



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

گراف بازه‌ای و کاربردهایش

ام البنین ربیعی

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

آبان ۱۳۹۴

تقدیم بہ

روان پاک مادرم

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب شکر است و به شکر اندرش فرید نعمت. هر
نفسی که فرومی رود مدحیات است و چون برمی آید مفرح ذات. پس در هر نفسی
دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.
از دست و زبان که برآید کز عهده شکرش به درآید

سپاس گزار می...

شکر بی پایان بر آفرینشگر آسمان و یگانه دانای علم آفرین، که با یاری‌ها، برکات و تاییدات او موفق به تحصیل علم و تنظیم این پایان‌نامه گشتم.

به مصداق آیه شریفه (من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق) وظیفه خود می‌دانم مراتب قدردانی و سپاس قلبی خود را به جناب آقای دکتر رحیمی شهرباف که در طول تحصیل و تحقیق مرا از راهنمایی‌های عالمانه خویش برخوردار ساختند، تقدیم نمایم. همچنین سپاسگزار کلیه اساتیدی هستم که در طول تحصیل از دانش آنها بهره‌مند گشتم.

ام البنین ربیعی
آبان ۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب ام‌البنین ربیعی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان گراف بازه‌ای و کاربردهایش، تحت راهنمایی دکتر صادق رحیمی شعرفاف متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

ام‌البنین ربیعی
آبان ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

گراف بازه‌ای، رده مهمی از گراف‌های اشتراکی و گراف‌های تام‌اند. این نوع گراف‌ها کاربردهای زیادی در موقعیت‌های مختلفی از زندگی واقعی دارند. در فصل اول بعضی از تعاریف و نمادها یادآوری می‌شوند. در فصل دو، چند ویژگی موروثی و مشخصه‌های مطرح شده از گیل‌مور-هافمن و فولکرسون-گراس و لکرکر-بولند با شرایط لازم و کافی برای تشخیص گراف بازه‌ای مطرح می‌شود. در فصل سوم ساختار داده‌ای درخت بازه‌ای، از گراف بازه‌ای معرفی می‌شود. همچنین با استفاده از ویژگی‌های آن مسائلی از گراف بازه‌ای نظیر درخت ۳-فراگیر و محاسبه فاصله بین دو راس از گراف بازه‌ای و محاسبه قطر و مرکز گراف بازه‌ای بیان می‌شود. الگوریتمی برای آن‌ها از مرتبه $O(n)$ پیشنهاد می‌شود. در فصل چهارم با مروری از مجموعه‌های فازی، گراف اشتراکی فازی از خانواده مجموعه‌های فازی معرفی و مشخصه‌های گراف بازه‌ای از گیل‌مور-هافمن و مشخصه فولکرسون-گراس بررسی می‌شود. در فصل پنجم مساله ماکزیمم وزن مجموعه مستقل برای گراف بازه‌ای با وزن عدد بازه‌ای مطرح شده و یک الگوریتم از مرتبه $O(n)$ برای حل آن ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: گراف بازه‌ای، درخت بازه‌ای، کوتاهترین مسیر، درخت ۳-فراگیر، قطر، گراف بازه‌ای فازی.

فهرست مطالب

ذ	لیست تصاویر
۱	لیست جداول
۳	۱ مقدمه و تعاریف
۳	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ تعاریف
۹	۲ قضایای اساسی از گراف بازه‌ای
۹	۱.۲ مقدمه
۹	۲.۲ ویژگی گراف بازه‌ای
۱۱	۳.۲ مشخصه گیل‌مور-هافمن
۱۳	۴.۲ مشخصه فولکرسون-گراس
۱۴	۵.۲ مشخصه لکرکر و بولند
۱۴	۶.۲ تشخیص گراف بازه‌ای
۱۵	۷.۲ کاربرد
۱۷	۳ درخت بازه‌ای و کاربردهایش
۱۷	۱.۳ مقدمه
۱۷	۲.۳ درخت بازه‌ای
۲۱	۳.۳ خصوصیات درخت بازه‌ای
۲۳	۴.۳ کاربردهای درخت بازه‌ای
۲۳	۱.۴.۳ مساله درخت ۳- فراگیر
۲۴	۲.۴.۳ روش ساخت درخت ۳- فراگیر از درخت بازه‌ای
۲۷	۳.۴.۳ کوتاهترین مسیر
۲۸	۴.۴.۳ محاسبه قطر

۳۷	۴	گراف بازه‌ای فازی
۳۷	۱.۴	مقدمه‌ای بر مجموعه‌های فازی
۳۸	۲.۴	گراف فازی
۴۰	۳.۴	گراف اشتراکی فازی
۴۱	۴.۴	گراف‌های بازه‌ای فازی
۴۲	۵.۴	مشخصه فولکرسون و گراس
۴۴	۶.۴	مشخصه گیل‌مور و هافمن
	۵	پیدا کردن زیرگراف با مجموعه مستقل (۱-رنگ‌پذیر) با ماکزیمم وزن عدد بازه‌ای در
۴۷		گراف بازه‌ای
۴۷	۱.۵	مقدمه
۴۷	۲.۵	حساب فاصله
۴۹	۳.۵	مساله ۱
۵۱	۴.۵	یک مساله کاربردی
۵۵		مراجع
۵۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

لیست تصاویر

۵	۱.۱	۵-دور، با دو وتر
۶	۲.۱	گراف مقایسه‌پذیر
۸	۳.۱	گراف اشتراکی
۸	۴.۱	متناظر بازه باز به بسته
۱۰	۱.۲	ساختار غیر مجاز از گراف بازه‌ای
۱۱	۲.۲	خط پیوسته معرف یال در E و خط چین معرف یال در $\bar{E}$ در جهت‌دهی F
۱۲	۳.۲	شرح قضیه
۱۳	۴.۲	گراف بازه‌ای
۱۳	۵.۲	خوشه‌های ماکسیمال از گراف شکل ۴.۲
۱۴	۶.۲	ماتریس خوشه‌ای از گراف شکل ۴.۲
۱۹	۱.۳	گراف بازه‌ای و نمایش بازه‌ای آن
۱۹	۲.۳	$H(1, n)$
۲۰	۳.۳	درخت بازه‌ای از گراف شکل ۱.۳
۲۴	۴.۳	گراف بازه‌ای و درخت بازه‌ای آن که درخت ۳-فراگیر نیز می‌باشد
۲۵	۵.۳	$T_s(G)$ از درخت بازه‌ای ۳.۳
۲۹	۶.۳	شرح
۳۱	۷.۳	گرافی که $\rho \neq \lceil \frac{\delta}{4} \rceil$
	۱.۴	یک گراف فازی که گراف بازه‌ای فازی نیست اگرچه هر گراف سطح مقطعش نمایش بازه‌ای دارد.
۴۲	۲.۴	یک گراف بازه‌ای فازی که ماتریس وقوع خوشه‌ای راسی آن دارای ردیفی است، که محدب نیست..
۴۴	۳.۴	یک گراف فازی که جهت‌دهی تعدی ندارد.
۴۵	۱.۵	نمایش بازه‌ای از گراف بازه‌ای متناظر
۵۳		

۲.۵ گراف بازه‌ای متناظر ۵۳

لیست جداول

۳۲		فاصله بین رؤوس	۱.۳
۳۲		خروج از مرکز	۲.۳
۵۲		جدول زمان پخش برنامه‌های کانال E	۱.۵
۵۲		جدول زمان پخش برنامه‌های کانال B	۲.۵
۵۲		جدول زمان پخش برنامه‌های کانال A	۳.۵

فصل ۱

مقدمه و تعاریف

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۹۵۷ هایش^۱ گرافی را به این صورت تعریف کرد:

”تعداد متناهی بازه روی یک خط در نظر می‌گیریم. گراف وابسته به این مجموعه از بازه‌ها به این صورت ساخته می‌شود: نظیر هر بازه یک راس در نظر گرفته می‌شود. دو راس با هم مجاورند اگر و تنها اگر بازه‌های متناظرشان اشتراک داشته باشند.“ همچنین در سال ۱۹۵۹ به طور مستقل سیمور بنزر^۲ در طول تحقیقات خود در زیست‌شناسی مولکولی بر روی ساختار ژن، این سوال را مطرح کرد که کروموزوم به صورت ترتیب خطی از ژن‌ها شناخته شده است. هر ژن دارای یک ساختار داخلی است. آیا عناصر درون هر ژن مشابه به بالاترین سطح تکامل ژن‌ها در کروموزوم در یک ترتیب خطی به هم متصل‌اند؟ این سوال با مطالعه گراف‌های وابسته به بازه‌های روی خط (گراف بازه‌ای) پاسخ داده می‌شود که آیا داده‌های جمع‌آوری شده با فرض خطی بودن ترتیب عناصر درون ژن سازگاری دارند یا خیر؟

از گراف‌های بازه‌ای در مدلسازی بسیاری از مسائل جهان واقعی استفاده می‌شود. از گراف‌های بازه‌ای در باستان‌شناسی، زیست‌شناسی مولکولی، ژنتیک، روانشناسی، برنامه‌ریزی کامپیوتر، بازیابی اطلاعات ذخیره شده، طراحی مدارهای الکتریکی، برنامه‌ریزی ترافیک و موارد بسیاری دیگر می‌توان اشاره کرد.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱ [۶] گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ ، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ به عنوان راس‌ها و $E(G)$ یال‌ها و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G ، یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از راس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و v, u دو راس باشند، به قسمی که

^۱Hajos

^۲Seymour Benzer

$\psi_G(e) = uv$ آن‌گاه گویند e ، u را به v وصل می‌کند، و راس‌های v, u را دو انتهای e می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. [۶] گراف H زیرگراف G است، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H تحدید $\psi(G)$ به $E(H)$ باشد.

تعریف ۳.۲.۱. [۶] زیرگراف H با $V(H) = V(G)$ زیرگراف فراگیر نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. [۶] اگر V' زیرمجموعه ناتهی از V باشد زیرگراف G که مجموعه راس‌هایش V' و مجموعه یال‌هایش مجموعه‌ای از یال‌های G باشد به‌طوری‌که هر دو انتهایش در V' باشد، زیرگراف القا شده به وسیله V' گویند و با $G[V']$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. [۶] اگر به هر راس، یا به هر یال گراف $G = (V, E)$ یک وزن که معمولاً یک عدد حقیقی است، نسبت داده شود آن گراف را وزن‌دار گویند.

تعریف ۶.۲.۱. گراف G همبند نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو راس u و v مسیری از u به v وجود داشته باشد.

تعریف ۷.۲.۱. گراف همبند فاقد دور، درخت نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. [۶] فرض کنید $v \in V$ باشد. همسایه‌های باز راس v با $N(v)$ نشان داده می‌شود و برابر است با مجموعه همه راس‌های مجاور به راس v . یعنی: $N(v) = N_G(v) = \{x \in V : vx \in E\}$. همسایه‌های بسته راس v با $N[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. [۵] برای گراف $G = (V, E)$ فاصله^۳ بین دو راس u و v برابر است با تعداد کمترین یالهایی که بین این دو راس پیموده می‌شود. و با $d(u, v)$ نشان داده می‌شود. اگر هیچ مسیری بین دو راس نباشد، آن‌گاه $d(u, v) = \infty$

تعریف ۱۰.۲.۱. [۵] برای راس u ، خروج از مرکز^۵ به صورت $e(u) = \max_{v \in V} \{d(u, v)\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. [۵] کمترین خروج از مرکز، شعاع گراف^۶ نامیده می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\rho = \rho(G) = \min_{u \in V} \{e(u)\}.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. [۵] بیشترین خروج از مرکز، قطر گراف^۷ نامیده می‌شود. یعنی:

$$\delta = \delta(G) = \max_{u \in V} \{e(u)\}.$$

می‌توان از نماد $diam(G)$ به جای $\delta(G)$ استفاده کرد.

^۳distance

^۴shortest distance

^۵eccentricity

^۶radius

^۷diameter

در یک گراف ناهمبند قطر و شعاع گراف و خروج از مرکز هر راس بی‌نهایت است.

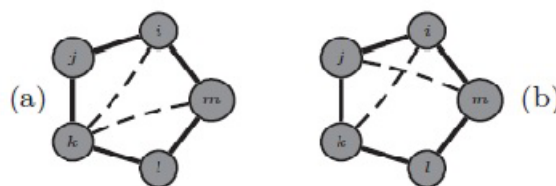
تعریف ۱۳.۲.۱. [۵] مجموعه $C(G) = \{v \in V : e(v) = \rho(G)\}$ مرکز^۸ گراف نامیده می‌شود. این مجموعه ممکن است تک عضوی یا بیشتر از یک عضو داشته باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. [۵] یک درخت فراگیر^۹ از گراف همبند G زیر گراف فراگیر همبند بدون دور است.

تعریف ۱۵.۲.۱. [۵] در دور C یالی خارج از دور که دو راس آن روی دور قرار داشته باشد، وتر نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲.۱. [۱] یک زیرگراف القائی از گراف G ، که با C_t ، $t \geq 4$ یکرخت باشد، دور بی‌وتر^{۱۰} نامیده می‌شود.

تعریف ۱۷.۲.۱. [۱] گراف بی‌سویی که در هر دور آن به طول بزرگتر از ۳، یک وتر وجود داشته باشد، گراف وتری^{۱۱} نامیده می‌شود. به طور معادل گراف بی‌سویی که فاقد دور بی‌وتر باشد.



شکل ۱۰.۱: ۵-دور، با دو وتر

مثال ۱۸.۲.۱. در شکل ۱۰.۱، شکل a گراف وتری است و شکل b گراف وتری نیست.

تعریف ۱۹.۲.۱. [۱] اگر $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه یال‌های E باشد در اینصورت

$$E^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in E\} \quad \hat{E} = E \cup E^{-1}$$

به این ترتیب گراف $G = (V, E)$ بی‌سو^{۱۲} نامیده می‌شود اگر $E = E^{-1}$. بطور معادل $\hat{E} = E$.

تعریف ۲۰.۲.۱. [۱] گراف $H = (V, D)$ جهت‌دار^{۱۳} نامیده می‌شود اگر $D \cap D^{-1} = \emptyset$ و اگر $D \cap D^{-1} = \emptyset, D \cup D^{-1} = E$ در اینصورت H یا D یک جهت‌دهی از G یا E نامیده می‌شود.

^۸center

^۹spanning tree

^{۱۰}chordless cycle

^{۱۱}chordal

^{۱۲}undirected

^{۱۳}oriented

تعریف ۲۱.۲.۱. [۱] گراف جهت‌دار $H = (V, D)$ یک جهت‌دهی تعدی^{۱۴} است اگر در شرط زیر صدق کند:

$$(x, y) \in D, (y, z) \in D \Rightarrow (x, z) \in D$$

تعریف ۲۲.۲.۱. [۱] گراف بی‌سویی که خاصیت جهت‌دهی تعدی را داشته باشد را گراف مقایسه‌پذیر^{۱۵} گویند.



شکل ۲.۱: گراف مقایسه‌پذیر

مثال ۲۳.۲.۱. گراف‌های دو بخشی مقایسه‌پذیرند. زیرا اگر G یک گراف دوبخشی با افراز X و Y باشد، آنگاه جهت دهی به‌دست آمده از هدایت هر یال از X به Y متعدی است. دورهای بی‌وتر به طول فرد گراف مقایسه‌پذیر نیستند.

تعریف ۲۴.۲.۱. [۱] اگر $G = (V, E)$ یک گراف بی‌سو باشد گراف $\bar{G} = (V, \bar{E})$ مکمل گراف G نامیده می‌شود، بطوریکه $\bar{E} = \{(x, y) \in V \times V | x \neq y, (x, y) \notin E\}$.

تعریف ۲۵.۲.۱. [۱] در گراف $G = (V, E)$ زیرمجموعه $A \subseteq V$ با r راس، یک r -خوشه نامیده می‌شود، اگر یک زیرگراف کامل را القا کند یعنی: $G[A] \cong K_r$. بنابراین یک خوشه، مجموعه رئوس گراف ساده‌ای است که هر جفت از رئوس آن یک یال را می‌سازند. یک راس به تنهایی یک خوشه است. یک خوشه ماکسیمال است اگر خوشه‌ای از G که A به‌عنوان یک زیرمجموعه محض آن باشد، وجود نداشته باشد.

یک خوشه ماکسیمم است اگر خوشه‌ای از G با اندازه بزرگ‌تر از آن وجود نداشته باشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. [۱] اندازه بزرگ‌ترین مجموعه القاکننده یک خوشه یعنی تعداد رئوس در خوشه ماکسیمم با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود. و عدد خوشه‌ای^{۱۶} نامیده می‌شود.

تعریف ۲۷.۲.۱. [۵] کوچکترین عدد صحیح k ، به‌طوری‌که گراف G ، k رنگ‌پذیر باشد عدد رنگی گراف نامیده می‌شود و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود.

یکی از کران‌های پایین بدیهی عدد رنگی گراف، عدد خوشه‌ای گراف است.

^{۱۴}transitive orientation

^{۱۵}Comparability graph

^{۱۶}clique number

تعریف ۲۸.۲.۱. [۵] در گراف $G = (V, E)$ ، اگر برای هر $A \subseteq V$ ، $\omega(G[A]) = \chi(G[A])$ ، آن را یک گراف تام^{۱۷} گویند. $G[A]$ یک زیر گراف القایی از زیر مجموعه $A \subseteq V$ است. گراف تام در سال ۱۹۶۰ توسط کلودبرگ^{۱۸} مطرح شد.

تعریف ۲۹.۲.۱. [۱] اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، گراف اشتراکی حاصل از $\mathcal{F}$ با در نظر گرفتن هر مجموعه از آن به عنوان راس گراف، دو راس یک یال را می‌سازند اگر و تنها اگر مجموعه‌های متناظرشان اشتراک ناتهی داشته باشند. مجموعه $\mathcal{F}$ را مدل اشتراکی از گراف $G = (V, E)$ گویند و همچنین برای مدل اشتراکی $\mathcal{F}$ از نماد $G(\mathcal{F})$ برای معرفی این گراف استفاده می‌شود. بسته به ماهیت و پیکربندی هندسی مجموعه‌های $S_1, S_2, \dots, S_n$ از $\mathcal{F}$ انواع مختلفی از گراف اشتراکی تعریف می‌شود. چند نوع از گراف‌های اشتراکی مفید در زیر آمده است.

- گراف‌های بازه‌ای^{۱۹} که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای شامل بازه‌های حقیقی است.
- گراف‌های کمان مدور^{۲۰} که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای شامل کمان روی یک دایره‌اند.
- گراف‌های جایگشتی^{۲۱} که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از بخشهای خطوط بین دو بخش خطوط است.
- گراف‌های دوزنقه‌ای^{۲۲} که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از چهارضلعی‌های غیر منتظم بین دو قسمت خطوط است.
- گراف‌های وتری^{۲۳} که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از زیرگراف‌های همبند از یک درخت است.
- گراف‌های دایره‌ای^{۲۴} که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از وترها در داخل یک دایره‌اند.

مثال ۳۰.۲.۱. [۱] می‌توان یک گراف اشتراکی دیگری را به صورت زیر تعریف کرد. فرض می‌شود که $\mathcal{F} = \{S_+, S_-, S_f, S_p, S_e, S_o\}$ که در آن

$$S_+ = \{1, 2, 3, \dots\}, S_- = \{-1, -2, -3, \dots\}, S_f = \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$$

$$S_p = \{2, 5, 7, \dots\}, S_e = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}, S_o = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

شکل ۳.۱ گراف اشتراکی متناظر با مجموعه‌های فوق است.

تعریف ۳۱.۲.۱. [۱] گراف $G = (V, E)$ را گراف بازه‌ای گویند هرگاه مجموعه رئوس V با مجموعه I شامل بازه‌های حقیقی در یک تناظر یک‌به‌یک باشد، بطوریکه دو راس در G مجاورند اگر و تنها اگر بازه‌های متناظرشان اشتراک ناتهی داشته باشند. به عبارت دیگر نگاشت دو سوی $f: V \rightarrow I$ وجود داشته باشد. مجموعه I را نمایش بازه‌ای از گراف G نامیده و G را گراف بازه‌ای از I نامیده می‌شود.

