دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تصویر، تعامد بیرخوف و زوایا در فضاهای خطی نرم‌دار حقیقی

حسن خواجه

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

شهریور ۱۳۹۴

الهی...

به تو درود می فرستم ای باشکوه عشق و بخشایش، تو حضور مطلقی ای خالق هستی تو را ستایش می کنم. دردهایی است که به هیچ گوشی نمی توان گفت، گفتنی هایی هست که هیچ قلبی محرم آن نیست، تلاش هایی است که جز به مدد تو ثمر نمی بخشد، تغییراتی است که جز به تقدیر تو ممکن نیست، دعاهایی است که جز به آمین تو اجابت نمی شود، قدم های گمشده ای دارم که تنها هدایتگرش تویی، افکار آشفته ای دارم که تنها سامان دهنده اش تویی.

تقدیم به

همسر و فرزند عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. اکنون برخود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش که زحمت راهنمایی و مشاوره‌ی این پایان نامه را برعهده داشتند، کمال تشکر را دارم. سپاس آخر را به مهربانترین همراه زندگیم، همسرم که در این راه مرا یاری کرد، تقدیم می‌کنم.

حسن خواجه

شهریور ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **حسن خواجه** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تصویر، تعامد بیرخوف و زوایا در فضاهای خطی نرم‌دار حقیقی** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی ایرانمنش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حسن خواجه

شهریور ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

امروزه نه‌تنها مفاهیم تعامد و زاویه در تحقیقات هندسی نقش بسیار مهمی ایفا می‌کنند، بلکه این مفاهیم در پژوهش‌های آنالیزی نیز مهم هستند. بنابراین انواع مختلفی از تعامدها و زوایا در فضاهای خطی نرم‌دار تعریف شده‌اند.
در این پایان‌نامه ابتدا مفاهیم تعامد و زاویه را به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم می‌دهیم و با انواع مختلفی از تعامدها و زوایای تعمیم‌یافته آشنا می‌شویم. سپس از این تعامدها و زوایا در بحث مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی و مفهوم بهترین تقریب استفاده می‌کنیم. در ادامه سعی داریم تا با کمک تعامد بیرخوف و مفهوم بهترین تقریب زوایای جهت‌دار را تعریف کنیم و همچنین با کمک نوعی تصویر در صفحه‌ی مینکوفسکی زاویه‌ای را تعریف می‌کنیم که با تعامد بیرخوف رابطه دارد.
در فصل اول قضایا و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم. در فصل دوم مفهوم تعامد را از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم داده و با برخی از تعامدهای تعمیم‌یافته آشنا می‌شویم. سپس در مورد یکی از مهمترین تعامدها یعنی تعامد بیرخوف به‌طور مفصّل بحث می‌کنیم و در انتهای این فصل به مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی به کمک تعامدها بالاخص تعامد بیرخوف می‌پردازیم. در فصل سوم با زوایای تعمیم‌یافته در فضاهای خطی نرم‌دار آشنا می‌شویم و برخی از این زوایا از جمله زوایای ویلسن و $g-$زاویه را معرفی می‌کنیم و سپس به کمک این زوایا به مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی می‌پردازیم. در فصل چهارم مفهوم تعامد و زاویه را در فضاهای شبه ضرب داخلی معرفی می‌کنیم و در انتهای فصل با یکی از کاربردهای $g-$تعامد در بحث بهترین تقریب آشنا می‌شویم. در فصل پنجم به کمک تعامد بیرخوف و بحث بهترین تقریب، زوایای جهت‌دار را تعریف می‌کنیم. در فصل ششم با استفاده از نوعی تصویر در صفحه‌ی مینکوفسکی، $q-$زاویه را تعریف می‌کنیم که این زاویه با تعامد بیرخوف رابطه دارد.
کلمات کلیدی: تعامد، تعامد بیرخوف، زاویه، فضاهای شبه ضرب داخلی، بهترین تقریب، صفحه‌ی مینکوفسکی، تصویر

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ پیشگفتار

تعامد[۱] و زاویه[۲] از مفاهیم بسیار مهم در هندسه‌ی اقلیدسی هستند. این دو مفهوم بقدری مهم‌اند که اقلیدس در اصول موضوعه‌ی خود این دو مفهوم را گنجانده و هندسه‌ی خود را براساس این مفاهیم استوار ساخته است. همچنین قضیه‌ی فیثاغورس که در ریاضیات مقدماتی با آن آشنا شدیم، بر پایه‌ی این مفاهیم است. بعلاوه این مفاهیم در علوم دیگر چون فیزیک کاربردهای زیادی دارند. در هندسه‌ی اقلیدسی یاد گرفتیم مفاهیم تعامد و زاویه کاملاً به‌هم وابسته هستند، یعنی هرجا صحبت از زاویه شود می‌توان تعامد را نیز تعریف کرد و هرجا صحبت از تعامد شود می‌توان گفت زاویه‌ای وجود دارد که در حالت خاص این زاویه به مفهوم تعامد می‌انجامد. در این پایان‌نامه می‌خواهیم این مفاهیم را به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم دهیم و با کاربردهای این مفاهیم در هندسه‌ی فضاهای خطی نرم‌دار آشنا شویم. اما دلیل این تعمیم، این است ریاضی‌دانان فهمیدند که وقتی وارد هندسه‌ی فضاهای خطی نرم‌دار می‌شویم، تنها چیزی که نادیده گرفته می‌شود، اصل چهارم اقلیدس است که درباره‌ی زاویه و اندازه‌ی زاویه می‌باشد. به‌همین دلیل این دو مفهوم به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم داده شدند و تعامدها و زوایای تعمیم‌یافته‌ی زیادی معرفی شدند که با تعریف این مفاهیم در فصل دوم و سوم آشنا می‌شویم. بخاطر وجود رابطه‌ی بین تعامد و زاویه، برخی از زوایا توسط تعامدها معرفی می‌شوند و برعکس برخی از تعامدها توسط زوایا معرفی می‌شوند که در فصل سوم و چهارم با این تعامدها و زوایا آشنا می‌شویم.
از مهم‌ترین تعامدهایی که ما با آن‌ها بیشتر سروکار داریم، یکی تعامد بیرخوف و دیگری $g-$تعامد است. تعامد بیرخوف در سال ۱۹۳۵ توسط بیرخوف[۳] معرفی شد و سپس در سال ۱۹۴۵ ریاضیدانی به نام جیمز[۴] در مورد خواص این تعامد مطالعات جامعی را انجام داد، که در فصل دوم با این تعامد بیشتر

