



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسئله انتخاب پرتفوی فازی

میلاد رضائی

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

آذر ۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عنقوشیده و گریانه از کنار غفلت هایم گذشته
اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده اند.

سپاس‌گزاری...

سپاس‌گذاری را که به انسان توانایی و دانایی بخشد تا به بندگانش شفقت ورزد، مهربانی‌کننده و در حل مشکلاتشان یاری‌شان نماید. از راحت خویش بگذرد و آسایش هم نوعان را مقدم دارد، با او معامله‌کننده و در این خلوص انباز نکیر و خوش باشد که پروردگار سمیع است و بصیر...
سپاس‌گذاری را که پدر و مادری فداکار نسیم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیایم و از ریشه آن‌ها شاخ و برگ گیریم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودند نشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم. چرا که این دو وجود، پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند و راه رفتن را در این وادی پر از فراز و نشیب زندگی آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند...
سپاسگذار کسانی، هستم که سر آغاز تولد من هستند، از یکی زاده می‌شوم و از دیگری جاودانه. استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او بپای من سیاه ماند....

تعمدنامه

اینجانب میلاد رضائی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسئله انتخاب پرتفوی فازی، تحت راهنمایی دکتر علیرضا ناظمی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

میلاد رضائی
آذر ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

مسائل بهینه‌سازی یکی از زمینه‌های جالب، مهم و پرتعداد در ریاضیات مالی است. در زمینه انتخاب پرتفوی بهینه، تخصیص دارایی، مدیریت ریسک و قیمت‌گذاری اختیار به صورت هرچه کاراتر و دقیق‌تر مدل‌های بهینه‌سازی خطی و غیرخطی مختلفی تعریف می‌شود.

در چند دهه اخیر روش‌های بهینه‌سازی که بر پایه هوش مصنوعی توسعه یافته‌اند، موفقیت‌های چشم‌گیری در حل موثر و کارای مسائل بهینه‌سازی به‌دست آورده‌اند. روش‌هایی چون الگوریتم ژنتیک، جستجوی ممنوع، شبیه‌سازی تبریدی، شبکه عصبی و ... قابلیت‌های خود را در حل مسائل بزرگ علمی به‌خوبی نشان داده‌اند. امتیازات ویژه‌ی موجود در مدل‌های شبکه عصبی امکان کاربرد آنها را در حوزه وسیعی از تحقیقات فراهم ساخته است. از جمله آن امتیازات می‌توان به امکان یادگیری و بهبود عملکرد براساس داده‌های ورودی، امکان انجام محاسبات به‌صورت موازی و مستقل از نقطه شروع بودن این مدل‌ها برخلاف مدل‌های کلاسیک اشاره کرد.

در این پایان‌نامه با استفاده از یک مدل شبکه عصبی کارا به حل مسئله انتخاب پرتفوی فازی در شرایطی که هر بازده تضمین شده آن به کلاس معینی از متغیرهای فازی تعلق دارد، پرداخته خواهد شد. با استفاده از یک تابع لیاپانوف مناسب، ثابت خواهیم‌کرد که مدل شبکه عصبی بیان شده به‌طور مجانبی پایدار بوده و به جواب بهینه مسئله اصلی همگرایی سراسری دارد. در انتها نتایج کار و پیشنهاداتی برای کارهای آتی ارائه خواهیم‌داد.

کلید واژه: شبکه‌های عصبی، پایداری، بهینه‌سازی، پرتفوی، فازی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول

۲. مقاله دوم

۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر
۱	لیست جداول
۳	۱ مقدمات و مفاهیم اولیه
۳	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی
۴	۳.۱ تحذب
۵	۱.۳.۱ شرایط لازم و کافی برای مسائل نامقید
۶	۲.۳.۱ شرایط لازم و کافی برای مسائل مقید
۷	۴.۱ پایداری
۱۰	۵.۱ تابع انرژی
۱۰	۶.۱ مفاهیم اقتصادی
۱۱	۱.۶.۱ بازده
۱۲	۲.۶.۱ ریسک و مفهوم آن
۱۷	۲ شبکه عصبی
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۸	۲.۲ ساختار شبکه‌های عصبی مصنوعی
۱۹	۱.۲.۲ شبکه پسخور یا برگشتی
۲۰	۳.۲ اساس بیولوژیکی سلول‌های عصبی
۲۱	۴.۲ مدل ریاضی یک سلول عصبی
۲۶	۵.۲ تاریخچه کاربرد شبکه‌های عصبی مصنوعی در حل مسائل بهینه‌سازی
۲۷	۶.۲ مدل شبکه عصبی پیشنهادی
۳۰	۷.۲ تحلیل پایداری
۳۴	۸.۲ مثال عددی

۳۷	۳	نظریه اعتبار و فازی
۳۷	۱.۳	مقدمه
۳۸	۲.۳	مفاهیم فازی
۳۹	۳.۳	نظریه اعتبار
۴۱	۴.۳	امید ریاضی در محیط فازی
۴۴	۵.۳	ارزش در معرض ریسک در محیط فازی
۴۶	۶.۳	ارزش در معرض ریسک مشروط در محیط فازی
۴۷	۴	انتخاب پرتفوی بهینه
۴۷	۱.۴	مقدمه
۴۸	۲.۴	مسئله بهینه‌سازی پرتفوی
۵۰	۱.۲.۴	مدل‌های جایگزین
۵۱	۳.۴	بهینه‌سازی پرتفوی با بازده فازی
۵۲	۴.۴	مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک
۵۲	۱.۴.۴	معادل‌های قطعی
۵۵	۵.۴	مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک مشروط
۵۶	۱.۵.۴	معادل‌های قطعی
۵۸	۶.۴	مثال‌های عددی
۶۵	۵	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۶۵	۱.۵	نتیجه‌گیری
۶۶	۲.۵	پیشنهادهای برای کارهای آتی
۶۷		مراجع
۷۱		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۳		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

لیست تصاویر

۸	پایداری لیاپانوف	۱۰۱
۸	پایداری مجانبی	۲۰۱
۱۹	تصویری از شبکه‌های عصبی مصنوعی با چهار ورودی و خروجی متفاوت	۱۰۲
۲۰	شبکه عصبی برگشتی	۲۰۲
۲۰	ساختمان یک سلول عصبی بیولوژیک یا نرون	۳۰۲
۲۲	مدل ساده یک سلول عصبی	۴۰۲
۲۲	مدل بلوکی سلول عصبی	۵۰۲
	انواع تابع تحریک: الف) تابع حد آستانه، ب) تابع قسمتی خطی، ج) تابع سیگموئید	۶۰۲
۲۴	با شیب‌های متغیر	۶۰۲
۳۵	رفتار مدل شبکه عصبی (۲۰۲) در مثال (۱۰۸۰۲)	۷۰۲
۶۰	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۶۰۴)	۱۰۴
۶۰	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۸۰۴)	۲۰۴
۶۱	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۷۰۴)	۳۰۴
۶۱	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۹۰۴)	۴۰۴
۶۳	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۳۰۰۴)	۵۰۴
۶۳	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۳۱۰۴)	۶۰۴

لیست جداول

۲۵		توابع فعال سازی	۱.۲
۵۸		بازده های فازی مثلثی از سهام های مختلف	۱.۴
۶۲		بازده های فازی گوسی از سهام های مختلف	۲.۴

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف مورد نیاز در فصل‌های بعدی به‌طور مختصر آورده شده است. ابتدا برخی از مفاهیم ریاضی بصورت مختصر ارائه شده، سپس تعاریف و قضایای مرتبط با تحدب را بیان نموده و در خصوص مسائل بهینه‌سازی مقید و نامقید به ذکر شرایط لازم و کافی بهینگی می‌پردازیم. در ادامه مفاهیم پایداری و تابع انرژی در سیستم‌های دینامیکی را یادآور شده و در پایان نیز برخی از مفاهیم اقتصادی را بیان خواهیم کرد.

۲.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی

تعریف ۱.۲.۱. برای تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ، اگر $\bar{x} \in X$ و ε -همسایگی از $\bar{x}$ مثل $N_\varepsilon(\bar{x})$ موجود باشد که به ازای هر $x \in X \cap N_\varepsilon(\bar{x})$ داشته باشیم $f(\bar{x}) \leq f(x)$ آنگاه $\bar{x}$ یک کمینه موضعی برای f در مجموعه X است.

تعریف ۲.۲.۱. تابع $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع نرم گوییم هرگاه

$$\begin{cases} \|X\| \geq 0 & \forall X \in \mathbb{R}^n \\ \|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0 \\ \|\alpha X\| = |\alpha| \|X\| \\ \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \end{cases}$$

برخی نرم‌ها برای بردار $X \in \mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\|X\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ \|X\|_2 &= \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ \|X\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty\end{aligned}$$

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس $M(X)$ در اندازه $n \times n$ که عناصر آن $m_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) تابعی روی $E \subset \mathbb{R}^n$ می‌باشد،

۱. نیمه معین مثبت^۱ روی E نامیده می‌شود، اگر

$$\forall V \in \mathbb{R}^n \quad X \in E \quad V^T M(X) V \geq 0$$

۲. معین مثبت^۲ روی E نامیده می‌شود، اگر

$$\forall V \in \mathbb{R}^n \quad V \neq 0 \quad X \in E \quad V^T M(X) V > 0$$

۳. معین مثبت قوی روی E نامیم، اگر عددی مثبت مانند α وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\forall V \in \mathbb{R}^n \quad X \in E \quad V^T M(X) V \geq \alpha \|V\|^2$$

تعاریف فوق را می‌توان بر اساس مفهوم مقدار ویژه نیز ارائه داد. اگر γ کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $M(X)_{n \times n}$ باشد آنگاه:

۱. $M(X)_{n \times n}$ روی E نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر به ازای هر $X \in E$ ، $\gamma \geq 0$.

۲. $M(X)_{n \times n}$ روی E معین مثبت است اگر و فقط اگر به ازای هر $X \in E$ ، $\gamma > 0$.

۳. $M(X)_{n \times n}$ روی E معین مثبت قوی است اگر و فقط اگر عدد مثبت α وجود داشته باشد که به ازای هر $X \in E$ ، $\gamma \geq \alpha > 0$.

۳.۱ تحدب

در توسعه برنامه‌ریزی غیرخطی، تابع محدب^۳ همواره به عنوان یک مفهوم اصلی ریاضی مورد نیاز است.

^۱Positive Semidefinite

^۲Positive Ddefinite

^۳Convex Function

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه $E \subset \mathbb{R}^n$ را محدب می‌گوییم اگر:

$$\forall x, y \in E \quad \lambda \in (0, 1) \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$$

تعریف ۲.۳.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ بر روی یک مجموعه نقاط واقع در یک مجموعه محدب $E \subset \mathbb{R}^n$ یک تابع محدب نامیده می‌شود اگر:

$$\forall x, y \in E \quad \lambda \in (0, 1) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

تابع f را روی E مقعر گوییم هرگاه $-f$ محدب باشد.

قضیه ۳.۳.۱. ([۲]): فرض کنید S یک مجموعه محدب^۴ باز ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ روی S مشتق پذیر باشد. در این صورت f محدب است، اگر و تنها اگر $\forall \bar{x} \in S$ داشته باشیم

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

قضیه ۴.۳.۱. ([۲]): فرض کنید S یک مجموعه محدب باز ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ روی S دو بار مشتق پذیر باشد. در این صورت f محدب است، اگر و تنها اگر ماتریس هسین^۵ f در هر نقطه $x \in S$ نیمه معین مثبت باشد.

قضیه ۵.۳.۱. ([۲]): فرض کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ روی S محدب باشد. همچنین فرض کنید که $\hat{x}$ یک کمینه موضعی برای مساله فوق باشد.

۱. در این صورت $\hat{x}$ یک کمینه سراسری است.

۲. اگر $\hat{x}$ یک کمینه موضعی منحصربه‌فرد باشد، یا اگر f اکیدا محدب باشد، در این صورت $\hat{x}$ یک کمینه سراسری یکتا است.

۱.۳.۱ شرایط لازم و کافی برای مسائل نامقید

قضیه ۶.۳.۱. (شرط لازم مرتبه اول [۲]): مساله برنامه‌ریزی نامقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (۱.۱)$$

که در آن $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی است که در $\hat{x}$ مشتق پذیر است. اگر $\hat{x}$ یک کمینه موضعی باشد، آنگاه $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

قضیه ۷.۳.۱. (شرط لازم مرتبه دوم [۲]): فرض کنید مشتق دوم $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در $\hat{x}$ موجود باشد. اگر $\hat{x}$ یک کمینه موضعی باشد، آنگاه $\nabla f(\hat{x}) = 0$ و ماتریس هسین f در $\hat{x}$ نیمه معین مثبت است.

^۴Convex Set

^۵Hessian Matrix

قضیه ۸.۳.۱. (شرط کافی [۲]): فرض کنید مشتق دوم $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در $\hat{x}$ موجود باشد. اگر $\nabla f(\hat{x}) = 0$ و ماتریس هسین f در $\hat{x}$ معین مثبت باشد، آنگاه $\hat{x}$ یک کمینه موضعی منحصربه‌فرد است.

۲.۳.۱ شرایط لازم و کافی برای مسائل مقید

قضیه ۹.۳.۱. (شرایط لازم-کروشن-کان-تاکر^۶ K.K.T)، [۲]: فرض کنید X یک مجموعه باز ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. مسأله کمینه‌سازی مقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_k(x) \leq 0 \quad k = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, l \\ & x \in X \end{cases} \quad (2.1)$$

که در آن توابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب شدنی مسأله (۲.۱) باشد و $K = \{k : g_k(\hat{x}) = 0\}$. همچنین فرض کنید f و g_k برای $k \in K$ در $\hat{x}$ مشتق پذیر، g_k برای $k \notin K$ در $\hat{x}$ پیوسته و h_j برای $j = 1, \dots, l$ دارای مشتق پیوسته باشند. به علاوه فرض کنید $\nabla g_k(\hat{x})$ برای $k \in K$ و $\nabla h_j(\hat{x})$ برای $j = 1, \dots, l$ مستقل خطی باشند. اگر $\hat{x}$ کمینه موضعی برای (۲.۱) باشد، آنگاه اسکالرهایی یکتای u_k برای $k \in K$ و v_j برای $j = 1, \dots, l$ وجود دارند به طوری که:

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{k \in K} u_k \nabla g_k(\hat{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0 \\ u_k \geq 0 \quad k \in K \end{cases} \quad (3.1)$$

علاوه بر فرض‌های بالا اگر g_k برای $k \notin K$ در $\hat{x}$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه شرایط K.K.T می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{k=1}^m u_k \nabla g_k(\hat{x}) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0 \\ u_k g_k(\hat{x}) = 0 \quad k = 1, \dots, m \\ u_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \end{cases} \quad (4.1)$$

همچنین شرایط K.K.T (۴.۱) می‌تواند به صورت ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})^T u + \nabla h(\hat{x})^T v = 0 \\ u^T g(\hat{x}) = 0 \\ u \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

^۶Krvsh-Kuhn-Tucker

که در آن $\nabla g(\hat{x})$ ماتریس ژاکوبی $m \times n$ و $\nabla h(\hat{x})$ ماتریس ژاکوبی $l \times n$ است و u یک بردار m تایی و v یک بردار l تایی است. $(u^T, v^T)^T$ بردار ضرایب لاگرانژ^۷ نامیده می شوند.

تعریف ۱۰.۳.۱. $\hat{x}$ را نقطه K.K.T گویند اگر در شرایط زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})^T u + \nabla h(\hat{x})^T v = 0 \\ u^T g(\hat{x}) = 0 \\ u \geq 0 \\ g(\hat{x}) \leq 0 \\ h(\hat{x}) = 0 \end{cases} \quad (۶.۱)$$

تعریف ۱۱.۳.۱. در مساله (۲.۱) اگر f و g_k ($k = 1, \dots, m$) محدب و h_j ($j = 1, \dots, l$) آفینی باشند آنگاه مساله (۲.۱) را یک مساله بهینه سازی محدب گویند.

ملاحظه ۱۲.۳.۱. ([۲]): قضیه (۹.۳.۱) شرط لازم است به این معنی که اگر $(\hat{x}, u, v)$ در (۶.۱) صدق کند، لزوماً $\hat{x}$ جواب بهینه نیست.

ملاحظه ۱۳.۳.۱. ([۲]): قضیه (۹.۳.۱) برای مسائل بهینه سازی محدب شرط لازم و کافی بهینگی می باشد، یعنی با حل کردن (۶.۱)، $\hat{x}$ بدست آمده جواب بهینه مسئله (۲.۱) و (u, v) به دست آمده جواب بهینه مساله دوگان نظیر آن است.

۴.۱ پایداری

سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (۷.۱)$$

که در آن $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ است. x^* یک نقطه تعادل^۸ برای (۷.۱) نامیده می شود اگر $f(x^*) = 0$.

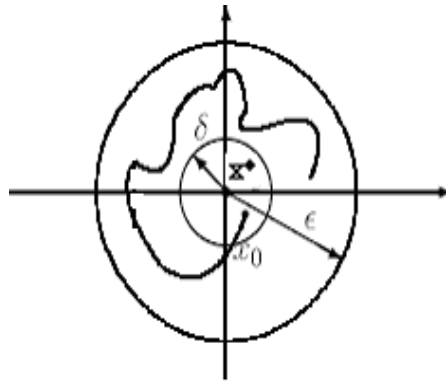
تعریف ۱۰.۴.۱. فرض کنید که $x(t)$ یک جواب (۷.۱) باشد، نقطه تعادل تنها x^* ، پایدار به مفهوم لیاپانوف^۹ است با توجه به شکل (۱۰.۱)، اگر برای هر $x(t_0) = x_0$ و هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\|x^* - x_0\| \leq \delta$ آنگاه

$$\forall t \geq t_0 \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

^۷Lagrange Multipliers

^۸Equilibrium Point

^۹Lyapunov



شکل ۱.۱: پایداری لیپانوف

تعریف ۲.۴.۱. سیستم دینامیکی (۷.۱) همگرای سراسری به مجموعه

$$\Omega^* = \{x \mid \text{جواب سیستم (۷.۱) است}\}$$

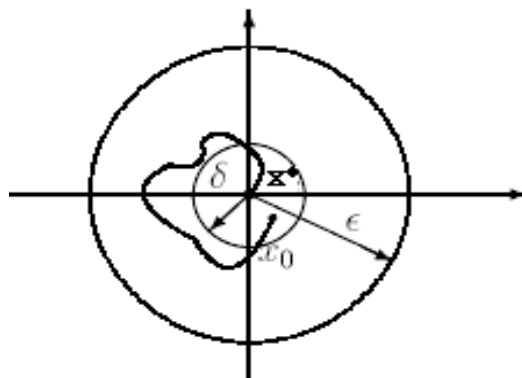
گفته می‌شود اگر هر جواب دلخواه $x(t)$ از سیستم (۷.۱) در رابطه زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{y \in \Omega^*} \|x(t) - y\| = 0$$

تعریف ۳.۴.۱. سیستم دینامیکی در نقطه تعادل یکتا x^* پایدار مجانبی سراسری نامیده می‌شود اگر x^* به مفهوم لیپانوف پایدار باشد و در شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

شکل (۲.۱) را ببینید.



شکل ۲.۱: پایداری مجانبی

تعریف ۴.۴.۱. مجموعه $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ، یک مجموعه پایدار نسبت به سیستم (۷.۱) گفته می‌شود اگر $x(t_0) \in M$ و $t_0 \geq 0$ ، آنگاه به ازای هر $t \geq t_0$ ، $x(t) \in M$ باشد.

