به نام خدا

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تجزیه در حوزه‌های صحیح و توسیع‌های آن‌ها

سینا افتخاری

استاد راهنما

دکتر مهدی‌رضا خورسندی

آذر ۱۳۹۴

تقدیم به مادرم

سپاس‌گزاری...

از جناب آقای دکتر مهدی‌رضا خورسندی، استاد ارجمندم، به‌خاطر همه‌ی زحمات و راهنمایی‌هایشان در تهیه‌ی این پایان‌نامه، تشکر می‌کنم. همچنین از آقایان، دکتر ابراهیم هاشمی و دکتر سیدحیدر جعفری که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، سپاس‌گزارم.

سینا افتخاری
آذر ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **سینا افتخاری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **جبر** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تجزیه در حوزه‌های صحیح و توسیع‌های آن‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی‌رضا خورسندی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق است، و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" یا "Shahrood University of Technology" به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سینا افتخاری
آذر ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

این پایان‌نامه به مطالعه‌ی برخی از رده‌های حوزه صحیح می‌پردازد که حاصل از تعمیم خواص مرتبط با تجزیه‌ی عنصری حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا هستند. همچنین رفتار این رده‌ها تحت دو توسیع چندجمله‌ای و موضعی‌سازی مطالعه می‌شود.

رده‌های مورد بحث در این پایان‌نامه عبارت‌اند از حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا، حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار، حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی، حوزه‌های idf، حوزه‌های ACCP و حوزه‌های اتمی. پس از بررسی رابطه‌ی بین این رده‌ها با ارایه‌ی مثال‌های نقض متنوع، ابتدا رفتار این خواص تحت توسیع موضعی‌سازی بررسی می‌شود. خواهیم دید، هرچند هیچ یک از این خواص در حالت کلی تحت موضعی‌سازی نه صعود می‌کنند و نه نزول، اما شرایطی خاص وجود دارند که با برقراری آن‌ها، این اتفاق رخ می‌دهد. سپس همین کار برای توسیع چندجمله‌ای انجام می‌شود. مشاهده خواهیم کرد، همه‌ی این خواص تحت توسیع چندجمله‌ای نزول می‌کنند و به‌علاوه سه رده‌ی حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی، تجزیه‌ی کران‌دار و ACCP تحت چندجمله‌ای‌ها صعود نیز می‌کنند. همچنین رفتار این رده‌ها تحت اجتماع‌های جهت‌دار نیز مطالعه می‌شود و با استفاده از آن، احکام قبلی به چندجمله‌ای‌های با تعداد دلخواه متغیر تعمیم داده می‌شود. در نهایت مثال‌های نقضی ارایه می‌شوند که نشان می‌دهند، رده‌های حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا، اتمی و idf تحت توسیع چندجمله‌ای صعود نمی‌کنند.

کلمات کلیدی: حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا، حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا، حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی، حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار، حوزه‌ی ACCP، حوزه‌ی idf، حوزه‌ی اتمی، ساخت $D + M$، موضعی‌سازی، توسیع ساکن، مجموعه‌ی ضربی شکافنده، توسیع چندجمله‌ای، اجتماع جهت‌دار

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

یکی از مهم‌ترین رده‌های حوزه‌های صحیح که به‌طور مفصل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا هستند. صورت‌های معادل متنوعی برای تعریف این رده وجود دارند که با تضعیف هر یک از آن‌ها می‌توان به رده‌های بزرگتری از حوزه‌های صحیح رسید.

حال تعریف متداول حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا که مورد نظر ما است و همچنین تعاریف بقیه‌ی رده‌هایی که در این پایان‌نامه مطالعه می‌شوند را ذکر می‌کنیم. فرض کنید D یک حوزه‌ی صحیح باشد. در این صورت D را یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا می‌گوییم، هرگاه هر عنصر ناصفر و غیریکه از آن را بتوان با تقریب یک جایگشت و شریک بودن، به‌طور یکتا به صورت حاصل‌ضربی از عناصر تحویل‌ناپذیر نوشت. اگر صرفاً هر یک از عناصر غیریکه و ناصفر D را بتوان به‌صورت حاصل‌ضربی از عناصر تحویل‌ناپذیر نوشت آن‌گاه D را یک حوزه‌ی اتمی می‌گوییم. در این وضع، به اختصار می‌گوییم هر یک از عناصر ناصفر و غیریکه از D دارای ''تجزیه‌ی اتمی'' هستند. اگر به‌علاوه، برای هر عنصر ناصفر و غیریکه از D مثل x طول هر دو تجزیه‌ی اتمی از x برابر باشند، آن‌گاه D را یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا می‌گوییم و اگر مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌های اتمی x متناهی باشند، D را یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار می‌گوییم. واضح است که رده‌های حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا و حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار بین دو رده‌ی حوزه‌های اتمی و حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا قرار دارند. اگر D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا باشد، آن‌گاه به‌سادگی می‌توان دید، هر عنصر ناصفر و غیریکه از D با تقریب شریک بودن تنها تعدادی متناهی مقسوم‌علیه و به‌ویژه تعدادی متناهی مقسوم‌علیه تحویل‌ناپذیر دارد. این دو خاصیت، به ترتیب معرف حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی و حوزه‌های idf هستند. رده‌ی دیگری که در این‌پایان‌نامه مورد مطالعه قرار می‌گیرد، حوزه‌هایی هستند که مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اصلی آن‌ها در شرط زنجیری صعودی صدق می‌کنند. این حوزه‌ها را حوزه‌های ACCP می‌گوییم. این رده‌ها برای نخستین بار به‌طور منسجم در مرجع [۲] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

سوالی طبیعی که پس از معرفی هر رده از یک ساختار جبری مطرح می‌شود، رفتار این رده‌ها تحت توسیع‌های متداول آن ساختار جبری است. از جمله توسیع‌های مهم حوزه‌های صحیح و به‌طور کلی‌تر حلقه‌های جابجایی، می‌توان از توسیع چندجمله‌ای، سری‌های توانی، موضعی‌سازی و توسیع‌های صحیح نام برد. در این پایان‌نامه، مسایل صعود و نزول خواص تجزیه را تحت دو توسیع موضعی‌سازی و چندجمله‌ای مطالعه می‌کنیم. در ادامه، مطالب فصل‌های این‌پایان‌نامه را مرور می‌کنیم.

در فصل ۱، ارتباط بین رده‌هایی که ذکر کردیم، بررسی می‌شود و نشان می‌دهیم روابط زیر بین این رده‌ها وجود دارد.

$$\begin{tikzcd} & \text{تجزیه‌ی نیم‌یکتا} \arrow[dr] & & & \\ \text{تجزیه‌ی یکتا} \arrow[ur] \arrow[r] & \text{تجزیه‌ی متناهی} \arrow[r] \arrow[d] & \text{تجزیه‌ی کران‌دار} \arrow[r] & \text{ACCP} \arrow[r] & \text{اتمی} \\ & \text{idf} & & & \end{tikzcd}$$

به‌ویژه مثال‌های نقضی ارایه خواهند شد که نشان می‌دهند تمام شمول‌های شکل بالا سره هستند. همچنین در این فصل ابزار مهمی موسوم به توسیع یا ساخت $D + M$ معرفی می‌شود که از آن برای ساختن بیش‌تر مثال‌های نقض استفاده خواهیم کرد. منبع اصلی مطالب این فصل، مرجع [۲] است. در بخش ۲.۲، به‌علاوه از مرجع [۷] نیز استفاده شده است. همچنین منبع مورد استفاده برای مثال نقض زیربخش ۱.۵.۲، مرجع [۱۴] است.

در فصل ۳، مسایل صعود و نزول خواص تجزیه تحت موضعی‌سازی مطالعه می‌شوند. خواهیم دید، هیچ یک از خواص تجزیه الزاماً تحت موضعی‌سازی نه صعود می‌کنند و نه نزول. اما حالت‌هایی وجود دارد که در آن‌ها خواص تجزیه تحت موضعی‌سازی صعود یا نزول می‌کنند که در ادامه‌ی فصل ۳ به مطالعه‌ی آن‌ها خواهیم پرداخت. مطالب این فصل از مرجع [۳] استخراج شده‌اند.

در فصل ۴، رفتار خواص تجزیه تحت توسیع چندجمله‌ای مطالعه می‌شود. ابتدا در بخش ۱.۴ خواهیم دید، همه‌ی خواص تجزیه، تحت توسیع چندجمله‌ای نزول می‌کنند. در بخش ۲.۴ مشاهده خواهیم کرد حوزه‌های ACCP، حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا و همچنین حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی تحت توسیع چندجمله‌ای صعود می‌کنند. در بخش ۳.۴ مساله‌ی صعود خواص تجزیه تحت اجتماع‌های جهت‌دار خواهیم پرداخت و با استفاده از آن خواهیم دید، هر یک از خواص تجزیه که تحت توسیع چندجمله‌ای با یک متغیر صعود کند، تحت توسیع چندجمله‌ای با تعداد دلخواه متغیر نیز صعود می‌کند. سپس در بخش‌ها ۴.۴، ۵.۴ و ۶.۴ مثال‌های نقضی ارایه خواهند شد که به ترتیب نشان می‌دهند، حوزه‌های اتمی، حوزه‌های idf و حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا تحت توسیع چندجمله‌ای صعود نمی‌کنند. مطالب بخش‌های ۱.۴ و ۲.۴ از مرجع [۲]، بخش ۳.۴ از مرجع [۳]، بخش ۴.۴ از مراجع [۲] و [۱۹] و مطالب بخش ۶.۴ از مرجع [۸] استخراج شده‌اند. مثال نقضی که نشان می‌دهد حوزه‌های idf لزوماً تحت چندجمله‌ای‌ها صعود نمی‌کنند ابتدا در مرجع [۱۶] ارایه شد. ما در بخش ۵.۴، ابتدا شرطی لازم و کافی برای صعود خاصیت idf را تحت چندجمله‌ای‌ها اثبات می‌کنیم و در ادامه از آن برای ساختن مثال نقضی دیگر استفاده می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مفاهیم مقدماتی در مورد حوزه‌ها

در سراسر این پایان‌نامه، همه‌ی حلقه‌ها جابجایی و یکدار فرض شده‌اند. همچنین به جای ''حوزه‌ی صحیح'' صرفاً از واژه‌ی ''حوزه'' استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید R یک حلقه باشد. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول R را با $\mathrm{Spec}(R)$، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکزیمال(بیشین) R را با $\mathrm{Max}(R)$ و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول-مینیمال شامل یک ایده‌آل از R مانند I را با $\mathrm{Min}(I)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه R را موضعی می‌گوییم، هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکزیمال داشته باشد.[۱]

برای سادگی در نگارش، گاهی نیاز به ساختارهایی شبیه مجموعه‌ها داریم که در آن‌ها تکرار عناصر مجاز باشد. چنین ساختارهایی معمولاً چندمجموعه[۲] نامیده می‌شوند. ما در این پایان‌نامه به جای ''چندمجموعه'' از واژه‌ی ''گردایه'' استفاده خواهیم کرد. تعریف دقیق این مفهوم به صورت زیر است.

تعریف ۱.۱.۱. یک دوتایی مانند (X, f) که در آن X یک مجموعه و $f\colon X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ یک تابع است را یک گردایه می‌گوییم. برای هر $x \in X$، مقدار $f(x)$ را چندگانگی[۳] x می‌گوییم. همچنین مجموعه‌ی عناصری از X که مقدار f روی آن‌ها ناصفر است را محمل[۴] گردایه می‌گوییم. یک گردایه را متناهی می‌گوییم، هرگاه محمل آن متناهی باشد.

۱. فرض کنید $A = (X, f)$ یک گردایه باشد و $x \in X$. می‌گوییم x عضو A است و می‌نویسیم $x \in A$، هرگاه $f(x) \neq 0$.

۲. فرض کنید $A = (X, f)$ و $B = (X, g)$ دو گردایه باشند. می‌گوییم B یک زیرگردایه از A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$، هرگاه برای هر $x \in X$، $g(x) \leq f(x)$. همچنین در این وضع، گردایه‌ی

---

[۱] در برخی از مراجع برای موضعی بودن، شرط نوتری بودن نیز لحاظ می‌شود، اما ما در این‌جا این شرط را لازم نمی‌دانیم.

[۲] multiset

[۳] multiplicity

[۴] support

(X,g') که در آن برای هر $x \in X$، $g'(x) = f(x) - g(x)$ را تفاضل گردایه‌ی B از A می‌نامیم و با $A \setminus B$ نمایش می‌دهیم.

۳. فرض کنید $A = (X,f)$ و $B = (X,g)$ دو گردایه باشند. گردایه‌ی (X,h) را که در آن، برای هر $x \in X$، $h(x) = \max(f(x), g(x))$ را اجتماع دو گردایه‌ی A و B می‌نامیم و با $A \cup B$ نمایش می‌دهیم.

۴. فرض کنید $A = (X,f)$ و $B = (X,g)$ دو گردایه باشند. گردایه‌ی $C = (X,i)$ را که در آن برای هر $x \in X$، $i(x) = f(x) + g(x)$ را جمع دو گردایه‌ی A و B می‌نامیم و با $A \uplus B$ نمایش می‌دهیم. همچنین در این وضع به اختصار خواهیم گفت $\{A|B\}$ یک افراز از گردایه‌ی C است.

توجه کنید که قسمت‌های ۳ و ۴ از تعریف قبل را می‌توان به شکلی بدیهی به هر تعداد متناهی از گردایه‌ها تعمیم داد. همچنین در صورت نیاز و مانند مجموعه‌ها، یک گردایه را با فهرست کردن عناصر محملش درون $\{\}$ مشخص خواهیم کرد. در این پایان‌نامه، مجموعه‌ای که عناصر یک گردایه از آن انتخاب می‌شوند، همواره یک حلقه(در واقع یک حوزه) است. فرض کنید R یک حلقه باشد و $T \subseteq R$. منظور از یک گردایه از عناصر T، یک گردایه مانند (R,f) است که در آن برای هر $x \in R \setminus T$، $f(x) = 0$.

حال مفاهیم مقدماتی درباره‌ی حوزه‌ها را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد.

۱. مجموعه‌ی عناصر یکه‌ی[۵] D را با $U(D)$ و مجموعه‌ی عناصر ناصفر D را با D^* نمایش می‌دهیم. به‌علاوه هر عنصر ناصفر از D که یکه نباشد را صرفاً غیریکه می‌گوییم و مجموعه‌ی چنین عناصری را با $D^\#$ نمایش می‌دهیم.

۲. فرض کنید $a, b \in D^*$. در این صورت می‌گوییم a، b را در D عاد می‌کند و می‌نویسیم $a \mid b$ (یا برای تاکید بیش‌تر $a \underset{D}{|} b$)، هرگاه عنصری مانند $c \in D$ موجود باشد که $ac = b$.

۳. برای هر $a, b \in D$، می‌گوییم a با b در D شریک[۶] است و می‌نویسیم $a \overset{D}{\sim} b$، هرگاه عنصری مثل $u \in U(D)$ موجود باشد که $a = ub$. توجه کنید که شریک بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. همچنین توجه کنید $a \overset{D}{\sim} b$ اگر و تنها اگر $aD = bD$ اگر و تنها اگر $a \underset{D}{|} b$ و $b \underset{D}{|} a$.

۴. فرض کنید $a \in D^\#$. در این صورت:

(آ) a را تحویل‌ناپذیر[۷] یا اتم[۸] می‌گوییم، هرگاه برای هر $b, c \in D^*$، اگر $a = bc$، آن‌گاه $b \in U(D)$ یا $c \in U(D)$. مجموعه‌ی عناصر تحویل‌ناپذیر D را با $\mathcal{A}(D)$ نمایش

[۵] Unit
[۶] Associated
[۷] Irreducible
[۸] Atom

می‌دهیم. به‌علاوه هر عنصر غیریکه از D را که تحویل‌ناپذیر نباشد تحویل‌پذیر می‌گوییم و مجموعه‌ی چنین عناصری را با $\mathrm{Red}(D)$ نمایش می‌دهیم.

(ب) a را اول[۹] می‌گوییم، هرگاه برای هر $b,c \in D^*$، اگر $a \mid bc$، آن‌گاه $a \mid b$ یا $a \mid c$. مجموعه‌ی عناصر اول D را با $\mathcal{P}(D)$ نمایش می‌دهیم. به‌سادگی می‌توان دید، $a \in \mathcal{P}(D)$ اگر و تنها اگر aD ایده‌آلی اول از D باشد.

گزاره ۳.۱.۱. هر عنصر اول از یک حوزه، تحویل‌ناپذیر است.

برهان. فرض کنید D یک حوزه باشد و $x \in \mathcal{P}(D)$ و فرض کنید $x = yz$ که در آن $y,z \in D^*$. در این صورت بنا به تعریف عنصر اول و بدون از دست رفتن کلیت $x \mid y$ و لذا $(y/x)z = ۱$ و لذا $z \in U(D)$. بنابراین $x \in \mathcal{A}(D)$. □

عکس گزاره‌ی قبل درست نیست. برای مثال فرض کنید $D = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$. در این صورت $X \in \mathcal{A}(D)$، اما $X \notin \mathcal{P}(D)$، زیرا $X \mid (۲X)(\frac{۱}{۲}X)$، اما $X \nmid ۲X$ و $X \nmid \frac{۱}{۲}X$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد. D را یک حوزه‌ی AP می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{A}(D) = \mathcal{P}(D)$.

نمادگذاری ۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد، T زیرمجموعه‌ای متناهی از R باشد و A گردایه‌ای از عناصر T باشد. قرار می‌دهیم:

$$\Gamma(A) := \begin{cases} \prod_{x \in A} x & A \neq \emptyset \\ ۱ & A = \emptyset \end{cases}$$

گزاره ۶.۱.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $a_۱, \ldots, a_n \in D^*$.

۱. فرض کنید $p \in \mathcal{P}(D)$ و $a_۱, \ldots, a_n \in D^*$. در این صورت اگر $p \mid a_۱ \cdots a_n$، آن‌گاه $۱ \leq i \leq n$ ای موجود است که $p \mid a_i$.

۲. برای هر گردایه‌ی متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D)$ مانند A، اگر $\Gamma(A) \mid a_۱ \cdots a_n$، آن‌گاه افرازی از A مثل $\{A_۱ | \cdots | A_n\}$ وجود دارد، به‌طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\Gamma(A_i) \mid a_i$.

۳. فرض کنید A و B دو گردایه‌ی متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D)$ باشند. در این صورت اگر $\Gamma(A) \underset{D}{\mid} \Gamma(B)$، آن‌گاه $|A| \leq |B|$. به ویژه اگر $\Gamma(A) \overset{D}{\sim} \Gamma(B)$، آن‌گاه $|A| = |B|$.

۴. فرض کنید A گردایه‌ای ناتهی و متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D)$ باشد و $\prod_{i=۱}^n x_i = \Gamma(A)$، که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $x_i \in D^*$. در این صورت افرازی از A مثل $\{A_۱|A_۲|\cdots|A_n\}$ موجود است، به‌طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $x_i \overset{D}{\sim} \Gamma(A_۱)$. به ویژه اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$، $x_i \in \mathcal{A}(D)$، آن‌گاه برای هر $۱ \leq i \leq n$، A_i گردایه‌ای تک‌عضوی و متشکل از یک عنصر اول است.

---

[۹] Prime

برهان. ۱. حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حالت $n=1$ بدیهی است و حالت $n=2$ همان تعریف عنصر اول است. حال فرض کنید $k\in\mathbb{N}$ و فرض کنید حکم برای $n=k$ برقرار باشد و حکم را برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم. قرار دهید $a'=a_1a_2$. در این صورت $p\mid a'a_3\cdots a_{k+1}$ و لذا بنا به فرض استقرا یا برای $3\le j\le n$ ای داریم $p\mid a_j$ و یا $p\mid a'$ که در این وضع، بنا به پایه‌ی استقرا(یا همان تعریف اول بودن)، $p\mid a_1$ یا $p\mid a_2$. پس در هر صورت $1\le i\le k+1$ ای موجود است که $p\mid a_i$.

۲. حکم را با استقرا روی اندازه‌ی A ثابت می‌کنیم. حالت $|A|=0$ بدیهی است و حالت $|A|=1$ در قسمت ۱ ثابت شد. حال فرض کنید $k\in\mathbb{N}$ و فرض کنید حکم برای $|A|=k$ برقرار باشد و حکم را برای $|A|=k+1$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $p\in A$. در این صورت $p\mid a_1\cdots a_n$ و لذا بنا به قسمت ۱ و بدون از دست رفتن کلیت $p\mid a_1$ و لذا

$$\Gamma(A\setminus\{p\})\mid(\frac{a_1}{p})(a_2)\cdots(a_n)$$

و در نتیجه بنا به فرض استقرا، افرازی از $A\setminus\{p\}$ مانند $\{B_1|\cdots|B_n\}$ موجود است به‌طوری که $\Gamma(B_1)\mid\frac{a_1}{p}$ و برای هر $2\le i\le n$، $\Gamma(B_i)\mid a_i$. اکنون کافی است توجه کنید، $p(\Gamma(B_1))\mid a_1$ و در نتیجه افراز مطلوب برابر است با $\{B_1\cup\{p\}|\cdots|B_n\}$.

۳. فرض کنید $B=\{p_1,\dots,p_n\}$. بنا به قسمت ۲، افرازی از A مانند $\{A_1|\cdots|A_n\}$ موجود است، به‌طوری که برای هر $1\le i\le n$، $\Gamma(A_i)\underset{D}{|}p_i$ و چون $p_i\in\mathcal{A}(D)$، لذا $|A_i|\le 1$. بنابراین

$$|A|=|A_1|+\cdots+|A_n|\le n=|B|$$

۴. بنا به قسمت ۲، افرازی از A مثل $\{A_1|A_2|\cdots|A_n\}$ موجود است، به‌طوری که برای هر $1\le i\le n$، $\Gamma(A_i)\underset{D}{|}x_i$. بنابراین

$$1\overset{D}{\sim}\frac{\Gamma(A)}{\prod_{i=1}^n\Gamma(A_i)}\overset{D}{\sim}\prod_{i=1}^n\frac{x_i}{\Gamma(A_i)}$$

و لذا برای هر $1\le i\le n$، $x_i/\Gamma(A_i)\in U(D)$ و در نتیجه $x_i\overset{D}{\sim}\Gamma(A_i)$.

□

۲.۱ حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا

همه‌ی رده‌هایی از حوزه‌ها که در فصل ۱ معرفی می‌شوند، حاصل از تعمیم حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا هستند. تعریف متداول این رده به‌صورت زیر است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد. در این صورت D را یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا می‌گوییم، هرگاه هر عنصر از $D^\#$ را بتوان به صورت حاصل‌ضربی از عناصر تحویل‌ناپذیر نوشت و به‌علاوه این نمایش، با تقریب یک جایگشت و شریک بودن مولفه‌ها یکتا باشد. یعنی اگر $a_1\cdots a_n=b_1\cdots b_m$

که در آن a_iها و b_iها همگی تحویل‌ناپذیرند، آن‌گاه $m = n$ و به‌علاوه جایگشتی مثل $\sigma \in S_n$ موجود باشد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \overset{D}{\sim} b_{\sigma(i)}$.

گزاره ۲.۲.۱. هر عنصر تحویل‌ناپذیر از یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا، عنصری اول است (یا به‌طور معادل، هر حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا یک حوزه‌ی AP است).

برهان. [۹، گزاره ۱۰.۳.۸] □

گزاره‌ی زیر تعریف معادلی از حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا را ارایه می‌کند.

گزاره ۳.۲.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد. D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است اگر و تنها اگر هر عنصر از $D^\#$ را بتوان به‌صورت حاصل‌ضربی از عناصر اول نوشت.

برهان. ($\Leftarrow$) بلافاصله از گزاره‌ی ۲.۲.۱ نتیجه می‌شود.
($\Rightarrow$) از قسمت‌های ۳ و ۴ از گزاره‌ی ۶.۱.۱ نتیجه می‌شود. □

۳.۱ حلقه‌های نوتری

در این بخش چند قضیه‌ی مشهور درباره‌ی حلقه‌های نوتری را یادآوری می‌کنیم. اولین قضیه، قضیه‌ی اشتراک کرول نام دارد که ابتدا آن را برای حلقه‌های دلخواه بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۱ (قضیه‌ی اشتراک کرول). فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} I^n = \{0\}$ اگر و تنها اگر برای هر $a, x \in R$، اگر $1 - a \in I$ و $ax = 0$، آن‌گاه $x = 0$.

برهان. [۱۵، قضیه ۲۳.۲] □

در حالت خاصی از قضیه‌ی قبل که در آن R یک حوزه است، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۲.۳.۱. فرض کنید D یک حوزه‌ی نوتری باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل سره از D مانند I داریم $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} I^n = \{0\}$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید R یک حلقه و P ایده‌آلی اول از R باشد. ارتفاع P را برابر با

$$\sup\{n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \mid \text{زنجیری از ایده‌آل‌های اول } R \text{ مانند } P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P \text{ موجود باشد}\}$$

تعریف می‌کنیم و با $\mathrm{ht}(P)$ نمایش می‌دهیم. همچنین بعد کرول R را برابر با

$$\sup\{\mathrm{ht}(P) \mid P \in \mathrm{Spec(R)}\}$$

تعریف می‌کنیم و با $\dim(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴.۳.۱ (قضیه‌ی ایده‌آل اصلی کرول). فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد و $a \in R^{\#}$. در این صورت برای هر ایده‌آل مینیمال اول از aR مانند P داریم $\operatorname{ht}(P) \leq ۱$. در حالت خاص اگر R حوزه باشد، آن‌گاه $\operatorname{ht}(P) = ۱$.

برهان. [۲۰، قضیه ۲.۱۵] □

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و I ایده‌آلی سره از R باشد. در این صورت $\operatorname{Min}(I)$ مجموعه‌ای متناهی است.

برهان. [۹، نتیجه ۲۲.۵.۱۵] □

۴.۱ موضعی‌سازی

ابتدا مفاهیم اولیه‌ی مرتبط با موضعی‌سازی را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید R یک حلقه باشد و $S \subseteq R$. S را یک مجموعه‌ی ضربی می‌گوییم، هرگاه نسبت به ضرب بسته باشد و $۱ \in S$. رابطه‌ی $\approx$ را روی $R \times S$ به صورت این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر $(a,s),(b,t) \in R \times S$، $(a,s) \approx (b,t)$ هرگاه عنصری مثل $u \in S$ موجود باشد که $u(at - bs) = ۰$. می‌توان دید، $\approx$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. کلاس هم ارزی شامل (a,b) را با $\frac{a}{b}$ و مجموعه‌ی $R \times S$ به پیمانه‌ی این رابطه را با R_S نمایش می‌دهیم. می‌توان بررسی کرد، R_S همراه اعمال جمع و ضرب زیر یک حلقه است.

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st} \qquad \frac{a}{s}\frac{b}{t} := \frac{ab}{st} \qquad (a,b \in R \text{ و } s,t \in S)$$

R_S را حلقه‌ی کسرهای R روی S، یا موضعی‌سازی R روی S می‌نامیم و نگاشت $\phi\colon R \to R_S$ با ضابطه‌ی $a \mapsto \frac{a}{۱}$ را نگاشت کانونی متناظر با موضعی‌سازی R روی S می‌گوییم. توجه کنید که $R_S = \{۰\}$ اگر و تنها اگر $۰ \in S$. بنابراین همواره فرض می‌کنیم $۰ \notin S$.

حال فرض کنید در پاراگراف قبل، R یک حوزه باشد. در این صورت می‌توان دید، نگاشت کانونی $\phi\colon R \to R_S$ یک تک‌ریختی است. بنابراین یک حوزه را می‌توان به عنوان زیرحلقه‌ای از هر موضعی‌سازیش محسوب کرد. به‌ویژه زمانی که $S = R^*$، می‌توان بررسی کرد که R_S یک میدان است. این میدان را میدان کسرهای R می‌نامیم و با $\operatorname{frac}(R)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه هر حوزه مانند A را که $R \subseteq A \subseteq \operatorname{frac}(R)$، یک فراحلقه[۱۰] از R می‌گوییم.

مجموعه‌ی ضربی $R \subseteq S$ را اشباع‌شده[۱۱] می‌گوییم، هرگاه برای هر $s \in S$ و $r \in R^*$، اگر $r \mid s$، آن‌گاه $r \in S$.

گزاره ۱.۴.۱. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی باشد. در این صورت برای هر $a \in D^*$، اگر $a \in U(D_S)$، آن‌گاه عنصری مثل $s \in S$ موجود است که $a \underset{S}{\mid} s$. به‌ویژه اگر S اشباع‌شده باشد، آن‌گاه $a \in S$ اگر و تنها اگر $a \in U(D_S)$.

[۱۰] Overring

[۱۱] Saturated

برهان. اگر $a \in U(D_S)$، آن‌گاه عناصری مثل $b \in D^*$ و $s \in S$ موجودند که ۱ $= a(b/s)$ و لذا $ab = s$ و لذا $a \underset{D}{\mid} s$. □

گزاره ۲.۴.۱. هر موضعی‌سازی از یک حلقه‌ی نوتری، حلقه‌ای نوتری است.

برهان. [۲۰، لم ۳.۸] □

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید R یک حلقه و $S \subseteq R^*$ مجموعه‌ای ضربی باشد. همچنین فرض کنید I ایده‌آلی از R و J ایده‌آلی از R_S باشد. ایده‌آل تولیدشده توسط تصویر I تحت نگاشت کانونی $\phi\colon R \to R_S$ را با I^e و تصویر وارون J تحت این نگاشت، یعنی $\phi^{-1}(J)$ را با J^c نمایش می‌دهیم.[۱۲]

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنید R یک حلقه و $S \subseteq R^*$ مجموعه‌ای ضربی باشد و $P \in \mathrm{Spec}(R)$. در این صورت اگر $P \cap S = \emptyset$، آن‌گاه $P^e \in \mathrm{Spec}(R_S)$ و اگر $P \cap S \neq \emptyset$، آن‌گاه $P^e = R_S$.

برهان. [۲۰، قضیه ۳۲.۵] □

۵.۱ حوزه‌های ب.م.م و بزو

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $a, b \in D^*$. عنصر $c \in D^*$ را یک ب.م.م دو عنصر a و b می‌نامیم، هرگاه:

۱. $a \mid c$ و $b \mid c$.

۲. برای هر عنصر مثل $d \in D^*$، اگر $d \mid a$ و $d \mid b$، آن‌گاه $d \mid c$.

مجموعه‌ی همه‌ی ب.م.م‌های a و b را با $\gcd(a, b)$ نمایش می‌دهیم. همچنین a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم، هرگاه $1 \in \gcd(a, b)$. مفهوم ب.م.م را می‌توان به شکلی بدیهی به هر مجموعه از عناصر D^* تعمیم داد.

تحت شرایط تعریف قبل، در بیش‌تر مراجع صرفاً نوشته می‌شود $c = \gcd(a, b)$. توجیه این امر این است که هر دو ب.م.م از a و b شریک هستند (زیرا اگر $c, d \in \gcd(a, b)$، آن‌گاه $d \mid c$ و $c \mid d$ و لذا $d \overset{D}{\sim} c$). بنابراین با تقریب شریک بودن و در صورت وجود، a و b، دارای یک ب.م.م هستند.

تعریف ب.م.م را می‌توان به صورت ایده‌آلی و به شکل زیر بیان کرد.

گزاره ۲.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $a, b \in D^*$. در این صورت $c \in \gcd(a, b)$ اگر و تنها اگر $\langle a, b\rangle \subseteq \langle c\rangle$ و به‌علاوه برای هر ایده‌آل اصلی از D مانند $\langle d\rangle$ که $\langle a, b\rangle \subseteq \langle d\rangle$، داشته باشیم $\langle d\rangle \subseteq \langle c\rangle$. به بیان دیگر، $\langle c\rangle$ کوچک‌ترین ایده‌آل اصلی است که هر دو عنصر a و b را شامل می‌شود.

[۱۲] e مخفف extention به معنای توسیع و c مخفف contraction به معنای انقباض است. این نمادها را می‌توان در حالتی کلی‌تر و برای هر همریختی حلقه‌ای به‌کار برد، ولی ما در این‌جا از آن‌ها تنها برای همریختی کانونی موضعی‌سازی استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۳.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد.

۱. D را یک حوزه‌ی بزو[۱۳] می‌گوییم، هرگاه هر ایده‌آل متناهی‌مولد از D ایده‌آلی اصلی باشد (با استقرا می‌توان دید، کافی است همه‌ی ایده‌آل‌هایی که دارای دو مولد هستند، اصلی باشند).

۲. D را یک حوزه‌ی ب.م.م[۱۴] می‌گوییم، هرگاه هر دو عنصر از D^* دارای ب.م.م باشند (می‌توان دید، در این وضع هر مجموعه‌ی متناهی از عناصر D^* دارای ب.م.م است).

حوزه‌های ایده‌آل اصلی به شکلی بدیهی حوزه‌ی بزو هستند. حوزه‌ی $\mathbb{Q}+X\mathbb{Q}[[X]]$، مثالی از یک حوزه‌ی بزو است که حوزه‌ی ایده‌آل اصلی نیست (مثال ۵.۲.۳).

گزاره ۴.۵.۱. هر حوزه‌ی بزو، یک حوزه‌ی ب.م.م است.

برهان. به‌سادگی از گزاره‌ی ۲.۵.۱ نتیجه می‌شود. □

گزاره ۵.۵.۱. هر حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا، یک حوزه‌ی ب.م.م است.

برهان. [۹، گزاره ۱۳.۳.۸] □

گزاره ۶.۵.۱. هر حوزه‌ی ب.م.م، یک حوزه‌ی AP است.

برهان. [۱۱، قضیه ۷.۶(۲)] □

تعریف ۷.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $a,b\in D^*$. در این صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم ک.م.م-اول هستند، هرگاه $aD\cap bD=abD$. همچنین می‌گوییم دو زیر مجموعه از D^* مانند S و T نسبت به هم ک.م.م-اول[۱۵] هستند، هرگاه برای هر $s\in S$ و $t\in T$، t و s نسبت به هم ک.م.م-اول باشند.

گزاره ۸.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $a,b\in D^*$. در این صورت اگر a و b نسبت به هم ک.م.م-اول باشند، آن‌گاه نسبت به هم اول هستند.

برهان. فرض کنید a و b نسبت به هم اول نباشند و لذا عنصری مثل $c\in D^\#$ موجود باشد که $c\mid a$ و $c\mid b$. در این صورت $c(a/c)(b/c)\in aD\cap bD$، اما اگر $c(a/c)(b/c)\in abD$، آن‌گاه عنصری مثل $d\in D^*$ موجود خواهد بود که $c(a/c)(b/c)=abd$ و لذا $ab=abdc$ و در نتیجه $dc=1$ که خلاف فرض غیریکه بودن c است. بنابراین a و b نسبت به هم ک.م.م-اول نیستند. □

عکس گزاره‌ی قبل درست نیست. برای مثال حوزه‌ی $K[X^2,X^3]$ که در آن K یک میدان است را در نظر بگیرید. X^2 و X^3 در این حوزه نسبت به هم اول هستند، اما ک.م.م-اول نیستند، زیرا $X^6\in X^2D\cap X^3D$ ولی $X^6\notin X^5D$.

---

۱۳ Bezout Domain

۱۴ GCD Domain

۱۵ lcm-prime

تبصره ۹.۵.۱. توجه کنید که در تعریف قبل، برای اثبات این‌که S و T نسبت به هم ک.م.م-اول هستند، کافی است نشان داده شود برای هر $s \in S \cap D^{\#}$ و $t \in T \cap D^{\#}$، $sD \cap tD \subseteq stD$.

گزاره ۱۰.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $\emptyset \neq S \subseteq D^*$. در این صورت برای هر $a, b \in D^*$، اگر a, b نسبت به S ک.م.م-اول باشند، آن‌گاه ab نیز نسبت به S ک.م.م-اول است.

برهان. برای هر $t' \in S$،

$$\begin{aligned} abt'D &= b(at'D) = b(aD \cap t'D) \\ &= abD \cap bt'D = abD \cap (bD \cap t'D) = abD \cap t'D \end{aligned}$$

و لذا ab نسبت به S ک.م.م-اول است. □

یکی از خواص مشهور حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ این است که برای هر $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$، اگر $a \mid bc$ و $\gcd(a, b) = ۱$، آن‌گاه $a \mid c$. این خاصیت در حالت‌های کلی‌تری نیز برقرار است. در گزاره‌ی زیر دو حالت را معرفی می‌کنیم.

گزاره ۱۱.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد. اگر هر یک از دو حالت زیر برقرار باشد، آن‌گاه برای هر $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$، اگر $a \mid bc$ و $\gcd(a, b) = ۱$، آن‌گاه $a \mid c$.

۱. D حوزه‌ی بزو باشد.

۲. گردایه‌ای از عناصر $\mathcal{P}(D)$ مانند A موجود باشد که $a = \Gamma(A)$.

برهان. ۱. عناصری مانند $x, y \in D^*$ موجودند که $ax + cy = ۱$ و لذا $axb + cyb = b$. حال توجه کنید که $c \mid cyb$ و از سوی دیگر بنا به فرض $c \mid axb$ و لذا $c \mid b$.

۲. بنا به قسمت ۲ از گزاره‌ی ۶.۱.۱، نتیجه می‌شود.

□

گزاره ۱۲.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $a, b \in D^*$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. a نسبت به b ک.م.م-اول است.

۲. برای هر $c \in D^*$، اگر $a \mid bc$ آن‌گاه $a \mid c$.

برهان. (۱ $\Longrightarrow$ ۲) فرض کنید عنصری مثل $d \in D^*$ موجود باشد که $ad = bc$. چون a نسبت به b ک.م.م-اول است، لذا $aD \cap bD = abD$ و در نتیجه $ad = bc \in abD$. بنابراین عنصری مثل $e \in D^*$ موجود است که $bc = abe$ و لذا $c = ae$ و $a \mid c$.

(۲ $\Longrightarrow$ ۱) فرض کنید $0 \neq \alpha \in aD \cap bD$ و لذا برای عناصری مانند $x, y \in D^*$، $\alpha = ax = by$. در این صورت $a \mid by$ و لذا بنا به فرض $a \mid y$ و در نتیجه $\alpha = ba(y/a) \in abD$. بنابراین $aD \cap bD \subseteq abD$ و در نتیجه a و b نسبت به هم ک.م.م اول هستند. □

گزاره ۱۳.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد، $a \in D^*$ و $S \subseteq D^*$. در این صورت اگر a نسبت به S ک.م.م-اول باشد، آن‌گاه هیچ $s \in S \cap D^\#$ای موجود نیست که $a \underset{D}{\mid} s$.

برهان. فرض کنید $s \in S \cap D^\#$ای موجود باشد که $a \underset{D}{\mid} s$. در این صورت $a \in aD \cap sD$. اما $a \notin asD$، زیرا در غیر این صورت $c \in D$ای موجود است که $a = asc$ و لذا $sc = ۱$ و در نتیجه $s \in U(D)$ که خلاف فرض است. بنابراین $aD \cap sD \nsubseteq asD$ و لذا a نسبت به S ک.م.م-اول نیست. □

حال مفهومی کلی‌تر از ب.م.م را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۴.۵.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد و $A \subseteq D^*$. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک عناصر A را با $\mathrm{CD}(A)$ نمایش می‌دهیم و عنصر $c \in D^*$ را یک مقسوم‌علیه مشترک بیشین(م.م.ب)[۱۶] از عناصر A می‌نامیم، در صورتی که:

۱. برای هر $a \in A$، $c \mid a$.

۲. برای هر $d \in \mathrm{CD}(A)$، اگر $c \mid d$، آن‌گاه $c \overset{D}{\sim} d$.

مجموعه‌ی تمام م.م.ب‌های A را با $\mathrm{MCD}_D(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر تمام زیرمجموعه‌های متناهی از D دارای م.م.ب باشند، آن‌گاه D را یک حوزه‌ی م.م.ب می‌گوییم و اگر هر مجموعه‌ی دوتایی از عناصر D دارای م.م.ب باشند، آن‌گاه D را یک حوزه‌ی ب.م.م ضعیف[۱۷] می‌گوییم.

اگر هر زیرمجموعه‌ی متناهی از D^*، با تقریب شریک بودن، تنها تعدادی متناهی م.م.ب داشته باشد، آن‌گاه D را یک حوزه‌ی م.م.ب-متناهی[۱۸] می‌گوییم.

۶.۱ حلقه‌های تکواری

فرض کنید $(S, \oplus)$ یک تکواره‌ی[۱۹] جابجایی[۲۰] و R یک حلقه باشد. می‌توان بررسی کرد که مجموعه‌ی توابع به شکل $f : S \to R$ که در آن‌ها مقدار f روی S به جز تعدادی متناهی عنصر برابر با ۰ است، به همراه جمع توابع و ضرب با تعریف $(fg)(s) := \sum_{t_۱ \oplus t_۲ = s} f(t_۱)g(t_۲)$ یک حلقه است. این حلقه را حلقه‌ی تکواری R روی S می‌نامیم. برای هر عنصر مثل f در این حلقه، محمل f را برابر با زیرمجموعه‌ای از S تعریف می‌کنیم که مقدار f روی آن ناصفر است و آن را با $\mathrm{supp}(f)$ نمایش می‌دهیم.