[۱] Orthogonality
[۲] Angle
[۳] Birkhoff
[۴] James

آشنا می‌شویم. همچنین $g-$تعامد توسط میلیسیک[۵] در سال ۱۹۹۳ معرفی شد که در فصل سوم با این تعامد به طور مفصّل آشنا می‌شویم. لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه با دو کاربرد زوایا و تعامد یکی در بحث بهترین تقریب و دیگری در بحث مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی آشنا می‌شویم. ابتدا در فصل اوّل به بیان تعاریف و قضایایی که در این پایان‌نامه مورد استناد قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

۲.۱ تعاریف و قضایای اولیه

تعریف ۱.۱ (فضاهای متریک). فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، یک متر روی X نگاشتی چون $d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ است که برای هر $x,y,z\in X$ در شرایط زیر صدق می‌کند،

(۱) $d(x,x)\geq 0$،

(۲) $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$،

(۳) $d(x,y)=d(y,x)$،

(۴) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$،

در این صورت به دوتایی (X,d) یک فضای متریک گفته می‌شود.

تعریف ۲.۱. اگر (X,d) یک فضای متریک باشد و A,B زیر مجموعه‌هایی از X باشند،

(۱) فاصله‌ی بین نقطه‌ی $x\in X$ و مجموعه‌ی A را با نماد $d(x,A)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$d(x,A):=\inf\{\, d(x,y);\quad y\in A\,\}.$$

(۲) فاصله‌ی بین دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $d(A,B)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$d(A,B):=\inf\{\, d(x,y);\quad x\in A,\, y\in B\,\}.$$

تعریف ۳.۱ (فضاهای خطی نرم‌دار). فرض کنید X یک فضای برداری ناتهی روی میدان اعداد حقیقی باشد، یک نرم یک تابع حقیقی مقدار چون $\|.\|: X\longrightarrow \mathbb{R}$ است که برای هر $x,y\in X$ در شرایط زیر صدق می‌کند،

(۱) $\|x\|\geq 0$،

[۵] Milicic

(۲) $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

(۳) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

(۴) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

در این‌صورت به دوتایی $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار گفته می‌شود.

هر فضای خطی نرم‌دار X، یک فضای متریک است به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ متر آن به‌صورت $d(x,y) := \|x-y\|$ تعریف می‌شود، که این متر را متر القاشده توسط نرم می‌گویند.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد، در این‌صورت مجموعه‌ی $B(X) = \{x \in X; \quad \|x\| \leq 1\}$ را گوی واحد و مجموعه‌ی $S(X) = \{x \in X; \quad \|x\| = 1\}$ را کره‌ی واحد می‌گویند.

تعریف ۵.۱ (فضاهای ضرب داخلی). فضای خطی حقیقی X را یک فضای ضرب داخلی می‌گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ ، اسکالری حقیقی چون $\langle x, y\rangle$ موجود باشد که دارای شرایط زیر باشد،

(۱) برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\langle x, x\rangle \geq 0$،

(۲) $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

(۳) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$،

(۴) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x, y \in X$ داشته باشیم $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$،

(۵) به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$،

در این‌صورت به دوتایی $(X, \langle ., .\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی می‌گوییم. فضاهای ضرب داخلی را اغلب فضاهای پیش‌هیلبرت نیز می‌گویند. همچنین هر فضای ضرب داخلی یک فضای خطی نرم‌دار با نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ است که به آن نرم القاشده توسط ضرب داخلی می‌گویند.

قضیه ۱.۱ (قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع). *فرض کنید $(X, \langle ., .\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

در سال ۱۹۳۵ جردن [۶] ثابت کرد که فضای خطی نرم‌دار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع برقرار باشد. البته قضیه‌ی ۱.۱ را به شکل‌های دیگر نیز بیان کردند که در اینجا دو حالت آن‌را بیان می‌کنیم.

[۶] Jordan

قضیه ۲.۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت $\|.\|$ توسط یک ضرب داخلی القاشده است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in X$،*

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ \sim ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲,$$

که در آن $\sim$ می‌تواند $\leq$ یا $\geq$ باشد.