^{۱۷} perfect graph

^{۱۸} Claude Berge

^{۱۹} Interval graph

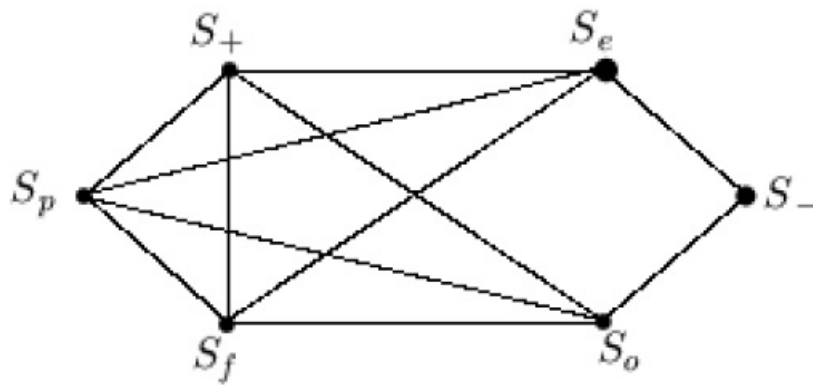
^{۲۰} Circular-arc graph

^{۲۱} Permutation graph

^{۲۲} Trapezoid graph

^{۲۳} Chordal graph

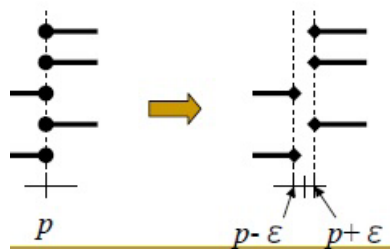
^{۲۴} Circle graph



شکل ۳.۱: گراف اشتراکی

قضیه ۳۲.۲.۱. فرض شود C_o و C_c و C_m رده‌ای از گراف‌های بازه‌ای باشند که به ترتیب شامل بازه‌های باز، بازه‌های بسته و نیم باز باشند. در این صورت $C_o = C_c = C_m$

برهان. کفایت ثابت شود: $C_o \subseteq C_c$ و $C_c \subseteq C_m$ و $C_o \subseteq C_c$. فرض شود L_o نمایش بازه‌ای از گراف بازه‌ای G باشد، بطوریکه L_o تنها شامل بازه‌های باز باشد. حال L_c را که شامل بازه‌های بسته می‌باشد، برای گراف G ساخته می‌شود. برای هر نقطه P که نقطه پایانی حداقل یک بازه است، بازه‌ها را مطابق شکل ۴.۱ به اندازه کافی کوچک ε اصلاح می‌شود. با تکرار این پروسه یک نمایش بازه‌ای بسته L_c از گراف G به دست می‌آید. $C_c \subseteq C_m$ بدیهی است و اثبات $C_m \subseteq C_o$ نیز مشابه اثبات قبل است.



شکل ۴.۱: متناظر بازه باز به بسته

□

ملاحظه ۳۳.۲.۱. برای هر گراف بازه‌ای می‌توان نمایش‌های بازه‌ای متفاوتی در نظر گرفت.

فصل ۲

قضایای اساسی از گراف بازه‌ای

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا چند ویژگی موروثی از گراف بازه‌ای بیان می‌شود و سپس در بخش‌های بعد مشخصه‌های گیلر-هافمن و فولکرسون-گراس و لکرکر-بولند و در نهایت روش تشخیص گراف بازه‌ای بیان می‌شود.

۲.۲ ویژگی گراف بازه‌ای

لم ۱.۲.۲. [۱] اگر G گراف بازه‌ای باشد، آنگاه $\chi(G) = \omega(G)$

برهان. ابتدا راس‌ها را به وسیله نقاط پایانی چپشان به ترتیب افزایشی نامگذاری کرده ۱.۲.۳ و رنگ‌آمیزی حریصانه را به کار می‌رود. فرض شود راس x رنگ k با اندیس ماکسیمم را دریافت می‌کند. چون x نمی‌تواند رنگ کوچک‌تری دریافت کند، نقطه پایانی سمت چپ a از بازه‌اش، به بازه‌هایی که از پیش دارای رنگ‌های ۱ تا $k - 1$ می‌باشد، متعلق است. این بازه‌ها همگی در نقطه a شریک‌اند. پس یک $k - 1$ خوشه داریم که از x و همسایه‌های x با رنگ‌های ۱ تا $k - 1$ تشکیل شده است. از این رو $\omega(G) \geq k \geq \chi(G)$. چون همواره $\chi(G) \geq \omega(G)$ ، لذا این رنگ‌آمیزی بهین است. $\square$

لم ۲.۲.۲. [۱] گراف‌های وتری، تام‌اند.

لم ۳.۲.۲. [۱] گراف‌های مقایسه‌پذیر، تام‌اند.

لم ۴.۲.۲. [۱] زیرگراف القایی از گراف بازه‌ای، گراف بازه‌ای است

برهان. اگر $\{I_v\}_{v \in V}$ نمایش بازه‌ای از گراف $G = (V, E)$ باشد در اینصورت $\{I_v\}_{v \in X}$ نمایش بازه‌ای برای زیرگراف القایی $G[X] = (X, E[X])$ است. $\square$

لم ۵.۲.۲. [۱] هر گراف بازه‌ای، گراف تام است.

لم ۶.۲.۲. [۱] هر گراف بازه‌ای، یک گراف وتری است.

برهان. فرض شود در گراف بازه‌ای G ، $v_0, v_1, \dots, v_l, v_0$ دوربی وتر باشد و I_k نمایش بازه‌ای متناظر با راس v_k باشد. برای $i = 1, 2, \dots, l-1$ نقاط P_i از $I_{i-1} \cap I_i$ انتخاب می‌شوند. چون $I_{i-1} \cap I_{i+1} = \emptyset$ ، P_i ها دنباله اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی تشکیل می‌دهند. بنابراین I_{l-1} و I_0 اشتراک دارند و این با این که (v_0, v_l) یک یالی از G است تناقض دارد. $\square$

عکس این لم درست نمی‌باشد. گراف‌های (b), (c), (d), (e) در شکل ۱.۲ گراف‌های وتری هستند که گراف بازه‌ای نیستند. در صورتیکه مکمل گراف وتری مقایسه‌پذیر باشد، آنگاه گراف، گراف بازه‌ای است. (مشخصه گیلر-هافمن ۱.۳.۲)

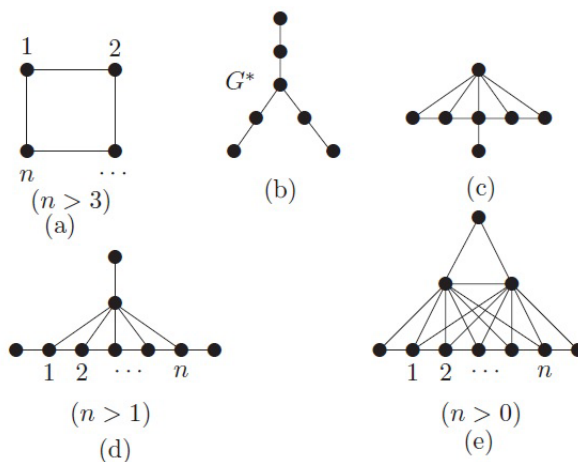
لم ۷.۲.۲. [۱] مکمل گراف بازه‌ای، گراف مقایسه‌پذیر است.

برهان. فرض شود که $\{I_v\}_{v \in V}$ نمایش بازه‌ای از گراف $G = (V, E)$ باشد. برای $\bar{G} = (V, \bar{E})$ مکمل گراف G جهت‌دهی F برای هر $(x, y) \in \bar{E}$ چنین تعریف می‌شود: $(x, y) \in F \Leftrightarrow I_x < I_y$ نماد $<$ بیان می‌کند که بازه I_x در سمت چپ بازه I_y واقع می‌شود.

$$(x, y) \in F \Rightarrow I_x < I_y$$

$$(y, z) \in F \Rightarrow I_y < I_z$$

و در نتیجه $I_x < I_z$ یعنی $(x, z) \in F$ بنابراین F جهت‌دهی تعدی از $\bar{G}$ است. $\square$



شکل ۱.۲: ساختار غیر مجاز از گراف بازه‌ای

۳.۲ مشخصه گیلمور-هافمن

قضیه زیر مشخصه گراف بازه‌ای از گیلمور-هافمن^۱ است.

قضیه ۱.۳.۲. [۱] درگراف غیر بی سو G گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

۱- گراف G بازه‌ای است.

۲- گراف G دور بی وتر به طول ۴ ندارد. و مکمل آن مقایسه‌پذیر است.

۳- خوشه‌های ماکسیمال از گراف G دارای یک ترتیب خطی اند به گونه‌ای که برای هر راس u از G خوشه‌های ماکسیمال شامل u متوالیا ظاهر می‌شوند.

برهان. اثبات ۱ به ۲: طبق لم ۷.۲.۲ برقرار است.

اثبات ۲ به ۳: برای اثبات این قسمت لازم است لم زیر ثابت شود.

لم ۲.۳.۲. فرض شود گراف $G = (V, E)$ شامل دور بی وتر به طول ۴ نباشد و F جهت‌دهی تعدی در $\bar{G}$ باشد. اگر A_1 و A_2 خوشه‌های ماکسیمال از G باشد، در این صورت:
الف) یالی در F وجود دارد بطوریکه یک راس یال در A_1 و راس دیگر در A_2 است.
ب) همه یالهای $\bar{E}$ از اتصال A_1 با A_2 دارای همان جهت‌دهی هستند.

برهان. اثبات الف) فرض شود یالی که یک راس آن در A_1 و راس دیگر آن در A_2 است وجود نداشته باشد. در این صورت $A_1 \cup A_2$ خوشه‌ای از G است که با ماکسیمال بودن A_1 و A_2 تناقض دارد.
اثبات ب) فرض شود همه یالهای $\bar{E}$ از اتصال A_1 به A_2 جهت‌دهی در F نداشته باشند. لذا فرض شود دو یال $(a, b) \in F$ و $(d, c) \in F$ وجود دارند بطوریکه $a, c \in A_1$ و $b, d \in A_2$.
اگر $a = c$ یا $b = d$ آنگاه بنا بر تعدی F ، $(d, b) \in F$ و این با فرض در تناقض است. بنابراین فرض می‌شود که a و b و c و d چهار راس متمایز از گراف باشند. (طبق شکل زیر).

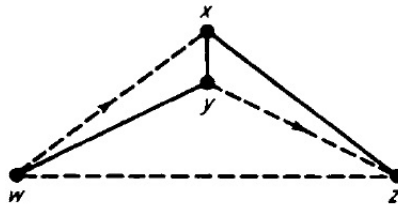


شکل ۲.۲: خط پیوسته معرف یال در E و خط چین معرف یال در $\bar{E}$ در جهت‌دهی F

طبق فرض E دور بی‌وتر ندارد، بنابراین (a, d) یا (b, c) در $\bar{E}$ اند. بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض شود $(a, d) \in F$. در نتیجه $(a, c) \in F$ و این با فرض تناقض دارد. به مشابه اگر $(d, a) \in F$ تناقض به دست می‌آید. □

^۱Gilmore and Hoffman [1964]

فرض شود مجموعه $\mathcal{C}$ خوشه‌های ماکسیمال از گراف G باشند. یک رابطه روی این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود: $A_1 < A_2$ اگر و تنها اگر یالی از F وجود داشته باشد از A_1 به A_2 (یعنی در جهت A_2). طبق لم ۲.۳.۲ یک تورنمنت روی این رابطه $\mathcal{C}$ تعریف می‌کند. ثابت می‌شود که $(\mathcal{C}, <)$ یک تورنمنت تعدی است و از این رو $\mathcal{C}$ را به صورت خطی مرتب می‌کند. برای این منظور فرض شود $A_1 < A_2$ و $A_2 < A_3$ بنابراین باید یال‌های $wx \in F$ و $yz \in F$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $w \in A_1$ و $x, y \in A_2$ و $z \in A_3$. اگر $xz \notin E$ یا $wy \notin E$ آن‌گاه $wz \in F$ و $A_1 < A_3$. بنابراین فرض شود که یال‌های wy و yx و xz همگی یال‌های E هستند. مطابق شکل ۳.۲



شکل ۳.۲: شرح قضیه

گراف G شامل دور بی وتری نیست و $wz \notin E$. لذا طبق تعدی F ، $wz \in F$ و لذا $A_1 < A_3$. پس تورنمنت تعدی^۲ ثابت شد.

فرض شود که $\mathcal{C}$ دارای ترتیب خطی $A_1, A_2, \dots, A_m$ بر اساس رابطه فوق باشد. یعنی:

$$i < j \iff A_i < A_j.$$

فرض شود خوشه‌های $A_i < A_j < A_k$ وجود داشته باشند بطوریکه $x \in A_i$ و $x \in A_k$ و $x \notin A_j$. چون $x \notin A_j$ یک راس $y \in A_j$ وجود دارد بطوریکه $(x, y) \notin E$. اما $A_i < A_j$ پس $(x, y) \in F$ و در حالیکه $A_j < A_k$ یعنی $(y, x) \in F$ و این تناقض است.

اثبات ۳ به ۱:

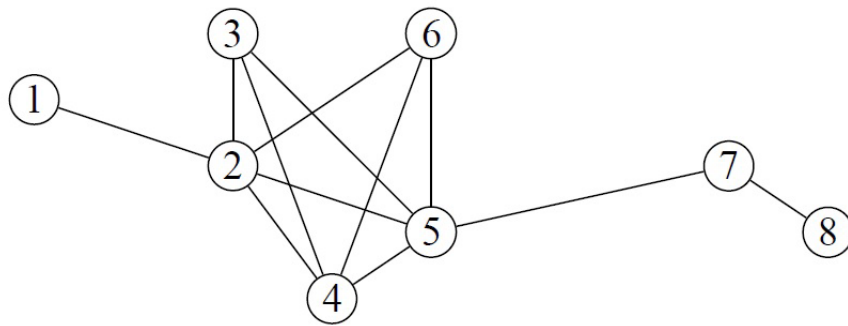
برای هر راس $x \in V$ ، مجموعه I_x را شامل همه خوشه‌های ماکسیمال از گراف G شامل راس x در نظر گرفته می‌شود. مجموعه‌های I_x برای هر $x \in V$ بازه‌هایی از مجموعه مرتب خطی $(\mathcal{C}, <)$ هستند.

$$(x, y) \in E \iff I_x \cap I_y \neq \emptyset \quad (x, y \in V)$$

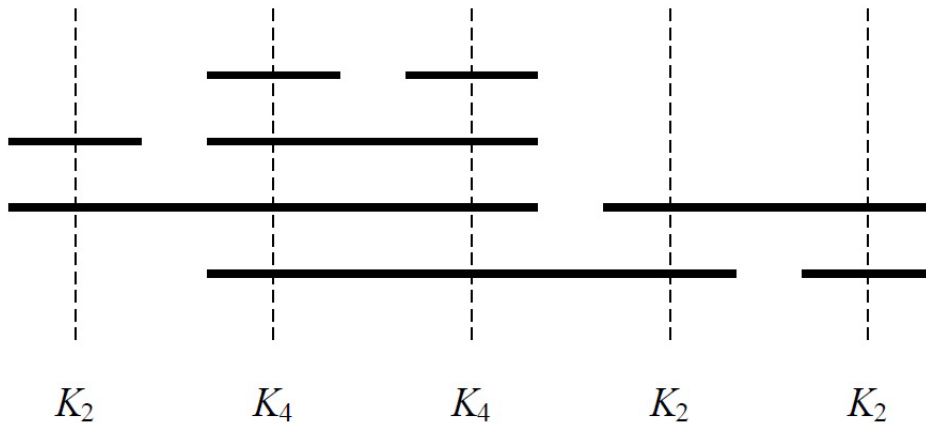
از آن‌جا که دو راس همبنداند اگر و تنها اگر آن‌ها در بعضی از خوشه‌های ماکسیمال موجود باشند، حکم ثابت است. $\square$

نتیجه ۳.۳.۲. [۱] گراف بی‌سوی G ، گراف بازه‌ای است اگر و تنها اگر گراف وتری باشد و مکمل آن $\bar{G}$ مقایسه‌پذیر باشد.

^۲ جهت‌دار کردن گراف کامل را یک تورنمنت گویند.



شکل ۴.۲: گراف بازه‌ای



شکل ۵.۲: خوشه‌های ماکسیمال از گراف شکل ۴.۲

مثال ۴.۳.۲. خوشه‌های ماکسیمال از گراف ۴.۲ در شکل ۵.۲ نشان داده شده است.

۴.۲ مشخصه فولکرسون-گراس

تعریف ۱.۴.۲. [۴] ماتریسی که درآیه‌های آن صفر و یک است را در نظر گرفته شود. در صورتیکه بتوان سطرهای این ماتریس را جابه‌جا کرد به گونه‌ای که در هر ستون، یک‌ها پشت سر هم قرار گیرند، ستون‌های این ماتریس را محدب گویند.^۳

تعریف ۲.۴.۲. ماتریس وقوعی که خوشه‌های ماکسیمال گراف به عنوان سطرهای ماتریس و رئوس گراف به عنوان ستون‌های ماتریس قرار گیرند، ماتریس خوشه‌ای گویند.

قضیه زیر مشخصه گراف بازه‌ای از فولکرسون و گراس^۴ است.

^۳Convex column

^۴Fulkerson and Gross [1965]

قضیه ۳.۴.۲. [۴] گراف بی‌سوی G یک گراف بازه‌ای است اگر و تنها اگر ستون‌های ماتریس خوشه‌ای آن محدب باشند.

برهان. فرض شود G گراف بی‌سو با ماتریس خوشه‌ای M باشد. یک ترتیب از خوشه‌های ماکسیمال با جایگشت ستون‌های M برابر است. این گزاره از قضیه مشخصه گیل‌مور-هافمن پیروی می‌کند. $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

شکل ۶.۲: ماتریس خوشه‌ای از گراف شکل ۴.۲

مثال ۴.۴.۲. ماتریس خوشه‌ای فوق، ستون‌هایش محدب است.

۵.۲ مشخصه لکرکر و بولند

قضیه زیر مشخصه لکرکر-بولند^۵ است.

قضیه ۱.۵.۲. [۲] گراف بی‌سو G بازه‌ای است اگر و تنها اگر در دو شرط زیر صدق کند: ۱- G یک گراف وت‌ری است. ۲- هر سه راس از G به گونه‌ای بتوان مرتب کرد که هر مسیر از اولین راس به سومین راس از یک همسایگی دومین راس بگذرد.

۶.۲ تشخیص گراف بازه‌ای

قضیه ۱.۶.۲. [۲] یک گراف، گراف بازه‌ای است اگر و تنها اگر هیچ یک از گراف‌های شکل ۱.۲، زیر گراف القائی آن نباشد.

نتیجه ۲.۶.۲. یک درخت گراف بازه‌ای است اگر و تنها اگر G^* در شکل ۱.۲ زیر گراف القائی آن نباشد.

برهان. از میان پنج ساختار غیر مجاز برای گراف بازه‌ای (۱.۲) یکی از آن‌ها می‌تواند یک زیر گراف القائی از درخت G^* باشد. $\square$

^۵Lekkerkerker and Boland [1962]

نتیجه ۳.۶.۲. یک درخت گراف کمان - مدور است اگر و تنها اگر آن گراف، گراف بازه‌ای باشد.

برهان. فرض شود که درخت G گراف کمان - مدور غیر بازه‌ای باشد طبق ۱.۶.۲ گراف G شامل G^* از شکل ۱.۲ می‌باشد. در حالیکه G^* گراف کمان مدور نمی‌باشد. همچنین گراف بازه‌ای زیررده‌ای از گراف کمان - مدور است. لذا عکس قضیه برقرار است. $\square$

۷.۲ کاربرد

مساله ۱

منوی غذا برای یک مهمانی شامل تعدادی از غذاهایی است که از پیش پخته شده اند. ظرف d باید در $m(d)$ دقیقه در درجه حرارت نه لزوماً ثابت بین $t_1(d)$ و $t_2(d)$ گرم شوند. متأسفانه تنها یک فر وجود دارد. چگونه می‌توان برای ظروف غذا برنامه‌ریزی کرد به گونه‌ای که زمان کل حداقل شود؟ فرض شود ظروف غذا، رئوس گراف باشند و در صورتی دو راس یک یال را می‌سازند که فاصله دمایی مشترک داشته باشند. بنابراین هرگز در یک زمان نمی‌توانند در فر باشند.