تعریف ۵.۴.۱. نگاشت F در شرط لیپشیتز^{۱۰} صدق می‌کند اگر عدد ثابت L وجود داشته باشد، به‌طوری که برای هر دو نقطه $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|$$

F را لیپشیتز محلی روی $\mathbb{R}^n$ نامیم اگر به ازای هر نقطه از $\mathbb{R}^n$ ، یک همسایگی مانند $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد، به‌طوری که عدد ثابت L_D وجود داشته باشد که در نامساوی بالا برای هر دو نقطه $x, y \in D_0$ صدق کند.

تعریف ۶.۴.۱. نگاشت $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ صعودی گفته می‌شود، اگر برای هر زوج از نقاط $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$(x - y)^T (F(x) - F(y)) \geq 0$$

همچنین روی $\mathbb{R}^n$ اکیداً صعودی است، اگر نامساوی فوق به‌صورت اکید برای هر $x \neq y$ برقرار باشد. F روی $\mathbb{R}^n$ صعودی قوی است اگر برای هر زوج از نقاط $x, y \in \mathbb{R}^n$ ثابت $\beta > 0$ وجود داشته باشد، به‌طوری که:

$$(x - y)^T (F(x) - F(y)) \geq \beta \|x - y\|^2$$

قضیه ۷.۴.۱. ([۳۵]): فرض کنیم که $F : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، یک تابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر روی K باشد و ماتریس ژاکوبین F که لزوماً متقارن نیست، نیمه معین مثبت (معین مثبت) باشد، آنگاه $F(x)$ یکنوا (یکنوای قوی) است.

قضیه ۸.۴.۱. ([۹]): در سیستم دینامیکی (۷.۱) فرض می‌کنیم که $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته، آنگاه برای هر $t_0 > 0$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، یک جواب محلی $x(t)$ به ازای $t \in [t_0, \tau)$ که $\tau > t_0$ وجود دارد. علاوه بر این اگر f در x_0 در شرط لیپشیتز محلی صدق کند آنگاه جواب یکتا خواهد بود و اگر f در $\mathbb{R}^n$ در شرط لیپشیتز صدق کند آنگاه τ می‌تواند تا $+\infty$ توسعه داده شود.

ملاحظه ۹.۴.۱. همیشه می‌توان نقطه تعادل را به‌صورت $x^* = 0$ در نظر گرفت. برای هر نقطه تعادل دیگر می‌توان با استفاده از تغییرمتغیر، یک سیستم جدید با نقطه تعادل y^* تعریف کرد. برای این منظور تعریف می‌کنیم:

$$y = x - x^* \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} = f(x) \Rightarrow f(x) = f(y + x^*) = g(y)$$

در نتیجه نقطه تعادل سیستم جدید $y^* = 0$ است زیرا

$$g(0) = f(0 + x^*) = f(x^*) = 0$$

در نتیجه x^* نقطه تعادل برای سیستم $\dot{x} = f(x)$ است اگر و فقط اگر $y = 0$ نقطه تعادل سیستم $\dot{y} = g(y)$ باشد.

^{۱۰} Lipschitz

۵.۱ تابع انرژی

قضیه ۱.۵.۱. [۳۱]: فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل برای سیستم (۷.۱) و تابع $E : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد. اگر

$$E(0) = 0. \quad ۱.$$

$$E(x) > 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad ۲.$$

$$\dot{E}(x) \leq 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad ۳.$$

که در آن $\dot{E}(x) = \frac{dE(x)}{dt}$ است. آنگاه $x = 0$ نقطه پایداری سیستم خواهد بود و $E(x)$ را «تابع لیاپانوف» یا «تابع انرژی» برای سیستم (۷.۱) نامیم.

قضیه ۲.۵.۱. [۳۱]: فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل برای سیستم (۷.۱) باشد و $E : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر باشد. اگر

$$E(0) = 0. \quad ۱.$$

$$E(x) > 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad ۲.$$

$$\dot{E}(x) < 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad ۳.$$

آنگاه سیستم در $x = 0$ پایدار مجانبی خواهد بود.

قضیه ۳.۵.۱. [۳۱]: فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل برای سیستم (۷.۱) و تابع $E : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد. اگر

$$E(0) = 0. \quad ۱.$$

$$E(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad ۲.$$

$$\dot{E}(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad ۳.$$

آنگاه سیستم در نقطه $x = 0$ پایدار مجانبی سراسری است.

۶.۱ مفاهیم اقتصادی

در اصطلاح، سرمایه گذاری^{۱۱} عبارت است از اقدام به انجام هرگونه فعالیت اقتصادی سرمایه گذار بر روی دارایی واقعی که دارای بازده مورد انتظار و ریسک متناسب باشد و یا اقدام برای تبدیل وجوه مالی به یک یا چند نوع دارایی متفاوت که جهت منتفع شدن در دوره آتی نگهداری می شوند. در مسئله انتخاب پرتفوی هدف این است که چگونه سرمایه یک فرد به بازار سرمایه اوراق بهادار وارد شود و حداکثر سود را با حداقل ریسک به دست آورد.

^{۱۱}Investment

۱.۶.۱ بازده

بازده یک شاخص مالی بوده و عبارت است از نسبت ستانده‌ها به نهاده‌های مربوط به یک شرکت که می‌تواند به صورت کمی یا کیفی بیان شود. بازده یک شرکت از نظر کمی، سود حسابداری و از نظر کیفی، اعتبار شرکت تلقی گشته و نیروی محرکی است که ایجاد انگیزه کرده و به عبارت بهتر پاداش سرمایه‌گذاران محسوب می‌گردد، چرا که تمام هدف سرمایه‌گذاری کسب بازده مطلوب است. از طرف دیگر تعیین تفاوت میان بازده تحقق یافته^{۱۲} و بازده مورد انتظار^{۱۳} از اهمیت بالایی برخوردار است. بازده تحقق یافته، بازدهی است که مربوط به گذشته بوده، حال آنکه بازده مورد انتظار، بازده تخمینی برای یک دارایی^{۱۴} در دوره‌ای از آینده است که این بازده با عدم اطمینان^{۱۵} همراه بوده و احتمال برآورده نشدن آن نیز وجود دارد. در مورد دارایی‌ها و مخصوصاً سهام، بازده از دو جزء تشکیل شده است:

۱. بازده ناشی از تغییر قیمت^{۱۶}، این جزء از اختلاف بین قیمت خرید دارایی و فروش دارایی حاصل می‌شود.

۲. بازده ناشی از دریافت سود^{۱۷}، این بازده ناشی از صورت جریان‌ات نقدی دریافتی به دلیل تملک دارایی در طول سرمایه‌گذاری است (همانند سود تقسیمی).

بازده مورد انتظار هر سهم

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده بالقوه سهام، بازده مورد انتظار برای سهام i ام با $E(R_i)$ نشان داده شده و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^m (p_k) PR_k$$

که در آن، PR_k بازده بالقوه سهم i ام و p_k احتمال وقوع آن است.

سبد سرمایه

سبد سرمایه (پورتفوی)^{۱۸}، به طور عام همان سبد سرمایه‌گذاری و یا به طور خاص سبد سهام است، به معنی ترکیب دارایی‌های سرمایه‌گذاری شده توسط یک سرمایه‌گذار اعم از فرد یا مؤسسه است. به لحاظ فنی، یک سبد سرمایه، مجموعه کامل دارایی‌های حقیقی و مالی سرمایه‌گذار را در بر می‌گیرد.

^{۱۲}Realized Return

^{۱۳}Expected Return

^{۱۴}Asset

^{۱۵}Uncertainty

^{۱۶}Capital Gain

^{۱۷}Yield

^{۱۸}Portfolio

بازده مورد انتظار سبد سرمایه

در صورتی که سبد سرمایه با N دارایی داشته باشیم که وزن دارایی i ام در آن x_i باشد، بازده مورد انتظار سبد سرمایه با $E(R_p)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i) \quad (۸.۱)$$

فروش استقراری

فروش استقراری^{۱۹} عبارت است از فروش اوراق بهادار به وسیله کسی که چنین اوراقی را ندارد. بنابراین باید آنها را قرض بگیرد و به خریدار تحویل دهد. فروش به این فرم باعث می‌شود که فروشنده از کاهش قیمت اوراق در آینده سود ببرد. فروشنده باید در زمان آینده اوراق را خریداری و بدهی خود را پرداخت نماید.

۲.۶.۱ ریسک و مفهوم آن

مفهوم ریسک در فرهنگ لغت به معنی احتمال آسیب یا زیان است و به طور ساده می‌توان ریسک را عدم اطمینان به نتایج آتی تعریف کرد. به عبارت دیگر ریسک پدیده‌ای مربوط به آینده است که نمی‌توان آن را به طور دقیق پیش بینی نمود، زیرا با عدم اطمینان همراه است. هر چه این عدم اطمینان بیشتر باشد، ریسک هم بیشتر است. در بازارهای مالی به همراه هر فرصتی، ریسک هم وجود دارد و اصولاً نمی‌توان کلیه ریسک‌ها را از بین برد زیرا کلیه فرصت‌ها هم از بین خواهند رفت. لازم به توضیح است که در ادبیات بازار سرمایه و جهت شناخت بیشتر، مفهوم ریسک را به طور کلی به دو بخش اجتناب‌ناپذیر و اجتناب‌پذیر تقسیم‌بندی می‌کنند. آن بخش از ریسک که در اثر بروز عوامل برونزای موثر بر نوسانات بازار مالی بوجود آمده و نهایتاً بر روی قیمت اوراق بهادار تأثیر می‌گذارد به عنوان ریسک‌های اجتناب‌ناپذیر شناخته شده و قابل کاهش با اقدام به عمل تنوع‌سازی نمی‌باشد. از آنجایی که این نمونه از ریسک بدلیل بروز تغییرات ناشی از وضعیت کلی بازار، به صورت نظام‌یافته عمل کرده و موجب تغییرات کلی بر روی مجموعه اوراق بهادار می‌شود، به عنوان ریسک بازار یا ریسک سیستماتیک نیز شناخته می‌شوند. در حالیکه به آن بخش از ریسک اوراق بهادار را که ناشی از وضعیت خاص هر واحد از اوراق بهادار بوده و مستقل از عواملی عمل می‌کند که به طور کلی بازار اوراق بهادار را تحت تأثیر قرار می‌دهد، تحت عنوان ریسک اجتناب‌پذیر شناخته می‌شود. بدیهی است که از طریق تنوع بخشی به عملیات سرمایه‌گذاری، این نوع ریسک غیر سیستماتیک یا کاهش‌پذیر را می‌توان تحت کنترل قرار داد.

میزان ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار، یکی از مهمترین عوامل تعیین کننده در انتخاب گزینه‌های سرمایه‌گذاری است. سرمایه‌گذار موفق کسی است که سطح قابل قبولی از ریسک را بپذیرد. سرمایه‌گذاران الگوهای

^{۱۹}Short-Selling

ریسک پذیری متفاوتی دارند به طور کلی می‌توان آن‌ها را به دو دسته ریسک پذیر^{۲۰} و ریسک نگریز^{۲۱} تقسیم کرد. افراد ریسک پذیر در مقایسه با افراد ریسک نگریز، بازدهی کمتری برای پذیرش ریسک مطالبه می‌کنند.

ریسک سبد سهام

ریسک سبد سهام، تابعی از سهام منفرد و کواریانس بین بازده‌های سهام منفرد است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{Var}(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i \text{Var}(R_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j) \quad (9.1)$$

که در آن $\text{Cov}(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ کواریانس بین بازده‌های سهم‌های i و j است و ρ_{ij} ضریب همبستگی بازده‌های i و j است.

اندازه‌گیری ریسک

مهمترین مسئله در ریسک، محاسبه میزان آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک معرفی شده، معیارهای اندازه‌گیری ریسک اولین بار از طریق مطالعات شاخص‌های پراکندگی آماری و از آن به بعد توسط معیارهای جدیدتری از جمله حساسیت و ریسک نامطلوب محاسبه شدند، که همگی از روش‌های آماری استفاده می‌کنند و در نهایت معیار ریسک منسجم که به صورت اصل موضوع به شاخص ریسک می‌پردازد ارائه گردید.

در سال ۱۹۵۲، هری مارکوویتز با ارائه مدلی کمی به اندازه‌گیری ریسک پرداخت و با معرفی مدلی مبتنی بر ریسک و بازده و ارائه مجموعه کارا^{۲۲} برای اولین بار ریسک را در کنار بازده به عنوان متغیری دیگر جهت انتخاب دارایی برای سرمایه‌گذاری قرار داد. وی انحراف معیار را به عنوان شاخص پراکندگی، معیار عددی ریسک خواند. شاگرد او ویلیام شارپ^{۲۳}، شاخص بتا (ضریب حساسیت) را برای تغییرات نسبی ارزش یک سهم در قبال تغییر ارزش بازار با معرفی خط مشخصات ارائه کرد و با معرفی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، مدیریت علمی سبد سرمایه را پایه‌گذاری کرد. مک کالی^{۲۴} معیار بتا را به عنوان ملاک اندازه‌گیری ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت معرفی کرد، در ادامه کار، مک کالی معیار تحذب را به عنوان شاخصی دقیق‌تر معرفی کرد. در سال ۱۹۹۶ وترستون^{۲۵} مدیر موسسه مورگان

^{۲۰} Risk Taker

^{۲۱} Risk Averse

^{۲۲} Efficient Frontier Line

^{۲۳} William Sharpe

^{۲۴} McCauley

^{۲۵} Weterstone

^{۲۶} مدل ارزش در معرض ریسک ^{۲۷} را معرفی کرد. در نهایت در سال ۱۹۹۸ دلبان ^{۲۸} ریسک منسجم ^{۲۹} را به عنوان معیار ریسک در نظر گرفت.

می‌توان طبقه‌بندی زیر را در مورد معیارهای اندازه‌گیری ریسک ارائه داد:

۱. حساسیت: تغییر یک متغیر وابسته بر اثر تغییر یک متغیر مستقل، مثل تغییرات قیمت در قبال تغییر یک واحد نرخ سود (دیرش ^{۳۰}، تحذب و بتا).

۲. نوسان: عبارت است از نوسان یک متغیر در اطراف میانگین و یا یک پارامتر تصادفی دیگر مثل (واریانس و انحراف معیار).

۳. معیارهای ریسک نامطلوب: این معیارها که برعکس معیارهای نوسان، تنها بر بخش مخرب ریسک تمرکز دارند، در حقیقت نوسانات زیر سطح میانگین و یا متغیر هدف را مورد محاسبه قرار می‌دهند (نیم واریانس، نیم انحراف معیار و ارزش در معرض ریسک).

۴. ریسک منسجم: که به صورت یک اصل موضوع می‌باشد مانند (ارزش در معرض ریسک مشروط ^{۳۱}).

تعریف ۱.۶.۱. بتا (تطابق سررسید، دوره انتظار یا سررسید مؤثر) برای محاسبه حساسیت ارزش اوراق قرضه می‌باشد.

تعریف ۲.۶.۱. نیم واریانس شاخصی است که برای محاسبه پراکندگی صفت متغیر و برای انحرافات نامطلوب به کار برده می‌شود. به عبارت دیگر اگر ریسک را میزان ضرر تعریف کنیم، آنگاه تغییرات مطلوب (افزایش نرخ بازدهی دارایی مالی) به عنوان ریسک محسوب نمی‌شود و فقط آن دسته از مشاهداتی که کمتر از میانگین نرخ بازدهی هستند، به عنوان ریسک به حساب می‌آید. فرمول محاسبه نیم واریانس به صورت زیر است:

$$SV = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \{\max(0, E(r_i) - r_T)\}^2$$

که در آن، r_T بازدهی دارایی در طول دوره، K تعداد مشاهدات و E امید ریاضی نرخ بازدهی است.

تعریف ۳.۶.۱. ارزش در معرض ریسک که به عنوان بدترین خسارت مورد انتظار در یک بازه زمانی معین، تحت شرایط معمولی و طبیعی بازار، با یک ضریب اطمینان مشخص و معین تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۶.۱. تابع $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ را یک ریسک منسجم گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

^{۲۶}J. P. Morgan

^{۲۷}Value at Risk

^{۲۸}Delbaen

^{۲۹}Coherent Risk

^{۳۰}Duration

^{۳۱}Conditional Value at Risk

$$۱. \quad \rho(X) \leq ۰ \quad X \geq ۰$$

$$۲. \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \lambda > ۰$$

$$۳. \quad \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

$$۴. \quad \rho(X + k) = \rho(X) - k$$

فصل ۲

شبکه عصبی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا ساختار شبکه عصبی^۱ و مدل ریاضی یک سلول عصبی را بیان می‌کنیم و در ادامه به بیان تاریخچه‌ای از شبکه‌های عصبی در حل مسائل بهینه سازی می‌پردازیم، سپس یک مدل شبکه عصبی بازگشتی برای حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم محدب معرفی نموده و یکتایی، پایداری و همگرایی آن، بررسی و اثبات می‌گردد، در انتها با مثالی عددی کارایی مدل شبکه عصبی ارائه شده را نشان می‌دهیم. کار بر روی شبکه‌های عصبی مصنوعی، با الهام از عملکرد مغز انسان از آنجا شروع شد که دانشمندان دریافتند مغز بشر به گونه‌ای کاملاً متفاوت از کامپیوترهای دیجیتالی مرسوم محاسبات را انجام می‌دهد. مغز یک سیستم پردازش داده بسیار پیچیده است که از واحدهای ساختاری به نام سلول عصبی یا نرون^۲ تشکیل شده است. شبکه عصبی سیستمی پویا و غیرخطی است که از تعداد زیادی واحد پردازش (نرون ها) و اتصالات بین این واحدهای پردازش تشکیل می‌شود.