مثال مهم از چنین حلقه‌هایی، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها است که در آن‌ها S برابر با تکواره‌ی جمعی $\mathbb{N} \cup \{۰\}$ است. زمانی که عمل تکواره‌ی S به‌طور طبیعی به‌صورت جمعی نوشته شود، حلقه‌ی تکواری

[۱۶] Maximal Common Divisor یا به اختصار MCD

[۱۷] Weak GCD Domain

[۱۸] MCD-finite

[۱۹] Monoid

[۲۰] مانند حلقه‌ها، از این پس همه‌ی تکواره‌ها را نیز جابجایی فرض خواهیم کرد.

R روی S را با نماد $R[X;S]$ می‌دهیم و اگر $f \in R[X;S]$، آن‌گاه f را مانند چندجمله‌ای‌ها به صورت حاصل‌جمع صوری $f = f(s_1)X^{s_1} + f(s_2)X^{s_2} + \cdots + f(s_n)X^{s_n}$ نمایش می‌دهیم که در آن $\mathrm{supp}(f) = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید S یک تکواره باشد.

۱. S را حذفی[21] می‌گوییم، هرگاه برای هر $s, t, u \in S$، اگر $s + t = s + u$، آن‌گاه $t = u$.

۲. S را بدون تاب[22] می‌گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a \in S$، اگر $na = 0$، آن‌گاه $a = 0$.

توجه کنید که هیچ یک از این دو خاصیت، دیگری را نتیجه نمی‌دهد. برای مثال گروه $(\mathbb{Z}_n, +)$، مثالی از یک تکواره‌ی حذفی است که بدون تاب نیست. برعکس، عمل $\oplus$ را روی مجموعه‌ی $\{0, a\}$ به این شکل تعریف کنید که $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ ، $0 \oplus 0 = 0$ و $a \oplus a = a$. به سادگی می‌توان دید، ساختار حاصل یک تکواره‌ی بدون تاب است. اما این تکواره حذفی نیست، زیرا $a \oplus a = a \oplus 0$، اما $a \neq 0$.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید S یک تکواره و $\leq$ یک ترتیب تام[23] روی S باشد. در این صورت $(S, \leq)$ را یک تکواره‌ی مرتب می‌گوییم، هرگاه برای هر $s, t, u \in S$، اگر $s \leq t$، آن‌گاه $s + u \leq s + t$.

لم ۳.۶.۱. فرض کنید S یک تکواره باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. می‌توان یک ترتیب تام روی S، مانند $\leq$ را به‌گونه‌ای تعریف کرد که $(S, \leq)$، یک تکواره‌ی مرتب شود.

۲. S بدون تاب و حذفی است.

برهان. [۱۱، نتیجه ۴.۳] $\square$

مفاهیم درجه، ضریب پیشرو و جمله‌ی ثابت که برای چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شوند را می‌توان در حالت کلی‌تری که تکواره مرتب باشد نیز تعریف کرد.

تعریف ۴.۶.۱. فرض کنید R یک حلقه و S یک تکواره‌ی مرتب باشد و $f \in R[X;S]^*$. در این صورت عناصری مانند $r_1, \ldots, r_n \in R^*$ و $s_1, \ldots, s_n \in S$ موجودند که $s_1 \lneq s_2 \lneq \cdots \lneq s_n$ و $f = r_1X^{s_1} + \cdots + r_nX^{s_n}$. درجه‌ی f را برابر با s_n تعریف می‌کنیم و با $\deg(f)$ نمایش می‌دهیم. ضریب پیشروی f را برابر با r_n تعریف می‌کنیم و با $\mathrm{lc}(f)$ نمایش می‌دهیم. همچنین جمله‌ی ثابت f را در صورتی که $s_1 = 0$ برابر با r_1 و در غیر این صورت برابر با 0 تعریف می‌کنیم و آن را با $\mathrm{ct}(f)$ نمایش می‌دهیم.

[21] Cancellative

[22] Torsion Free

[23] یعنی رابطه‌ای پادتقارنی، انعکاسی و متعدی باشد و به‌علاوه هر $a, b \in S$، $a \leq b$ یا $b \leq a$. یک مجموعه به همراه یک ترتیب تام را تماماً مرتب می‌گوییم.

قضیه ۵.۶.۱. فرض کنید R یک حلقه و S یک تکواره باشد. در این صورت $A = R[X;S]$ یک حوزه است اگر و تنها اگر R یک حوزه و S بدون تاب و حذفی باشد.

برهان. ($\Longleftarrow$) ابتدا توجه کنید که اگر R حوزه نباشد، آن‌گاه با توجه به این‌که R زیرحلقه‌ای از A است، A نیز حوزه نیست.

حال فرض کنید S حذفی نباشد و لذا عناصری مانند $s,t,u \in S$ موجود باشند که $s+t = s+u$ و $t \neq u$. در این صورت $X^s(X^t - X^u) = X^{s+t} - X^{s+u} = ۰$، اما $X^s \neq ۰$ و $X^t - X^u \neq ۰$. بنابراین A در این وضع حوزه نیست.

حال فرض کنید S بدون تاب نباشد. در این صورت $۰ \neq s \in S$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند که $ns = ۰$. فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ کوچک‌ترین عددی باشد که $ms = ۰$. اگر m زوج باشد قرار دهید، $k = m$ و اگر m فرد باشد، قرار دهید $k = m + ۱$. توجه کنید که $ks = ۰$ و همچنین $k \neq ۲$، زیرا در غیر این صورت $m = ۱$ و لذا $s = ۰$ که خلاف فرض است. اکنون داریم،

$$(۱ + X^{(k/۲)s})(۱ - X^{(k/۲)s}) = ۱ - X^{ks} = ۰$$

اما $k/۲ \lneq m$ و لذا $(k/۲)s \neq ۰$. بنابراین در این حالت هم A حوزه نیست.

($\Longrightarrow$) فرض کنید $f = a_۱X^{s_۱} + \cdots + a_nX^{s_n}$ و $g = b_۱X^{t_۱} + \cdots + b_mX^{t_m}$ عناصری از A باشند که در آن، $n,m \in \mathbb{N}$ و برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، $a_i,b_i \in R^*$ و $s_i,t_i \in S$ و $s_۱ \lneq s_۲ \lneq \cdots \lneq s_n$ و $t_۱ \lneq t_۲ \lneq \cdots \lneq t_m$. توجه کنید که $a_nb_mX^{s_n+t_m} \neq ۰$ و برای هر $۱ \leq i \lneq n$ و $۱ \leq j \lneq m$، بنا به مرتب بودن S، $s_i + t_j \lneq s_n + t_m$ و در نتیجه $fg \neq ۰$.

$\square$

لم ۶.۶.۱. فرض کنید D یک حوزه و S یک تکواره‌ی بدون تاب و حذفی باشد و $f,g \in D[X;S]^*$. به‌علاوه فرض کنید $f = aX^s$ که در آن $a \in D^*$ و $s \in S$. در این صورت اگر $g|f$، آن‌گاه عناصری مثل $b \in D^*$ و $t \in S$ موجودند که $g = bX^t$، $s - t \in S$ و $b \underset{D}{|} a$.

برهان. بنا به لم ۳.۶.۱، می‌توان روی S یک ترتیب تام مانند $\leq$ را به‌گونه‌ای تعریف کرد که $(S,\leq)$ یک تکواره‌ی مرتب شود. فرض کنید $h \in D[X;S]$ عنصری باشد که $f = gh$. در این صورت بنا به مرتب بودن S، می‌توان دید $f = aX^s = \mathrm{lc}(g)\mathrm{lc}(h)X^{\deg g + \deg h}$. حکم به‌سادگی نتیجه می‌شود. $\square$

نتیجه ۷.۶.۱. فرض کنید S یک تکواره‌ی مرتب باشد که در آن تمام عناصر بزرگتر یا مساوی صفر هستند. در این صورت:

۱. $U(D[X;S]) = U(D)$.

۲. برای هر $x \in D^*$، $x \in \mathcal{A}(D)$ اگر و تنها اگر $x \in \mathcal{A}(D[X;S])$.

برهان. ۱. واضح است که $U(D) \subseteq U(D[X;S])$. برعکس، فرض کنید $f \in U(D[X;S])$. در این صورت بنا به لم ۶.۶.۱، عناصری مثل $a \in D$ و $s \in S$ موجودند که $f = aX^s$، $۰ - s \in S$ و $a \underset{D}{|} ۱$. لذا $a \in U(D)$ و به‌علاوه بنا به فرضی که روی عناصر S داشتیم، $s = ۰$ در نتیجه $f = a \in U(D)$.

۲. ابتدا فرض کنید $x \in \mathcal{A}(D)$ و $x = fg$ که در آن $f, g \in D[X;S]^*$. بنا به لم ۶.۶.۱، عناصری مثل $a, b \in D^*$ و $s, t \in S$ موجودند که $ab = x$، $s + t = ۰$، $f = aX^s$ و $g = bX^t$. در نتیجه چون $x \in \mathcal{A}(D)$ و بدون از دست رفتن کلیت داریم $a \in U(D)$. از سوی دیگر، بنا به فرض اولیه روی S، داریم $s = ۰$ و در نتیجه $f \in U(D[X;S])$.

حال فرض کنید $x \in \mathcal{A}(D[X;S])$ و $x = ab$ که در آن $a, b \in D^*$. در این صورت بدون از دست رفتن کلیت $a \in U(D[X;S])$ و لذا بنا به قسمت ۱، $a \in U(D)$. بنابراین $x \in \mathcal{A}(D)$.
□

تعریف ۸.۶.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد، $R = D[\{X_i\}_{i\in\alpha}]$ و $f \in R^\#$. در این صورت f را تجزیه‌ناپذیر[۲۴] می‌گوییم، هرگاه برای هر $g_۱, g_۲ \in R^*$، اگر $f = g_۱g_۲$، آن‌گاه $g_۱ \in D^*$ یا $g_۲ \in D^*$. همچنین ایده‌آل تولیدشده توسط ضرایب f را محتوای[۲۵] f می‌گوییم و با $\mathrm{c}(f)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۹.۶.۱. فرض کنید D یک حوزه‌ی ب.م.م باشد و G یک گروه آبلی بدون تاب باشد. در این صورت $D[X;G]$ یک حوزه‌ی ب.م.م است.

برهان. [۱۱، قضیه ۲.۱۴] □

۷.۱ حلقه‌های ارزیابی

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد. D را یک حلقه‌ی ارزیابی[۲۶] می‌گوییم، هرگاه برای هر دو ایده‌آل از D مثل I و J داشته باشیم، $I \subseteq J$ یا $J \subseteq I$ (به‌طور معادل، هرگاه مجموعه‌ی ایده‌آل‌ها D تماماً مرتب باشد).

حوزه‌ی $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ که در آن p عددی اول است، مثالی از یک حلقه‌ی ارزیابی است (مثال ۱۲.۷.۱). همچنین می‌توان از قضیه‌ی ۱۴.۷.۱، برای ساختن حلقه‌های ارزیابی با ابعاد دلخواه استفاده کرد (مثال ۱۵.۷.۱).

گزاره ۲.۷.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. D حلقه‌ی ارزیابی است.

۲. برای هر $a, b \in D$، $aD \subseteq bD$ یا $bD \subseteq aD$.

۳. برای هر $x \in \mathrm{frac}(D)$، $x \in D$ یا $x^{-۱} \in D$.

برهان. [۱۵، گزاره ۲.۵] □

---
۲۴ Indecomposable
۲۵ Content
۲۶ Valuation Ring

گزاره ۳.۷.۱. فرض کنید D یک حلقه‌ی ارزیابی باشد. در این صورت:

۱. D حلقه‌ای موضعی است.

۲. D حوزه‌ی بزو است.

۳. فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(D)$. در این صورت $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P^n$ ایده‌آلی اول است و به‌علاوه تمام ایده‌آل‌های اولی را که به‌طور سره زیرمجموعه‌ی P هستند، در بر می‌گیرد.

۴. هر فراحلقه از D یک حلقه‌ی ارزیابی است.

برهان. ۱. [۱۵، گزاره ۴.۵]

۲. برای هر $x, y \in D^*$، یا $x \mid y$ یا $y \mid x$. در نتیجه $xD + yD = xD$ یا $xD + yD = yD$.

۳. [۱۵، قضیه ۱۰.۵]

۴. [۱۵، نتیجه ۳.۵]

□

تعریف ۴.۷.۱. فرض کنید $(G, +, \leq)$ یک گروه آبلی مرتب باشد. عنصر ∞ را به G می‌افزاییم و قرارداد می‌کنیم که برای هر $g \in G$، $\infty = \infty + g = g + \infty$ و $g \leq \infty$.
حال فرض کنید K یک میدان باشد. در این صورت تابع $v \colon K \to G\cup\{\infty\}$ را یک تابع ارزیابی[۲۷] برای K می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in K$:

۱. $v(xy) = v(x) + v(y)$.

۲. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

۳. $x = 0$ اگر و تنها اگر $v(x) = \infty$.

گزاره ۵.۷.۱. مفروضات تعریف ۴.۷.۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید $R_v = \{x \in K \mid 0 \leq v(x)\}$. در این صورت:

۱. $v(1) = v(-1) = 0$

۲. برای هر $x \in K^*$، $v(x^{-1}) = -v(x)$ و $v(x) = v(-x)$.

۳. R_v یک حلقه‌ی ارزیابی است و $U(R_v) = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$. حلقه‌ی R_v را حلقه‌ی ارزیابی متناظر با تابع ارزیابی v می‌گوییم. (توجه کنید که تنها ایده‌آل ماکزیمال R_v برابر است با $\{x \in K \mid v(x) \gneq 0\}$)

۴. $v \colon (K^*, .) \to (G, +)$، یک همریختی گروهی است. بنابراین $v(K^*)$ زیرگروهی از G است که آن را گروه ارزش[۲۸] v می‌نامیم.

[۲۷] Valuation
[۲۸] Value Group

برهان. ۱. داریم
$$v(۱) = v((۱)(۱)) = v(۱) + v(۱)$$
و لذا $v(۱) = ۰$. همچنین
$$v(-۱) + v(-۱) = v((-۱)(-۱)) = v(۱) = ۰$$
و لذا $v(-۱) = -v(-۱)$ و در نتیجه با توجه به مرتب بودن گروه، $v(-۱) = ۰$.

۲. داریم $۰ = v(۱) = v(xx^{-۱}) = v(x) + v(x^{-۱})$ و لذا $v(x^{-۱}) = -v(x)$. همچنین $v(-x) = v(-۱) + v(x) = v(x)$.

۳. برای هر $a, b \in R_v$، $v(ab) = v(a) + v(b) \geq ۰$ و لذا $ab \in R_v$. همچنین
$$v(a-b) = \min(v(a), v(-b)) = \min(v(a), v(b)) \geq ۰$$
و لذا $a - b \in R_v$. به‌علاوه $v(۱) = ۰$ و $v(۰) = \infty$ و لذا $۰, ۱ \in R_v$. بنابراین R_v یک حلقه است.

حال فرض کنید $a, b \in R_v^*$. بدون از دست رفتن کلیت، می‌توان فرض کرد $v(a) \leq v(b)$. در این صورت $۰ \leq v(b) - v(a)$ و در نتیجه $۰ \leq v(ba^{-۱})$ و در نتیجه $ba^{-۱} \in R_v$ و لذا $a \underset{D}{\mid} b$. در نتیجه بنا به گزاره‌ی ۲.۷.۱، R_v یک حلقه‌ی ارزیابی است.

حال فرض کنید $a \in R_v^*$. در این صورت اگر $a \in U(R_v)$، آن‌گاه $۰ \leq v(a^{-۱})$ و چون
$$v(a) + v(a^{-۱}) = v(aa^{-۱}) = v(۱) = ۰$$
لذا $v(a) = ۰$. برعکس، اگر $v(a) = ۰$، آن‌گاه چون $v(a) + v(a^{-۱}) = ۰$، لذا $v(a^{-۱}) = ۰$ و در نتیجه $a^{-۱} \in R_v$ و لذا $a \in U(R_v)$.

۴. کافی است توجه کنید برای هر $x, y \in K^*$، $v(xy^{-۱}) = v(x) - v(y)$.

□

گزاره ۶.۷.۱. فرض کنید D یک حوزه با میدان کسرهای K و G یک گروه آبلی مرتب باشد. به‌علاوه فرض کنید $v'\colon D \to G \cup \{\infty\}$ تابعی باشد که در سه شرط ۱، ۲ و ۳ از تعریف ۴.۷.۱ صدق کند و به‌علاوه برای هر $۰ \leq g \in G$، عنصری از D مثل x موجود باشد که $v'(x) = g$. در این صورت، می‌توان به گونه‌ای یکتا v را به یک تابع ارزیابی روی میدان کسرهای D توسیع داد، به‌طوری که حلقه‌ی ارزیابی متناظر با آن برابر D و گروه ارزش آن برابر با G شود. ضابطه‌ی این تابع به صورت زیر است:
$$v(a/b) = v(a) - v(b) \quad (a, b \in D \text{ و } b \neq ۰)$$

برهان. تابع $v\colon K \to G \cup \{\infty\}$ را به این شکل تعریف کنید که $v(۰) = \infty$ و برای هر $a, b \in D^*$، $v(a/b) := v'(a) - v'(b)$. واضح است که v توسیعی از v' است. نشان می‌دهیم، v خوش‌تعریف است. فرض کنید $a/b = a'/b'$ که در آن $a, a', b, b' \in D^*$. در این صورت $ab' = ba'$ و لذا $v'(ab') = v'(ba')$ و در نتیجه $v'(a) + v'(b') = v'(b) + v'(a')$ و لذا $v'(a) - v'(b) = v'(a') - v'(b')$ و لذا $v(a/b) = v(a'/b')$.

حال فرض کنید $a, s, b, t \in D^*$. داریم،

$$\begin{aligned} v(\frac{a}{s}\frac{b}{t}) &= v'(ab) - v'(st) \\ &= v'(a) + v'(b) - v'(s) - v'(t) \\ &= v'(a) - v'(s) + v'(b) - v'(t) \\ &= v(\frac{a}{s}) + v(\frac{b}{t}) \end{aligned}$$

بنابراین v در شرط ۲ صدق می‌کند. همچنین،

$$\begin{aligned} v(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}) &= v(\frac{at+bs}{st}) \\ &= v'(at+bs) - v'(st) \\ &\geq \min(v'(at), v'(bs)) - v'(st) \\ &= \min(v'(at) - v'(st), v'(b) - v'(st)) \\ &\geq \min(v(\frac{a}{s}), v(\frac{b}{t})) \end{aligned}$$

و لذا v در شرط ۳ نیز صدق می‌کند. حال فرض کنید $g \in G$ و $g \lneq 0$. در این صورت عنصری مثل $x \in D^*$ موجود است که $v(x) = -g$ و لذا $v(x^{-1}) = g$. در نتیجه v پوشاست و لذا گروه ارزش آن برابر با G است.

فرض کنید $v\colon K \to G \cup \{\infty\}$ یک تابع ارزیابی حاصل از توسیع v' باشد. فرض کنید $x \in K^*$ و لذا برای عناصری مانند $a, b \in D^*$، $x = a/b$. داریم $v(x) = v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$ و در نتیجه این توسیع یکتا نیز هست. □

تعریف ۷.۷.۱. فرض کنید G یک گروه آبلی مرتب باشد. زیر گروه H از G را یک زیرگروه منفرد[۲۹] می‌گوییم، هرگاه برای هر $x \in H$ و $y \in G$، اگر $0 \leq y \leq x$، آن‌گاه $y \in H$. تعداد زیرگروه‌های منفرد G را رتبه‌ی[۳۰] G می‌گوییم.

گزاره ۸.۷.۱. فرض کنید K یک میدان و v یک تابع ارزیابی روی K با گروه ارزش G و حلقه‌ی ارزیابی V باشد. در این صورت بین ایده‌آل‌های اول V و زیرگروه‌های منفرد G یک تناظر یک به یک موجود است. به‌ویژه اگر تعداد زیرگروه‌های منفرد G برابر با $n \in \mathbb{N}$ باشد، آن‌گاه $\dim(R) = n - 1$.

برهان. [۱۵، قضیه ۱۷.۵] □

تعریف ۹.۷.۱. یک حوزه‌ی ارزیابی با گروه ارزش $\mathbb{Z}$ را یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته[۳۱] می‌گوییم.

قضیه ۱۰.۷.۱. فرض کنید D یک حلقه‌ی ارزیابی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

---

۲۹ Isolated

۳۰ Rank

۳۱ Discrete Valuation Ring یا به اختصار DVR

۱. D یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته است.

۲. D یک حوزه‌ی ایده‌آل اصلی است.

۳. D نوتری است.

برهان. [۱۷، قضیه ۱.۱۱] $\square$

یک نوع از توابع ارزیابی مهم روی $\mathbb{Q}$، توابع ارزیابی p-جمعی[۳۲] نام دارند که آن‌ها را در این‌جا معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۷.۱. فرض کنید $p \in \mathbb{Z}$ یک عدد اول باشد و تابع $v_p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ را به این شکل تعریف کنید: قرار دهید $v(\circ) := \infty$ و برای هر $n \in \mathbb{Z}^*$، قرار دهید $v_p(n) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\}$. به‌سادگی می‌توان دید، v_p در شرایط ۱، ۲ و ۳ از تعریف تابع ارزیابی صدق می‌کند و لذا بنا به گزاره‌ی ۶.۷.۱، می‌توان دامنه‌ی آن را به شکلی یکتا به $\mathbb{Q}$ توسیع داد، به‌طوری که تابع حاصل یک تابع ارزیابی روی $\mathbb{Q}$ شود. این تابع را تابع ارزیابی p-جمعی می‌گوییم.

گزاره ۱۲.۷.۱. برای هر $p \in \mathbb{N}$ اول، $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته است.

برهان. ابتدا توجه کنید که

$$\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{a}{b} \text{ و } p \nmid b \text{ و } b \neq \circ \text{ موجود باشند که } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

بنابراین برای هر $x \in \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$، $\circ \leq v_p(x)$ و برای هر $x \in \mathbb{Q}$ که $x \notin \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$، $v_p(x) \lneq \circ$. لذا $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ برابر با حلقه‌ی ارزیابی متناظر با تابع ارزیابی v_p است. همچنین $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ بنا به گزاره‌ی ۲.۴.۱، نوتری است. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۱۰.۷.۱، $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته است. $\square$

گزاره ۱۳.۷.۱. فرض کنید D یک حلقه‌ی ارزیابی باشد که ایده‌آل ماکزیمال آن اصلی است. در این صورت D با تقریب شریک بودن یک و تنها یک اتم دارد.

برهان. فرض کنید $M = aD$ یگانه ایده‌آل ماکزیمال D باشد. واضح است که $a \in \mathcal{A}(D)$. به‌علاوه برای هر $x \in D^\#$ داریم، $x \in M$ و لذا $a \underset{D}{\mid} x$ و در نتیجه یا $a \overset{D}{\sim} x$ و یا $x \in \operatorname{Red}(D)$. $\square$

قضیه ۱۴.۷.۱. فرض کنید G یک گروه آبلی مرتب باشد. در این صورت، یک تابع ارزیابی با گروه ارزش G وجود دارد.

برهان. [۱۲، نتیجه ۱۸.۵] $\square$

مثال ۱۵.۷.۱. ۱. فرض کنید $D_۱$ حوزه‌ی ارزیابی با گروه ارزش $\mathbb{Q}$ (با ترتیب طبیعی) باشد. در این صورت ایده‌آل ماکزیمال $D_۱$ اصلی نیست و $\dim(D_۱) = ۱$.

---

[۳۲] p-adic

۲. گروه $G=\mathbb{Z}^n$ که در آن $2 \lneq n \in \mathbb{N}$ را با ترتیب لغت‌نامه‌ای[33] در نظر بگیرید و فرض کنید D_2، حوزه‌ی ارزیابی با گروه ارزش G باشد. در این صورت $\dim(D_2)=n$. به‌علاوه D_2 نوتری نیست، اما ایده‌آل ماکزیمال آن اصلی است.

حل. ۱. فرض کنید H زیرگروهی منفرد و ناصفر از $\mathbb{Q}$ باشد و فرض کنید $0 \lneq x \in H$. در این صورت برای هر $y \in \mathbb{Q}$ که $0 \leq y \lneq x$، داریم $y \in H$. قرار دهید $A := [0, x]$. اینک کافی است توجه کنید که $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} nA$ و لذا $H=\mathbb{Q}$. بنابراین G دقیقاً دارای دو زیرگروه منفرد 0 و $\mathbb{Q}$ است و لذا بنا به گزاره‌ی ۱.۷.۸، $\dim(D_1)=1$.

فرض کنید $x \in D_1^{\#}$. داریم $0 \lneq v(x)$ و لذا عنصری مثل $y \in D_1^{\#}$ موجود است، به‌طوری که $0 \lneq v(y) \lneq v(x)$. چون $v(x/y)=v(x)-v(y) \gneq 0$، لذا $x/y \in D_1^{\#}$ و در نتیجه $xD_1 \subsetneq yD_1$ و لذا xD_1 ایده‌آل ماکزیمال D_1 نیست. بنابراین ایده‌آل ماکزیمال D_1 اصلی نیست.

۲. برای هر $1 \leq i \leq n$، $e_i \in G$ را عنصری در نظر بگیرید که مولفه‌ی مکان i–ام آن ۱ و بقیه‌ی مولفه‌هایش ۰ هستند. همچنین، برای هر $x \in G$ و $1 \leq i \leq n$، $[x]_i$ را برابر با مولفه‌ی i–ام x قرار دهید.

ابتدا توجه کنید e_n، یگانه عنصر مثبت مینیمال G است. فرض کنید $x \in D_2^{\#}$ چنان باشد که $v(x)=e_n$. در این صورت برای هر $y \in D_2^{\#}$، $v(x) \leq v(y)$ و در نتیجه $0 \leq v(yx^{-1})$ و لذا $yx^{-1} \in D_2$ و در نتیجه $x \underset{D_2}{\mid} y$ و بنابراین $yD_2 \subseteq xD_2$. بنابراین xD_2، ایده‌آل ماکزیمال D_2 است و به‌ویژه، ایده‌آل ماکزیمال D_2 اصلی است.

حال زیرگروه‌های منفرد G را می‌یابیم. فرض کنید $H_k=\{0\}^k \times \mathbb{Z}^{n-k}$ که در آن $1 \leq k \lneq n$. فرض کنید $H_k \ni x=(0,\ldots,0,a_{n-k},\ldots,a_n) \gneq (0,\ldots,0)$. در این صورت اگر $y=(b_1,\ldots,b_n)\in G$ و $0 \lneq y \lneq x$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq k$، داریم $b_i=0$، زیرا در غیر این صورت یا $y \lneq 0$ یا $x \lneq y$، که خلاف فرض است. این امر برای اینکه $y \in H$ کفایت می‌کند.

اینک نشان می‌دهیم، هر زیرگروه منفرد از G به شکل $K_1 \times \cdots \times K_n$ است که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $K_i=0$ یا $K_i=\mathbb{Z}$. فرض کنید K یک زیرگروه منفرد از G باشد و $\{A \mid B\}$، افرازی از $\{1,\ldots,n\}$ باشد، به‌طوری که برای هر $i \in A$، عنصری مانند $x \in K$ موجود باشد که $[x]_i \neq 0$ و برای هر $i \in B$، هیچ عنصری مثل $x \in K$ موجود نباشد که $[x]_i \neq 0$. کافی است نشان دهیم:

$(*)$ $K=K_1\times\cdots\times K_n$، که در آن برای هر $i \in A$، $K_i=\mathbb{Z}$ و برای هر $i \in B$، $K_i=0$.

فرض کنید $i \in A$ و $0 \neq x \in K$ عنصری باشد که $[x]_i \neq 0$. در صورت نیاز، با جایگزینی $-x$ به جای x می‌توان فرض کرد $0 \lneq x$. حال y را برابر با عنصری از G در نظر بگیرید که برای هر

[33] یعنی $(a_1,\ldots,a_n) \leq (b_1,\ldots,b_n)$، هرگاه برای کوچکترین $1 \leq i \leq n$ ای که $a_i \neq b_i$، داشته باشیم $a_i \leq b_i$.

$i \neq j$، $[y]_j = [x]_j$ و $[y]_i = [x]_i - 1$. واضح است که $y \lneq x$. همچنین می‌توان دید، $y \lneq 0$. بنابراین چون K زیرگروه منفرد است، لذا $y \in H$ و در نتیجه $e_i = x - y \in H$ و در نتیجه برای هر $a \in \mathbb{Z}$، $ae_i \in H$. گزاره‌ی $(*)$ به‌سادگی نتیجه می‌شود.

تنها حالتی که باقی مانده، زیرگروه‌هایی به شکل $L = L_1 \times \cdots \times L_n$ هستند که در آن، برای هر $1 \leq i \leq n$، $L_i = 0$ یا $L_i = \mathbb{Z}$ و $j, k \in \mathbb{N}$ که $1 \leq j \lneq k \leq n$ موجودند به‌طوری که $L_j = \mathbb{Z}$ و $L_k = 0$. در این صورت $e_j \in L$ و $0 \lneq e_k \lneq e_j$، اما $e_k \notin L$ و در نتیجه L زیرگروه منفرد نیست. بنابراین G دقیقاً $n + 1$ زیرگروه منفرد دارد و لذا بنا به گزاره‌ی ۱.۷.۸، $\dim(D_2) = n$.

□

فصل ۲

حوزه‌های دارای خواص تجزیه

در این فصل رده‌هایی از حوزه‌ها را معرفی می‌کنیم که حاصل از تعمیم رده‌ی حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا هستند. ابتدا در بخش ۱.۲ به ارایه‌ی مفاهیم اولیه از جمله مفهوم تجزیه، حوزه‌های اتمی و موارد مرتبط با آن می‌پردازیم. در بخش ۲.۲ ابزاری به نام توسیع $D+M$ را معرفی می‌کنیم که در ادامه‌ی فصل برای ساختن بیش‌تر مثال‌های نقض مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بخش ۳.۲ حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا معرفی می‌شوند که در آن‌ها تنها شرط هم‌طول بودن تجزیه‌های اتمی حفظ می‌شود و در بخش ۴.۲ این مفهوم را به حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار توسعه می‌دهیم که در آن‌ها مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی هر عنصر متناهی است. در نهایت در بخش ۶.۲ بر مبنای تعداد مقسوم‌علیه‌های عناصر، دو رده‌ی دیگر از حوزه‌ها به نام‌های حوزه‌های idf و حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی معرفی می‌شوند.

۱.۲ تجزیه‌ی عنصری و مفاهیم مرتبط با آن

اساسی‌ترین مفهوم مورد بحث در این فصل، تجزیه‌ی عنصری و خواص مرتبط با آن است. بنابراین پیش از هر چیز مفهوم تجزیه را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد و $x = x_1 \cdots x_n$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in D^\#$ ($x_i \in \mathcal{A}(D)$). در این صورت n–تایی $(x_1, \dots, x_n)$ را یک تجزیه(ی اتمی) از x در D و به‌طول n می‌گوییم. همچنین هر یک از x_iها را یک مولفه‌ی تجزیه می‌گوییم. در ادامه و در این وضع، به اختصار خواهیم گفت $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه(ی اتمی) است.

تعریف زیر نشان می‌دهد، در این بحث چه موقع دو تجزیه را در عمل یکسان در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید $x \in D^\#$ و فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ و $x = x'_1 x'_2 \cdots x'_m$ دو تجزیه(ی اتمی) از x باشند. این دو تجزیه را هم‌ارز می‌گوییم، هرگاه $m = n$ و به‌علاوه جایگشتی مثل $\sigma \in S_n$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $x_i \sim x_{\sigma(i)}$.

لم ۳.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد و $x \in D^\#$. به‌علاوه فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد، به‌طوری که x دارای تجزیه‌ای به طول n باشد و دارای هیچ تجزیه‌ای با طول بزرگ‌تر از n نباشد. در این صورت هر تجزیه از x به طول n، تجزیه‌ای اتمی است.

برهان. فرض کنید چنین نباشد و تجزیه‌ای از x به طول n مانند $x = x_۱ \cdots x_n$ موجود باشد که اتمی نیست و بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $x_۱ \notin \mathcal{A}(D)$. در این صورت $x_۱$ عنصری تحویل‌پذیر است و لذا عناصری مثل $y, z \in D^\#$ موجودند، به‌طوری که $x_۱ = yz$. اکنون توجه کنید که $x = yzx_۲ \cdots x_n$ تجزیه‌ای از x به طول $n + ۱$ است که این امر با فرض اولیه در تناقض است. $\square$

دو رده از حوزه‌ها بر مبنای وجود یا عدم وجود تجزیه‌ی اتمی عناصرشان به این شکل تعریف می‌شوند.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. در حالتی که هر $x \in D^\#$ دارای تجزیه‌ی اتمی باشد، D را یک حوزه‌ی اتمی[۱] می‌گوییم. در حالتی که هیچ $x \in D^\#$ای دارای تجزیه‌ی اتمی نباشد، D را یک حوزه‌ی ضدماده[۲] می‌گوییم.

غیر از حوزه‌های idf، همه‌ی رده‌هایی که در این فصل معرفی می‌شوند زیررده‌هایی از رده‌ی حوزه‌های اتمی هستند. در این‌جا دو مثال از حوزه‌های ضدماده می‌آوریم.

مثال ۵.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی ارزیابی باشد که ایده‌آل ماکزیمالش اصلی نیست (برای مثال، حوزه‌ی $D_۱$ در مثال ۱۵.۷.۱). در این صورت R یک حوزه‌ی ضدماده است.

حل. بنا به گزاره‌ی ۳.۷.۱، D یک حلقه‌ی موضعی است. فرض کنید M ایده‌آل ماکزیمال D باشد. در این صورت $D^\# = M \setminus \{۰\}$ و لذا کافی است نشان دهیم هر $x \in M \setminus \{۰\}$ تحویل‌پذیر است. بنا به فرض، M یک ایده‌آل اصلی نیست و در نتیجه $M \neq xD$ و لذا عنصری مثل $y \in M \setminus xD$ موجود است. اما $yD \not\subseteq xD$ و لذا بنا به تعریف حلقه‌ی ارزیابی، $xD \subsetneq yD$ و در نتیجه $y \mid x$ و $x \overset{D}{\not\sim} y$. بنابراین x تحویل‌پذیر است. $\square$

مثال قبل به همراه گزاره‌ی ۱۳.۷.۱ نشان می‌دهند، هر حوزه‌ی ارزیابی یا ضدماده است و یا با تقریب شریک بون یک و تنها یک اتم دارد.

مثال ۶.۱.۲. حوزه‌ی تکواری $D = \mathbb{C}[X; \mathbb{Q}^+ \cup \{۰\}]$ یک حوزه‌ی ضدماده است.

حل. فرض کنید $f \in D^\#$ و $f = c_۱X^{a_۱/b_۱} + \cdots + c_nX^{a_n/b_n}$ که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $c_i \in \mathbb{C}^*$، $a_i \in \mathbb{Z}$ و $b_i \in \mathbb{Z}^*$ و به‌علاوه $a_۱/b_۱ \lneq a_۲/b_۲ \lneq \cdots \lneq a_n/b_n$. توجه کنید، $f \notin U(D)$ و لذا بنا به نتیجه‌ی ۷.۶.۱، $\deg(f) \neq ۰$ و لذا $a_n \neq ۰$. فرض کنید $b \in \mathbb{N}$ یک مضرب مشترک از عناصر $b_۱$ تا b_n (مثلاً ک.م.م آن‌ها) باشد. در این صورت می‌توان $A = \mathbb{C}[X^{۱/۲b}]$ را به عنوان زیر حلقه‌ای از D در نظر گرفت و به‌علاوه داریم $f \in A^\#$، زیرا $U(D) = U(A) = \mathbb{C}^*$.

[۱] Atomic Domain

[۲] Antimatter Domain

اینک کافی است ثابت شود عنصری مانند $g \in A^\#$ موجود است که $f \overset{A}{\not\sim} g$ و $g \underset{A}{\mid} f$، زیرا در این صورت $f \overset{D}{\not\sim} g$ و $g \underset{D}{\mid} f$ و لذا f در D عنصری تحویل‌پذیر خواهد بود.

توجه کنید که $\mathbb{N} \cup \{0\}$ و $1/2b(\mathbb{N} \cup \{0\})$ دو زیرتکواره‌ی یکریخت از تکواره‌ی جمعی $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ هستند و لذا A و $\mathbb{C}[X]$ به عنوان حلقه یکریخت هستند. در واقع تابع $\psi\colon A \to \mathbb{C}[X]$ با ضابطه‌ی

$$\psi(c_1 X^{n_1/2b} + \cdots + c_n X^{n_k/2b}) = c_1 X^{n_1} + \cdots + c_n X^{n_k}$$

یک یکریختی است. بنابراین کافی است حکم برای $\psi(f)$ در $\mathbb{C}[X]$ ثابت شود. توجه کنید که

$$\deg(\psi(f)) = 2\frac{b}{b_n} a_n \geq 2$$

اما هر چندجمله‌ای با درجه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ در $\mathbb{C}[X]$، دارای حداقل دو ریشه و لذا تحویل‌پذیر است. $\square$

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است.

۲. D حوزه‌ی اتمی و حوزه‌ی ب.م.م است.

۳. D حوزه‌ی اتمی و حوزه‌ی AP است.

برهان. $(1 \Longrightarrow 2)$ بنا به تعریف، D اتمی است و بنا به گزاره‌ی ۵.۵.۱ حوزه‌ی ب.م.م است.

$(2 \Longrightarrow 3)$ از گزاره‌ی ۶.۵.۱ نتیجه می‌شود.

$(3 \Longrightarrow 1)$ در این وضع، هر عنصر از $D^\#$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضربی از عناصر اول نوشت و لذا بنا به گزاره‌ی ۳.۲.۱، D حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است.

$\square$

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد، $x \in D^*$ و T مجموعه‌ای از مقسوم‌علیه‌های x باشد. در این صورت T را یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های x می‌گوییم، هرگاه عناصر T غیرشریک باشند و به‌علاوه برای هر مقسوم‌علیه x مثل y، عنصری مانند z در T موجود باشد، به‌طوری که $y \overset{D}{\sim} z$. اگر به‌علاوه همه‌ی عناصر T تحویل‌ناپذیر باشند، آن‌گاه T را یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x می‌گوییم.

اینک دو مفهوم در ارتباط با طول تجزیه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد.

۱. برای هر $x \in D^*$ قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{L}_D(x) := \begin{cases} \{n \in \mathbb{N} \mid \text{دارای تجزیه‌ای اتمی به طول } n \text{ است } x\} & x \in D^\# \\ \{0\} & x \in U(D) \end{cases}$$

۲. اگر D اتمی باشد، تابع $\ell_D\colon D^* \to \mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$ را با ضابطه‌ی $\ell_D(x) = \sup(\mathrm{L}_D(x))$ تعریف می‌کنیم.

توجه کنید که در قسمت ۱ از تعریف قبل، اگر x دارای تجزیه‌ی اتمی نباشد، آن‌گاه $\mathrm{L}_D = \emptyset$.
حال برخی از خواص مقدماتی تابع $\ell_D(x)$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱۰.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه‌ی اتمی باشد. در این صورت:

۱. برای هر $x, y \in D^*$، $\ell_D(x) + \ell_D(y) \le \ell_D(xy)$.

۲. $\ell_D(x) = 1$ اگر و تنها اگر $x \in \mathcal{A}(D)$.

۳. $\ell_D(x) = 0$ اگر و تنها اگر $x \in U(D)$.

برهان. ۱. کافی است توجه کنید، اگر $x = x_1 \cdots x_n$ و $y = y_1 \cdots y_m$ تجزیه‌هایی اتمی باشند، آن‌گاه $xy = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$، تجزیه‌ای اتمی از xy است.
قسمت‌های ۲ و ۳، از تعریف به‌دست می‌آیند. □

با استفاده از تعاریف و نمادهای معرفی‌شده در این بخش، می‌توان تعریف حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا را به شکل زیر بازنویسی کرد:

تعریف ۱۱.۱.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. در این صورت D را یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا می‌گوییم، هرگاه:

۱. اتمی باشد.

۲. برای هر $x \in D^\#$، $|\mathrm{L}_D(x)| = 1$.

۳. برای هر $x \in D^\#$، هر دو تجزیه‌ی اتمی هم‌طول از x، هم ارز باشند.

۲.۲ توسیع‌های $D+M$

در این بخش ابزاری بسیار کارآمد در ساختن مثال‌های نقض، موسوم به توسیع‌های $D+M$ را معرفی می‌کنیم.
در سراسر این بخش فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $0 \neq M \in \mathrm{Max}(T)$. به‌علاوه فرض کنید D زیرحلقه‌ای از K باشد و $R = D + M$.

مثال مهمی از این وضعیت که در ادامه بیش‌تر با آن سروکار خواهیم داشت، زمانی است که

$$T = K[X] = K + XK[X] \quad \text{و} \quad R = D + XK[X]$$

مثال دیگر زمانی است که

$$T = K[X] = K + XK[[X]] \quad \text{و} \quad R = D + XK[[X]]$$

پیش از هر چیز توجه کنید که در این وضع، هر $x \in T$ را تنها به یک صورت می‌توان به شکل $x = k + m$ نوشت که در آن $k \in K$ و $m \in M$. به عبارت دقیق‌تر:

لم ۱.۲.۲. برای هر $k_۱, k_۲ \in K$ و $m_۱, m_۲ \in M$، اگر $k_۱ + m_۱ = k_۲ + m_۲$، آن‌گاه $k_۱ = k_۲$ و $m_۱ = m_۲$.