مساله ۲

در قسمت کشتی سازی قسمت‌هایی از کشتی در یک اسکله خشک به نام سطح جوش ساخته می‌شود. با توجه به یک برنامه زمانی تدوین شده هر بخش s در روی اسکله $W(s)$ طول ساخت دارد. آیا می‌توان بخش‌ها را طوری به سطح جوش به پهنای k اختصاص داد، بطوریکه هیچ مکانی برای دو بخش به طور همزمان استفاده نشود؟

فرض کنید که بخش‌ها، رئوس گراف و در صورتی دو راس یک یال را می‌سازند که، اگر بخش‌هایشان بازه زمانی متقاطع داشته باشند. بنابراین برنامه زمانی گراف بازه‌ای است.

مساله ۳

یک برنامه کامپیوتری مقادیر متغیرهایش را در حافظه ذخیره می‌کند. برای محاسبات حسابی مقادیر باید وارد ثباتها شوند. از طرفی به دلیل گران قیمت بودن ثباتها هدف استفاده بهتر از آنها است. در صورتیکه دو متغیر در یک زمان به کار نروند می‌توان آنها را به یک ثبات اختصاص داد. برای هر متغیر زمانی که از آن استفاده می‌شود، ابتدا و انتهای زمان محاسبه می‌شود. یک متغیر در طول این دو زمان فعال است. گرافی در نظر گرفته می‌شود که راس‌هایش متغیرها هستند و در صورتی دو راس به هم وصل می‌شوند، که در یک زمان مشترک، فعال باشند یعنی بازه زمانی مشترک داشته باشند. تعداد ثباتهای مورد نیاز عدد رنگی گراف است.

مساله ۴

فرض شود $c_1, c_2, \dots, c_n$ ترکیبات شیمیایی باشند که تحت شرایط خواص در یخچال نگه داری می‌شوند. اگر ترکیب شیمیایی c_j در دمای ثابت بین $[t_i, t_j]$ نگه داری شود، چقدر یخچال برای ذخیره سازی مواد شیمیایی لازم است؟

فرض شود گراف بازه‌ای با رئوس $c_1, c_2, \dots, c_n$ باشد. دو راس به هم وصل می‌شوند، اگر بازه دمایی متناظرشان اشتراک داشته باشند. این مساله پیدا کردن مینیم پوشش خوشه‌ای از گراف بازه‌ای است.

مساله ۵

در باستان شناسی تلاش برای قرار دادن مجموعه‌ای از آثار باستانی در ترتیب زمانی مناسبشان است. فلیندرس پتری^۶ باستان شناس معروف در حال مطالعه ۸۰۰ نوع سفال در ۹۰۰ قبر در مصر، این مساله را فرمول بندی کرد. این مساله مرتبط به گراف بازه‌ای و خاصیت محدب بودن ستون‌ها است. فرض شود yl مجموعه‌ای از آثاری باشد که در قبرهای مختلف کشف شده‌اند. هر اثر در یک بازه زمانی که ناشناخته است، در حال استفاده بوده است. برای هر قبر یک نقطه زمانی ناشناخته‌ای وجود دارد که آن اثر دفن شده است. هدف مساله شکل دادن به روابط زمان‌ها است. فرض شود M ماتریس وقوعی باشد که سطرهای آن قبرها و ستون‌های آن معرف آثار باشند. گرافی که رئوس آن آثار می‌باشند در نظر گرفته شود. دو راس در صورتی یک یال را می‌سازند که یک قبر مشترک داشته باشند.

^۶Flinders Petrie

فصل ۳

درخت بازه‌ای و کاربردهایش

۱.۳ مقدمه

فرض می‌شود گراف ساده و همبند $G = (V, E)$ ، که $|V| = n$ و $|E| = m$ گراف بازه‌ای با نمایش بازه‌ای $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ که $I_r = [a_r, b_r]$ باشد. در ابتدا رئوس این گراف بر اساس ترتیب IG نامگذاری می‌شوند. و سپس ساختار درخت فراگیر $T_I(G)$ و ویژگی‌های آن بیان و اثبات می‌شود. در بخش‌های بعد با استفاده از درخت فراگیر $T_I(G)$ به بررسی مسائل زیر از گراف بازه‌ای پرداخته می‌شود.

- ۱- ساخت درخت فراگیر $(T_s(G))$ از درخت بازه‌ای $T_I(G)$ و بیان و اثبات ویژگی‌های آن.
- ۲- بیان چند لم به منظور محاسبه کوتاهترین فاصله بین دو راس از گراف بازه‌ای با استفاده از سطح این دو راس در درخت بازه‌ای و در نهایت بیان الگوریتم آن.
- ۳- بیان چند لم دیگر به منظور رابطه بین قطر گراف بازه‌ای با ارتفاع درخت بازه‌ای و بیان الگوریتم آن. همچنین در یک قضیه ثابت می‌شود که قطر گراف بازه‌ای دو برابر شعاع آن است. همچنین در این قضیه مرکز گراف بازه‌ای بدون استفاده از شعاع محاسبه می‌شود.

۲.۳ درخت بازه‌ای

لم ۱.۲.۳ [۳] گراف $G = (V, E)$ با n راس یک گراف بازه‌ای است اگر و تنها اگر بتوان رئوس آن را از ۱ تا n به گونه‌ای شماره‌گذاری کرد که برای هر $i < j < k$ که $(i, k) \in E$ آن‌گاه $(j, k) \in E$.

برهان. فرض شود گراف داده شده گراف بازه‌ای باشد. و راس u_r متناظر با بازه $I_r = [a_r, b_r]$ باشد. بازه‌ها را به ترتیب کاهش تقاط پایانی راست b_r ها مرتب کرده و رئوس متناظر را از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. حال اگر برای هر $i < j < k$ که $(i, k) \in E$ به وضوح $(j, k) \in E$. بعکس فرض شود رئوس گراف تحت شرایط قضیه شماره‌گذاری شده باشند. کوچکترین عضو مجموعه $N[i]$ با $low(i)$ نشان داده می‌شد. در اینصورت چون $i \in N[i]$ پس $low(i) \leq i$. برای مجموعه

مرتب خطی $\{1, 2, \dots, n\}$ به هر راس با شماره i بازه $I_i = [low(i), i]$ متناظر گراف داده شده است. لذا گراف $G = (V, E)$ یک گراف بازه‌ای است. $\square$

نامگذاری رئوس مطابق قضیه ۱.۲.۳، ترتیب IG ^۱ نامیده می‌شود.

نتیجه ۲.۲.۳. اگر سه راس $V \ni u, v, w$ به صورت $u < v < w$ در ترتیب IG مرتب شده باشند و u مجاور w باشد آن‌گاه v با w مجاور است.

از این لم در الگوریتم‌های گراف بازه‌ای استفاده می‌شود.

گراف بازه‌ای ساده و همبند $G = (V, E)$ که $|V| = n$ و $|E| = m$ فرض شده است. و $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ نمایش بازه‌ای از گراف G باشد بطوریکه a_r نقطه پایانی چپ و b_r نقطه پایانی راست از بازه I_r باشد. به عبارت دیگر $I_r = [a_r, b_r]$ برای $r = 1, 2, \dots, n$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض می‌شود که:

(۱) بازه‌های مجموعه I بر اساس نقاط پایانی راست آن‌ها نامگذاری شده است. یعنی:

$$b_1 < b_2 < \dots < b_n$$

و رئوس آن، بر اساس ترتیب IG با اعداد ۱ و ۲ و ... و n نامگذاری شده است.

(۲) بازه‌ها بسته‌اند. یعنی هر دو نقطه پایانی شامل می‌شود و هیچ دو بازه‌ای نقطه پایانی مشترک ندارند.

(۳) رئوس گراف، با بازه‌های حقیقی متناظرند.

(۴) گراف بازه‌ای همبند است و لیست مرتب شده از نقاط پایانی آن داده شده است.

مثال ۳.۲.۳. در شکل ۱.۳ یک گراف بازه‌ای با نمایش بازه‌ای آن نشان داده شده است. رئوس این گراف مطابق ترتیب IG نامگذاری شده است.

تعریف ۴.۲.۳. برای هر راس $v \in V$ دو راس $H(v), L(v)$ را به ترتیب بیشترین و کمترین شماره راس مجاور v به صورت زیر تعریف می‌شود.

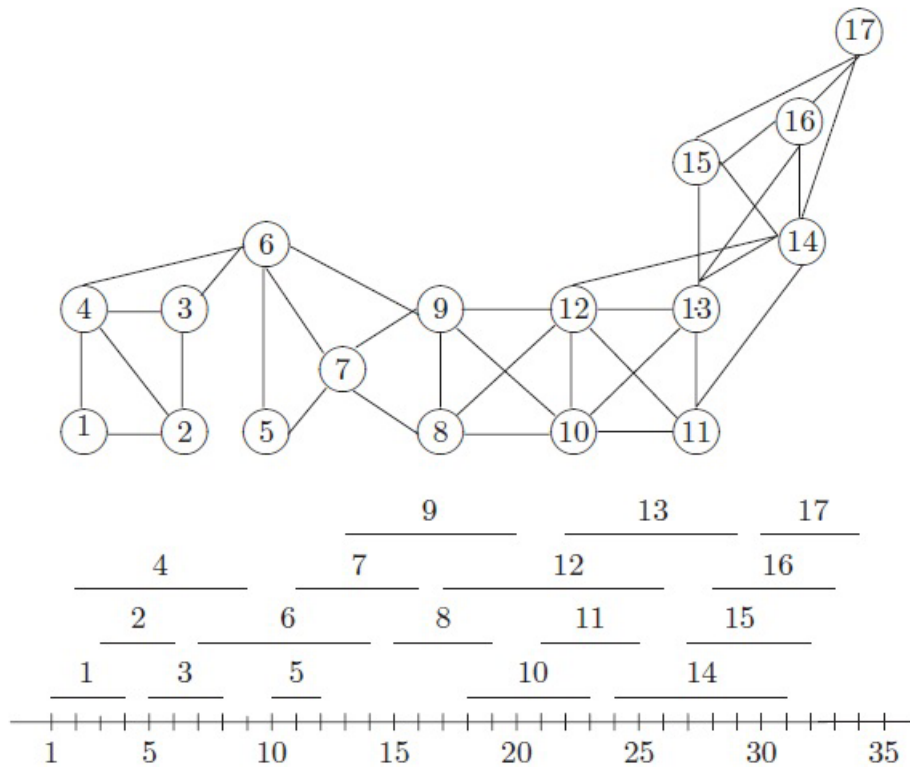
$$H(v) = \max\{u | (u, v) \in E, u \geq v\}, L(v) = \min\{u | (u, v) \in E, u \leq v\}. \quad (۱.۳)$$

فرض می‌شود که $(v, v) \in E$ همواره درست باشد. بنابراین اگر در ترتیب IG هیچ راسی مجاور v نباشد، آن‌گاه مقدار $H(v)$ و $L(v)$ برابر v در نظر گرفته می‌شود.

آرایه‌های $H(1, n)$ در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. درآیه‌های H به طور یکنواخت غیر نزولی است.

لم ۵.۲.۳. [۹] اگر برای $u, v \in V$ و $u < v$ آن‌گاه $H(u) \leq H(v)$.

^۱Interval tree



شکل ۱.۳: گراف بازه‌ای و نمایش بازه‌ای آن

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$H(v)$	4	4	6	6	7	9	9	12	12	13	14	14	16	17	17	17	17

شکل ۲.۳: $H(1, n)$

برهان. اگر برای هر $u < v < H(u) > H(v)$ طبق تعریف $H(v)$ ، $v \leq H(v)$ پس $u < v < H(v) < H(u)$ و در نتیجه $u < v < H(u)$ از طرفی $(u, H(u)) \in E$ لذا طبق ۲.۲.۳، $(v, H(u)) \in E$ و لذا $H(u) = H(v)$ و این با فرض مساله تناقض دارد. بنابراین $H(u) \leq H(v)$. $\square$

فرض شود $E' = \{(u, v) : u \in V, v = H(u), u \neq n\}$. برای گراف بازه‌ای G زیر گراف فراگیر $G' = (V, E')$ در نظر گرفته شود. در لم زیر ثابت می‌شود G' یک درخت است که برای هر نمایش بازه‌ای داده شده منحصر به فرد است.

لم ۶.۲.۳. [۹] زیر گراف G' برای گراف بازه‌ای همبند G درخت است.

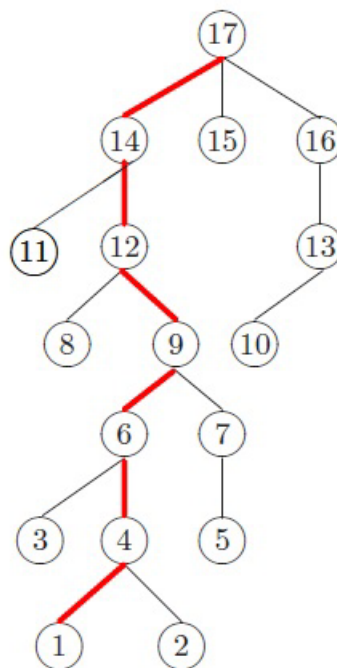
برهان. G' زیر گراف فراگیر است پس n راس و $n - 1$ یال است. ثابت می‌شود G' فاقد دور است. طبق تعریف ۴.۲.۳ $v \leq H(v)$ ثابت می‌شود G' طوقه ندارد. یعنی $v \neq H(v)$ حال اگر $v = H(v)$

و $u \in V$ بطوریکه $u < v$ لذا طبق ۲.۳ پس $H(u) < H(v)$ و طبق فرض خلف $H(u) < v$ پس u مجاور راسی که از v بزرگتر است نمی‌باشد. از طرفی $v = H(v)$ پس راس v هم مجاور راسی که بزرگتر از v است نمی‌باشد. بنابراین زیرگرافهای $\{1, 2, \dots, v\}, \{v+1, v+2, \dots, n\}$ ناهمبند لذا G' ناهمبند است. و این تناقض است. $\square$

زیرگراف فراگیر G' شامل رئوس V و یالهای $E' \subseteq E$ یک درخت فراگیر است و آن را درخت بازه‌ای می‌نامند و با $T_I(G)$ نشان داده می‌شود. در لم زیر ثابت می‌شود $T_I(G)$ منحصر به فرد است.

لم ۷.۲.۳. [۹] درخت بازه‌ای $T_I(G)$ از گراف همبند بازه‌ای G برا هر نمایش بازه‌ای وجود دارد و منحصر به فرد است.

برهان. طبق تعریف درخت بازه‌ای و اثبات ۶.۲.۳ درخت $T_I(G)$ وجود دارد. از آنجا که ترتیب IG از رئوس V منحصر به فرد است لذا $H(v)$ و در نتیجه درخت $T_I(G)$ برای هر نمایش بازه‌ای منحصر به فرد است. $\square$



شکل ۳.۳: درخت بازه‌ای از گراف شکل ۱.۳

تعریف ۸.۲.۳. [۱۰] سطح راس u از درخت بازه‌ای با $level(u)$ نشان داده می‌شود. حال برای هر u از درخت بازه‌ای $T_I(G)$ ، $level(u)$ را فاصله u از راس n در درخت بازه‌ای در نظر گرفته می‌شود. یعنی $level_I(u) = d(u, n)$

تعریف ۹.۲.۳. [۱۰] مجموعه N_i رئوسی است که به فاصله i از راس n قرار دارند. به عبارت دیگر مجموعه رئوس در سطح i را با N_i نشان داده می‌شود. یعنی $N_i = \{u : d(u, n) = i\}$. واضح است که : $N_\circ = \{u : d(u, n) = \circ\} = \{n\}$

اگر $u \in N_i$ بنابراین $d(u, n) = i$ و $level(u) = i$. یعنی u در سطح i از IT (درخت بازه‌ای) قرار دارد. بنابراین مجموعه $N_i \in$ شامل رئوسی است که در سطح i ام از درخت بازه‌ای قرار دارد. همچنین اگر k ماکزیم طول کوتاهترین مسیر از راس n به رئوس دیگر G باشد در اینصورت $N_k \neq \emptyset$ و $N_{k+1} = \emptyset$. شکل ۳.۳

۳.۳. خصوصیات درخت بازه‌ای

فرض می‌شود که $max(N_i) = max\{u : u \in N_i\}$ و $min(N_i) = min\{u : u \in N_i\}$

لم ۱.۳.۳. [۹] رئوس N_i اعداد صحیح متوالی اند و به ازای هر i ، $max(N_{i+1}) = min(N_i) - 1$.
برهان. اثبات به استقرا روی i طبق تعریف ۴.۲.۳، $N_1 = \{L(n), L(n) + 1, \dots, n - 1\}$ بنابراین حکم برای $i = 1$ برقرار است. حال فرض می‌شود حکم برای $i = k$ برقرار باشد. یعنی رئوس N_k ، اعداد صحیح متوالی اند و $max(N_{k+1}) = min(N_k) - 1$. طبق تعریف درخت بازه‌ای اگر $u \in N_{k+1}$ آنگاه u در سطح $k + 1$ است و لذا بنا بر ۴.۲.۳، $H(u) \in N_k$ ، یعنی $H(u)$ در سطح k قرار می‌گیرد. اگر $v = min(N_{k+1})$ ، بنا بر ۲.۲.۳، $v, v + 1, \dots, max N_{k+1}$ و همچنین $max N_{k+1} + 1, max N_{k+1} + 2, \dots, H(v) - 1$ همگی مجاور $H(v)$ اند. از آنجاییکه $max N_{k+1}$ ، ماکزیم مجموعه N_{k+1} است، بنابراین $v, v + 1, \dots, max(N_{k+1}) \in N_{k+1}$ لذا رئوس N_{k+1} اعداد متوالی اند. و چون v مینیمم N_{k+1} است، پس $v - 1 \notin N_{k+1}$. اما $v - 1 \in N_{k+2}$ یعنی حکم برای $i = k + 1$ زمانیکه برای $i = 1$ برقرار است، درست است. $\square$

به این ترتیب لم زیر نتیجه می‌شود.

لم ۲.۳.۳. [۹] اگر $level_I(u) < level_I(v)$ در اینصورت: $u > v$

تعریف ۳.۳.۳. ارتفاع درخت T به صورت زیر است:

$$h(T) = max\{level(v) : v \in V\}.$$

بیشترین مقدار $level(v)$ ، $h(T_I(G))$ و کمترین مقدار $level(v)$ در $v = n$ اتفاق می‌افتد و برابر صفر است. اما اگر $v = n$ در اینصورت $d(u, n) = level(u) < h(T_I(G))$ بنابراین $d(u, v)$ ماکزیم می‌شود، در صورتیکه $level(v) = 1$ و $level(u) = h(T_I(G))$ و ماکزیم فاصله $h(T_I(G)) + 1$ است. به این ترتیب لم زیر نتیجه می‌شود.

لم ۴.۳.۳. [۹] $h(T_I(G)) = level(1)$ و $level(n) = 0$.

تعریف ۵.۳.۳. از لم ۴.۳.۳ نتیجه می‌شود که بزرگترین مسیر در درخت بازه‌ای $T_I(G)$ مسیر $1 - n$ است که آن را مسیر اصلی می‌نامند. یادآوری می‌شود که کوتاهترین فاصله بین دو راس u و v در G با $d(u, v)$ نشان داده می‌شود. در شکل ۳.۳ مسیر قرمز مسیر اصلی در درخت بازه‌ای است.

لم ۶.۳.۳. [۹] برای هر $u, v \in V$ که $level(u) = level(v)$ آن‌گاه

$$d(u, v) = \begin{cases} 1 & (u, v) \in E \\ 2 & o.w. \end{cases}$$

برهان. اگر بین دو راس u و v یال باشد در اینصورت $d(u, v) = 1$. در غیر اینصورت بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض می‌شود که $u < v$ و $level(u) = level(v)$ بنا بر ۱.۳، $(u, H(u)) \in E$ و چون $u < v < H(u)$ طبق ۲.۲.۳ $(v, H(u)) \in E$ لذا مسیر $u \rightarrow H(u) \rightarrow v$ وجود دارد. پس $d(u, v) = 2$. اگر $v < u$ به مشابه $d(u, v) = 2$. $\square$

مثال ۷.۳.۳. در درخت بازه‌ای ممکن است $d_{T_I(G)}(u, v)$ برابر ۱ یا ۲ نشود. مثلاً در ۳.۳ $level(8) = level(10)$ در حالیکه $d_{T_I(G)}(u, v) = 6$.

اگر راس v در سطح j باشد، آن‌گاه با رئوسی که در سطح j و $j - 1$ و $j + 1$ در G مجاورند. این گزاره در لم زیر ثابت می‌شود.

لم ۸.۳.۳. [۹] برای هر $u, v \in V$ که $|level(v) - level(u)| > 1$ آن‌گاه $(u, v) \notin E$.