یک شبکه عصبی بر خلاف کامپیوتر که نیازمند دستورهای کاملاً صریح و مشخص است، به مدل‌های ریاضی محض نیازی ندارد، بلکه مانند انسان تجربه کسب کرده و سپس نتیجه این تجربیات را تعمیم می‌دهد. امروزه این شبکه‌ها تبدیل به ابزاری قدرتمند و عمومی شده‌اند که برای حل مسائل از قبیل تخمین (تقریب)، تشخیص الگو^۳، رباتیک، کنترل، و به‌طور کلی در هر جا که نیاز به یادگیری نگاشت خطی و یا غیرخطی باشد، به کار می‌روند.^[۴]

برای حل هر مسأله‌ای، شبکه‌های عصبی سه مرحله را طی می‌کنند: آموزش^۴، تعمیم^۵ و اجرا^۶. آموزش، فرایندی است که طی آن شبکه می‌آموزد تا الگوی موجود در ورودی‌ها را (که به صورت مجموعه

^۱Neural Network

^۲Neuron

^۳Pattern Recognition

^۴Traning

^۵Generalization

^۶Operation

داده‌های آموزشی است) بشناسد. برای این منظور هر شبکه عصبی از مجموعه‌ای از قوانین یادگیری که نحوه یادگیری را تعریف می‌کنند استفاده می‌کند. تعمیم، توانایی شبکه برای ارائه جواب قابل قبول در قبال ورودی‌هایی است که در مجموعه آموزشی نبوده‌اند. یعنی پس از آنکه مثال‌های اولیه به شبکه آموزش داده شد، شبکه می‌تواند در قبال یک ورودی آموزش داده نشده قرار گیرد و یک خروجی مناسب را ارائه نماید. این خروجی براساس مکانیسم تعمیم که همانا چیزی جز فرایند درونیابی نیست به‌دست می‌آید. استفاده از شبکه برای انجام عملکردی که به آن منظور طراحی شده است را اجرا می‌گویند. در اثر آموزش دیدن شبکه، وزن‌های داخلی^۷ (که بر روی ورودی‌های هر سلول اعمال می‌شود) تغییر می‌کند و به وضعیت مناسب می‌رسند. یکی از نقاط ضعف شبکه‌های عصبی این است که نتایج آموزش، یعنی وزن‌های داخلی، هیچگونه تصویر روشنی از اعتبار جواب‌های مسأله بدست نمی‌دهد. این وزن‌ها کاملاً قابل درک نیستند. با این وجود جواب‌های تولید شده توسط شبکه، اغلب صحیح است و با شرایط کمی حاکم بر محیط سازگاری دارد. این صحت جوابها و صدق شرایط کمی حاکم بر محیط، گاهی مهم‌تر از توضیح‌پذیر بودن آن است. تاکنون اسامی متفاوتی برای شبکه‌های عصبی به‌کار رفته است. از جمله آنها می‌توان به مدل‌های جعبه سیاه^۸، مدل‌های تجربی، تقریب زن‌های عام^۹ و مدل‌های موازی^{۱۰} اشاره نمود.^[۱۴]

۲.۲ ساختار شبکه‌های عصبی مصنوعی

شبکه‌های عصبی مصنوعی از یک سری واحدهای ساختمانی اولیه تشکیل می‌شوند. هر واحد دارای چندین ورودی است که با هم ترکیب شده و پس از انجام عملیات پردازش یک خروجی را به‌دست می‌دهند. این واحدهای اولیه مانند شکل ۱.۲ به هم متصل هستند به‌طوری‌که خروجی هر واحد به عنوان ورودی واحد‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. واحدهای ساختمانی را سلول عصبی، نرون یا گره^{۱۱} نیز می‌نامند.

در شکل ۱.۲، (الف) - یک شبکه بسیار ساده شامل چهار ورودی و یک خروجی، نتیجه آموزش این شبکه تکنیک رگرسیون لجستیک^{۱۲} در آمار را نشان می‌دهد. (ب) - شبکه دارای دو لایه میانی است که قدرت بیشتری در تشخیص الگو دارد. (ج) - افزایش تعداد لایه پنهان شبکه را قوی‌تر می‌کند ولی خطر بیش‌برازشی^{۱۳} در آن وجود دارد. (د) - شبکه عصبی با چندین خروجی.

شبکه‌های عصبی اولیه تنها دو لایه (ورودی و خروجی) داشتند و به‌همین دلیل تنها در مسائل خطی مفید بودند. ساختارهای توسعه یافته امروزی شامل سه و یا تعداد بیشتری لایه هستند. رایج‌ترین ساختار

^۷Internal Weight

^۸Black-Box Models

^۹Universal Approximators

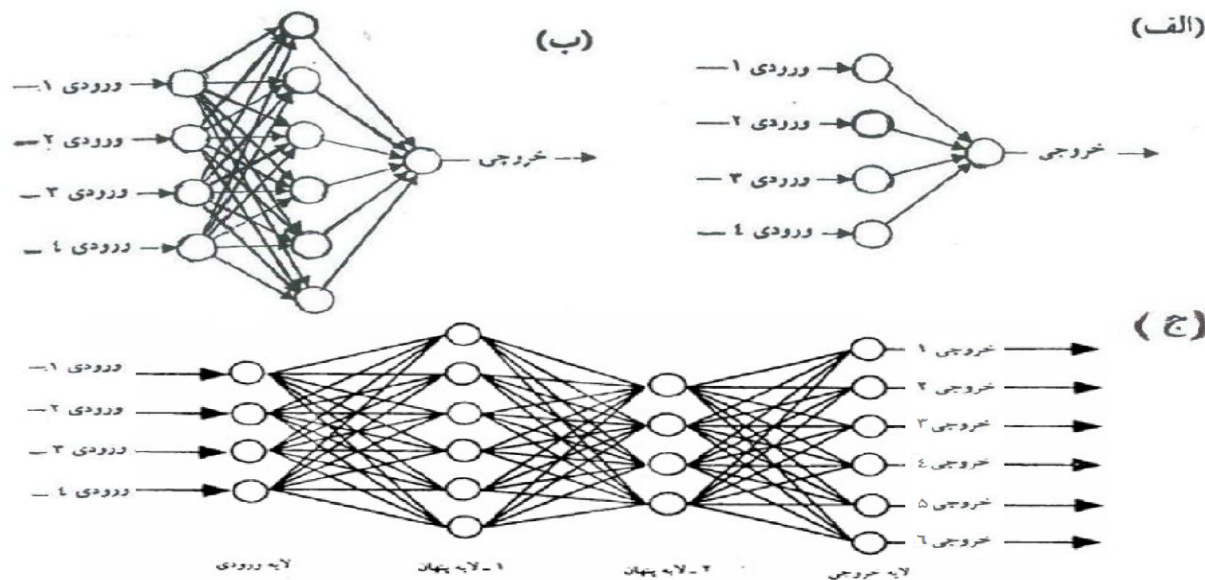
^{۱۰}Parallel Models

^{۱۱}Node

^{۱۲}Logistic Regression

^{۱۳}Over Fitting

شبکه، سه لایه‌ای است (لایه ورودی، یک لایه پنهان و لایه خروجی) و عموماً قادر به حل اکثر مسائل پیچیده است.



شکل ۱۰۲: تصویری از شبکه‌های عصبی مصنوعی با چهار ورودی و خروجی متفاوت

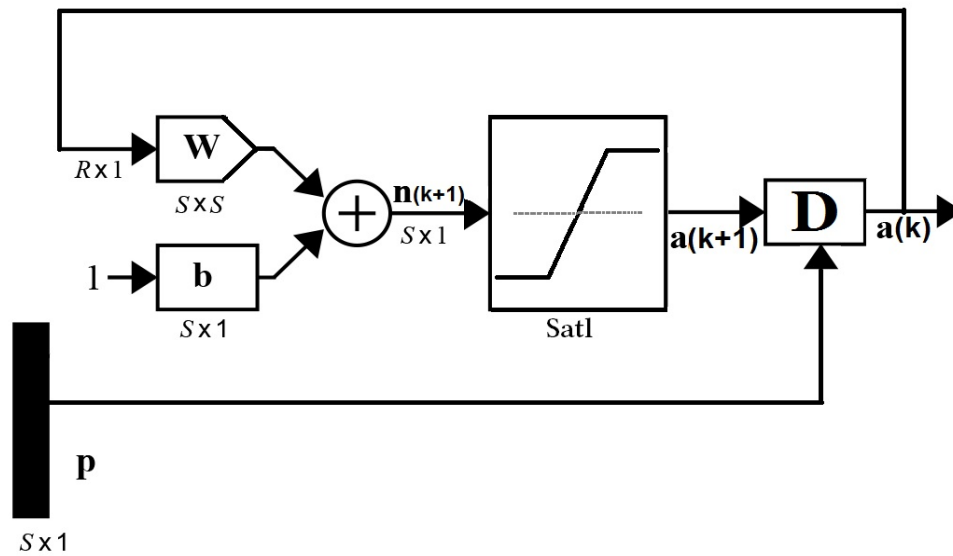
۱۰۲.۲ شبکه پسخور یا برگشتی

تفاوت شبکه‌های برگشتی با شبکه‌های پیشرو این است که در شبکه‌های برگشتی، حداقل یک سیگنال برگشتی از یک نرون به همان نرون یا نرون‌های همان لایه یا لایه قبل وجود دارد. یک نوع متداول شبکه برگشتی گسسته زمان در شکل ۲.۲ ترسیم شده است. برای این شبکه خاص، بردار ورودی $\underline{p}$ ، نشان‌دهنده شرایط اولیه شبکه است (به عبارتی $\underline{p} = a(0)$). رفتار شبکه به وسیله معادله زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} a(k) = \text{Satl}(Wa(k-1) + \underline{b}), k = 1, 2, \dots \\ a(0) = \underline{p} \end{cases}$$

همانطور که در شکل ۲.۲ مشاهده می‌کنید بردار ورودی $\underline{p}$ دارای S عنصر است که به عنوان $a(0)$ قرار می‌گیرد، در یک ماتریس W با ابعاد $S \times S$ ضرب می‌شود. مقدار ثابت ۱ به عنوان یک ورودی به نرون اعمال شده و در جمله اسکالر بایاس $\underline{b}$ ضرب می‌شود و ورودی خالص n ، به تابع تحریک آستانه ای خطی اعمال شده و خروجی مربوطه به وجود می‌آید، و این خروجی مجدداً به عنوان ورودی وارد شبکه می‌شود.

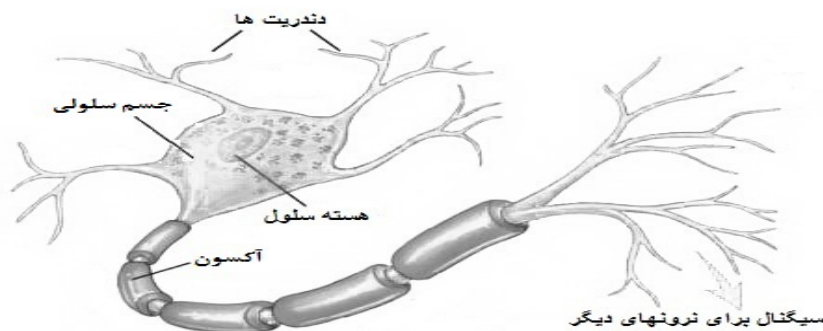
شبکه‌های پسرو از توانایی بالقوه بیشتری نسبت به شبکه‌های پیشرو برخوردارند و بهتر می‌توانند رفتار مربوط به ویژگی‌های زمانی سیستم را نشان دهند.



شکل ۲.۲: شبکه عصبی برگشتی

۳.۲ اساس بیولوژیکی سلول‌های عصبی

الگو و الهام بخش شبکه‌های عصبی مصنوعی، سیستم عصبی موجودات زنده است که شامل واحدهای تشکیل دهنده‌ای به نام نرون می‌باشد. یک نرون از جسم سلولی، دندریت و آکسون تشکیل شده است (در شکل ۳.۲). دندریت‌ها اطلاعات ورودی را از سلول‌های عصبی دیگر دریافت می‌کنند ولی آکسون کانال خروجی نرون است. اطلاعات ورودی به صورت مواد شیمیایی (ناقل عصبی) می‌باشد.



شکل ۳.۲: ساختمان یک سلول عصبی بیولوژیک یا نرون

نرون این اطلاعات را به صورت سیگنال الکتریکی از دندریت به انتهای آکسون انتقال می‌دهد، هنگامی که سیگنال الکتریکی در انتهای آکسون به قدر کافی بزرگ باشد، سلول عصبی در طول آکسون تخلیه الکتریکی انجام می‌دهد و سیگنال شیمیایی در سیناپس (که محل اتصال انتهای آکسون به دندریت‌های نرون بعدی است) ایجاد می‌شود. تفاوت اصلی یک نرون با سلول معمولی در قابلیت تحریک شدن آن است. غشای نرون در حالت عادی دارای پتانسیل الکتریکی ۷۰ میلی ولت است اما به دلیل ورودی دندریت‌ها، ممکن است نرون قادر به ابقای این پتانسیل عادی نباشد و در نتیجه به «پتانسیل عمل» منجر شود. «پتانسیل عمل» یک پتانسیل الکتریکی است که به صورت یک طرفه به انتهای آکسون منتقل می‌شود. تحریک نرون‌ها از اصل همه یا هیچ تبعیت می‌کند. به این معنی که تحریک شدن یک نرون بعد از رسیدن به یک سطح پتانسیل خاص (مثلاً ۵۰ میلی ولت) انجام می‌پذیرد. بعد از آزاد سازی پالس، نرون به وضعیت عادی خویش برمی‌گردد. پتانسیل عمل باعث رها شدن ناقل عصبی از انتهای آکسون می‌شود. این ناقل عصبی می‌تواند بر روی نرون بعدی اثر تحریک یا جلوگیری از تحریک داشته باشد.

شبکه عصبی مصنوعی، تقلیدی ساده‌سازی شده از شبکه عصبی مغز است. مغز انسان تقریباً از صد میلیارد سلول عصبی تشکیل شده که بین آنها تقریباً صد تریون اتصال وجود دارد. بعید است که بتوان حتی یک نرون مغز انسان را دقیقاً مدل‌سازی کرد؛ با تکنولوژی امروز، این کار در ماورای توانایی بشر قرار می‌گیرد. آنچه که امکان‌پذیر است الگوبرداری مدل سلول‌های عصبی مصنوعی از نرون‌های طبیعی همراه با ساده‌سازی است که توأم با موفقیت نیز بوده است.

۴.۲ مدل ریاضی یک سلول عصبی

شکل ۴.۲ یک مدل سلول عصبی را نشان می‌دهد. بدنه این سلول از دو بخش تشکیل شده است اولین بخش را تابع ترکیب^{۱۴} می‌گویند. وظیفه تابع ترکیب این است که تمام ورودی‌ها را ترکیب و یک عدد تولید کند. مطابق شکل ۴.۲ هر ورودی دارای وزن مختص به خود است. ورودی‌ها در وزن‌های مربوطه ضرب و سپس با هم جمع می‌شوند. مجموع حاصل را مجموع موزون^{۱۵} گویند که رایج‌ترین تابع ترکیب است. بخش دوم سلول عصبی، تابع انتقال^{۱۶} نام دارد که تابع ترکیب را به خروجی سلول تبدیل و سپس انتقال می‌دهد. تابع انتقال را تابع تحریک^{۱۷} نیز می‌نامند.

رایج‌ترین توابع تحریک، بر پایه مدل‌های بیولوژیک استوار گردیده است (برای توضیحات بیشتر مراجع [۱۰، ۱۲، ۱۴] را ببینید). اگر ورودی سلول i ام واقع در لایه ورودی را x_i در نظر بگیریم، این ورودی برای اتصال به سلول j ام لایه بعد در وزن w_{ji} ضرب می‌شود. حرف j در w_{ji} نشان دهنده شماره سلول در لایه بعد و حرف دوم اندیس معرف شماره سلول لایه قبلی است. شکل ۵.۲ مدل بلوکی یک سلول

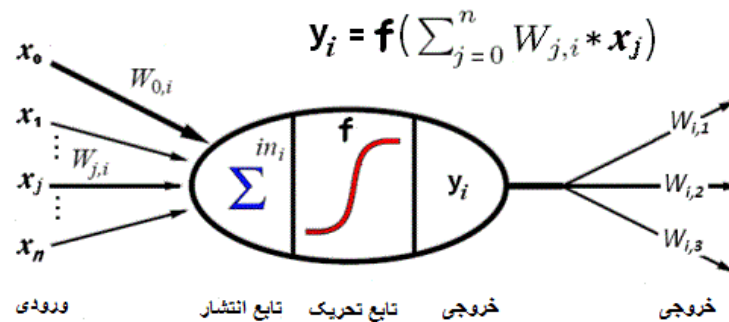
^{۱۴}Combination Function

^{۱۵}Weighted Sum

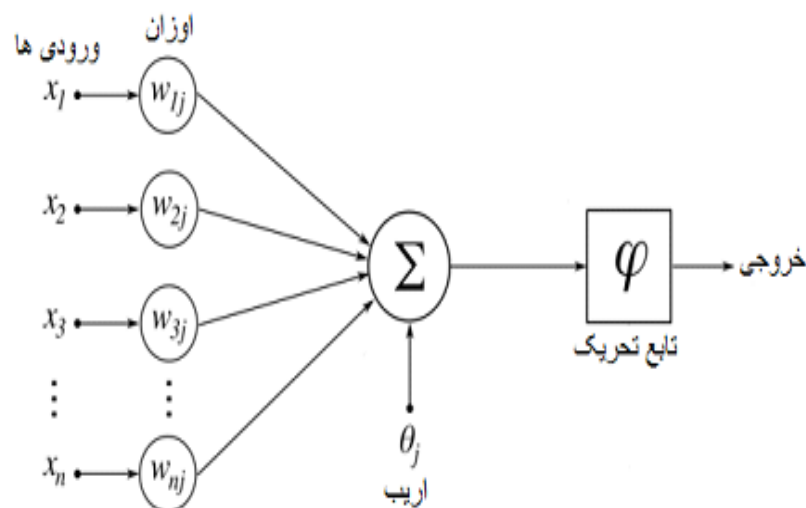
^{۱۶}Transfer Function

^{۱۷}Activation Function

عصبی را نشان می‌دهد سلول مذکور دارای یک ورودی اضافی است که به آن اریبی^{۱۸} می‌گویند و با b_j نشان داده می‌شود. نقش اریبی افزایش یا کاهش مجموع موزون است.



شکل ۴.۲: مدل ساده یک سلول عصبی



شکل ۵.۲: مدل بلوکی سلول عصبی

به بیان ریاضی، سلول j بوسیله دو رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$u_j = \sum_{i=1}^m w_{ji} x_i$$

$$y_j = \phi(u_j + b_j)$$

که $x_1, x_2, \dots, x_m$ داده‌های ورودی، $w_{j1}, w_{j2}, \dots$ وزن‌های اتصال ورودی‌های ۱، ۲، ... به سلول j ، u_j ترکیب خطی ورودی‌ها، b_j اریبی، ϕ تابع تحریک و y_j خروجی سلول است. می‌توان مجموع u_j و

^{۱۸}Bias

b_j را به صورت زیر نمایش داد:

$$v_j = (u_j + b_j)$$

تابع تحریک یا تابع انتقال که با ϕ نشان داده می شود بر روی مجموع وزن ها (شامل اریبی) عمل می کند. این تابع می تواند خطی یا غیرخطی باشد و بر اساس نیاز خاص حل یک مسأله انتخاب می شود. انواع مختلفی از توابع تحریک وجود دارند که مهم ترین آنها بشرح زیر می باشند:

۱. تابع حد آستانه ^{۱۹} : این تابع در شکل ۶.۲ قسمت (a) نشان داده شده و به صورت زیر بیان می شود

$$\phi(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$$

۲. تابع خطی تکه به تکه ^{۲۰} این تابع که در شکل ۶.۲ قسمت (b) نشان داده شده است به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0.5 \\ v & -0.5 < v < 0.5 \\ 0 & v < -0.5 \end{cases}$$

۳. تابع سیگموئید ^{۲۱} نام این تابع به علت شکل S مانند آن است و پرکاربردترین تابع تحریک محسوب می شود. این تابع بین رفتار خطی و غیرخطی، به آرامی تغییر می کند. مثالی از تابع سیگموئید تابع لجستیک ^{۲۲} است که به صورت زیر بیان می شود:

$$\phi(v) = \frac{1}{1 + \exp(-av)}$$

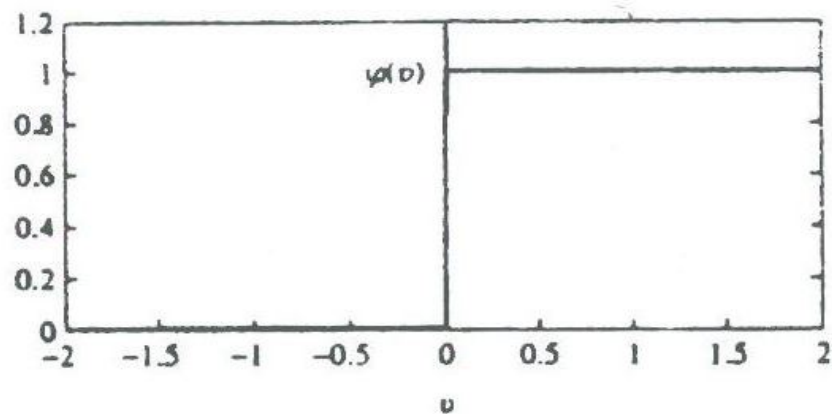
که در آن a پارامتر شیب تابع سیگموئید است، با تغییر پارامتر a ، توابع مختلفی با شیب های متفاوت مانند آنچه که در شکل ۶.۲ قسمت (c) نشان داده شده بدست می آید.