برهان. $k_۱ + m_۱ = k_۲ + m_۲$ نتیجه می‌دهد $k_۱ - k_۲ = m_۲ - m_۱$. اما

$$k_۱ - k_۲ = m_۲ - m_۱ \in K \cap M = \{۰\}$$

و لذا $k_۱ = k_۲$ و $m_۱ = m_۲$. □

خواص تجزیه‌ی عنصری دو حوزه‌ی T و R ارتباط تنگانگی با یکدیگر دارند که این امر را در احکام زیر نشان می‌دهیم.

لم ۲.۲.۲. اگر R اتمی باشد، آن‌گاه D میدان است.

برهان. فرض کنید D میدان نباشد. لذا عنصری مثل $d \in D^\#$ موجود است. اگر $d \in U(R)$، آن‌گاه عناصری مانند $d' \in D$ و $m' \in M$ موجودند که $d(d'+m) = ۱$ و لذا $dd' + dm = ۱$ و در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲، $dd' = ۱$ که با $d \in D^\#$ در تناقض است. بنابراین $d \in R^\#$. اینک توجه کنید که برای هر $۰ \neq m \in M$، $۰ \neq d^{-۱}m \in M$ و لذا $d^{-۱}m \in R^\#$. بنابراین $m = (d)(d^{-۱}m)$ تجزیه‌ای از m در R به طول ۲ است. بنابراین ثابت کردیم که همه‌ی عناصر ناصفر M در R تحویل‌پذیر هستند.

اینک نشان می‌دهیم که هیچ‌یک از عناصر M در R تجزیه‌ی اتمی ندارند. فرض کنید چنین نباشد. بنابراین $۰ \neq m \in M$ ای موجود است که در R دارای تجزیه‌ای اتمی مانند

$$m = (d_۱ + m_۱) \cdots (d_n + m_n)$$

است که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $d_i \in D$ و $m_i \in M$. با استفاده از لم ۱.۲.۲ می‌توان دید، $d_۱ \cdots d_n = ۰$ و لذا بدون از دست رفتن کلیت $d_۱ = ۰$. اما در این صورت $d_۱ + m_۱ = m_۱ \in \mathcal{A}(D)$ و این در حالی است که ثابت شد هیچ یک از عناصر M در R تحویل‌ناپذیر نیستند. بنابراین فرض خلف باطل است و لذا هیچ یک از عناصر M در R دارای تجزیه‌ی اتمی نیستند و در نتیجه با توجه به این‌که $M \neq ۰$، R یک حوزه‌ی اتمی نیست. □

لم ۳.۲.۲. فرض کنید D میدان باشد. در این صورت:

۱. برای هر $m \in M$، $۱ + m \in U(T)$ اگر و تنها اگر $۱ + m \in U(R)$.

۲. برای هر $m \in M$، $۱ + m \in \mathcal{A}(T)$ اگر و تنها اگر $۱ + m \in \mathcal{A}(R)$.

۳. برای هر $m \in M$، $m \in \mathcal{A}(T)$ اگر و تنها اگر $m \in \mathcal{A}(R)$.

برهان. ۱. $(\Longrightarrow)$ کافی است توجه کنید که $U(R)\subseteq U(T)$.

$(\Longleftarrow)$ $۱+m\in U(T)$ نتیجه می‌دهد، عناصری مانند $k\in K$ و $m'\in M$ موجودند که $(۱+m)(k+m')=۱$ و لذا $k+km+m'+mm'=۱$ و در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲، $k=۱$ و لذا $(۱+m)^{-۱}=k+m'=۱+m'\in R$ و در نتیجه $۱+m\in U(R)$.

۲. اثبات دو جهت مشابه است. پس فرض کنید A یکی از دو حوزه‌ی R یا T باشد و B حوزه‌ی دیگر باشد.

فرض کنید $۱+m\in\mathcal{A}(B)$. اگر $۱+m\in U(A)$، آن‌گاه بنا به قسمت ۱، $۱+m\in U(B)$ که امکان‌پذیر نیست. پس $۱+m\in A^{\#}$. حال فرض کنید $۱+m$ در A تحویل‌پذیر باشد و مثلاً $۱+m=(x_۱+m_۱)(x_۲+m_۲)$ که در آن $x_۱,x_۲\in K$ و $m_۱,m_۲\in M$ و $x_۱+m_۱\in A^{\#}$ و $x_۲+m_۲\in A^{\#}$. در این صورت

$$۱+m=x_۱x_۲+m_۲m_۱+m_۱x_۲+x_۱m_۲$$

و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $x_۱x_۲=۱$. بنابراین

$$۱+m=(x_۱)(۱+x_۱^{-۱}m_۱)(x_۲)(۱+x_۲^{-۱}m_۲)=(۱+x_۱^{-۱}m_۱)(۱+x_۲^{-۱}m_۲)$$

اما $۱+x_۱^{-۱}m_۱$ و $۱+x_۲^{-۱}m_۲$، هر دو عناصر B نیز هستند و لذا با توجه به این‌که $۱+m\in\mathcal{A}(B)$ و بدون از دست رفتن کلیت $۱+m_۱x_۱^{-۱}\in U(B)$ و لذا بنا به قسمت ۱، $۱+m_۱k_۱^{-۱}\in U(A)$ و لذا با توجه به این‌که $۱+m_۱x_۱^{-۱}\overset{A}{\sim}x_۱+m_۱$، در نهایت نتیجه می‌گیریم، $x_۱+m_۱\in U(A)$، که این امر با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و لذا $۱+m\in\mathcal{A}(A)$.

۳. مانند قسمت ۲، در این‌جا نیز اثبات هر دو جهت مشابه است، پس مجدداً فرض کنید A یکی از دو حوزه‌ی R یا T باشد و B حوزه‌ی دیگر باشد.

فرض کنید $m\in\mathcal{A}(B)$. فرض کنید $m=(x_۱+m_۱)(x_۲+m_۲)$ که در آن $x_۱,x_۲\in K$، $m_۱,m_۲\in M$ و $x_۱+m_۱,x_۲+m_۲\in A^{\#}$. در این صورت

$$m=x_۱x_۲+x_۱m_۲+x_۲m_۱+m_۱m_۲$$

و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $x_۱x_۲=۰$. اگر $x_۱=x_۲=۰$، آن‌گاه $m=m_۱m_۲$ که این امر با فرض $m\in\mathcal{A}(B)$ در تناقض است. پس بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $x_۱=۰$ و $x_۲\neq ۰$. در این صورت:

$$m=m_۱(x_۲+m_۲)=(x_۲m_۱)(۱+x_۲^{-۱}m_۲)$$

اما $x_۲m_۱\in B^{\#}$ و $m\in\mathcal{A}(B)$ و لذا $۱+m_۲x_۲^{-۱}\in U(B)$. در نتیجه بنا به قسمت ۱، $۱+m_۲x_۲^{-۱}\in U(A)$ و چون $۱+m_۲x_۲^{-۱}\overset{A}{\sim}x_۲+m_۲$، لذا $x_۲+m_۲\in U(A)$. اما این امر با این فرض که $m=(x_۱+m_۱)(x_۲+m_۲)$ یک تجزیه از m در A است، در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و لذا $m\in\mathcal{A}(A)$.

□

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $x=k+m\in T$ که در آن $m\in M$ و $k\in K$. قرار می‌دهیم:

$$\widehat{x}=\begin{cases} x(=m) & k=\circ \\ \text{۱}+k^{-\text{۱}}m & k\neq\circ \end{cases}$$

واضح است که $x\overset{T}{\sim}\widehat{x}$ و اگر D میدان باشد و $x\in R$، آنگاه $x\overset{R}{\sim}\widehat{x}$.

لم ۵.۲.۲. فرض کنید D میدان باشد. در این صورت برای هر $x\in T^{\#}$، $\mathrm{L}_T(\widehat{x})=\mathrm{L}_R(\widehat{x})$. به‌ویژه $\mathrm{L}_T(\widehat{x})=\emptyset$ اگر و تنها اگر $\mathrm{L}_R(\widehat{x})=\emptyset$.

برهان. اثبات دو جهت مشابه است. پس فرض کنید A یکی از دو حوزه‌ی R یا T باشد و B حوزه‌ی دیگر باشد.

فرض کنید $n\in\mathrm{L}_A(\widehat{x})$ و فرض کنید $\widehat{x}=(k_\text{۱}+m_\text{۱})\cdots(k_n+m_n)$ تجزیه‌ای اتمی از $\widehat{x}$ در A باشد که در آن برای هر $\text{۱}\leq i\leq n$، $k_i\in K$ و $m_i\in M$.

اگر برای هر $\text{۱}\leq i\leq n$، $k_i=\circ$، آنگاه بنا به قسمت ۳ از لم ۳.۲.۲،

$$\widehat{x}=(k_\text{۱}+m_\text{۱})\cdots(k_n+m_n)=m_\text{۱}\cdots m_n$$

تجزیه‌ای اتمی از $\widehat{x}$ در B نیز هست و لذا در این حالت، $n\in\mathrm{L}_B(\widehat{x})$.

اگر برای هر $\text{۱}\leq i\leq n$، $k_i\neq\circ$، آنگاه بنا به لم ۱.۲.۲، $k_\text{۱}\cdots k_n=\text{۱}$ و در نتیجه

$$\widehat{x}=(\text{۱}+k_\text{۱}^{-\text{۱}}m)\cdots(\text{۱}+k_n^{-\text{۱}}m_n)$$

اما $k_i+m_i\overset{A}{\sim}\text{۱}+k_i^{-\text{۱}}m_i$ و لذا $\text{۱}+k_i^{-\text{۱}}m_i\in\mathcal{A}(A)$ و در نتیجه بنا به قسمت ۲ از لم ۳.۲.۲، $\text{۱}+k_i^{-\text{۱}}m_i\in\mathcal{A}(B)$. پس در این وضع نیز $n\in\mathrm{L}_B(\widehat{x})$.

حال فرض کنید $\text{۱}\leq i\lneq n$ و بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید، $k_\text{۱}+m_\text{۱},\ldots,k_i+m_i\in M$ و $k_{i+\text{۱}}+m_{i+\text{۱}},\ldots,k_n+m_i\notin M$. در این صورت

$$\widehat{x}=(k_{i+\text{۱}}\cdots k_n m_\text{۱})\cdots(m_i)(\text{۱}+k_{i+\text{۱}}^{-\text{۱}}m_{i+\text{۱}})\cdots(\text{۱}+k_n^{-\text{۱}}m_{i+\text{۱}})$$

و لذا بنا به قسمت‌های ۲ و ۳ از لم ۳.۲.۲، باز هم $n\in\mathrm{L}_B(\widehat{x})$.

□

اکنون می‌توانیم رفتار حوزه‌های اتمی را تحت توسیع‌های $D+M$ بررسی کنیم.

قضیه ۶.۲.۲. R حوزه‌ای اتمی است اگر و تنها اگر T حوزه‌ای اتمی و D میدان باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید R حوزه‌ی اتمی باشد. در این صورت بنا به لم ۲.۲.۲، D یک میدان است. حال نشان می‌دهیم T حوزه‌ی اتمی است. فرض کنید $x\in T^{\#}$. در این صورت $\widehat{x}$ در R دارای تجزیه‌ای اتمی است و لذا $\mathrm{L}_R(\widehat{x})\neq\emptyset$ و در نتیجه بنا به لم ۵.۲.۲، $\mathrm{L}_T(\widehat{x})\neq\emptyset$ و لذا با توجه به این‌که $x\overset{T}{\sim}\widehat{x}$، داریم $\mathrm{L}_T(x)\neq\emptyset$ و در نتیجه x در T دارای تجزیه‌ای اتمی است.

برعکس، فرض کنید T حوزه‌ی اتمی و D یک میدان باشد. فرض کنید $x\in R^{\#}$. در این صورت بنا به لم ۳.۲.۲، $\widehat{x}\in T^{\#}$ و در نتیجه $\widehat{x}$ در T دارای تجزیه‌ای اتمی است و لذا $\mathrm{L}_T(\widehat{x})\neq\emptyset$ و در نتیجه

بنا به لم ۵.۲.۲، $\mathrm{L}_R(\widehat{x}) \neq \emptyset$. اینک توجه کنید که بنا به فرض D یک میدان است و لذا $\widehat{x} \overset{R}{\sim} x$ و در نتیجه $\mathrm{L}_R(x) \neq \emptyset$ و این یعنی x در R دارای تجزیه‌ای اتمی است.
□

۳.۲ حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا

در این بخش حوزه‌هایی را معرفی می‌کنیم که از حذف شرط سوم در تعریف ۱۱.۱.۲ به‌دست می‌آیند.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. D را یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا[۳] می‌گوییم، هرگاه اتمی باشد و به‌علاوه برای هر $x \in D^{\#}$ طول هر دو تجزیه‌ی اتمی از x برابر باشند (یا به‌طور معادل، $|\mathrm{L}_D(x)| = ۱$).

قضیه‌ی زیر رفتار رده‌ی حوزه‌های نیم‌یکتا را تحت توسیع‌های $D + M$ نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $M \in \mathrm{Max}(T)$ و $M \neq ۰$. به علاوه فرض کنید D زیرحلقه‌ای از K باشد و $R = D + M$. در این صورت R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است اگر و تنها اگر T یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا و D یک میدان باشد.

برهان. فرض کنید R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد. در این صورت R به‌ویژه اتمی است و لذا بنا به لم ۳.۲.۲، D یک میدان است. پس در هر دو جهت اثبات می‌توان فرض کرد D یک میدان است. فرض کنید A یکی از دو حوزه‌ی R یا T باشد و B حوزه‌ی دیگر باشد.
فرض کنید B یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۶.۲.۲، A حوزه‌ای اتمی است. فرض کنید $x \in A^{\#}$ و $n, m \in \mathrm{L}_A(\widehat{x})$. در این صورت بنا به لم ۵.۲.۲، $n, m \in \mathrm{L}_B(\widehat{x})$ و لذا با توجه به این‌که B یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است، $n = m$. این امر نشان می‌دهد که $|\mathrm{L}_A(\widehat{x})| = ۱$ و در نتیجه با توجه به این‌که $\widehat{x} \overset{A}{\sim} x$، $|\mathrm{L}_A(x)| = ۱$ و در نتیجه A نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است.
□

حال با استفاده از قضیه‌ی قبل نشان می‌دهیم حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتایی موجودند که حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا نیستند.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید $F_۱ \subseteq F_۲$ یک توسیع میدانی باشد و $R = F_۱ + XF_۲[X]$. در این صورت:

۱. R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است.

۲. R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است اگر و تنها اگر $F_۱ = F_۲$.

[۳] Half Factorization Domain یا به اختصار HFD

حل. ۱. توجه کنید که $R = F_۱ + XF_۲[X] \subseteq F_۲[X] = F_۲ + XF_۲[X]$، یک توسیع $K + M$ است و لذا حکم از این‌که $F_۲[X]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و لذا حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است و بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۲ نتیجه می‌شود.

۲. اگر $F_۱ = F_۲$، آن‌گاه $R = F_۲[X]$ و لذا R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است.

برعکس، اگر $F_۱ \neq F_۲$، آن‌گاه عنصری مثل $c \in F_۲ \setminus F_۱$ موجود است. فرض کنید $a \in F_۲^*$ و $aX = f_۱f_۲$ که در آن $f_۱, f_۲ \in R$. در این صورت $f_۱$ و $f_۲$ هر دو تک‌جمله‌ای‌هایی با درجه‌های صفر و یک و البته ناصفر خواهند بود. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $f_۱ = c_۱$ و $f_۲ = c_۲X$ که در آن $c_۱ \in F_۱^*$ و $c_۲ \in F_۲^*$. در این صورت $f_۱ \in U(R)$ و لذا $aX \in \mathcal{A}(R)$. بنابراین X, cX و $c^{-۱}X \in \mathcal{A}(R)$. اینک کافی است توجه کنید که $X^۲ = (cX)(c^{-۱}X)$ و $X^۲ = (X)(X)$ دو تجزیه‌ی اتمی از $X^۲$ در R هستند. اما $cX \not\overset{R}{\sim} X$ زیرا در غیر این صورت $u \in U(R) = F_۱^*$ای موجود خواهد بود که $ucX = X$ و لذا $uc = ۱$ و در نتیجه $c \in F_۱$ که خلاف فرض است. بنابراین دو تجزیه‌ی ذکرشده هم‌ارز نیستند و در نتیجه R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا نیست.

$\square$

قضیه‌ی زیر بیان معادلی از مفهوم حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا بودن را بر اساس توابع طول بیان می‌کند.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است.

۲. D اتمی است و برای هر $x, y \in D^*$، $\ell_D(xy) = \ell_D(x) + \ell_D(y)$.

۳. تابعی مانند $\ell\colon D^* \to \mathbb{N} \cup \{۰\}$ موجود است که:

(آ) برای هر $x, y \in D^*$، $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$.

(ب) برای هر $x \in D$، $\ell(x) = ۱$ اگر و تنها اگر $x \in \mathcal{A}(D)$.

برهان. ۱. (۲ $\Longleftarrow$ ۱) فرض کنید D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد. در این صورت D بنا به تعریف یک حوزه‌ی اتمی است.

حال فرض کنید $x, y \in D^*$. اگر یکی از دو عنصر x یا y و بدون از دست رفتن کلیت x یکه باشد، آن‌گاه:

$$\ell_D(xy) = \ell_D(y) = \ell_D(y) + ۰ = \ell_D(y) + \ell_D(x)$$

پس فرض کنید $x, y \in D^\#$ و فرض کنید $x = x_۱ \cdots x_n$ و $y = y_۱ \cdots y_m$ تجزیه‌هایی اتمی باشند. در این صورت چون D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است، $\mathrm{L}_D(x) = \{n\}$ و $\mathrm{L}_D(y) = \{m\}$. همچنین چون $xy = x_۱ \cdots x_n y_۱ \cdots y_m$ تجزیه‌ای اتمی از xy است، مجدداً بنا به حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا بودن D، $\mathrm{L}_D(xy) = \{m + n\}$. بنابراین در این وضع نیز $\ell_D(xy) = \ell_D(x) + \ell_D(y)$.

۲. (۳ $\Longrightarrow$ ۲) بنا به گزاره‌ی ۱۰.۱.۲، تابع $\ell_D\colon D^* \to \mathbb{N}$ در هر دو شرط (آ) و (ب) صدق می‌کند.

۳. (۱ $\Longrightarrow$ ۳) ابتدا نشان می‌دهیم D حوزه‌ی اتمی است. فرض کنید چنین نباشد و لذا عنصری مثل $x \in D^\#$ موجود باشد که دارای تجزیه‌ی اتمی نیست. فرض کنید $\ell(x) = n$. مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی x دارای هیچ عنصر ماکزیممی نیست زیرا در غیر این صورت بنا به لم ۳.۱.۲، هر تجزیه‌ی با آن طول الزاماً اتمی خواهد بود. بنابراین $m \in \mathbb{N}$ای موجود است که $n \lneq m$ و x دارای تجزیه‌ای به‌طول m مانند $x = x_1 \cdots x_m$ است. اما در این صورت
$$n = \ell(x) = \ell(x_1 \cdots x_m) = \ell(x_1) + \cdots + \ell(x_m) \geq m$$
که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و در نتیجه D اتمی است.

حال فرض کنید D اتمی باشد و $x \in D^\#$. فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ و $x = y_1 \cdots y_m$ دو تجزیه‌ی اتمی از x باشند. در این صورت:

$$\begin{aligned} m &= \ell(y_1) + \cdots + \ell(y_m) \\ &= \ell(y_1 \cdots y_m) = \ell(x) = \ell(x_1 \cdots x_n) \\ &= \ell(x_1) + \cdots + \ell(x_n) = n \end{aligned}$$

بنابراین طول هر دو تجزیه‌ی اتمی از x برابر هستند و لذا D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیمیکتا است.
$\square$

۴.۲ حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار

در این بخش مجدداً با تاکید روی مفهوم طول تجزیه، رده‌ی حوزه‌های تجزیه‌ی نیمیکتا را نیز تعمیم می‌دهیم. یک شرط طبیعی ضعیف‌تر از $|\mathrm{L}_D(x)| = 1$ در تعریف ۱.۳.۲، شرط "متناهی بودن $\mathrm{L}_D(x)$" است که ما را به تعریف زیر می‌رساند.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. D را یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار[۴] می‌گوییم، هرگاه اتمی باشد و به‌علاوه برای هر $x \in D^\#$، $N(x) \in \mathbb{N}$ای موجود باشد که برای هر تجزیه‌ی اتمی از x مانند $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ داشته باشیم $n \leq N(x)$ (یا به‌طور معادل، $\mathrm{L}_D(x)$ متناهی باشد).

پیش از هر چیز رفتار حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار را تحت توسیع‌های $D + M$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲.۴.۲. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $M \in \mathrm{Max}(T)$ و $M \neq 0$. به علاوه فرض کنید D زیرحلقه‌ای از K باشد و $R = D + M$. در این صورت R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است اگر و تنها اگر T یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار و D یک میدان باشد.

[۴] Bounded Factorization Domain یا به اختصار BFD

برهان. فرض کنید R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد. در این صورت R حوزه‌ی اتمی است و لذا بنا به گزاره‌ی ۱۰.۱.۲، D میدان است. بنابراین در هر دو جهت اثبات می‌توان فرض کرد D یک میدان است. اثبات دو جهت متقارن است و لذا فرض کنید A یکی از دو حوزه‌ی R یا T باشد و B حوزه‌ی دیگر باشد.

فرض کنید A یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد و $x \in B^{\#}$. در این صورت $\mathrm{L}_A(\widehat{x})$ مجموعه‌ای متناهی است و لذا بنا به لم ۵.۲.۲، $\mathrm{L}_B(\widehat{x})$ نیز مجموعه‌ای متناهی است و لذا با توجه به این‌که $x \overset{B}{\sim} \widehat{x}$، $\mathrm{L}_B(x)$ نیز مجموعه‌ای متناهی است. بنابراین T یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

$\square$

مشابه حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا، حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار را نیز می‌توان با استفاده از توابع طول تعریف کرد.

قضیه ۳.۴.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

۲. برای هر $x \in D^{\#}$، $N(x) \in \mathbb{N}$ای موجود است به‌طوری که برای هر تجزیه از x مانند $x = x_۱x_۲\cdots x_n$، $n \leq N(x)$.

۳. تابعی مانند $\ell\colon D^* \to \mathbb{N} \cup \{۰\}$ موجود است که برای هر $x, y \in D^*$:

(آ) $\ell(x) = ۰$ اگر و تنها اگر $x \in U(D)$.

(ب) $\ell(xy) \geqslant \ell(x) + \ell(y)$.

برهان. (۱ $\Longrightarrow$ ۲) کافی است توجه کنید که برای هر $x \in D^{\#}$، هر تجزیه از x را می‌توان به تجزیه‌ای اتمی و با طولی بزرگ‌تر یا مساوی، تظریف کرد. یعنی اگر $x = x_۱ \cdots x_n$ یک تجزیه از x باشد و برای هر $۱ \leq k \leq n$، $x_k = x_{۱,k} \cdots x_{\ell_k,k}$ یک تجزیه‌ی اتمی از x_k باشد، آن‌گاه

$$x = x_{۱,۱} \cdots x_{\ell_۱,۱} x_{۱,۲} \cdots x_{\ell_۲,۲} \cdots\cdots x_{۱,n} \cdots x_{\ell_n,n}$$

یک تجزیه‌ی اتمی از x و با طول $\ell_۱ + \cdots + \ell_n$ است و واضح است که $n \leq \ell_۱ + \cdots + \ell_n$. بنابراین هر کران بالا برای $\mathrm{L}_D(x)$، کرانی بالا برای مجموعه‌ی طول‌های همه‌ی تجزیه‌های x نیز هست و لذا $\mathrm{N}(x)$ را می‌توان برابر با هر یک از این کران‌ها قرار داد.

(۲ $\Longrightarrow$ ۱) برای هر $x \in D^{\#}$، بنا به فرض، تجزیه‌ای از x با طول ماکزیمم موجود است و لذا بنا به لم ۳.۱.۲، این تجزیه، یک تجزیه‌ی اتمی است. بنابراین D اتمی است. به‌علاوه توجه کنید که هر تجزیه‌ی اتمی از x، به‌ویژه یک تجزیه از x است و لذا مجدداً بنا به فرض، مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌های اتمی x کران‌دار است. بنابراین D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

(۲ $\Longrightarrow$ ۳) کافی است ℓ را برابر با ℓ_D قرار دهیم. در این صورت حکم از گزاره‌ی ۱۰.۱.۲ نتیجه می‌شود (توجه کنید که در اثبات (۱ $\Longrightarrow$ ۲) نشان دادیم، D اتمی است).

(۲ $\Longrightarrow$ ۳) برای هر $x \in D^\#$، قرار دهید $\mathrm{N}(x) := \ell(x)$. در این صورت اگر $x = x_1 \cdots x_n$ تجزیه‌ای از $x \in D^\#$ باشد، آنگاه

$$n \leq \ell(x_1) + \cdots + \ell(x_n) \leq \ell(x_1 \cdots x_n) = \ell(x) = N(x)$$

□

با استفاده از قضیه‌ی قبل می‌توان حکم زیر را در مورد نزول کران‌داری تجزیه ثابت کرد.

قضیه ۴.۴.۲. فرض کنید $A \subseteq B$ توسیعی از حوزه‌ها باشد و $A^\# \subseteq B^\#$. در این صورت اگر B حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد، آنگاه A نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

برهان. اگر B حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد، آنگاه تابعی مانند $\ell \colon B^* \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ موجود است که در شرایط قسمت ۳ از قضیه‌ی ۳.۴.۲، صدق می‌کند. واضح است که $f|_{A^*}$، یعنی تحدید این تابع به A^*، در قسمت (ب) از این شرط صدق می‌کند. حال نشان می‌دهیم، $f|_{A^*}$ در قسمت (آ) نیز صدق می‌کند.
فرض کنید $x \in A^*$. اگر $x \in U(A)$، آنگاه $x \in U(B)$ و لذا $f|_{A^*}(x) = 0$. برعکس، اگر $f|_{A^*}(x) = 0$، آنگاه $x \in U(B)$ و لذا بنا به فرض، $x \in U(A)$. □

با استفاده از این قضیه نشان می‌دهیم حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌داری موجودند که حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا نیستند.

مثال ۵.۴.۲. فرض کنید $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از زیرمیدان‌های میدانی مانند K باشد و زیرحلقه‌ی $D = \sum_{n=0}^{\infty} K_n X^n$ از $K[X]$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

۱. D حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

۲. D حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است اگر و تنها اگر برای هر $n \geqslant 1$ داشته باشیم $K_n = K_{n+1}$.

حل. ۱. توجه کنید که برای هر $f \in D^\#$، $\deg(f) \neq 0$ و لذا $f \in K[X]^\#$. بنابراین توسیع $D \subseteq K[X]$ در شرایط قضیه‌ی ۴.۴.۲ صدق می‌کند و لذا D حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

۲. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $K_n = K_{n+1}$، آنگاه $R = K_0 + XK_1[X] \subseteq T = K_1[X]$، یک توسیع $D + M$ می‌شود و لذا بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۲، R حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است.

در غیر این صورت برای $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ای عنصری مانند $a \in K_n \setminus K_{n+1}$ موجود است. نشان می‌دهیم $aX^n \in \mathcal{A}(R)$. فرض کنید چنین نباشد و برای عناصری مثل $f, g \in R^\#$، $aX^n = fg$. در این صورت f و g هر دو تک‌جمله‌ای هستند و لذا $m, \ell \lneq n$ و $b \in K_m$ و $c \in K_\ell$ موجودند که $f = bX^m$ و $g = cX^\ell$. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $\ell \leq m$. در این صورت $a = bc \in K_m K_\ell = K_\ell$ و این در حالی است که برای هر $i \lneq n$، $a \notin K_i$. بنابراین فرض خلف باطل است و $aX^n \in \mathcal{A}(R)$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $a^{-1}X^n \in \mathcal{A}(R)$ و $X \in \mathcal{A}(R)$. اینک کافی است توجه کنید که $X^{2n} = \underbrace{(X)\cdots(X)}_{\text{تا}\,2n}$ و $x = (aX^n)(a^{-1}X^n)$

دو تجزیه‌ی اتمی از $X^{۲n}$ به طول‌های ۲ و $۲n$ هستند، اما بنا به فرض $۲ \leq n$ و لذا $۲n \neq ۲$ و در نتیجه R، حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا نیست.

□

قضیه ۶.۴.۲. هر حوزه‌ی نوتری یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

برهان. فرض کنید D یک حوزه‌ی نوتری باشد که حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار نیست. در این صورت عنصری مثل $x \in D^{\#}$ موجود است، به‌طوری که $\mathrm{L}_D(x)$ نامتناهی شود. بنا به قضیه‌ی ۵.۳.۱، $\mathrm{Min}(xD)$ متناهی است. فرض کنید $\mathrm{Min}(xD) = \{P_۱, \dots, P_n\}$. بنا به قضیه‌ی ۴.۳.۱، برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\mathrm{ht}(P_i) = ۱$. حال فرض کنید $y \mid x$ که در آن $y \in R^{\#}$ و $P \in \mathrm{Min}(yR)$. با استدلالی مشابه قبل، $\mathrm{ht}(P) = ۱$ و با توجه به این‌که $xR \subsetneq yR \subseteq P$، برای $۱ \leq i \leq n$ ای $P = P_i$.

حال فرض کنید $x = x_۱ \cdots x_m$ تجزیه‌ای اتمی از x باشد. در این صورت افرازی از گردایه‌ی $\{x_۱, \dots, x_m\}$ مانند $\{A_۱ | \cdots | A_n\}$ موجود است که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $A_i \subseteq P_i$ و لذا با استفاده از اصل لانه و کبوتری، $۱ \leq i \leq n$ ای وجود دارد به‌طوری که $x \in P_i^{\lceil m/n \rceil}$.

بنابراین می‌توان دنباله‌ای از ایده‌آل‌ها مثل $\{P_{\ell_i}^{K_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ یافت که در آن $k_۱ \lneq k_۲ \lneq \cdots$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $۱ \leq \ell_i \leq n$ و $x \in P_{\ell_i}^{k_i}$. در این صورت برای $۱ \leq j \leq n$ ای دنباله‌ی فوق دارای زیردنباله‌ای مانند $\{P_j^{k'_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ است که در آن $k'_۱ \lneq k'_۲ \lneq \cdots$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $x \in P_j^{k'_i}$. اما در این صورت $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} P_j^i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} P_j^{k'_i}$. اما بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۱، $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} P_j^{k'_i} = ۰$ و در نتیجه $x = ۰$ که با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و لذا R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

□

توجه کنید که عکس قضیه‌ی قبل برقرار نیست، زیرا حتی حوزه‌های تجزیه‌ی یکتایی موجودند که نوتری نیستند (برای مثال می‌توان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های با تعداد نامتناهی متغیر روی یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا را در نظر گرفت).

۵.۲ حوزه‌های با شرط زنجیری صعودی روی ایده‌آل‌های اصلی (حوزه‌های ACCP)

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. D را یک حوزه‌ی ACCP می‌گوییم، هرگاه مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اصلی آن در شرط زنجیری صعودی صدق کند.

دو رده‌ای که تا اینجا بررسی کردیم، یعنی رده‌ی حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا و حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار، بنا به تعریف، زیررده‌هایی از رده‌ی حوزه‌های اتمی بودند. پیش از هر چیز نشان می‌دهیم که رده‌ی حوزه‌های ACCP نیز همین وضع را دارد.

قضیه ۲.۵.۲. هر حوزه‌ی *ACCP*، حوزه‌ای اتمی است.

برهان. فرض کنید D یک حوزه باشد که اتمی نیست. در این صورت عنصری مثل $x \in D^{\#}$ موجود است که دارای تجزیه‌ی اتمی نیست و به‌ویژه خود x اتم نیست و لذا $x_1, y_1 \in D^{\#}$ موجودند که $x = x_1 y_1$. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید x_1 دارای تجزیه‌ی اتمی نباشد. در این صورت $x_2, y_2 \in D^{\#}$ موجودند که $x_1 = x_2 y_2$. با ادامه‌ی همین روند به دنباله‌ی نامتناهی $xR \subsetneq x_1 R \subsetneq x_2 R \subsetneq \cdots$ می‌رسیم که این امر نشان می‌دهد، D یک حوزه‌ی ACCP نیست. $\square$

همان‌طور که دیدیم(قضیه‌ی ۶.۴.۲)، حوزه‌های نوتری، حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار هستند. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که رده‌ی حوزه‌های ACCP که تعمیمی طبیعی از حوزه‌های نوتری است، این بار رده‌ی حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار را در برمی‌گیرد.

قضیه ۳.۵.۲. هر حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار، یک حوزه‌ی *ACCP* است.

برهان. فرض کنید D یک حوزه باشد که حوزه‌ی ACCP نیست و لذا زنجیری نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی از D مانند $x_1 D \subsetneq x_2 D \subsetneq \cdots$ موجود باشد. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}$، عنصری مثل $y_{i+1} \in D^{\#}$ موجود است که $x_i = y_{i+1} x_{i+1}$. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_1 = y_2 y_3 \cdots y_n x_n$ تجزیه‌ای از x_1 به طول n است. بنابراین طول تجزیه‌های x_1 کران‌دار نیست و لذا بنا به قضیه‌ی ۳.۴.۲، D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار نیست. $\square$

لم ۴.۵.۲. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $0 \neq M \in \operatorname{Max}(T)$. به‌علاوه فرض کنید D زیرمیدانی از K باشد، $R = D + M$ و $m, n \in M \setminus \{0\}$. در این صورت:

۱. $(1+n)R \subsetneq (1+m)R$ اگر و تنها اگر $(1+n)T \subsetneq (1+m)T$.

۲. اگر $(1+n)R \subsetneq mR$ آنگاه $(1+n)T \subsetneq mT$.

۳. اگر $nR \subsetneq mR$ آنگاه $nT \subsetneq mT$.

۴. اگر $nT \subsetneq mT$، آن‌گاه عنصری مثل $\alpha \in K^*$ موجود است که $(\alpha n)R \subsetneq mR$.

۵. برای هر $x, y \in R^*$، اگر $yR \subsetneq xR$ آن‌گاه $\widehat{y}T \subsetneq \widehat{x}T$.

۶. برای هر $x, y \in T^*$، اگر $yT \subsetneq xT$ آن‌گاه عنصری مثل $\alpha \in K^*$ موجود است که $\alpha\widehat{y}R \subsetneq \widehat{x}R$.

برهان. به دلیل وجود تقارن در اثبات‌های ۱ و ۲، در این دو قسمت فرض می‌کنیم A یکی از دو حوزه‌ی R یا T باشد و B حوزه‌ی دیگر باشد.

۱. فرض کنید $(1+n)A \subsetneq (1+m)A$. در این صورت عناصری مانند $k' \in K$ و $m' \in M$ موجودند که $k' + m' \in A^{\#}$ و $(1+n)(k'+m') = 1+m$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $k' = 1$ و لذا $k' + m' \in B$ و در نتیجه $(1+n)B \subseteq (1+m)B$. اگر $(1+n)B = (1+m)B$، آن‌گاه عناصری مثل $k'' \in K$ و $m'' \in M$ موجودند که $k'' + m'' \in U(B)$ و $(1+n)(k''+m'') = (1+m)$

و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $k'' = 1$ و لذا بنا به لم ۳.۲.۲، $k'' + m'' \in U(A)$ و در نتیجه $(1+n)A = (1+m)A$ که خلاف فرض است. پس $(1+n)B \subsetneq (1+m)B$.

۲. فرض کنید $mA \subsetneq (1+n)A$. در این صورت عناصری مثل $k' \in K$ و $m' \in M$ موجودند که $k' + m' \in A^{\#}$ و $(1+n)(k'+m') = m$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $k' = 0$ و در نتیجه $k' + m' = m' \in B$ و لذا $mB \subseteq (1+n)B$. اگر $mB = (1+n)B$، آن‌گاه عناصری مانند $k'' \in K$ و $m'' \in M$ موجودند که $k'' + m'' \in U(B)$ و $m = (1+n)(k''+m'')$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $k'' = 0$ و لذا $k'' + m'' = m'' \in U(B)$ که امکان‌پذیر نیست. پس $mB \subsetneq (1+n)B$.

۳. $mR \subsetneq nR$ نتیجه می‌دهد، عناصری مانند $d \in R$ و $m' \in M$ موجودند که $d + m' \in R^{\#}$ و $m = n(d+m')$. اگر $d = 0$، آن‌گاه $d + m' \in M$ و در نتیجه $mT \subsetneq nT$. پس فرض کنید $d \neq 0$. در این صورت $m = (dn)(1 + d^{-1}m')$. اما $1 + d^{-1}m' \in T^{\#}$، زیرا در غیر این صورت بنا به لم ۳.۲.۲، $1 + d^{-1}m' \in U(R)$ و در نتیجه $m \overset{R}{\sim} dn$ و لذا $m \overset{R}{\sim} n$ که خلاف فرض است. بنابراین $mT \subsetneq (dn)T$. از سوی دیگر $n \overset{R}{\sim} dn$ و لذا $n \overset{T}{\sim} dn$ و در نتیجه $mT \subsetneq nT$.

۴. فرض کنید $mT \subsetneq nT$. در این صورت عناصری مانند $k' \in K$ و $m' \in M$ موجودند که $k' + m' \in T^{\#}$ و $n(k'+m') = m$.

اگر $k' = 0$، آن‌گاه $k' + m' = m' \in R^{\#}$ و لذا $mR \subsetneq nR$.

اگر $k' \neq 0$، آن‌گاه $m = (nk')(1 + (k')^{-1}m')$. اگر $(1 + (k')^{-1}m') \in U(R)$، آن‌گاه $(1 + (k')^{-1}m') \in U(T)$ و لذا $k'(1 + (k')^{-1}m') = k' + m' \in U(T)$ که خلاف فرض است. پس $(1 + (k')^{-1}m') \in R^{\#}$ و لذا $mR \subsetneq (k'n)R$.

۵. چون $\widehat{x}, \widehat{y} \in M \cup (1+M)$، لذا حکم از قسمت‌های ۱، ۲ و ۳ نتیجه می‌شود. توجه کنید که حالت $(1+m)R \subseteq nR$ امکان‌پذیر نیست.

۶. چون $\widehat{x}, \widehat{y} \in M \cup (1+M)$، لذا حکم از قسمت‌های ۱، ۲ و ۴ نتیجه می‌شود (در حالتی که x و y هیچ یک M نباشند، α را برابر با ۱ قرار دهید). همچنین توجه کنید که حالت $(1+m)T \subseteq nT$ امکان‌پذیر نیست.

$\square$

قضیه ۵.۵.۲. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $0 \neq M \in \mathrm{Max}(T)$. به علاوه فرض کنید D زیرحلقه‌ای از K باشد و $R = D + M$. در این صورت R حوزه‌ی $ACCP$ است اگر و تنها اگر T حوزه‌ی $ACCP$ و D یک میدان باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید R حوزه‌ی ACCP باشد. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۲.۵.۲، R یک حوزه‌ی اتمی است و لذا بنا به لم ۲.۲.۲، D یک میدان است. فرض کنید T حوزه‌ی ACCP نباشد و به تناقض می‌رسیم. در این صورت زنجیری از ایده‌آل‌های اصلی از T مانند $x_۱T \subsetneq x_۲T \subsetneq \cdots$ موجود است. با استقرا نشان می‌دهیم دنباله‌ای از عناصر K^* مثل $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ موجود است که $\alpha_۱\widehat{x_۱}R \subsetneq \alpha_۲\widehat{x_۲}R \subsetneq \cdots$. قرار دهید $\alpha_۱ = ۱$. بنا به قسمت ۵ از لم ۴.۵.۲، عنصری مثل $\alpha_۲ \in K^*$ موجود است، به‌طوری که $\alpha_۱\widehat{x_۱}R \subsetneq \alpha_۲\widehat{x_۲}R$. حال فرض کنید $n \geq ۲$ و

$$\alpha_۱\widehat{x_۱}R \subsetneq \alpha_۲\widehat{x_۲}R \subsetneq \cdots \subsetneq \alpha_n\widehat{x_n}R$$

که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\alpha_i \in K^*$. توجه کنید که $\alpha_n\widehat{x_n} \overset{T}{\sim} \widehat{x_n}$ و لذا $\alpha_n\widehat{x_n}T \subsetneq \widehat{x_{n+۱}}T$ و در نتیجه بنا به قسمت ۵ از لم ۴.۵.۲، عنصری مثل $\alpha_{n+۱}$ موجود است که $\alpha_n\widehat{x_n}R \subsetneq \alpha_{n+۱}\widehat{x_{n+۱}}R$. بنابراین ثابت کردیم $\alpha_۱\widehat{x_۱}R \subsetneq \alpha_۲\widehat{x_۲}R \subsetneq \cdots$ زنجیری نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی R است و لذا R حوزه‌ی ACCP نیست که تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و T حوزه‌ی ACCP است.