برهان. نماد $u \rightarrow^* v$ یعنی مسیر u به v به طول بزرگتر از ۱ و $u \rightarrow v$ یعنی مسیر به طول ۱. در ابتدا فرض شود که $level(v) - level(u) > 1$. مسیر v به n به صورت $v \rightarrow H(v) \rightarrow^* n$ فرض شود. پس $level(H(v)) = level(v) - 1 > level(u)$. لذا طبق لم ۲.۳.۳، $H(v) < u$. حال اگر $(u, v) \in E(G)$ (فرض خلف)، چون $H(v) < u$ پس $H(v) = u$ و این یعنی $level(H(v)) = level(v)$ و این با فرض در تناقض است. در حالتیکه $level(v) - level(u) < -1$ اثبات به مشابه است. $\square$

فرض شود u_l راسی در سطح l و u_l^* راسی در همان سطح و روی مسیر اصلی باشد. همچنین X_l یک مجموعه شامل رئوسی از درخت بازه‌ای در سطح l باشد که از u_l^* بزرگتر است. و Y_l مجموعه‌ای از رئوس درخت بازه‌ای در سطح l باشد که از u_l^* کمتر است. یعنی:

$$X_l = \{v : v > u_l^*, v \in N_l\}$$

$$Y_l = \{v : v < u_l^*, v \in N_l\}$$

توجه شود که $X_l \cap Y_l = \emptyset$ و $X_l \cup Y_l \cup \{u_l^*\} = N_l$ و همچنین بنا بر لم ۱.۳.۳ رئوس N_l اعداد صحیح متوالی می‌باشد. در نتیجه رئوس X_l و Y_l نیز اعداد صحیح متوالی می‌باشند.

لم ۹.۳.۳. [۱۰] اگر v عضوی از X_{l+i} باشد آن‌گاه $d(v, u_l^*) \leq 2$.

برهان. سه حالت زیر را در نظر گرفته می‌شود.

(۱) برای هر $v \in X_l$ طبق ۶.۳.۳، $d(v, u_l^*) \leq 2$.

(۲) فرض شود v_1 راسی از X_{l+2} باشد، بنابراین طبق تعریف X_l ، $u_{l+2}^* < v_1 < u_{l+1}^*$. چون $(u_{l+2}^*, u_{l+1}^*) \in E$ طبق ۲.۲.۳، $(v_1, u_{l+1}^*) \in E$ بنابراین $u_l^* \rightarrow u_{l+1}^* \rightarrow v_1$

و در نتیجه $d(v_1, u_l^*) = 2$.

(۳) اگر v_2 راسی از X_{l+1} باشد آن‌گاه طبق تعریف X_l ، $u_{l+1}^* < v_2 < u_l^*$. چون $(u_{l+1}^*, u_l^*) \in E$ طبق ۲.۲.۳، $(v_2, u_l^*) \in E$ بنابراین $d(v_2, u_l^*) = 1$. لذا حکم در سه حالت برقرار است. $\square$

لم ۱۰.۳.۳. [۱۰] اگر v عضوی از Y_{l+i} باشد آن‌گاه $d(v, u_l^*) \leq 2$ یا $d(v, u_{l+3}^*) \leq 2$.

برهان. فرض شود t_1 و t_2 به ترتیب دو راس از Y_{l+1} و Y_{l+2} باشند. همچنین فرض شود که u_l' راسی در سطح l باشد. دو حالت به وجود می‌آید:

(۱) $u_l' = u_l^*$ که در این حالت $d(t_1, u_l^*) = 2$ و $d(t_2, u_l^*) = 1$ همچنین برای هر $v \in Y_l$ بنا به ۶.۳.۳ $d(v, u_l^*) \leq 2$ لذا حکم برقرار است. (۲) $u_l' \neq u_l^*$. بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض شود که $parent(t_2) = u_l'$ و $parent(t_1) = t_2$. چون $parent(t_1) = t_2 < u_{l+1}^*$ لذا $H(t_1) = t_2$ و $(t_1, u_{l+1}^*) \notin E$ به مشابه $H(t_2) = u_l' < u_l^*$ و لذا $(t_2, u_l^*) \notin E$ بنابراین $d(t_1, u_l^*) = 3$ یا $d(t_2, u_l^*) = 2$ پس $(u_l^*) \rightarrow u_{l+1}^* \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ یا $(u_l^*) \rightarrow u_l' \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$ حال $(u_{l+3}^*, u_{l+2}^*) \in E$ و $u_{l+3}^* < t_1 < u_{l+2}^* < t_2$ در نتیجه $(t_1, t_2) \in E$ و $(t_1, u_{l+2}^*) \in E$ بنابراین $(u_{l+2}^*, t_2) \in E$. بنا براین $d(u_{l+3}^*, t_1) \leq 2$ و $d(u_{l+3}^*, t_2) \leq 2$ و حکم ثابت است. $\square$

۴.۳ کاربردهای درخت بازه‌ای

۱.۴.۳ مساله درخت ۳- فراگیر

تعریف ۱.۴.۳. [۵] یک t -فراگیر از گراف G ، یک زیر گراف فراگیر H است بطوریکه فاصله بین هر جفت از رئوس، حداکثر t برابر فاصله‌ها در G باشد. به عبارت دیگر برای هر $u, v \in V$ ، $d_H(u, v) \leq t \cdot d_G(u, v)$ پارامتر t را که یک عدد صحیح و $t \geq 1$ است، فاکتور انبساطی^۲ گویند. درخت t -فراگیر اولین بار توسط پلک^۳ و اولمن^۴ در ارتباط با طراحی سینکرونایزر که یک فن‌آوری شبیه‌سازی است، معرفی شد. درخت t -فراگیر کاربردهای بسیاری در شبکه و سیستم های توزیعی

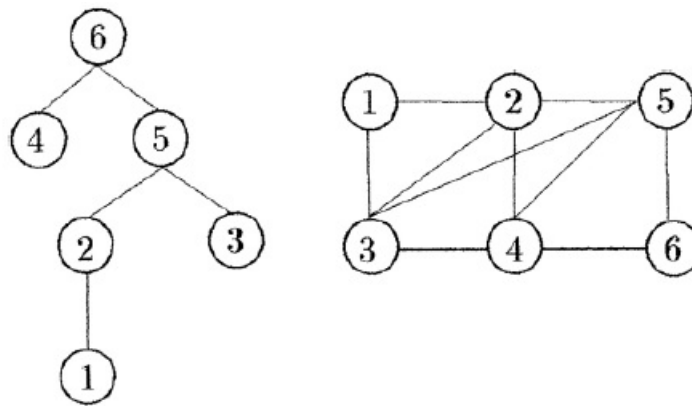
^۲stretch

^۳Peleg

^۴Ullman

دارد. از دیگر کاربردهای آن در زیست‌شناسی محاسباتی در فرآیند بازسازی درخت فیلوژنتیک می‌توان اشاره کرد.

زیرگراف فراگیر H ، t -فراگیر مینیمم^۵ نامیده می‌شود و با $H_t(G)$ نشان داده می‌شود. مساله مینیم t فراگیر دارای دو نوع تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی است. در نوع اول برای گراف $G = (V, E)$ و $k \geq 0$ داده شده، بررسی می‌شود که آیا این گراف دارای t -فراگیری با شرط $|E(H_t(G))| \leq k$ می‌باشد؟ و در نوع دوم برای گراف $G = (V, E)$ هدف پیدا کردن t -فراگیر با کمترین یال ممکن برای مقدار ثابت t است. در این قسمت این مساله از نوع بهینه‌سازی بررسی می‌شود. هدف پیدا کردن ۳-فراگیر از زیرگراف فراگیر H است با کمترین یالهای ممکن برای مقدار ثابت t .



شکل ۴.۳: گراف بازه‌ای و درخت بازه‌ای آن که درخت ۳-فراگیر نیز می‌باشد

۲.۴.۳ روش ساخت درخت ۳-فراگیر از درخت بازه‌ای

مثال ۲.۴.۳. در حالت کلی درخت بازه‌ای، درخت ۳-فراگیر نمی‌باشد.

در شکل ۴.۳ گراف بازه‌ای و درخت بازه‌ای آن که درخت ۳-فراگیر می‌باشد، نشان داده شده است. در حالیکه درخت بازه‌ای ۳.۳ حاصل از گراف بازه‌ای ۱.۳، ۳-فراگیر نمی‌باشد.

[۱۱] درخت ۳-فراگیر $(T_{3s}(G))$ از گراف G از درخت بازه‌ای با تجدید آرایش والد^۶ بعضی از رئوس ساخته می‌شود. این روش به صورت زیر است.

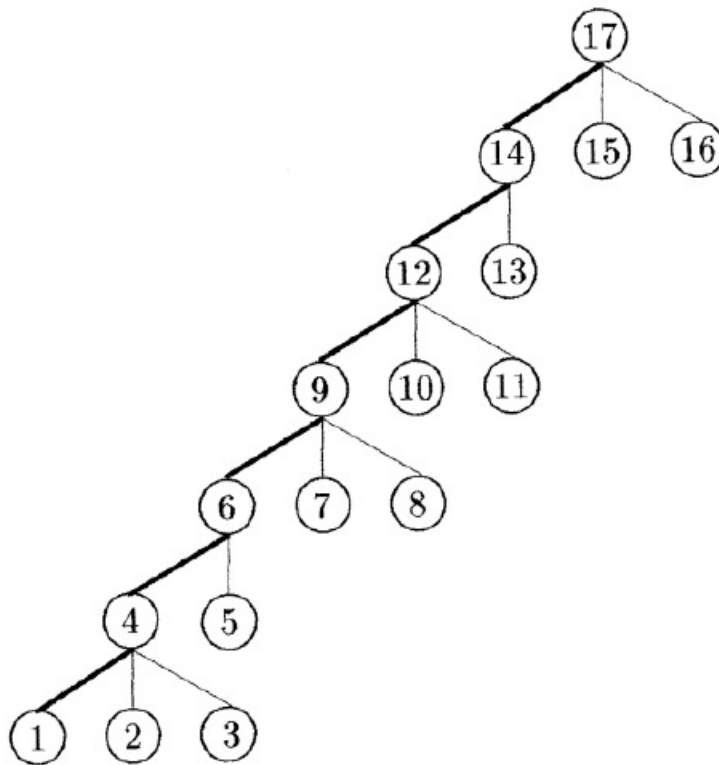
فرض شود w_l^* و w_{l+1}^* دو راس روی مسیر اصلی در سطح l و $l+1$ باشند. سپس والد هر راس u که در نامساوی $w_l^* < u < w_{l+1}^*$ صدق می‌کند را به عنوان w_l^* جایگزین می‌کنیم. یعنی

^۵minimum t-spanner

^۶parent

$parent_I(u) = w_l^*$ که $parent_I(u)$ والد راس u در درخت بازه‌ای $T_I(G)$ است. این پروسه برای همه راس‌ها در سطوح $l = 1, 2, \dots, h(T_I(G)) - 1$ تکرار می‌شود. به عبارت دیگر اگر $N_{l+1} = \{y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, w_{l+1}^*, y_{j+1}, \dots, y_q\}$ و $N_l = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, w_l^*, x_{i+1}, \dots, x_p\}$ که $q = |N_{l+1}|$ و $p = |N_l|$ والد آن‌گاه $q = |N_{l+1}|$ و $p = |N_l|$ راس w_l^* می‌باشد. اگر $N_l' = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ آن‌گاه $p = |N_l|$ که $N_l = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, w_l^*, x_{i+1}, \dots, x_p\}$ و $N_l'' = \{x_{i+1}, \dots, x_p\}$ یعنی N_l' زیرمجموعه‌ای از N_l است که رئوس کمتر از w_l^* و N_l'' زیرمجموعه‌ای از رئوس بیشتر از w_l^* می‌باشند.

مجموعه رئوس در سطح l از درخت $(T_{\mathcal{P}_s}(G))$ با N_l^* نمایش داده می‌شود. لذا از ساخت $T_{\mathcal{P}_s}(G)$ رابطه $N_{l+1}^* = \{w_{l+1}^*\} \cup N_l' \cup N_{l+1}''$ برای $l = 1, 2, \dots, h(T_I(G)) - 1$ نتیجه می‌شود.



شکل ۵.۳: $T_{\mathcal{P}_s}(G)$ از درخت بازه‌ای ۳.۳

مثال ۳.۴.۳. در شکل ۵.۳ درخت t -فراگیر از گراف بازه‌ای شکل ۳.۳ نشان داده شده است.

لم ۴.۴.۳. [۱۱] اگر w_l^* و w_{l+1}^* دو راس روی مسیر اصلی در سطح l و $l+1$ باشد، آن‌گاه $(w_l^*, w_{l+1}^*) \in E(G)$.

برهان. رئوس روی مسیر اصلی $T_I(G)$ و $T_{\mathcal{P}_s}(G)$ در طول ساخت بدون تغییر باقی می‌مانند. دوباره

والد هر راس u از $T_I(G)$ ، $H(u)$ است. و $(u, H(u)) \in E(G)$ پس $H(w_{l+1}^*) = w_l^*$. بنابراین (w_{l+1}^*, w_l^*) یالی از G است. $\square$

لم ۵.۴.۳. [۱۱] اگر w_{l+1}^* و w_l^* دو راس روی مسیر اصلی در سطح l و $l+1$ باشد و u راسی باشد که $w_{l+1}^* < u < w_l^*$ آنگاه (u, w_l^*) یک یالی در G و همینطور در $T_{\mathfrak{s}}(G)$ است.

برهان. بنا به لم ۴.۴.۳ و ۲.۲.۳، $(u, w_l^*) \in E(G)$. همچنین طبق ساخت $T_{\mathfrak{s}}(G)$ ، (u, w_l^*) یالی از $T_{\mathfrak{s}}(G)$ است. $\square$

بنابه لم ۵.۴.۳ همه رئوس بین w_{l+1}^* و w_l^* مجاور w_l^* می باشند. سطح راس u از $T_{\mathfrak{s}}(G)$ با $level_s(u)$ نشان داده می شود. رئوس $T_{\mathfrak{s}}(G)$ در سطح $l+1$ با w_l^* مجاورند.

لم ۶.۴.۳. [۱۱] اگر $u, v \in V$ و $level_s(u) = level_s(v) = 2$ آنگاه $d_{T_{\mathfrak{s}}(G)}(u, v) = 2$.

برهان. فرض شود $level_s(u) = level_s(v) = l$ طبق ۵.۴.۳، (u, w_{l-1}^*) و (v, w_{l-1}^*) دو یال مجاور از $T_{\mathfrak{s}}(G)$ می باشد. بنابراین تنها یک مسیر $v \rightarrow w_{l-1}^* \rightarrow u$ به طول ۲ وجود دارد. $\square$

لم ۷.۴.۳. [۱۱] اگر $|level_s(u) - level_s(v)| > 1$ برای هر u, v از $T_{\mathfrak{s}}(G)$ آنگاه $(u, v) \notin E(G)$.

لم ۸.۴.۳. [۱۱] اگر برای هر u, v ، $|level_s(u) - level_s(v)| \leq 1$ آنگاه $2 \leq d_{T_{\mathfrak{s}}(G)}(u, v)$.

برهان. حالت اول: $|level_s(u) - level_s(v)| = 0$ بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض شود که $level_s(u) = level_s(v) = l$. در اینصورت مسیر $u \rightarrow w_{l-1}^* \rightarrow v$ بین دو راس u و v به طول ۲ وجود دارد. در نتیجه $2 = T_{\mathfrak{s}}(G)$.
حالت دوم: $|level_s(u) - level_s(v)| = 1$
اگر $level_s(v) = l$ در اینصورت $level_s(u) = l+1$. بنابراین مسیر $u \rightarrow w_l^* \rightarrow w_{l-1}^* \rightarrow v$ به طول ۳ بین دو راس u و v وجود دارد. لذا $3 = T_{\mathfrak{s}}(G)$. $\square$

لم ۹.۴.۳. [۱۱] درخت $T_{\mathfrak{s}}(G)$ یک درخت ۳-فراگیر از گراف بازهای G است.

برهان. از دو لم ۷.۴.۳ و ۸.۴.۳ حکم نتیجه می شود. $\square$

قضیه ۱۰.۴.۳. [۱۱] هر گراف بازهای یک درخت ۳-فراگیر واحد برای هر نمایش بازهای دارد.

برهان. طبق ۶.۲.۳ درخت بازهای برای هر نمایش بازهای از گراف بازهای وجود دارد و منحصر به فرد است. درخت t -فراگیر $T_{\mathfrak{s}}(G)$ با تغییر والد رئوس درخت بازهای ساخته شد. لذا حکم برقرار است. $\square$

نتیجه ۱۱.۴.۳. در [۱۱] یک الگوریتم از مرتبه $O(n)$ برای آرایه‌های $H(1, n)$ معرفی شده است. با استفاده از این الگوریتم و روش ساخت درخت ۳-فراگیر از درخت بازه‌ای بیان شده در این بخش الگوریتم زیر مطرح می‌شود.

داده ورودی: نمایش بازه‌ای I از گراف بازه‌ای

داده خروجی: درخت ۳-فراگیر $T_{3s}(G)$

مرحله (۱) آرایه‌های $H(1, n)$ از نمایش بازه‌ای I

مرحله (۲) ساخت درخت بازه‌ای با استفاده از آرایه‌های $H(1, n)$

مرحله (۳) ساخت درخت ۳-فراگیر با استفاده از ۲.۴.۳

۳.۴.۳ کوتاهترین مسیر

طبق لم ۶.۳.۳ کوتاهترین مسیر بین دو راس u و v که $level(u) = level(v)$ برابر با ۱ یا ۲ است. در غیر اینصورت ممکن است از این دو مقدار بیشتر شود. در این قسمت هدف محاسبه کوتاهترین مسیر بین دو راس دلخواه با استفاده از درخت بازه‌ای است. برای محاسبه فاصله بین دو راس u و v که $u < v$ طبق لم ۸.۳.۳، رئوس مجاور با u در سطوح $level(v) + 1$ و $level(v) - 1$ بررسی می‌شود. با استفاده از این قضیه می‌توان فاصله بین هر دو راس $u, v \in V$ را با استفاده از لم زیر محاسبه کرد.

لم ۱۲.۴.۳. [۹] برای دو راس داده شده $u, v \in V$ ، فرض شود z_1 راسی در سطح $level(v) + 1$ روی مسیر اصلی $u - n$ باشد و $z_2 = H(z_1)$. اگر $level(u) > level(v)$ آن‌گاه:

$$d(u, v) = \begin{cases} level(u) - level(v) & (z_1, v) \in E \\ level(u) - level(v) + 1 & (z_1, v) \notin E, (z_2, v) \in E \\ level(u) - level(v) + 2 & o.w \end{cases}$$

برهان. فرض شود $z_2 = H(v)$ و $z_3 = H(z_2)$. در اینصورت $level(z_1) = level(v) + 1$ و $level(z_2) = level(v)$ و $level(z_3) = level(v) - 1$ و $level(z_4) = level(v) - 1$. اگر $v = n$ آن‌گاه رئوس z_3 و z_4 وجود ندارند. واضح است، اگر دو راس u و v روی مسیر اصلی از درخت بازه‌ای قرار بگیرند، آن‌گاه $d(u, v) = level(u) - level(v)$.
حالت اول:

اگر $(z_1, v) \in E$ آن‌گاه مسیر $u \rightarrow^* z_1 \rightarrow v$ وجود دارد.

و $d(u, v) = level(u) - (level(v) - 1) + 1 = level(u) - level(v)$

حالت دوم:

اگر $(z_1, v) \notin E, (z_2, v) \in E$ آن‌گاه مسیر $u \rightarrow^* z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow v$ وجود دارد.

و $d(u, v) = level(u) - (level(v) + 1) + 2 = level(u) - level(v) + 1$ حالت سوم:

اگر $(z_1, v) \notin E, (z_2, v) \notin E$

۱- اگر $v > z_2$ در اینصورت از آنجا که $z_2 < v < z_3$ و $(z_2, z_3) \in E$ پس بنا به ۲.۲.۳ ، $(v, z_3) \in E$ لذا مسیر $u \rightarrow^* z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow v$ وجود دارد.