^{۱۹}Threshold Function

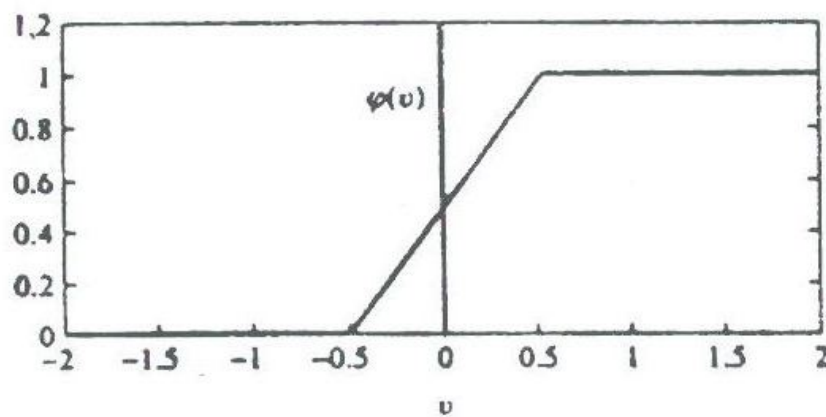
^{۲۰}Piecewise-Linear Function

^{۲۱}Sigmoid Function

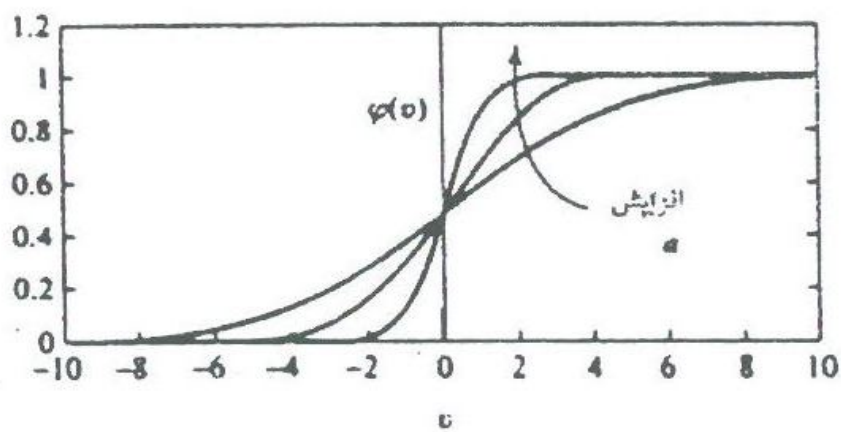
^{۲۲}Logistic Function



(a)

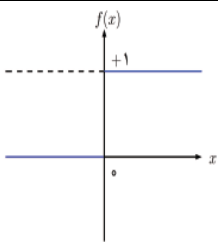
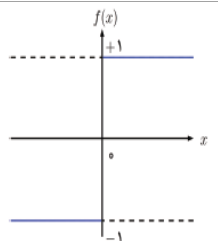
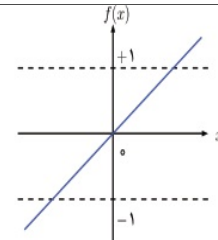
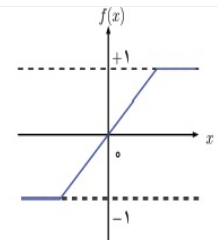
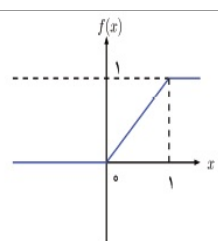
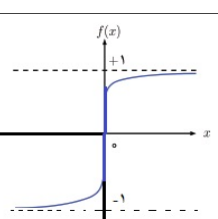


(b)



شکل ۶.۲: انواع تابع تحریک: الف) تابع حد آستانه، ب) تابع قسمتی خطی، ج) تابع سیگموئید با شیب‌های متغیر

جدول ۱۰۲: توابع فعال‌سازی

ردیف	نام	تعریف تابع	شکل تابع
۱	آستانه‌ای دو مقداره	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$	
۲	آستانه‌ای دو مقداره متقارن	$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$	
۳	خطی	$f(x) = x$	
۴	آستانه‌ای خطی متقارن	$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$	
۵	آستانه‌ای خطی	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$	
۶	تانژانت هایپربولیک	$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	

۵.۲ تاریخچه کاربرد شبکه های عصبی مصنوعی در حل مسائل بهینه سازی

مسائل بهینه سازی درطیف وسیعی از کاربردهای علوم و مهندسی تحلیل پردازش تصویر^{۲۳}، شناسایی سیستم ها^{۲۴}، حل معادلات، طراحی فیلتر^{۲۵}، تقریب توابع^{۲۶}، آنالیز رگرسیون^{۲۷} و... پدیدار می شود. در بسیاری از کاربردهای علوم و مهندسی جواب زمان واقعی^{۲۸} مسائل بهینه سازی بسیار مورد نیاز می شود. الگوریتم های قدیمی برای کامپیوترهای دیجیتال چندان موثر نیستند زیرا زمان مورد نیاز برای بدست آوردن جواب وابستگی زیادی به بُعد^{۲۹} و ساختار^{۳۰} مسأله دارد، این یک رهیافت ممکن و بسیار امیدوارکننده کاربرد شبکه های عصبی مصنوعی است.

به واسطه ذات شبکه های عصبی که می توانند حجم عظیمی از کارهای موازی را با هم انجام دهند رهیافت شبکه عصبی می تواند مسائل بهینه سازی در زمان واقعی را با سرعت بیشتری نسبت به سایر الگوریتم های بهینه سازی موجود حل کند. هاپفیلد^{۳۱} و تنک^{۳۲} در [۱۱] ابتدا شبکه عصبی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی پیشنهاد دادند، کار بنیادین آنها الهام بخش تحقیقات زیادی برای ارائه شبکه های عصبی دیگر برای حل مسائل برنامه ریزی خطی و غیرخطی شد. بدین ترتیب شبکه های عصبی بهینه سازی زیادی گسترش یافتند. به عنوان مثال کندی^{۳۳} و چاو^{۳۴} در [۱۵] یک شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی پیشنهاد کردند که از روش گرادیان و روش تابع جریمه استفاده می نمودند و نقاط تعادلشان متناظر با تقریبی از جواب های بهینه بود. با استفاده از روش گرادیان و تصویر، بازردوم^{۳۵} و پاتیسن^{۳۶} [۶] یک شبکه عصبی برای حل مسائل بهینه سازی درجه دوم تنها با متغیرهای کراندار معرفی کردند. این شبکه عصبی تحت شرایط خاصی به تنها جواب بهینه همگرا بود.

بر پایه روش های گرادیان و تصویر، ایکسیا^{۳۷} و همکارانش [۳۲]-[۳۴] چندین شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم و خطی با جواب های بهینه غیریکتا معرفی کردند و همگرایی سراسری آنها را به جواب های دقیق ثابت نمودند.

^{۲۳}Signal Processing

^{۲۴}System Identification

^{۲۵}Filter Design

^{۲۶}Function Approximation

^{۲۷}Regression Analysis

^{۲۸}Real Time

^{۲۹}Dimension

^{۳۰}Structure

^{۳۱}Hopfield

^{۳۲}Tank

^{۳۳}Kennedy

^{۳۴}Chua

^{۳۵}Bouzerdoun

^{۳۶}Pattison

^{۳۷}Xia

بر پایه بعضی از ملاحظات در اجرای سخت افزاری، یک شبکه عصبی با عملکرد محاسباتی خوب باید سه ویژگی اساسی داشته باشد:

۱. همگرایی شبکه عصبی به ازای هر وضعیت دلخواه داده شده تضمین شود.

۲. در طراحی شبکه ترجیحاً هیچ پارامتر مجهولی وجود نداشته باشد.

۳. نقاط تعادل شبکه متناظر با جواب‌های دقیق یا تقریبی باشد.

از دیدگاه ریاضی این خصوصیات مربوط به تکنیک‌های بهینه‌سازی هستند که برای طراحی مدل‌های شبکه‌های عصبی بهینه‌سازی به کار می‌روند.

در مجموع برای فرمول‌بندی یک مسأله بهینه‌سازی برحسب یک شبکه عصبی دو نوع روش وجود دارد. یک رهیافت که عموماً در ایجاد یک شبکه عصبی بهینه‌سازی استفاده می‌شود این است که در ابتدا مسأله بهینه‌سازی را به یک مسأله بهینه‌سازی نامقید تبدیل کرده و سپس یک شبکه عصبی طراحی می‌کنند که مسأله نامقید را با استفاده از روش گرادیان حل کند. روش گرادیان یک مزیت برای آن دسته از شبکه‌های عصبی است که مستقیماً از مشتق تابع انرژی استفاده می‌کنند اما عیب آنها این است که همگرایی در این موارد تضمین نمی‌شود بویژه درحالتی که مجموعه‌های جواب کراندار نیستند.

رهیافت دیگر این است که یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل ایجاد می‌کنند به‌طوری‌که نقاط تعادل آنها متناظر با جواب مطلوب باشد و بعد یک تابع لیاپانوف مناسب پیدا کرده، به‌طوری‌که همه مسیرهای سیستم به نقاط تعادل همگرا باشند.

۶.۲ مدل شبکه عصبی پیشنهادی

در این بخش یک مدل شبکه عصبی بازگشتی برای حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم محدب معرفی می‌کنیم.

بحث و بررسی در مورد کاربرد شبکه‌های عصبی (شبکه‌های عصبی مصنوعی) در بهینه‌سازی از اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی آغاز شده است. نتایج پژوهش‌های انجام شده از آن زمان تاکنون، مواردی چون برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی هندسی و برنامه‌ریزی غیرخطی را در برمی‌گیرد. ایده اصلی در استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مسائل بهینه‌سازی استفاده از یک تابع انرژی (نامنفی) و یک سیستم دینامیکی است که این دو بیان‌کننده مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی متناظر مسائل بهینه‌سازی هستند. سیستم دینامیکی بیان شده معمولاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول است. انتظار می‌رود که برای یک نقطه آغازین نقطه تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده، جواب بهینه مسأله بهینه‌سازی اصلی باشد. یک اصل اساسی در استفاده از تابع انرژی این است که برای همگرایی دستگاه معادلات دیفرانسیل به نقطه تعادل آن، تابع انرژی متناظر با آن حتماً باید نامنفی باشد. البته می‌توان مدل شبکه‌های عصبی نظیر مسائل بهینه‌سازی را حتی بدون در نظر گرفتن تابع انرژی نیز بیان کرد. بنابراین برای یک مدل متناظر با مسائل بهینه‌سازی، اصل اساسی استفاده از شبکه‌های عصبی در اینگونه مسائل به صورت زیر بیان می‌شود:

”برای یک نقطه آغازین دلخواه، نقطه تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست آمده جواب بهینه مسأله اصلی است و برعکس”.

مدل‌های مطرح شده متناظر مسائل بهینه‌سازی را می‌توان به دو قسمت مدل‌های دوگانی و مدل‌های جریمه‌ای تقسیم نمود. نظریه دوگانی و توابع جریمه‌ای دو نظریه بسیار مهم در مسائل بهینه‌سازی هستند که اکثر این مسائل بر مبنای این دو روش کلاسیک قابل حل هستند. در نظریه توابع جریمه‌ای معمولاً از مدل‌های گرادیانی برای معرفی مدل مورد نظر استفاده می‌شود، ولی در نظریه دوگانی از مدل‌های اولیه - دوگان برای حل این مسائل استفاده می‌شود. اگر بتوان متناظر با هر مسأله بهینه‌سازی، روش مشخصی را ارائه نمود که آن روش برای حل آن مسأله شرایط لازم و کافی را برآورده سازد، آنگاه می‌توان متناظر با آن روش، یک مدل شبکه عصبی برای مسأله مورد نظر بسازیم.

مسئله برنامه ریزی درجه دوم محدب به صورت کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2}x^T W x + c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & Bx \leq d \end{cases} \quad (1.2)$$

که در آن $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ یک ماتریس نیمه معین مثبت متقارن، $d \in \mathbb{R}^p$ و $b \in \mathbb{R}^m$ ، $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $rank(A) = m$ ($0 < m < n$)، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $c \in \mathbb{R}^n$ مدل شبکه‌عصبی زیر را برای بدست آوردن جواب بهینه مسئله (۱.۲) می‌توان بکار برد:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] - Q(Ax - b) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\gamma}y + \frac{1}{\gamma}(y + Bx - d)^+ \end{cases} \quad (2.2)$$

که در آن

$$P = A^T(AA^T)^{-1}A \quad Q = A^T(AA^T)^{-1}$$

$$(y + Bx - d)^+ = ([y + Bx - d]_1^+, [y + Bx - d]_2^+, \dots, [y + Bx - d]_m^+)$$

$$[y + Bx - d]_k^+ = \max\{(y + Bx - d)_k, 0\} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

لم ۱.۶.۲. ([۳۶]): x^* جواب بهینه (۱.۲) است اگر و تنها اگر $y^* \geq 0$ موجود باشد به طوری که $(x^*, y^*)^T$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(I - P)[Wx^* + c + B^T y^*] + Q(Ax^* - b) = 0 \quad (3.2)$$

$$(y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0 \quad (4.2)$$

برهان. اگر x^* جواب بهینه (۱.۲) باشد، مطابق ملاحظه (۱۳.۳.۱) و شرایط KKT برای مسائل بهینه سازی محدب، (x^*, λ^*, y^*) و $y^* \geq 0$ موجودند به طوری که در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$Wx^* + c + A^T\lambda^* + B^Ty^* = 0 \quad (5.2)$$

$$Ax^* = b \quad (6.2)$$

$$d - Bx^* \geq 0, \quad y^* \geq 0, \quad (y^*)^T(d - Bx^*) = 0 \quad (7.2)$$

به آسانی دیده می‌شود که (۴.۲) و (۷.۲) معادل هستند. به این معنی که

$$d - Bx^* \geq 0, \quad y^* \geq 0, \quad (y^*)^T(d - Bx^*) = 0 \iff (y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0$$

در ادامه، نشان می‌دهیم که جواب‌های (۳.۲) و جواب‌های (۵.۲) و (۶.۲) معادلند. از (۵.۲) داریم

$$-A(Wx^* + c + A^T\lambda^* + B^Ty^*) = 0$$

با جمع کردن معادله بالا با معادله (۶.۲) داریم

$$Ax^* - A(Wx^* + c) - AA^T\lambda^* - AB^Ty^* = b$$

بنابراین

$$A^T\lambda^* = A^T(AA^T)^{-1}(Ax^* - b) - A^T(AA^T)^{-1}(Wx^* + c + B^Ty^*) \quad (8.2)$$

با جایگذاری (۸.۲) در معادله (۵.۲) داریم

$$[I - A^T(AA^T)^{-1}A](Wx^* + c + B^Ty^*) + A^T(AA^T)^{-1}(Ax^* - b) = 0$$

با قرار دادن $P = A^T(AA^T)^{-1}A$ و $Q = A^T(AA^T)^{-1}$ ، معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(I - P)[Wx^* + c + B^T(y^* + Bx^* - d)^+] + Q(Ax^* - b) = 0$$

برعکس، اگر y^* موجود باشد به طوری که $(x^*, y^*)^T$ در معادله (۳.۲) صدق کند. با ضرب A در طرفین معادله (۳.۲) داریم

$$A(I - P)[Wx^* + c + B^T(y^* + Bx^* - d)^+] + AQ(Ax^* - b) = 0$$

توجه کنید که $AQ = I$ و $A(I - P) = 0$ ، پس داریم $Ax^* - b = 0$ در نتیجه از (۳.۲) داریم $(I - P)(Wx^* + c + B^Ty^*) = 0$ با قرار دادن $\lambda^* = -(AA^T)^{-1}A(Wx^* + c + B^Ty^*)$ داریم

$$\begin{aligned}
Wx^* + c + A^T \lambda^* + B^T y^* &= Wx^* + c + B^T y^* - A^T (AA^T)^{-1} A(Wx^* + c + B^T y^*) \\
&= (I - P)(Wx^* + c + B^T y^*) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

پس اثبات تمام است.

ملاحظه ۲.۶.۲. ([۳۶]): با استفاده از لم (۱.۶.۲)، به آسانی می‌بینیم که x^* جواب بهینه مساله (۱.۲) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $y^* \geq 0$ به طوری که $(x^*, y^*)^T$ نقطه تعادل شبکه عصبی ارائه شده در (۲.۲) باشد. بنابراین، زمانی که شبکه عصبی به نقطه تعادل همگراست، مسیر حرکت $x(t)$ به جواب بهینه مساله (۱.۲) همگراست.

۷.۲ تحلیل پایداری

در این بخش یکتایی، پایداری و همگرایی مدل شبکه عصبی (۲.۲)، بررسی و اثبات می‌گردد.