برعکس، فرض کنید T یک حوزه‌ی ACCP و D یک میدان باشد. فرض کنید R یک حوزه‌ی ACCP نباشد. در این صورت زنجیری از ایده‌آل‌های اصلی R مانند $y_۱R \subsetneq y_۲R \subsetneq \cdots$ موجود است و لذا $\widehat{y_۱}R \subsetneq \widehat{y_۲}R \subsetneq \cdots$ و لذا بنا به قسمت ۴ از لم ۴.۵.۲، $\widehat{y_۱}T \subsetneq \widehat{y_۲}T \subsetneq \cdots$ و لذا $y_۱T \subsetneq y_۲T \subsetneq \cdots$ که این امر نشان می‌دهد T حوزه‌ی ACCP نیست که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و R حوزه‌ی ACCP است. $\square$

۱.۵.۲ مثالی از یک حوزه‌ی ACCP که حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار نیست

در سراسر این بخش فرض کنید K یک میدان و T زیرتکواره‌ی جمعی از $\mathbb{Q}^+ \cup \{۰\}$ تولید شده توسط $\{۱/p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (که $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ی اعداد اول است) باشد و $R = K[X;T]$.

لم ۶.۵.۲. هر $\alpha \in T^*$ را می‌توان به شکلی یکتا به صورت

$$\alpha = n_۰ + \frac{n_۱}{p_۱} + \cdots + \frac{n_s}{p_s}$$

نوشت که در آن $s \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ و برای هر $۰ \leq i \leq s$، $n_i \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ و اگر $۰ \leq i \leq s$، آن‌گاه $۰ \leq n_i \lneq p_i$ و $n_s \neq ۰$.

برهان. وجود چنین نمایشی واضح است و لذا کافی است یکتایی آن ثابت شود.

در ادامه برای اختصار قرار می‌دهیم $v_i := v_{p_i}$ که در آن v_{p_i} تابع ارزیابی p_i-جمعی روی $\mathbb{Q}$ است. فرض کنید

$$n_۰ + \frac{n_۱}{p_۱} + \cdots + \frac{n_\ell}{p_\ell} = m_۰ + \frac{m_۱}{p_۱} + \cdots + \frac{m_k}{p_k}$$

دو نمایش از $a \in T^*$ به صورتی که ذکر شد، باشند. با برابر ۰ قرار دادن m_iها یا n_iهای اضافی می‌توان فرض کرد $\ell = k$. برای هر $۱ \leq i \leq k$،

$$\frac{(n_i - m_i)}{p_i} = (m_۰ - n_۰) + \sum_{j\neq i}\left(\frac{m_j - n_j}{p_j}\right)$$

با اعمال تابع v_i روی تساوی فوق و با توجه به این‌که برای هر $j \in \mathbb{N}$ که $j \neq i$، $v_i(p_j) = 0$ نتیجه می‌گیریم

$$v_i(n_i - m_i) - v_i(p_i) = v_i(m_0 - n_0) + \sum_{j \neq i} (v_i(m_j - n_j) - v_i(p_j)) \geq 0$$

و در نتیجه $v_i(n_i - m_i) - v_i(p_i) \geq 0$ و لذا $v_i(n_i - m_i) \geq v_i(p_i) = 1$. اما $-p_i \lneq n_i - m_i \lneq p_i$ و در نتیجه $n_i = m_i$. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq k$، $n_i = m_i$ و لذا $n_0 = m_0$. □

گزاره ۷.۵.۲. R حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار نیست.

برهان. برای هر $i \in \mathbb{N}$، $X = (X^{1/p_i})^{p_i}$ یک تجزیه از X به طول p_i است و لذا مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی x در R کران‌دار نیست و در نتیجه بنا به قسمت ۲ از قضیه‌ی ۳.۴.۲، R حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار نیست. □

گزاره ۸.۵.۲. R یک حوزه‌ی $ACCP$ است.

برهان. فرض کنید $\alpha, \beta, \gamma \in T$ و $\alpha + \beta = \gamma$ و

$$\alpha = n_0 + \frac{n_1}{p_1} + \cdots + \frac{n_i}{p_i}$$

و

$$\beta = m_0 + \frac{m_1}{p_1} + \cdots + \frac{m_j}{p_j}$$

و

$$\gamma = \ell_0 + \frac{\ell_1}{p_1} + \cdots + \frac{\ell_k}{p_k}$$

نمایش‌های یکتای این عناصر مطابق با فرم ذکر شده در لم ۶.۵.۲ باشند. قرار دهید $t = \max(i, j, k)$ و در صورت لزوم n_i، m_j یا p_iهایی اضافی را برابر با ۰ قرار دهید. اگر $n_0 = \ell_0$، آن‌گاه از

$$(n_0 + m_0) + \frac{n_1 + m_1}{p_1} + \cdots + \frac{n_t + m_t}{p_t} = \ell_0 + \frac{\ell_1}{p_1} + \cdots + \frac{\ell_t}{p_t}$$

بنا به لم ۶.۵.۲ نتیجه می‌شود، اولاً $m_0 = 0$ و به‌علاوه برای هر $1 \leq v \leq t$، $n_v + m_v \lneq p_v$. لذا مجدداً بنا به لم ۶.۵.۲، $n_v + m_c = \ell_v$ و به‌ویژه $n_v \leq \ell_v$. بنابراین یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) $n_0 \lneq \ell_0$

ب) $i \leq k$ و برای هر $1 \leq v \leq i$، $n_v \leq \ell_v$.

بنابراین:

(*) هر دنباله‌ی نزولی از عناصر T مانند $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots$ که در آن برای هر $i \in \mathbb{N}$، $t_i - t_{i+1} \in T$ سرانجام متوقف می‌شود.

حال فرض کنید $f_1R \subsetneq f_2R \subsetneq \cdots$ زنجیری صعودی از ایده‌آل‌های اصلی R باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$، از این‌که $f_{n+1} \mid f_n$ نتیجه می‌شود، $\deg(f_n) - \deg(f_{n+1}) \in T$ و لذا بنا به (*)، دنباله‌ی نزولی $\deg(f_1) \geqslant \deg(f_2) \geqslant \cdots$ سرانجام متوقف می‌شود و لذا $N \in \mathbb{N}$ ای موجود است، به‌طوری

که $\deg(f_N) = \deg(f_{N+1}) = \cdots$. اما برای هر $f, g \in R$، $\deg(f) = \deg(g)$ و $f \mid g$، نتیجه می‌دهند، عنصری از درجه‌ی صفر در R مثل h موجود است که $fh = g$. اما عناصر از درجه‌ی صفر از R در K^* قرار دارند و لذا یکه هستند و در نتیجه $f \overset{R}{\sim} g$ و لذا $fR = gR$. پس $f_N R = f_{N+1} R = \cdots$ و این یعنی زنجیر ذکر شده سرانجام متوقف می‌شود. بنابراین R حوزه‌ی ACCP است. □

۲.۵.۲ مثالی از یک حوزه‌ی اتمی که حوزه‌ی ACCP نیست

در سراسر این بخش فرض کنید K یک میدان و T زیرتکواره‌ی جمعی $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ تولیدشده توسط مجموعه‌ی $\{1/(2^{i-1}p_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ باشد که در آن $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ی اعداد اول فرد است.

به‌علاوه فرض کنید $R = K[X;T]$، $N = \{f \in R \mid f(0) \neq 0\}$ و $A = R_N$. ثابت خواهیم کرد A مثال نقض مطلوب است.

لم ۹.۵.۲. هر $\alpha \in D^*$ را می‌توان به شکلی یکتا به صورت
$$\alpha = \frac{a}{2^u} + \frac{n_0}{3} + \cdots + \frac{n_s}{2^s p_s}$$
نوشت که در آن $a, u, n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $0 \le n_i < p_i$ و $n_s \neq 0$.

برهان. واضح است که هر $\alpha \in T^*$ را می‌توان به شکل ذکر شده نوشت. بنابراین کافی است یکتایی این نمایش را ثابت کنیم.

فرض کنید
$$\frac{a}{2^u} + \frac{n_0}{3} + \cdots + \frac{n_k}{2^s p_k} = \frac{c}{2^w} + \frac{m_0}{3} + \cdots + \frac{m_\ell}{2^t p_\ell}$$
دو نمایش از عنصری مثل $\alpha \in T$ و به فرم ذکرشده باشند. با برابر صفر قرار دادن n_i و m_iهای اضافی می‌توان فرض کرد $k = \ell$. برای هر $0 \le i \le t$،
$$\frac{n_i - m_i}{2^i p_i} = \frac{c}{2^w} - \frac{a}{2^u} + \sum_{j\neq i} \left(\frac{m_j - n_j}{2^j p_j} \right)$$
v_i را تابع ارزیابی p_i-جمعی در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} v_i(n_i - m_i) - v_i(2^i p_i) &= v_i\left(\frac{n_i - m_i}{2^i p_i}\right) \\ &= v_i\left(\frac{c}{2^w}\right) + v_i\left(\frac{a}{2^u}\right) + \sum_{j\neq i} v_i \left(\frac{m_j - n_j}{2^j p_j} \right) \\ &= v_i(c) + v_i(a) + \sum_{j\neq i} v_i(m_j - n_j) \ge 0 \end{aligned}$$

و در نتیجه $1 = v_i(2^i p_i) \le v_i(n_i - m_i)$. اما $-p_i \lneq n_i - m_i \lneq p$ و لذا $n_i = m_i$. در نهایت از این‌که برای هر $0 \le i \le t$، داریم $n_i = m_i$، نتیجه می‌گیریم $a/2^u = c/2^w$. □

تعریف ۱۰.۵.۲. فرض کنید $\alpha = a/2^u + \sum_{1\le i\le s} m_i/2^i p_i \in T^*$ و این نمایش به فرم ذکر شده در لم ۹.۵.۲ باشد. قرار می‌دهیم $\psi(\alpha) := a/2^u$.

لم ۱۱.۵.۲. برای هر $k \in \mathbb{N}$، $X^{1/2^k p_k} \in \mathcal{A}(A)$.

برهان. فرض کنید عناصری مانند $f_1, f_2 \in R$ و $g_1, g_2 \in N$ موجود باشند، به‌طوری که
$$X^{1/2^k p_k} = (f_1/g_1)(f_2/g_2)$$
به‌علاوه فرض کنید $f_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i X^{\alpha_i}$ و $f_2 = \sum_{i=1}^{m} s_i X^{\beta_i}$ که در آن $\alpha_1 \lneq \alpha_2 \lneq \cdots \lneq \alpha_n$ و $\beta_1 \lneq \beta_2 \lneq \cdots \lneq \beta_m$.

در این صورت $\mathrm{ct}(g_1 g_2) X^{1/2^k p_k} = r_1 s_1 X^{\alpha_1+\beta_1}$ و در نتیجه $1/2^k p_k = \alpha_1 + \beta_1$. اکنون با استفاده از لم ۹.۵.۲، می‌توان دید یکی از دو عنصر α_1 یا β_1 و بدون از دست رفتن کلیت α_1 باید برابر با ۰ باشد و لذا $f_1 \in N$ و در نتیجه $f_1/g_1 \in U(A)$. □

قضیه ۱۲.۵.۲. A یک حوزه‌ی اتمی است.

برهان. فرض کنید $f/g \in A^{\#}$ که در آن $f \in R^{\#}$ و $g \in N$. به علاوه فرض کنید $f = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{\alpha_i}$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in K$ و $\alpha_i \in T$ و $\alpha_1 \lneq \alpha_2 \lneq \cdots \lneq \alpha_n$. قرار دهید $d = \min_{1 \leq i \leq n}(\psi(\alpha_i))$ و به علاوه فرض کنید $1 \leq j \leq n$، کوچک‌ترین عددی باشد که $d = \psi(\alpha_j)$.
در این صورت با فاکتور گرفتن از X^d خواهیم داشت، $f = X^d h$ که در آن $h = \sum_{i=1}^{n} r_i X^{\beta_i}$ و $\psi(\beta_j) = 0$. در نتیجه بنا به لم ۹.۵.۲، β_j را می‌توان به شکلی یکتا به‌صورت
$$\beta_j = \frac{n_1}{3} + \cdots + \frac{n_v}{2^v p_v}$$
نوشت.

فرض کنید $d = n/2^k$. در این صورت بنا به لم ۱۱.۵.۲، $X^d = (X^{1/2^k p_k})^{n p_k}$ تجزیه‌ای اتمی از X^d به طول $n p_k$ است.

اینک کافی است ثابت شود، طول هر تجزیه از h حداکثر برابر است با $k = n_1 + \cdots + n_v$ و در نتیجه بنا به لم ۳.۱.۲، h دارای تجزیه‌ای اتمی است. فرض کنید تجزیه‌ای به‌طول $k+1$ از h مانند
$$h = \left(\frac{h_1}{g_1}\right) \cdots \left(\frac{h_{k+1}}{g_{k+1}}\right)$$
موجود باشد و لذا
$$h g_1 \cdots g_{k+1} = h_1 \cdots h_{k+1}$$
نشان می‌دهیم، یک تک‌جمله‌ای با توان β_j در سمت چپ (و لذا در سمت راست) تساوی فوق، ظاهر می‌شود. می‌دانیم h دارای جمله‌ای با توان β_j است و به‌علاوه g_iها همگی دارای جمله‌ی ثابت ناصفر هستند. بنابراین تنها مشکل احتمالی زمانی رخ می‌دهد که $\beta_i \lneq \beta_j$ای موجود باشد که پس از ضرب در $k+1$ تک‌جمله‌ای(یعنی جملاتی از g_iهایی مختلف) تولید یک چند جمله‌ای دیگر با توان β_j کند(که چندجمله‌ای با توان β_j در h را از بین ببرد). اما چنین چیزی ممکن نیست، زیرا بنا به فرض، β_j کوچک‌ترین توانی از h است که $\psi(\beta_j) = 0$ و در نتیجه در این وضع، $0 \lneq \psi(\beta_i)$ و لذا پس از جمع β_i با هر عنصر دیگری از T نیز ψ عنصر حاصل باز هم از صفر به‌طور اکید بزرگ‌تر می‌شود.

از سوی دیگر، چون h_i/g_iها همگی غیریکه هستند، لذا h_iها همگی دارای جمله‌ی ثابت ناصفر هستند. بنابراین برای رسیدن به تناقض کافی است نشان دهیم که β_j را نمی‌توان به‌صورت حاصل‌جمعی از $k+1$ عنصر ناصفر T نوشت.

فرض کنید چنین نباشد و برای عناصری ناصفر مانند $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1} \in T$، داشته باشیم

$$\beta_j = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k+1}$$

توجه کنید که $\psi(\beta_j) = 0$ و لذا برای هر $1 \leq i \leq k+1$، $\psi(\gamma_i) = 0$. پس فرض کنید برای هر $1 \leq i \leq k+1$،

$$\gamma_i = \frac{m_{i,0}}{3} + \cdots + \frac{m_{i,v}}{2^v p_v}$$

نمایش یکتای γ_i به فرم ذکر شده در لم ۲.۵.۹ باشد.

حال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} m_{1,0} & m_{2,0} & \cdots & m_{k+1,0} \\ m_{1,1} & m_{2,1} & \cdots & m_{k+1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1,v} & m_{2,v} & \cdots & m_{k+1,v} \end{bmatrix}$$

بنا به لم ۲.۵.۹، $\sum m_{i,j} = n_1 + \cdots + n_v = k$ و در نتیجه ماترسی فوق، حداکثر دارای k ستون ناصفر است. پس یکی از ستون‌ها باید برابر صفر باشد و این یعنی یکی از γ_iها باید برابر صفر باشد که تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و در نتیجه طول هر تجزیه از h حداکثر برابر با k است. □

قضیه ۲.۵.۱۳. A، حوزه‌ی $ACCP$ نیست.

برهان. برای هر $k \in \mathbb{N}$، $(X^{\frac{1}{2^k}})/(X^{\frac{1}{2^{k+1}}}) = X^{\frac{1}{2^{k+1}}}$. اما $X^{\frac{1}{2^{k+1}}} \notin U(D)$، زیرا در غیر این صورت بنا به گزاره‌ی ۲.۴.۱، عنصری مثل $f \in A$ موجود است که $f(0) \neq 0$ و $X^{\frac{1}{2^{k+1}}} \underset{A}{|} f$ که چنین چیزی ممکن نیست. حال کافی است توجه کنید که $XA \subsetneq X^{\frac{1}{2}}A \subsetneq \cdots \subsetneq X^{\frac{1}{2^k}}A \subsetneq \cdots$ زنجیری نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی A است. □

۲.۶ حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی و حوزه‌های idf

تعریف رده‌های حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا و حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار مبتنی بر طول تجزیه است. اما با بررسی مفهوم حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا از منظری دیگر مشاهده می‌کنیم که هر عنصر از یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا، با تقریب شریک بودن، تنها تعدادی متناهی مقسوم‌علیه (تحویل‌ناپذیر) دارد. این ویژگی ما را به تعریف رده‌هایی دیگر از حوزه‌ها می‌رساند.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید D یک حوزه باشد. D را یک حوزه‌ی idf[5] می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in D^{\#}$، هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x متناهی باشد.

[5] Irreducible Divisor Finite

در صورتی که برای هر $x \in D^{\#}$ هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های x متناهی باشد، D را حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی[۶] می‌گوییم.

قضیه‌ی زیر ارتباط بین این دو رده را نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۶.۲. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

۲. D اتمی و حوزه‌ی idf است.

۳. D اتمی است و تعداد تجزیه‌های اتمی هر $x \in D^{\#}$، با تقریب هم‌ارزی، متناهی است.

برهان. ($۲ \Longrightarrow ۱$) کافی است نشان دهیم D اتمی است و برای این منظور نیز کافی است ثابت شود D یک حوزه‌ی ACCP است. فرض کنید چنین نباشد و زنجیری نامتناهی و اکیداً صعودی از ایده‌آل‌های اصلی D مانند $x_۱D \subsetneq x_۲D \subsetneq \cdots$ موجود باشد. می‌توان فرض کرد $x_۱ \neq ۰$. برای هر $i \in \mathbb{N}$، $x_i \mid x_۱$ و به‌علاوه برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ که $i \neq j$، $x_iD \neq x_jD$ و لذا $x_i \overset{D}{\not\sim} x_j$. در نتیجه $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$، یک مجموعه‌ی نامتناهی از مقسوم‌علیه‌های غیرشریک از x است و لذا D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی نیست.

($۳ \Longrightarrow ۲$) فرض کنید $x \in D^{\#}$ و $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x باشد. در این صورت هر تجزیه‌ی اتمی از x، با تقریب هم‌ارزی، به شکل $x_۱^{k_۱} \cdots x_n^{k_n}$ است که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $k_i \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$. اگر ۳ برقرار نباشد، آن‌گاه $۱ \leq i \leq n$ ای موجود خواهد بود که مجموعه‌ی توان‌های x_i در تجزیه‌های متمایز از x بی‌کران می‌شود. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $i = ۱$. بنابراین می‌توان دنباله‌ای از تجزیه‌های اتمی x (با تقریب هم‌ارزی) مانند $\Gamma = \{x_۱^{s_{k,۱}} \cdots x_n^{s_{k,n}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ یافت که $s_{۱,۱} \lneq s_{۲,۱} \lneq \cdots$. اگر برای هر $۱ \neq i \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی $\{s_{k,i}\}$ متناهی باشد، آن‌گاه $j, \ell \in \mathbb{N}$ که $k \lneq \ell$ موجودند که $s_{\ell,n} = s_{j,n}$ و ... و $s_{\ell,۲} = s_{j,۲}$ و چون $x_۱^{s_{j,۱}} \cdots x_n^{s_{j,n}} \overset{D}{\sim} x_۱^{s_{\ell,۱}} \cdots x_n^{s_{\ell,n}}$، نتیجه می‌گیریم $x_۱^{s_{j,۱}} \overset{D}{\sim} x_۱^{s_{\ell,۱}}$ و لذا $x_۱^{s_{j,۱}-s_{k,۱}} \in U(D)$ که تناقض است، زیرا $s_{k,۱} \neq s_{j,۱}$. بنابراین مجموعه‌ی توان‌های حداقل یکی دیگر از x_iها و بدون از دست رفتن کلیت $x_۲$ نیز بی‌کران است. با ادامه‌ی همین روند در نهایت به زیردنباله‌ای از Γ مانند $\{x_۱^{s'_{k,۱}} \cdots x_n^{s'_{k,n}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ می‌رسیم که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $s'_{۱,i} \lneq s'_{۲,i} \lneq \cdots$. اما در این صورت، چون $x_۱^{s'_{۱,۱}} \cdots x_n^{s'_{۱,n}} \overset{D}{\sim} x_۱^{s'_{۲,۱}} \cdots x_n^{s'_{۲,n}}$، نتیجه می‌گیریم $x_۱^{s'_{۲,۱}-s'_{۱,۱}} \cdots x_n^{s'_{۲,n}-s'_{۱,n}} \in U(D)$ که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و لذا تعداد تجزیه‌های اتمی x با تقریب هم‌ارزی متناهی است.

($۱ \Longrightarrow ۳$) فرض کنید $x \in D^{\#}$. چون D اتمی است، لذا هر مقسوم‌علیه تحویل‌ناپذیر از x، به‌عنوان یکی از مولفه‌های یکی از تجزیه‌های اتمی x ظاهر می‌شود و در نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x (با تقریب شریک بودن) متناهی است. فرض کنید $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x باشد و فرض کنید $A = \{x_۱^{s_{k,۱}} \cdots x_n^{s_{k,n}}\}_{۱\leq k\leq m}$، مجموعه‌ای کامل

---

[۶] Finite Factorization Domain یا به اختصار FFD

از تجزیه‌های اتمی D (با تقریب هم ارزی) باشد. برای هر $1 \leq i \leq n$، فرض کنید مجموعه‌ی توان‌های ممکن x_i در A، دارای ماکزیمم ℓ_i باشد. توجه کنید که مجموعه‌ی $B = \{x_1^{w_1} \cdots x_n^{w_n} | w_i \leq \ell_i\}$ متناهی است. حال فرض کنید $y \in D^{\#}$ و $y \mid x$ و لذا برای $z \in D^*$ ای $x = yz$. تجزیه‌ی $x = yz$، به یکی از تجزیه‌های اتمی x تظریف می‌شود و لذا $v_1, \ldots, v_n, t \in \mathbb{N}$ موجودند که برای هر $1 \leq i \leq n$، $v_i \leq s_{t,i}$ و $y \overset{D}{\sim} x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_m}$ و لذا y با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی B شریک است. بنابراین هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های x، با تقریب شریک بودن، زیرمجموعه‌ای از B و لذا متناهی است. در نتیجه D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است. □

نتیجه ۳.۶.۲. ۱. هر حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

۲. هر حوزه‌ی ضدماده‌ای که میدان نباشد، یک حوزه‌ی *idf* است که حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی نیست.

برهان. ۱. از صورت معادل سوم قضیه‌ی ۲.۶.۲ نتیجه می‌شود.

۲. فرض کنید D یک حوزه‌ی ضدماده باشد. واضح است که D یک حوزه‌ی idf است و اگر به‌علاوه D میدان نباشد، آنگاه اتمی نیست و لذا بنا به صورت معادل دوم از قضیه‌ی ۲.۶.۲، D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی نیست.

□

اینک رفتار حوزه‌های idf و حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی را تحت توسیع‌های $D+M$ بررسی می‌کنیم. ابتدا این کار را برای حوزه‌های idf و در سه حالت انجام می‌دهیم.

قضیه ۴.۶.۲. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $0 \neq M \in \mathrm{Max}(T)$. به علاوه فرض کنید D زیرمیدانی از K باشد و $R = D+M$. همچنین فرض کنید M شامل عنصری تحویل‌ناپذیر باشد (توجه کنید که بنا به لم ۳.۲.۲ برای هر $m \in M$، $m \in \mathcal{A}(R)$ اگر و تنها اگر $m \in \mathcal{A}(T)$. بنابراین ابهامی در این گزاره نیست). در این صورت R یک حوزه‌ی *idf* است اگر و تنها اگر T یک حوزه‌ی *idf* و گروه ضربی K^*/D^* متناهی باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید R حوزه‌ی idf باشد. فرض کنید $m \in M$ و $m \in \mathcal{A}(T)$. برای هر $\alpha \in K^*$، $\alpha^{-1}m \in M$ و لذا $\alpha m \underset{R}{\mid} m^2$. همچنین برای هر $\alpha \in K^*$، $\alpha m \overset{T}{\sim} m$ و لذا $\alpha m \in \mathcal{A}(T)$ و در نتیجه بنا به لم ۳.۲.۲، $\alpha m \in \mathcal{A}(R)$. به‌علاوه برای هر $\alpha, \beta \in K^*$، اگر $\alpha m \overset{R}{\sim} \beta m$، آنگاه عناصری مانند $d \in D^*$ و $m' \in M$ موجودند که $d + m' \in U(R)$ و $\alpha m = (d+m')\beta m$. در نتیجه $\alpha - d\beta = \beta m'$. اما $\alpha - d\beta \in K$ و $m' \in M$ و لذا $\alpha - d\beta = 0$ و در نتیجه $\alpha = d\beta$ و بنابراین $\alpha \in \beta D^*$. به همین شکل $\alpha m \overset{R}{\sim} \beta m$ نتیجه می‌دهد $\beta \in \alpha D^*$. بنابراین $\alpha D^* = \beta D^*$. برعکس، برای هر $\alpha, \beta \in K^*$، $\alpha D^* = \beta D^*$، نتیجه می‌دهد عناصری مثل $d_1, d_2 \in D^*$ موجودند که $\alpha d_1 = \alpha d_2$ و لذا $\alpha = d_1 d_2^{-1}\beta$ و در نتیجه $\alpha m \overset{R}{\sim} \beta m$.

بنابراین برای هر $m \in \mathcal{A}(R) \cap M$ و $\alpha, \beta \in K^*$، سه حکم زیر را ثابت کردیم:

(۱) $\alpha m \underset{R}{\mid} m^{۲}$.

(۲) $\alpha m \in \mathcal{A}(R)$.

(۳) $\alpha m \overset{R}{\sim} \beta m$ اگر و تنها اگر $\alpha D^* = \beta D^*$.

با استفاده از برهان خلف فرض کنید $K^*/D^* = \{\alpha D^* \mid \alpha \in K^*\}$ نامتناهی باشد. در این صورت بنا به (۳)، مجموعه‌ی $\{\alpha m \mid \alpha \in K^*\}$، دارای زیرمجموعه‌ای نامتناهی از عناصر غیر شریک در R، مانند B خواهد بود. حال توجه کنید که عناصر B بنا به (۱)، $m^{۲}$ را در R عاد می‌کنند و به‌علاوه بنا به (۲) همگی تحویل‌ناپذیرند. بنابراین هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر $m^{۲}$ در R نامتناهی است و لذا R حوزه‌ی idf نیست که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و K^*/D^* متناهی است.

حال نشان می‌دهیم T یک حوزه‌ی idf است. فرض کنید $x \in T^{\#}$ و $\{x_{۱}, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر از $\widehat{x}$ در R باشد. به‌علاوه فرض کنید $y \in \mathcal{A}(T)$ و $y \underset{T}{\mid} x$. کافی است ثابت کنیم، $۱ \leq i \leq n$ ای موجود است که $y \overset{T}{\sim} x_i$. توجه کنید که $\widehat{x}T \subseteq \widehat{y}T$ و لذا بنا به از لم ۴.۵.۲، یا $\widehat{x}R \subseteq \widehat{y}R$ و یا عناصری مثل $\widehat{x}, \widehat{y} \in M$ و $\alpha \in K^*$ موجودند که $\widehat{x}R \subseteq \alpha\widehat{y}R$. در حالت اول، $\widehat{x} \underset{R}{\mid} \widehat{y}$ و چون $\widehat{y} \in \mathcal{A}(R)$، لذا $۱ \leq i \leq n$ ای موجود است که $\widehat{y} \overset{R}{\sim} x_i$ و لذا $y \overset{T}{\sim} x_i$. در حالت دوم $\widehat{x} \underset{R}{\mid} \alpha\widehat{y}$ و چون $\widehat{y} \overset{T}{\sim} \alpha\widehat{y}$، لذا $\alpha\widehat{y} \in \mathcal{A}(T)$ و در نتیجه با توجه به این‌که $\alpha\widehat{y} \in M$ و بنا به لم ۳.۲.۲، $\alpha\widehat{y} \in \mathcal{A}(R)$. بنابراین $۱ \leq i \leq n$ ای موجود است که $\alpha\widehat{y} \overset{R}{\sim} x_i$ و لذا $\alpha\widehat{y} \overset{T}{\sim} x_i$ و لذا $\widehat{y} \overset{T}{\sim} x_i$ و در نتیجه $y \overset{T}{\sim} x_i$.

برعکس، فرض کنید T حوزه‌ی idf باشد و $\{x_{۱}, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ای کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر $\widehat{x}$ در T باشد. همچنین فرض کنید، $\{\alpha_{۱}, \ldots, \alpha_n\}$ مجموعه‌ای کامل از نماینده‌های همدسته‌های گروه K^*/D^* باشد.

حال فرض کنید $y \in \mathcal{A}(R)$ و $y \underset{R}{\mid} x$. در این صورت $\widehat{x}R \subseteq \widehat{y}R$ و بنا به لم ۳.۲.۲، $\widehat{y} \in \mathcal{A}(T)$. در نتیجه بنا به لم ۴.۵.۲، $\widehat{x}T \subseteq \widehat{y}T$ و لذا $\widehat{y} \underset{T}{\mid} \widehat{x}$ و لذا برای $۱ \leq i \leq n$ ای $\widehat{y} \overset{T}{\sim} x_i$ و لذا $y \overset{T}{\sim} x_i$. بنابراین برای $k + m \in U(T)$ ای (که $k \in K^*$ و $m \in M$)، $y(k+m) = x_i$ و لذا $yk(۱ + k^{-۱}m) = x_i$. برای $۱ \leq j \leq m$ ای α_j و $k^{-۱}$ در یک همدسته از K^*/D^* قرار دارند و لذا $\alpha_j D^* = k^{-۱}D^*$ و در نتیجه $\alpha_j k \in D^*$ و لذا $\alpha_j k \in U(R)$. همچنین $۱ + k^{-۱}m \in U(T)$ و لذا بنا به لم ۳.۲.۲، $۱ + k^{-۱}m \in U(R)$. بنابراین $(\alpha_j k)(۱ + k^{-۱}m) \in U(R)$. بنابراین $y(\alpha_j k)(۱ + k^{-۱}m) = x_i\alpha_j$ نتیجه می‌دهد $y \overset{R}{\sim} x_i\alpha_j$. پس y با تقریب شریک بودن در R برابر با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی $\{x_i\alpha_j \mid ۱ \leq i \leq n, ۱ \leq j \leq m\}$ است. بنابراین هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x در R متناهی است. لذا R حوزه‌ی idf است. $\square$

قضیه ۵.۶.۲. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $۰ \neq M \in \mathrm{Max}(T)$. به علاوه فرض کنید D زیرمیدانی از K باشد و

$R = D + M$. همچنین فرض کنید M شامل هیچ اتمی نباشد. در این صورت R یک حوزه‌ی *idf* است اگر و تنها اگر T یک حوزه‌ی *idf* باشد.

برهان. ابتدا توجه کنید که چون M شامل هیچ عنصر تحویل‌ناپذیری نیست، اتمهای R و T تنها می‌توانند به فرم $a + m$ باشند که در آن $0 \neq a \in K$ و $m \in M$.

$(\Longleftarrow)$ فرض کنید R حوزه‌ی idf باشد، $x \in T^{\#}$ و $\{x_1, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر $\widehat{x}$ در R باشد. به‌علاوه فرض کنید $y \in \mathcal{A}(T)$ و $x \underset{T}{\mid} y$. در این صورت $\widehat{x}T \subseteq \widehat{y}T$ و لذا بنا به لم ۶.۵.۲ و نکته‌ای که در ابتدای اثبات ذکر شد، $\widehat{x}R \subseteq \widehat{y}R$ و لذا $\widehat{x} \underset{R}{\mid} \widehat{y}$. اما $\widehat{y} \in \mathcal{A}(T)$ و لذا بنا به لم ۳.۲.۲، $\widehat{y} \in \mathcal{A}(R)$ و در نتیجه برای $1 \leq i \leq n$ ای، $x_i \overset{R}{\sim} \widehat{y}$ و در نتیجه $x_i \overset{T}{\sim} \widehat{y}$ و لذا $x_i \overset{T}{\sim} y$. بنابراین ثابت شد، y با تقریب شریک بودن در T، برابر با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, \ldots, x_n\}$ است. لذا T حوزه‌ی idf است.

$(\Longrightarrow)$ فرض کنید T یک حوزه‌ی idf باشد، $x \in R^{\#}$ و $\{x_1, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر $\widehat{x}$ در T باشد. به‌علاوه فرض کنید $y \in \mathcal{A}(R)$ و $x \underset{R}{\mid} y$. در این صورت $\widehat{x}R \subseteq \widehat{y}R$ و لذا $\widehat{x}T \subseteq \widehat{y}T$ و در نتیجه $\widehat{x} \underset{T}{\mid} \widehat{y}$. بنابراین با توجه به اینکه $\widehat{y} \in \mathcal{A}(T)$، برای $1 \leq i \leq n$ ای $x_i \overset{T}{\sim} \widehat{y}$ و لذا $\widehat{x}_i \overset{T}{\sim} \widehat{y}$. بنا به نکته‌ای که در ابتدای اثبات ذکر شد، $\widehat{x}_i, \widehat{y} \in 1 + M$ و مثلاً $\widehat{x}_i = 1 + m$ و $\widehat{y} = 1 + m'$ که در آن $m, m' \in M$. پس $\widehat{x}_i \overset{T}{\sim} \widehat{y}$ نتیجه می‌دهد، عناصری مانند $k \in K^*$ و $m'' \in M$ موجودند که $k + m'' \in U(T)$ و $1 + m = (1 + m')(k + m'')$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $k = 1$ و در نتیجه $\widehat{x}_i \overset{R}{\sim} \widehat{y}$ و بنابراین $y \overset{R}{\sim} x_i$. لذا y با تقریب شریک بودن در R، برابر با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, \ldots, x_n\}$ است. بنابراین R یک حوزه‌ی idf است. $\square$

نتیجه ۶.۶.۲. تحت مفروضات قضیه‌ی ۵.۶.۲، اگر T موضعی باشد، آن‌گاه هر دو حوزه‌ی R و T حوزه‌ی *idf* هستند.

برهان. اگر T موضعی باشد، آن‌گاه برای هر $m \in M$، $1 + m \in U(R)$ (زیرا در غیر این صورت $1 + m \in M$ و لذا $1 \in M$ که تناقض است). حال توجه کنید که برای هر $m \in M$ و $d \in D^*$، داریم $1 + d^{-1}m \overset{R}{\sim} d + m$ و لذا $d + m \in U(R)$. به همین شکل برای هر $m \in M$ و $k \in K^*$، $k + m \in U(T)$. از سوی دیگر بنا فرض M هم شامل هیچ اتمی نیست. لذا R و T دارای هیچ اتمی نیستند(حوزه‌ی ضدماده هستند) و لذا به شکلی بدیهی حوزه‌ی idf هستند. $\square$

اینک حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن D میدان نیست و T موضعی است. برای این کار، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۷.۶.۲. فرض کنید T حوزه‌ای موضعی باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $0 \neq M \in \operatorname{Max}(T)$. به علاوه فرض کنید D زیرحلقه‌ای از K باشد که میدان نیست. همچنین فرض کنید $0 \neq d \in D$، $0 \neq m \in M$ و $x = d + m$.

۱. اگر $x \in U(R)$، آن‌گاه $d \in U(D)$.

۲. $d \underset{R}{\mid} m$.

۳. $M \cap \mathcal{A}(R) = \emptyset$.

۴. $x \overset{R}{\sim} d$.

۵. اگر $d \in U(D)$، آن‌گاه $x \in U(R)$.

۶. $d \in \mathcal{A}(D)$ اگر و تنها اگر $x \in \mathcal{A}(R)$.

برهان. ۱. اگر $x \in U(R)$، آن‌گاه عناصری مثل $d' \in D$ و $m' \in D$ موجودند که $d'+m' \in U(R)$ و $(d+m)(d'+m) = ۱$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $dd' = ۱$ و در نتیجه $d \in U(D)$.

۲. کافی است توجه کنید که $(d)(d^{-۱}m) = m$.

۳. D میدان نیست و لذا عنصری مثل $d' \in D^{\#}$ موجود است. در نتیجه برای هر $۰ \neq m' \in M$، $m' = (d')(d'^{-۱}m')$ تجزیه‌ای به طول ۲ از m' در R است و لذا m' در R تحویل‌ناپذیر نیست.

۴. بنا به موضعی بودن R، $۱ + d^{-۱}m \in U(R)$ و لذا $x = (d)(۱ + d^{-۱}m) \overset{R}{\sim} d$

۵. از قسمت ۴ نتیجه می‌شود.

۶. فرض کنید $x \notin \mathcal{A}(D)$. اگر $x \in U(R)$، آن‌گاه بنا به قسمت ۱، $d \in U(D)$ و لذا $d \notin \mathcal{A}(D)$. اما اگر $x \in \mathrm{Red}(R)$، آن‌گاه عناصری مثل $d_۱, d_۲ \in D$ و $m_۱, m_۲ \in M$ موجودند که $d_۱ + m_۱ \in R^{\#}$ و $d_۲ + m_۲ \in R^{\#}$ و $x = (d_۱ + m_۱)(d_۲ + m_۲)$. در این صورت بنا به لم ۱.۲.۲، $d = d_۱d_۲$. از سوی دیگر بنا به قسمت ۵ و برای $i = ۱, ۲$، چون $d_i + m_i \notin U(R)$، داریم $d_i = ۰$ یا $d_i \in D^{\#}$. اما $d \neq ۰$ و لذا $d_i \in D^{\#}$ و در نتیجه $d \in \mathrm{Red}(D)$.

برعکس، فرض کنید $d \notin \mathcal{A}(D)$. اگر $d \in U(D)$، آن‌گاه بنا به قسمت ۵، $x \in U(R)$ و لذا $x \notin \mathcal{A}(R)$. اگر $d \in \mathrm{Red}(D)$، آن‌گاه برای عناصری مثل $d_۱, d_۲ \in D^{\#}$، داریم $d = d_۱d_۲$ و لذا $x = d_۱d_۲(۱ + d_۱^{-۱}d_۲^{-۱}m)$. اما بنا به قسمت ۵، $d_۱, d_۲ \in R^{\#}$ و در نتیجه $x \notin \mathcal{A}(R)$.
□

قضیه ۸.۶.۲. فرض کنید T حوزه‌ای موضعی باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $۰ \neq M \in \mathrm{Max}(T)$. به علاوه فرض کنید D زیرحلقه‌ای از K باشد که میدان نیست و $R = D + M$. در این صورت R یک حوزه‌ی *idf* است اگر و تنها اگر D، با تقریب شریک بودن، تنها شامل تعدادی متناهی عنصر تحویل‌ناپذیر باشد.

برهان. اگر R حوزه‌ی idf نباشد، آن‌گاه $x \in R^{\#}$ای موجود است به‌طوری که هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x در R نامتناهی است. فرض کنید $\{d_i + m_i\}_{i \in I}$ چنین مجموعه‌ای باشد (که در آن d_iها عضو D و m_iها عضو M هستند). بنا به قسمت ۳ از لم ۷.۶.۲، d_iها همگی ناصفر هستند و به علاوه بنا به قسمت ۶ از همان لم، d_iها در D تحویل‌ناپذیرند. بنابراین $\{d_i\}_{i \in I}$ مجموعه‌ای

نامتناهی از عناصر غیرشریک و تحویل‌ناپذیر D است (توجه کنید که برای هر $i, j \in I$، اگر $d_i \overset{D}{\sim} d_j$، آنگاه $d_i \overset{R}{\sim} d_j$).

برعکس، فرض کنید D دارای مجموعه‌ای نامتناهی از عناصر تحویل‌ناپذیر و غیرشریک(در D) مثل $\{d_i\}_{i\in I}$ باشد. بنا به قسمت ۶ از لم ۲.۶.۷، d_iها در R نیز تحویل‌ناپذیرند. از سوی دیگر برای هر $i, j \in I$ که $i \neq j$، اگر $d_i \overset{R}{\sim} d_j$، آنگاه برای $d + m \in U(R)$ای که $d \in D$ و $m \in M$، $d_i(d+m) = d_j$ و لذا بنا به لم ۲.۲.۱، $d_j = dd_i$. اما بنا به قسمت ۱ از لم ۲.۶.۷، $d \in U(D)$ و لذا $d_i \overset{D}{\sim} d_j$ که تناقض است. بنابراین d_iها در R نیز غیرشریک هستند. اینک کافی است توجه کنید که بنا به قسمت ۲ از لم ۲.۶.۷، برای هر $0 \neq m \in M$، $\{d_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی و غیرشریک از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر m است. لذا R یک حوزه‌ی idf نیست. $\square$

اکنون می‌توانیم رفتار حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی را تحت توسیع‌های $K + M$ بررسی کنیم.

قضیه ۲.۶.۹. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $0 \neq M \in \mathrm{Max}(T)$. به علاوه فرض کنید D زیرحلقه‌ای از K باشد و $R = D + M$. در این صورت R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است اگر و تنها اگر D میدان، T یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی و K^*/D^* گروهی متناهی باشد.

برهان. فرض کنید R حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد. در این صورت به‌ویژه R یک حوزه‌ی اتمی است و لذا بنا به قضیه‌ی ۲.۲.۶، D یک میدان و T یک حوزه‌ی اتمی است. همچنین توجه کنید که R حوزه‌ی idf نیز هست.