برهان. برای اثبات به [۳۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۳.۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت $\|.\|$ توسط یک ضرب داخلی القاشده است اگر و فقط اگر برای هر $u, v \in S(X)$،*

$$\|u+v\|^۲ + \|u-v\|^۲ \sim ۴,$$

که در آن $\sim$ می‌تواند $\leq$ یا $=$ یا $\geq$ باشد.

برهان. برای اثبات به [۳۷] مراجعه کنید. □

البته برای مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی شرایط دیگری نیز وجود دارد که ما در تذکر بعدی این شرایط را ذکر می‌کنیم.

نکته ۶.۱. *[۳۸] فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت اگر هرکدام از شرایط زیر برقرار باشد، X یک فضای ضرب داخلی است.*

(۱) *اگر $\|x\| = \|y\| = ۱$، آنگاه $\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۴$.*

(۲) *اگر $\|x\| = \|y\| = ۱$، آنگاه اعداد $۰ < \alpha, \beta < ۱$ موجود باشند که*

$$\begin{aligned}\beta(۱-\beta)\|\alpha x + (۱-\alpha)y\|^۲ + \alpha(۱-\alpha)\|\beta x - (۱-\beta)y\|^۲ \\ \sim [\alpha+\beta-۲\alpha\beta][\alpha\beta + (۱-\alpha)(۱-\beta)],\end{aligned}$$

که در آن $\sim$ می‌تواند $\leq$ یا $\geq$ باشد.

(۳) *اگر $\|x+y\| = \|x-y\|$، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{R}$، $\|x+ky\| = \|x-ky\|$.*

(۴) *اگر $\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{R}$، $\|x+ky\|^۲ = \|x\|^۲ + \|ky\|^۲$.*

(۵) *عدد حقیقی ثابت $\alpha \neq ۰, \pm ۱$ موجود باشد، به‌طوری‌که از $\|x+y\| = \|x-y\|$ نتیجه بگیریم $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$.*

(۶) *اگر $\|x\| = \|y\|$، آنگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{۰\}$، $\|\alpha x + \alpha^{-۱} y\| \geq \|x+y\|$.*

(۷) *اگر* $\|x-y\| = \|x+y\|$، *آنگاه برای هر* $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|x-\alpha y\| = \|x+\alpha y\|$.

مثال ۷.۱. فضای خطی نرم‌دار $(C([a,b]), \|.\|)$ را در نظر بگیرید، به‌راحتی می‌توان نشان داد که نرم این فضا توسط هیچ ضرب داخلی القا نشده است به عبارت دیگر این فضا نمی‌تواند ضرب داخلی باشد، برای نشان دادن این موضوع کافیست قرار دهید $f(t) = ۱$ و $g(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$، در این‌صورت داریم:

$$\|f+g\|^۲ + \|f-g\|^۲ \neq ۲(\|f\|^۲ + \|g\|^۲).$$

تعریف ۸.۱ (فضای هیلبرت)**.** اگر فضای ضرب داخلی X همراه با نرم القاشده توسط ضرب داخلی کامل باشد، آنگاه فضای X را فضای هیلبرت می‌گویند.

تعریف ۹.۱. فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، در این‌صورت $K \subset X$ را اکیداً محدب می‌گویند هرگاه به ازای هر دو عضو متمایز $x, y \in K$ و به‌ازای هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داشته باشیم $\lambda x + (۱-\lambda) y \in K$.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، در این‌صورت

(۱) زیر مجموعه‌ی C از X را یک مخروط محدب[۷] می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \geq ۰$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in C$،

(۲) فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از X باشد، در این‌صورت زیرفضای تولید شده توسط A با نماد span(A) نمایش داده می‌شود و برابر با مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات خطی متناهی از اعضای A است. یعنی داریم:

$$\text{span(A)} := \{ \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i; \quad x_i \in A,\, \alpha_i \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N} \}$$

به عبارت دیگر span(A) کوچکترین زیرفضای از X شامل A است.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ و $(Y, \|.\|)$ دو فضای خطی نرم‌دار باشند، نگاشت $T: X \to Y$ را یک عملگر خطی از X به توی Y می‌نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و $\alpha_۱, \alpha_۲ \in \mathbb{R}$،

$$T(\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲) = \alpha_۱ T(x_۱) + \alpha_۲ T(x_۲).$$

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ و $(Y, \|.\|)$ فضاهای خطی نرم‌دار باشند، در این‌صورت عملگر خطی $T: X \to Y$ را کراندار می‌گوییم هرگاه ثابت M موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$،

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|,$$

[۷] Convex cone

در این‌صورت کوچکترین M که در شرط فوق صدق می‌کند را نرم T می‌گویند. می‌توان نشان داد که،

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \|x\| \neq ۰,\, x \in X \right\}\\ &= \sup\{\, \|Tx\|; \quad \|x\| \leq ۱,\, x \in X \,\}\\ &= \sup\{\, \|Tx\|; \quad \|x\| = ۱,\, x \in X \,\}.\end{aligned}$$

تعریف ۱۳.۱. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی از فضای برداری X به توی فضای برداری Y را با نماد $L(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و این مجموعه با اعمال جمع و ضرب اسکالر زیر، یک فضای برداری است.