لم ۱.۷.۲. ([۳۶]): فرض کنید $(x^*, y^*)^T \in \Omega^e$ یک نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۲) باشد و

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= \frac{1}{\gamma} (x - x^*)^T W (x - x^*) - (x - x^*)^T B^T y^* + \frac{1}{\gamma} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y^*\|^2 - y^T y^* \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2
\end{aligned}$$

(۹.۲)

در این صورت

$$V(x, y) \geq \frac{1}{\gamma} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2 \quad (۱۰.۲)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &\leq -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2
\end{aligned} \quad (۱۱.۲)$$

برهان. از آنجا که تابع $\|(y + Bx - d)^+\|^2$ محدب و مشتق پذیر می‌باشد و

$$\nabla \|(y + Bx - d)^+\|^2 = 2 \begin{bmatrix} B^T(y + Bx - d)^+ \\ (y + Bx - d)^+ \end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه (۳.۳.۱) داریم

$$\|(y + Bx - d)^+\|^2 - \|y^*\|^2 \geq \mathfrak{V}(x - x^*)^T B^T y^* + \mathfrak{V}(y - y^*)^T y^*$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\mathfrak{V}} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\mathfrak{V}} \|y^*\|^2 - (x - x^*)^T B^T y^* - y^T y^* \geq 0.$$

با توجه به این که ماتریس W نیمه معین مثبت متقارن است، داریم

$$V(x, y) \geq \frac{1}{\mathfrak{V}} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\mathfrak{V}} \|y - y^*\|^2$$

همچنین برای اثبات (۱۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -[W(x - x^*) - B^T y^* + B^T(y + Bx - d)^+ + x - x^*]^T \\ &\quad \times [(I - P)(Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+) + Q(Ax - b)] - \frac{1}{\mathfrak{V}} [y - (y + Bx - d)^+]^T \\ &\quad \times [(y + Bx - d)^+ - \mathfrak{V}y^* + y] = [-W(x - x^*) + x - x^* + B^T((y + Bx - d)^+ - y^*)]^T \\ &\quad \times [(I - P)(W(x - x^*) + B^T((y + Bx - d)^+ - y^*) + P(x - x^*)) - \frac{1}{\mathfrak{V}} [y - (y + Bx - d)^+]^T \\ &\quad \times [y - (y + Bx - d)^+ + \mathfrak{V}(y + Bx - d)^+ - \mathfrak{V}y^*] = -(x - x^*)^T W(I - P)W(x - x^*) \\ &\quad - (x - x^*)^T \times W(I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] - (x - x^*)^T WP(x - x^*) \\ &\quad - (x - x^*)^T (I - P)W(x - x^*) - (x - x^*)^T (I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] \\ &\quad - (x - x^*)^T P(x - x^*) - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \times B(I - P)W(x - x^*) \\ &\quad - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T BB^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \\ &\quad \times BP(x - x^*) - \frac{1}{\mathfrak{V}} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T [(y + Bx - d)^+ - y] \end{aligned}$$

توجه کنید که $(y + Bx - d)^+ - y = 0$ و $P(I - P) = 0$ ، $P^2 = P$ ، $(I - P)^2 = I - P$

داریم $Bx - d + (-y - Bx - d)^+$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -(x - x^*)^T W(I - P)^T W(x - x^*) - \Upsilon(x - x^*)^T W(I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] \\
&\quad - (x - x^*)^T P^T(x - x^*) - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T BB^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] \\
&\quad - (x - x^*)^T W(x - x^*) - (x - x^*)^T B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] \\
&\quad - \frac{1}{\Upsilon} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \times [Bx - d + (-y - Bx + d)^+] \\
&= -\|(I - P)W(x - x^*) + (I - P)B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] + P(x - x^*)\|^2 \\
&\quad - (x - x^*)^T W(x - x^*) - (x - x^*)^T B^T[(y + Bx - d)^+ - y^*] - \frac{1}{\Upsilon} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 \\
&\quad + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T [B(x - x^*) + (Bx^* - d) + (-y - Bx - d)^+] \\
&= -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 - (x - x^*)^T W(x - x^*) \\
&\quad - \frac{1}{\Upsilon} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 + [(y + Bx - d)^+]^T (Bx^* - d) - (y^{*T})(Bx^* - d) \\
&\quad + [(y + Bx - d)^+]^T (-y - Bx + d)^+ - (y^{*T})(-y - Bx + d)^+ \\
&= -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 - (x - x^*)^T W(x - x^*) \\
&\quad - \frac{1}{\Upsilon} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2 + [(y + Bx - d)^+]^T (Bx^* - d) - (y^{*T})(-y - Bx + d)^+ \\
&\leq -\|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 - \frac{1}{\Upsilon} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2
\end{aligned}$$

□

که در معادله فوق با استفاده از (۴.۲) اثبات تمام است.

ملاحظه ۲.۷.۲. ([۳۶]): $V(x, y)$ معرفی شده در (۹.۲) یک تابع لیاپانوف می‌باشد، بنابراین، شبکه عصبی (۲.۲) پایدار به مفهوم لیاپانوف می‌باشد.

قضیه ۳.۷.۲. ([۳۶]): برای هر نقطه آغازین $(x(\circ), y(\circ)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ ، سیستم (۲.۲) دارای جواب یکتای پیوسته $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ $t \geq \circ$ است.

برهان. قرار دهید

$$E(x, y) = -(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] - Q(Ax - b), -\frac{1}{\Upsilon}y + \frac{1}{\Upsilon}(y + Bx - d)^+$$

در این صورت برای هر $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{n+p}$ داریم

$$\begin{aligned}
\|E(x, y) - E(x', y')\| &\leq \|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b) \\
&\quad - (I - P)[Wx' + c + B^T(y' + Bx' - d)^+] - Q(Ax' - b)\| \\
&\quad + \left\| \frac{1}{\Upsilon}y - \frac{1}{\Upsilon}(y + Bx - d)^+ - \frac{1}{\Upsilon}y' + \frac{1}{\Upsilon}(y' + Bx' - d)^+ \right\| \\
&\leq (\|(I - P)W\| + \|(I - P)B\| + \|P\| + \|B/\Upsilon\|)\|x - x'\| \\
&\quad + (\|I - P\| + 1)\|y - y'\|
\end{aligned}$$

پس $E(x, y)$ روی $\mathbb{R}^{n+p}$ در شرط لیپشیتز صدق می‌کند، بنابراین طبق قضیه (۸.۴.۱)، شبکه عصبی (۲.۲) دارای جواب یکتای پیوسته $(x(t), y(t))$ برای $t \in [t_0, \tau)$ وقتی $\tau \rightarrow \infty$ است.

□

قضیه ۴.۷.۲. ([۳۶]): مسیر حرکت شبکه عصبی (۲.۲) برای هر نقطه آغازین $(x(\circ), y(\circ)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ به یک نقطه تعادل همگراست. بویژه، زمانی که نقطه تعادل یکتا باشد، شبکه عصبی (۲.۲) با هر نقطه آغازین $(x(\circ), y(\circ)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ پایدار مجانبی سراسری است.

برهان. تعریف کنید

$$D(x, y) = \|(I - P)[Wx + c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2$$

در این صورت $D(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر (x, y) یک نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۲) باشد. با استفاده از لم (۱.۷.۲) داریم

$$\frac{1}{\gamma} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2 \leq V(x(t), y(t)) \leq V(x(\circ), y(\circ)) \quad \forall t \geq 0$$

پس مسیر حرکت $(x(t), y(t))$ از شبکه عصبی (۲.۲) کراندار است. بنابراین، دنباله صعودی $\{t_n\}$ با $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \rightarrow \infty$ و نقطه حدی $(\hat{x}, \hat{y})^T$ موجود است به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$. در ادامه اثبات خواهیم کرد که $(\hat{x}, \hat{y})^T$ یک نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۲) می‌باشد و مسیر حرکت $(x(t), y(t))$ همگرای سراسری به نقطه تعادل $(\hat{x}, \hat{y})$ است.

برای این که اثبات کنیم $(\hat{x}, \hat{y})$ یک نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۲) می‌باشد، کفایت نشان دهیم $D(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ است. حال فرض کنیم که این برقرار نباشد، یعنی $D(\hat{x}, \hat{y}) > 0$ باشد. از آنجا که $D(x, y)$ به ترتیب نسبت به x و y پیوسته است، $\varepsilon > 0$ ، $q > 0$ و همسایگی از $(\hat{x}, \hat{y})^T$ مانند $B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon) = \{(x, y)^T : \|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\| \leq \varepsilon\}$ وجود است، به طوری که برای هر $D(x, y) > q$ ، $(x, y)^T \in B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon)$.

همچنین از آن جا که $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$ ، عدد صحیح مثبت N موجود است به طوری که برای هر $n \geq N$ و $\|x(t_n) - \hat{x}\| \leq \frac{1}{\gamma} \varepsilon$ و $\|y(t_n) - \hat{y}\| \leq \frac{1}{\gamma} \varepsilon$. از شبکه عصبی (۲.۲) و کرانداری $(x(t), y(t))$ ، $\dot{x}$ و $\dot{y}$ نیز کراندار می‌باشد، یعنی عدد ثابت M موجود است به طوری که $\|\dot{x}\| \leq M$ و $\|\dot{y}\| \leq M$. حال با در نظر گرفتن $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ داریم

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}\| + \|y(t) - \hat{y}\| &\leq \|x(t) - x(t_n)\| + \|y(t) - y(t_n)\| + \|x(t_n) - \hat{x}\| + \|y(t_n) - \hat{y}\| \\ &= \|\dot{x}(\xi_1)\| \times |t - t_n| + \|\dot{y}(\xi_2)\| \times |t - t_n| + \|x(t_n) - \hat{x}\| + \|y(t_n) - \hat{y}\| \\ &\leq 2M|t - t_n| + \frac{\varepsilon}{\gamma} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

به این معنی که برای هر $n \geq N$ و $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ داریم $(x, y)^T \in B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon)$. بنابراین، برای هر $n \geq N$ و $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ داریم $D(x(t), y(t)) > q$. از آن جا که $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \rightarrow \infty$ و اندازه لبگ از مجموعه $t \in \bigcup_{n \geq N} [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ نامتناهی است، در این صورت

$$\int_0^{\infty} D(x(t), y(t)) dt = \infty \quad (11.2)$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} D(x(t), y(t)) dt &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s D(x(t), y(t)) dt \leq - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \dot{V}(x(t), y(t)) dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} [V(x(0), y(0)) - V(x(s), y(s))] \leq V(x(0), y(0)) \end{aligned} \quad (12.2)$$

که با (۱۱.۲) در تناقض است. بنابراین، $D(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ می‌باشد و $(\hat{x}, \hat{y})$ یک نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۲) است.

حال نشان می‌دهیم که مسیر حرکت $(x(t), y(t))$ همگرای سراسری به نقطه تعادل $(\hat{x}, \hat{y})$ می‌باشد. با تعریف یک تابع لیاپانوف

$$\begin{aligned} \hat{V}(x, y) &= \frac{1}{\gamma} (x - \hat{x})^T W (x - \hat{x}) - (x - \hat{x})^T B^T \hat{y} + \frac{1}{\gamma} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|\hat{y}\|^2 - y^T \hat{y} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \|x - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - \hat{y}\|^2 \end{aligned} \quad (13.2)$$

داریم $\hat{V}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$.

از آن جا که $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$ ، $\forall \varepsilon > 0$ ، یک t_k موجود است، به طوری که $\hat{V}(x(t_k), y(t_k)) < \varepsilon$.

با استفاده از لم (۱۰.۷.۲) داریم $\frac{1}{\gamma} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y(t) - \hat{y}\|^2 \leq \hat{V}(x(t), y(t))$ و چون $\hat{V}$ نزولی است. بنابراین، برای هر $t \geq t_k$ داریم

$$\frac{1}{\gamma} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y(t) - \hat{y}\|^2 \leq \hat{V}(x(t), y(t)) \leq \hat{V}(x(t_k), y(t_k)) \leq \varepsilon$$

یعنی این که $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \hat{y}$. بنابراین مسر حرکت شبکه عصبی (۲.۲) همگرای سراسری به نقطه تعادل $(\hat{x}, \hat{y})^T$ می‌باشد و همچنین از آن جا که شبکه عصبی (۲.۲) پایدار حاشیه‌ای است و این که نقطه تعادل آن یکتا می‌باشد در نتیجه شبکه عصبی (۲.۲) پایدار مجانبی سراسری است. $\square$

۸.۲ مثال عددی

در این بخش با ارائه یک مثال عددی کارایی مدل شبکه عصبی ارائه شده نشان داده می‌شود.

مثال ۱۰.۸.۲. مسئله برنامه ریزی درجه دوم زیر را در نظر بگیرید.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + x_2x_4 - 11x_1 - 5x_4 \\ \text{s.t.} & 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ & 4x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -2 \leq 3x_1 + x_3 \leq 4 \end{array} \right. \quad (14.2)$$

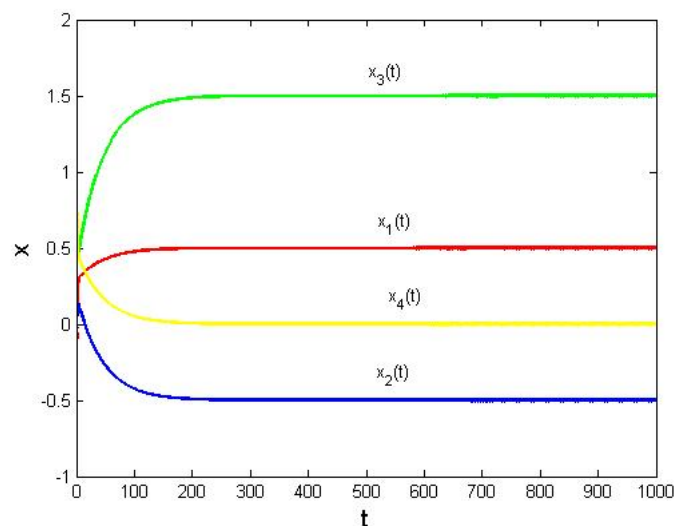
در این صورت

$$W = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از مدل شبکه عصبی (۲.۲)، جواب بهینه $x^* = (1/5, -1/5, 1/5, 0)^T$ بدست می‌آید. شکل ۷.۲ رفتار گذرا از مدل (۲.۲) را نشان می‌دهد.



شکل ۷.۲: رفتار مدل شبکه عصبی (۲.۲) در مثال (۱.۸.۲)

فصل ۳

نظریه اعتبار و فازی

۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم فازی و نظریه اعتبار را بیان نموده و سپس امید ریاضی، ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط را در محیط فازی تعریف کرده و در حالات خاص متغیرهای فازی مثلثی، دوزنقه‌ای و گوسی آن‌ها را بدست می‌آوریم.

عمده ابزارهای مهم برای مدل‌سازی، استدلال و محاسبات از نوع قطعی،^۱ معین^۲ و کاملاً مشخص هستند. منظور از قطعی بودن، دو بخشی بودن است: بله یا خیر، به جای بیشتر یا کمتر. در منطق دوگان مرسوم، یک عبارت می‌تواند درست یا غلط باشد. در تئوری مجموعه، یک عنصر به مجموعه تعلق دارد یا ندارد. اگر قدرت یک زبان زنده را با یک زبان منطقی^۳ مقایسه کنیم، زبان منطقی فقیرتر خواهد بود. چراکه افکار و احساسات بشری دربرگیرنده مفاهیم یا دریافت‌هایی است که کلمات مورد استفاده ما برای بیان آنها کافی نیست. بنابراین، یک نگاشت یک به یک از مسائل و سیستم‌ها با استفاده از زبان حسابی یا منطقی امکان‌پذیر نیست. پس از آنجا که ذهن ما با منطق دیگری کارهایش را انجام می‌دهد و تصمیماتش را اتخاذ می‌کند، ایجاد منطق‌های تازه و چندان‌رزشی مورد نیاز است، که منطق فازی^۴ یکی از آن‌ها می‌باشد. واژه‌ی فازی به معنای غیر دقیق، ناواضح و مبهم (شناور) است.

منطق فازی اولین بار در پی تنظیم نظریه مجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ به وسیله پروفیسور زاده^۵ در صحنه‌ی محاسبات نو ظاهر شد. [۳۸] سپس، بر اساس این مفهوم، نظریه حل فازی توسط بلمن^۶ و زاده در [۳] ارائه شد.

دانش مورد نیاز برای بسیاری از مسائل مورد مطالعه به دو صورت متمایز ظاهر می‌شود:

^۱Crisp

^۲Deterministic

^۳Logical Language

^۴Fuzzy Logic

^۵Zadeh

^۶zadeh2

۱. دانش عینی^۷، مثل مدل‌ها و معادلات و فرمول‌های ریاضی که از پیش تنظیم شده و برای حل و فصل مسائل معمولی فیزیک، شیمی، یا مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲. دانش شخصی^۸، مثل دانستنی‌هایی که تا حدودی قابل توصیف و بیان زبان‌شناختی بوده، ولی امکان کمی کردن آن‌ها با کمک ریاضیات سنتی معمولاً وجود ندارد. به این نوع دانش، دانش ضمنی یا دانش تلویحی^۹ گفته می‌شود.

از آن جا که در عمل هر دو نوع دانش مورد نیاز است منطق فازی می‌کوشد آن‌ها را به صورتی منظم، منطقی، و ریاضیاتی بایکدیگر هماهنگ گرداند. منطق فازی بر نظریه مجموعه‌های فازی تکیه می‌کند. مجموعه‌های فازی خود از تعمیم و گسترش مجموعه‌های قطعی به صورتی طبیعی حاصل می‌آیند.

۲.۳ مفاهیم فازی

تعریف ۱.۲.۳. مجموعه‌های قطعی^{۱۰} در واقع همان مجموعه‌های عادی و معمولی هستند که در ابتدای نظریه مجموعه‌ها معرفی می‌شوند. افزودن صفت قطعی به واقع وجه تمایزی را ایجاد می‌نماید که به کمک آن می‌شود یکی از مفاهیم ابتکاری و حیاتی در منطق فازی موسوم به تابع عضویت را به آسانی در ذهن به وجود آورد.

در حالت مجموعه‌های قطعی، تابع عضویت فقط دو مقدار صفر و یک را می‌گیرد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

که در اینجا $\mu_A(x)$ تابع عضویت عنصر x در مجموعه قطعی A است.

تعریف ۲.۲.۳. مجموعه فازی^{۱۱} $\tilde{A}$ به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

تعریف می‌شود، که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به هر عنصر از X ، یک عدد را از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۳. برای هر عدد حقیقی $\alpha \in (0, 1]$ مجموعه $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ را مجموعه α -برش از مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۳. مجموعه $\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ را پشتیبان مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم.

^۷ Objective Knowledge

^۸ Personal Knowledge

^۹ Tacit Knowledge

^{۱۰} Crisp Sets

^{۱۱} Fuzzy Set

تعریف ۵.۲.۳. مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

یا به عبارت دیگر یک مجموعه فازی محدب است اگر کلیه مجموعه‌های $-\alpha$ برش آن محدب باشند.

تعریف ۶.۲.۳. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نرمال گوئیم هرگاه $\exists x \in X$ به‌طوری‌که $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

تعریف ۷.۲.۳. عدد فازی $\tilde{M}$ ^{۱۲} یک مجموعه فازی از خط حقیقی $\mathbb{R}$ با شرایط سه‌گانه زیر است:

۱. مجموعه فازی $\tilde{M}$ محدب باشد.

۲. نرمال باشد.

۳. شکل تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}}(x)$ به‌صورت تکه خطوط پیوسته باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ را با $\text{FN}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهند.

۳.۳ نظریه اعتبار

تعریف ۱.۳.۳. متغیر فازی^{۱۳} یک ابزار ریاضی اساسی و بنیادی برای توصیف عدم اطمینان فازی است که به صورت تابعی از فضای احتمال $(\Theta, P(\Theta), \text{Pos})$ به مجموعه‌ای از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. مانند: متغیر فازی مثلثی، متغیر فازی دوزنقه‌ای و متغیر فازی گوسی. در سه‌تایی $(\Theta, P(\Theta), \text{Pos})$ ، Θ یک مجموعه ناتهی، $P(\Theta)$ مجموعه توانی Θ و Pos اندازه احتمال می‌باشد.