حال فرض کنید $0 \neq m \in M$ و فرض کنید $m = (d_1 + m_1) \cdots (d_n + m_n)$ یک تجزیه‌ی اتمی از m در R باشد که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $d_i \in D$ و $m_i \in m$. بنا به لم ۲.۲.۱، $d_1 \cdots d_n = 0$ و لذا برای $1 \leq i \leq n$ای $d_i = 0$ و در نتیجه $m_i \in \mathcal{A}(R)$. بنابراین بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۴، T حوزه‌ی idf است و لذا بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۲، T حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است. همچنین مجدداً بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۴، گروه K^*/D^* متناهی است.

برعکس، اولاً چون T اتمی است، لذا بنا به قضیه‌ی ۲.۲.۶، R نیز اتمی است. همچنین توجه کنید که T حوزه‌ی idf است. حال توجه کنید که مجدداً همان استدلال قبل نشان می‌دهد، M حداقل یک عنصر تحویل‌ناپذیر دارد و در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۴، R یک حوزه‌ی idf است و لذا بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۲، حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است. $\square$

با استفاده از توسیع‌های $D + M$ می‌توان مثال‌هایی حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا یافت که حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی نیستند.

مثال ۲.۶.۱۰. فرض کنید $F_1^* \subseteq F_2^*$ توسیعی میدانی باشد، به‌طوری که F_2^*/F_1^* گروهی نامتناهی شود. قرار دهید $R = F_1 + XF_2[X]$. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۲، R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است، اما بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۹، حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی نیست. همچنین، چون D اتمی است، لذا بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۲، D حوزه‌ی idf هم نیست.

همچنین حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی موجودند که حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا نیستند.

مثال ۱۱.۶.۲. فرض کنید $F_1^* \subseteq F_2^*$ توسیعی میدانی باشد و که در آن F_1 و F_2 هر دو متناهی هستند و $F_1 \neq F_2$. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۲، $R = F_1 + XF_2[X]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است، اما همان‌طور که در مثال ۳.۳.۲ دیدیم، R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا نیست.

اینک می‌خواهیم مثالی از یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی بیابیم که حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا نیست. ابتدا به یک لم نیاز داریم.

لم ۱۲.۶.۲. فرض کنید D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و A زیرحلقه‌ای از $R = D[\{X_a\}_{a\in\alpha}]$ باشد. در این صورت اگر $U(D)$ متناهی باشد یا $D \subseteq A$، آن‌گاه A یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

برهان. فرض کنید A زیرحلقه‌ای از R باشد و $f \in A^\#$. واضح است که برای متغیرهایی مثل $X_1, \dots, X_n$، $f \in B = D[X_1, \dots, X_n]$. اما B یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و در نتیجه حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است و لذا هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های f در B متناهی است. همچنین توجه کنید که هر مقسوم‌علیه f در A یک مقسوم‌علیه f در B نیز هست.

ابتدا فرض کنید $U(D)$ متناهی باشد. در این صورت چون $U(B) = U(D)$ بنا به فرض مجموعه‌ای متناهی است، لذا مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های f در B و در نتیجه در A (حتی بدون تقریب شریک بودن) متناهی است. بنابراین حکم در این وضع برقرار است.

حال فرض کنید $D \subseteq A$. در این صورت $U(A) = U(D) = U(B)$ و در نتیجه برای هر $g_1, g_2 \in A$، $g_1 \overset{B}{\sim} g_2$ اگر و تنها اگر $g_1 \overset{A}{\sim} g_2$. بنابراین هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های f در A متناهی است و در نتیجه در این حالت هم A یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است. □

مثال ۱۳.۶.۲. فرض کنید $R = D[X^2, X^3]$ که در آن D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتاست. در این صورت:

۱. R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

۲. R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا نیست.

حل. ۱. حکم بنا به لم ۱۲.۶.۲ و با توجه به این که $D \subseteq R \subseteq D[X]$ نتیجه می‌شود.

۲. داریم $X^2, X^3 \in \mathcal{A}(R)$. بنابراین $X^6 = (X^2)(X^2)(X^2)$ و $X^6 = (X^3)(X^3)$ دو تجزیه‌ی اتمی غیرهم‌طول از X^6 هستند و لذا R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا نیست.

□

فصل ۳

موضعی‌سازی

در این فصل، رفتار خواص تجزیه را تحت موضعی‌سازی بررسی می‌کنیم. ابتدا در بخش ۱.۳ نشان می‌دهیم در حالت کلی هیچ‌یک از رده‌هایی که در فصل پیش معرفی شدند، تحت موضعی‌سازی نزول نمی‌کنند. همچنین، غیر از حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا، هیچ یک از این خواص تحت موضعی‌سازی صعود نیز نمی‌کنند. اما در ادامه‌ی فصل شرایطی را بررسی خواهیم کرد که با برقراری آن‌ها، خواص تجزیه تحت موضعی‌سازی صعود یا نزول می‌کنند. این شرایط عبارت‌اند از: ۱- هنگامی که توسیع ساکن باشد، ۲- هنگامی که مجموعه‌ی ضربی شکافنده باشد و ۳- هنگامی که مجموعه‌ی ضربی، تولیدشده توسط عناصر اول باشد. ابتدا در بخش ۲.۳ این شرایط را معرفی و ارتباط بین آن‌ها را مطالعه می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۳ به این سوال پاسخ می‌دهیم که هر کدام از خواص تجزیه چه هنگام تحت موضعی‌سازی صعود می‌کنند. سپس همین کار را در بخش ۴.۳ و این بار برای نزول خواص انجام خواهیم داد.

۱.۳ خواص تجزیه و موضعی‌سازی در حالت کلی

هیچ کدام از خواص تجزیه لزوماً تحت موضعی‌سازی نزول نمی‌کنند. برای مشاهده‌ی این امر فرض کنید D یک حوزه و Δ یکی از رده‌های معرفی‌شده در فصل پیش باشد، به طوری که D از نوع Δ نباشد. حال کافی است توجه کنید که میدان کسرهای D که به‌ویژه یک موضعی‌سازی از D است، یک میدان و لذا یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و لذا دارای کلیه‌ی خواص تجزیه‌ای که ذکر کردیم هست.

اما مساله‌ی صعود این خواص تحت موضعی‌سازی، اندکی پیچیده‌تر است و در این بخش به این امر خواهیم پرداخت. پیش از هر چیز نشان می‌دهیم، یکتایی تجزیه همواره تحت موضعی‌سازی صعود می‌کند.

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی باشد. در این صورت D_S یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است.

برهان. فرض کنید $x = a/s \in D_S^{\#}$ که در آن $a \in D$ و $s \in S$. بنا به گزاره‌ی ۳.۲.۱، کافی است نشان دهیم که می‌توان x را به صورت حاصل‌ضربی از عناصر اول از D_S نوشت. فرض کنید $a = a_1 \cdots a_n$

تجزیه‌ای اتمی از a در D باشد و فرض کنید $n \leq j \leq 1$. $a_j D$ یک ایده‌آل اول از D_S است و در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۴.۴.۱، $a_j D$ یا یک ایده‌آل اول از D_S و یا برابر با کل D_S است. در حالت اول a_j در D_S عنصری اول و در حالت دوم عنصری یکه است. بنابراین همه‌ی a_iها در D_S یا اول و یا یکه هستند. توجه کنید که حداقل یکی از a_iها در D_S غیریکه است، زیرا در غیر این صورت $x \in U(D_S)$ که خلاف فرض است. پس a را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضربی از عناصر اول D_S نوشت و چون $a \overset{D_S}{\sim} x$، لذا همین امر در مورد x نیز برقرار است. □

مثال ۲.۱.۳. فرض کنید k یک میدان باشد، $T = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}$ و $D = k[X;T]$. همچنین قرار دهید $S = \{X^t \mid t \in T\}$. در این صورت:

۱. D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار (و لذا حوزه‌ی ACCP و اتمی) است.

۲. $D_S = k[X;\mathbb{Q}]$ اتمی نیست.

حل. ۱. فرض کنید $x \in D^\#$ و $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه از x در D باشد. در این صورت بنا به نتیجه‌ی ۷.۶.۱، برای هر $1 \leq i \leq n$، داریم $1 \leq \deg(x_i)$ و لذا

$$n \leq \deg(x_1 \cdots x_n) = \deg(x)$$

بنابراین قسمت ۲ از قضیه‌ی ۳.۴.۲، به ازای $N(x) = \lfloor \deg x \rfloor$ برقرار است و لذا D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

۲. بنا به قضیه‌ی ۹.۶.۱، D_S یک حوزه‌ی ب.م.م است. بنابراین اگر D_S حوزه‌ی اتمی باشد، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ۷.۱.۲، حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و به‌ویژه حوزه‌ی ACCP است. اما D_S یک حوزه‌ی ACCP نیست. برای مشاهده‌ی این امر ابتدا توجه کنید که برای هر $0 \lneq a \in \mathbb{Q}$،

$$1 + X^a = (1 + X^{a/2})(1 - X^{a/2})$$

و از سوی دیگر $(1 + X^{a/2}) \notin U(D_S)$ و $(1 - X^{a/2}) \notin U(D_S)$. بنابراین،

$$1 + X^a \subsetneq 1 + X^{a/2} \subsetneq \cdots \subsetneq 1 + X^{a/2^n} \subsetneq \cdots$$

زنجیری صعودی و نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی D_S است و لذا D_S حوزه‌ی ACCP نیست. □

مثال ۳.۱.۳. فرض کنید $D = \mathbb{Z}_{\langle 2 \rangle} + X\mathbb{R}[[X]]$ و $S = \mathbb{Z}^*$. در این صورت:

۱. D یک حوزه‌ی idf است.

۲. $D_S = \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[[X]]$ یک حوزه‌ی idf نیست.

حل. بنا به گزاره‌ی ۱۲.۷.۱، $\mathbb{Z}_{\langle 2 \rangle}$ یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته است و لذا بنا به قضیه‌ی ۱۰.۷.۱ و گزاره‌ی ۱۳.۷.۱ تنها یک عنصر تحویل‌ناپذیر دارد. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۸.۶.۲، D یک حوزه‌ی idf است. اما $D_S = \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[[X]]$ بنا به قضیه‌ی ۴.۶.۲ و با توجه این‌که $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ یک گروه نامتناهی است، حوزه‌ی idf نیست. □

مثال زیر نشان می‌دهد، حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی بودن نیز تحت موضعی‌سازی لزوماً حفظ نمی‌شود.

مثال ۴.۱.۳. فرض کنید k یک میدان باشد و

$$T = \{n + i/n! \mid n \in \mathbb{N} \cup \{۰\} \text{ و } ۰ \leq i \leq n! - ۱\}$$

دراین صورت:

۱. $D = k[X; T]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

۲. فرض کنید $S = \{X^t \mid t \in T\}$. در این صورت $D_S = k[X; \mathbb{Q}]$ و به‌علاوه D_S یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی نیست.

حل. ۱. فرض کنید $f = a_۰ + a_۱X^{t_۱} + \cdots + a_n^{t_n} \in D$ که در آن $t_۱ \lneq t_۲ \lneq \cdots \lneq t_n$. در این صورت $m \in \mathbb{N}$ و $i \leq m! - ۱$ موجودند، به‌طوری که $t_n = m + i/m!$. توجه کنید که $\frac{m+i/m!}{۱/m!} \in \mathbb{N}$ و به علاوه برای هر t_i، $k \leq m$ و $j \leq k! - ۱$ موجودند که $t_i = k + j/k!$ و لذا $\frac{k+j/k!}{۱/m!} \in \mathbb{N}$. بنابراین $\ell_۱, \ldots, \ell_n \in \mathbb{N}$ موجودند که

$$f = a_۰ + a_۱(X^{(۱/m!)})^{\ell_۱} + \cdots + a_n(X^{(۱/m!)})^{\ell_n}$$

و لذا می‌توان فرض کرد $f \in k[X^{۱/m!}]$ (توجه کنید که در این‌جا $k[X^{۱/m!}]$ و D هر دو به شکلی بدیهی زیرحلقه‌هایی از $k[X; \mathbb{Q}]$ فرض شده‌اند).

حال فرض کنید $g \in D$ و $g \underset{D}{\mid} f$. در این صورت $deg(g) \leq deg(f)$ و در نتیجه با استدلالی مشابه قبل می‌توان فرض کرد $g \in k[X^{۱/m!}]$. بنابراین تمام مقسوم‌علیه‌های f در D در واقع عضو $k[X^{۱/m!}]$ هستند. اما $k[X^{۱/m!}] \cong k[X]$ و لذا $k[X^{۱/m!}]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و در نتیجه یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است. بنابراین هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های f در $k[X^{۱/m!}]$ متناهی است. اما با توجه به این‌که $U(D) = U(k[X^{۱/m!}]) = k^*$، هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های f در D نیز متناهی است و در نتیجه D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

۲. همان‌طور که در قسمت ۲ از مثال ۲.۱.۳ ثابت شد، $k[X; \mathbb{Q}]$ حتی حوزه‌ی اتمی هم نیست. بنابراین کافی است ثابت شود $D_S = k[X; \mathbb{Q}]$. واضح است که $D_S \subseteq k[X; \mathbb{Q}]$. برعکس، کافی است ثابت شود برای هر $a, b \in \mathbb{Z}^*$، $X^{a/b} \in D_S$ و برای اثبات این امر نیز کافی است ثابت شود برای هر $b \in \mathbb{Z}^*$، $X^{۱/b} \in D_S$، زیرا $X^{a/b} = (X^{۱/b})^a$. توجه کنید که

$$b + ۱/b = b + (b - ۱)!/b! \in T$$

و همچنین $X^b \in S$. بنابراین $\frac{X^{b+۱/b}}{X^b} = X^{۱/b} \in D_S$. بنابراین $D_S \supseteq k[\mathbb{Q}]$ و لذا $D_S = k[X; \mathbb{Q}]$.

□

مثال نقضی که نشان می‌دهد نیم‌یکتایی تجزیه لزوماً تحت موضعی‌سازی صعود نمی‌کند، برای نخستین بار در مرجع [۴] ارایه شد ([۴، قضیه ۵]).

۲.۳ توسیع‌های ساکن و مجموعه‌های ضربی شکافنده

تعریف ۱.۲.۳. توسیع $A \subseteq B$ از حوزه‌ها را ساکن[۱] می‌گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in B^*$، اگر $xy \in A$، آن‌گاه عنصری مثل $u \in U(B)$ موجود باشد که $xu, xu^{-1} \in A$.

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنید $A \subseteq B$ توسیعی ساکن از حوزه‌ها باشد، $2 \lneq n \in \mathbb{N}$، $b_1, \ldots, b_n \in B^*$ و $b_1 \cdots b_n \in A$. در این صورت عناصری مانند $u_1, \ldots, u_n \in U(B)$ موجودند، به‌طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $u_i b_i \in A$ و $u_1 \cdots u_n = 1$.

برهان. حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حالت $n = 2$ همان تعریف توسیع ساکن است. حال فرض کنید $3 \leq k \in \mathbb{N}$ و فرض کنید حکم برای $n = k - 1$ برقرار باشد و حکم را برای $n = k$ ثابت می‌کنیم. داریم $b_1 \cdots b_{k-2}(b_{k-1}b_k) \in A$ و لذا بنا به فرض استقرا، عناصری مانند $u_1, \ldots, u_{k-1} \in U(B)$ موجودند که $u_1 \cdots u_{k-1} = 1$ و $u_1 b_1, \ldots, u_{k-2} b_2, u_{k-1}(b_{k-1}b_k) \in A$. لذا $(u_{k-1}b_{k-1})(b_k) \in A$ و در نتیجه بنا به ساکن بودن توسیع، عنصری مثل $v \in U(D)$ موجود است که $vu_{k-1}b_{k-1} \in A$ و $v^{-1}b_k \in A$. اینک کافی است توجه کنید که $vu_{k-1} \in U(B)$ و $u_1 \ldots u_{k-2}(vu_{k-1})(v^{-1}) = 1$. $\square$

یک مثال ساده از توسیع‌های ساکن، توسیع‌های چندجمله‌ای هستند. در واقع برای یک حوزه مانند D، توسیع $D \subseteq D[X]$ دارای این خاصیت قوی‌تر است که برای هر $f, g \in D[X]^*$، اگر $fg \in D$، آن‌گاه $f, g \in D$. چنین توسیع‌هایی را قویاً ساکن می‌گوییم.

ساکن بودن یک توسیع، به خودی خود منجربه صعود یا نزول هیچ‌یک از خواص تجزیه‌ای که معرفی کردیم نمی‌شود. ابتدا نشان می‌دهیم هیچ کدام از این خواص تحت توسیع‌های ساکن لزوماً نزول نمی‌کنند. برای این کار ابتدا به دو لم نیاز داریم.

لم ۳.۲.۳. اگر D یک حوزه‌ی بزو باشد، آن‌گاه $D \subseteq \mathrm{frac}(D)$ یک توسیع ساکن است.

برهان. فرض کنید $x = a/s, y = b/t \in \mathrm{frac}(D)^*$. بنا به گزاره‌ی ۴.۵.۱، D یک حوزه‌ی ب.م.م است و لذا می‌توان فرض کرد $\gcd(a, s) = \gcd(b, t) = 1$. حال فرض کنید $xy \in D$ و لذا عنصری مثل $d \in D$ موجود باشد که $(a/s)(b/t) = d$ و در نتیجه $ab = std$. با توجه به این‌که $\gcd(a, s) = 1$ و $s \mid ab$ و بنا به گزاره‌ی ۱۱.۵.۱، $s \mid b$. به همین شکل ثابت می‌شود، $t \mid a$. بنابراین $s/t \in U(\mathrm{frac}(D))$ و $(s/t)(a/s), (t/s)(b/t) \in D$. در نتیجه $D \subseteq \mathrm{frac}(D)$ یک توسیع ساکن است. $\square$

لم ۴.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد و $f = r_0 + r_1 X + \cdots \in R[[X]]$. در این صورت $f \in U(R[[X]])$ اگر و تنها اگر $r_0 \in U(R)$.

برهان. [۱۲، صفحه ۶] $\square$

[۱] Inert

مثال ۵.۲.۳. فرض کنید $D = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[[X]]$. در این صورت:

۱. D یک حوزه‌ی بزو است.

۲. D یک حوزه‌ی اتمی نیست.

۳. D یک حوزه‌ی idf نیست.

بنابراین با توجه به این‌که $\mathrm{frac}(D)$ یک میدان است و لذا همه‌ی خواص تجزیه را دارد، بنا به لم ۳.۲.۳ نتیجه می‌گیریم، هیچ‌یک از خواص تجزیه لزوماً تحت توسیع‌های ساکن(و حتی موضعی‌سازی‌های ساکن) نزول نمی‌کنند.

حل. ۱. فرض کنید $f, g \in D^*$ و $f = x_\circ + x_\backslash X + \cdots$ و $g = y_\circ + y_1 X + \cdots$ که در آن $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$ $(i, j \in \mathbb{N})$ و $x_\circ, y_\circ \in \mathbb{Z}$.

فرض کنید $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\circ\}$ کوچک‌ترین اعدادی باشند که x_n و y_m ناصفر شوند. در این صورت

$$f = (x_n X^n)(۱ + \frac{x_{n+1}}{x_n} X^{n+1} + \cdots)$$

اما بنا به لم ۴.۲.۳، $1 + \frac{x_{n+1}}{x_n} X^{n+1} + \cdots \in U(D)$ و لذا $f \overset{D}{\sim} x_n X^n$. به همین شکل ثابت می‌شود $g \overset{D}{\sim} y_m X^m$.

فرض کنید $x_n = a/s$ و $y_m = b/t$ که در آن $a, b, s, t \in \mathbb{Z}^*$. برای اثبات حکم کافی است ثابت شود $(a/s)X^n D + (b/t)X^m D$ یک ایده‌آل اصلی است، زیرا در این صورت $fD + gD$ نیز ایده‌آلی اصلی خواهد بود.

ابتدا فرض کنید $n \neq m$. بدون از دست رفتن کلیت می‌توان فرض کرد $n \lneq m$. چون

$$(\frac{a}{s}X^n)(\frac{sb}{at}X^{m-n}) = \frac{b}{t}X^m$$

لذا $a/sX^n \underset{D}{\mid} b/tX^m$ و در نتیجه $b/tX^m D \subseteq a/sX^n D$ و بنابراین

$$\frac{a}{s}X^n D + \frac{b}{t}X^m D = \frac{a}{s}X^n D$$

که ایده‌آلی اصلی از D است.

حال فرض کنید $m = n$. قرار دهید $d = \gcd(at, bs)$. ادعا می‌کنیم $(a/s)X^n D + (b/t)X^n D$ ایده‌آلی اصلی و برابر با $(d/st)X^n D$ است. ابتدا توجه کنید که $(d/stX^n)(at/d) = a/sX^n$ و $(d/stX^n)(bs/d) = b/tX^n$ و لذا d/stX^n هر دو عنصر $(a/s)X^n$ و $(b/t)X^n$ را در D عاد می‌کند و در نتیجه $(a/s)X^n D + (b/t)X^n D \subseteq (d/st)X^n D$. برعکس، با توجه به این‌که $\mathbb{Z}$ یک حوزه‌ی بزو است، $x, y \in \mathbb{Z}$ موجودند که $atx + bsy = d$ و لذا

$$\begin{aligned} x(\frac{a}{s}X^n) + y(\frac{b}{t}X^n) &= x(\frac{at}{ts}X^n) + y(\frac{bs}{ts}X^n) \\ &= \frac{atx + bsy}{ts}X^n = \frac{d}{st}X^n \end{aligned}$$

و در نتیجه $d/stX^nD \subseteq a/sX^nD + b/tX^nD$. بنابراین همان‌طور که می‌خواستیم ثابت شد
$$\frac{a}{s}X^nD + \frac{b}{t}X^nD = \frac{d}{st}X^nD$$

۲. بنا به قضیه‌ی ۶.۲.۲، D یک حوزه‌ی اتمی نیست.

۳. بنا به قضیه‌ی ۸.۶.۲ و با توجه به این‌که مجموعه‌ی عناصر تحویل‌ناپذیر $\mathbb{Z}$ با تقریب شریک بودن نامتناهی است، D حوزه‌ی idf نیست.

□

اکنون با استفاده از قضایای مربوط به توسیع‌های $D+M$، مثال‌های نقضی می‌سازیم که نشان می‌دهند، هیچ کدام از خواص تجزیه تحت توسیع‌های ساکن لزوماً صعود نیز نمی‌کنند.

مثال ۶.۲.۳. فرض کنید $A \subseteq B$ دو حوزه باشند. در این صورت مشابه توسیع‌های چندجمله‌ای، می‌توان دید که توسیع $A \subseteq A + XB[X]$ توسیعی ساکن است. با انتخاب‌های مناسب برای A و B نشان می‌دهیم هیچ یک از خواص تجزیه تحت توسیع‌های ساکن لزوماً صعود نمی‌کنند.
ابتدا قرار دهید $A = \mathbb{Z}$ و $B = \mathbb{Q}$. در این صورت A یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است و لذا دارای همه‌ی خواص تجزیه هست. اما بنا به قضیه‌ی ۶.۲.۲، $A+XB[X]$ حوزه‌ی اتمی(و لذا حوزه‌ی ACCP ، حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار، حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا ، حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی و حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا) نیست.
حال قرار دهید $A = \mathbb{Q}$ و $B = \mathbb{R}$. در این صورت A یک میدان و لذا یک حوزه‌ی idf است، اما بنا به قضیه‌ی ۴.۶.۲ و با توجه به این‌که $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ گروهی نامتناهی است، $A + XB[X]$ حوزه‌ی idf نیست.

یکی از دلایل اهمیت توسیع‌های ساکن در این بحث این است که عناصر تحویل‌ناپذیر تحت این توسیع‌ها هرگز دارای تجزیه‌ی غیربدیهی نمی‌شوند. یعنی:

لم ۷.۲.۳. فرض کنید $A \subseteq B$ توسیعی ساکن از حوزه‌ها باشد. در این صورت برای هر $a \in \mathcal{A}(A)$، $a \in \mathcal{A}(B)$ یا $a \in U(B)$.

برهان. فرض کنید $a \in \mathcal{A}(A)$ و $a \notin U(B)$ و عناصری مثل $x, y \in B^*$ موجود باشند که $a = xy$. کافی است ثابت شود، یکی از دو عنصر x یا y در B یکه است. بنا به ساکن بودن توسیع، $u \in U(B)$ای موجود است که $xu, yu^{-1} \in A$. اکنون توجه کنید که $a \in A$ = $(xu)(yu^{-1})$. بنابراین از این‌که $a \in \mathcal{A}(A)$ و بدون از دست رفتن کلیت نتیجه می‌گیریم، $xu \in U(A)$ و لذا $xu \in U(B)$ و در نتیجه $x \in U(B)$. □

در قضیه‌ی قبل هنگامی که به‌علاوه $A^\# \subseteq B^\#$ (برای مثال، وقتی $B = A[X]$)، حکم قوی‌تر زیر را داریم:

گزاره ۸.۲.۳. فرض کنید $A \subseteq B$ توسیعی ساکن از حوزه‌ها باشد، $A^\# \subseteq B^\#$ و $a \in A$. در این صورت $a \in \mathcal{A}(A)$ اگر و تنها اگر $a \in \mathcal{A}(B)$.

برهان. ابتدا فرض کنید $a \in \mathcal{A}(A)$. در این صورت به‌ویژه $a \in A^\#$ و لذا $a \in B^\#$ و در نتیجه بنا به لم ۷.۲.۳، $a \in \mathcal{A}(B)$.

برعکس، فرض کنید $a \in \mathcal{A}(B)$ و $a = xy$ که در آن $x, y \in A^*$. توجه کنید که $a \notin U(A)$ و در نتیجه کافی است نشان دهیم، یکی از دو عنصر x یا y در A یکه است. با توجه به این‌که $a \in \mathcal{A}(B)$ و بدون از دست رفتن کلیت $x \in U(B)$ و لذا با توجه به این‌که $A^\# \subseteq B^\#$، $x \in U(A)$. □

اینک یک حالت ملموس برای زمانی که موضعی‌سازی یک حوزه ساکن است را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه باشد و $T \subseteq D^*$. در این صورت مجموعه‌ی

$$S = \{ut_1 \cdots t_n \mid t_i \in T, 1 \leq i \leq n \text{ و برای هر } n \in \mathbb{N} \text{ و } u \in U(D)\} \cup U(D)$$

را مجموعه‌ی ضربی تولید شده توسط T می‌گوییم.[۲]

حالت خاص تعریف قبل که در این بحث مورد نظر است، زمانی است که $T \subseteq \mathcal{P}(D)$.

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی تولید شده توسط عناصر اول باشد. در این صورت $D \subseteq D_S$ یک توسیع ساکن است.

برهان. فرض کنید $x = a/s, y = b/t \in D_S^*$ ($a, b \in D$ و $x, y \in S$) و $xy \in D$.

اگر $s \in U(D)$، آن‌گاه $\gcd(a,s) = 1$. در غیر این صورت، گردایه‌ای ناتهی از عناصر $\mathcal{P}(D) \cap S$ مانند Q موجود است که $s = \Gamma(Q)$. فرض کنید B زیرگردایه‌ای از Q باشد که $\Gamma(B) \underset{D}{|} a$ و فرض کنید B نسبت به این خاصیت ماکزیمال باشد. ادعا می‌کنیم

$$\gcd(\frac{a}{\Gamma(B)}, \Gamma(Q \setminus B)) = 1$$

فرض کنید چنین نباشد. در این صورت عنصری مثل $c \in D^\#$ موجود است که $c \underset{D}{|} a/\Gamma(B)$ و $c \underset{D}{|} \Gamma(Q \setminus B)$ و لذا برای عنصری مانند $d \in D^*$، $cd = \Gamma(Q \setminus B)$. بنا به قسمت ۲ از گزاره‌ی ۶.۱.۰، افرازی از $(Q \setminus B)$ مانند $\{E_1 | E_2\}$ موجود است که $\Gamma(E_1) \underset{D}{|} c$ و $\Gamma(E_2) \underset{D}{|} d$. توجه کنید که $E_1 \neq \emptyset$، زیرا در غیر این صورت $\Gamma(Q \setminus B) \underset{D}{|} d$ و لذا $c \in U(D)$ که تناقض است. بنابراین $q \in (Q \setminus B)$ای موجود است که $q \underset{D}{|} c$ و لذا $q \underset{D}{|} a/\Gamma(B)$ و در نتیجه $\Gamma(B)q \underset{D}{|} a$. لذا با فرض ماکزیمال بودن B نسبت به خاصیت ذکرشده به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل است و $\gcd(a/\Gamma(B), \Gamma(Q \setminus B)) = 1$. حال قرار دهید $a' = a/\Gamma(B)$ و $s' = \Gamma(Q \setminus B)$ و توجه کنید $a/s = a'/s'$. به همین شکل ثابت می‌شود عناصری مانند $b' \in D$ و $s' \in S$ موجودند که $\gcd(b', s') = 1$ و $b/s = b'/s'$.

با توجه به این‌که $t' \underset{D}{|} a'b'$ و $\gcd(b', t') = 1$ و بنا به گزاره‌ی ۱۱.۵.۰، $t' \mid a'$. به همین شکل $s' \mid b'$. اینک توجه کنید که $s'/t', t'/s' \in U(D_S)$ و $(s'/t')x \in D$ و $(t'/s')y \in D$. بنابراین $D \subseteq D_S$ توسیعی ساکن است. □

[۲] در واقع این مجموعه، کوچکترین مجموعه‌ی ضربی شامل T است که شامل عناصر یکه است و به‌علاوه نسبت به ضرب در عناصر یکه بسته است.

مثال ۱۱.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه باشد. در این صورت X یک عنصر اول از $D[X]$ است و لذا اگر S را مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط X در نظر بگیریم، آنگاه توسیع $D \subseteq D_S = D[X, 1/X]$، توسیعی ساکن خواهد بود.

گزاره ۱۲.۲.۳. هر مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط عناصر اول، اشباع‌شده است.

برهان. فرض کنید D یک حوزه باشد، $A \subseteq \mathcal{P}(D)$ و فرض کنید S مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط A باشد. فرض کنید $x \underset{D}{|} s$ که در آن $x \in D^*$ و $s \in S$. اگر $s \in U(D)$، آنگاه $x \in U(D)$ و لذا $x \in S$. در غیر این صورت، گردایه‌ای متناهی از عناصر A مثل B موجود است که $s \overset{D}{\sim} \Gamma(B)$. در نتیجه بنا به قسمت ۴ از گزاره‌ی ۶.۱.۱، زیرگردایه‌ای از B مثل C موجود است که $x \overset{D}{\sim} \Gamma(C)$ و لذا $x \in S$. □

لم ۱۳.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط عناصر اول باشد و $a \in \mathcal{A}(D)$. در این صورت اگر $a \in S$، آنگاه $a \in \mathcal{P}(D)$ و اگر $a \notin S$، آنگاه a نسبت به S ک.م.م-اول است.

برهان. اگر $a \in S$، آنگاه گردایه‌ای متناهی از عناصر $S \cap \mathcal{P}(D)$ مانند A موجود است که $a \overset{D}{\sim} \Gamma(A)$. چون a تحویل‌ناپذیر است، لذا $|A| = 1$ و در نتیجه $a \in \mathcal{P}(D)$.

حال فرض کنید $a \notin S$. فرض کنید $s \in S \cap D^{\#}$ و لذا برای گردایه‌ای ناتهی و متناهی از عناصر $S \cap \mathcal{P}(D)$ مانند B، $s = \Gamma(B)$. نشان می‌دهیم $aD \cap sD \subseteq asD$. فرض کنید $x \in aD \cap sD$ و لذا عناصری مانند $y_1, y_2 \in D$ موجودند که $x = ay_1 = sy_2$ و لذا $s \underset{D}{|} ay_1$. اگر عنصری مثل $p \in B$ موجود باشد که $p \underset{D}{|} a$، آنگاه چون $a \in \mathcal{A}(D)$، خواهیم داشت $p \overset{D}{\sim} a$ و لذا $a \in S$ که خلاف فرض است. در نتیجه بنا به قسمت ۲ از گزاره‌ی ۶.۱.۱، $s \underset{D}{|} y_1$ و لذا $x = ay_1 \in asD$. بنابراین $aD \cap sD \subseteq asD$ و در نتیجه بنا به تبصره‌ی ۹.۵.۱، a نسبت به S ک.م.م-اول است. □

تعریف ۱۴.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه باشد. مجموعه‌ی ضربی $S \subseteq D$ را شکافنده[۳] می‌گوییم، هرگاه:

۱. S اشباع شده باشد.

۲. برای هر $x \in D^*$، عناصری مثل $s \in S$ و $a \in D$ موجود باشند، به‌طوری که:

(آ) $x = as$.

(ب) a نسبت به S، ک.م.م-اول باشد.

تبصره ۱۵.۲.۳. تحت مفروضات لم قبل، اگر $s \in S$ای موجود باشد که $s \mid a$، آنگاه $s \in U(D)$. زیرا در این وضع $a \in aD \cap sD$ و لذا $a \in asD$ و در نتیجه عنصری مثل $b \in D$ موجود خواهد بود که $a = asb$ و لذا $sb = 1$. به‌ویژه اگر $a \in S$، آنگاه $a \in U(D)$.

[۳] Splitting

پیش از هر چیز نشان می‌دهیم، مجموعه‌های ضربی شکافنده، موضعی‌سازی‌هایی ساکن ایجاد می‌کنند.

قضیه ۱۶.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده باشد. در این صورت $D \subseteq D_S$ توسیعی ساکن است.

برهان. فرض کنید $x, y \in D_S^*$ و $xy \in D$. عناصری مثل $a, b \in D$ و $s, t, u, v \in S$ موجودند، به‌طوری که $x = (as)/t$ و $y = (bu)/v$ و به‌علاوه a و b نسبت به S ک.م.م-اول هستند. توجه کنید که $u/v \in U(D_S)$ و همچنین $y(v/u) = b \in D$. بنابراین برای اثبات حکم کافی است ثابت شود، $(u/v)x \in D$. توجه کنید که بنا به فرض $r \in D$ای موجود است که $absu = rtv$. بنا به فرض، b نسبت به S ک.م.م-اول است و در نتیجه $bD \cap vtD = bvtD$ و لذا $absu = rtv \in bvtD$ و لذا برای $c \in D$ای $absu = bvtc$ و در نتیجه $asu = cvt$ و لذا

$$(\frac{u}{v})x = (\frac{u}{v})(\frac{as}{t}) = \frac{asu}{vt} = \frac{cvt}{t} = cv \in D$$

که همان چیزی است که به دنبال آن بودیم. $\square$

لم ۱۷.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ مجموعه‌ای ضربی اشباع شده باشد و $x, y \in D^*$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $xD_S \cap D = yD$.

۲. y نسبت به S ک.م.م اول است و به‌علاوه عنصری مانند $s \in S$ موجود است به‌طوری که $x = ys$.

برهان. (۱ $\Longleftarrow$ ۲) ابتدا نشان می‌دهیم، عنصری مثل $s \in S$ موجود است، به‌طوری که $x = ys$. توجه کنید $x \in xD_S \cap D = yD$ و در نتیجه $s \in D$ای موجود است که $x = ys$. از سوی دیگر $y \in xD_S$ و لذا $r/t' \in D_S$ای ($r \in D$ و $t' \in S$) موجود است که $yt' = xr$. بنابراین $yt' = ysr$ و لذا $t' = sr$ و در نتیجه بنا به اشباع‌شده بودن S، $s \in S$.

حال نشان می‌دهیم y نسبت به S ک.م.م-اول است. فرض کنید $t \in S$ عنصری دلخواه باشد. کافی است نشان دهیم، $yD \cap tD \subseteq ytD$. فرض کنید $z \in yD \cap tD$ و لذا برای عناصری مانند $a, b \in D$، $z = ya = tb$. بنابراین $yas = tbs$ ولذا $ax = tbs$ و در نتیجه $b = x(a/(st)) \in xR_S \cap D = yD$. بنابراین برای $c \in D$ای داریم $b = yc$ و لذا $z = tyc \in tyD$.

(۲ $\Longleftarrow$ ۱) $x \overset{R_S}{\approx} y$ و لذا $xD_S = yD_S$ و در نتیجه کافی است نشان دهیم، $yD_S \cap D = yD$. فرض کنید $z \in yD_S \cap D$ عنصری دلخواه باشد. در این صورت برای $r/t \in D_S$ای که $r \in D$ و $t \in S$، داریم $z = y(r/t)$ و لذا از این‌که $tz = yr \in yD \cap tD = ytD$، نتیجه می‌شود برای $d \in D$ای $tz = ytd$ و لذا $z = yd$ و در نتیجه $z \in yD$. بنابراین $yD_S \cap D \subseteq yD$. برعکس، واضح است که $yD \subseteq yD_S \cap D$ و در نتیجه $yD_S \cap D = yD$. $\square$

قضیه ۱۸.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ مجموعه‌ای ضربی اشباع‌شده باشد. در این صورت S شکافنده است، اگر و تنها اگر پیش‌تصویر هر ایده‌آل اصلی از D_S (تحت نگاشت کانونی $D \to D_S$)، ایده‌آلی اصلی از D شود.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $v = x/t \in D_S^*$ که در آن $x \in D$ و $t \in S$. توجه کنید که $vD_S = xD_S$. فرض کنید $x = as$ که در آن $a \in D$، $s \in S$ و a نسبت به S ک.م.م-اول است. در این صورت بنا به لم ۱۷.۲.۳، $xD_S \cap D = aD$ و لذا $vD_S \cap D = aD$.

($\Rightarrow$) فرض کنید $x \in D_S^*$ و $xD_S \cap D = yD$ که در آن $y \in D$. در این صورت بنا به لم ۱۷.۲.۳ اولاً y نسبت به S ک.م.م-اول است و به‌علاوه $s \in S$ای موجود است که $x = ys$. بنابراین S شکافنده است. □

لم ۱۹.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ مجموعه‌ای ضربی شکافنده باشد. به‌علاوه فرض کنید $as = a's'$ که در آن $a, a' \in D$ نسبت به S ک.م.م-اول هستند و $s, s' \in S$. در این صورت $a \overset{D}{\sim} a'$ و $s \overset{D}{\sim} s'$.

برهان. بنا به لم ۱۷.۲.۳، $a'D = asD_S \cap D = aD$. بنابراین $a \overset{D}{\sim} a'$ و لذا $s \overset{D}{\sim} s'$. □

هنگامی که $S \subseteq D$ شکافنده باشد، عناصر تحویل‌ناپذیر و اول D و D_S دارای ارتباطی تنگاتنگ با یکدیگر هستند. لم زیر این ارتباط را بیان می‌کند:

لم ۲۰.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ مجموعه‌ای ضربی شکافنده باشد. به‌علاوه فرض کنید $a \in D$ نسبت به S ک.م.م-اول باشد و $s \in S$. در این صورت، as در D_S تحویل‌ناپذیر(اول) است اگر و تنها اگر a در D تحویل‌ناپذیر(اول) باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید as در D_S اول باشد. در این صورت asD_s ایده‌آلی اولی از D_S است. اما بنا به لم ۱۷.۲.۳، $aD = asD_S \cap D$ و لذا aD ایده‌آلی اول از D است و در نتیجه a عنصری اول در D است.

برعکس، فرض کنید a عنصری اول از D باشد. اگر $aD \cap S \neq \emptyset$، آنگاه بنا به اشباع‌شده بودن S خواهیم داشت، $a \in S$ و لذا بنا به تبصره‌ی ۱۵.۲.۳، $a \in U(D)$ که این امر با اول بودن a در تناقض است. بنابراین $aD \cap S = \emptyset$ و لذا بنا به قضیه‌ی ۴.۴.۱، $(aD)^e = aD_S$ ایده‌آلی اول از D_S است و در نتیجه a عنصری اول از D_S است. اما $a \overset{D_S}{\sim} as$ و در نتیجه as عنصری اول از D_S است.

اینک فرض کنید $a \in \mathcal{A}(D)$. توجه کنید که a نمی‌تواند در D_S یکه باشد، زیرا در غیر این صورت بنا به گزاره‌ی ۱.۴.۱ و با توجه به اشباع‌شده بودن S، خواهیم داشت $a \in S$ و لذا بنا به تبصره‌ی ۱۵.۲.۳، $a \in U(D)$ که تناقض است. در نتیجه بنا به لم ۷.۲.۳، $a \in \mathcal{A}(D_S)$.

برعکس، اگر a در D تحویل‌پذیر باشد، آنگاه عناصری مانند $a_1, a_2 \in D^\#$ موجودند که $a = a_1a_2$. مجدداً این که a_1 یا a_2 در D_S یکه باشند ممکن نیست. بنابراین $a = a_1a_2$ یک تجزیه از a در D_S نیز هست و لذا a در D_S نیز تحویل‌پذیر است. □

تبصره ۲۱.۲.۳. واضح است که تحت مفروضات لم قبل هر $x \in D_S^*$ را می‌توان به صورت $(as)/t$ نوشت که در آن $a \in D$، $s, t \in S$ و a نسبت به S ک.م.م-اول است. بنا به این لم، a در D تحویل‌ناپذیر(اول) است اگر و تنها اگر x در D_S تحویل‌ناپذیر(اول) باشد.

لم ۲۲.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی تولید شده توسط عناصر اول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. S شکافنده است.

۲. برای هر $x \in D^\#$، $N(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ای موجود است، به‌طوری که برای هر گردایه‌ی متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D) \cap S$ مانند A، اگر $x \underset{D}{|} \Gamma(A)$، آن‌گاه $|A| \leq N(x)$.

