \quad |f(t, \omega, y, z)| \leq |f(t, \omega, \cdot, \cdot)| + k(|y| + |z|),$$

H16 تابع $(y, z) \rightarrow f(t, \omega, y, z)$ پیوسته است.

قضیه ۲۳.۴. [۲۵] فرض کنید ویژگی‌های $(H11)$ – $(H14)$ برقرار باشند. در این صورت معادله (۴.۴) وابسته به (f, ξ) دارای جواب یکتای (Y, Z, K) خواهد بود.

قضیه ۲۴.۴. [۲۵] فرض کنید ویژگی‌های $(H13)$ – $(H16)$ برقرار باشند. در این صورت معادله (۴.۴) وابسته به (f, ξ) دارای یک جواب مینیمال است.

مراجع

- [1] Bauer, H. (2001). Measure and integration theory (Vol. 26). *Walter de Gruyter*.
- [2] Bismut, J.M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. Appl.* 44:384–404.
- [3] Bismut, J.M. (1976). Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. *SIAM J. Control Optim.* 14:419–444.
- [4] Briand, Ph. and Hu, Y. (2006). BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value. *Probab. Theor. Related Fields* 136:604–618.
- [5] Briand, Ph. and Hu, Y. (2008). Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions. *Probab. Theor. Related Fields* 141:543–567.
- [6] Briand, Ph. Delyon, B., Hu, Y., Pardoux, E., and Stoica, L. (2003). Lp solutions of BSDEs. *Stochastic Process. Appl.* 108:109–129.
- [7] Chen, S. (2010). L^p solutions of one-dimensional backward stochastic differential equations with continuous coefficients. *Stochastic Analysis and Applications*, 28(5), 820–841.
- [8] Dastranj, E., Maleki, M. A New Approach to the Stratonovich Integral. , Semnan, Iran, August 26-29 2014. University of Semnan.
- [9] El Karoui, N. Peng, S., and Quenez, M.C. (1997). Backward stochastic differential equations in Finance. *Math. Finance* 7:1–71.
- [10] Folland. G. B. (1982). Real analysis. *Springer Verlag*.
- [11] Hamadène, S. (2003). Multidimensional backward stochastic differential equations with uniformly continuous coefficients. *Bernoulli* 9(3):517–534.

- [12] Hu, M., Ji, S. Peng, S., Song, Y. (2014). Backward stochastic differential equations driven by G-Brownian motion. *Stochastic Processes and their Applications*, 124(1), 759-784.
- [13] Jeanblanc, M., Yor, M., and Chesney, M. (2009). Mathematical methods for financial markets. *Springer*.
- [14] Jia, G. (2008). A uniqueness theorem for the solution of backward stochastic differential equations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 346:439–444.
- [15] Jia, G. (2009). Some uniqueness results for one-dimensional BSDEs with uniformly continuous coefficients. *Stat. Probab. Lett.* 79:436–441.
- [16] Kobylanski, M. (2000). Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth. *Ann. Prob.* 28:558–602.
- [17] Krylov, N.V. (1985). Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations of the Second Order. *Reidel Publishing Company*, (Original Russian Version by Nauka, Moscow, 1985).
- [18] Lepeltier, J.P. and San Martin, J. (1997). Backward stochastic differential equations with continuous coefficient. *Statistics and Probability Letters* 32:425–430.
- [19] Li, X., Peng, S. (2011). Stopping times and related Ito's calculus with G-Brownian motion. *Stochastic Process. Appl*, 121 1492–1508.
- [20] Moharana, R. (2014). Review on Young's Inequality (Doctoral dissertation, NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ROURKELA).
- [21] Maleki, M., Dastranj, E., Arazi, A. Existence of Solution for G-BSDE with Quadratic Growth and Unbounded Terminal Value. , Yazd, Iran, August 25-29 2015. University of Yazd.
- [22] Maleki, M., Dastranj, E., Arazi, A. Stochastic Terminal Times in G-Backward Stochastic Differential Equations. , Yazd, Iran, August 25-29 2015. University of Yazd.
- [23] Maleki, M., Dastranj, E. G-BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FIXED TERMINAL TIMES. in *12th Seminar on Differential Equations and Dynamical System*, Tabriz, Iran, 27-29 May 2015 . University of Tabriz.