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x), \quad (T_۱ + T_۲)(x) = T_۱(x) + T_۲(x).$$

تعریف ۱۴.۱. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی کراندار از فضای خطی نرم‌دار X به توی فضای خطی نرم‌دار Y را با نماد $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و این فضا با نرم زیر یک فضای خطی نرم‌دار است.

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}; \quad ۰ \neq x \in X \right\}.$$

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد، یک تابعک خطی روی X به معنای عملگر خطی $f: X \to \mathbb{R}$ است.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید X^* مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی کراندار روی فضای خطی نرم‌دار X باشد،در این‌صورت همراه با نرم زیر یک فضای خطی نرم‌دار است،

$$\|f\| = \sup\left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|}; \quad ۰ \neq x \in X \right\},$$

فضای $X^* = B(X, \mathbb{R})$ را اولین فضای دوگان X می‌گویند.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، نگاشت $x \longmapsto f_x$ از $X \backslash \{۰\}$ به $X^* \backslash \{۰\}$ را یک نگاشت پشتیبان[۸] می‌گوییم هرگاه،

(۱) برای هر $x \in S(X)$ داشته باشیم $\|f_x\| = ۱ = f_x(x)$،

(۲) برای هر $\lambda > ۰$ داشته باشیم $f_{\lambda x} = \lambda f_x$.

[۸] support mapping

بر طبق این تعریف اگر $\lambda > ۰$ باشد، در این صورت به ازای هر $x, y \in S(X)$ داریم :

$$\begin{aligned}\frac{f_x(y)}{\|x\|} = \frac{f_x(\lambda y)}{\lambda\|x\|} &= \frac{f_x(x) - ۱ + f_x(\lambda y)}{\lambda\|x\|} = \frac{f_x(x) + f_x(\lambda y) - \|x\|^۲}{\lambda\|x\|}\\ &= \frac{f_x(x+\lambda y) - \|x\|^۲}{\lambda\|x\|} \le \frac{|f_x(x+\lambda y)| - \|x\|^۲}{\lambda\|x\|}\\ &\le \frac{\|f_x\|\|x+\lambda y\| - \|x\|^۲}{\lambda\|x\|} = \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}\\ &\le \frac{\|x+\lambda y\|^۲ - |f_{x+\lambda y}(x)|}{\lambda\|x+\lambda y\|} = \frac{f_{x+\lambda y}(x+\lambda y) - |f_{x+\lambda y}(x)|}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\ &= \frac{\lambda f_{x+\lambda y}(y) + f_{x+\lambda y}(x) - |f_{x+\lambda y}(x)|}{\lambda\|x+\lambda y\|} \le \frac{\lambda f_{x+\lambda y}(y)}{\lambda\|x+\lambda y\|} = \frac{f_{x+\lambda y}(y)}{\|x+\lambda y\|},\end{aligned}$$

در این‌صورت به ازای هر $x, y \in S(X)$،

$$\frac{f_x(y)}{\|x\|} \le \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \le \frac{f_{x+\lambda y}(y)}{\|x+\lambda y\|}.$$

تعریف ۱۸.۱. فضای باناخ را یک فضای هموار[۹] در نقطه‌ی $x_۰ \in S(X)$ گویند، هرگاه تابعک خطی یکتای $f \in S(X^*)$ موجود باشد که $f(x_۰) = ۱$. اگر X در هر نقطه‌ی از $S(X)$ هموار باشد، آنگاه می‌گوییم فضای X هموار است.

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد، در این‌صورت نرم روی X را مشتق‌پذیر گتو[۱۰] در نقطه‌ی $x_۰ \in S(X)$ گوییم، هرگاه برای هر $y \in S(X)$ داده شده حد زیر وجود داشته باشد،

$$\tau(x_۰, y) = \lim_{\lambda \to ۰} \frac{\|x_۰ + \lambda y\| - \|x_۰\|}{\lambda}.$$

اگر نرم روی X در هر نقطه‌ی $S(X)$ مشتق‌پذیر گتو باشد، آنگاه گوییم X دارای نرم مشتق‌پذیر گتو است.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت X را یک فضای هموار می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in S(X)$ داشته باشیم، $\tau_+(x,y) = \tau_-(x,y)$ که در آن،

$$\tau_\pm(x,y) := \lim_{t \to ۰^\pm} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}.$$

تعریف ۲۱.۱. فضای خطی نرم‌دار حقیقی $(X, \|.\|)$ را اکیداً محدب می‌گویند، اگر برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$ داشته باشیم، $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ آنگاه $\lambda > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که $y = \lambda x$.

مثال ۲۲.۱. برای هر $n \in \mathbb{N}$ فضاهای $(\mathbb{R}^n, \|.\|_e)$ با نرم زیر یک فضای اکیداً محدب هستند،

$$\|x\|_e = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲}.$$

همچنین فضاهای l^p و L^p برای هر $۱ < p < \infty$ نیز اکیداً محدب می‌باشند.

---
[۹] smooth space

[۱۰] Gateaux differentiable

تعریف ۲۳.۱ (جمع مستقیم). فضای برداری X را جمع مستقیم دو زیر فضای Y و Z از X می‌گوییم و با نماد $X = Z \bigoplus Y$ نمایش می‌دهیم، هرگاه هر $x \in X$ دارای نمایش یکتای مانند $x = y + z$ باشد که در آن $z \in$ و $y \in Y$ است.