برهان. (۲ $\Longleftarrow$ ۱) ابتدا فرض کنید S مجموعه‌ای شکافنده باشد و $x \in D^\#$. فرض کنید $x = as$ $(a \in D, s \in S)$ که در آن a نسبت به S ک.م.م-اول است. بنا به فرض، گردایه‌ای متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D) \cap S$ مانند B موجود است که $\Gamma(B) \overset{D}{\sim} s$. ادعا می‌کنیم ۲ به ازای $N(x) = |B|$ برقرار است. فرض کنید C گردایه‌ای متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D) \cap S$ باشد، به‌طوری که $x \underset{D}{|} \Gamma(C)$. در این صورت $\Gamma(C) \underset{D}{|} a\Gamma(B)$. توجه کنید که بنا به تبصره‌ی ۱۵.۲.۳، هیچ یک از عناصر C، a را عاد نمی‌کنند و لذا بنا به گزاره‌ی ۱۱.۵.۱، $\Gamma(C) \underset{D}{|} \Gamma(B)$ و در نتیجه بنا به قسمت ۳ از گزاره‌ی ۶.۱.۱، $|C| \leq |B|$.

(۱ $\Longleftarrow$ ۲) فرض کنید $x \in D^\#$ و فرض کنید $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ بزرگترین عددی باشد که به ازای آن گردایه‌ای متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D) \cap S$ مانند E موجود باشد که $|E| = n$ و $x \underset{D}{|} \Gamma(E)$. قرار دهید $a = x/(\Gamma(E))$. فرض کنید $t \in S \cap D^\#$ و $c \in aD \cap tD$. در این صورت $d \in D$ای موجود است که $ad = c \underset{D}{|} t$. در این صورت به توجه به گزاره‌ی ۱۱.۵.۱ و این‌که t، a را عاد نمی‌کند، $d \underset{D}{|} t$ و لذا $ad = c \underset{D}{|} at$ و در نتیجه $c \in atD$. در نتیجه بنا به تبصره‌ی ۹.۵.۱، $aD \cap tD = atD$. بنابراین a نسبت به S ک.م.م-اول است. همچنین بنا به گزاره‌ی ۱۲.۲.۳، S اشباع‌شده است. بنابراین S یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده است. □

مثال زیر نشان می‌دهد، مجموعه‌های ضربی تولیدشده توسط عناصر اول، لزوماً شکافنده نیستند.

مثال ۲۳.۲.۳. فرض کنید D یک حلقه‌ی ارزیابی از بعد n باشد که $1 \lneq n \in \mathbb{N}$ و به‌علاوه ایده‌آل ماکزیمال D اصلی باشد. در این صورت، عنصری مانند $p \in \mathcal{P}(P)$ موجود است که $M = pD$، ایده‌آل ماکزیمال D می‌شود. فرض کنید S مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط p باشد. در این صورت S شکافنده نیست (توجه کنید که بنا به قسمت ۲ از مثال ۱۵.۷.۱، چنین حوزه‌ای وجود دارد).

حل. بنا به قسمت ۳ از گزاره‌ی ۳.۷.۱، $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M^n$ ایده‌آل اولی از D است که تمام ایده‌آل‌های اولی از D که به‌طور سره زیرمجموعه‌ی M هستند را در بر می‌گیرد و لذا به‌ویژه ناصفر است. در نتیجه عنصری مثل $x \in D^\#$ موجود است که

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M^n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n D$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x \underset{D}{|} p^n$ و لذا بنا به لم ۲۲.۲.۳، S شکافنده نیست. □

مثال زیر نشان می‌دهد، مجموعه‌های ضربی شکافنده لزوماً تولیدشده توسط عناصر اول نیستند.

مثال ۲۴.۲.۳. فرض کنید D یک حوزه‌ی بزو باشد که حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا نیست (مثلاً حوزه‌ی مثال ۵.۲.۳) و $R = D[X]$. در این صورت:

۱. D^* تولید شده توسط عناصر اول R نیست.

۲. D^* یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده در R است.

حل. ۱. فرض کنید $f \in \mathcal{P}(R)$ و $f \in D$. در این صورت fD ایده‌آلی اول از R است و چون $fR \cap D = fD$، لذا fD ایده‌آلی اول از D است و در نتیجه $f \in \mathcal{P}(D)$. بنابراین اگر D^* تولید شده توسط عناصر اول R باشد، آنگاه تولیدشده توسط عناصر اول D نیز هست و لذا بنا به گزاره‌ی ۳.۲.۱، D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا خواهد بود که خلاف فرض است.

۲. فرض کنید $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in R^*$. بنا به گزاره‌ی ۴.۵.۱، D یک حوزه‌ی ب.م.م است. فرض کنید $d = \gcd(a_0, a_1, \cdots, a_m)$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $da'_i = a_i$ که در آن $a'_i \in D$. توجه کنید که

$$x = (d)(a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n)$$

ادعا می‌کنیم $a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n$ نسبت به D^*، ک.م.م-اول است. بنا به تبصره‌ی ۹.۵.۱، کافی است ثابت شود برای هر $t \in R^\#$،

$$(a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n)R \cap tR \subseteq (a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n)tR$$

فرض کنید $y \in (a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n)R \cap tR$. در این صورت عناصری مثل $r, r' \in R$ موجودند که $y = r'(a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n) = rt$ و لذا $t \mid r'(a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n)$. اما $\gcd(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n) = 1$ و لذا t، $(a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n)$ را عاد نمی‌کند و در نتیجه بنا به گزاره‌ی ۱۱.۵.۱، $t \mid r'$ و لذا

$$y = r'(a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n) \in t(a'_0 + a'_1X + \cdots + a'_nX^n)R$$

□

با این حال در صورت اتمی بودن حوزه، هر مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط عناصر اول، شکافنده می‌شود.

گزاره ۲۵.۲.۳. اگر D یک حوزه‌ی اتمی باشد، آنگاه هر مجموعه‌ی ضربی تولید شده توسط عناصر اول از D مجموعه‌ای شکافنده است.

برهان. فرض کنید S یک مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط عناصر اول باشد. ابتدا توجه کنید که S بنا به گزاره‌ی ۱۲.۲.۳، اشباع‌شده است. حال فرض کنید $x \in D^\#$ و فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$، تجزیه‌ای اتمی از x باشد. ادعا می‌کنیم قسمت ۲ از لم ۲۲.۲.۳ به ازای $N(x) = n$ برقرار است. فرض کنید چنین نباشد و گردایه‌ای متناهی از عناصر $\mathcal{P}(D) \cap S$ مانند A موجود باشد، به‌طوری که $n \lneq |A|$ و $x_1 \cdots x_n \mid \Gamma(A)$. در این صورت بنا به قسمت ۲ از گزاره‌ی ۶.۱.۱ و اصل لانه و کبوتری، $1 \leq i \leq n$ ای و همچنین زیرگردایه‌ای از A مانند B موجودند که $2 \leq |B|$ و $x_i \mid \Gamma(B)$ که این امر با تحویل‌ناپذیر بودن x_i در تناقض است. □

۳.۳ شرایطی برای صعود خواص تجزیه تحت موضعی‌سازی

همان‌طور که نشان دادیم، هیچ‌یک رده‌های حوزه‌های اتمی، حوزه‌های ACCP، حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار و حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی، نه لزوماً تحت موضعی‌سازی صعود می‌کنند و نه تحت توسیع‌های ساکن. اما هنگامی که یک توسیع همزمان هر دو ویژگی را داشته باشد، هر چهار خاصیت صعود می‌کنند.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید D یک حوزه‌ی اتمی و $S \subseteq D$ مجموعه‌ای ضربی باشد، به‌طوری که $D \subseteq D_S$ توسیعی ساکن شود. در این صورت D_S نیز حوزه‌ای اتمی است.

برهان. فرض کنید D اتمی باشد و $x = a/s \in D_S^{\#}$ که در آن $a \in D^*$ و $s \in S$. توجه کنید که $a \in D_S^{\#}$، زیرا در غیر این صورت $x \in U(D_S)$. فرض کنید $a = a_1 \cdots a_n$ یک تجزیه‌ی اتمی از a در D باشد. بنا به لم ۷.۲.۳، برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in \mathcal{A}(D_S)$ یا $a_i \in U(D_S)$. توجه کنید که حداقل یکی از a_iها در D_S غیریکه و لذا تحویل‌ناپذیر است، زیرا در غیر این صورت $a \in U(D_S)$. بنابراین a در D_S دارای تجزیه‌ای اتمی است و لذا با توجه به این‌که $a \overset{D_S}{\sim} x = a/s$، x نیز در D_S دارای تجزیه‌ای اتمی است. $\square$

لم ۲.۳.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ مجموعه‌ای ضربی باشد به‌طوری که $D \subseteq D_S$ توسیعی ساکن شود. در این صورت برای هر $x_1 \in D^*$ و $x_2 \in D_S^*$، اگر $x_1 D_S \subsetneq x_2 D_S$، آن‌گاه عنصری مثل $y_2 \in D$ موجود است که $x_1 D \subsetneq y_2 D$ و $x_2 \overset{D_S}{\sim} y_2$.

برهان. $x_1 D_S \subsetneq x_2 D_S$ نتیجه می‌دهد $x_2 \underset{D_S}{\mid} x_1$ و $x_1 \overset{D_S}{\not\sim} x_2$. بنابراین عنصری مانند $y \in D_S^{\#}$ موجود است که $y x_2 = x_1 \in D$ و در نتیجه بنا به ساکن بودن توسیع $D \subseteq D_S$، $u \in U(D_S)$ای موجود است که $u x_2, u^{-1} y \in D$ و لذا با توجه به این که $(u x_2)(u^{-1} y) = x_1$، $u x_2 \underset{D}{\mid} x_1$ و در نتیجه $x_1 D \subseteq (u x_2) D$. حال توجه کنید که از یک سو $x_2 \overset{D_S}{\sim} u x_2$ و از سوی دیگر $u^{-1} y \notin U(D_S)$ (زیرا در غیر این صورت، $y \in U(D_S)$ که خلاف فرض است) و در نتیجه $x_1 D \subsetneq (u x_2) D$. $\square$

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی باشد، به‌طوری که $D \subseteq D_S$ توسیعی ساکن شود. در این صورت اگر D حوزه‌ی $ACCP$ باشد، آن‌گاه D_S نیز حوزه‌ی $ACCP$ است.

برهان. فرض کنید D_S حوزه‌ی ACCP نباشد. دراین صورت زنجیری نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی در D_S مانند $x_1 D_S \subsetneq x_2 D_S \subsetneq \cdots$ موجود است. فرض کنید $x_1 = a/s$ که در آن $a \in D$ و $s \in S$. در این صورت $a D_S \subsetneq x_2 D_S \subsetneq x_3 D_S \subsetneq \cdots$ نیز زنجیری نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی در D_S است. ادعا می‌کنیم دنباله‌ای از عناصر D مانند $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ موجود است، به‌طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \overset{D_S}{\sim} y_n$ و به علاوه $y_n D \subsetneq y_{n+1} D$. در این وضع D حوزه‌ی ACCP نخواهد بود زیرا $y_1 D \subsetneq y_2 D \subsetneq \cdots$ زنجیری نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی از D خواهد شد. وجود y_1 از لم ۲.۳.۳ نتیجه می‌شود. حال فرض کنید $k \in \mathbb{N}$، $y_1 D \subsetneq \cdots \subsetneq y_k D$ و برای هر $1 \leq i \leq k$، $x_i \overset{D_S}{\sim} y_i$. در این صورت $y_k D_S \subsetneq x_{k+1} D_S$ و لذا بنا به لم ۲.۳.۳، $y_{k+1} \in D$ای موجود است که $x_{k+1} \overset{D_S}{\sim} y_{k+1}$ و $y_k D \subsetneq y_{k+1} D$ و لذا y_{k+1} با خاصیت ذکر شده وجود دارد. $\square$

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی باشد، به‌طوری که $D \subseteq D_S$ توسیعی ساکن شود. در این صورت اگر D حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد، آن‌گاه D_S نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

برهان. فرض کنید D حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد و فرض کنید $x = r/s \in D_S^{\#}$ که در آن $r \in D^{\#}$ و $s \in S$. با توجه به این‌که $x \overset{D_S}{\sim} r$ و بنا به قسمت ۲ از قضیه‌ی ۳.۴.۲، کافی است نشان دهیم مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی r در D_S کران‌دار است. ابتدا توجه کنید که مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی r در D دارای کرانی مانند $n \in \mathbb{N}$ است. حال فرض کنید $r = x_1 \cdots x_m$ تجزیه‌ای از r در D_S باشد. در این صورت بنا به گزاره‌ی ۲.۲.۳، عناصر یکه‌ای از D_S مانند $u_1, \ldots, u_m$ موجودند که $u_1 \cdots u_m = 1$ و به‌علاوه برای هر $1 \leq i \leq m$، $u_i x_i \in D^{\#}$. بنابراین $r = (u_1 x_1) \cdots (u_m x_m)$ تجزیه‌ای به‌طول m از r در D است و در نتیجه $m \leq n$. بنابراین همان‌طور که می‌خواستیم ثابت شد طول تجزیه‌های x در D_S دارای کران است. □

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی باشد، به‌طوری که $D \subseteq D_S$ توسیعی ساکن شود. در این صورت اگر D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه D_S نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

برهان. فرض کنید $x = a/s \in D_S^{\#}$ که در آن $a \in D^{\#}$ و $s \in S$. فرض کنید $y = b/t \in D_S^{*}$ که در آن $b \in D$ و $t \in S$ و فرض کنید $y \underset{D_S}{|} x$. در این صورت $y \underset{D_S}{|} a$ و لذا برای $z \in D_S$ ای $zy = a \in D$. بنا به ساکن بودن توسیع، $u \in U(D_S)$ ای موجود است به‌طوری که $yu, zu^{-1} \in D$. حال فرض کنید $\{x_1, \ldots x_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های a در D باشد. در این صورت $1 \leq i \leq n$ ای موجود است که $yu \overset{D}{\sim} x_i$ و لذا $y \overset{D_S}{\sim} x_i$. پس نشان دادیم، y با تقریب شریک بودن در D_S برابر با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, \ldots x_n\}$ است و لذا هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های x در D_S نیز متناهی است. لذا D_S یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است. □

برای مثال بنا به مثال ۱۱.۲.۳، هنگامی که D یک حوزه و $D[X]$ یک حوزه‌ی اتمی، حوزه‌ی ACCP ، حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار یا حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه $D[X, 1/X]$ نیز همان خاصیت را دارد.

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید D یک حوزه باشد و $S \subseteq D$، یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده باشد. در این صورت:

۱. اگر D حوزه‌ی *idf* باشد، آن‌گاه D_S نیز حوزه‌ی *idf* است.

۲. اگر D حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد، آن‌گاه D_S نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است.

برهان. ۱. فرض کنید $x = a/s \in D_S^{\#}$ و $y = (bw)/t \in \mathcal{A}(D_S)$ که در آن $a, b \in D$ و $s, t, w \in S$ و b نسبت به D ک.م.م–اول است و فرض کنید $y \underset{D_S}{|} x$. در این صورت $b \underset{D_S}{|} a$

و در نتیجه برای $u/v \in D_S$ای ($u \in D$ و $v \in S$)، $b(u/v) = a$ و لذا $bu = av$. اینک توجه کنید که

$$av = bu \in bR \cap vR = bvR$$

بنابراین برای $z \in D$ای $av = bvz$ و لذا $a = bz$ و در نتیجه $b \underset{D}{\mid} a$. از سوی دیگر بنا به تبصره‌ی ۲۱.۲.۳، $b \in \mathcal{A}(D)$ و لذا b یک مقسوم‌علیه تحویل‌ناپذیر a در D است. اما D بنا به فرض یک حوزه‌ی idf است. فرض کنید $\{a_1, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر a در D باشد. در این صورت b با تقریب شریک بودن در D (و لذا در D_S) برابر با یکی از a_iها است. اما $y \overset{D_S}{\sim} b$ و در نتیجه y نیز با تقریب شریک بودن در D_S، با یکی از عناصر مجموعه‌ی $\{a_1, \dots, a_n\}$ برابر است. بنابراین هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x در D_S متناهی است. لذا D_S یک حوزه‌ی idf است.

۲. فرض کنید D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد. در این صورت به‌ویژه D اتمی است و لذا بنا به قضیه‌های ۱۶.۲.۳ و ۱.۳.۳، D_S حوزه‌ای اتمی است. فرض کنید $x \in D_S^{\#}$ و فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ و $x = y_1 \cdots y_m$ دو تجزیه‌ی اتمی از x در D_S باشند. برای هر $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le m$ و با استفاده از تبصره‌ی ۲۱.۲.۳، فرض کنید $x_i = (a_i s_i)/t_i$ و $y_j = (b_j u_j)/v_j$ که در آن $u_j \in S$ وt_i, v_j, s_i و $a_i, b_j \in \mathcal{A}(D)$ و به‌علاوه a_i و b_j نسبت به S ک.م.م–اول باشند. در این صورت از $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$ نتیجه می‌شود، عناصری مثل $s, t \in S$ موجودند که $a_1 \cdots a_n s = b_1 \cdots b_m t$. اما بنا به لم ۱۰.۵.۱، $a_1 \cdots a_n$ و $b_1 \cdots b_m$ نسبت به S ک.م.م–اول هستند و لذا بنا به لم ۱۹.۲.۳، $y_1 \cdots y_m \overset{D}{\sim} x_1 \cdots x_n$ و چون D حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است، لذا $m = n$. بنابراین D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است.

□

۴.۳ شرایطی برای نزول خواص تجزیه تحت موضعی‌سازی

اینک نزول خواص تجزیه را تحت موضعی‌سازی بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده باشد، به‌طوری که هر عنصر غیریکه از S در D دارای تجزیه‌ای اتمی باشد. در این صورت اگر D_S اتمی باشد، آن‌گاه D نیز اتمی است.

برهان. فرض کنید $x \in D^{\#}$ و $x = as$ که در آن $a \in D$، $s \in S$ و a نسبت به S ک.م.م–اول است. فرض کنید

$$a = \left(\frac{a_1 s_1}{t_1}\right) \cdots \left(\frac{a_n s_n}{t_n}\right)$$

تجزیه‌ای اتمی از a در D_S باشد که در آن برای هر $1 \le i \le n$، $s_i, t_i \in S$ و $a_i \in D$ و a_i نسبت به S ک.م.م–اول است. داریم $at_1 \cdots t_n = (a_1 \cdots a_n)(s_1 \cdots s_n)$. بنا به لم ۱۰.۵.۱، $a_1 \cdots a_n$ نسبت

به S ک.م.م-اول است. در نتیجه بنا به لم ۱۹.۲.۳، $a \overset{D}{\sim} a_1 \dots a_n$. از سوی دیگر بنا به تبصره‌ی ۲۱.۲.۳، برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in \mathcal{A}(D)$ و در نتیجه a در D دارای تجزیه‌ای اتمی است. همچنین بنا به فرض، s یا یکه و یا حاصل‌ضربی از عناصر تحویل‌ناپذیر در D است و در نتیجه $x = as$ در D دارای تجزیه‌ای اتمی است. □

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده و تولید شده توسط عناصر اول باشد. در این صورت اگر D_S حوزه‌ی $ACCP$ باشد، آن‌گاه D نیز حوزه‌ی $ACCP$ است.

برهان. با استفاده از برهان خلف فرض کنید D_S حوزه‌ی ACCP باشد، اما D حوزه‌ی ACCP نباشد. در این صورت زنجیری نامتناهی از ایده‌آل‌های اصلی در D مانند $x_1 D \subsetneq x_2 D \subsetneq \cdots$ موجود است. فرض کنید برای هر $i \in \mathbb{N}$، $x_i = a_i s_i$ که در آن $s_i \in S$، $a_i \in D$ و a_i نسبت به S ک.م.م-اول است. بنا به فرض $i \in \mathbb{N}$ای موجود است که $x_i D_S = x_{i+1} D_S = x_{i+2} D_S = \cdots$. بنابراین برای هر $j, k \in \mathbb{N}$ که $i \leq j \lneq k$، بنا به لم ۱۰.۵.۱،

$$a_j D = x_j D_S \cap D = x_k D_S \cap D = a_k D$$

اما $x_j D \subsetneq x_k D$ و لذا $s_j D \subsetneq s_k D$. بنابراین $s_i D \subsetneq s_{i+1} D \subsetneq s_{i+2} D \subsetneq \cdots$. اما برای هر $\ell \in \mathbb{N}$، زیرگردایه‌ای متناهی از $\mathcal{P}(D) \cap S$ مانند A_ℓ موجود است که $s_\ell \overset{D}{\sim} \Gamma(A_\ell)$. اما در این صورت برای هر $k \in \mathbb{N}$ که $i \leq k$، $\Gamma(A_{k+1}) \underset{D}{\mid} \Gamma(A_k)$ و لذا بنا به قسمت ۳ از گزاره‌ی ۶.۱.۱، $|A_{k+1}| \leq |A_k|$ و چون $s_k \overset{D}{\not\sim} s_{k+1}$، لذا $|A_{k+1}| \lneq |A_k|$. بنابراین $\cdots \gneq |A_{i+1}| \gneq |A_i|$ دنباله‌ای نزولی و نامتناهی از اعداد طبیعی است و چنین چیزی ممکن نیست. لذا فرض خلف باطل و D حوزه‌ی ACCP است. □

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$، یک مجموعه‌ی ضربی تولیدشده توسط عناصر اول باشد. در این صورت اگر D_S حوزه‌ی AP باشد، آن‌گاه D نیز حوزه‌ی AP است.

برهان. فرض کنید D_S حوزه‌ی AP باشد و $a \in \mathcal{A}(D)$. بنا به لم ۱۳.۲.۳، اگر $a \in S$، آن‌گاه $a \in \mathcal{P}(D)$.

حال فرض کنید $a \notin S$. در این صورت بنا به گزاره‌های ۱۲.۲.۳ و ۱.۴.۱، $a \notin U(D_S)$. در نتیجه بنا به لم ۷.۲.۳، $a \in \mathcal{A}(D_S)$ و لذا بنا به فرض $a \in \mathcal{P}(D_S)$ و لذا aD_S ایده‌آلی اول از D_S است. در نتیجه $aD_S \cap D$ ایده‌آلی اول از D است. از سوی دیگر بنا به لم ۱۳.۲.۳، a نسبت به S ک.م.م-اول است و لذا بنا به لم ۱۷.۲.۳، $aD_S \cap D = aD$. بنابراین aD ایده‌آلی اول از D است و لذا $a \in \mathcal{P}(D)$.

بنابراین نشان دادیم که برای هر $a \in \mathcal{A}(D)$، $a \in \mathcal{P}(D)$ و لذا D یک حوزه‌ی AP است. □

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده و تولیدشده توسط عناصر اول باشد. در این صورت اگر D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا باشد، آن‌گاه D نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است.

برهان. اگر D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا باشد، آنگاه بنا به قضیه‌ی ۷.۱.۲، D_S هم حوزه‌ی AP است و هم حوزه‌ی اتمی. لذا بنا به قضیه‌های ۱.۴.۳ و ۳.۴.۳، D حوزه‌ی AP و حوزه‌ی اتمی است و لذا مجدداً بنا به قضیه‌ی ۷.۱.۲، D حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا است. □

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده و تولیدشده توسط عناصر اول باشد. در این صورت اگر D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد، آنگاه D نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

برهان. فرض کنید D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد. در این صورت D_S به‌ویژه اتمی است و لذا بنا به قضیه‌ی ۱.۴.۳، D نیز اتمی است.

حال فرض کنید $x \in D^\#$ و به‌علاوه فرض کنید $x = x_۱ \cdots x_n$ و $x = y_۱ \cdots y_m$ دو تجزیه‌ای اتمی از x در D باشند. فرض کنید $\{A_۱|A_۲\}$، افرازی از گردایه‌ی $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ باشد که $A_۱ \cap S = \emptyset$ و $A_۲ \subseteq S$ و به همین شکل فرض کنید $\{B_۱|B_۲\}$، افرازی از گردایه‌ی $\{y_۱, \ldots, y_m\}$ باشد که $B_۱ \cap S = \emptyset$ و $B_۲ \subseteq S$. در این صورت بنا به لم‌های ۱۳.۲.۳ و ۱۰.۵.۱، $\Gamma(A_۱)$ و $\Gamma(B_۱)$ نسبت به S ک.م.م–اول هستند. اما $\Gamma(A_۱)\Gamma(A_۲) = \Gamma(B_۱)\Gamma(B_۲)$ و لذا بنا به لم ۲۰.۲.۳، $\Gamma(A_۱) \overset{D}{\sim} \Gamma(B_۱)$ و $\Gamma(A_۲) \overset{D}{\sim} \Gamma(B_۲)$. اما $A_۲, B_۲ \subseteq \mathcal{P}(D)$ و لذا بنا به قسمت ۳ از گزاره‌ی ۶.۱.۱، $|A_۲| = |B_۲|$.

پس نشان دادیم برای هر تجزیه‌ی اتمی از x، تعداد مولفه‌هایی از تجزیه که در S هستند، عددی ثابت است. حال کافی است نشان دهیم تعداد مولفه‌هایی از تجزیه که در S نیستند، کران‌دار است و برای این منظور نیز کافی است ثابت کنیم، برای هر $a \in D^\#$، اگر a نسبت به S ک.م.م–اول باشد، آنگاه طول‌های ممکن تجزیه‌ی اتمی از a کران‌دار است.

پس فرض کنید $a \in D^\#$ و a نسبت به S ک.م.م–اول باشد. فرض کنید $a = a_۱ \cdots a_k$ تجزیه‌ای اتمی از a در D باشد. بنا به از تبصره‌ی ۱۵.۲.۳، برای هر $۱ \leq i \leq k$، $a_i \notin S$ و لذا بنا به گزاره‌ی ۱.۴.۱، $a_i \notin U(D_S)$. در نتیجه بنا به لم ۷.۲.۳، $a_i \in \mathcal{A}(D_S)$. بنابراین $a = a_۱ \cdots a_k$ تجزیه‌ای اتمی از a در D_S نیز هست و در نتیجه $\mathrm{L}_D(a) \subseteq \mathrm{L}_{D_S}(a)$ و لذا چون D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است، $\mathrm{L}_{D_S}(a)$ و در نتیجه $\mathrm{L}_D(a)$ متناهی است. □

قضیه ۶.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده و تولیدشده توسط عناصر اول باشد. در این صورت اگر D_S حوزه‌ی *idf* باشد، آنگاه D نیز حوزه‌ی *idf* است.

برهان. فرض کنید $x \in D^\#$. در این صورت عناصر $s \in S$ و $a \in D^*$ موجودند که $x = as$ و a نسبت به S ک.م.م–اول است. به‌علاوه فرض کنید A یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر a در D_S باشد. در این صورت یا $a \in U(D)$ و یا بنا به تبصره‌ی ۲۱.۲.۳، $n \in \mathbb{N}$، $c_۱, \ldots, c_n \in \mathcal{A}(D)$ و $s_۱, \ldots, s_n, t_۱, \ldots, t_n \in S$ موجودند که

$$A = \{\frac{c_۱ s_۱}{t_۱}, \ldots, \frac{c_n s_n}{t_n}\}$$

و به‌علاوه برای هر $۱ \leq i \leq n$، c_i نسبت به S ک.م.م–اول است. همچنین توجه کنید که گردایه‌ای متناهی از عناصر $S \cap \mathcal{P}(D)$ مانند B موجود است که $\Gamma(B) \overset{D}{\sim} s$.

اینک فرض کنید $y \in \mathcal{A}(D)$ و $x \underset{D}{\mid} y$. ابتدا فرض کنید y عضوی از S باشد. در این صورت بنا به لم ۱۳.۲.۳، $y \in \mathcal{P}(D)$. توجه کنید که بنا به لم ۱۳.۵.۱، هیچ‌یک از عناصر $S \cap D^{\#}$، a را در D عاد نمی‌کنند و لذا در این حالت، بنا به تعریف عنصر اول، $s \mid y$ و لذا y با یکی از عناصر گردایه‌ی متناهی B شریک است. حال فرض کنید $y \notin S$ و لذا بنا به گزاره‌های ۱۲.۲.۳ و ۱.۴.۱، $y \notin U(D_S)$. در این صورت بنا به لم ۷.۲.۳، $y \in \mathcal{A}(D_S)$ و به‌علاوه بنا به لم ۱۳.۲.۳، y نسبت به S ک.م.م-اول است و لذا بنا به لم ۱۲.۵.۱، $a \underset{D_S}{\mid} y$. واضح است که در این وضع $a \notin U(D_S)$ و لذا y در D_S با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی A مثل $(cs_i)/t_i$ شریک است. بنابراین برای $u/v \in U(D_S)$ای $y = ((cs_i)/t_i)(u/v)$ ولذا $yvt_i = cs_iu$. اما y و c هر دو نسبت به S ک.م.م-اول هستند و لذا بنا به لم ۱۹.۲.۳، $c \overset{D}{\sim} y$. پس ثابت شد که در هر صورت، y با یکی از عناصر گردایه‌ی متناهی $B \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ در D شریک است. بنابراین هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x در D متناهی است و لذا D حوزه‌ی idf است.

□

قضیه ۷.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده و تولید شده توسط عناصر اول باشد. در این صورت اگر D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه D نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

برهان. فرض کنید D_S حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۲، D_S حوزه‌ی اتمی و حوزه‌ی idf است و لذا بنا به قضیه‌های ۱.۴.۳ و ۶.۴.۳، D حوزه‌ی اتمی و حوزه‌ی idf است و لذا مجدداً بنا به قضیه‌ی ۲.۶.۲، D حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

□

قضیه ۸.۴.۳. فرض کنید D یک حوزه و $S \subseteq D^*$ یک مجموعه‌ی ضربی شکافنده و D_S یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد. در این صورت D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است اگر و تنها اگر تمام عناصر S دارای تجزیه‌ی اتمی باشند و به‌علاوه طول هر دو تجزیه‌ی اتمی از یک عنصر S برابر باشند.

در حالت خاص، اگر S شکافنده و تولیدشده توسط عناصر اول باشد، آن‌گاه D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است اگر و تنها اگر D_S یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید تمام عناصر S دارای تجزیه‌ی اتمی باشند و به‌علاوه طول هر دو تجزیه‌ی اتمی از یک عنصر S برابر باشند. بنا به قضیه‌ی ۱.۴.۳، D یک حوزه‌ی اتمی است. فرض کنید $x = a_1 \cdots a_n$ و $x = b_1 \cdots b_m$، دو تجزیه‌ی اتمی از x در D باشند. فرض کنید، $\{A_1|A_2\}$ و $\{B_1|B_2\}$ به ترتیب افرازهایی از گردایه‌های $\{a_1, \ldots, a_n\}$ و $\{b_1, \ldots, b_m\}$ باشند، به‌طوری که

$$B_1 \cap S = A_1 \cap S = \emptyset \quad \text{و} \quad A_2, B_2 \subseteq S$$

بنا به لم ۱۳.۲.۳، A_1 و B_1 نسبت به S ک.م.م-اول هستند و لذا بنا به لم ۷.۲.۳ و گزاره‌ی ۱.۴.۱، برای هر $a \in A_1$ و $b \in B_1$، $a, b \in \mathcal{A}(D_S)$. همچنین بنا به لم ۱۹.۲.۳، $\Gamma(A_1)\Gamma(A_2) = \Gamma(B_1)\Gamma(B_2)$ نتیجه می‌دهد $\Gamma(A_1) \overset{D}{\sim} \Gamma(B_1)$ و $\Gamma(A_2) \overset{D}{\sim} \Gamma(B_2)$. اما D_S بنا به فرض، حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا

است و لذا $|B_۱| = |A_۱|$. از سوی دیگر، بنا به فرض قضیه درباره‌ی S، $|B_۲| = |A_۲|$ و لذا $n = |A_۱| + |B_۱| = |A_۲| + |B_۲| = m$. بنابراین D حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است.

برعکس، واضح است که اگر D حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد، آن‌گاه تمام عناصر S دارای تجزیه‌ی اتمی هستند و به‌علاوه طول هر دو تجزیه‌ی اتمی از یک عنصر S برابر است.

قسمت ''در حالت خاص''، بنا به قسمت ۳ از گزاره‌ی ۶.۱.۱ و قسمت ۲ از قضیه‌ی ۶.۳.۳ نتیجه می‌شود. □

فصل ۴

توسیع چندجمله‌ای

در این فصل رفتار خواص تجزیه را تحت توسیع چندجمله‌ای بررسی می‌کنیم. ابتدا در بخش ۱.۴ نشان می‌دهیم، تمام خواص تجزیه تحت توسیع چندجمله‌ای نزول می‌کنند. سپس در بخش ۲.۴ ثابت می‌کنیم حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار، حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی و حوزه‌های ACCP تحت توسیع چندجمله‌ای صعود می‌کنند. سپس در بخش ۳.۴ رفتار خواص تجزیه را تحت اجتماع‌های جهت‌دار بررسی می‌کنیم و با استفاده از آن ثابت می‌کنیم هر کدام از خواص تجزیه که تحت توسیع چندجمله‌ای با یک متغیر صعود می‌کنند، تحت توسیع چندجمله‌ای با هر تعداد دلخواه متغیر نیز صعود می‌کنند. در بخش‌های ۳.۴، ۴.۴ و ۵.۴ مثال‌های نقضی معرفی می‌شوند که به ترتیب نشان می‌دهند، حوزه‌های اتمی، حوزه‌های idf و حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا تحت توسیع چندجمله‌ای صعود نمی‌کنند.

۱.۴ نزول خواص تجزیه تحت توسیع چندجمله‌ای

ابتدا نشان می‌دهیم، تمام خواص تجزیه تحت توسیع چندجمله‌ای نزول می‌کنند. با توجه به این‌که چندجمله‌ای‌های روی یک حوزه، حالت خاصی از حوزه‌های تکواری هستند، بهتر است پیش از هر چیز احکام ۶.۶.۱ و ۷.۶.۱ را در این حالت خاص، بازنویسی کنیم. توجه کنید که تکواره‌ی جمعی $\mathbb{N}\cup\{0\}$ در شرایط نتیجه‌ی ۷.۶.۱ صدق می‌کند.

لم ۱.۱.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد و $R = D[X]$. در این صورت:

۱. فرض کنید $f = aX^n \in R$ که در آن $a \in D^*$ و $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. در این صورت برای هر $g \in R$، اگر $g \underset{R}{\mid} f$، آن‌گاه $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ و $b \in D^*$ موجودند که $g = bX^m$، $m \le n$ و $b \underset{D}{\mid} a$.

۲. $U(D) = U(R)$.

۳. برای هر $x \in D$، $x \in \mathcal{A}(D)$ اگر و تنها اگر $x \in \mathcal{A}(R)$.

گزاره ۲.۱.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد و $R = D[X]$.[۱] در این صورت:

۱. اگر R اتمی باشد، آنگاه D نیز اتمی است و به‌علاوه برای هر $x \in D^*$، $\mathrm{L}_D(x) = \mathrm{L}_R(x)$.

۲. اگر R حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار (حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا) باشد، آنگاه D نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار (حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا) است.

۳. اگر R یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی (حوزه‌ی *idf*) باشد، آنگاه D نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی (حوزه‌ی *idf*) است.

۴. اگر R یک حوزه‌ی *ACCP* باشد، آنگاه D نیز حوزه‌ی *ACCP* است.

برهان. ۱. فرض کنید $x \in D^\#$ و $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه‌ی اتمی از x در R باشد. در این صورت برای هر $1 \leq i \leq n$، بنا به قسمت ۱ از لم ۱.۱.۴، $\deg(x_i) = 0$ و لذا $x_i \in D$ و در نتیجه بنا به قسمت ۳ از لم ۱.۱.۴، $x_i \in \mathcal{A}(D)$. بنابراین $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه‌ی اتمی از x در D نیز هست. بنابراین D یک حوزه‌ی اتمی است و به‌علاوه برای هر $x \in D^*$، $\mathrm{L}_R(x) \subseteq \mathrm{L}_D(x)$.

حال فرض کنید $x \in D^\#$ و فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه‌ی اتمی از x در D باشد. در این صورت بنا به قسمت ۳ از لم ۱.۱.۴، برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in \mathcal{A}(R)$ و لذا $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه‌ی اتمی از x در R نیز هست. بنابراین $\mathrm{L}_R(x) \supseteq \mathrm{L}_D(x)$ و لذا $\mathrm{L}_R(x) = \mathrm{L}_D(x)$.

۲. اگر R حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار یا حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد، آنگاه R به‌ویژه اتمی است. اینک کافی است توجه کنید که بنا به قسمت ۱، برای هر $x \in D^*$، $\mathrm{L}_R(x) = \mathrm{L}_D(x)$.

۳. ابتدا فرض کنید R حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد. فرض کنید $x \in D^\#$ و فرض کنید A یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های x در R باشد. چون R حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است، لذا A متناهی است. حال فرض کنید $y \in D^*$ و $y \underset{D}{\mid} x$. در این صورت $y \underset{R}{\mid} x$ و لذا عنصری مثل $a \in A$ موجود است که $y \overset{R}{\sim} a$ و لذا بنا به قسمت ۲ از لم ۱.۱.۴، $y \overset{D}{\sim} a$. بنابراین هر مقسوم‌علیه از x در D، با تقریب شریک بودن در D، برابر با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی A است و لذا D حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

حال فرض کنید R حوزه‌ی idf باشد. فرض کنید $x \in D^\#$ و فرض کنید A یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر x در R باشد. چون R حوزه‌ی idf است، لذا A متناهی است. حال فرض کنید $y \in \mathcal{A}(D)$ و $y \underset{D}{\mid} x$. بنا به قسمت ۳ از لم ۱.۱.۴، $y \in \mathcal{A}(R)$ و لذا $y \underset{R}{\mid} x$ و لذا عنصری مثل $a \in A$ موجود است که $y \overset{R}{\sim} a$ و لذا بنا به قسمت ۲ از لم ۱.۱.۴، $y \overset{D}{\sim} a$.

---

[۱] به سادگی می‌توان بررسی کرد که احکام این گزاره برای زمانی که R حلقه‌ی چندجمله‌ای با تعداد دلخواه متغیر باشد نیز برقرار است. واضح است که این احکام برای زمانی که تعداد متغیرها متناهی است، برقرارند. در حالتی که تعداد متغیرها نامتناهی باشند نیز کافی است توجه کنید که برای هر $f \in R^\#$، مجموعه‌ای متناهی از متغیرها مانند F موجود است، به‌طوری که $f \in D[F]^\#$ و به‌علاوه هر تجزیه از f در R تجزیه‌ای از f در $D[F]$ نیز هست.

بنابراین هر مقسوم‌علیه تحویل‌ناپذیر x در D، با تقریب شریک بودن در D، برابر با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی A است و لذا D حوزه‌ی idf است.

۴. فرض کنید $a_1 D \subseteq a_2 D \subseteq \cdots$ زنجیری از ایده‌آل‌های اصلی از D باشد. واضح است که $a_1 R \subseteq a_2 R \subseteq \cdots$ و لذا $n \in \mathbb{N}$ای موجود است، به‌طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ که $n \leq m$، $a_m R = a_{m+1} R$ و لذا $a_m \overset{R}{\sim} a_{m+1}$ و در نتیجه بنا به قسمت ۲ از لم ۱.۱.۴، $a_m \overset{D}{\sim} a_{m+1}$ و لذا $a_m D = a_{m+1} D$. لذا زنجیر $a_1 D \subseteq a_2 D \subseteq \cdots$ سرانجام متوقف می‌شود. در نتیجه D حوزه‌ی ACCP است.

□

۲.۴ خواصی که تحت توسیع چندجمله‌ای صعود می‌کنند

یکی از خواص مهم حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا، صعود این رده تحت توسیع چندجمله‌ای است (برای مثال [۹، قضیه ۷.۳.۹] را ببینید). در این بخش نشان می‌دهیم حوزه‌های ACCP، حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار و حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی، تحت توسیع چندجمله‌ای با یک متغیر(و لذا با هر تعداد متناهی متغیر) صعود می‌کنند.

قضیه ۱.۲.۴. اگر D حوزه‌ی *ACCP* باشد، آن‌گاه $D[X]$ نیز حوزه‌ی *ACCP* است.

برهان. فرض کنید $f_1 D[X] \subseteq f_2 D[X] \subseteq \ldots$ یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های اصلی $D[X]$ باشد. برای هر $i \in \mathbb{N}$، $\deg(f_{i+1}) \leq \deg(f_i)$ و لذا $m \in \mathbb{N}$ای موجود است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $m \leq n$، $\deg f_n = \deg f_{n+1}$. از سوی دیگر برای هر $i \in \mathbb{N}$، $\mathrm{lc}(f_{i+1}) \underset{D}{\mid} \mathrm{lc}(f_i)$ و لذا $\mathrm{lc}(f_i) D \subseteq \mathrm{lc}(f_{i+1}) D$. اما D حوزه‌ی ACCP است و در نتیجه زنجیر $\mathrm{lc}(f_1) D \subseteq \mathrm{lc}(f_2) D \subseteq \cdots$ سرانجام متوقف می‌شود و لذا $m' \in \mathbb{N}$ای موجود است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $m' \leq n$، $\mathrm{lc}(f_n) D = \mathrm{lc}(f_{n+1}) D$. بنابراین برای هر $\max(m, m') \leq n$، $\deg(f_n) = \deg(f_{n+1})$ و $\mathrm{lc}(f_n) \overset{D}{\sim} \mathrm{lc}(f_{n+1})$ و در نتیجه عنصری مثل $u \in U(D)(= U(D[X]))$ موجود است که $f_n = u f_{n+1}$ و لذا $f_n \overset{D[X]}{\sim} f_{n+1}$ و لذا $f_n D = f_{n+1} D$. بنابراین زنجیر $f_1 D[X] \subseteq f_2 D[X] \subseteq \ldots$ سرانجام متوقف می‌شود. لذا $D[X]$ حوزه‌ی ACCP است.