• متغیر فازی مثلثی^{۱۴} به‌صورت سه‌تایی $\xi = (a, b, c)$ نمایش داده می‌شود. که در آن $a < b < c$ بوده و a, b, c اعداد قطعی می‌باشند. همچنین تابع عضویت آن به‌صورت زیر است

$$\mu(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b \\ \frac{r-c}{b-c} & b \leq r \leq c \\ 0 & r \geq c \end{cases} \quad (۱.۳)$$

• متغیر فازی دوزنقه‌ای^{۱۵} به‌صورت چهارتایی $\xi = (a, b, c, d)$ نمایش داده می‌شود. که در آن $a < b < c < d$ بوده و a, b, c, d اعداد قطعی می‌باشند و تابع عضویت آن به‌صورت زیر است

^{۱۲}Fuzzy Number

^{۱۳}Fuzzy Variable

^{۱۴}Triangular Fuzzy Variable

^{۱۵}Trapezoidal Fuzzy Variable

$$\mu(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b \\ 1 & b \leq r \leq c \\ \frac{r-d}{c-d} & c \leq r \leq d \\ 0 & r \geq d \end{cases} \quad (2.3)$$

• متغیر فازی گوسی^{۱۶} به صورت $\xi = FN(a, \sigma)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر است

$$\mu(r) = \text{Exp} \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right] \quad (3.3)$$

تعریف ۲.۳.۳. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت μ است و r یک عدد حقیقی است. در این صورت، تابع اعتبار از پیشامد $\xi \leq r$ می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$\text{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{1}{2} [\text{Pos}\{\xi \leq r\} + \text{Nec}\{\xi \leq r\}] \quad (4.3)$$

که در آن $\text{Pos}\{\cdot\}$ و $\text{Nec}\{\cdot\}$ اندازه‌های احتمال و ضرورت در نظریه احتمال [۸] هستند، که به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\text{Pos}\{\xi \leq r\} = \sup_{x \leq r} \mu(x) \quad (5.3)$$

$$\text{Nec}\{\xi \leq r\} = 1 - \sup_{x > r} \mu(x) \quad (6.3)$$

از (۵.۳) و (۶.۳) داریم

$$\text{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{1}{2} \left[\sup_{x \leq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x > r} \mu(x) \right] \quad (7.3)$$

همچنین با استفاده از خواص Cr در [۱۸] به طور مشابه داریم

$$\text{Cr}\{\xi \geq r\} = \frac{1}{2} \left[\sup_{x \geq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x < r} \mu(x) \right] \quad (8.3)$$

تعریف ۳.۳.۳. توزیع اعتبار^{۱۷} $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ از متغیر فازی ξ توسط ليو^{۱۸} در [۱۸] به صورت زیر تعریف شده است

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\theta \in \Theta \mid \xi(\theta) \leq r\} \quad (9.3)$$

به خصوص، داریم

^{۱۶}Gaussian Fuzzy Variable

^{۱۷} Credibility Distribution

^{۱۸}Liu

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\xi \leq r\} \quad (10.3)$$

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است و نقطه‌ی x_0 موجود باشد به طوری که $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_0)$ صعودی و در بازه (x_0, ∞) نزولی باشد در این صورت داریم

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\xi \leq r\} = \begin{cases} \frac{\mu(r)}{2} & r \leq x_0 \\ 1 - \frac{\mu(r)}{2} & r > x_0 \end{cases} \quad (11.3)$$

$$\text{Cr}\{\xi \geq r\} = \begin{cases} 1 - \frac{\mu(r)}{2} & r \leq x_0 \\ \frac{\mu(r)}{2} & r > x_0 \end{cases} \quad (12.3)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{\xi \leq r\} &= \frac{1}{2} \left[\sup_{x \leq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x > r} \mu(x) \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} (\mu(r) + 1 - 1) & r \leq x_0 \\ \frac{1}{2} (1 + 1 - \mu(r)) & r > x_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\mu(r)}{2} & r \leq x_0 \\ 1 - \frac{\mu(r)}{2} & r > x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

اثبات رابطه (۱۲.۳) نیز به صورت مشابه می‌باشد.

□

۴.۳ امید ریاضی در محیط فازی

تعریف ۱.۴.۳. امید ریاضی^{۱۹} متغیر فازی ξ توسط لیو در [۱۹] به صورت زیر تعریف شده است

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr \quad (13.3)$$

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است. اگر امید ریاضی آن وجود داشته باشد و نقطه‌ی x_0 موجود باشد به طوری که $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_0)$ صعودی و در بازه (x_0, ∞) نزولی باشد در این صورت می‌توان امید ریاضی آن را به صورت زیر بدست آورد

$$E[\xi] = x_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{2} dr - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{\mu(r)}{2} dr \quad (14.3)$$

^{۱۹} Expected Value

برهان. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید که $x_0 \geq 0$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned}
 E[\xi] &= \int_0^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr \\
 &= \int_0^{x_0} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr + \int_{x_0}^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr \\
 &= \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{\mu(r)}{2}\right) dr + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{2} dr - \int_{-\infty}^0 \frac{\mu(r)}{2} dr \\
 &= x_0 - \int_0^{x_0} \frac{\mu(r)}{2} dr + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{2} dr - \int_{-\infty}^0 \frac{\mu(r)}{2} dr \\
 &= x_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{2} dr - \int_{-\infty}^0 \frac{\mu(r)}{2} dr
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۴.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$E[\xi] = \frac{a + 2b + c}{4} \quad (15.3)$$

برهان. باتوجه به رابطه (۱.۳) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, b)$ صعودی و در بازه (b, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه (۲.۴.۳) داریم

$$\begin{aligned}
 E[\xi] &= b + \int_b^{+\infty} \frac{\mu(r)}{2} dr - \int_{-\infty}^b \frac{\mu(r)}{2} dr \\
 &= b + \frac{1}{2} \int_b^c \frac{r-c}{b-c} dr - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{r-a}{b-a} dr \\
 &= b + \frac{c-b}{4} - \frac{b-a}{4} \\
 &= \frac{a + 2b + c}{4}
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۴.۴.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$E[\xi] = \frac{a + b + c + d}{4} \quad (16.3)$$

برهان. باتوجه به رابطه (۲.۳) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, c)$ صعودی و در بازه (c, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه (۲.۴.۳) داریم

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= c + \int_c^{+\infty} \frac{\mu(r)}{4} dr - \int_{-\infty}^c \frac{\mu(r)}{4} dr \\
&= c + \frac{1}{4} \int_c^d \frac{r-d}{c-d} dr - \frac{1}{4} \int_a^b \frac{r-a}{b-a} dr - \frac{1}{4} \int_b^c dr \\
&= b + \frac{d-c}{4} - \frac{b-a}{4} - \frac{c-b}{4} \\
&= \frac{a+b+c+d}{4}
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۴.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی گوسی باشد در این صورت

$$E[\xi] = a \quad (۱۷.۳)$$

برهان. باتوجه به رابطه (۳.۳) μ یک تابع پیوسته است و داریم

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{-2}{\sigma^2} (r-a) \text{Exp} \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right]$$

که برای

$$\begin{aligned}
r \leq a &\rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial r} \geq 0 \\
r \geq a &\rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial r} \leq 0
\end{aligned}$$

پس μ در بازه $(-\infty, a)$ صعودی و در بازه (a, ∞) نزولی می‌باشد. با استفاده از قضیه (۲.۴.۳) داریم

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= a + \int_a^{+\infty} \text{Exp} \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right] dr - \int_{-\infty}^a \text{Exp} \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right] dr \\
&\quad f(r) = \text{Exp} \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right] \text{ با توجه به این که به ازای}
\end{aligned}$$

$$f(a+r) = \text{Exp} \left[-\frac{(a+r-a)^2}{\sigma^2} \right] = \text{Exp} \left[-\frac{r^2}{\sigma^2} \right]$$

$$f(a-r) = \text{Exp} \left[-\frac{(a-r-a)^2}{\sigma^2} \right] = \text{Exp} \left[-\frac{r^2}{\sigma^2} \right]$$

می‌توان نتیجه گرفت $f(r)$ نسبت به $r = a$ متقارن است. پس داریم

$$E[\xi] = a$$

□

تعریف ۶.۴.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی با $E[\xi]$ متناهی باشد. واریانس ξ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$V[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^2] \quad (۱۸.۳)$$

۵.۳ ارزش در معرض ریسک در محیط فازی

با توجه به مطالب گفته شده در فصل ۱ ارزش در معرض ریسک می‌تواند به عنوان یک اندازه ریسک در انتخاب پرتفوی استفاده شود، بنابراین برآوردی از آن در محیط فازی ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $\text{VaR} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\text{VaR}(\beta) = -\sup\{x \mid \text{Cr}\{\xi \leq x\} \leq \beta\} \quad (۱۹.۳)$$

قضیه ۲.۵.۳. برای هر ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ داریم

$$\text{VaR}(\beta) = -\Phi^{-1}(\beta) \quad (۲۰.۳)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\beta) &= -\sup\{x \mid \text{Cr}\{\xi \leq x\} \leq \beta\} \\ &= \inf\{-x \mid \Phi(x) \leq \beta\} \\ &= \inf\{-x \mid x \leq \Phi^{-1}(\beta)\} \\ &= \inf\{-x \mid -x \geq -\Phi^{-1}(\beta)\} \\ &= -\Phi^{-1}(\beta) \end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۵.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2\beta(a-b) - a & 0 < \beta \leq \frac{1}{3} \\ 2\beta(b-c) + c - 2b & \frac{1}{3} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (۲۱.۳)$$

برهان. با استفاده از (۱.۳) و قضیه (۴.۳.۳) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{2(b-a)} & a \leq r \leq b \\ \frac{2b-r-c}{2(b-c)} & b \leq r \leq c \\ 1 & r \geq c \end{cases} \quad (۲۲.۳)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r) = \begin{cases} 2r(b-a) + a & 0 < r \leq \frac{1}{2} \\ 2r(c-b) + 2b - c & \frac{1}{2} \leq r < 1 \end{cases} \quad (23.3)$$

□

که با استفاده از قضیه (۲.۵.۳) اثبات تمام است

نتیجه ۴.۵.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2\beta(a-b) - a & 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \\ 2\beta(c-d) + d - 2c & \frac{1}{2} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (24.3)$$

برهان. با استفاده از (۲.۳) و قضیه (۴.۳.۳) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{2(b-a)} & a \leq r \leq b \\ \frac{1}{2} & b \leq r \leq c \\ \frac{2c-d-r}{2(c-d)} & c \leq r \leq d \\ 1 & r \geq d \end{cases} \quad (25.3)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r) = \begin{cases} 2r(b-a) + a & 0 < r \leq \frac{1}{2} \\ 2r(d-c) + 2c - d & \frac{1}{2} \leq r < 1 \end{cases} \quad (26.3)$$

□

که با استفاده از قضیه (۲.۵.۳) اثبات تمام است

نتیجه ۵.۵.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی گوسی باشد در این صورت

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} -a + \sigma \sqrt{\ln(\frac{1}{2\beta})} & 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \\ -a - \sigma \sqrt{\ln(\frac{1}{2-2\beta})} & \frac{1}{2} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (27.3)$$

برهان. با استفاده از (۳.۳) و قضیه (۴.۳.۳) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{Exp} \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right] & r \leq a \\ 1 - \frac{1}{2} \text{Exp} \left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2} \right] & r > a \end{cases} \quad (28.3)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r) = \begin{cases} a - \sigma \sqrt{\ln(\frac{1}{1-r})} & 0 < r \leq \frac{1}{4} \\ a + \sigma \sqrt{\ln(\frac{1}{\frac{1}{4}-r})} & \frac{1}{4} \leq r < 1 \end{cases} \quad (29.3)$$

□

که با استفاده از قضیه (۲.۵.۳) اثبات تمام است

۶.۳ ارزش در معرض ریسک مشروط در محیط فازی

تعریف ۱.۶.۳. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک مشروط از ξ تابع $\text{CVaR} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\text{CVaR}(\beta) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 \text{VaR}(r) dr \quad (30.3)$$

نتیجه ۲.۶.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\text{CVaR}(\beta) = \begin{cases} \frac{(-2b - a - c - 4(a-b)\beta^2 + 4a\beta)}{4(1-\beta)} & 0 < \beta \leq \frac{1}{4} \\ (\beta - 1)b - \beta c & \frac{1}{4} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (31.3)$$

نتیجه ۳.۶.۳. فرض کنید ξ یک متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\text{CVaR}(\beta) = \begin{cases} \frac{(-2b - a - c - 4(a-b)\beta^2 + 4a\beta)}{4(1-\beta)} & 0 < \beta \leq \frac{1}{4} \\ (\beta - 1)c - \beta d & \frac{1}{4} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (32.3)$$

فصل ۴

انتخاب پرتفوی بهینه

۱.۴ مقدمه

در این فصل چند مدل برای مسئله انتخاب پرتفوی در شرایطی که بازده اوراق بهادار فازی فرض می‌شود، بیان می‌گردد. با توجه به اینکه این مسائل به روش‌های معمول قابل حل نیستند ایده اصلی کار، جایگزینی این مدل‌ها با معادله‌های دقیق و قطعی آنها در حالاتی خاص از متغیرهای فازی (مانند متغیر فازی مثلثی، دوزنقه ای و گوسی) و سپس حل آن می‌باشد. برای نشان دادن کارایی مدل شبکه عصبی پیشنهاد شده در فصل قبل، چند مثال عددی از مسائل انتخاب پرتفوی بیان و حل می‌شود.

مسئله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی از مسائل بازار سرمایه است که از اهمیت زیادی برخوردار است. در حوزه اقتصاد خرد، اهمیت تصمیمات سرمایه‌گذاری، ناشی از این مساله است که در واقع فرد سرمایه‌گذار، مصرف و بازده امروز را به امید بازده بیشتر به زمانی در آینده موکول می‌کند. در واقع تصمیم بهینه سرمایه‌گذاری، میزان مطلوبیت هر فرد است که با توجه به ترجیحات شخصی وی تعیین می‌گردد و لزوماً با سایر افراد یکسان نخواهد بود، ولی می‌توان با معیارهایی، مطلوبیت فرد را از انتخاب مجموعه‌ای از دارایی‌های سرمایه‌ای، مشخص کرد. از جمله مهمترین این معیارها، ریسک و بازده کل مجموعه انتخاب شده است. هدف مدیریت مجموعه دارایی‌ها به طور عام و مجموعه سهام (سبد سهام) به طور خاص، تعیین دارایی‌های درون سبد بگونه‌ای که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود.

مسئله تنوع بخشی در دارایی‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طبقات مختلف دارایی شامل انواع اوراق بهادار، پول نقد، زمین، طلا و... می‌باشد.

تئوری‌های سرمایه‌گذاری در چند دهه اخیر از پیشرفت‌های زیادی برخوردار بودند و در سیر تاریخی تکاملی خود به فرمول‌های کاربردی زیادی دست یافتند. حجم تجارت و سرمایه‌گذاری طی قرن بیستم و اوایل بیست و یکم گسترش فراوانی داشته است. این گسترش و تغییرات حاصل از آن موجب شده است که معیارهای متفاوتی برای اخذ تصمیم سرمایه‌گذار در مقایسه با دوره‌های گذشته به کار گرفته شود. از عوامل موثر در انتخاب و انجام سرمایه‌گذاری دو مفهوم ریسک و بازده و رابطه این دو با یکدیگر است.

در قرن ۱۸ میلادی برنولی^۱ و کرامر^۲ به این نتیجه رسیدند که تصمیمات تحت شرایط عدم اطمینان نباید صرفاً بر اساس بازده مورد انتظار صورت پذیرد.

تا اوایل قرن بیستم میلادی، سرمایه‌گذاران جهت اتخاذ تصمیم در فرآیند سرمایه‌گذاری از نسبت‌های بازده سرمایه‌گذاری استفاده می‌کردند و توجهی به مفاهیم ارزش زمانی پول و ریسک سرمایه‌گذاری نداشتند. از دهه ۱۹۲۰ مفهوم ارزش زمانی پول با روش‌های تنزیلی وارد حوزه ادبیات مالی و سرمایه‌گذاری شد. این روش‌ها، تحولی قابل توجه در انتخاب طرح‌های سرمایه‌گذاری به وجود آوردند. لیکن همچنان رفتار متفاوت سرمایه‌گذاران در مواجهه با ریسک نادیده گرفته می‌شد. در واقع با وجود اینکه نظریه مطلوبیت پول تا حدودی به تکامل معیارهای انتخاب کمک نموده بود، لیکن هنوز از جامعیت کافی برخوردار نبود. تا دهه ۱۹۵۰ ریسک یک عامل کیفی به شمار می‌رفت تا اینکه هری مارکوویتز برای نخستین بار ریسک را کمیت‌پذیر نمود و انحراف معیار جریان‌ات نقدی طرح‌های سرمایه‌گذاری را به‌عنوان کمیت سنجش ریسک معرفی کرد. چندی بعد ویلیام شارپ در [۳۰] با تبیین ضریب حساسیت β به‌عنوان معیار ریسک، مدل ساده‌تر و کاربردی‌تری را به دنیای تئوری‌های سرمایه‌گذاری عرضه کرد. این روش امروز به‌عنوان مدل تک شاخصی معروف است. در ادامه این روند و در اواسط دهه ۶۰ شارپ و لینتر [۲۰] بر پایه تئوری بازار سرمایه، مدلی را توسعه دادند که امروزه تحت عنوان مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای^۳ شناخته می‌شود. این مدل ریسک سیستماتیک و غیر سیستماتیک را به‌عنوان اجزای اصلی ریسک از یکدیگر تفکیک می‌کند. در دهه ۷۰، پروفیسور راس^۴، مدل آریترائز^۵ را در [۲۹] پایه‌گذاری کرد. (برای توضیحات بیشتر به [۲۶] و [۵] مراجعه شود).

۲.۴ مسئله بهینه‌سازی پرتفوی

در سال ۱۹۵۲ میلادی، هری مارکوویتز مدل بنیادی پرتفوی را ارائه داد که مبنایی بر تئوری مدرن سبد سرمایه‌گردید. پیش از ارائه این تئوری سرمایه‌گذاران علیرغم آشنایی با مفاهیم ریسک و بازده، قادر به اندازه‌گیری آن به روش کمی نبودند. مارکوویتز نخستین کسی بود که مفهوم تنوع بخشی در سبد سرمایه‌گذاری به‌طور عام و سبد سهام به‌طور خاص را بسط و گسترش داد. او این موضوع که چگونه متنوع سازی سبد سرمایه می‌تواند منجر به کاهش ریسک سرمایه‌گذاری یک سرمایه‌گذار شود را، به صورت کمی بیان نمود.

نظریه مدرن سبد سرمایه MPT^۶ براساس رابطه بازدهی و ریسک محاسبه شده از طریق واریانس و انحراف معیار بازدهی تبیین می‌شود. نظریه فرامدرن سبد سرمایه PMPT^۷ براساس رابطه ریسک

^۱Bernoulli

^۲Cramer

^۳Capital Asset Pricing Model (CAPM)

^۴Ross

^۵Arbitrage Pricing Theory

^۶Modern Portfolio Theory

^۷Post-modern Portfolio Theory

نامطلوب به تبیین رفتار سرمایه‌گذار و معیار انتخاب سبد سرمایه بهینه می‌پردازد (برای توضیحات بیشتر، مراجع [۱۳] و [۱۴] را ببینید). مارکوویتز در فرمول‌بندی مدل میانگین - واریانس ^۸ MV خود، به هدف سرمایه‌گذاری توجه خاصی داشت. به نظر وی، سرمایه‌گذار عاقل به دنبال سرمایه‌گذاری در طرح‌هایی است که بازدهی بیشتر و ریسک کمتر داشته باشد. وی ریسک یک سرمایه‌گذاری را تنها در انحراف معیار آن طرح جستجو نمی‌کرد، بلکه به رابطه بین دارایی‌های مختلف در سبد سرمایه و تاثیر این رابطه بر ریسک کل هم توجه داشت.

یکی دیگر از مفاهیمی که مارکوویتز مطرح نمود، سبد سرمایه کارا (سبد سهام کارا) بود، که به معنای ترکیب مطلوب اوراق بهادار است به نحوی که ریسک آن سبد سرمایه در ازای بازده معینی حداقل شود یا بازده سبد سرمایه در ازای ریسک معین حداکثر شود.