۲- اگر $v < z_2$ ، چون $v < z_2 < z_4$ و $(v, z_4) \in E$ طبق ۲.۲.۳ ، $(z_2, z_4) \in E$. در نتیجه در هر دو حالت $d(u, v) = level(u) - (level(v) - 1) + 3 = level(u) - level(v) + 2$

از طرفی راس v تنها مجاور رئوس $level(v) + 1$ و $level(v)$ و $level(v) - 1$ قرار دارد. لذا حالت دیگری وجود ندارد. $\square$

نتیجه ۱۳.۴.۳. [۹] اگر $level(u) - level(v)$ ماکزیمم شود، آنگاه $d(u, v)$ ماکزیمم می‌شود. ماکزیمم $level(u)$ ، h و مینیمم $level(v)$ در راس $v = n$ اتفاق می‌افتد و برابر صفر است. بنابراین:

$$d(u, n) = level(u) \leq h$$

و در نتیجه اگر $level(u) = h, level(v) = 1$ آنگاه $d(u, v)$ ماکزیمم می‌شود. و مقدار ماکزیمم $h + 1$ است.

نتیجه ۱۴.۴.۳. الگوریتم فاصله

[۹]. با استفاده از لم فوق کوتاهترین فاصله بین دو راس گراف بازه‌ای از الگوریتم زیر محاسبه می‌شود

ورودی: دو راس $s, t (s < t)$ و $(u, H(u))$.

خروجی: $d(s, t)$.

۱- $level(s), level(t)$ محاسبه شود.

۲- z_1, z_2 محاسبه شوند. (z_1 راسی در سطح $level_I(t) + 1$ روی مسیر s به n و $z_2 = H(z_1)$).

۳- طبق ۱۲.۴.۳ ، $d(s, t)$ محاسبه شود.

قضیه ۱۵.۴.۳. [۹] همه کوتاهترین فاصله‌ها از گراف بازه‌ای با n راس، از مرتبه $O(\frac{n^2}{p} + \log n)$ با استفاده از پردازشگر p روی یک EREWPRAM به دست می‌آید.

۴.۴.۳ محاسبه قطر

فرض شود $h = \max\{level(v) : v \in V\}$ ارتفاع درخت بازه‌ای باشد.

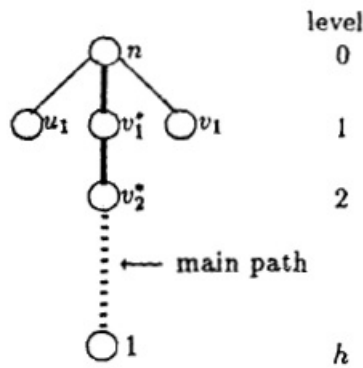
لم ۱۶.۴.۳. [۷] فرض شود $v_1^* \in N_1$ یک راس روی مسیر اصلی باشد. اگر تمام رئوس $v_1 \in N_1$ مجاور v_1^* در G باشد، آنگاه $\delta(G) = h + 1$ در غیر اینصورت $\delta(G) = h$

برهان. با توجه به شکل ۶.۳ فرض شود $v_1^* < u_1 < v_1^* < v_1 < n$ روی مسیر اصلی در سطح ۱ و ۲ قرار دارند. بنا بر لم ۲.۲.۳ $(v_1^*, u_1) \in E$. حال دو حالت اتفاق می‌افتد. $(v_1^*, v_1) \in E$ یا $(v_1^*, v_1) \notin E$ از آن‌جا که $H(v_1^*) = v_1^*$ و $v_1 > v_1^*$ بنابراین $(u_1^*, v_1) \notin E$ در حالت اول:

$(v_1^*, v_1) \in E$ لذا مسیر $v_1^* \rightarrow v_1^* \rightarrow v_1$ از ۱ به v_1 به طول $h = (h-2) + 1 + 1$ است. در حالت دوم:

$(v_1^*, v_1) \notin E$ مسیر $v_1^* \rightarrow v_1^* \rightarrow n \rightarrow v_1$ از ۱ به v_1 به طول $h+1 = (h-2) + 1 + 1 + 1$ است.

برای سایر رئوس $d(1, v) \leq h+1$ ، $v \in V$. $\square$



شکل ۶.۳: شرح

سطح رئوس و ارتفاع هر دو درخت $T_I(G)$ و $T_s(G)$ بدون تغییر باقی می‌مانند. از این لم (۱۶.۴.۳) لم زیر نتیجه می‌شود.

لم ۱۷.۴.۳. [۷] ارتفاع درخت ۳-فراگیر برابر است با $\delta(G)$ یا $\delta(G) - 1$ به عبارت دیگر:

$$\delta(G) = h(T_s(G)) \quad \text{یا} \quad h(T_s(G)) + 1$$

نتیجه ۱۸.۴.۳. [۷] بزرگترین مسیر از گراف بازه‌ای $G = (V, E)$ برابر است با:

$$\begin{cases} 1 \rightarrow^* n \rightarrow v_1 & (\text{به طول } h) & (v_1^*, v_1) \notin E, v_1 \in N_1 \\ 1 \rightarrow^* n & (\text{به طول } h+1) & o.w. \end{cases}$$

بنا بر ۱۶.۴.۳ زمانیکه $h > 1$ ، $\delta(G) = h+1$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{-1} = \{u : u \in N_1, (u, v_1^*) \notin E, v_1^* \in N_1, \text{مسیر اصلی واقع است}\}$$

طبق تعریف فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

نتیجه ۱۹.۴.۳. [۷]

$$d(u, v) \leq \delta(G) = \begin{cases} h & N_{-1} = \emptyset \\ h + 1 & N_{-1} \neq \emptyset \end{cases}$$

نتیجه ۲۰.۴.۳. الگوریتم قطر [۷]

ورودی: آرایه‌های $H(\backslash, n), level(\backslash : n)$ و ارتفاع h

خروجی: قطر $\delta(G)$

۱- پیدا کردن راس $v_{\backslash}^*$ در سطح ۱ روی مسیر اصلی

۲- از مجموعه $N_{\backslash}$ راس‌های مجاور با $v_{\backslash}^*$ بررسی شود.

۳- اگر همه رئوس $N_{\backslash}$ مجاور با $v_{\backslash}^*$ بود آن‌گاه $\delta(G) = h$ در غیر این‌صورت $\delta(G) = h + 1$ توجه شود که با استفاده از آرایه‌های $H(\backslash, n)$ راس $v_{\backslash}^*$ روی مسیر اصلی به دست می‌آید. به این ترتیب که مقادیر $H(\backslash), H(H(\backslash)), H(H(H(\backslash)))$ تا رسیدن به سطح ۱ ادامه می‌یابد. همچنین سطح هر راس با استفاده از BFS روی درخت بازه‌ای IT محاسبه می‌شود. و در نهایت قطر گراف بازه‌ای بنا بر ۱۶.۴.۳ طبق این الگوریتم به دست می‌آید.

با فرض $u \in N_{-1}$ اگر $v_{\backslash}^* \in N_{\backslash}$ راسی روی مسیر اصلی باشد آن‌گاه فاصله بین u و v طبق ۶.۳.۳ برابر ۲ است. $(v_{\backslash}^* \rightarrow n \rightarrow u)$

با فرض این‌که v_l راسی در سطح l و v_{l+1}^* در سطح $l + 1$ روی مسیر اصلی باشد دو مقدار $d_{\backslash}$ و d_{-1} طبق ۱۲.۴.۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$d_{\backslash} = \begin{cases} h - l & (v_l, v_{l+1}^*) \in E \\ h - l + 1 & (v_l, v_{l+1}^*) \notin E, (v_l, v_l^*) \in E \\ h - l + 2 & o.w. \end{cases}$$

و به ازای هر $v_1 \in N_1$ و $v_2 \in N_2$ در مسیر v_l به n :

$$d_{-1} = \begin{cases} l + 1 & (v_1, v_2) \notin E, (v_1^*, v_1) \notin E \\ l & o.w. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$= \begin{cases} l + 1 & N_{-1} \neq \emptyset \\ l & N_{-1} = \emptyset \end{cases}$$

لم ۲۱.۴.۳. [۷] اگر راس v_l در سطح l و v_l^* در همان سطر روی مسیر اصلی باشد، در این‌صورت:

$$d_{max}(v_l) = \max\{d(u, v_l) : u \in V\} = \max(d_{\backslash}, d_{-1}).$$

نتیجه ۲۲.۴.۳. [۸] اگر $d_{max}(v_l) = \rho$ آن‌گاه $v_l \in C(G)$.

در این قسمت مجموعه رئوسی که در سطح l از درخت بازه‌ای قرار دارند، به سه زیرمجموعه N_l^1 و N_l^2 و N_l^3 افراز می‌شود. بطوریکه:

$$\begin{aligned} N_l^1 &= \{v_l : (v_l, v_{l+1}^*) \in E\} \\ N_l^2 &= \{v_l : (v_l, v_{l+1}^*) \notin E, (v_l, v_l^*) \in E\} \\ N_l^3 &= \{v_l : (v_l, v_{l+1}^*) \notin E, (v_l, v_l^*) \notin E\}. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$d_l = \begin{cases} h-l & v_l \in N_l^1 \\ h-l+1 & v_l \in N_l^2 \\ h-l+2 & v_l \in N_l^3 \end{cases}$$

لذا خروج از مرکز، شعاع، قطر و مرکز گراف به صورت زیر است.

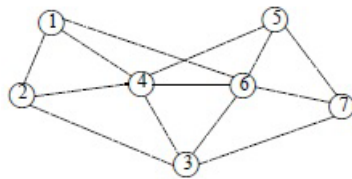
$$e(v_l) = \max\{d(u, v_l) : \forall u \in V\} = d_{\max}(v_l) = \max(d_l, d_{-l})$$

$$\rho(G) = \min\{e(v) : v \in V\}$$

$$\delta(G) = \max\{e(v) : v\} = \begin{cases} h+1 & N_{-1} \neq \emptyset \\ h & N_{-1} = \emptyset \end{cases}$$

$$C(G) = \{v : e(v) = \rho, v \in V\} = \{v_l : d_{\max}(v_l) = \rho\}$$

حال ثابت می‌شود که قطر گراف بازه‌ای نصف شعاع آن است. این رابطه برای همه گرافها برقرار نمی‌باشد.



شکل ۷.۳: گرافی که $\rho \neq \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$

مثال ۲۳.۴.۳. در گراف شکل ۷.۳ طبق دو جدول ۱.۳ و ۲.۳ نشان داده شده است که:

$$\delta = 2, \rho = 2$$

بنابراین:

$$\rho \neq \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$$

جدول ۱.۳: فاصله بین رئوس

v_A	۱	۱	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۰	۱	۲	۱	۲	۱	۲
۲	۱	۰	۱	۱	۲	۲	۲
۳	۲	۱	۰	۱	۲	۱	۱
۴	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۲
۵	۲	۲	۲	۱	۰	۱	۱
۶	۱	۲	۲	۱	۱	۰	۱
۷	۲	۲	۱	۲	۱	۱	۰

جدول ۲.۳: خروج از مرکز

v_A	۱	۱	۳	۴	۵	۶	۷
$e(v_A)$	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲

لم ۲۴.۴.۳. [۸] درگراف بازه‌ای $\rho = \lceil \frac{\delta}{4} \rceil$ و مرکز آن از رابطه زیر به دست می‌آید:
اگر $\delta > ۱$ آن‌گاه:

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h-1}{4} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor\} & \text{فرد است } h, N_{-1} \neq \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h}{4} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor\} & \text{زوج است } h, N_{-1} \neq \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h}{4} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{4} \rfloor\} & \text{زوج است } h, N_{-1} = \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h+1}{4} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{4} \rfloor\} & \text{فرد است } h, N_{-1} = \emptyset \end{cases}$$

و اگر $\delta = ۱$ آن‌گاه $C(G) = V$

برهان. ابتدا فرض شود $N_{-1} \neq \emptyset$ در این صورت $d_{-1} = l + ۱$ بنابراین سه حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول:

اگر $v \in N_l^1$ و $d_1 = h - ۱$ آن‌گاه:

$$e(v) = \max\{h - ۱, l + ۱\} = \begin{cases} h - ۱ & l \leq \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor \\ l + ۱ & l \geq \lceil \frac{h-1}{4} \rceil \end{cases}$$

لذا

$$e_1 = \min\{e(v) : v \in N_l^1\} = \lceil \frac{h+1}{4} \rceil \quad \text{برای} \quad l = \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h-1}{4} \rceil.$$

حالت دوم:

اگر $v \in N_l^2$ و $d_1 = h - l + 1$ آن‌گاه:

$$e(v) = \max\{h - l + 1, l + 1\} = \begin{cases} h - l + 1 & l \leq \lfloor \frac{h}{4} \rfloor \\ l + 1 & l \geq \lceil \frac{h}{4} \rceil \end{cases}$$

لذا

$$e_2 = \min\{e(v) : v \in N_l^2\} = \lceil \frac{h+2}{4} \rceil \quad \text{برای} \quad l = \lfloor \frac{h}{4} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h}{4} \rceil.$$

حالت سوم:

اگر $v \in N_l^3$ و $d_1 = h - l + 2$ آن‌گاه:

$$e(v) = \max\{h - l + 2, l + 1\} = \begin{cases} h - l + 2 & l \leq \lfloor \frac{h+1}{4} \rfloor \\ l + 1 & l \geq \lceil \frac{h+1}{4} \rceil \end{cases}$$

لذا

$$e_3 = \min\{e(v) : v \in N_l^3\} = \lceil \frac{h+3}{4} \rceil \quad \text{برای} \quad l = \lfloor \frac{h+1}{4} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h+1}{4} \rceil.$$

از ترکیب روابط فوق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \min\{e(v) : v \in N_l\} &= \min\{e_1, e_2, e_3\} \\ &= \min\{\lceil \frac{h+1}{4} \rceil, \lceil \frac{h+2}{4} \rceil, \lceil \frac{h+3}{4} \rceil\} \\ &= \min\{\lceil \frac{h+1}{4} \rceil, \lceil \frac{h+2}{4} \rceil\} \\ &= \begin{cases} \lceil \frac{h+1}{4} \rceil & \text{فرد است } h, v \in N_l^1, l = \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h-1}{4} \rceil \\ \lceil \frac{h+1}{4} \rceil & \text{زوج است } h, v \in N_l^2, l = \lfloor \frac{h}{4} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h-1}{4} \rceil \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

بنابراین در این حالت ثابت شد $\rho = \lceil \frac{\delta}{4} \rceil$ و

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h-1}{4} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor\} & \text{فرد است } h, N_{-1} \neq \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h}{4} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor\} & \text{زوج است } h, N_{-1} \neq \emptyset \end{cases}$$

حال فرض شود: $N_{-1} = \emptyset$ در این صورت $d_{-1} = l$ بنابراین سه حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول:

اگر $v \in N_l^1$ و $d_1 = h - 1$ آن‌گاه:

$$e(v) = \max\{h - 1, l\} = \begin{cases} h - 1 & l \leq \lfloor \frac{h-1}{4} \rfloor \\ l & l \geq \lceil \frac{h-1}{4} \rceil \end{cases}$$

لذا

$$e'_1 = \min\{e(v) : v \in N_l^1\} = \lceil \frac{h}{2} \rceil \quad \text{برای} \quad l = \lfloor \frac{h}{2} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h}{2} \rceil.$$

حالت دوم:

اگر $v \in N_l^2$ و $d_1 = h - l + 1$ آن گاه :

$$e(v) = \max\{h - l + 1, l\} = \begin{cases} h - l + 1 & l \leq \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor \\ l & l \geq \lceil \frac{h+1}{2} \rceil \end{cases}$$

لذا

$$e'_2 = \min\{e(v) : v \in N_l^2\} = \lceil \frac{h+1}{2} \rceil \quad \text{برای} \quad l = \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h+1}{2} \rceil.$$

حالت سوم:

اگر $v \in N_l^3$ و $d_1 = h - l + 2$ آن گاه :

$$e(v) = \max\{h - l + 2, l\} = \begin{cases} h - l + 2 & l \leq \lfloor \frac{h+2}{2} \rfloor \\ l & l \geq \lceil \frac{h+2}{2} \rceil \end{cases}$$

لذا

$$e'_3 = \min\{e(v) : v \in N_l^3\} = \lceil \frac{h+2}{2} \rceil \quad \text{برای} \quad l = \lfloor \frac{h+2}{2} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h+2}{2} \rceil.$$

از ترکیب روابط فوق رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \min\{e(v) : v \in N_l\} &= \min\{e'_1, e'_2, e'_3\} \\ &= \min\{\lceil \frac{h}{2} \rceil, \lceil \frac{h+1}{2} \rceil, \lceil \frac{h+2}{2} \rceil\} \\ &= \min\{\lceil \frac{h+1}{2} \rceil, \lceil \frac{h+2}{2} \rceil\} \\ &= \begin{cases} \lceil \frac{h}{2} \rceil & v \in N_l^1, l = \lfloor \frac{h}{2} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h}{2} \rceil, \text{زوج است } h \\ \lceil \frac{h}{2} \rceil & v \in N_l^2, l = \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor \quad \text{یا} \quad \lceil \frac{h}{2} \rceil, \text{فرد است } h \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

بنابراین در این حالت ثابت شد $\rho = \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$ و

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{2} \rfloor\} & \text{زوج است } h, N_{-1} \neq \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h+1}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{2} \rfloor\} & \text{زوج است } h, N_{-1} \neq \emptyset \end{cases}$$

بنابراین در حالتیکه $\delta > 1$ ثابت شد که: $\rho = \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$ و

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h-1}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor\} & \text{فرد است } h, N_{-1} \neq \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor\} & \text{زوج است } h, N_{-1} \neq \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{2} \rfloor\} & \text{زوج است } h, N_{-1} = \emptyset \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h+1}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{2} \rfloor\} & \text{فرد است } h, N_{-1} = \emptyset \end{cases}$$

□ حال اگر $\delta = 1$ آن‌گاه حداکثر دو راس در G وجود دارد. بنابراین: $\rho = 1 = \lceil \frac{1}{2} \rceil = \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$.
 لم ۲۵.۴.۳. [۸] مرکزگراف بازه‌ای همبند $G = (V, E)$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1 \cup N_{r+1}^1 \cup N_{r+1}^2 & \delta \text{ فرد است} \\ \{v : v \in N_l^1 & \delta \text{ زوج است} \end{cases}$$

بطوریکه:

$$r = \begin{cases} \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor, & N_{-1} = \emptyset \\ \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor - 1, & N_{-1} \neq \emptyset \end{cases}.$$

برهان. طبق لم قبل مرکزگراف بازه‌ای به صورت زیر است.

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h-1}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor\} & h, N_{-1} \neq \emptyset \text{ فرد است} \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor\} & h, N_{-1} \neq \emptyset \text{ زوج است} \\ \{v : v \in N_l^1, l = \lceil \frac{h}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{2} \rfloor\} & h, N_{-1} = \emptyset \text{ زوج است} \\ \{v : v \in N_l^1 \cup N_l^2, l = \lceil \frac{h+1}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{2} \rfloor\} & h, N_{-1} = \emptyset \text{ فرد است} \end{cases}$$

حال فرض شودکه:

$$r = \begin{cases} \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor, & N_{-1} = \emptyset \\ \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor - 1, & N_{-1} \neq \emptyset \end{cases}$$

دو حالت وجود دارد.