□

قضیه ۲.۲.۴. اگر D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه $D[X]$ نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

برهان. فرض کنید D حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی باشد، اما $D[X]$ حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی نباشد و به تناقض می‌رسیم. فرض کنید $f \in D[X]^{\#}$ در $D[X]$ دارای یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌ها مثل $\{f_i\}_{i \in \Lambda}$ باشد که نامتناهی است. میدان کسرهای D را K در نظر بگیرید. $K[X]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا و لذا یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است و در نتیجه هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های f در $K[X]$ متناهی است. بنابراین زیر مجموعه‌ای نامتناهی از $\{f_i\}_{i \in \Lambda}$ مانند $\{f_i\}_{i \in \Delta}$ موجود است که عناصر آن دو به دو در $D[X]$ غیرشریک اما در $K[X]$ شریک هستند و لذا به‌خصوص درجه‌های آن‌ها

برابر است. حال توجه کنید که $\{\mathrm{lc}(f_i)\}_{i\in\Delta}$ مجموعه‌ای نامتناهی از مقسوم‌علیه‌های $\mathrm{lc}(f)$ در D است و چون D حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است، لذا زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\{\mathrm{lc}(f_i)\}_{i\in\Delta}$ مانند $\{\mathrm{lc}(f_i)\}_{i\in\Omega}$ موجود است که عناصر آن دو به دو در D شریک هستند. پس دو عنصر متمایز و هم‌درجه از $\{f_i\}_{i\in\Delta}$ مانند $g = a_\circ + a_1X + \cdots + a_nX^n$ و $h = b_\circ + b_1X + \cdots + b_nX^n$ موجودند که اولاً $a_n \overset{D}{\sim} b_n$ و لذا برای $u \in U(D)$ای $a_n = ub_n$ و به‌علاوه $h \overset{K[X]}{\sim} g$ و لذا برای $k \in K$ای $a_n = kb_n$. بنابراین $k = u$ و لذا $h \overset{D[X]}{\sim} g$. اما بنا به فرض، عناصر $\{f_i\}_{i\in\Delta}$ در $D[X]$ غیرشریک هستند و لذا به تناقض می‌رسیم. بنابراین فرض خلف باطل است و لذا $D[X]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

□

قضیه ۳.۲.۴. اگر D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار باشد، آن‌گاه $D[X]$ نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

برهان. تابع $\ell' \colon D[X]^* \to \mathbb{N} \cup \{\circ\}$ را با ضابطه‌ی $\ell'(f) = \ell_D(\mathrm{lc}(f)) + \deg(f)$ در نظر بگیرید. بنا به قسمت ۳ از قضیه‌ی ۳.۴.۲، کافی است نشان دهیم برای هر $x, y \in D[X]^*$،

۱. $\ell'(x) = \circ$ اگر و تنها اگر $x \in U(D[X])(= U(D))$

۲. $\ell'(x) + \ell'(y) \leq \ell'(xy)$.

پیش از هر چیز توجه کنید که برای هر $f \in D[X]^*$، $\ell_D(\mathrm{lc}(f)) \neq \infty$، زیرا D حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است و در نتیجه $\ell'(f) \neq \infty$.

حال توجه کنید، $\ell'(x) = \circ$ اگر و تنها اگر $\ell_D(\mathrm{lc}(x)) + \deg(x) = \circ$ اگر و تنها اگر $\deg(x) = \circ$ و $\ell_D(\mathrm{lc}(x)) = \circ$ اگر و تنها اگر $x \in D^*$ و $\ell_D(x) = \circ$ اگر و تنها اگر $x \in U(D)$. (که آخرین نتیجه‌گیری، از قسمت ۳ از گزاره‌ی ۱۰.۱.۲ نتیجه می‌شود). بنابراین ℓ' در شرط ۱ صدق می‌کند.

اینک فرض کنید $x, y \in D[X]^*$. در این صورت:

$$\begin{aligned}
\ell'(xy) &= \ell_D(\mathrm{lc}(xy)) + \deg(xy) \\
&= \ell_D(\mathrm{lc}(xy)) + \deg(x) + \deg(y) \\
&\leq \ell_D(\mathrm{lc}(x)) + \ell_D(\mathrm{lc}(y)) + \deg(x) + \deg(y) \\
&= \ell_D(\mathrm{lc}(x)) + \deg(x) + \ell_D(\mathrm{lc}(y)) + \deg(y) \\
&= \ell'(x) + \ell'(y)
\end{aligned}$$

بنابراین ℓ' در شرط ۲ نیز صدق می‌کند. □

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد، هر سه قضیه‌ی این بخش برای زمانی که تعداد متغیرها در چندجمله‌ای نامتناهی باشند نیز برقرارند. اما ما این امر را به عنوان حالتی خاص از اجتماع‌های جهت‌دار و در بخش بعد ثابت می‌کنیم.

۳.۴ اجتماع‌های جهت‌دار و چندجمله‌ای‌های با تعداد دلخواه متغیر

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید $A = \{D_a\}_{a \in I}$، خانواده‌ای جهت‌دار[۲] از حوزه‌ها باشد. A را ساکن می‌گوییم، هرگاه برای هر $a_1, a_2 \in I$، اگر $D_{a_1} \subseteq D_{a_2}$، آن‌گاه $D_{a_1} \subseteq D_{a_2}$ توسیعی ساکن باشد.

حال یک مثال از خانواده‌های جهت‌دار ساکن ارایه می‌کنیم.

مثال ۲.۳.۴. فرض کنید D یک حوزه و $\{X_i\}_{i \in I}$ مجموعه‌ای دلخواه از متغیرها باشد، آن‌گاه حوزه‌ی $D[\{X_i\}_{i \in I}]$ برابر با اجتماع عناصر مجموعه‌ی

$$\Delta = \{D[X_1, \ldots, X_n] \mid X_j \in \{X_i\}_{i \in I} \text{ ،} 1 \leq j \leq n \text{ برای هر }\}$$

است، زیرا تعداد متغیرهای ظاهرشده در هر $f \in D[\{X_i\}_{i \in I}]$ متناهی است. واضح است که Δ خانواده‌ای جهت‌دار است. همچنین هرگاه $X \subseteq Y$ دو مجموعه‌ی دلخواه از متغیرها باشند، آن‌گاه $D[X] \subseteq D[Y]$ یک توسیع ساکن(در واقع قویاً ساکن) است. بنابراین Δ خانواده‌ای جهت‌دار و ساکن از حوزه‌ها است.

لم ۳.۳.۴. فرض کنید $A = \{D_a\}_{a \in I}$ خانواده‌ای جهت‌دار و ساکن از حوزه‌ها باشد و $D = \bigcup_{a \in I} D_a$. در این صورت برای هر $b \in I$، $D_b \subseteq D$ توسیعی ساکن است.

برهان. فرض کنید $x, y \in D^*$، $b \in I$ و $xy \in D_b$. در این صورت عناصری مانند $a_1, a_2 \in I$ وجود دارند که $x \in D_{a_1}$ و $y \in D_{a_2}$. بنا به جهت‌دار بودن A، عنصری مثل $c \in I$ موجود است که $D_{a_1}, D_{a_2}, D_b \subseteq D_c$. چون $D_b \subseteq D_c$ توسیعی ساکن است، لذا عنصری مثل $u \in U(D_c)$ موجود است که $ux, u^{-1}y \in D_b$. حال کافی است توجه کنید که $u \in U(D)$.

□

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید $\{D_a\}_{a \in I}$ خانواده‌ای جهت‌دار و ساکن از حوزه‌های اتمی باشد. در این صورت $D = \bigcup_{a \in I} D_a$ نیز حوزه‌ی اتمی است.

برهان. فرض کنید $x \in D^\#$. در این صورت $b \in I$ای موجود است که $x \in D_b$. توجه کنید که $x \in D_b^\#$، زیرا در غیر این صورت $x \in U(D)$. حال فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ تجزیه‌ای اتمی از x در D_b باشد. در این صورت بنا به لم‌های ۳.۳.۴ و ۷.۲.۳، برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \in \mathcal{A}(D)$ یا $x_i \in U(D)$ (البته حداقل یکی از x_iها غیریکه و لذا اتم است، زیرا در غیر این صورت $x \in U(D)$). بنابراین x در D نیز تجزیه‌ای اتمی دارد. □

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنید $\{D_a\}_{a \in I}$ خانواده‌ای جهت‌دار و ساکن از حوزه‌های $ACCP$ باشد. در این صورت $D = \bigcup_{a \in I} D_a$ حوزه‌ی $ACCP$ است.

برهان. فرض کنید D حوزه‌ی ACCP نباشد و لذا زنجیری نامتناهی مثل $x_1 D \subsetneq x_2 D \subsetneq \cdots$ موجود باشد. بدون از دست رفتن کلیت می‌توان فرض کرد، $x_1 \neq 0$ و لذا عنصری مثل $b \in I$ موجود است که

---

[۲] یعنی برای هر $a, b \in I$، $c \in I$ای موجود باشد، به‌طوری که $D_a \subseteq D_c$ و $D_b \subseteq D_c$.

$x_1 \in D_b^{\#}$. حال با استقرا ثابت می‌کنیم دنباله‌ای از عناصر D_b مانند $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ موجود است، به‌طوری که برای هر $j \in \mathbb{N}$،

۱. $y_j \overset{D}{\sim} x_j$.

۲. اگر $j \geq 2$، آنگاه $y_{j-1}D_b \subsetneq y_jD_b$.

قرار دهید $y_1 := x_1$. حال فرض کنید $k \in \mathbb{N}$، $y_k \overset{D}{\sim} x_k$ و اگر $y \geq 2$، آنگاه $y_{k-1}D_b \subsetneq y_kD_b$. در این صورت $y_kD \subsetneq x_{k+1}D$ و لذا برای عنصری مانند $z \in D^{\#}$، $y_k = x_{k+1}z$. اما $D_b \subseteq D$ یک توسیع ساکن است و لذا $u \in U(D)$ای موجود است که $ux_{k+1}, u^{-1}z \in D_b$، حال قرار دهید $y_{k+1} := ux_{k+1}$. در این صورت $y_{k+1} \overset{D}{\sim} x_{k+1}$. از سوی دیگر $u^{-1}z \notin U(D_b)$ زیرا در غیر این صورت $u^{-1}z \in U(D)$ و لذا $z \in U(D)$ که تناقض است. بنابراین $y_kD_b \subsetneq y_{k+1}D_b$.

اینک کافی است توجه کنید که $y_1D_b \subsetneq y_2D_b \subsetneq \cdots$ و لذا D_b حوزه‌ی ACCP نیست که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و در نتیجه D حوزه‌ی ACCP است. □

قضیه ۶.۳.۴. فرض کنید $\{D_a\}_{a\in I}$ خانواده‌ای جهت‌دار و ساکن از حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار باشد. در این صورت $D = \bigcup_{a\in I} D_a$ نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است.

برهان. فرض کنید $x \in D^{\#}$ و لذا برای $b \in I$ای $x \in D_b^{\#}$. فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه از x در D باشد. در این صورت بنا به گزاره‌ی ۲.۲.۳، عناصری مانند $u_1, \ldots, u_n \in U(D)$ موجودند که $u_1 \cdots u_n = 1$ و به‌علاوه برای هر $1 \leq i \leq n$، $u_ix_i \in D_b$. توجه کنید که $u_ix_i \in D_b^{\#}$ زیرا در غیر این صورت $x_i \in U(D)$ که خلاف فرض است. بنابراین $x = (u_1x_1)\cdots(u_nx_n)$ تجزیه‌ای از x در D_b است. پس ثابت کردیم مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی x در D زیرمجموعه‌ای از طول‌های ممکن تجزیه‌ی x در D_b است. اما D_b حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است و لذا بنا به قضیه‌ی ۴.۳.۲، مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی x در D_b متناهی است و لذا مجموعه‌ی طول‌های ممکن تجزیه‌ی x در D نیز متناهی است. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۴.۳.۲، D حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار است. □

لم ۷.۳.۴. فرض کنید $\{D_a\}_{a\in I}$ یک خانواده‌ی جهت‌دار و ساکن از حوزه‌های اتمی باشد و قرار دهید $D = \bigcup_{a\in I} D_a$. در این صورت اگر $x \in \mathcal{A}(D)$، آنگاه $b \in I$ای موجود است که $x \in \mathcal{A}(D_b)$.

برهان. فرض کنید $x \in \mathcal{A}(D)$ و $x \in D_c$. چون $x \in D^{\#}$، لذا $x \in D_c^{\#}$. فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ یک تجزیه‌ی اتمی از x در D_c باشد. در این صورت دقیقاً یکی از x_iها و بدون از دست رفتن کلیت x_1 در D غیریکه است. بنا به جهت‌دار بودن، $b \in I$ای موجود است که $D_c \subseteq D_b$ و به‌علاوه برای هر $2 \leq i \leq n$، $x_i, x_i^{-1} \in D_b$ و در نتیجه بنا به لم ۷.۲.۳، $x_1 \in \mathcal{A}(D_b)$ و لذا $x \in \mathcal{A}(D_b)$. □

قضیه ۸.۳.۴. فرض کنید $\{D_a\}_{a\in I}$ خانواده‌ای جهت‌دار و ساکن از حوزه‌های تجزیه‌ی نیم‌یکتا(یکتا) باشد. در این صورت $D = \bigcup_{a\in I} D_a$ نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا(یکتا) است.

برهان. فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ و $x = y_1 \cdots y_m$ دو تجزیه‌ی اتمی از $x \in D^{\#}$ باشند. بنا به لم ۷.۳.۴، حوزه‌هایی مانند $D_{a_1}, \ldots, D_{a_n}, D_{b_1}, \ldots, D_{b_m}$ موجودند، به‌طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$

و $1 \leq j \leq m$، $y_j \in \mathcal{A}(D_{b_j})$ و $x_i \in \mathcal{A}(D_{a_i})$. از سوی دیگر بنا به جهت‌دار بودن، $c \in I$ای موجود است که برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، $D_{a_i}, D_{b_i} \subseteq D_c$ و لذا بنا به لم ۷.۲.۳، $x_i, y_j \in \mathcal{A}(D_c)$. بنابراین $x = x_1 \cdots x_n$ و $x = y_1 \cdots y_m$ دو تجزیه‌ی اتمی از x در D_c هستند و چون D_c یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است، لذا $m = n$. اگر به‌علاوه D_c یک حوزه‌ی تجزیه‌ی یکتا نیز باشد آن‌گاه این دو تجزیه‌ی اتمی در D_c و لذا در D هم‌ارز نیز خواهند بود. □

قضیه ۹.۳.۴. فرض کنید $\{D_a\}_{a\in I}$ خانواده‌ای جهت‌دار و ساکن از حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی باشد. در این صورت $D = \bigcup_{a\in I} D_a$ نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است.

برهان. فرض کنید $x \in D^{\#}$ و لذا برای $a \in I$ای $x \in D_a^{\#}$. فرض کنید $\{x_1, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های x در D_a باشد و برای $y \in D^{\#}$ای $y \underset{D}{\mid} x$ و لذا برای $z \in D^*$ای $x = yz$. بنا به ساکن بودن توسیع $D_a \subseteq D$، برای $u \in U(D)$ای داریم $u^{-1}y, uz \in D_a$ و لذا با توجه به این‌که $u^{-1}y \underset{D_a}{\mid} x$، برای $1 \leq i \leq n$ای داریم $u^{-1}y \overset{D_a}{\sim} x_i$ و لذا $u^{-1}y \overset{D}{\sim} x_i$ و لذا $y \overset{D}{\sim} x_i$. در نتیجه، y با تقریب شریک بودن در D برابر با یکی از عناصر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, \ldots, x_n\}$ است. بنابراین D یک حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است. □

اینک با استفاده قضایای این بخش، مساله‌ی صعود خواص تجزیه در توسیع‌های چندجمله‌ای با تعداد دلخواه متغیر را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۳.۴. رده‌های حوزه‌های $ACCP$، حوزه‌های تجزیه‌ی کران‌دار، حوزه‌های تجزیه‌ی متناهی و حوزه‌های تجزیه‌ی یکتا تحت توسیع‌های چندجمله‌ای با تعداد دلخواه متغیر صعود می‌کنند.

برهان. با استقرا ثابت می‌شود همه‌ی این خواص تحت توسیع چندجمله‌ای با تعداد متناهی متغیر حفظ می‌شوند. بنا به مثال ۲.۳.۴، چندجمله‌ای‌های با تعداد دلخواه متغیر، اجتماعی جهت‌دار و ساکن از چندجمله‌ای‌های با تعداد متناهی متغیر هستند و از سوی دیگر بنا به قضیه‌های ۵.۳.۴، ۶.۳.۴، ۸.۳.۴ و ۹.۳.۴ این رده‌ها تحت اجتماع‌های جهت‌دار و ساکن صعود می‌کنند. حکم بلافاصله نتیجه می‌شود. □

۴.۴ صعود حوزه‌های اتمی در توسیع چندجمله‌ای

بحث را با ارایه‌ی یک شرط لازم و کافی برای صعود اتمی بودن تحت توسیع‌های چندجمله‌ای آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. برای هر مجموعه از متغیرها مانند $\{X_i\}_{i\in I}$، $R = D[\{X_i\}_{i\in I}]$ حوزه‌ی اتمی است.

۲. یک مجموعه‌ی ناتهی از متغیرها مانند $\{X_i\}_{i\in I}$، موجود است که $|I| \neq 1$ و $R = D[\{X_i\}_{i\in I}]$ حوزه‌ای اتمی است.

۳. D حوزه‌ی اتمی و حوزه‌ی م.م.ب است.

برهان. (۲ $\Longrightarrow$ ۱) واضح است.

(۳ $\Longrightarrow$ ۲) بنا به قسمت ۱ از گزاره‌ی ۲.۱.۴، D حوزه‌ی اتمی است. حال فرض کنید

$$f = a_1 X_1 + a_2 X_1^2 + \cdots + a_{n-1} X_1^{n-1} + a_n X_2 \in R$$

که در آن $a_1, \ldots, a_n \in D^*$. در هر تجزیه‌ی اتمی از f، همه‌ی مولفه‌ها به‌جز دقیقاً یکی، عضو D^* هستند و لذا هر تجزیه‌ی اتمی از f به شکل

$$(c_1) \cdots (c_m)(a'_1 X + a'_2 X^2 + \cdots + a'_{n-1} X^{n-1} + a'_n Y)$$

است. توجه کنید که $\gcd(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = 1$ و لذا $(c_1) \cdots (c_m) \in \mathrm{MCD}_D(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$. بنابراین هر مجموعه‌ی متناهی از عناصر D^* دارای م.م.ب هستند. بنابراین D یک حوزه‌ی م.م.ب است.

(۱ $\Longrightarrow$ ۳) فرض کنید $f \in R^\#$. اگر $f \in D$، آنگاه f در R دارای تجزیه‌ی اتمی است. پس فرض کنید $\deg(f) \geq 1$. می‌توان f را به‌صورت حاصل‌ضربی از چندجمله‌ای‌های تجزیه‌ناپذیر نوشت و لذا کافی است نشان دهیم، اگر f تجزیه‌ناپذیر باشد، آنگاه f در R دارای تجزیه‌ای اتمی است. پس فرض کنید f تجزیه‌ناپذیر باشد و c یک م.م.ب از ضرایب f باشد. در این صورت عنصری مثل $f' \in R^\#$ موجود است که $f = cf'$. بنا به فرض c در D و لذا در R دارای تجزیه‌ای اتمی است. فرض کنید $f' = h_1 \cdots h_m$ که در آن h_iها تجزیه‌ناپذیرند. اگر برای $1 \leq i \leq m$ ای ضرایب h_i دارای یک مقسوم‌علیه مشترک غیریکه مثل $d \in D^\#$ باشند، آنگاه d یک مقسوم‌علیه مشترک ضرایب f' نیز خواهد بود که تناقض است. بنابراین همه‌ی h_iها در R تحویل‌ناپذیر هستند و لذا f' نیز در R دارای یک تجزیه‌ی اتمی است. $\square$

توجه کنید که در اثبات (۳ $\Longrightarrow$ ۲)، از این واقعیت استفاده کردیم که در هر حوزه‌ی چندجمله‌ای مثل R با حداقل دو متغیر، یک ''محمل تجزیه‌ناپذیر'' با هر اندازه‌ی دلخواه وجود دارد. به این معنا که، برای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ای از تک‌جمله‌ای‌های R با ضرایب ۱ مثل A موجود است، به‌طوری که $|A| = n$ و برای هر $f \in R$، اگر $\mathrm{supp}(f) = A$، آنگاه f تجزیه‌ناپذیر است (که در این اثبات A برابر با مجموعه‌ی $\{X_1, X_1^2, \ldots, X_1^{n-1}, X_2\}$ است). علت این‌که به شرط $I \neq 1$ نیاز داریم این است که این امر برای چندجمله‌ای‌های با یک متغیر برقرار نیست.[۳] برای هر $a_1, \ldots, a_n \in D^*$ و $b_1, \ldots, b_m \in D^*$، اگر $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_D = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle_D$، آنگاه $\mathrm{MCD}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{MCD}(b_1, \ldots, b_m)$. بنابراین در این اثبات لزومی ندارد حتماً یک چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر با ضرایب a_iها بیابیم و صرفاً کافی است یک چند جمله‌ای مثل f موجود باشد که $\mathrm{c}(f) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_D$. بنابراین، در صورت برقراری حدس زیر، می‌توان شرط $|I| \neq 1$ را در قسمت ۲ از قضیه‌ی قبل حذف کرد.

حدس ۲.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه و I ایده‌آلی متناهی‌مولد از D باشد. در این صورت یک چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر مثل $f \in D[X]$ موجود است که $\mathrm{c}(f) = I$.

اما در هر حال، بنا به مطالبی که ذکر شد، حکم زیر برقرار است.

[۳] برای مثال برای هر $f \in \mathbb{C}[X]$، اگر محمل f حداقل دارای ۳ عضو باشد، آنگاه f تحویل‌پذیر است.

قضیه ۳.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. D اتمی است و مجموعه‌ی ضرایب هر چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر در $D[X]$، در D دارای م.م.ب است.

۲. $D[X]$ حوزه‌ی اتمی است.

نتیجه ۴.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد. در این صورت اگر $D[X]$ اتمی باشد، آن‌گاه D یک حوزه‌ی ب.م.م ضعیف است.

برهان. برای هر $a, b \in D^*$، $a+bX$ تجزیه‌ناپذیر است و لذا بنا به قضیه‌ی ۳.۴.۴، a و b دارای م.م.ب هستند. بنابراین D حوزه‌ی ب.م.م ضعیف نیست. $\square$

پس یک راه برای یافتن مثال نقض مطلوب، یعنی حوزه‌ای اتمی که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های روی آن اتمی نباشد، یافتن حوزه‌ای اتمی است که حوزه‌ی ب.م.م ضعیف نیست. بر این مبنا، روند ساختن مثال نقض مطلوب در این بخش به این صورت است که ابتدا مثالی از حوزه‌ای می‌یابیم که ب.م.م ضعیف نیست، سپس روشی را بررسی خواهیم کرد که تحت آن بتوان، هر حوزه مثل A را به حوزه‌ای مانند B توسیع داد، به‌طوری که:

$(*)$ B اتمی باشد.

$(**)$ برای هر $T \subseteq A^*$، $\mathrm{MCD}_A(T) = \mathrm{MCD}_B(T)$ و لذا اگر A حوزه‌ی ب.م.م ضعیف نباشد، آن‌گاه B نیز حوزه‌ی ب.م.م ضعیف نخواهد بود.

تبصره ۵.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $a \in D^*$، $R = D[X, \frac{a}{X}]$ و $T = D[X, \frac{1}{X}]$

۱. واضح است که R زیرحلقه‌ای از T است. به‌علاوه تمام عناصر T را می‌توان به فرم $\frac{f}{X^n}$ نوشت که در آن $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $f \in D[X]$.

۲. هر عنصر از R ترکیبی خطی از تک جمله‌ای‌هایی به فرم $(X)^n(\frac{a}{X})^m$ با ضرایب در D است که در آن $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. بنابراین اگر $f \in R^*$ و cX^k یک تک‌جمله‌ای از f باشد که در آن $k \lneq 0$، آن‌گاه $c \underset{D}{\mid} a^k$.

۳. فرض کنید $a \in D^*$، $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $aX^n = xy$ که در آن $x, y \in T$. بنا به قسمت ۱، $m, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $f, g \in D[X]$ موجودند، به‌طوری که $x = \frac{f}{X^m}$ و $y = \frac{g}{X^\ell}$. بنابراین $aX^{n+m+\ell} = fg$ و لذا f و g هر دو تک‌جمله‌ای هستند و در نتیجه $b, c \in D$ و $v, w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ موجودند که $f = bX^v$ و $g = cX^w$. همچنین توجه کنید که در این وضع، $(v-m)+(w-\ell) = n$ و $bc = a$.

حال حوزه‌ای را معرفی می‌کنیم که ب.م.م ضعیف نیست.

مثال ۶.۴.۴. فرض کنید F یک میدان باشد و $R = F[Z, \{\frac{X}{Z^n}, \frac{Y}{Z^n} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}]$. در این صورت R حوزه‌ی ب.م.م ضعیف نیست.

حل. نشان می‌دهیم X و Y هیچ مقسوم‌علیه مشترک ماکزیمالی ندارند. ابتدا مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک این دو عنصر را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $\mathrm{CD}_R(X, Y)$.

از یک سو توجه کنید که R، زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی $T = (F[Z, \frac{1}{Z}])[X, Y]$ است. بنابراین هر مقسوم‌علیه X باید یک تک‌جمله‌ای نسبت به متغیر X و هر مقسوم‌علیه Y باید یک تک‌جمله‌ای نسبت به متغیر Y باشد. پس هر مقسوم علیه مشترک این دو عنصر عضو $F[Z, \frac{1}{Z}]$ است. بنابراین C زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی $A = F[Z, \frac{1}{Z}]$ است.

از سوی دیگر $T = (F[X, Y])[Z, \frac{1}{Z}]$. پس عناصر C بنا به قسمت ۳ از تبصره‌ی ۵.۴.۴، باید تک‌جمله‌ای‌هایی نسبت به متغیر Z باشند. بنابراین مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک X و Y در T زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی $B = \{xZ^n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ و } x \in F[X, Y]\}$ است.

بنابراین

$$C \subseteq A \cap B = \{cZ^n \mid c \in F^* \text{ و } n \in \mathbb{Z}\}$$

اما برای هر $n \lneq 0$، $Z^n \notin R$ و لذا

$$C \subseteq \{cZ^n \mid c \in F^* \text{ و } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

توجه کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $c \in F^*$، $(cZ^n)(c^{-1}XZ^{-n}) = X$ و $(cZ^n)(c^{-1}YZ^{-n}) = Y$.

بنابراین ثابت کردیم $C = \{cZ^n \mid c \in F \text{ و } n \in \mathbb{N}\}$

برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم C هیچ عنصر ماکزیمالی نسبت به رابطه‌ی عاد کردن ندارد و برای این منظور نیز کافی است توجه کنیم، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $Z^{n+1} \mathrel{\underset{R}{|}} Z^n$ ولی $Z^{n+1} \overset{R}{\nmid} Z^n$، زیرا $Z \notin U(R)$.

$\square$

تعریف ۷.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد و $S \subseteq D^*$. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{L}(D; S) := D[\{X_s \mid s \in S\} \cup \{\frac{s}{X_s} \mid s \in S\}]$$

ابتدا خواص اولیه‌ی توسیع $D \subseteq \mathcal{L}(D; S)$ را بررسی می‌کنیم.

لم ۸.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $a \in D^\#$ و $R = D[X, \frac{a}{X}]$. در این صورت $U(D) = U(R)$.

برهان. فرض کنید $T = D[X, \frac{1}{X}]$. ابتدا توجه کنید که بنا به قسمت ۳ از تبصره‌ی ۵.۴.۴،

$$U(T) = \{uX^n \mid u \in U(D) \text{ و } n \in \mathbb{Z}\}$$

حال فرض کنید $n \neq 0$ و $uX^n \in U(R)$. در این صورت $(uX^n)(u^{-1}X^{-n}) = 1$. اما یکی از دو عدد n یا $-n$ باید منفی باشند و لذا بنا به قسمت ۲ از تبصره‌ی ۵.۴.۴، $a^n \mathrel{\underset{D}{|}} u$ یا $a^n \mathrel{\underset{D}{|}} u^{-1}$ که هیچ‌یک ممکن نیست. بنابراین $U(T) = U(R)$. $\square$

قضیه ۹.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $S \subseteq D^\#$ و $R = \mathcal{L}(D; S)$. در این صورت:

۱. $U(D) = U(R)$

۲. $\mathrm{Red}(D) \subseteq \mathrm{Red}(R)$.

۳. برای هر $a, b \in D^*$، $a \underset{D}{\mid} b$ اگر و تنها اگر $a \underset{R}{\mid} b$.

برهان. ۱. ابتدا حکم را با استقرا و برای زمانی که S متناهی است ثابت می‌کنیم. حالت $|S| = ۱$ در لم ۸.۴.۴ ثابت شد. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و حکم برای زمانی که $|S| = n - ۱$ برقرار باشد و حکم را برای زمانی که $|S| = n$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $S = \{s_۱, \dots, s_n\}$. توجه کنید که

$$R = \mathcal{L}(D; \{s_۱, \dots, s_n\}) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(D; \{s_۱, \dots, s_{n-۱}\}); s_n))$$

و در نتیجه بنا به لم ۸.۴.۴،

$$U(R) = U(\mathcal{L}(D; \{s_۱, \dots, s_{n-۱}\}))$$

اما بنا فرض استقرا

$$U(D) = U(\mathcal{L}(D; \{s_۱, \dots, s_{n-۱}\}))$$

و در نتیجه $U(D) = U(R)$.

اینک فرض کنید S دلخواه باشد و $u \in U(R)$. توجه کنید که

$$\mathcal{L}(D; S) = \bigcup\{\mathcal{L}(D; F) \mid F \subseteq S \text{ و } F \text{ متناهی است}\}$$

اجتماعی جهت‌دار است و لذا زیرمجموعه‌ای متناهی از S مانند E موجود است، به‌طوری که $u, u^{-۱} \in \mathcal{L}(D; E)$ و لذا $u \in U(E)$ و در نتیجه بنا به متناهی بودن E، $u \in U(D)$.

۲. فرض کنید $a \in \mathrm{Red}(D)$ و $a = bc$ که در آن $b, c \in D^\#$. بنا به قسمت ۱، $b, c \in R^\#$ و لذا $a \in \mathrm{Red}(R)$.

۳. توجه کنید که R به‌عنوان یک D-مدول، زیرمدولی از مدول آزاد تولید شده توسط مجموعه‌ی

$$\{X_{s_۱}^{n_۱} \cdots X_{s_n}^{n_k} \mid n_i \in \mathbb{Z} \text{ و } s_i \in S\}$$

است. بنابراین اگر برای $a, b \in D$ای $a \underset{R}{\mid} b$ و مثلاً $ax = b$ که در آن $x \in R$، آنگاه ضریب تمام تک‌جمله‌ای‌هایی از x مانند $X_{s_۱}^{n_۱} \cdots X_{s_n}^{n_k}$ که در آن حداقل یکی از n_iها ناصفر است، باید برابر با صفر باشد و این یعنی $x \in D$ و لذا $a \underset{D}{\mid} b$.

□

تعریف ۱۰.۴.۴. هر توسیع از حوزه‌ها مثل $D \subseteq R$ را که در خاصیت ۳ از قضیه‌ی ۹.۴.۴ صدق کند، یک توسیع حافظ تقسیم می‌نامیم.

گزاره ۱۱.۴.۴. فرض کنید $D \subseteq R$ یک توسیع حافظ تقسیم از حوزه‌ها باشد و $a, b \in D$. در این صورت اگر $a \overset{R}{\sim} b$، آنگاه $a \overset{D}{\sim} b$.

برهان. اگر $a \overset{R}{\sim} b$ آن‌گاه $a \underset{R}{|} b$ و $b \underset{R}{|} a$ و لذا بنا به حافظ تقسیم بودن توسیع، $a \underset{D}{|} b$ و $b \underset{D}{|} a$ و در نتیجه $a \overset{D}{\sim} b$. □

حال رفتار عناصر اتمی D را تحت توسیع $D \subseteq \mathcal{L}(D;S)$ بررسی می‌کنیم.

لم ۱۲.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $a \in D^\#$ و $R = D[X, \frac{a}{X}]$. در این صورت:

۱. اگر a در D تحویل‌پذیر باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(R)$.

۲. $X, \frac{a}{X} \in \mathcal{A}(R)$ (و در نتیجه $a = (X)(\frac{a}{X})$ تجزیه‌ای اتمی از a در R است).

برهان. در طول اثبات هر دو قسمت، آزادانه و بدون ارجاع از قسمت‌های ۲ و ۳ از تبصره‌ی ۵.۴.۴، استفاده می‌کنیم.

۱. فرض کنید $x \in \mathcal{A}(D)$ و فرض کنید $x = yz$ که در آن $y, z \in R$. در این صورت عناصری مانند $y_\circ, z_\circ \in D$ و $n \in \mathbb{N}$ای موجودند که $y = y_\circ X^n$ و $z = z_\circ X^{-n}$. اگر $n \neq \circ$، آن‌گاه یا $a \underset{D}{|} y_\circ$ و یا $a \underset{D}{|} z_\circ$ و در هر دو حالت، $a \underset{D}{|} x$ که این امر با تحویل‌پذیر بودن a و تحویل‌ناپذیر بودن x در D در تناقض است. بنابراین $n = \circ$ و در نتیجه $y, z \in D$ و لذا بدون از دست رفتن کلیت $y \in U(D)$ و در نتیجه $y \in U(R)$. همچنین بنا به لم ۸.۴.۴، $x \in R^\#$. بنابراین $x \in \mathcal{A}(R)$.

۲. ابتدا توجه کنید که بنا به لم ۸.۴.۴، $X, \frac{a}{X} \in R^\#$.

فرض کنید $X = yz$ که در آن $y, z \in R$. در این صورت عناصری مانند $y_\circ, z_\circ \in D$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند که $y = y_\circ X^n$ و $z = z_\circ X^{1-n}$. اگر ثابت شود $n = \circ$ یا $n = 1$ کار تمام است، زیرا در این صورت $y = y_\circ$ یا $z = z_\circ$ و با توجه به این‌که $y_\circ z_\circ = 1$، نتیجه خواهد شد $y \in U(D) = U(R)$ یا $z \in U(D) = U(R)$.

فرض کنید $n \notin \{\circ, 1\}$. اگر $n \lneq \circ$، آن‌گاه $a \underset{D}{|} y_\circ$ و لذا $a \underset{D}{|} 1$ که تناقض است و اگر $n \gneq 1$ آن‌گاه $n - 1 \gneq \circ$ و لذا این بار $a \underset{D}{|} z_\circ$ و در نتیجه $a \underset{D}{|} 1$ که مجدداً تناقض است.

حال فرض کنید $\frac{a}{X} = yz$ که در آن $y, z \in R$. در این صورت عناصری مانند $y_\circ, z_\circ \in D$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند که $y = y_\circ X^n$ و $z = z_\circ X^{-n-1}$.

اگر $n = -1$، آن‌گاه $a \underset{D}{|} y_\circ$ و چون $y_\circ \underset{D}{|} a$، لذا $a \overset{D}{\sim} y_\circ$. در نتیجه $z_\circ \in U(D)$ و با توجه به این‌که $z = z_\circ$، داریم $z \in U(R)$. اگر $n = \circ$، آن‌گاه $a \underset{D}{|} z_\circ$ و چون $z_\circ \underset{D}{|} a$، لذا $a \overset{D}{\sim} z_\circ$. بنابراین $y_\circ \in U(D)$ و چون $y = y_\circ$، لذا $y \in U(R)$.

حال کافی است نشان دهیم، $n \notin \{-1, \circ\}$ ممکن نیست. اگر $n \lneq -1$، آن‌گاه $a^2 \underset{D}{|} y_\circ$ و چون $y_\circ \underset{D}{|} a$، لذا $a^2 \underset{D}{|} a$ و در نتیجه $a \in U(D)$ که با فرض اولیه یعنی $a \in D^\#$ در تناقض

است. اگر $n \lneq ۰$، آن‌گاه $-n - ۱ \lneq -۱$ و لذا $z_۰ \underset{D}{\mid} a^۲$ و چون $a \underset{D}{\mid} z_۰$، لذا $a \underset{D}{\mid} a^۲$ و در نتیجه $a \in U(D)$ که باز هم تناقض است.

□

قضیه ۱۳.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $S \subseteq \mathrm{Red}(D)$ و $R = \mathcal{L}(D; S)$. در این صورت:

۱. $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; S))$.

۲. برای هر $s \in S$، $X_s, s/X_s \in \mathcal{A}(R)$ (و در نتیجه $s = (X_s)(s/X_s)$ تجزیه‌ای اتمی از s در R است).

برهان. ۱. ابتدا حکم را برای زمانی که S متناهی است و با استقرا ثابت می‌کنیم. حالت $|S| = ۱$ در لم ۱۲.۴.۴ ثابت شد. حال فرض کنید $n \geq ۲$ و فرض کنید حکم برای زمانی که $|S| = n - ۱$ برقرار باشد. توجه کنید که

$$\mathcal{L}(D; S) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(D; \{s_۱, \ldots, s_{n-۱}\}; s_n))$$

بنا به قسمت ۲ از قضیه‌ی ۹.۴.۴، s_n در $\mathcal{L}(D; \{s_۱, \ldots s_{n-۱}\})$ تحویل‌پذیر است و لذا دوباره بنا به لم ۱۲.۴.۴،

$$\mathcal{A}(\mathcal{L}(D; \{s_۱, \ldots s_{n-۱}\})) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; S))$$

اما بنا به فرض استقرا

$$\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; \{s_۱, \ldots s_{n-۱}\}))$$

و در نتیجه $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; S))$.

حال حکم را برای زمانی که S اندازه‌ای دلخواه دارد ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x \in \mathcal{A}(D)$ و $x = yz$ که در آن $y, z \in \mathcal{L}(D; S)$. توجه کنید که

$$\mathcal{L}(D; S) = \bigcup\{\mathcal{L}(D; F) \mid F \subseteq S \text{ و متناهی است } F\}$$

یک اجتماع جهت‌دار است و لذا زیر مجموعه‌ای متناهی از S مانند E موجود است، به‌طوری که $y, z \in \mathcal{L}(D; E)$. اما $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; E))$ و در نتیجه $yz = x \in \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; E))$ و لذا بدون از دست رفتن کلیت $y \in U(\mathcal{L}(D; E)) \subseteq U(\mathcal{L}(D; S))$. از سوی دیگر بنا به قضیه‌ی ۹.۴.۴، $x \notin U(\mathcal{L}(D; S))$ و لذا در نهایت داریم $x \in \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; S))$.

۲. بنا به لم ۱۲.۴.۴، $X_s, \frac{s}{X_s} \in \mathcal{A}(\mathcal{L}(D; s))$ و از سوی دیگر بنا به قسمت ۲ از قضیه‌ی ۹.۴.۴، $S \setminus \{s\} \subseteq \mathrm{Red}(\mathcal{L}(D; s))$. همچنین $R = \mathcal{L}(\mathcal{L}(D; s); S \setminus \{s\})$ و در نتیجه بنا به قسمت ۱، X_s و $\frac{s}{X_s} \in \mathcal{A}(R)$.

□

حال رفتار مقسوم‌علیه‌های مشترک ماکزیمال را تحت این توسیع بررسی می‌کنیم.

لم ۱۴.۴.۴. فرض کنید $D \subseteq R$ توسیعی حافظ تقسیم از حوزه‌ها باشد و $T \subseteq D^*$. در این صورت

$$\mathrm{MCD}_R(T) \cap D \subseteq \mathrm{MCD}_D(T)$$

برهان. فرض کنید $a \in \mathrm{MCD}_R(T) \cap D$. در این صورت به‌ویژه داریم $a \in \mathrm{CD}_D(T)$. اگر $a \notin \mathrm{MCD}_D(T)$، آنگاه عنصری مثل $b \in \mathrm{CD}_D(T)$ موجود است که $a \underset{D}{\mid} b$ و $a \overset{D}{\not\sim} b$ و لذا بنا به گزاره‌ی ۱۱.۴.۴، $a \overset{R}{\not\sim} b$. اما $b \in \mathrm{CD}_R(T)$ و لذا $a \notin \mathrm{MCD}_R(T)$ که تناقض است. پس $a \in \mathrm{MCD}_D(T)$. □

لم ۱۵.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $a \in D^{\#}$ و $R = D[X, \frac{a}{X}]$. در این صورت برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از D^* مانند T، $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_R(T)$.