مدل مارکوویتز بر اساس مفروضاتی شکل گرفته است. این مفروضات عبارتند از:

۱. سرمایه‌گذار دارای رفتار عقلایی است.
۲. سرمایه‌گذاران، ریسک‌گریزند و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی هستند.
۳. سرمایه‌گذاران، سبد سرمایه خود را بر مبنای میانگین و واریانس بازده مورد انتظار انتخاب می‌کنند.
۴. هرگزین سرمایه‌گذاری تا بی نهایت قابل تقسیم است.
۵. سرمایه‌گذاران یک افق زمانی معین داشته و این برای همه مشابه است.
۶. سرمایه‌گذاران، در یک سطح مشخص از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای سطح معینی از بازدهی خواهان، کمترین ریسک هستند.
۷. بازارها کامل هستند (هزینه مالیات و معاملات وجود ندارد).

در رویکرد مارکوویتز بازده دارایی‌ها به صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود که احتمال آنها از تابع توزیع نرمال به دست می‌آید. میانگین به عنوان معیار کارایی سبد سرمایه و انحراف معیار هم به عنوان شاخص ریسک سبد سرمایه در نظر گرفته می‌شود. ورودی‌های اصلی مدل مارکوویتز عبارتند از بازده مورد انتظار، ماتریس واریانس - کواریانس بازدهی دارایی‌ها و ضریب همبستگی بین بازدهی‌ها. مدل کلاسیک MV به صورت زیر بیان می‌شود [۲۴].

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2} X^T \Sigma X \\ \text{s.t.} & \mu^T X = R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن

$$\mu^T X = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

^۸Mean-Variance

$$X^T \Sigma X = V[X] = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j$$

و x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهم i ام، ρ_{ij} ضریب همبستگی بین سهم i ام و j ام، ξ_i بازده مورد انتظار و σ_i ریسک سهم i ام هستند و قید اول نشان دهنده سطح مشخصی از بازدهی مورد انتظار یعنی R است. قید دوم این اطمینان را می‌دهد که تمام بودجه سرمایه‌گذاری شود و قید آخر هم نشان دهنده این است که سرمایه‌گذار اجازه فروش استقراضی را ندارد. متأسفانه مدل مارکویتز یک سری معایب و فرضیات غیر واقعی دارد که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. با افزایش تعداد دارایی، حجم محاسبات ماتریس کواریانس بیش از اندازه بزرگ می‌شود.
۲. محدودیت‌هایی که در دنیای واقعی وجود دارد، در مدل مارکویتز در نظر گرفته نشده است، همانند محدودیت سهام ثابت در سبد سرمایه، هزینه‌های معاملاتی^۹، خرید آستانه‌ای^{۱۰}، معاملات بلوکی، معادلات سهام در دسته‌های ثابت و...، اکثر این محدودیت‌ها از توابع غیرخطی پیروی می‌کنند که مدل‌ها را برای حل دچار پیچیدگی می‌نماید.
۳. فرض نرمال بودن تابع توزیع بازده دارایی‌ها فرض قابل قبولی نیست.
۴. معیار عمومی ریسک، واریانس و یا انحراف معیار است که این معیار یک دارایی با توزیع نرمال و در بازار کارا قابل قبول است. اگر این دو خصوصیت برای دارایی وجود نداشته باشد، واریانس معیار مناسبی نیست.

۱۰.۲.۴ مدل‌های جایگزین

در سال ۱۹۵۹ مارکویتز به مزایای ریسک نامطلوب اشاره کرد [۲۵]. او به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاران به دو علت مایل به حداقل ساختن ریسک نامطلوب هستند، نخست اینکه سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و دوم وقتی که توزیع متغیرهای تصادفی (نرخ بازدهی) از نوع نرمال نباشد، آنگاه معیار ریسک نامطلوب مفید خواهد بود. بعدها در سال ۱۹۹۱ وی هنگام دریافت جایزه نوبل اقتصاد برای ارائه نظریه مدرن سبد سرمایه و مدل مارکویتز نیز به این مساله اشاره داشت. سال ۱۹۷۳ لی و لرو^{۱۱} [۱۶]، مدلی به منظور بهینه سازی سبد سرمایه با به کارگیری برنامه‌ریزی آرمانی ارائه نمودند. چندی بعد در سال ۱۹۸۰ لی و چیسیر^{۱۲} [۱۷]، نگرش برنامه‌ریزی آرمانی چند معیاره^{۱۳} را مطرح کردند. کونو و یامازاکی در سال ۱۹۹۱، مدلی از طریق برنامه ریزی خطی برای بهینه سازی سبد

^۹Cardinality Constraint

^{۱۰}Transaction Cost

^{۱۱}Lee and Lerro

^{۱۲}Lee and Chesser

^{۱۳}Multi-Criteria Goal Programming

سرمایه‌گذارای ارائه کردند. پس از آن در سال ۱۹۹۷، اسپرانزا و مانسینی^{۱۴} [۲۲]، مدلی از برنامه‌ریزی صحیح آمیخته^{۱۵} را با خصوصیات واقعی مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه داد و برای حل آن از الگوریتم‌های ابتکاری کمک گرفتند و مدل را برای بازار سهام میلان آزمایش کردند. سال ۱۹۹۸ یونگ^{۱۶} [۳۷]، مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه قابل حل توسط برنامه‌ریزی خطی را ارائه کرد که در آن ریسک بر مبنای بدترین حالت تعریف شده و آنرا رویکرد "مینیماکس"^{۱۷} نامید. سال ۱۹۹۹ ژیا و همکاران [۳۳] مدلی خاص را معرفی کردند. در فوریه همین سال چانگ^{۱۸} و همکاران [۷]، به ارائه مدلی پارامتریک و غیرخطی جهت بهینه‌سازی سهام پرداختتند. در ادامه در نوامبر همین سال، جوناس پالمکوئیست^{۱۹} و همکارانش [۲۷] به معرفی بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌ها و تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی، مدلی از نوع برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند. در سال ۲۰۰۲ لوبو^{۲۰} و همکاران [۲۱] به بهینه‌سازی سبد با اعمال هزینه‌های معاملات خطی و ثابت پرداختتند. در همین سال، کریستوس پاپاریستودولو^{۲۱} [۲۸] به ارائه مدلهایی در این زمینه پرداخت و سپس با طرح مساله‌ای متشکل از ۵ سهام در دوره زمانی ۱۲ ماهه به مقایسه سبدهای به دست آمده در هر مدل پرداخت. در سال ۲۰۰۳ آکسی چخلاو^{۲۲} و همکاران در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌های کاهش دهنده» به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت سپس در همان سال مانسینی^{۲۳} و همکارانش [۲۳] به معرفی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی پرداخته‌اند. در سال ۲۰۰۴ گاندربو^{۲۴} و همکاران برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی سبد سرمایه، روش نقطه درونی اولیه - دوگان را معرفی کردند.

۳.۴ بهینه‌سازی پرتفوی با بازده فازی

در مدل‌های معمولی پرتفوی همواره از بازده‌های تحقق‌یافته اوراق بهادار که مربوط به گذشته بوده و با اطلاعات دقیق تاریخی تعیین می‌شوند استفاده می‌شود. با این حال، اطلاعات دقیق همیشه در دسترس نیست و امروزه، با توسعه بازارهای سهام، پیش‌بینی بازده مورد انتظار اوراق بهادار با مقادیر تصادفی نسبتاً سخت است. بنابراین، برای رسیدگی به این قبیل از عدم اطمینان بهتر است که بازده‌های مورد انتظار را بصورت متغیرهایی با توزیع مبهم، مانند: متغیرهای فازی یا متغیرهای نامطمئن، در مسائل

^{۱۴}Mansini and Speranza

^{۱۵}Mixed Integer Programming

^{۱۶}young

^{۱۷}Minimax

^{۱۸}Chang

^{۱۹}Palmquist

^{۲۰}Lobo

^{۲۱}Papahristodoulou

^{۲۲}Alexi Chekhlov

^{۲۳}Mansini

^{۲۴}Gandryv

پرتفوی در نظر بگیریم.

در این پایان نامه به بررسی مساله انتخاب پرتفوی بهینه، زمانی که بازده متغیر فازی باشد می پردازیم.

۴.۴ مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک

این مدل در مسئله انتخاب سبد سرمایه بهینه، به گونه ای است که در آن، بازده سرمایه گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه و ارزش در معرض ریسک را بعنوان معیار ریسک در نظر می گیریم. با توجه به میزان ریسک پذیری افراد در سرمایه گذاری از این مدل به دو صورت مدل ریسک پذیر و مدل ریسک گریز به صورت زیر استفاده می شود.

- مدل ریسک پذیر که در آن سرمایه گذار، مقدار بازده معینی را انتظار دارد و می خواهد ریسک را با توجه به سطح بازده مینیمم کند، مدل بهینه سازی آن به صورت زیر می باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \text{VaR}(\beta) \\ \text{s.t.} \quad E\left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right] \geq R \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (2.4)$$

- مدل ریسک گریز، یک پرتفوی با ارزش مورد انتظار بهینه، برای یک سطح مشخصی از ریسک است. مدل بهینه سازی آن به صورت زیر می باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E\left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right] \\ \text{s.t.} \quad \text{VaR}(\beta) \leq S \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.4)$$

در مدل های فوق x_i نسبت سرمایه گذاری در سهام i ام و ξ_i نشان دهنده بازده فازی i امین سهام $i = 1, 2, \dots, n$ و S ماکزیمم سطح ریسک سرمایه گذاری که صورت می گیرد و R مینیمم بازده مورد انتظار و همچنین E امید ریاضی و $\text{VaR}(\beta)$ ارزش در معرض ریسک با ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ که مقداری ثابت می باشد در نظر گرفته شده است.

۱.۴.۴ معادله های قطعی

در راه حل های معمول نیاز به تبدیل تابع هدف و قیدها به معادل دقیق آن ها است. همانطور که می دانیم اجرا و موفق بودن این فرایند در مواردی خاص و بسیار دشوار است. با جایگزینی مدل های فازی با

معادلهای قطعی در حالاتی خاص به حل مسئله انتخاب سبد سرمایه مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک می‌پردازیم.

حالت فازی مثلثی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر فازی مثلثی باشد، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\xi_i = (a_i, b_i)$. لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر فازی مثلثی است. با استفاده از نتایج (۳.۴.۳) و (۳.۵.۳) مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(a_i - b_i) - a_i) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.4)$$

و برای $1 \leq \beta < \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(b_i - c_i) + c_i - 2b_i) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۳.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(a_i - b_i) - a_i) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (6.4)$$

و برای $1 \leq \beta < \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(b_i - c_i) + c_i - 2b_i) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7.4)$$

حالت فازی دوزنقه‌ای

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$. لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر فازی دوزنقه‌ای است. با استفاده از نتایج (۴.۴.۳) و (۴.۵.۳) مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(a_i - b_i) - a_i) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8.4)$$

و برای $1 > \beta > \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(c_i - d_i) + d_i - 2c_i) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۳.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta < 0$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(a_i - b_i) - a_i) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (10.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i (2\beta(c_i - d_i) + d_i - 2c_i) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (11.4)$$

حالت فازی گوسی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر فازی گوسی باشد. $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\xi_i = (a_i, \sigma_i)$ ، لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر فازی گوسی است. با استفاده از نتایج (۵.۴.۳) و (۵.۵.۳) مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta < 0$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i \left(-a_i + \sigma_i \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i a_i \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (12.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n x_i \left(-a_i - \sigma_i \sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)} \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i a_i \geq R \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (13.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۳.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^n x_i a_i \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(-a_i + \sigma_i \sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)} \right) \leq S \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (14.4)$$

و برای $1 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^n x_i a_i \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(-a_i - \sigma_i \sqrt{\ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)} \right) \leq S \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (15.4)$$

۵.۴ مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک مشروط

این مدل در مسئله انتخاب پرتفوی بهینه، به‌گونه‌ای است که در آن، بازده سرمایه‌گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه و ارزش در معرض ریسک مشروط را بعنوان معیار ریسک در نظر می‌گیریم. با توجه به میزان ریسک‌پذیری افراد در سرمایه‌گذاری از مدل فوق نیز به دو صورت مدل ریسک‌پذیر و ریسک‌گریز استفاده می‌شود.

• مدل ریسک‌پذیر که در آن مدل بهینه‌سازی به صورت زیر می‌باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \text{CVaR}(\beta) \\ \text{s.t.} \quad E\left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right] \geq R \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (16.4)$$

• مدل ریسک‌گریز که در آن مدل بهینه‌سازی به صورت زیر می‌باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E\left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right] \\ \text{s.t.} \quad \text{CVaR}(\beta) \leq S \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (17.4)$$

در مدل‌های فوق x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهام i ام و ξ_i نشان دهنده بازده فازی i امین سهام $i = 1, 2, \dots, n$ و S ماکزیم سطح ریسک سرمایه‌گذاری که صورت می‌گیرد و R مینیمم بازده مورد انتظار و همچنین E امید راضی و $\text{CVaR}(\beta)$ ارزش در معرض ریسک مشروط با ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ که مقداری ثابت می‌باشد در نظر گرفته شده است.

۱.۵.۴ معادل‌های قطعی

با جایگزینی مدل‌های فازی با معادل‌های قطعی در حالاتی خاص به حل مسئله انتخاب سبد سرمایه مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک مشروط می‌پردازیم.

حالت فازی مثلثی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر فازی مثلثی باشد، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ ، لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر فازی مثلثی است. با استفاده از نتایج (۳.۴.۳) و (۲.۶.۳) مدل بهینه‌سازی (۱۶.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{-2b_i - a_i - c_i - 2(a_i - b_i)\beta^2 + 4a_i\beta}{4 - 4\beta} \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (18.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{i=1}^n x_i ((\beta - 1)b_i - \beta c_i) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (19.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۱۷.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{-2b_i - a_i - c_i - 4(a_i - b_i)\beta^2 + 4a_i\beta}{4 - 4\beta} \right) \leq S \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (20.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i ((\beta - 1)b_i - \beta c_i) \leq S \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (21.4)$$

حالت فازی دوزنقه‌ای

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد،

لذا $\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$. متغیر فازی دوزنقه‌ای است. با استفاده از

نتایج (۳.۶.۳) و (۴.۴.۳)

مدل بهینه‌سازی (۱۶.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta < 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{-2b_i - a_i - c_i - 4(a_i - b_i)\beta^2 + 4a_i\beta}{4 - 4\beta} \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (22.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{i=1}^n x_i ((\beta - 1)c_i - \beta d_i) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (23.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۱۷.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta < 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{-2b_i - a_i - c_i - 4(a_i - b_i)\beta^2 + 4a_i\beta}{4 - 4\beta} \right) \leq S \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (24.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i ((\beta - 1)c_i - \beta d_i) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (25.4)$$

۶.۴ مثال‌های عددی

برای نشان دادن کارایی مدل‌های ذکر شده در حل مسائل انتخاب پرتفوی در شرایط فازی مثال‌هایی مطرح و حل می‌شود. در شبیه سازی همه مثال‌ها از دستور ode45 در matlab استفاده شده است که معادل روش رانگ کوتای درجه ۴ برای حل معادلات است.

مثال ۱۰۶.۴. فرض کنید ۱۰ ورق بهادار با بازده مثلی $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد.

جدول ۱۰۴: بازده‌های فازی مثلی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
1	(-0.2 , 2.1 , 2.5)	6	(-0.2 , 2.5 , 3.0)
2	(-0.1 , 1.9 , 3.0)	7	(-0.2 , 3.0 , 3.5)
3	(-0.4 , 3.0 , 4.0)	8	(-0.4 , 2.5 , 4.0)
4	(-0.1 , 2.0 , 2.5)	9	(-0.3 , 2.8 , 3.2)
5	(-0.6 , 3.0 , 4.0)	10	(-0.3 , 2.0 , 2.5)

فرض کنید $\beta = 0.1\%$ ، میزان ریسک حداکثر ۱٪ و ارزش مورد انتظار سرمایه گذار حداقل ۲ باشد. از مدل (۴.۴) و (۶.۴) داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & 0.154x_1 + 0.06x_2 + 0.332x_3 \\ & + 0.058x_4 + 0.528x_5 + 0.146x_6 \\ & + 0.136x_7 + 0.342x_8 + 0.238x_9 + 0.254x_{10} \\ \text{s.t.} & 1.625x_1 + 1.675x_2 + 2.4x_3 \\ & + 1.6x_4 + 2.35x_5 + 1.95x_6 \\ & + 2.325x_7 + 2.15x_8 + 2.125x_9 + 1.55x_{10} \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad (26.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 \\ & + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ & + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \\ \text{s.t.} & 0/154x_1 + 0/06x_2 + 0/332x_3 \\ & + 0/058x_4 + 0/528x_5 + 0/146x_6 \\ & + 0/136x_7 + 0/342x_8 + 0/238x_9 + 0/254x_{10} \leq 0/1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad (27.4)$$

همچنین از مدل (۱۸.۴) و (۲۰.۴) داریم

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & -1/6432x_1 - 1/6927x_2 - 2/4279x_3 \\ & - 1/6170x_4 - 2/3794x_5 - 1/9714x_6 \\ & - 2/3502x_7 - 2/1755x_8 - 2/1492x_9 - 1/5685x_{10} \\ \text{s.t.} & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 \\ & + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ & + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad (28.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 \\ & + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ & + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \\ \text{s.t.} & -1/6432x_1 - 1/6927x_2 - 2/4279x_3 - 1/6170x_4 \\ & - 2/3794x_5 - 1/9714x_6 - 2/3502x_7 \\ & - 2/1755x_8 - 2/1492x_9 - 1/5685x_{10} \leq 0/1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad (29.4)$$

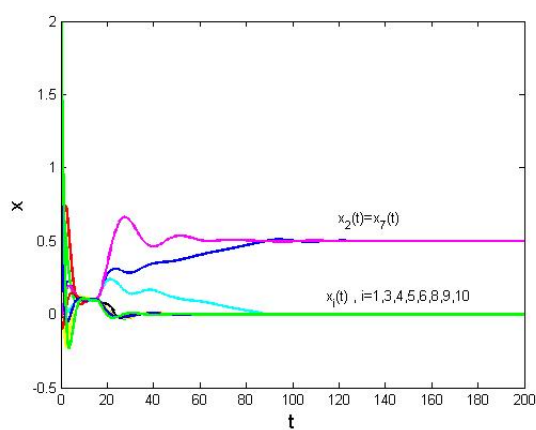
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسئله با کمک شبکه‌عصبی مطرح شده در فصل دوم جواب بهینه برای مدل (۲۶.۴) به صورت

$$X^* = (0, 0/5, 0, 0, 0, 0, 0/5, 0, 0, 0)^T$$

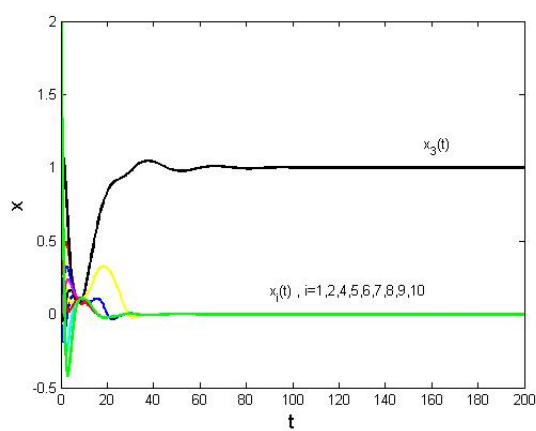
و برای (۲۸.۴) به صورت زیر خواهد بود

$$X^* = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۲ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند.



شکل ۱۰.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۶.۴)



شکل ۲۰.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۸.۴)

رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۲۶.۴) و (۲۸.۴) در شکل ۱۰.۴ و ۲۰.۴ نمایش داده شده است.