حالت اول: $N_{-1} \neq \emptyset$ در این صورت $\delta = h + 1$ بنابراین

$$\begin{aligned} l &= \lceil \frac{h-1}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor \\ &= \lceil \frac{\delta-2}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{\delta-2}{2} \rfloor \\ &= \lceil \frac{\delta}{2} \rceil - 1 \text{ یا } \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor - 1 \\ &= \begin{cases} \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor - 1 \text{ یا } \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor - 1 & \delta \text{ زوج است} \\ \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor \text{ یا } \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor - 1 & \delta \text{ فرد است} \end{cases} \quad (5.3) \\ &= \begin{cases} \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor - 1 & \delta \text{ زوج است} \\ \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor \text{ یا } \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor - 1 & \delta \text{ فرد است} \end{cases} \\ &= \begin{cases} r & \delta \text{ زوج است} \\ r \text{ یا } r+1 & \delta \text{ فرد است} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$v \in \begin{cases} N_r^1 \cup N_{r+1}^1 & \delta \text{ فرد است} \\ N_r^1 & \delta \text{ زوج است} \end{cases}$$

اگر h زوج باشد، δ فرد است. لذا:

$$l = \lceil \frac{h}{2} \rceil = \lceil \frac{\delta - 1}{2} \rceil = \lceil \frac{\delta}{2} \rceil = r + 1.$$

بنابراین $v \in N_{r+1}^2$ اگر δ فرد باشد. لذا:

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1 \cup N_{r+1}^1 \cup N_{r+1}^2 & \delta \text{ فرد است} \\ \{v : v \in N_l^1 & \delta \text{ زوج است} \end{cases}$$

حالت دوم: $N_{-1} = \emptyset$ در این صورت $\delta = h$: بنابراین

$$\begin{aligned} l &= \lceil \frac{h}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{h}{2} \rfloor \\ &= \lceil \frac{\delta}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor \\ &= \lceil \frac{\delta}{2} - 1 \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{\delta}{2} - 1 \rfloor \\ &= \begin{cases} \lceil \frac{\delta}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor + 1 & \delta \text{ زوج است} \\ \lceil \frac{\delta}{2} \rceil \text{ یا } \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor & \delta \text{ فرد است} \end{cases} \quad (۶.۳) \\ &= \begin{cases} r & \delta \text{ زوج است} \\ r \text{ یا } r + 1 & \delta \text{ فرد است} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$v \in \begin{cases} N_r^1 \cup N_{r+1}^1 & \delta \text{ فرد است} \\ N_r^1 & \delta \text{ زوج است} \end{cases}$$

اگر h فرد باشد، δ فرد است. لذا:

$$l = \lceil \frac{h + 1}{2} \rceil = \lceil \frac{\delta + 1}{2} \rceil = \lceil \frac{\delta}{2} + 1 \rceil = r + 1.$$

بنابراین $v \in N_{r+1}^2$ اگر δ فرد باشد. لذا:

$$C(G) = \begin{cases} \{v : v \in N_l^1 \cup N_{r+1}^1 \cup N_{r+1}^2 & \delta \text{ فرد است} \\ \{v : v \in N_l^1 & \delta \text{ زوج است} \end{cases}$$

□

فصل ۴

گراف بازه‌ای فازی

۱.۴ مقدمه‌ای بر مجموعه‌های فازی

در این قسمت به تعریف مجموعه فازی و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۴. هر زیر مجموعه فازی A در مجموعه مرجع X به وسیله تابع عضویت تعریف نمود. به این ترتیب که برای هر عضو x از مجموعه مرجع X یک عدد $\mu(x)$ در بازه بسته $[0, 1]$ که بیان کننده درجه عضویت x در مجموعه فازی A می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود. بنابراین $\mu : X \rightarrow [0, 1]$

تعریف ۲.۱.۴. [۱۳] اگر μ یک زیر مجموعه فازی از مجموعه قطعی S باشد در این صورت برای هر $t \in [0, 1]$ مجموعه t -سطح به صورت زیر تعریف می‌شود $\mu^t = \{x \in S : \mu(x) \geq t\}$ در حالت خاص $h(\mu) = \max\{\mu(x) : x \in S\}$ و بلندی مجموعه S به صورت $supp(\mu) = \{x \in S : \mu(x) \geq 0\}$ تعریف می‌شود. اگر $h(\mu) = 1$ مجموعه μ را نرمال می‌گویند. اگر μ, σ دو زیرمجموعه فازی از S باشند، آنگاه برای هر $x \in S$ روابط زیر برقرار است.

$$\sigma \subseteq \mu \iff \sigma(x) \leq \lambda(x) \quad (1.4)$$

$$\sigma \subset \mu \iff \sigma(x) < \lambda(x) \quad (2.4)$$

$$\sigma = \mu \iff \sigma(x) = \lambda(x) \quad (3.4)$$

$$\sigma \subseteq \mu \iff \sigma^t \subseteq \mu^t \quad (4.4)$$

$$u \leq t \iff \sigma^t \leq \lambda^u \quad (5.4)$$

تعریف ۳.۱.۴. [۱۳] اگر σ یک مجموعه فازی از S و τ یک مجموعه فازی از T باشد، اجتماع و

اشتراک آن‌ها چنین تعریف می‌شود:

$$\sigma \cup \tau(x) = \max[\sigma(x), \tau(x)] = \vee[\sigma(x), \tau(x)]$$

$$\sigma \cap \tau(x) = \min[\sigma(x), \tau(x)] = \wedge[\sigma(x), \tau(x)]$$

تعریف ۴.۱.۴. [۱۳] اگر $\mu : S \times T \rightarrow [0, 1]$ یک رابطه فازی از زیر مجموعه فازی σ از S و τ از T باشد و $\nu : T \times W \rightarrow [0, 1]$ یک رابطه فازی از زیر مجموعه فازی τ از T و ξ از W باشد آنگاه ترکیب μ با ν چنین تعریف می‌شود.

$$\mu \circ \nu : S \times W \rightarrow [0, 1]$$

$$\mu \circ \nu(x, z) = \vee\{\mu(x, y) \wedge \nu(y, z), y \in T\}$$

نماد μ^2 برای $\mu \circ \mu$ استفاده می‌شود و در نتیجه μ^k یعنی $\mu^{k-1} \circ \mu, k > 1$

تعریف ۵.۱.۴. [۱۳] $\mu^\infty = \vee\{\mu^k(x, y) : k = 1, 2, 3, \dots\} \quad \forall x, y \in S$

۲.۴ گراف فازی

در این قسمت گراف فازی و قضایای مربوط به آن اشاره می‌کنیم. گراف فازی اولین بار توسط کافمن^۱ در سال ۱۹۷۳ بر پایه روابط فازی زاده مطرح شد و در سال ۱۹۷۵ راسنفلد^۲ قضایای گراف‌های فازی با مد نظر قرار دادن رابطه‌ها بر روی یک مجموعه فازی توسعه داد. در همین زمان یه^۳ و بنگ^۴ نیز به معرفی مفهوم انواع ارتباطات در گراف‌های فازی پرداختند.

تعریف ۱.۲.۴. [۱۳] در گراف $G = (V, \mu, \rho)$ که در آن $V \neq \emptyset$ اگر $\mu : V \rightarrow [0, 1]$ و $\rho : V \times V \rightarrow [0, 1]$ بطوریکه $\rho(x, y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y)$ آن گاه گراف $G = (V, \mu, \rho)$ را گراف فازی گویند. μ مجموعه رئوس فازی از G و ρ مجموعه یالی فازی از G است. اگر $\mu(x) = 1$ ، در این صورت گراف G را به صورت $G = (V, \rho)$ معرفی می‌کنند.

تعریف ۲.۲.۴. [۱۳] زیرگراف $H = (\nu, \tau)$ از گراف $G = (\mu, \rho)$ جزئی فازی گویند، هر گاه $\nu \subseteq \mu, \tau \subseteq \rho$

^۱kaufman

^۲Azriel Rosenfeld

^۳R.T.Yeh

^۴S.Y.Bang

تعریف ۳.۲.۴. [۱۳] زیر گراف $H = (P, \nu, \tau)$ از گراف $G = (V, \mu, \rho)$ را زیر گراف القا شده بوسیله P گویند، هرگاه $P \subseteq V$ و $\nu(x) = \mu(x)$ ، $\tau(x, y) = \rho(x, y)$ و P تنها یک زیر گراف فازی القا شده وجود دارد لذا می‌توان از نماد $\langle P \rangle$ به جای H استفاده کرد.

تعریف ۴.۲.۴. [۱۳] مکمل گراف $G = (V, E)$ که با $\bar{G}$ نمایش داده می‌شود گرافی با رئوس V و یال‌هایی که در E نیستند. برای گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ گراف $\bar{G} = (\mu, 1 - \rho)$ مکمل گراف فازی تعریف می‌شود.

نتیجه ۵.۲.۴. [۱۳] زیر گراف $\langle P \rangle = (P, \nu, \tau)$ از گراف فازی $G = (V, \mu, \rho)$ یک حالت خاص از زیر گراف جزئی فازی است. زیرا

$$\nu(x) = \begin{cases} \mu(x) & x \in P \\ \circ & x \in V - P \end{cases}$$

$$\tau(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) & (x, y) \in P \times P \\ \circ & (x, y) \in V \times V - P \times P \end{cases}$$

لم ۶.۲.۴. [۱۳] در گراف فازی $G = (V, \mu, \rho)$ ، به ازای هر $t \in [\circ, 1]$ ، $G^t = (\mu^t, \rho^t)$ یک گراف قطعی است.

برهان. فرض شود $(x, y) \in \rho^t$ طبق ۲.۱.۴ و ۱.۲.۴، $\rho(x, y) \geq t$ پس $t \leq \mu(x) \wedge \mu(y)$ لذا $t \leq \mu(x)$ ، $t \leq \mu(y)$ بنابراین $x \in \mu^t$ ، $y \in \mu^t$ در نتیجه $(x, y) \in \mu^t \times \mu^t$ یعنی $\rho^t \subseteq \mu^t \times \mu^t$. $\square$

لم ۷.۲.۴. [۱۳] در گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ ، اگر $\circ \leq u \leq t \leq 1$ ، آن‌گاه (μ^t, ρ^t) یک زیر گراف از (μ^u, ρ^u) است.

برهان. چون $\circ \leq u \leq t \leq 1$ بنا بر ۵.۴ $\mu^t \subseteq \mu^u$ ، $\rho^t \subseteq \rho^u$. $\square$

لم ۸.۲.۴. [۱۳] اگر $H = (P, \nu, \tau)$ یک زیر گراف جزئی فازی از گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ باشد در این صورت برای هر $t \in [\circ, 1]$ ، (ν^t, τ^t) یک زیر گراف از گراف (μ^t, ρ^t) است.

برهان. H زیر گراف جزئی فازی از G است پس $\nu \subseteq \mu$ ، $\tau \subseteq \rho$ لذا بنا بر ۴.۴ نتیجه می‌شود که $\mu^t \subseteq \mu^t$ و همچنین $\tau^t \subseteq \rho^t$. $\square$

تعریف ۹.۲.۴. [۱۳] یک دور به طول n در گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ دنباله‌ای از رئوس $x_\circ, x_1, \dots, x_n$ است که $\rho(x_\circ, x_n) > \circ$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\rho(x_{i-1}, x_i) \geq \circ$ ، این گراف، گراف فازی وتری است، اگر و تنها اگر برای هر دور با $n \geq 4$ اعداد صحیح $\circ \neq j$ یا $k \neq n$ وجود داشته باشد، بطوریکه $\rho(x_j, x_k) \geq \bigwedge \{\rho(x_{i-1}, x_i) : i = 1, 2, \dots, n\} \wedge \rho(x_\circ, x_n)$ و $\circ \leq j \leq k-1 \leq n$.

۳.۴ گراف اشتراکی فازی

تعریف ۱.۳.۴ [۱۲] فرض شود که $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک خانواده متناهی از زیرمجموعه‌های فازی مجموعه V باشد. V به عنوان رئوس قطعی فرض شود. یک گراف اشتراکی فازی از $\mathcal{F}$ یک گراف فازی $Int(\mathcal{F}) = (\mu, \rho)$ است که در آن $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ که $\mu(\alpha_i) = h(\alpha_i)$ و $\rho : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ که

$$\rho(x, y) = \begin{cases} h(\alpha_i, \alpha_j) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۳.۴ [۱۲] فرض شود که $G = (V, \mu, \rho)$ یک گراف فازی باشد. یک گراف فازی سودار دار سه تایی $D = (V, \mu, \delta)$ است که μ یک زیر مجموعه فازی از V و δ یک زیر مجموعه فازی از $V \times V$ است بطوریکه برای هر $x, y \in V$ $\rho(x, y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y)$ و δ لزوماً متقارن نیست. یعنی $\delta(x, y) \neq \delta(y, x)$

تعریف ۳.۳.۴ [۱۲] برای هر خانواده $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های فازی و برای هر $t \in [0, 1]$ خانواده t -سطح از $\mathcal{F}$ ، $\mathcal{F}^t = \{\alpha^t : \alpha \in \mathcal{F}\}$ معرفی می‌شود.

تعریف ۴.۳.۴ [۱۲] مجموعه مرتب شده $fs(G) = \{\mu(x) : x \in V\} \cup \{\rho(x, y) : x, y \in V\}$ گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ را دنباله اساسی^۵ گویند. این دنباله به صورت نزولی از اعداد $[0, 1]$ مرتب شده است. اولین عضو این مجموعه قوت راس ماکسیمال است و آخرین عضو آن قوت یال مینیمال غیر صفر است.

لم ۵.۳.۴ [۱۲] اگر $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ خانواده‌ای از بازه‌های فازی باشد در اینصورت به ازای هر $t \in [0, 1]$ $Int(\mathcal{F})^t = Int(\mathcal{F}^t)$.

$\alpha_i \in \mathcal{F}$ راس گراف $Int(\mathcal{F}^t)$ است اگر و تنها اگر $h(\alpha_i) \geq t$

(α_i^t, α_j^t) یال گراف $Int(\mathcal{F}^t)$ اگر و تنها اگر $h(\alpha_i, \alpha_j) \geq t$

بنابراین $\alpha_i^t \cap \alpha_j^t \neq \emptyset$ شرایط فوق گراف را مشخص می‌کند. در حالت خاص اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های قطعی از V باشد آنگاه گراف اشتراکی فازی و گراف قطعی یکسان می‌شوند.

قضیه ۶.۳.۴ [۱۲] اگر $G = (\mu, \rho)$ گراف فازی بدون طوقه باشد آنگاه برای بعضی از خانواده‌های زیرمجموعه‌های $\mathcal{F}$ ، $G = Int(\mathcal{F})$ (آنالوگ فازی از قضیه مارچوسکی^۶)

^۵fundamental sequence

^۶Marczewski,s

برهان. فرض شود $G = (\mu, \rho)$ گراف فازی روی مجموعه V باشد. برای هر $x \in V$ مجموعه فازی متقارن و غیر انعکاسی $\alpha_x : X \rightarrow [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_x(y, z) = \begin{cases} \mu(x) & y = x, z = x \\ \rho(x, z) & y = x, z \neq x \\ \rho(y, x) & y \neq x, z = x \\ 0 & y \neq x, z \neq x \end{cases}$$

ثابت می‌شود که G گراف اشتراکی از خانواده $\mathcal{F} = \{\alpha_x | x \in V\}$ است.

طبق ۱.۲.۴ $\alpha(x, x) = \mu(x) \geq \rho(x, y)$ بنابراین $h(\alpha_x) = \mu(x)$. برای $y \neq x$ ، اگر $x = z$ و $w = y$ (یا $x = w$ و $y = z$) یک مقدار مخالف صفر $(\alpha_x \cap \alpha_y)(z, w) = \alpha_x(z, w) \wedge \alpha_y(z, w)$ به دست می‌آید. بنابراین $h(\alpha_x \wedge \alpha_y) = (\alpha_x \wedge \alpha_y)(x, y) = \mu(x, y)$ نتیجه می‌دهد. $\square$

ملاحظه ۷.۳.۴. هر گراف قطعی یک گراف اشتراکی است.

برهان. برای هر $x \in V$ مجموعه S_x را اجتماع $\{x\}$ با مجموعه همه یال‌های مجاور x در نظر گرفته می‌شود و این یعنی گراف قطعی G با گراف اشتراکی $\{S_x : x\}$ یکریخت است. $\square$

۴.۴ گراف‌های بازه‌ای فازی

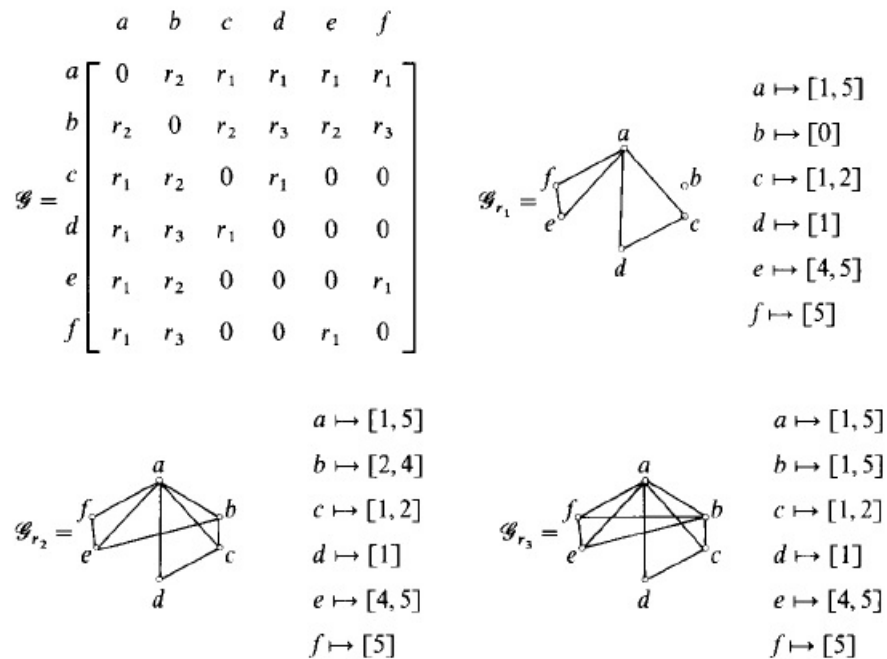
تعریف ۱.۴.۴. در مجموعه A اگر برای هر $s, r \in A$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ رابطه $\lambda r + (1 - \lambda)s \in A$ برقرار باشد، مجموعه A را محدب گویند.

تعریف ۲.۴.۴. [۱۲] فرض شود V مجموعه مرتب خطی باشد. یک بازه فازی L روی V نرمال و زیرمجموعه فازی محدب از V است هرگاه $x \in V$ وجود داشته باشد که $L(x) = 1$ و ترتیب $w \leq y \leq z$ بیان کند که $L(y) \geq L(w) \wedge L(z)$. یک عدد فازی یک بازه فازی است. گراف بازه‌ای فازی یک گراف اشتراکی فازی از خانواده متناهی از بازه‌های فازی است. با نرمال بودن بازه‌های فازی، مجموعه رئوس از یک گراف بازه ای طبق ۱.۲.۴ فازی قطعی است.

قضیه ۳.۴.۴. [۱۲] اگر $G = \text{Int}(\mathcal{F})$ گراف بازه‌ای فازی باشد، آنگاه برای هر $t \in [0, 1]$ گراف G^t ، گراف بازه‌ای است.

برهان. فرض شود $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ خانواده‌ای از بازه‌های فازی باشد در اینصورت به ازای هر $t \in [0, 1]$ بنا بر ۵.۳.۴، $G = \text{Int}(\mathcal{F}) \Rightarrow G^t = \text{Int}(\mathcal{F})^t = \text{Int}(\mathcal{F}^t)$. $\square$

عکس این قضیه برقرار نیست. در شکل ۱.۴ یک گراف فازی که گراف بازه‌ای فازی نیست، نشان داده شده است بطوریکه هر گراف سطح مقطعش نمایش بازه‌ای دارد.



شکل ۱.۴: یک گراف فازی که گراف بازه‌ای فازی نیست اگرچه هر گراف سطح مقطعش نمایش بازه‌ای دارد.

۵.۴ مشخصه فولکرسون و گراس

قضیه ۱.۵.۴. [۴] گراف (قطعی) بازه‌ای است اگر و تنها اگر یک ترتیب خطی از خوشه‌های وجود داشته باشد بطوریکه برای هر ماتریس وقوع خوشه ای راسی سطرهای (ستون‌های) آن محدب باشد.

تعریف ۲.۵.۴. [۱۲] در گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ زیر مجموعه فازی $\mathcal{K}$ را خوشه فازی G گویند اگر برای هر $t \in [0, 1]$ یک خوشه از G^t را القا کند.

تعریف ۳.۵.۴. [۱۲] ماتریس وقوع خوشه ای راسی از گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ ماتریسی است که سطرهای آن دامنه تعریف μ و ستون‌های آن خوشه‌های فازی آن است.

ملاحظه ۴.۵.۴. [۱۲] در گراف فازی G با $fs(G) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ فرض شود $\mathcal{K}$ یک خوشه از آن باشد. مجموعه‌های مقطعی^۷ از این خوشه دنباله $\mathcal{K}^{r_1} \subseteq \mathcal{K}^{r_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{K}^{r_n}$ تعریف می‌شود، بطوریکه هر $\mathcal{K}^{r_i}$ یک خوشه از G^{r_i} است. و بعکس هر دنباله $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$ که K_i یک خوشه از G^{r_i} است، یک خوشه فازی $\mathcal{K}$ که $\mathcal{K}(x) = \vee \{r_i : x \in K_i\}$ تعریف می‌شود. بنابراین K یک خوشه از گراف t -برش G^t است اگر و تنها اگر $K = \mathcal{K}^t$ برای بعضی از خوشه‌های فازی $\mathcal{K}$.