تعریف ۲۴.۱ (ابرصفحه). یک ابرصفحه چون H در فضای برداری X یک مجموعه است به‌طوری‌که X را می‌توان به صورت جمع مستقیم H و یک زیرفضای یک بعدی از X بیان کرد. به عبارت دیگر عضوی چون $x \in X$ موجود است به‌طوری‌که $X = H \bigoplus [x]$، که در آن $[x] = \text{span}\{x\}$.

۱.۲.۱ فضای نیم‌ضرب داخلی

در این بخش با مفهوم فضاهای نیم‌ضرب داخلی[۱۱] روی میدان اعداد مختلط براساس ایده‌ی لامر[۱۲] و جایلز[۱۳] آشنا می‌شویم.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید X یک فضای خطی باشد، نگاشت $[.,.] : X \times X \to \mathbb{C}$ را یک نیم‌ضرب داخلی می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ در همه‌ی شرایط زیر صدق کند،

(a) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$،

(b) برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$،

(c) $[x, x] \geq ۰$ و اگر $[x, x] = ۰$ آنگاه $x = ۰$،

(d) $|[x, y]|^۲ \leq [x, x].[y, y]$،

(e) برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $[x, \lambda y] = \bar{\lambda}[x, y]$،

در این‌صورت به دوتایی $(X, [.,.])$ یک فضای نیم‌ضرب داخلی می‌گوییم.

مثال ۲۶.۱. تابعک زیر یک نیم‌ضرب داخلی روی فضای $(l^p, \|.\|_p)$ است، که در آن $۱ \leq p < \infty$،

$$g(x, y) = \|x\|_p^{۲-p} \sum_k |x_k|^{p-۱} sgn(x_k) y_k; \quad x = (x_k),\ y = (y_k) \in l^p.$$

گزاره ۱.۱. *فرض کنید X یک فضای خطی باشد و $[.,.]$ یک نیم ضرب داخلی روی X باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند،*

(۱) *نگاشت $x \longmapsto [x, x]^{\frac{۱}{۲}}$ از X به توی $\mathbb{R}^+$ یک نرم روی X است،*

(۲) *برای هر $y \in X$ تابعک $f_y(x) = [x, y]$ یک تابعک خطی پیوسته است و بعلاوه $\|f_y\| = \|y\|$.*

[۱۱] semi inner product space

[۱۲] Lumer

[۱۳] Giles

برهان. (۲) بوضوح f_y خطی است، بر طبق ویژگی (d) برای هر $x \in X$ داریم $|f_y(x)| \leq \|x\|.\|y\|$. و این یعنی f_y کراندار است و $\|f_y\| \leq \|y\|$. از طرفی

$$\|f_y\| \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{\|y\|^{۲}}{\|y\|} = \|y\|,$$

بنابراین $\|f_y\| = \|y\|$. □

تعریف ۲۷.۱. نگاشت $J : X \to ۲^{X^*}$ با ضابطه‌ی

$$J(x) := \{\, x^* \in X^*; \quad \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|, \ \|x^*\| = \|x\|\,\},$$

یک نگاشت دوگانی نرمال شده[۱۴] از فضای خطی نرم‌دار X می‌گویند.

تعریف ۲۸.۱. نگاشت $\tilde{J} : X \to X^*$ را یک سکشن[۱۵] از نگاشت دوگانی نرمال شده می‌گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\tilde{J}(x) \in J(x)$.

قضیه ۴.۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت هر نیم ضرب داخلی چون $[.,.]$ که نرم $\|.\|$ را تولید می‌کند به فرم زیر است،*

$$[x, y] = \left\langle \tilde{J}(y), x \right\rangle,$$

که در آن $\tilde{J}$ یک سکشن از نگاشت دوگانی نرمال شده است.

برهان. برای اثبات به فصل (۲) از [۵۴] مراجعه کنید. □

گزاره ۲.۱. *اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند،*

(۱) *X هموار است،*

(۲) *روی X یک نیم ضرب داخلی یکتا وجود دارد که نرم $\|.\|$ را تولید می‌کند.*

برهان. برای اثبات به فصل (۲) از [۵۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۹.۱. یک نیم ضرب داخلی مانند $[.,.]$ را روی فضای خطی X پیوسته می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ تساوی زیر برقرار باشد،

$$\lim_{t\to ۰} Re[y, x + ty] = Re[y, x],$$

منظور از Re قسمت حقیقی عدد مختلط است.

[۱۴] Normalized Duality Mapping

[۱۵] section

قضیه ۵.۱. *فرض‌کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $[.,.]$ یک نیم ضرب داخلی باشد که نرم $\|.\|$ را تولید می‌کند، در این‌صورت $[.,.]$ پیوسته است اگر و فقط اگر X هموار باشد.*

برهان. برای اثبات به فصل (۲) از [۵۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۱. *فرض‌کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $[.,.]$ یک نیم ضرب داخلی باشد که نرم $\|.\|$ را تولید می‌کند، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند،*

(۱) *X اکیداً محدب است،*

(۲) *برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$ که $[x, y] = \|x\|.\|y\|$ عدد مثبت λ موجود است که $x = \lambda y$.*