- [24] Maleki, M., Dastranj, E., Hejazi, R. L^p Solutions of G -Backward Stochastic Differential Equations with Continuous Coefficients *Cumhuriyet University, Faculty of Science, Science Journal (CSJ), Vol., No. (2015) ISSN: 1300-1949*. 2015.
- [25] Maleki, M., Dastranj, E. ONE-DIMENSIONAL G -BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS. in *12th Seminar on Differential Equations and Dynamical System*, Tabriz, Iran, 27-29 May 2015 . University of Tabriz.
- [26] Maleki, M., Dastranj, E., Shokri, F. G -Backward Stochastic Differential Equations with Random Terminal Times. in *International Conference on Research in Engineering, Science and Technology* , Istanbul, Turkey, 21 july 2015.
- [27] Øksendal, B. (2003). Stochastic differential equations (pp. 65-84). *Springer Berlin Heidelberg*.
- [28] Pardoux, E. and Peng, S. (1990). Adapted solution of backward stochastic equation. *Systems Control Lett.* 14:55–61.
- [29] Peng, S. (1992) A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *Stochastics and Stochastic Reports*, 38(2): 119–134.
- [30] Peng, S. (2004) Filtration Consistent Nonlinear Expectations and Evaluations of Contingent Claims. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, English Series 20(2), 1–24.
- [31] Peng, S. (2005) Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains, *Chin. Ann. Math.* 26B(2) ,159–184.
- [32] Peng, S. (2007). G -Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty. arXiv preprint arXiv:0711.2834.
- [33] Peng, S. (2007). G -expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Ito type. in: *Stochastic Analysis and Applications, in: Abel Symp., vol. 2, Springer Berlin*, pp. 541–567.
- [34] Peng, S. (2008). Multi-dimensional G -Brownian motion and related stochastic calculus under G -expectation. *Stochastic Processes and their applications*, 118(12), 2223–2253.

-
- [35] Peng, S. (2010). Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty. arXiv:1002.4546v1 [math.PR].
- [36] Rudin, W. (1991). Functional Analysis. 1991. *McGraw Hill*, New York.
- [37] Song, Y. (2011). Some properties on G-evaluation and its applications to G-martingale decomposition. *Sci. China Math*, 54 (2) 287–300.
- [38] Spreij, P. J. (2007). Stochastic integration. *Lecture Notes, May*.
- [39] Wilde, I. F. (2009). Stochastic Analysis–Notes. *Lecture Notes, King’s College, London*.
- [40] Yong, J., Zhou, X. (1999) Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer–Verlag.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

Partition of unity.....	افراز واحد
Expectation	امید
Conditional expectation	امید شرطی
Nonlinear expectation	امید غیرخطی
Ito's integral.....	انتگرال ایتو
Square integrable.....	انتگرال‌پذیر مرتبه دوم
Stochastic integral.....	انتگرال تصادفی
Probability measure.....	اندازه احتمال
Measurable	اندازه‌پذیر
Risk measure	اندازه ریسک

ب

Progressively measurable.....	به تدریج اندازه‌پذیر
Recursively	به طور بازگشتی
Continuously	به طور پیوسته

پ

Event	پیشامد
-------------	--------

ت

Random function	تابع تصادفی
Functional	تابعک
Linear functional.....	تابعک خطی
Smooth function.....	تابع هموار
Monotone function.....	تابع یکنوا
Estimate	تخمین

Priori estimate.....	تخمین قیاسی
Distribution	توزیع
Standard G-normal distribution	توزیع G -نرمال استاندارد
ث	
Lipschitz constant.....	ثابت لپشیتس
ج	
G -expectation	G -امید
G -framework.....	G -چارچوب
G -martingale	G -مارتینگل
Symmetric G -martingale	G -مارتینگل متقارن
ح	
G -Brownian motion	حرکت G -برآونی
Viscosity solution	حل چسبندگی
Adapted solution.....	حل سازگار
Maximal solution	حل ماگسیمال
Minimal solution	حل مینیمال
د	
Cauchy sequence	دنباله کوشی
ر	
Quadratic growth.....	رشد درجه دوم
ز	
Stopping times	زمان توقف
Sub-additivity.....	زیر-جمع‌پذیری
Finite ordered subset.....	زیرمجموعه مرتب متناهی
س	
σ -Field	σ -میدان
ش	
Vector lattice.....	شبکه برداری
Seminorm	شبه نرم
Terminal condition.....	شرط نهایی
ض	