^۷level sets

قضیه ۵.۵.۴ [۱۲] فرض شود $G = (\mu, \rho)$ یک گراف فازی باشد، سطرهای هر ماتریس وقوع خوشه راسی G یک خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فازی $\mathcal{F}$ برای هر $G = \text{Int}(\mathcal{F})$ تعریف می‌شود. بعلاوه اگر یک ترتیب از خوشه‌های فازی G وجود داشته باشد، بطوریکه سطرهای ماتریس وقوع خوشه‌ای راسی محدب باشد، آنگاه G یک گراف بازه‌ای فازی است. (آنالوگ فازی از فولکرسون-گراس)

برهان. فرض شود $I = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_p\}$ خانواده‌ای مرتب از خوشه‌های فازی G باشد و M ماتریس خوشه‌ای راسی باشد، بطوریکه ستون‌های آن دارای ترتیبی است که برای $x \in V$ مجموعه فازی $\mathcal{J}_x$ چنین تعریف می‌شود: $\mathcal{J}_x : I \rightarrow [0, 1]$ با $\mathcal{J}_x(\mathcal{K}_i) = \mathcal{K}_i(x)$. فرض شود $\mathcal{F} = \{\mathcal{J}_x : x \in V\}$ از آن‌جا که برای هر راس x قوت ۱ را دارد بنابراین x در ۱-برش بعضی از خوشه‌های فازی $\mathcal{K}_i$ در I واقع می‌شود. لذا $\mathcal{J}_x(\mathcal{K}_i) = \mathcal{K}_i(x) = 1$ پس $\mathcal{J}_x$ نرمال است.

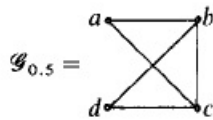
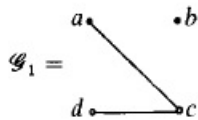
حال باید ثابت شود که برای هر $x \neq y \in V$, $h(\mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_y) = \rho(x, y)$. همچنین با فرض اینکه هر سطر محدب است پس به این معنا است که هر $\mathcal{J}_x$ یک بازه فازی است و G یک گراف بازه‌ای است. با تعریف اگر $x \neq y$ آنگاه

$$\begin{aligned} h(\mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_y) &= \cup \{h(\mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_y)(\mathcal{K}_i) : \mathcal{K}_i \in I\} \\ &= \vee \{\mathcal{J}_x(\mathcal{K}_i) \wedge \mathcal{J}_y(\mathcal{K}_i) : \mathcal{K}_i \in I\} \\ &= \vee \{i(x) \wedge i(y) : i \in I\} \\ &= \vee \{t \in [0, 1] : i \in I, (x, y) \in E((\mathcal{K}_i)^t)\} \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

قوت یال t $\rho(x, y) = t$ ماکسیمال است که (x, y) یک یال از G^t است. بنابراین در یک خوشه از G^t واقع می‌شود. پس $h(\mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_y) = \rho(x, y)$. $\square$

مثال ۶.۵.۴. عکس این قضیه برقرار نمی‌باشد. در شکل ۲.۴ گراف فازی G با ماتریس مجاورتش داده شده است. مجموعه $\mathcal{F}$ از بازه‌های فازی بوسیله سطرهای ماتریس M تعریف شده است. لذا $G = \text{Int}(\mathcal{F})$. همچنین در این شکل گراف‌های برشی از G و یک ماتریس وقوع خوشه‌ای راسی نشان داده شده است.

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad F = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 & \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



شکل ۲.۴: یک گراف بازه‌ای فازی که ماتریس وقوع خوشه‌ای راسی آن دارای ردیفی است، که محدب نیست..

۶.۴ مشخصه گیلور و هافمن

در این بخش از نماد (x, y) برای معرفی یک یال از گراف G و از نماد $\langle x, y \rangle$ برای معرفی یک یال از گراف D (گراف G جهت‌دار) استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۶.۴. [۱۲] طبق ۱۷.۲.۱ گراف $G = (V, X)$ را وترتی گویند هرگاه در هر دور $N \geq 4$ و تر داشته باشد. بعبارت دیگر اعداد صحیح j, k که $j \neq 0$ یا $k \neq n$ وجود داشته باشد با $0 \leq j \leq k-1$ که $(x_j, x_k) \in X$

گراف جهت دار شده از $G = (V, X)$ گراف جهت دار $G_A = (V, A)$ است که گراف زمینه آن G است. و $(x, y) \in A$ بیانگر آن است که $\langle x, y \rangle \in A$ یا $\langle y, x \rangle \in A$ و نه هر دو.

قضیه ۲.۶.۴. [۱۲] اگر G یک گراف بازه‌ای فازی باشد، آن‌گاه G وترتی است.

برهان. بنا بر ۳.۴.۴ گراف برشی G^t یک گراف بازه‌ای است. و لذا بنا بر ۶.۲.۲ هر گراف بازه‌ای یک گراف وترتی است. $\square$

نتیجه ۳.۶.۴. [۱۲] گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ وترتی است اگر و تنها اگر برای هر $t \in [0, 1]$ گراف t - برش از آن G وترتی باشد.

تعریف ۴.۶.۴. [۱۲] فرض شود $G = (\mu, \rho)$ یک گراف فازی با $fs(G) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ و A نیز یک جهت‌دهی از G^{r_n} باشد. بنابراین جهت‌دهی از G بوسیله A گراف فازی جهت‌دار $G_A = (\mu, \rho_A)$ است که

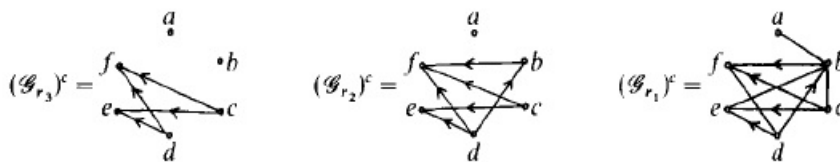
$$\rho_A(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} \rho(x, y) & \langle x, y \rangle \in A \\ 0 & \langle x, y \rangle \notin A \end{cases}$$

گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ جهت‌دهی تعدی (گراف مقایسه‌پذیر) است اگر و تنها اگر یک جهت‌دهی وجود داشته باشد که خاصیت تعدی را داشته باشد. به بیان ریاضی $\rho_A(< x, y >) \wedge \rho_A(< y, z >) \leq \rho_A(< x, z >)$. گراف t برش از G_A عبارتست از $\{< x, y > : \rho_A(< x, y >) \geq t\}$ بنابراین یک جهت‌دهی از گراف فازی همان جهت‌دهی را روی هر عضو از دنباله اساسی از گراف‌های سطح مقطع را القا می‌کند. به عکس، ممکن است دنباله‌ای از زیرگراف‌های جهت‌دهی تعدی $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3$ باشد که جهت‌دهی تعدی از G_2 یک جهت‌دهی تعدی از G_1 را القا نکند. و جهت‌دهی از G_2 نتواند به جهت‌دهی از G_3 گسترش یابد.

قضیه ۵.۶.۴ [۱۲] اگر $G = Int(\mathcal{F})$ یک گراف بازه‌ای فازی باشد آن‌گاه یک جهت‌دهی A وجود دارد که یک جهت‌دهی تعدی از $\bar{G}$ را القا می‌کند.

برهان. فرض شود (α, β) یک یال غیر بدیهی از $\bar{G}$ باشد در این صورت $h(\alpha \cap \beta) < r_1$ و α^{r_1} و β^{r_1} مجاورند. فرض شود $< \alpha, \beta > \in A$ اگر و تنها اگر α^{r_1} اکیدا سمت چپ β^{r_1} قرار می‌گیرد. به وضوح A یک جهت‌دهی تعدی است. □

مثال ۶.۶.۴. گراف فازی در شکل ۱.۴ گراف بازه‌ای فازی نیست. زیرا هر جهت‌دهی از (d, e) نشان می‌دهد که جهت‌دهی تعدی از $\bar{G}$ وجود ندارد. در این شکل گراف‌های برشی از $\bar{G}$ با $< d, e > \in A$ نشان داده شده است. توجه شود که $\bar{G}^{r_2} = (\bar{G})^{1-r_2}$, $\bar{G}^{r_1} = (\bar{G})^{1-r_1}$ و $\bar{G}^{r_3} = (\bar{G})^{1-r_3}$ که $r_1 = 1$



شکل ۳.۴: یک گراف فازی که جهت‌دهی تعدی ندارد.

قضیه ۷.۶.۴ [۱۲] گراف فازی $G = (\mu, \rho)$ گراف بازه‌ای فازی است اگر و تنها اگر

۱- برای هر $\mu(x)$, $x \in \text{supp}(\mu) = V$

۲- هر زیرگراف فازی القائی از G با ۴ راس وتری باشد.

۳- $\bar{G}$ جهت‌دهی تعدی است.

برهان. فرض شود گراف G بازه‌ای فازی باشد، طبق تعاریف ۱.۳.۴ و ۲.۴.۴ و قضایای ۲.۶.۴ و ۵.۶.۴ حکم ثابت است.



فصل ۵

پیدا کردن زیرگراف با مجموعه مستقل (۱-رنگ پذیر) با ماکزیمم وزن عدد بازه‌ای در گراف بازه‌ای

۱.۵ مقدمه

فرض شود که $G = (V, E)$ یک گراف بازه‌ای با n راس و وزن اعداد بازه‌ای باشد. در این فصل هدف پیدا کردن یک زیر گراف H از G است بطوریکه رئوس آن در G غیر مجاور باشند. (۱-رنگ پذیر) و $\sum_{u \in H(G)} w(u)$ ماکزیمم شود، $w(u)$ وزن رئوس است. (مساله ۱) یک الگوریتم از مرتبه $O(n)$ برای حل این مساله ارائه می‌شود. همچنین یکی از کاربردهای مهم این مساله تعیین میان برنامه‌ای با بیشترین بیننده از بین تمام میان برنامه‌های تلویزیون است که در زمانهای مختلف از همه کانالها پخش می‌شود. (مساله ۲) به این ترتیب که همه برنامه‌ها، از تمام کانالهای تلویزیون، به یک گراف بازه‌ای وزن دار با وزن اعداد بازه‌ای مدلبندی می‌شود. بطوریکه تعداد بینندگان هر برنامه، وزن رئوس در گراف بازه‌ای باشد. از آنجا که تعداد بینندگان ثابت نمی‌باشد، لذا به صورت بازه در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در ابتدای این فصل مروری بر حساب فاصله داریم.

۲.۵ حساب فاصله

حساب فاصله یک حساب تعریف شده روی مجموعه‌ی فاصله به جای اعداد حقیقی می باشد حساب فاصله برای اولین بار در سال ۱۹۲۴ به وسیله ی بورکیل^۱ و در سال ۱۹۳۱ به وسیله ی یانگ^۲ و در

^۱J.C.Burkil:IfunctionsOf Intervals

^۲R.c.young

سال ۱۹۵۸ به وسیله ی سوناگا^۳ در کتاب خود^۴ و سپس تحولات مدرن در حساب بازه در سال ۱۹۵۹ توسط مور^۵ انجام شد. و در سال ۱۹۶۲ وی در مقاله^۶ خود آن را توسعه داد.

تعریف ۱.۲.۵. هر بازه‌ی بسته به صورت $A = [a_L, a_R] = \{x \in R \mid a_L \leq x \leq a_R\}$ که a_L, a_R نقطه پایانی راست و چپ بازه می‌باشد، نمایش داده می‌شود. نمایش دیگر از بازه A به صورت

$$A = \langle m(A), w(A) \rangle \text{ می‌باشد بطوریکه}$$

$$m(A) = \frac{1}{2}(a_L + a_R), W(A) = \frac{1}{2}(a_R - a_L)$$

تعریف ۲.۲.۵. اعمال حساب پایه روی دو عدد بازه‌ای:

$$A \oplus B = [a_L, a_R] + [b_L, b_R] = [a_L + b_L, a_R + b_R]$$

$$A \ominus B = [a_L - b_R, a_R - b_L]$$

$$A \ominus_R B = [a_L - b_L, a_R - b_R]$$

$$A < B \iff a_L < b_R \text{ سمت راست } B \text{ قرار می‌گیرد.}$$

و همچنین

$$X \odot Y = [\min(a_L.b_L, a_L.b_R, a_R.b_L, a_R.b_R), \max(a_L.b_L, a_L.b_R, a_R.b_L, a_R.b_R)]$$

در صورتیکه $b_L, b_R \neq 0$ آنگاه:

$$X \oslash Y = \frac{[a_L, a_R]}{[b_L, b_R]} = [a_L, a_R] \odot [\frac{1}{b_L}, \frac{1}{b_R}]$$

خاصیت جابه جایی جمع و ضرب و شرکت پذیری روی بازه‌ها

$$X \oplus Y = Y \oplus X, X \odot Y = Y \odot X$$

$$X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z, X \odot (Y \odot Z) = (X \odot Y) \odot Z$$

عضو بی اثر در جمع و ضرب بازه‌ها

$$[0, 0] \oplus X = X \oplus [0, 0] = X, [1, 1] \odot X = X \odot [1, 1] = X \quad A \odot (B \oplus C) \subseteq (A \odot B) \oplus (A \odot C)$$

نتیجه ۳.۲.۵. از ۲.۲.۵ تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$m(A \oplus B) = m(A) + m(B), m(A \ominus B) = m(A) - m(B), w(A \oplus B) = w(A \ominus B) = w(A) + w(B).$$

در حساب بازه‌ای مقایسه دو عدد بازه‌ای بسیار مهم است. روش‌های مختلفی مطرح شده است. در اینجا مقایسه دو عدد بازه‌ای مبتنی بر تعاریف زیر است.

^۳T.Sunaga

^۴Theory of an Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis

^۵R.E.Moores

^۶Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital computing

تعریف ۴.۲.۵. فرض کنیم که $<$ یک رابطه روی دو بازه $M = [a_L, a_R]$, $N = [b_L, b_R]$ باشد، لذا برای $m(M) \leq m(N)$ ، شاخص قابلیت پذیرش^۷، $M < N$ (گویند M کمتر از^۸ N یا N بزرگتر از^۹ M) به صورت $A(M, N) = \frac{m(M) - m(N)}{w(M) + w(N)}$ معرفی می‌شود. طبق ۳.۲.۵ و ۲.۲.۵، همواره $A(M, N) \geq 0$.

$$A(M, N) = \begin{cases} = 0 & m(M) = m(N) \\ > 0, < 1 & m(M) < m(N), a_R > b_L, \text{ تصمیم گیرنده بدبین است}, m(A), m(B) \\ \geq 1 & m(M) < m(N), a_R \leq b_L \end{cases}$$

نتیجه ۵.۲.۵. ماکزیمم دو بازه N, M

$$M \vee N = \begin{cases} N & A(M, N) > 0 \\ M & A(M, N) = 0, w(M) < w(N), \text{ تصمیم گیرنده بدبین است} \\ N & A(M, N) = 0, w(M) < w(N), \text{ تصمیم گیرنده خوش بین است} \end{cases}$$

ملاحظه ۶.۲.۵. اگر $A(M, N) > 0$ برای یک مساله ماکزیمم سازی بازه N به بازه M ارجحیت دارد. و برای مساله مینیمم سازی بازه M به بازه N ارجحیت دارد.

۳.۵ مساله ۱

تعریف ۱.۳.۵. اگر به هر راس، یا به هر یال گراف $G = (V, E)$ یک وزن که معمولاً یک عدد حقیقی است، نسبت داده شود آن گراف را وزن دار گویند.

فرض شود که $G = (V, E)$ یک گراف بازه‌ای با وزن اعداد بازه‌ای باشد که رئوس آن با ترتیب IG نامگذاری شده است. در این قسمت هدف پیدا کردن $S \subset V$ است بطوریکه رئوس آن در G غیر مجاورند (۱-رنگ‌پذیر) است و $\sum_{u \in S} w(u)$ ماکزیمم شود. ($w(u)$ وزن رئوس است). یک رنگ آمیزی گراف تخصیص رنگ‌ها به رئوس است به طوری که دو راس مجاور هم‌رنگ نباشند. مجموعه‌ی راس‌های هم رنگ کلاس رنگی را تشکیل می‌دهند. فرض شود $S(l)$ کلاس رنگی باشد که l بزرگترین راس آن است و $W(l)$ وزن کلاس رنگی $S(l)$ (مجموع وزن رئوس $S(l)$) باشد. با توجه به اینکه یک گراف ممکن است بیش از یک کلاس رنگی داشته باشد که l به عنوان بزرگترین راس آن باشد، هدف مساله پیدا کردن کلاس رنگی شامل راس l ، با ماکزیمم وزن است. فرض شود $S_{max}(l)$ از بین کلاس‌های رنگی شامل راس l بیشترین وزن ($W_{max}(l)$) را داشته باشد. بنابراین $\max\{W_{max}(l) : l \in V\}$ جواب مساله است.

لم ۲.۳.۵ [۱۴] فرض کنیم $S(l)$ کلاس رنگی باشد که l بزرگترین راسش است. اگر $b_l < a_j, \forall j \in V$ آنگاه $S(l) \cup j (= S(j))$ نیز یک کلاس رنگی با وزن $W(l) \oplus w(j)$ است.

^۷Acceptability

^۸inferior

^۹superior

۵. پیدا کردن زیرگراف با مجموعه مستقل (۱-رنگ‌پذیر) با ماکزیمم وزن عدد بازه‌ای در گراف بازه‌ای ۵۰

برهان. فرض شود $S(l)$ کلاس رنگی باشد که $l = [a_l, b_l]$ بزرگترین راس آن است. و $i = [a_i, b_i]$ راس دیگری از $S(l)$ باشد. پس برای هر $j \in V$ طبق فرض مساله $a_i < b_i < b_l < a_j < b_j$ بنا به ۲.۲.۵ ، $I_i \cap I_j = \emptyset$ و $i < l < j$ ، پس $S_l \cup \{j\}$ یک کلاس رنگی است با وزن $W(l) \oplus w(j)$ است. □
فرض شود a_j کوچکترین نقطه پایانی باشد که در $b_i < a_j$ صدق می‌کند. لم زیر وزن کلاس رنگی $S(j)$ را می‌دهد.

لم ۳.۳.۵. [۱۴] ماکزیمم وزن کلاس رنگی $S_{max}(j)$ برابر است با $W_{max}(j) = w(j) \oplus \{ \bigvee_{\substack{i \in V \\ b_i < a_j}} W_{max}(i) \}$ برای هر $j \in V$.

برهان. فرض کنیم $S_{max}(i)$ ماکزیمم وزن کلاس رنگی با وزن $W_{max}(i)$ باشد. در این صورت طبق ۲.۳.۵ ، $S_{max}(i) \cup j$ یک کلاس رنگی برای همه $i \in V$ که در رابطه $b_i < a_j$ صدق می‌کند می‌باشد. طبق ۵.۲.۵ $\bigvee_{\substack{i \in V \\ b_i < a_j}} W_{max}(i)$ بیشترین وزن از بین کلاسهای رنگی است که $b_i < a_j$. حال فرض کنید $S_{max}(j^*)$ کلاس رنگی دیگری باشد. بنابراین $S_{max}(j) = S_{max}(j^*) \cup \{j\}$ و $W_{max}(j) = W_{max}(j^*) \oplus w(j)$ بنابراین:

$$W_{max}(j) = w(j) \oplus \{ \bigvee_{\substack{i \in V \\ b_i < a_j}} W_{max}(i) \}$$

□

حل مساله و الگوریتم

برای حل مساله، الگوریتم MWCC^{۱۰} از مرتبه $O(n)$ در [۱۴] پیشنهاد شده است . داده‌های ورودی: مجموعه $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ شامل بازه‌های حقیقی با وزن $w(j)$ (عددبازه‌ای)، برای هر بازه I_j

داده‌های خروجی: مجموعه مستقل S^* و وزن W^*

اجرای الگوریتم در دو فاز به صورت زیر است.

فاز ۱: وزن ماکزیمم وزن کلاس رنگی مشخص می‌شود. به این ترتیب که $max - wt$ متغیری باشد که وزن ماکزیمم از کلاس رنگی ماکزیمم وزن را ذخیره می‌کند و LV راسی باشد که این وزن را دارد. در ابتدا فرض شود $max - wt = 0$ و $LV = 0$ برای هر e_i دو حالت وجود دارد. اگر e_i نقطه پایانی چپ بازه I_j باشد آن‌گاه $W(j) = max - t \oplus w(j)$ و اگر e_i نقطه پایانی راست بازه I_j باشد آن‌گاه $A(max - wt < W(j))$ محاسبه می‌شود. اگر این مقدار مثبت باشد و یا برابر صفر شود با شرط $w(max - wt) < w(W(j))$ آن‌گاه $max - wt = W(j)$ و $LV = j$ در غیر این صورت آن‌ها مقادیر قبلی را می‌گیرند. در پایان مقدار به دست آمده $max - wt = W(LV)$ وزن ماکزیمم وزن کلاس رنگی است و W^* نامیده می‌شود.