برهان. (۲) $\rightarrow$ (۱). فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای اکیداً محدب باشد و $x, y \in X\backslash\{0\}$ به‌طوری‌که $[x, y] = \|x\|.\|y\|$. بر طبق قضیه‌ی ۴.۱ یک سکشن از نگاشت دوگانی نرمال شده وجود دارد که $\left\langle \tilde{J}(y), x \right\rangle = \|x\|.\|y\|$. در نتیجه داریم :

$$\left\langle \tilde{J}(y), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \|y\| = \|\tilde{J}(y)\|, \quad \left\langle \tilde{J}(y), \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \|y\| = \|\tilde{J}(y)\|.$$

چون X یک فضای اکیداً محدب است، لذا هر تابعک خطی پیوسته نرم خود را حداکثر در یک نقطه اختیار می‌کند، پس $\frac{y}{\|y\|} = \frac{x}{\|x\|}$. قرار دهید $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ در نتیجه $x = \lambda y$.
(۱) $\rightarrow$ (۲). نشان می‌دهیم که شرط (۲) خاصیت زیر را برای هر $x, y \in X$ نتیجه می‌دهد،

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = \lambda y.$$

اگر برای هر $x, y \in X\backslash\{0\}$ داشته باشیم $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$، آنگاه نتیجه می‌گیریم که $Re[x, x + y] = \|x\|.\|x + y\|$ یا $Re[y, x + y] = \|y\|.\|x + y\|$. از طرفی

$$Re[x, x + y] \leq \|x\|.\|x + y\|, \quad Re[y, x + y] \leq \|y\|.\|x + y\|.$$

حال فرض کنید هر دو نامساوی اکید باشند، با جمع طرفین داریم:

$$Re[x, x + y] + Re[y, x + y] < (\|x\| + \|y\|)\|x + y\|,$$

در نتیجه $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$، که این با فرض در تناقض است. در نتیجه یکی از دو تساوی برقرارند، فرض کنید $Re[x, x + y] = \|x\|.\|x + y\|$، در این‌صورت بر طبق (۲) برای $t \neq 1$ داریم $x = t(x + y)$. پس برای $\lambda = \frac{t}{1 - t}$ نتیجه می‌گیریم که $x = \lambda y$. □

حال به معرفی حد بالای و پایین[۱۶] نیم‌ضرب داخلی می‌پردازیم. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد، نگاشت $f : X \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{۲}\|x\|^{۲}$ به‌وضوح محدب و حدهای زیر برای هر $x, y \in X$ موجود هستند،

$$(x, y)_i = \lim_{t \to ۰^-} \frac{\|y + tx\|^{۲} - \|y\|^{۲}}{۲t},$$
$$(x, y)_s = \lim_{t \to ۰^+} \frac{\|y + tx\|^{۲} - \|y\|^{۲}}{۲t}.$$

نگاشت $(x, y)_s$ را حد بالای نیمضرب داخلی و نگاشت $(x, y)_i$ را حد پایین نیم ضرب داخلی می‌گویند.

گزاره ۳.۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و همچنین $p, q \in \{s, i\}, p \neq q$، در این‌صورت برای هر $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ گزاره‌های زیر برقرار هستند،*

(۱) $(x, x)_p = \|x\|^{۲}$،

(۲) *اگر* $\lambda > ۰$ *آنگاه* $(\lambda x, y)_p = \lambda (x, y)_p$،

(۳) *اگر* $\lambda > ۰$ *آنگاه* $(x, \lambda y)_p = \lambda (x, y)_p$،

(۴) *اگر* $\lambda < ۰$ *آنگاه* $(\lambda x, y)_p = \lambda (x, y)_q$،

(۵) *اگر* $\lambda < ۰$ *آنگاه* $(x, \lambda y)_p = \lambda (x, y)_q$.

برهان. گزاره‌های (۲) و (۴) را همزمان ثابت می‌کنیم. برای هر $x, y \in X$،

$$(\lambda x, y)_p = \lim_{t \to ۰^\pm} \frac{\|y + \lambda t x\|^{۲} - \|y\|^{۲}}{۲t},$$

قرار دهید $u = \lambda t$. در این صورت

$$(\lambda x, y)_p = \begin{cases} \lambda \lim_{u \to ۰^\pm} \dfrac{\|y + ux\|^{۲} - \|y|^{۲}}{۲u}; & \lambda \geq ۰ \\ \lambda \lim_{u \to ۰^\mp} \dfrac{\|y + ux\|^{۲} - \|y|^{۲}}{۲u}; & \lambda < ۰ \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \lambda (x, y)_p; & \lambda \geq ۰ \\ \lambda (x, y)_q; & \lambda < ۰ \end{cases}$$

□

نتیجه ۱.۱. *بر طبق مفروضات قبل برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ با شرط $\alpha\beta \geq ۰$ و $x, y \in X$ داریم:*

$$(\alpha x, \beta y)_p = \alpha\beta (x, y)_p.$$

[۱۶] Superior and Inferior

گزاره ۴.۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آنگاه برای هر $x, y, z \in X$ گزاره‌های زیر برقرارند،*

(۱) $\dfrac{\|x+sy\|^{2}-\|x\|^{2}}{2s} \leq (y,x)_i \leq (y,x)_s \leq \dfrac{\|x+ty\|^{2}-\|x\|^{2}}{2t}$،

(۲) $|(x,y)_p| \leq \|x\|.\|y\|$،

(۳) $(x+z,y)_{s(i)} \leq (\geq)(x,y)_{s(i)} + (z,y)_{s(i)}$.