Coefficient	ضریب
Modulus of continuity	ضریب پیوستگی
ف	
Quadratic variation process	فرآیند با تغییرات مرتبه دوم
Step process	فرآیند پله‌ای
Stochastic process	فرآیند تصادفی
Increasing process	فرآیند صعودی
Canonical process	فرآیند کانونی
Ito's formula	فرمول ایتو
Null space	فضای پوچ
Completion space	فضای تکمیل
Quotient space	فضای خارج قسمتی
Normed space	فضای نرم‌دار
Filtration	فیلتر
Natural filtration	فیلتر طبیعی
ق	
Predictable	قابل پیش‌بینی
Comparison theorem	قضیه مقایسه
G-martingale representation theorem	قضیه نمایش G -مارتینگل‌ها
Dominated convergence theorem	قضیه همگرایی تسلطی
Diameter	قطر
م	
Local martingale	مارتینگل موضعی
Random variable	متغیر تصادفی
Related stochastic calculus	محاسبات تصادفی وابسته
Convex	محدب
Independent	مستقل
Path	مسیر
Parabolic partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی سهمی‌وار
Terminal Value	مقدار نهایی
Concave	مقعر

Generator.....	مولد
	ن
Norm.....	نرم
Contraction mapping.....	نگاشت انقباضی
Increment.....	نمو
	ه
Identically distributed.....	هم‌توزیع
Weak convergence.....	همگرایی ضعیف

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Adapted solution..... حل سازگار

C

Canonical process فرآیند کانونی

Cauchy sequence دنباله کوشی

Coefficient..... ضریب

Comparison theorem..... قضیه مقایسه

Completion space..... فضای تکمیل

Concave..... مقعر

Conditional expectation امید شرطی

Continuously به طور پیوسته

Contraction mapping..... نگاشت انقباضی

Convex محدب

D

Diameter..... قطر

Distribution..... توزیع

Dominated convergence theorem قضیه همگرایی تسلطی

E

Estimate تخمین

Event..... پیشامد

Expectation امید

F

Filtration	فیلتر
Finite ordered subset	زیرمجموعه مرتب متناهی
Functional	تابعک

G

G -Brownian motion	حرکت G -برآونی
Generator	مولد
G -expectation	G -امید
G -framework	G -چارچوب
G -martingale	G -مارتینگل
G -martingale representation theorem	قضیه نمایش G -مارتینگل‌ها

I

Identically distributed	هم‌توزیع
Increasing process	فرآیند صعودی
Increment	نمو
Independent	مستقل
Ito's formula	فرمول ایتو
Ito's integral	انتگرال ایتو

L

Linear functional	تابعک خطی
Lipschitz constant	ثابت لپشیتس
Local martingale	مارتینگل موضعی

M

Maximal solution	حل ماکسیمال
Measurable	اندازه‌پذیر
Minimal solution	حل مینیمال
Modulus of continuity	ضریب پیوستگی
Monotone function	تابع یکنوا

N

Natural filtration.....	فیلتر طبیعی
Nonlinear expectation	امید غیرخطی
Norm.....	نرم
Normed space.....	فضای نرم‌دار
Null space.....	فضای پوچ

P

Parabolic partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی سهمی‌وار
Partition of unity.....	افراز واحد
Path.....	مسیر
Predictable	قابل پیش‌بینی
Probability measure	اندازه احتمال
Progressively measurable.....	به تدریج اندازه‌پذیر
Priori estimate.....	تخمین قیاسی

Q

Quadratic growth.....	رشد درجه دوم
Quadratic variation process	فرآیند با تغییرات مرتبه دوم
Quotient space.....	فضای خارج قسمتی

R

Random function	تابع تصادفی
Random variable.....	متغیر تصادفی
Recursively	به طور بازگشتی
Related stochastic calculus.....	محاسبات تصادفی وابسته
Risk measure	اندازه ریسک

S

Seminorm	شبه نرم
σ -field.....	σ -میدان

Smooth function.....	تابع هموار.....
Square integrable.....	انتگرال‌پذیر مرتبه دوم.....
Standard G-normal distribution.....	توزیع G -نرمال استاندارد.....
Step process.....	فرآیند پله‌ای.....
Stochastic integral.....	انتگرال تصادفی.....
Stochastic process.....	فرآیند تصادفی.....
Stopping times.....	زمان توقف.....
Sub-additivity.....	زیر-جمع‌پذیری.....
Symmetric G-martingale.....	G -مارتینگل متقارن.....

T

terminal condition.....	شرط نهایی.....
terminal Value.....	مقدار نهایی.....