^{۱۰} maximum weight colour classes: (MWCC)

فاز ۲: فرض شود S^* کلاس رنگی باشد که وزن آن W^* است. به وضوح LV در این مجموعه قرار دارد. بنابراین $W(i) = \max - wt = \max - wt \ominus_R w(LV)$ و سپس از $P = LV$ تا $i = P - 1$ اگر $W(i) = \max - wt = \max - wt \ominus_R w(LV)$ و $S^* = S^* \cup \{i\}$ است و $\max - wt, b_i < a_{LV}$.

۴.۵ یک مساله کاربردی

مساله ۲ امروزه تلوزیون نه تنها محبوبترین دستگاه فن آوری برای سرگرمی است بلکه از آن به عنوان بهترین وسیله ساده برای ارسال اطلاعات استفاده می شود لذا واحدهای تولیدی مختلف و سازمان تبلیغات با استفاده از این رسانه‌ی الکترونیکی برای معرفی محصولات یا خدمات خود به مصرف کنندگان بهره می گیرند. و به این طریق برتری محصولات خود را معرفی می کنند و در نتیجه به این طریق می توانند بینندگان را به خرید محصولات خود جلب کنند. در چنین شرایط تعداد بیشتر بینندگان چشم انداز فروش بیشتر محصولات را در پی خواهد داشت.

فرض کنید یک شرکت می خواهد از طریق تلوزیون برای محصولاتش تبلیغ کند. از آنجاییکه کانالهای زیادی از تلوزیون پخش می شود و برخی از این برنامه ها محبوب و پر بیننده است هدف از این مساله کمک به این شرکت است تا بتواند از بین میان برنامه های در نظر گرفته شده در کانالهای مختلف تنها یک میان برنامه انتخاب کند بطوریکه حداکثر بینندگان را داشته باشد.

فرض شود مجموعه فرض می کنیم همه کانال ها از ساعت ۱۲ نیمه شب برنامه هایشان شروع می شود. با مدل بندی این مساله به گراف بازه ای می توان آن را حل نمود. به این ترتیب که فرض می شود: مجموعه $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ همه میان برنامه ها از تمام کانال های تلویزیون باشند که در یک منطقه جغرافیایی در ۲۴ ساعت شبانه روز پخش می شود. به عنوان مثال بازه $I_1 = [8, 10]$ زمان پخش یک برنامه مشخص از یک کانال تلویزیون است. این بازه ها به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته می شوند. و طبق ترتیب IG رئوس گراف از ۱ تا n شماره گذاری می شود. در صورتیکه بازه های متناظر از دو راس اشتراک داشته باشند توسط یال به هم وصل می شوند. همچنین تعداد بینندگان هر برنامه که به دلیل غیر ثابت بودن به صورت بازه های بسته در نظر گرفته شده اند به عنوان وزن هر راس در نظر گرفته می شود. بنابراین در گراف بازه ای $G = (V, E), V = \{1, 2, \dots, n\}$ راس $j \in V$ متناظر با بازه $I_j = [a_j, b_j], j = 1, 2, \dots, n$ که $0 \leq a_j \leq b_j \leq 24$ می باشد. و وزن بازه I_j از راس j ، $w(j) = [w_L(j), w_R(j)]$ است به طوری که نقاط پایانی عدد بازه ای، مینیمم و ماکزیمم تعداد بینندگان از برنامه j است. این مساله معادل مساله ۱ است لذا می توان با الگوریتم ارائه شده از بخش قبل حل نمود.

مثال ۱.۴.۵. در جداول ۱.۵، ۲.۵، ۳.۵ زمان پخش برنامه های سه کانال A, B, E در ۲۴ ساعت شبانه روز در یک روز معینی از سال نشان داده شده است. مطابق شکل ۲.۵ گراف بازه ای حاصل ناهمبند و دارای ۴ مولفه همبندی است. اگر تعداد کانال ها بیشتر شوند، احتمالاً گراف همبند می شود. در غیر این صورت

۵. پیدا کردن زیرگراف با مجموعه مستقل (۱-رنگ‌پذیر) با ماکزیمم وزن عدد بازه‌ای درگراف بازه‌ای ۵۲

الگوریتم برای هر مولفه اجرا می‌شود و ترکیب همه حل‌ها جواب نهایی است. در این گراف

$$S^* = \{E_1, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, E_5, E_6, E_7, E_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, E_{11}, E_{12}, B_{16}, E_{14}\}$$

و وزن مجموعه S^* برابر است با:

$$W^* = [30/6, 35/5]$$

جدول ۱.۵: جدول زمان پخش برنامه‌های کانال E

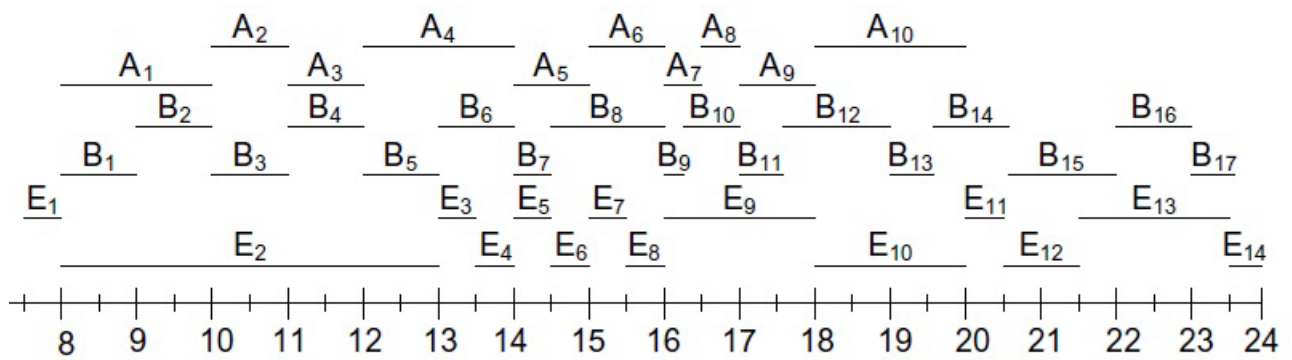
۱۴:۳۰ - ۱۵	۱۴ - ۱۴:۳۰	۱۳:۳۰ - ۱۴	۱۳:۰۰ - ۱۳:۳۰	۸:۰۰ - ۱۳	۷:۳۰ - ۸	زمان پخش
E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	نام برنامه
[۰/۵, ۰/۸]	[۱/۸, ۱/۹]	[۱/۵, ۱/۶]	[۱/۵, ۱/۷]	[۱/۲, ۱/۵]	[۱/۱, ۱/۳]	تعداد بینندگان
۲۰:۳۰ - ۲۱:۳۰	۲۰:۰۰ - ۲۰:۳۰	۱۸:۰۰ - ۲۰:۰۰	۱۶:۰۰ - ۱۸:۰۰	۱۵:۳۰ - ۱۶:۰۰	۱۵:۰۰ - ۱۵:۳۰	زمان پخش
E_{12}	E_{11}	E_{10}	E_9	E_8	E_7	نام برنامه
[۱/۸, ۲/۱]	[۱/۸, ۲/۰]	[۲/۵, ۲/۷]	[۱/۶, ۱/۷]	[۱/۲, ۱/۶]	[۱/۲, ۱/۴]	تعداد بینندگان
				۲۳:۳۰ - ۲۴:۰۰	۲۱:۳۰ - ۲۳:۳۰	زمان پخش
				E_{14}	E_{13}	نام برنامه
				[۱/۲, ۱/۵]	[۱, ۱/۳]	تعداد بینندگان

جدول ۲.۵: جدول زمان پخش برنامه‌های کانال B

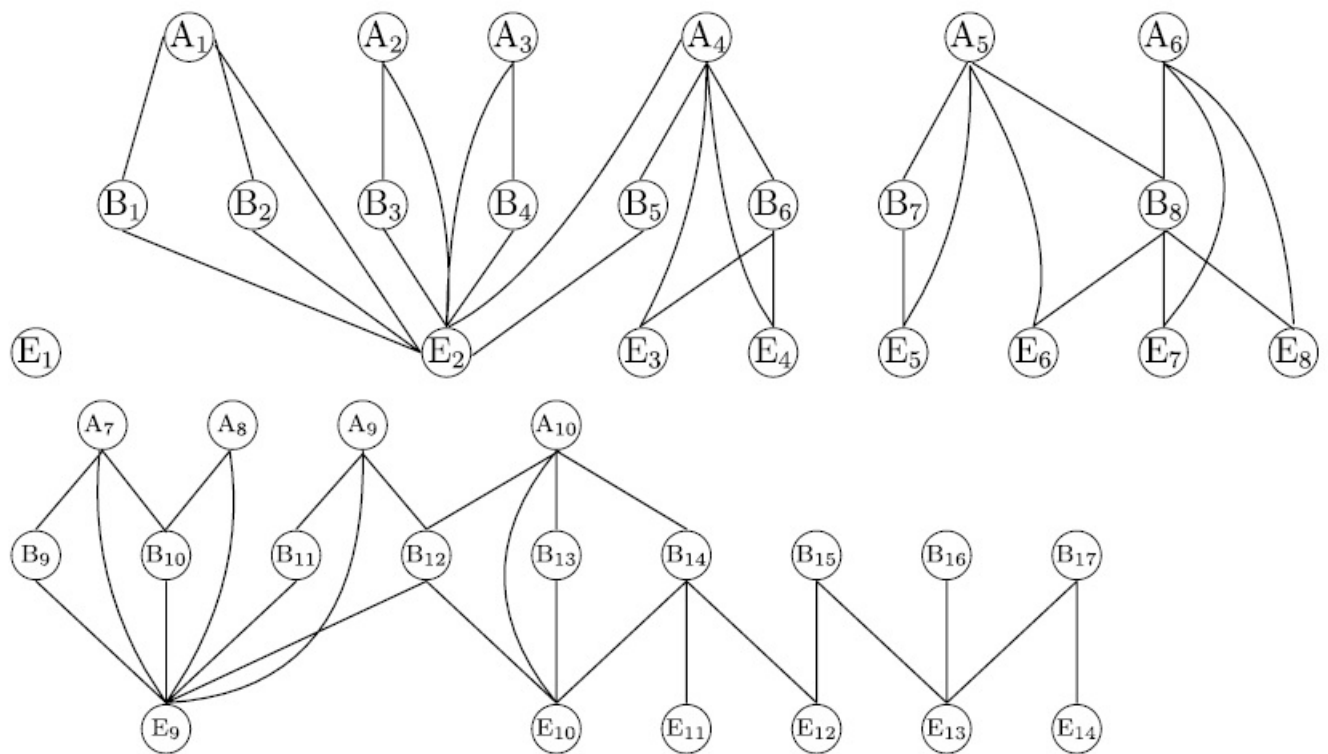
۱۳:۰۰ - ۱۴:۰۰	۱۲:۰۰ - ۱۳:۰۰	۱۱:۰۰ - ۱۲:۰۰	۱۰:۰۰ - ۱۱:۰۰	۹:۰۰ - ۱۰:۰۰	۸:۰۰ - ۹:۰۰	پخش
B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	نام برنامه
[۱/۵, ۱/۷]	[۲/۲, ۲/۵]	[۲/۱, ۲/۳]	[۱/۸, ۲/۱]	[۱/۸, ۲/۱]	[۱/۵, ۱/۶]	تعداد بینندگان
۱۷:۴۰ - ۱۹:۰۰	۱۷:۰۰ - ۱۷:۴۰	۱۶:۱۵ - ۱۷:۰۰	۱۶:۰۰ - ۱۶:۱۵	۱۴:۳۰ - ۱۶:۰۰	۱۴:۰۰ - ۱۴:۳۰	زمان پخش
B_{12}	B_{11}	B_{10}	B_9	B_8	B_7	نام برنامه
[۱/۶, ۱/۸]	[۱/۳, ۱/۷]	[۱/۲, ۱/۴]	[۲/۵, ۲/۸]	[۱/۸, ۱/۹]	[۱/۲, ۱/۴]	تعداد بینندگان
	۲۳:۰۰ - ۲۳:۴۰	۲۲:۰۰ - ۲۳:۰۰	۲۰:۴۰ - ۲۲:۰۰	۱۹:۴۰ - ۲۰:۴۰	۱۹:۰۰ - ۱۹:۴۰	زمان پخش
	B_{17}	B_{16}	B_{15}	B_{14}	B_{13}	نام برنامه
	[۰/۴, ۰/۶]	[۱/۰, ۱/۳]	[۱/۱, ۱/۲]	[۱/۳, ۱/۵]	[۱/۵, ۱/۶]	تعداد بینندگان

جدول ۳.۵: جدول زمان پخش برنامه‌های کانال A

۱۵:۰۰ - ۱۶:۰۰	۱۴:۰۰ - ۱۵:۰۰	۱۲:۰۰ - ۱۴:۰۰	۱۱:۰۰ - ۱۲:۰۰	۱۰:۰۰ - ۱۱:۰۰	۸:۰۰ - ۱۰:۰۰	پخش
A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	نام برنامه
[۱/۲, ۱/۳]	[۱/۲, ۱/۴]	[۲/۱, ۲/۲]	[۱/۹, ۲/۰]	[۱/۳, ۱/۴]	[۱/۱, ۱/۲]	تعداد بینندگان
		۱۸:۰۰ - ۲۰:۰۰	۱۷:۰۰ - ۱۸:۰۰	۱۶:۳۰ - ۱۷:۰۰	۱۶:۰۰ - ۱۶:۳۰	زمان پخش
		A_{10}	A_9	A_8	A_7	نام برنامه
		[۰/۸, ۱/۱]	[۱/۵, ۱/۸]	[۱/۱, ۱/۳]	[۱/۱, ۱/۳]	تعداد بینندگان



شکل ۱.۵: نمایش بازه‌ای از گراف بازه‌ای متناظر



شکل ۲.۵: گراف بازه‌ای متناظر

مراجع

- [1] Golumbic, M. C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York, 1980.
- [2] Lekkerkerker, C. G. and Boland, J. C., *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*. Fund. Math. 51 (1962) 45-64.
- [3] Ramalingam, G. and Pandu Rangan, C., *A unified approach to domination problem in interval graphs*, Information Processing Letters, 27 (1988) 271-274.
- [4] Fulkerson, D. R. and Gross, O. A., *Incidence matrices and interval graphs*, Pacific J. Math., 15 (1965) 835-855.
- [5] Douglass B. West, *Graph Theory*, University of Illinois - Urbana, 2001.
- [6] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory With Application*, Department combinatorics optimization University of Waterloo, Ontario, Canada, 1976.
- [7] Pal, M., Bhattacharjee, G. P., *Optimal sequential and parallel algorithms for computing the diameter and the center of an interval graph*, International Journal of Computer Mathematics, 59 (1995) 1-13.
- [8] Tarasankar Pramanik, Sukumar Mondal and Madhumangal Pal, *The diameter of an interval graph is twice of its radius*, World Academy of Science, Engineering and Technology 80 2011.
- [9] Pal, M. and Bhattacharjee, G. P., *A data structure on interval graphs and its applications*, J. Circuits, Systems, and Computer, 7 (1997) 165-175.
- [10] Anita Pal and Madhumangal Pal, *Interval Tree and its Applications*, AMO - Advanced Modeling and Optimization, 2009
- [11] Saha, Anita, Pal, M. and Pal, T.K., *An optimal parallel algorithm to construct a tree 3-spanner on interval graphs*, International J. Computer Mathematics, 82 (3) (2005) 259-274.

-
- [12] Craine, W.L., *Characterizations of fuzzy interval graphs* Department of Mathematical Science, United State Air Force Academy, C080840-6252, USA Received October 1993: revised January 1994.
 - [13] Mordeson, John N. , Premchand S. Nair, *Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs*, A Springer- Verlag Company.
 - [14] Saha, Anita, Pal, M. and Pal, T.K., *Selection of programme slots of television channels for giving advertisement: A graph theoretic approach*, Information Sciences, 177(2) (2007) 2480-2492.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف	
Height	ارتفاع
Induced	القائی
Intersection	اشتراکی
ب	
Undirected	بی سو
Pessimistic	بدبینانه
Chordless	بی وتر
ت	
Transitive	تعدی
ج	
Orientation	جهت‌دهی
خ	
Clique	خوشه
Eccentricity	خروج از مرکز
Optimistic	خوش‌بینانه
د	
Tree	درخت
Degree	درجه
Cycle	دور
Spanning tree	درخت فراگیر
Acceptability	درجه مقبولیت
ر	
Vertex	راس
Vertex disjoint	راس مجزا

ز

Subgraph زیرگراف

Molecular biology زیست‌شناسی مولوکولی

س

Level سطح

Strucrure ساختار

ش

Radius شعاع

ف

Distance فاصله

Stretch factor فاکتور انبساطی

ق

Crisp قطعی

Diameter قطر

م

Characterization مشخصه

Complement مکمل

Comparability مقایسه‌پذیر

Path مسیر

Adjacent مجاور

Hereditary موروثی

Adjacent مجاور

Encidence matrix ماتریس وقوع

Main path مسیر اصلی

Center مرکز

Trangulated مثلثی

ن

End point نقطه پایانی

Representation نمایش

و

Weight وزن

Parent والد

Neighbourhood	همسایگی
Unique	یکتا
Edge	یال

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Adjacent.....مجاور

Acceptability.....درجه مقبولیت

Acyclic.....بی‌دور

C

Chordless.....بی‌وتر

Cycle.....دور

Clique.....خوشه

Center.....مرکز

Characterization.....مشخصه

Crisp.....قطعی

Complement.....مکمل

Comparability.....مقایسه‌پذیر

D

Diameter.....قطر

Distance.....فاصله

E

Edge.....یال

Eccentricity.....خروج از مرکز

End point.....نقطه پایانی

H

Height.....ارتفاع

Hereditary.....موروثی

I

Induced.....القائی

Intersection.....	اشتراکی
Encidence matrix.....	ماتریس وقوع
L	
Level	سطح
M	
Main path	مسیر اصلی
Molecular biology	زیست‌شناسی مولوکولی
N	
Neighbourhood	همسایگی
O	
Optimictic.....	خوش‌بینانه
Orientation.....	جهت‌دهی
P	
Path	مسیر
Pessimistic	بدبینانه
Parent	والد
R	
Radius.....	شعاع
Situation.....	موقعیت
Representation.....	نمایش
S	
Spanning tree.....	درخت فراگیر
Stretch factor	فاکتور انبساطی
Strucrure	ساختار
Subgraph	زیرگراف
T	
Tree.....	درخت
Transitive.....	تعدی
Trangulated	مثالی
U	
Undirected	بی‌سو
Unique.....	یکتا

V

Vertex راس

Vertex disjoint راس مجزا

 W

Weight وزن

Aabstract

Interval graph is a very important subclass of intersection graphs and perfect graphs. It has many applications in different real life situations. In the first chapter, we present some concepts and notations which we use in the future chapters. In the second chapters we give some hereditary properties and characterizations proposed by Gilmore-Hoffman and Fulkerson-Gross and Lekkerkerker-Boland that are useful to recognize an Interval graph. In the next chapter the data structure, interval tree, is introduced for interval graph. We solve tree 3-spanner, shortest distances between any two vertices, the diameter and center of interval graph with using of interval tree. An $O(n)$ time algorithm is presented to computing for them. In the next chapter with brief review of fuzzy sets we define the fuzzy intersection graph of a family of fuzzy sets. And we show that the characterization of Interval graphs by Gilmore-Hoffman naturally extends to fuzzy Interval graphs while that of Fulkerson-Gross does not. In the last chapter aims to find a solution to the "maximum weight 1 colouring" (MW1C) for an Interval graphs with Interval weight. And an algorithm is presented to solve this problem using $O(n)$ time.

Keywords:Interval graph, Interval tree, All-pairs shortest paths, Tree 3-spanner, Diameter, Interval Fuzzy graph



University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Interval graph and its application

Omolbanin Rabiey

Supervisor

Dr. Sadegh Rahimi Sharbaf

November 2015