برهان. (۱) نگاشت $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(t) := \frac{1}{2}\|x+ty\|^{2}$ را برای هر دو ثابت $x, y \in X$ نظر بگیرید. واضح است که g روی $[0,\infty)$ محدب است، بنابراین برای هر $t > 0$ نتیجه می‌گیریم $\frac{g(t)-g(0)}{t-0} \geq g'_{+}(0)$. و این یعنی این‌که داریم:

$$\frac{\|x+ty\|^{2}-\|x\|^{2}}{2t} \geq \lim_{t\to 0^{+}} \frac{\|x+ty\|^{2}-\|x\|^{2}}{2t} = (y,x)_s.$$

نامساوی بعدی بر طبق اینکه $g'_{+}(0) \geq g'_{-}(0)$ واضح است. □

قضیه ۷.۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، اگر $[.,.]$ یک نیم‌ضرب داخلی باشد که نرم $\|.\|$ را تولید کند، در این‌صورت گزاره‌های زیر را داریم:*

(۱) *اگر X یک فضای حقیقی باشد، آنگاه* $[x,y] = (x,y)_s$،

(۲) *اگر X یک فضای مختلط باشد، آنگاه* $[x,y] = (x,y)_s - i(ix,y)_s$.

برهان. برای اثبات به فصل سوم از [۵۴] مراجعه کنید. □

برای اطلاعات بیشتر در مورد فضاهای نیم‌ضرب داخلی از دید لامر و جایلز می‌توانید به [۵۴] و [۳۱] مراجعه کنید. حال به معرفی فضاهای نیم‌ضرب داخلی از دید میلیسیک می‌پردازیم.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، نگاشت $(.,.)_g : X \times X \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$(x,y)_g := \frac{1}{2}\big[(x,y)_s + (x,y)_i\big],$$

را یک نیم‌ضرب داخلی از دید ملیسیک می‌گویند.

در گزاره‌ی بعد ویژگی‌های مهم این نیم ضرب داخلی را بیان می‌کنیم. این ویژگی‌ها شبیه ویژگی نیم ضرب داخلی از دید لامر و جایلز است.

گزاره ۵.۱. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت گزاره‌های زیر برای هر $x, y \in X$ برقرار هستند،*

(۱) $(x,x)_g = \|x\|^2$،

(۲) $(ix,x)_g = (x,ix)_g = 0$،

(۳) $(ix,y)_g = (x,iy)_g = 0$،

(۴) $(ix,iy)_g = (x,y)_g$،

(۵) *برای هر* $\alpha\beta \geq 0$، $(\alpha x,\beta y)_g = \alpha\beta(x,y)_g$،

(۶) $\left|(x,y)_g\right| \leq \|x\|.\|y\|$،

(۷) $(-x,y)_g = -(x,y)_g$.

برهان. برای اثبات به فصل چهارم از [۵۴] مراجعه کنید. $\square$

گزاره ۶.۱. *فرض کنید* $(X,\|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت برای هر عدد حقیقی* $\alpha \in \mathbb{R}$ *و* $x,y \in X$،

$$(\alpha x + y, x)_g = \alpha\|x\|^2 + (y,x)_g.$$

برهان. برای اثبات به فصل چهارم از [۵۴] مراجعه کنید. $\square$

گزاره ۷.۱. *فرض کنید* $(X,\|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد و* $x,y \in X$*، در این‌صورت*

$$\left|(y+z,x)_g - (z,x)_g\right| \leq \|y\|.\|x\|.$$

نتیجه ۲.۱. *برای هر* $x \in X$ *نگاشت* $(.,x)_g$ *روی* X *پیوسته است.*

فصل ۲

تعامد

۱.۲ مقدمه

یکی از مفاهیم بسیار مهم در هندسه‌ی اقلیدسی بحث تعامد است. همه‌ی ما با مفهوم تعامد در هندسه‌ی اقلیدسی آشنا هستیم. وقتی از هندسه‌ی اقلیدسی وارد هندسه‌ی فضاهای نرم‌دار می‌شویم، تنها چیزی که نادیده گرفته می‌شود، اصل چهارم اقلیدس است. بنابراین از سال ۱۹۳۴ تعدادی از ریاضی‌دانان به این فکر افتادند تا مفهوم تعامد را به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم دهند. در نتیجه ریاضی‌دانان انواع مختلفی از تعامدهای را در فضاهای خطی نرم‌دار معرفی کرده‌اند. هدف ما در این فصل این است تا مفهوم تعامد را به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم دهیم. ابتدا مفهوم تعامد در فضاهای ضرب داخلی بیان می‌کنیم و ویژگی تعامد در این فضاها بررسی می‌کنیم. سپس به معرفی برخی از تعامدهای معروف که توسط ریاضی‌دانان معرفی شده‌اند، می‌پردازیم.