همچنین جواب بهینه برای مدل (۲۷.۴) به صورت

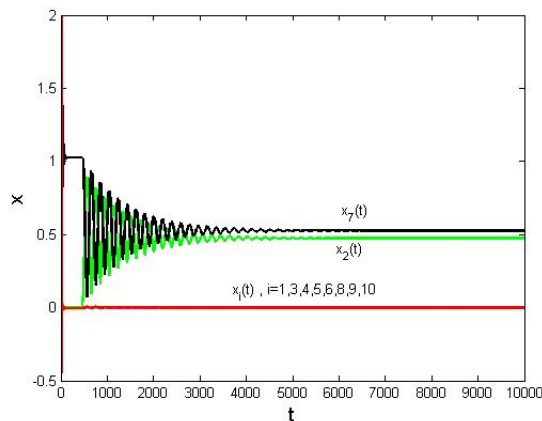
$$X^* = (0, 0, 4737, 0, 0, 0, 0, 0, 5263, 0, 0, 0)^T$$

و برای مدل (۲۹.۴) به صورت زیر خواهد بود:

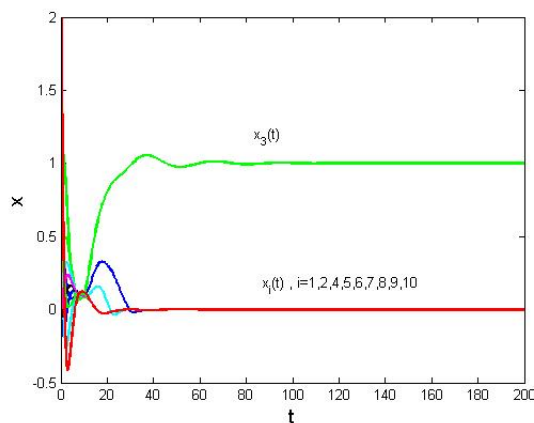
$$X^* = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

یعنی برای بدست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۱/۰ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند.

رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۲۷.۴) و (۲۹.۴) در شکل ۳.۴ و ۴.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۷.۴)



شکل ۴.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۹.۴)

مثال ۲.۶.۴. فرض کنید ۱۰ ورق بهادار با بازده گوسی $\xi_i = (a_i, \sigma_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد.

جدول ۲.۴: بازده‌های فازی گوسی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
1	FN(0.8 , 1.3)	6	FN(1.1 , 1.8)
2	FN(0.9 , 1.6)	7	FN(0.8 , 1.7)
3	FN(0.9 , 1.4)	8	FN(0.7 , 1.5)
4	FN(0.8 , 1.5)	9	FN(0.8 , 1.6)
5	FN(1.0 , 1.8)	10	FN(0.7 , 0.8)

فرض کنید $\beta = 0.1$ ، میزان ریسک حداکثر $1/5$ و ارزش مورد انتظار سرمایه گذار حداقل 0.9 باشد. از مدل (۱۲.۴) و (۱۴.۴) داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & 1/7712x_1 + 2/2646x_2 + 1/869x_3 \\ & + 2/1668x_4 + 2/5602x_5 + 2/4602x_6 \\ & + 2/5624x_7 + 2/2668x_8 + 2/3646x_9 + 0/8823x_{10} \\ \text{s.t.} & 0/8x_1 + 0/9x_2 + 0/9x_3 + 0/8x_4 + x_5 \\ & + 1/1x_6 + 0/8x_7 + 0/7x_8 + 0/8x_9 + 0/7x_{10} \geq 0/9 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad (30.4)$$

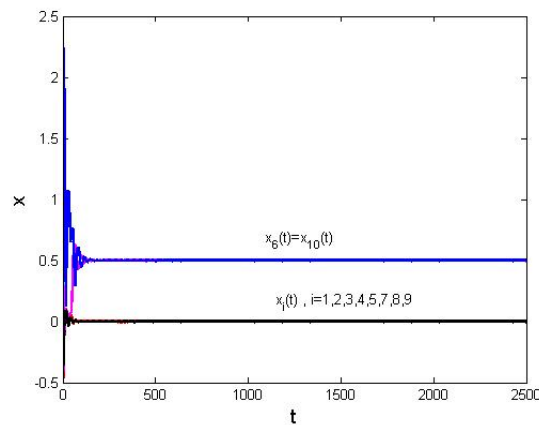
و

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & 0/8x_1 + 0/9x_2 + 0/9x_3 + 0/8x_4 + x_5 \\ & + 1/1x_6 + 0/8x_7 + 0/7x_8 + 0/8x_9 + 0/7x_{10} \\ \text{s.t.} & 1/7712x_1 + 2/2646x_2 + 1/869x_3 + 2/1668x_4 \\ & + 2/5602x_5 + 2/4602x_6 + 2/5624x_7 \\ & + 2/2668x_8 + 2/3646x_9 + 0/8823x_{10} \leq 1/5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad (31.4)$$

با استفاده از متلب و مدل کردن این مسئله با کمک شبکه‌عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۳۰.۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$X^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0/5, 0, 0, 0, 0/5)^T$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده 0.9 را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسئله (۳۰.۴) در شکل ۵.۴ نمایش داده شده است.



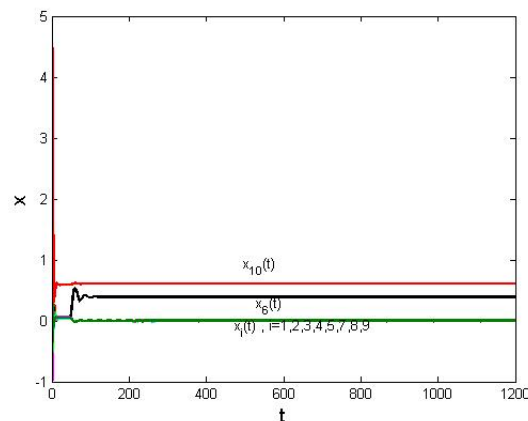
شکل ۵.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۳۰.۴)

همچنین جواب بهینه برای مدل (۳۱.۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$X^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 3915, 0, 0, 0, 0, 6085)^T$$

یعنی برای بدست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۱/۵ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند.

رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسئله (۳۱.۴) در شکل ۶.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۶.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۳۱.۴)

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱.۵ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه سعی کرده‌ایم مروری بر شبکه‌های عصبی داشته و با استفاده از این نظریه به حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی مالی بپردازیم. مسائل بهینه‌سازی مالی به چهار دسته کلی انتخاب سبد سرمایه، مدیریت ریسک، قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ها، مدیریت بدهی و دارایی‌ها تقسیم می‌شوند. این مسائل شامل برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی درجه دوم، برنامه ریزی مخروطی، بهینه‌سازی مقاوم و برنامه ریزی تصادفی هستند.

برای مسائل انتخاب پرتفوی مدل‌هایی را بر اساس معیارهای ریسک نامطلوب (ارزش در معرض ریسک) و ریسک منسجم (ارزش در معرض ریسک مشروط) در فضای فازی معرفی و به معادل‌های دقیق خطی تبدیل کردیم و برای حل به ارائه یک مدل از شبکه‌های عصبی پرداختیم. همچنین پایداری و همگرایی سراسری مدل مورد بررسی قرار گرفت و کارایی مدل پیشنهاد شده را با حل چندین مثال عددی نشان دادیم.

از جمله مزیت‌های مدل ارائه شده می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- در مقایسه با الگوریتم‌های بهینه‌سازی کلاسیک، روش شبکه عصبی مزیت‌های بالقوه متعددی دارد. اول به دلیل خاصیت انجام محاسبات موازی شبکه عصبی در اجرای مسائل با ابعاد بسیار بزرگ کارا و موثر است. دوم اینکه، شبکه‌های عصبی می‌توانند بسیاری از مسائل بهینه‌سازی با پارامترهای وابسته به زمان را حل کنند. سوم اینکه، روش‌های پویا و روش‌های حل معادله دیفرانسیل معمولی می‌توانند به صورت مستقیم و موثر در شبکه‌های عصبی زمان پیوسته برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید به کار برده شوند.

- یک مدل شبکه عصبی جدید برای حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم محدب ارائه شد.

- بعضی مدل‌های شبکه عصبی نمی‌توانند مسائل برنامه ریزی محدب عمومی را وقتی که تابع هدف و تمام قیدها محدب هستند، مانند برنامه ریزی خطی یا برنامه ریزی محدب درجه دوم تباهیده را

- حل کنند اما مدل شبکه عصبی ارائه شده تمام این مسائل را حل می‌کند.
- در مقایسه با مدل‌های شبکه عصبی دیگر برای مسائل برنامه ریزی درجه دوم محدب، مدل شبکه عصبی ارائه شده با ساختاری ساده و با تعداد نرون کمتری طراحی شده است.
- مدل پیشنهاد شده برخلاف مدل‌های گرادیانی، پارامتر جریمه ندارد و برای اجرای نرم افزار کاملاً مناسب است.
- مدل شبکه عصبی ارائه شده پایدار به مفهوم لیاپانوف و همگرایی سراسری به جواب بهینه مسئله است.
- مدل پیشنهادی برخلاف روش‌های دیگر و نرم افزارها به تعداد متغیرها و قیود محدود نیست.

۲.۵ پیشنهادات برای کارهای آتی

از جمله تحقیقات دیگری که در ادامه می‌توان انجام داد عبارتند از:

۱. مسائل بهینه سازی پرتفوی را در فضاهاى مختلف دیگر مانند فضای عدم اطمینان و تصادفی می‌توان ارائه کرد.
۲. نمونه‌های دیگری از معیار ریسک منسجم را به عنوان شاخص اندازه‌گیری ریسک می‌توان ساخت و معرفی کرد.
۳. مدل‌های بهینه سازی پرتفوی مختلفی را با استفاده از نمونه‌های دیگر ریسک منسجم، به عنوان معیار ریسک می‌توان ارائه کرد.
۴. تمامی مدل‌های بهینه سازی پرتفوی را به صورت مسائل برنامه ریزی چند هدفه می‌توان بیان کرد.
۵. کلاس‌های مختلفی از مسائل بهینه سازی پرتفوی و دیگر مسائل مالی از جمله مدیریت ریسک و غیره که قابل بیان به صورت برنامه ریزی درجه دوم محدب و یا خطی باشند را با مدل شبکه عصبی ارائه شده می‌توان حل نمود.
۶. مسائل برنامه ریزی درجه دوم محدب در طیف گسترده‌ای از مسائل کاربردی، از جمله تجزیه و تحلیل رگرسیون، پردازش سیگنال، بازسازی تصویر و کنترل ربات مطرح می‌شود که با کمک مدل شبکه عصبی ارائه شده می‌توان آن‌ها را حل نمود.

مراجع

- [1] H. Amann, Ordinary Differential Equations: An introduction to nonlinear analysis, Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [2] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali and C.M. Shetty, Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [3] R.E. Bellman, L.A. Zadeh, Decision-Making in a Fuzzy Environment, Management Science, Vol. 17, pp. 141-164, 1970.
- [4] M. Berry, G. Linoff, Data Mining Techniques, John Wiley and Sons, New York, 1997.
- [5] F. Black, R. Litterman, Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium, Goldman Sachs Fixed Income Research, 1990.
- [6] A. Bouzerdoum, T.R. Pattison, Neural Network for Quadratic Optimization with Bound Constraints, IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 4, pp. 293-304, 1993.
- [7] T. Chang, T. Meade, J.E. Beasley and Y.M. Sharaihan, Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimization, Computers and Operations Research, Vol. 27, pp. 1271-1302, 2000.
- [8] D. Dubois, H. Prade, Possibility Theory, Plenum, New York, 1988.
- [9] S. Effati, A.R. Nazemi, Neural Network Models and its Application for Solving Linear and Quadratic Programming Problems, Applied Mathematics and Computation, Vol. 172, pp. 305-331, 2006.
- [10] S. Haykin, Neural Network: A comprehensive Foundation, prentice hall, 1999.
- [11] J.J. Hopfield, D.W. Tank, Simple Neural Optimization Network: An A/D Converter, Signal Decision Circuit, and a Linear Programming Circuit, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 33, pp. 533-541, 1986.
- [12] D.L. Hudson, M.E. Cohen, Neural Network and Artificial Intelligence for Biomedical Engineering, IEEE Press, 2000.

- [13] J.C. Hull, Options,Futures,and Other Derivatives, 6th Edition, Perntice Hall, New Jersey, 2006.
- [14] C.P. Jones, Investments: Analysis and Management, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [15] M.P. Kennedy, L.O. Chua, Neural Networks for Nonlinear Programming, IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 35, pp. 554-562, 1998.
- [16] S.M. Lee, A.J. Lerro, Optimization the Portfolio Selection for Mutual Funds, The Journal of finance, Vol. 28, pp. 1087-1099, 1973.
- [17] S.M. Lee, D.L. Chesser , Goal Programming for Portfolio, The Journal of Portfolio Managment, pp. 22-26, 1980.
- [18] B. Liu, Uncertainty Theory, Springer, 2004.
- [19] B. Liu, Theory and Practice of Uncertain Programming, Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 2008.
- [20] J. Lntner, The VCaluation of Risk Asset and the Selection of Risky Investments in Stock: Portfolio and Capital Budgets, Reviwie of Economics and Statistics, Vol. 47, pp. 22-26, 1965.
- [21] S.M. Lobo, M. Fazel, and S. Boyd, Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs, California Institue of Technology, 2002.
- [22] R. Mansini, M.G. Spreranza, Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction lots, European Journal of Opeartional Resarch, Vol. 114, pp. 219-233, 1997.
- [23] R. Mansini, W. Oyryczak and M.G. Speranza, LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison, IMA Journal of Management Mathematics, Vol. 14, pp. 187-220, 2003.
- [24] H. Markovitz, Portfolio Selection, Journal of Finance, Vol. 7,pp. 77-91, 1952.
- [25] H. Markovitz, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [26] J. Mossin, Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica, Vol. 34, ,pp. 14-16, 1966.
- [27] J. Palmquist, S. Uryaser, and P. Krokmal, Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints, Journal of Risk, 1999.

- [28] C. Papahristodoulou and E. Dotzauer, Optimal Portfolios Using Linear Programming Models, *Journal of Operations Research Society*, Vol. 55, pp. 1169-1177, 2004.
- [29] S.A. Ross, The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, PP. 341-360, 1976.
- [30] W.F. Sharpe, Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 16-18, 1964.
- [31] G. Simmons, *Differential Equations: Theory, Technique, and Practice*, McGraw-Hill, India, 2006.
- [32] Y. Xia, A Neural Network for Solving Linear and Quadratic Programming Problems, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 7, pp. 1544-1547, 1996.
- [33] Y. Xia, B. Liu, W. Shoayang, and K. Lai, A Model for Portfolio Selection with Order of Expected Returns, *Computers and Opeartionals Research*, Vol. 27, ,pp. 409-424, 1999.
- [34] Y. Xia, J. Wang, A Recurrent Neural Network for Solving Linear Projection Equation, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 13, No. 3, pp. 337-350, 2000.
- [35] Xing-Bao Gao, Exponential Stability of Globally Projected Dynamic Systems, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 14, No. 2, pp. 426-431, 2003.
- [36] Y. Yang, J. Cao, X. Xu, M. Hu and Y. Gao, A New Neural Network for Solving Quadratic Programming Problems with Equality and Inequality Constraints, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 101, pp. 103–112, 2014.
- [37] M.R. Young, A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution, *Management Science*, Vol. 44, pp. 673-683, 1998.
- [38] L.D. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338–353, 1965.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Value at Risk	ارزش در معرض ریسک
Conditional Value at Risk	ارزش در معرض ریسک مشروط
Expected Value	امید ریاضی
Realized Return.....	بازده تحقق یافته
Expected Return.....	بازده مورد انتظار
Portfolio	پرتفوی
Convex Function.....	تابع محدب
Capital Gain	تغییر قیمت
Credibility Distribution.....	توزیع اعتبار
Asset.....	دارایی
Risk Taker	ریسک پذیر
Risk Averse	ریسک گریز
Investment	سرمایه گذاری
Yeild.....	سود
Neural Network.....	شبکه عصبی
Fuzzy Number	عدد فازی
Uncertainty	عدم اطمینان
Short-Selling	فروش استقراضی
Crisp	قطعی
Krvsh-Kuhn-Tucker.....	کروش-کان-تاکر
Lyapunov	لیاپانوف
Lipschitz	لیپ شیتز
Hessian Matrix.....	ماتریس هسین
Fuzzy Variable.....	متغیر فازی
Convex Set.....	مجموعه محدب

Deterministic	معین
Positive Definite	معین مثبت
Fuzzy Logic	منطق فازی
Neuron	نرون
Equilibrium Point	نقطه تعادل
Post-Modern Portfolio Theory	نظریه فرا مدرن سبد سرمایه
Modern Portfolio Theory	نظریه مدرن سبد سرمایه
Positive Semidefinite	نیمه معین مثبت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Asset	دارایی
Capital Gain	تغییر قیمت
Credibility Distribution	توزیع اعتبار
Crisp	قطعی
Conditional Value at Risk	ارزش در معرض ریسک مشروط
Convex Function	تابع محدب
Convex Set	مجموعه محدب
Deterministic	معین
Equilibrium Point	نقطه تعادل
Expected Return	بازده مورد انتظار
Expected Value	امید ریاضی
Fuzzy Logic	منطق فازی
Fuzzy Number	عدد فازی
Fuzzy Variable	متغیر فازی
Hessian Matrix	ماتریس هسین
Investment	سرمایه گذاری
Krvsh-Kuhn-Tucker	کروش-کان-تاکر
Lipschitz	لیپ شیتز
Lyapunov	لیاپانوف
Modern Portfolio Theory	نظریه مدرن سبد سرمایه
Neural Network	شبکه عصبی
Neuron	نرون
Portfolio	پرتفوی
Positive Definite	معین مثبت
Positive Semidefinite	نیمه معین مثبت

Post-Modern Portfolio Theory.....	نظریه فرا مدرن سبد سرمایه
Realized Return.....	بازده تحقق یافته
Risk Averse.....	ریسک گریز
Risk Taker.....	ریسک پذیر
Short-Selling.....	فروش استقراضی
Uncertainty.....	عدم اطمینان
Value at Risk.....	ارزش در معرض ریسک
Yeild.....	سود

Aabstract

Optimization problems comprise one of the interesting and popular fields in financial mathematics. The optimal portfolio selection, asset allocation, risk management and option pricing models as more efficient and more accurate models has defined different linear and nonlinear optimization problems.

In recent decades, optimization methods that have been developed based on the artificial intelligence, have achieved a great success in effective and efficient solving of optimization problems. Methods such as genetic algorithms, tabu search, simulated annealing, neural networks and etc, well illustrated their ability to solve major scientific problems. Available special rates on neural network models has provided their use in a wide range of research. Among them, we could pointed to the ability to learn and improve performance based on input data, Ability to perform parallel calculations and independently from the initial point of this model, unlike the classic models.

In this thesis, using a efficient neural network model we will discuss solving of the fuzzy portfolio selection where every guaranteed interval belongs to a certain class of fuzzy variables. Using a suitable Lyapunov function, we will prove that the expressed neural network model is asymptotically stable and globally convergent to the optimal solution of the original problem.

Finally, the results and recommendations for future work will be presented.

keywords: Neural Network; Stability; Optimization; Portfolio; Fuzzy.



University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

**A capable neural network model for solving
portfolio selection problem with fuzzy returns**

Milad Rezaei

Supervisor

Dr Alireza Nazemi

December 2015