برهان. در طول اثبات، آزادانه و بدون ارجاع از بندهای ۲ و ۳ از تبصره‌ی ۵.۴.۴ استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $x \in \mathrm{MCD}_D(T)$. در این صورت به‌خصوص $x \in \mathrm{CD}_D(T)$ و در نتیجه $x \in \mathrm{CD}_R(T)$. اینک فرض کنید $y \in \mathrm{CD}_R(T)$ و $x \underset{R}{\mid} y$. باید نشان دهیم $x \overset{R}{\sim} y$.

ابتدا توجه کنید چون $y \in \mathrm{CD}_R(T)$، لذا عناصری مانند $y_\circ \in D$ و $n \in \mathbb{Z}$ موجودند که $y = y_\circ X^n$ و $y_\circ \in \mathrm{CD}_D(T)$. بنابراین $x \underset{D}{\mid} y_\circ$ و چون $x \in \mathrm{MCD}_D(T)$، لذا $x \overset{D}{\sim} y_\circ$ و در نتیجه $y/x \overset{R}{\sim} X^n$ و لذا به‌ویژه $X^n \in R$ و در نتیجه $n \geq \circ$.

حال کافی است نشان دهیم $n = \circ$، زیرا در این صورت $x \overset{D}{\sim} y$ و لذا $x \overset{R}{\sim} y$. فرض کنید چنین نباشد و $n \gneq \circ$. برای هر $t \in T$، $xX^n \underset{R}{\mid} t$ و لذا $(t/x)/(X^n) \in R$ و در نتیجه $a \underset{D}{\mid} t/x$ و لذا $ax \underset{D}{\mid} t$. بنابراین $ax \in \mathrm{CD}_D(T)$. اما $x \in \mathrm{MCD}_D(T)$ و لذا $ax \overset{D}{\sim} x$ و در نتیجه $a \in U(D)$ که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $n = \circ$. بنابراین ثابت شد $\mathrm{MCD}_D(T) \subseteq \mathrm{MCD}_R(T)$.

حال نشان می‌دهیم $\mathrm{MCD}_R(T) \subseteq \mathrm{MCD}_D(T)$. فرض کنید $f \in \mathrm{MCD}_R(T)$. در این صورت $n \in \mathbb{Z}$ و $f_\circ \in D$، موجودند که $f = f_\circ X^n$ و $f_\circ \in \mathrm{CD}_R(T)$.

حال نشان می‌دهیم $n = \circ$. فرض کنید چنین نباشد. اگر $n \lneq \circ$، آنگاه $X^{-n} \in R^{\#}$. اما $f_\circ = fX^{-n}$ که این امر با $f \in \mathrm{MCD}_R(T)$ و $f_\circ \in \mathrm{CD}_R(T)$ در تناقض است. حال فرض کنید $n \gneq \circ$. برای هر $t \in T$، $f_\circ X^n \underset{R}{\mid} t$ و لذا $(t/f_\circ)/(X^n) \in R$ و در نتیجه $a^n \underset{D}{\mid} t/f_\circ$ و لذا $a^n f_\circ \underset{D}{\mid} t$. بنابراین $a^n f_\circ \in \mathrm{CD}_R(T)$. اما $(f_\circ X^n)(a^n/X^n) = f_\circ a^n$ و $a^n/X^n \in R^{\#}$ و این امر با $f_\circ X^n \in \mathrm{MCD}_R(T)$ در تناقض است. بنابراین $n = \circ$ و لذا $f \in D$ و در نتیجه بنا به لم ۱۴.۴.۴، $f \in \mathrm{MCD}_D(T)$. □

لم ۱۶.۴.۴. فرض کنید $A = \{D_i\}_{i \in \alpha}$ خانواده‌ای جهت‌دار از حوزه‌ها باشد، $R = \bigcup_{i \in \alpha} D_i$ و فرض کنید $D \in A$ موجود باشد که برای هر $i \in \alpha$، $D \subseteq D_i$. همچنین فرض کنید $T \subseteq D^*$ و برای هر $i \in \alpha$، $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_{D_i}(T)$. به‌علاوه فرض کنید برای هر $i, j \in \alpha$، اگر $D_i \subseteq D_j$، آنگاه $D_i \subseteq D_j$ توسیعی حافظ تقسیم باشد. در این صورت $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_R(T)$.

برهان. ابتدا توجه کنید که بنا به فرض و لم ۱۴.۴.۴ داریم،

$$\begin{aligned}\mathrm{MCD}_R(T) &= \bigcup\{\mathrm{MCD}_R(T)\cap D_i \mid i\in\alpha\}\\ &\subseteq \bigcup\{\mathrm{MCD}_{D_i}(T)\mid i\in\alpha\}\\ &= \mathrm{MCD}_D(T)\end{aligned}$$

حال فرض کنید $r\in \mathrm{MCD}_D(T)$. فرض کنید $a\in \mathrm{CD}_R(T)$ و $a \underset{R}{\mid} r$. بنا به جهت‌دار بودن اجتماع، $k\in\alpha$ای موجود است که $a\in D_k$. بنا به فرض $r\in \mathrm{MCD}_{D_k}(T)$ و در نتیجه چون $a \underset{D_k}{\mid} r$، لذا $a \overset{D_k}{\sim} r$ و در نتیجه $a \overset{R}{\sim} r$ و لذا $r\in \mathrm{MCD}_R(T)$. در نتیجه $\mathrm{MCD}_D(T)\subseteq \mathrm{MCD}_R(T)$. بنابراین $\mathrm{MCD}_D(T)=\mathrm{MCD}_R(T)$. □

قضیه ۱۷.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $S\subseteq D^{\#}$ و $R=\mathcal{L}(D;S)$. در این صورت برای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از D^* مانند T، $\mathrm{MCD}_D(T)=\mathrm{MCD}_R(T)$.

برهان. ابتدا حکم را برای زمانی که S متناهی است و با استقرا روی اندازه‌ی S ثابت می‌کنیم. حالت $|S|=۱$ در لم ۱۵.۴.۴ ثابت شد. حال فرض کنید $۲\leq n\in\mathbb{N}$ و فرض کنید حکم برای زمانی که $|S|=n-۱$، برقرار باشد. فرض کنید $S=\{s_۱,\dots,s_n\}$. توجه کنید که

$$\mathcal{L}(D;S)=\mathcal{L}(\mathcal{L}(D;\{s_۱,\dots,s_{n-۱}\});s_n)$$

بنا به فرض استقرا

$$\mathrm{MCD}_{\mathcal{L}(D;\{s_۱,\dots,s_{n-۱}\})}(T)=\mathrm{MCD}_D(T)$$

و بنا به لم ۱۵.۴.۴،

$$\mathrm{MCD}_{\mathcal{L}(D;\{s_۱,\dots,s_{n-۱}\})}(T)=\mathrm{MCD}_R(T)$$

و در نتیجه

$$\mathrm{MCD}_D(T)=\mathrm{MCD}_R(T)$$

حال فرض کنید S دلخواه باشد. در این صورت با توجه به این‌که

$$R=\mathcal{L}(D;S)=\bigcup\{\mathcal{L}(D;F)\mid F\subseteq S \text{ و متناهی است } F\}$$

یک اجتماع جهت‌دار است و بنا به لم ۱۶.۴.۴،

$$\mathrm{MCD}_R(T)=\mathrm{MCD}_D(T)$$

□

بنا به قضیه‌ی قبل، هر حوزه مثل A را می‌توانیم در حوزه‌ای مثل B بنشانیم، به‌طوری که مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مشترک ماکزیمال هر زیر مجموعه از A در B بدون تغییر باقی بماند. بنابراین توسیعی یافتیم که در شرط (**) در صفحه‌ی ۷۹ صدق می‌کند. توجه کنید که عناصر تحویل‌ناپذیر D در $\mathcal{L}(D;\mathrm{Red}(D))$ تحویل‌ناپذیر باقی می‌مانند و به‌علاوه تمام عناصر تحویل‌پذیر D در $\mathcal{L}(D;\mathrm{Red}(D))$

دارای تجزیه‌ی اتمی می‌شوند، اما این امر برای برقراری شرط (*) کافی نیست، زیرا $\mathcal{L}(D;\mathrm{Red}(D))$ می‌تواند دارای عناصر تحویل‌پذیر جدیدی باشد که الزاماً تجزیه‌ی اتمی نداشته باشند. در ادامه این مشکل را حل می‌کنیم.

تعریف ۱۸.۴.۴. برای هر حوزه مثل D و برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، حوزه‌ی $\mathcal{B}_n(D)$ را با استقرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. قرار می‌دهیم $\mathcal{B}_0(D) := D$.

۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم، $\mathcal{B}_n(D) := \mathcal{L}(\mathcal{B}_{n-1}(D);\mathrm{Red}(\mathcal{B}_{n-1}(D))$.

به این ترتیب برای هر حوزه مثل D به زنجیری صعودی از حوزه‌ها یعنی
$$D \subseteq \mathcal{B}_1(D) \subseteq \mathcal{B}_2(D) \subseteq \cdots$$

می‌رسیم که در آن برای هر $n \in \mathbb{N}$، تمام عناصر $\mathrm{Red}(\mathcal{A}_n(D))$ در حوزه‌ی بعدی یعنی $\mathrm{Red}(\mathcal{A}_{n+1}(D))$ دارای تجزیه‌ی اتمی می‌شوند. اینک نشان می‌دهیم حوزه‌ای که از اجتماع روی این زنجیر به دست می‌آید، حوزه‌ی مطلوب است.

تعریف ۱۹.۴.۴. برای هر حوزه مثل D قرار می‌دهیم
$$\mathcal{B}_\infty(D) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{B}_n(D)$$

قضیه ۲۰.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد و قرار دهید $R := \mathcal{B}_\infty(D)$.

۱. R یک حوزه‌ی اتمی است.

۲. برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از D^* مانند T، $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_R(T)$.

برهان. ۱. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(R)$. فرض کنید $a \in \mathcal{A}(D)$ و $a = bc$، که در آن $b,c \in R$. برای $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ای داریم، $b,c \in \mathcal{B}_n(D)$. بنا به قضیه‌ی ۱۳.۴.۴، $a \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_n(D))$ و لذا بدون از دست رفتن کلیت $b \in U(\mathcal{B}_n(D))$ و $c \in \mathcal{B}_n(D)^\#$. اگر $c \in U(R)$، آن‌گاه $m \in \mathbb{N}$ای موجود است که $c, c^{-1} \in \mathcal{B}_m(D)$ و لذا $c \in U(\mathcal{B}_m(D))$ و در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۹.۴.۴، $c \in U(\mathcal{B}_n(D))$ که تناقض است. پس $a \in \mathcal{A}(R)$. بنابراین $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(R)$.

حال فرض کنید $x \in R^\#$. در این صورت $k \in \mathbb{N}$ موجود است که $x \in \mathcal{B}_k(D)^\#$. حال توجه کنید که $R = \mathcal{B}_\infty(\mathcal{B}_k(D))$ و لذا چون x در $\mathcal{B}_k(D)$ تجزیه‌ی اتمی دارد، x در R نیز تجزیه‌ی اتمی دارد.

۲. بنا به قضیه‌ی ۱۷.۴.۴، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_{\mathcal{B}_n(D)}(T)$ و لذا حکم بنا به لم ۱۶.۴.۴ نتیجه می‌شود.

□

اینک قضیه‌ی اصلی این بخش را بیان می‌کنیم. توجه کنید که بنا به مثال ۶.۴.۴، حوزه‌ای که ب.م.م ضعیف نباشد، موجود است و لذا قضیه‌ی زیر نتیجه می‌دهد، اتمی بودن لزوماً تحت توسیع چندجمله‌ای صعود نمی‌کند.

قضیه ۲۱.۴.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد که ب.م.م ضعیف نیست. در این صورت می‌توان D را در حوزه‌ای اتمی مانند R نشاند، به‌طوری که $R[X]$ اتمی نباشد.

برهان. بنا به قضیه‌ی ۲۰.۴.۴، $R = \mathcal{B}_\infty(D)$ حوزه‌ی اتمی است، اما حوزه‌ی ب.م.م ضعیف نیست و لذا بنا به نتیجه‌ی ۴.۴.۴، $R[X]$ اتمی نیست. $\square$

۵.۴ صعود حوزه‌های idf در توسیع چندجمله‌ای

ابتدا قضیه‌ی را اثبات می‌کنیم که شرطی لازم و کافی برای صعود حوزه‌ی idf تحت توسیع چندجمله‌ای را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۵.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $D[X]$ حوزه‌ی *idf* است.

۲. D حوزه‌ی *idf* و همچنین م.م.ب-متناهی است.

برهان. ($۲ \Longrightarrow ۱$) اگر D حوزه‌ی idf نباشد، آنگاه بنا به گزاره‌ی ۲.۱.۴، $D[X]$ نیز حوزه‌ی idf نیست.
حال فرض کنید D و $D[X]$ هر دو حوزه‌ی idf باشند، اما $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ و عناصری از D^* مانند $a_۰, \dots, a_n$ موجود باشند، به‌طوری که $\mathrm{MCD}_D(a_۰, \dots, a_n)$ با تقریب شریک بودن نامتناهی شود. فرض کنید $A = \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های مشترک ماکزیمال غیر شریک از a_iها باشد. توجه کنید که $۱ \leq n$، زیرا MCD یک عنصر با تقریب شریک بودن برابر با خودش است. قرار دهید

$$f = a_۰ + a_۱ X + \cdots + a_n X^n$$

برای هر $i \in \mathbb{N}$ عنصری مثل $f_i \in D^\#$ موجود است که $f = c_i f_i$. هر مقسوم‌علیه تحویل‌ناپذیر از هر f_i یک مقسوم‌علیه تحویل‌ناپذیر از f نیز هست و لذا چون $D[X]$ حوزه‌ی idf است، مجموعه‌ای متناهی از عناصر تحویل‌ناپذیر و غیرشریک $D[X]$ مانند $B = \{g_۱, \dots, g_m\}$ موجود است، به‌طوری که هر f_i با تقریب شریک بودن، برابر با حاصل‌ضربی از عناصر B است. بنابراین برای هر $i \in \mathbb{N}$، عناصری مثل $t_{۱,i}, \dots, t_{m,i} \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ موجودند که $f_i \overset{D[X]}{\sim} g_۱^{t_{۱,i}} \cdots g_m^{t_{m,i}}$. توجه کنید که برای هر $۱ \leq i \leq m$، $۱ \leq \deg(g_i)$، زیرا ب.م.م ضرایب هر f_i برابر با ۱ است. بنابراین برای هر $۱ \leq j \leq m$، $\{t_{j,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ متناهی است و لذا $k, \ell \in \mathbb{N}$ موجودند که $k \neq \ell$ و

$$g_۱^{t_{۱,k}} \cdots g_m^{t_{m,k}} \overset{D[X]}{\sim} g_۱^{t_{۱,\ell}} \cdots g_m^{t_{m,\ell}}$$

و لذا $f_k \overset{D[X]}{\sim} f_\ell$ و لذا $c_k \overset{D[X]}{\sim} c_\ell$ و در نتیجه $c_k \overset{D}{\sim} c_\ell$ که تناقض است.

(۱ $\Longrightarrow$ ۲) فرض کنید $D[X]$ حوزه‌ی idf نباشد، اما D حوزه‌ی idf باشد. نشان می‌دهیم D م.م.ب-متناهی نیست. فرض کنید $f \in D[X]^{\#}$ عنصری باشد که هر مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر آن نامتناهی است و فرض کنید $\{g_i\}_{i\in\alpha}$ یک مجموعه‌ی کامل از مقسوم‌علیه‌های تحویل‌ناپذیر f باشد.

حال فرض کنید K میدان کسرهای D باشد. چون $K[X]$ حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی است، لذا زیرمجموعه‌ای نامتناهی از β مانند γ موجود است که برای هر $i,j \in \Gamma$، $g_i \overset{K[X]}{\sim} g_j$ و لذا عنصری مثل $u_{i,j} \in K^*$ موجود است که $g_i u_{i,j} = g_j$ و لذا $\mathrm{lc}(g_i)u_{i,j} = \mathrm{lc}(g_j)$ و در نتیجه $u_{i,j} = \frac{\mathrm{lc}(g_j)}{\mathrm{lc}(g_i)}$. می‌توان فرض کرد γ شماراست و $\gamma = \mathbb{N}$. برای هر $2 \leq i \in \mathbb{N}$، $g_1 = (\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{\mathrm{lc}(g_i)})(g_i)$ و لذا $\mathrm{lc}(f)g_1 = \mathrm{lc}(f)(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{\mathrm{lc}(g_i)})(g_i)$. اما $\mathrm{lc}(g_i) \underset{D}{\mid} \mathrm{lc}(f)$ و لذا $\mathrm{lc}(f)(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{\mathrm{lc}(g_i)}) \in D^*$. همچنین اگر $i \neq j$، آن‌گاه $\mathrm{lc}(f)(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{\mathrm{lc}(g_i)}) \overset{D}{\not\sim} \mathrm{lc}(f)(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{\mathrm{lc}(g_j)})$، زیرا در غیر این صورت $\mathrm{lc}(g_i) \overset{D}{\sim} \mathrm{lc}(g_j)$ و لذا $u_{i,j} \in U(D)$ و در نتیجه $g_i \overset{D[X]}{\sim} g_j$ که خلاف فرض است. به‌علاوه برای هر $i \in \mathbb{N}$، ب.م.م ضرایب g_i برابر ۱ است و لذا در نهایت مشاهده می‌کنیم، $\{\mathrm{lc}(f)(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{\mathrm{lc}(g_i)})\}_{2\leq i\in\mathbb{N}}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی و غیرشریک از مقسوم‌علیه‌های مشترک ماکزیمال ضرایب $\mathrm{lc}(f)g_1$ است و لذا D، م.م.ب-متناهی نیست. □

تعریف ۲.۵.۴. برای هر حوزه مثل D و برای هر $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$، حوزه‌ی $\mathcal{C}_n(D)$ را با استقرا به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

۱. قرار می‌دهیم، $\mathcal{C}_0(D) := D$.

۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم، $\mathcal{C}_n(D) := \mathcal{L}(\mathcal{C}_{n-1}(D); \mathcal{A}(\mathcal{C}_{n-1}(D))$.

همچنین قرار می‌دهیم،

$$\mathcal{C}_\infty(D) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{C}_n(D)$$

قضیه ۳.۵.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد. در این صورت $\mathcal{C}_\infty(D)$ یک حوزه‌ی ضدماده است.

برهان. عنصر دلخواهی از $\mathcal{C}_\infty(D)^{\#}$ مانند a را در نظر بگیرید. در این صورت $n \in \mathbb{N}$ای موجود است که $a \in \mathcal{C}_n(D)$. واضح است که $a \notin U(\mathcal{C}_n(D))$. ابتدا فرض کنید $a \in \mathrm{Red}(\mathcal{C}_n(D))$ و لذا برای عناصری مثل $b,c \in \mathcal{C}_n(D)^{\#}$، $a = bc$. اگر $b \in U(\mathcal{C}_\infty)$، آن‌گاه $m \in \mathbb{N}$ای موجود است که $b \in U(\mathcal{C}_m(D))$ و لذا بنا به قسمت ۱ از قضیه‌ی ۹.۴.۴، $b \in U(\mathcal{C}_n(D))$ که تناقض است. پس $b,c \in \mathcal{C}_\infty(D)^{\#}$ و لذا $a \in \mathrm{Red}(\mathcal{C}_\infty(D))$. حال فرض کنید $a \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_n(D))$. در این صورت $a/X \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_n(D); a)^{\#}$ و چون $a = (a/X)X$، لذا $a \in \mathrm{Red}(\mathcal{L}(\mathcal{C}_n(D); a))$. اما

$$\mathcal{C}_{n+1}(D) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{C}_n(D); a)); \mathcal{A}(\mathcal{C}_n(D)) \setminus \{a\})$$

و در نتیجه $a \in \mathrm{Red}(\mathcal{C}_{n+1}(D))$. بنابراین مجدداً با همان استدلال قبل، $a \in \mathrm{Red}(\mathcal{C}_\infty(D))$. در نتیجه تمام عناصر $\mathcal{C}_\infty(D)^{\#}$ در $\mathcal{C}_\infty(D)$ تحویل‌پذیر هستند و این یعنی $\mathcal{C}_\infty(D)$ یک حوزه‌ی ضدماده است. □

قضیه ۴.۵.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد. در این صورت حوزه‌ی ضدماده‌ای مانند R وجود دارد که $D \subseteq R$ و به‌علاوه برای هر $T \subseteq D^*$، $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_R(T)$ و $U(R) = U(D)$.

برهان. قرار دهید $R = \mathcal{C}_\infty(D)$. توجه کنید که بنا به قضیه‌ی ۹.۴.۴، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، توسیع $\mathcal{C}_n(D) \subseteq \mathcal{C}_{n+1}(D)$، یک توسیع حافظ تقسیم است و از سوی دیگر بنا به قضیه‌ی ۱۷.۴.۴، $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_{\mathcal{C}_n(D)}(T)$. بنابراین، بنا به لم ۱۶.۴.۴، $\mathrm{MCD}_D(T) = \mathrm{MCD}_R(T)$.

حال نشان می‌دهیم $U(D) = U(R)$. توجه کنید که بنا به قضیه‌ی ۹.۴.۴، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $U(D) = U(\mathcal{C}_n(D))$. حال فرض کنید $x \in U(R)$. در این صورت $m \in \mathbb{N}$ای موجود است که $x \in U(\mathcal{C}_m(D))$ و لذا مجدداً بنا به قضیه‌ی ۹.۴.۴، $x \in U(D)$. □

اینک با استفاده از توسیع $D + M$، حوزه‌ای می‌یابیم که م.م.ب-متناهی نباشد.

قضیه ۵.۵.۴. فرض کنید T حوزه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت $T = K + M$ نوشت که در آن K یک میدان است و $0 \neq M \in \mathrm{Max}(T)$. به علاوه فرض کنید D زیرمیدانی از K باشد و $R = D + M$. همچنین فرض کنید M شامل عنصری تحویل‌ناپذیر باشد. در این صورت، اگر R م.م.ب-متناهی باشد، آن‌گاه گروه K^*/D^* متناهی است.

برهان. فرض کنید K^*/D^* نامتناهی باشد و $\{c_i\}_{i\in\alpha}$ خانواده‌ای نامتناهی از عناصر K^* باشد که در آن برای هر $i, j \in \alpha$، اگر $i \neq j$، آن‌گاه $c_iD^* \neq c_jD^*$. فرض کنید $m \in M \cap \mathcal{A}(R)$، $t, v \in \alpha$ و $t \neq v$. بنا به (۳) در اثبات قضیه‌ی ۴.۶.۲، $\{c_im\}_{i\in\alpha}$ خانواده‌ای نامتناهی از مقسوم‌علیه‌های غیرشریک و تحویل‌ناپذیر از c_vm^2 و c_tm^2 در R است. چون برای هر $i \in \alpha$، $(c_tm^2)/(c_im) = c_tc_i^{-1}m \in \mathcal{A}(R)$ و $(c_vm^2)/(c_im) = c_vc_i^{-1}m \in \mathcal{A}(R)$، لذا اگر برای عنصری مثل $x \in R$ داشته باشیم $x \mid_R c_im$ و $x \mid_R c_tm^2$ و $x \mid_R c_vm^2$، آن‌گاه با توجه به این‌که $c_tm^2 \overset{R}{\not\approx} c_vm^2$، خواهیم داشت $x \overset{R}{\approx} c_im$. بنابراین برای هر $i \in \alpha$، c_im یک م.م.ب از c_tm^2 و c_vm^2 است. لذا $\mathrm{MCD}_R(c_tm^2, c_vm^2)$، با تقریب شریک بودن، نامتناهی است. بنابراین R یک حوزه‌ی م.م.ب-متناهی نیست.

□

اکنون می‌توانیم مثالی از یک حوزه‌ی idf بیابیم که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های روی آن، حوزه‌ی idf نباشد.

مثال ۶.۵.۴. فرض کنید $F_1 \subsetneq F_2$ توسیعی میدانی باشد، به‌طوری که F_2^*/F_1^* نامتناهی باشد (مثلاً $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$). قرار دهید $D = F_1 + XF_2[X]$ و $R = \mathcal{C}_\infty(D)$. بنا به قضیه‌ی ۵.۵.۴، D م.م.ب-متناهی نیست و لذا بنا به قضیه‌ی ۴.۵.۴، R نیز م.م.ب-متناهی نیست و در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۱.۵.۴، $R[X]$ حوزه‌ی idf نیست. اما R یک حوزه‌ی ضدماده و به‌ویژه یک حوزه‌ی idf است.

۶.۴ صعود نیم‌یکتایی تجزیه در توسیع چندجمله‌ای

در این بخش مثالی از یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا می‌یابیم که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های روی آن، حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا نباشد.

لم ۱.۶.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد، $f \in \mathcal{A}(D[X])$، $g \in D[X]$، $\circ \lneq \deg g \lneq \deg f$ و $r \in D^*$. در این صورت اگر $g \mid rf$، آن‌گاه g تکین نیست.

برهان. فرض کنید چنین نباشد و g یک چندجمله‌ای تکین باشد و مثلاً
$$f = a_\circ + a_\text{۱}X + \cdots + a_nX^n$$
و
$$g = b_\circ + b_\text{۱}X + \cdots + X^m$$
در این صورت عنصری از $D[X]$ مانند
$$h = c_\circ + c_\text{۱}X + \cdots + c_{n-m}X^{n-m}$$
موجود است که $gh = rf$. با استقرا نشان می‌دهیم برای هر $\circ \leq i \leq m-n$، $r \mid c_i$. اولاً $c_{n-m} = ra_n$ و لذا $r \mid c_{n-m}$. حال فرض کنید $\circ \leq j \lneq n-m$ و برای هر $j \lneq i \leq n-m$، $r \mid c_i$. ضریب x^{m+j} در gh برابر است با
$$c_j + c_{j+\text{۱}}b_{m-\text{۱}} + \cdots + c_mb_j$$
که در آن برای هر $n-m \lneq k$، $c_k = \circ$. بنا به فرض استقرا
$$r \mid c_{j+\text{۱}}b_{m-\text{۱}} + \cdots + c_mb_j$$
و لذا $r \mid c_j$. بنابراین $r \mid h$ و لذا $g \mid f$ که خلاف فرض تحویل‌ناپذیر بودن f است. □

فرض کنید D یک حوزه و K میدان کسرهای آن باشد و $f \in D[X]$. می‌دانیم اگر $r/s \in K$ $(r, s \in D^*)$ یک ریشه‌ی f باشد، آن‌گاه $r - sx \underset{K[X]}{\mid} f$. برای استنتاج حکمی قوی‌تر، یک اثبات از این حکم را مرور می‌کنیم. فرض کنید $\deg(f) = m$. دنباله‌ی چندجمله‌ای‌های $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ را با استقرا به این شکل تعریف کنید:

۱. قرار دهید $g_\text{۱} := f - \left(\frac{\mathrm{lc}(f)}{s}\right)(r - sx)$.

۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \gneq \text{۲}$، قرار دهید $g_n := g_{n-\text{۱}} - \left(\frac{\mathrm{lc}(g_{n-\text{۱}})}{s}\right)(r - sx)$.

ادعا می‌کنیم برای هر $\text{۱} \leq i \leq m$، $s^ig_i \in D[X]$. ابتدا توجه کنید
$$sg_\text{۱} = sf - s(r - sx)\left(\frac{\mathrm{lc}(f)}{s}\right) = sf - (r - sx)(\mathrm{lc}(f))$$
و لذا حکم در این حالت برقرار است. حال فرض کنید $\text{۱} \lneq j \leq m$ و فرض کنید $s^{j-\text{۱}}g_{j-\text{۱}} \in D[X]$. در این صورت
$$s^jg_j = s^jg_{j-\text{۱}} - s^j(r - sx)\left(\frac{\mathrm{lc}(g_{j-\text{۱}})}{s}\right) = s^jg_{j-\text{۱}} - (r - sx)s^{j-\text{۱}}(\mathrm{lc}(g_{j-\text{۱}}))$$

و لذا بنا به فرض استقرا، $s^j g_j \in D[X]$. توجه کنید،

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{\mathrm{lc}(f)}{s}\right)(r-sx)+g_1 \\ &= \left(\frac{\mathrm{lc}(f)}{s}\right)(r-sx)+\left(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{s}\right)(r-sx)+g_2 \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{\mathrm{lc}(f)}{s}\right)(r-sx)+\left(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{s}\right)(r-sx)+\cdots+\left(\frac{\mathrm{lc}(g_{m-1})}{s}\right)(r-sx)+g_m \end{aligned}$$

در نتیجه چون r/s ریشه‌ی f است، لذا $g_m = 0$ و در نتیجه

$$f = (r-sx)\left(\left(\frac{\mathrm{lc}(f)}{s}\right)+\left(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{s}\right)+\cdots+\left(\frac{\mathrm{lc}(g_{m-1})}{s}\right)\right)$$

قرار دهید

$$h := \left(\frac{\mathrm{lc}(f)}{s}\right)+\left(\frac{\mathrm{lc}(g_1)}{s}\right)+\cdots+\left(\frac{\mathrm{lc}(g_{m-1})}{s}\right)$$

در این صورت بنا به حکمی که در ابتدا ثابت کردیم، داریم $s^m h \in D[X]$. بنابراین ثابت کردیم:

لم ۲.۶.۴. فرض کنید D یک حوزه و K میدان کسرهای آن باشد. در این صورت اگر $r/s \in K$ ریشه‌ی یک چند جمله‌ای روی D مانند f باشد، آن‌گاه عنصری مانند $h \in K[X]$ موجود است، به‌طوری که $f = h(r-sx)$ و به‌علاوه $s^{\deg(f)} h \in D[X]$.

حال نشان می‌دهیم برای این‌که $D[X]$ حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد، لازم است D صحیحاً بسته باشد. ابتدا این مفهوم را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۳.۶.۴. فرض کنید D یک حوزه و K میدان کسرهای D باشد. می‌گوییم D صحیحاً بسته است، هرگاه برای هر $x \in K$، اگر یک چندجمله‌ای تکین(یعنی با ضریب پیشروی ۱) مثل f موجود باشد که $f(x) = 0$، آن‌گاه $x \in D$.

قضیه ۴.۶.۴. فرض کنید D یک حوزه باشد. در این صورت اگر $D[X]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد، آن‌گاه D صحیحاً بسته است.

برهان. فرض کنید $D[X]$ یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا باشد. در این صورت بنا به گزاره‌ی ۲.۱.۴، D نیز حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است. میدان کسرهای D را K بنامید و فرض کنید $z = r/s \in K$ ریشه‌ی یک چندجمله‌ای تکین مانند $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ باشد و فرض کنید f دارای کوچکترین درجه‌ی ممکن بین چنین چندجمله‌ای‌هایی باشد. توجه کنید $f \in \mathcal{A}(D[X])$، زیرا در غیر این صورت، دو چندجمله‌ای تکین و غیرثابت مانند g و h موجودند که $f = gh$ و چون $f(z) = 0$، لذا $g(z)h(z) = 0$. اما درجه‌های g و h اکیداً از درجه‌ی f کوچکتر است و لذا $g(z) \neq 0$ و $h(z) \neq 0$ که تناقض است. همچنین بنا به نتیجه‌ی ۴.۴.۴ و با توجه به این‌که $D[X]$ اتمی است، می‌توان فرض کرد $\gcd(r,s) = 1$.

بنا به لم ۲.۶.۴، عنصری مانند $h' \in K[X]$ موجود است که $f = (r - sx)h'$ و $s^n h' \in D[X]$.
قرار دهید $h = s^n h'$ و $g = s^n f$ و توجه کنید که $g = (r - sx)(s^n h') = (r - sx)h$.

اگر $\mathrm{L}_D(s) = \{m\}$، آن‌گاه طول هر تجزیه‌ی اتمی از g در $D[X]$ باید برابر با $mn + ۱$ شود.

حال فرض کنید $h = h_۱ \cdots h_k$ یک تجزیه‌ی اتمی از h در $D[X]$ باشد. برای هر $۱ \leq i \leq k$، $deg(h_i) \leq deg(h) \lneq \deg(f)$ و در نتیجه اگر $\deg(h_i) \neq ۰$، آن‌گاه بنا به لم ۱.۶.۴ و با توجه به این‌که $h_i \mid s^n f$، $\mathrm{lc}(h_i) \notin U(D)$. بنابراین

$$s^{n-۱} = \mathrm{lc}(h) = \mathrm{lc}(h_۱) \cdots \mathrm{lc}(h_k)$$

یک تجزیه از $s^{n-۱}$ در D است. اما $\mathrm{L}_D(s^{n-۱}) = \{m(n-۱)\}$ و لذا $k \leq m(n-۱)$. از سوی دیگر

$$\{mn + ۱\} = \mathrm{L}_{D[X]}(s^n f) = \mathrm{L}_{D[X]}((sx - r)h) = \{k + ۱\}$$

و در نتیجه $mn + ۱ \leq m(n-۱) + ۱$ و لذا $m = ۰$ و در نتیجه $s \in U(D)$ و لذا $r/s \in D$.
بنابراین نشان دادیم هر عنصر از K که روی D صحیح است، عضو D است و این یعنی D صحیحاً بسته است. $\square$

حال کافی است یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا بیابیم که صحیحاً بسته نباشد.

مثال ۵.۶.۴. فرض کنید $D = \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X]$. در این صورت D بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۲، یک حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا است. فرض کنید K میدان کسرهای D باشد. در این صورت $\sqrt{۲} = (\sqrt{۲}X)/X \in K$.
اما $\sqrt{۲} \notin D$ و $\sqrt{۲}^۲ \in D$ و لذا D صحیحاً بسته نیست. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۴.۶.۴، $D[X]$ حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا نیست.

مراجع

[1] D. D. Anderson, *GCD domains, Gauss' lemma, and contents of polynomials*, in Non-Noetherian commutative ring theory, Vol. 520 of *Math. Appl.*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 1–31.

[2] D. D. Anderson, D. F. Anderson, and M. Zafrullah, *Factorization in integral domains*, J. Pure Appl. Algebra **69** (1990), 1–19.

[3] ———, *Factorization in integral domains. II*, J. Algebra **152** (1992), 78–93.

[4] D. F. Anderson, S. T. Chapman, and W. W. Smith, *Overrings of half-factorial domains. II*, Comm. Algebra **23** (1995), 3961–3976.

[5] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[6] P. M. Cohn, *Bezout rings and their subrings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968), 251–264.

[7] D. Costa, J. Mott, and M. Zafrullah, *Overrings and dimensions of general $D+M$ constructions*, J. Natur. Sci. Math. **26** (1986), 7–13.

[8] J. Coykendall, *A characterization of polynomial rings with the half-factorial property*, in Factorization in integral domains (Iowa City, IA, 1996), Vol. 189 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Dekker, New York, 1997, pp. 291–294.

[9] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra*, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004.

[10] A. Geroldinger and F. Halter-Koch, *Non-unique factorizations*, Vol. 278 of *Pure and Applied Mathematics (Boca Raton)*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006 (Algebraic, combinatorial and analytic theory).

[11] R. Gilmer, *Commutative semigroup rings*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.

[12] ———, *Multiplicative ideal theory*, Vol. 90 of *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, Queen's University, Kingston, ON, 1992 (Corrected reprint of the 1972 edition).

[13] R. Gilmer and T. Parker, *Divisibility properties in semigroup rings*, Michigan Math. J. **21** (1974), 65–86.

[14] A. Grams, *Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **75** (1974), 321–329.

[15] M. D. Larsen and P. J. McCarthy, *Multiplicative theory of ideals*, Academic Press, New York-London, 1971 (Pure and Applied Mathematics, Vol. 43).

[16] P. Malcolmson and F. Okoh, *Polynomial extensions of IDF-domains and of IDPF-domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 431–437.

[17] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Vol. 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1989 (Translated from the Japanese by M. Reid).

[18] A. Rand, *Multiplicative subsets of atoms*, Int. Electron. J. Algebra **18** (2015), 107–116.

[19] M. Roitman, *Polynomial extensions of atomic domains*, J. Pure Appl. Algebra **87** (1993), 187–199.

[20] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, Vol. 51 of *London Mathematical Society Student Texts*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[21] A. Syropoulos, *Mathematics of multisets*, in Multiset processing, Vol. 2235 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Springer, Berlin, 2001, pp. 347–358.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتم .... Atom
اشباع‌شده .... Saturated
اول .... Prime
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک(ب.م.م) .... Greatest Common Divisor (GCD)
بیشین(ماکزیمال) .... Maximal
تابع ارزیابی .... Valuation
تابع ارزیابی p–جمعی .... p-adic Valuation
تحویل‌ناپذیر .... Irreducible
توسیع ساکن .... Inert extension
چندگانگی .... Multiplicity
حلقه‌ی ارزیابی .... Valuation Ring
حلقه‌ی ارزیابی گسسته .... Discrete Valuation Ring
حلقه‌ی تکواری .... Monoid Ring
حوزه‌ی ACCP .... ACCP Domain
حوزه‌ی idf .... idf domain
حوزه‌ی اتمی .... Atomic Domain
حوزه‌ی بزو .... Bezout Domain
حوزه‌ی ب.م.م .... GCD Domain
حوزه‌ی ب.م.م ضعیف .... Weak GCD Domain
حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار .... Bounded Factorization Domain (BFD)
حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی .... Finite Factorization Domain (FFD)
حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا .... Half Factorization Domain (HFD)
حوزه‌ی م.م.ب .... MCD Domain
حوزه‌ی م.م.ب–متناهی .... MCD-finite Domain
خانواده‌ی جهت‌دار .... Directed Family

رتبه‌ی یک گروه	Rank of a Group
زیرگروه منفرد	Isolated Subgroup
شریک	Associated
فراحلقه	Overring
گردایه(چندمجموعه)	Multiset
گروه ارزش	Value Group
مجموعه‌ی ضربی	Multiplicative Set
مجموعه‌ی ضربی شکافنده	Splitting Multiplicative Set
محتوای یک چندجمله‌ای	Content of a Polynomial
محمل	Support
مقسوم‌علیه مشترک بیشین(م.م.ب)	Maximal Common Divisor (MCD)
یکه	Unit

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

ACCP Domain .... حوزه‌ی ACCP

Associated .... شریک

Atom .... اتم

Atomic Domain .... حوزه‌ی اتمی

Bezout Domain .... حوزه‌ی بزو

Bounded Factorization Domain (BFD) .... حوزه‌ی تجزیه‌ی کران‌دار

Content of a Polynomial .... محتوای یک چندجمله‌ای

Directed Family .... خانواده‌ی جهت‌دار

Discrete Valuation Ring (DVR) .... حلقه‌ی ارزیابی گسسته

Finite Factorization Domain (FFD) .... حوزه‌ی تجزیه‌ی متناهی

GCD Domain .... حوزه‌ی ب.م.م

Greatest Common Divisor (GCD) .... بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک(ب.م.م)

Half Factorization Domain (HFD) .... حوزه‌ی تجزیه‌ی نیم‌یکتا

idf domain .... حوزه‌ی idf

Inert extension .... توسیع ساکن

Irreducible .... تحویل‌ناپذیر

Isolated Subgroup .... زیرگروه منفرد

Maximal .... بیشین(ماکزیمال)

Maximal Common Divisor (MCD) .... مقسوم‌علیه مشترک بیشین(م.م.ب)

MCD Domain .... حوزه‌ی م.م.ب

MCD-finite Domain .... حوزه‌ی م.م.ب-متناهی

Monoid Ring .... حلقه‌ی تکواری

Multiplicative Set .... مجموعه‌ی ضربی

Multiplicity .... چندگانگی

Multiset .... گردایه(چندمجموعه)

Overring .... فراحلقه
p-adic Valuation .... تابع ارزیابی p-جمعی
Prime .... اول
Rank of a Group .... رتبه‌ی یک گروه
Saturated .... اشباع‌شده
Splitting Multiplicative Set .... مجموعه‌ی ضربی شکافنده
Support .... محمل
Unit .... یکه
Valuation Ring .... حلقه‌ی ارزیابی
Valuation .... تابع ارزیابی
Value Group .... گروه ارزش
Weak GCD Domain .... حوزه‌ی ب.م.م ضعیف

نمایه

Abstract

In this dissertation, several generalizations of unique factorization domains and their behaviour in localization and polynomial extension is studied.

These classes are, half factorization domains (HFD), bounded factorization domains (BFD), finite factorization domain (FFD), idf-domains, ACCP domains and atomic domains. Using a variety of counter-examples, the relations between these classes are determined. Then, the stability of these properties under localization is studied. Although in general none of these classes ascend or descend under localization, but it will be shown that these properties become stable under some additional conditions. The same thing is done for polynomial extensions afterwards. It will be shown that, all of these properties descend in polynomial extensions and in addition, the classes ACCP, BFD and HFD ascend in polynomial extension. Also, using directed unions, these results will be generalized to polynomials with arbitrary number of variables. Finally, the ascend of HFDs, ACCP domains and atomic domains under polynomial extension is studied and in particular, counter-examples will be found, showing that none of these classes ascend in polynomial extensions in general.

Keywords: Unique Factorization Domain (UFD), Half Factorization Domain (HFD), Finite Factorization Domain (FFD), Bounded Factorization Domain (BFD), ACCP Domain, idf Domain, Atomic Domain, D+M Construction, Localization, Inert Extension, Splitting Multiplicative Set, Polynomial Extension, Directed Union

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Factorization in Integral Domains and Their Extensions

Sina Eftekhari

Supervisor

Dr. Mahdi Reza Khorsandi

December 2015