V

Vector lattice.....	شبکه برداری.....
Viscosity solution.....	حل چسبندگی.....

W

Weak Convergence.....	همگرایی ضعیف.....
-----------------------	-------------------

نمایه

هموار، ۳۱	Σ - میدان
تبدیل گیرسانو، ۳۷	بورل، ۷
توزیع متغیر تصادفی، ۸	σ - میدان تولید شده توسط
	تابع Y ، ۸
ح	خانواده $\mathcal{L}$ ، ۷
حرکت براونی استاندارد، ۱۱	σ - میدان قابل پیش بینی، ۱۳
حل	ا
سازگار، ۱۸	امید ریاضی، ۸
کراندار، ۱۸	امید Y به شرط $\mathcal{D}$ ، ۱۱
مینیمال، ۱۸	اندازه احتمال، ۶، ۳۷
د	اندازه پذیر، ۷
دنباله کوشی، ۲۳	ب
دنباله موضعی، ۱۳	با تغییر متناهی، ۱۰
ر	بازه تصادفی، ۱۳
رشد	بورل اندازه پذیر، ۸
خطی، ۱۸	به طور یکنواخت انتگرال پذیر، ۱۳
درجه دوم، ۱۸	پ
ز	پیشامد، ۷
زمان توقف، ۱۳	پیشامدهای مستقل، ۹
س	پیوسته
سازگار، ۱۰	لیپشیتس، ۱۸
ص	ت
صعودی مقعر، ۳۸	تابع
	تصادفی، ۱۸

ف

فرآیند

اندازه‌پذیر، ۱۹

بازگشتی، ۳۱

به تدریج اندازه‌پذیر، ۲۳

سازگار، ۲۰

فرآیند تصادفی

به تدریج اندازه‌پذیر، ۱۰

پیوسته راست، ۹

صعودی، ۱۰

صعودی پیوسته، ۱۰

قابل پیش بینی، ۱۳

فرآیند وینر، ۱۱

فرآیند وینر n -بعدی، ۱۱

فضای احتمال، ۷

فضای احتمال کامل، ۷

فیلتر، ۱۰

فیلتر طبیعی، ۱۰

ق

قضیه

مقایسه، ۱۸

ک

کدلاگ، ۹

م

مارتینگل، ۱۲

موضعی، ۱۳، ۲۴

متغیر تصادفی، ۸

مجموعه

تصادفی، ۲۳

 P -پوچ، ۱۹

معادله تصادفی بازگشتی ریکاتی، ۱۸

موضعا با تغییر متناهی، ۱۴

 σ -میدان، ۶

ن

نامساوی

یانگ، ۳۳

BDG، ۲۳

نیم مارتینگل پیوسته، ۱۴

و

واریانس، ۹

ه

همگرایی

قوی، ۲۱

ی

یکنوا، ۲۱

Surname: Maleki

Name: Mojtaba

Title: L^p Solutions of One-Dimensional Backward Stochastic Differential Equations with Continuous Coefficients

Supervisor: E.Dastranj

Advisor: R.Hejazi

Degree: Master of Science

Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Analysis

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2015

Number of pages: 122

Keywords: Backward stochastic differential equations, L^p solution, G -expectation, G -normal distribution, G -Brownian motion, Ito's stochastic calculus, Ito's integral, Ito's formula, G -martingale.

Abstract

In this thesis, we study L^p solution of one-dimensional backward stochastic differential equations with continuous coefficients. In chapter 2 we study one-dimensional backward stochastic differential equations in classical case. We show that if the generator f is uniformly continuous in (y, z) , uniformly with respect to (t, ω) , and if the terminal value $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ with $1 < p \leq 2$, the backward stochastic differential equation has a unique L^p solution. In chapter 3 we introduce a notion of nonlinear expectation, " G -expectation". We also introduce one-dimensional G -Brownian motion. We then establish the related stochastic calculus, especially stochastic integrals of Ito's type with respect to our G -Brownian motion and derive the related Ito's formula. We have also given the existence and uniqueness of stochastic differential equation under our G -expectation. In chapter 4 we study the backward stochastic differential equations driven by G -Brownian motion. Under Lipschitz conditions of f and g in Y and Z , the existence and uniqueness of the solution (Y, Z, K) for BSDE in the G -framework is proved.



University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

**L^p Solutions of One-Dimensional Backward
Stochastic Differential Equations with
Continuous Coefficients**

Supervisor
E.Dastranj

Advisor
R.Hejazi

by
Mojtaba Maleki

2015