از جمله افرادی که در بحث تعامد کارهای بسیار مهمی انجام دادند، می‌توان به رابرتس[۱]، بیرخوف، جیمز، دیمینه[۲]، آلنسو[۳] و برخی دیگر که در این فصل معرفی می‌شوند، اشاره کرد. در این فصل تعامد بیرخوف را به‌طور مفصّل مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعامد بیرخوف جزو اولین تعامدهای معرفی شده در سال ۱۹۳۵ است که ما در این فصل درباره این تعامد و خواص آن و کاربردهای آن بحث می‌کنیم، چون این تعامد در فصول بعدی بسیار پرکاربرد است. همچنین به کمک تابعک‌های خطی با خواص این تعامد و کاربردهای آن در بحث مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی آشنا می‌شویم. در بحث خواص تعامد بیرخوف خواص یکتایی و جمع‌پذیری این تعامد را به‌طور مفصّل مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس با ارائه مثالی از فضاهای خطی نرم‌دار مفهوم یکتایی چپ و راست تعامد بیرخوف را بررسی می‌کنیم. در انتهای این فصل به مشخصه‌سازی فضای ضرب داخلی توسط تعامدها می‌پردازیم. در این فصل از منابع [۱۳، ۲۵، ۳۸] استفاده می‌شود بجز مواقعی که به روشنی منبع مشخص شده باشد.

---

[۱] Roberts

[۲] Diminnie

[۳] Alonso

۲.۲ تعامد در فضاهای ضرب داخلی

در این بخش ابتدا با مفهوم تعامد در فضاهای ضرب داخلی آشنا می‌شویم. سپس به کمک این مفهوم مجموعه‌ی متعامد[۴] و مجموعه‌ی متعامدیکه[۵] و متمم متعامد[۶] را تعریف می‌کنیم. هم‌چنین ویژگیهای اساسی این تعامد که برگرفته از تعامد در هندسه‌ی اقلیدسی هستند، را بیان می‌کنیم. در انتهای این بخش نیز قضیه‌ای بسیار مهم را بیان می‌کنیم که در آن معادل بودن تعامدها در فضاهای ضرب داخلی را نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد گوییم و با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم، هرگاه داشته باشیم $\langle x, y\rangle = ۰$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، بردار $x \in X$ را بر مجموعه‌ی $G \subset X$ متعامد گوییم و با نماد $x \perp G$ نمایش می‌دهیم، هرگاه برای هر $y \in G$ داشته باشیم $x \perp y$.

تعریف ۳.۲. زیر مجموعه‌ی G از X را یک مجموعه‌ی متعامد می‌گوییم اگر هر دو بردار متمایز در G بر هم متعامد باشند. هم‌چنین یک مجموعه‌ی متعامدیکه یک مجموعه‌ی متعامد است که هر بردار در آن دارای نرم یک است. بنابراین مجموعه‌ی $\{x_i \,|\, i \in I\}$ یک مجموعه‌ی متعامدیکه است اگر و فقط اگر

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} ۱; & i = j, \\ ۰; & i \neq j. \end{cases}$$

لم ۱.۲. *فرض کنید G یک مجموعه‌ی متعامد از بردارهای ناصفر باشد، آنگاه G یک مجموعه‌ی مستقل خطی است.*

مثال ۴.۲ (مجموعه‌های متعامدیکه). در $C_۲[-\pi, \pi]$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع به فرم زیر متعامد یکه‌اند،

$$\{\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\sin t, \cdots, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\sin nt\}.$$

چون روابط زیر همواره درست هستند،

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \mathrm{d}t = \pi\delta_{nm},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cos nt \mathrm{d}t = ۰.$$

مثال ۵.۲. برای هر $j \in \mathbb{N}$ قرار دهید $e_j = (\delta_{jk})_{k=۱}^{\infty}$ در این صورت مجموعه‌ی $E = \{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ در $l^۲$ متعامد یکه است، زیرا ضرب اسکالر در $l^۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}.$$

[۴] Orthogonal set
[۵] Orthonormal
[۶] Orthogonal complement

قضیه ۱.۲ (قضیه‌ی فیثاغورس). *فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ یک مجموعه‌ی متعامد باشد، در این‌صورت*

$$\left\| \sum_1^n x_i \right\|^2 = \sum_1^n \|x_i\|^2,$$

در حالت خاص، اگر $x \perp y$ آنگاه

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

در تعریف بعدی با مفهوم متمم متعامد در فضاهای ضرب داخلی آشنا می‌شویم. در واقع این مجموعه شامل همه‌ی عضوهایی از فضا است که بر هر عضو مجموعه متعامد باشند.

تعریف ۶.۲. فرض کنید G یک زیر مجموعه از فضای هیلبرت X باشد، متمم متعامد G با نماد $G^\perp$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر به ازای هر $x \in G$ تعریف می‌کنیم،

$$G^\perp := \{ y \in X; \quad \langle y, x \rangle = 0 \}.$$

قضیه ۲.۲. *فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی و $G, G_1, G_2 \subset X$، در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند،*

(۱) *$G^\perp$ یک زیر فضای بسته از X است،*

(۲) $G \subset (G^\perp)^\perp$،

(۳) $G_1 \subset G_2 \Rightarrow G_2^\perp \subset G_1^\perp$،

(۴) $G \cap G^\perp \subset \{0\}$،

(۵) $G^\perp = G^{\perp\perp\perp}$.

برهان. (۱) فرض کنید $u, v \in G^\perp$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، در این‌صورت برای هر $x \in G$،

$$\langle u + \alpha v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \alpha \langle v, x \rangle = 0,$$

در نتیجه $G^\perp$ یک زیرفضای خطی است. حال فرض کنید $\{u_n\}$ دنباله‌ای از اعضای $G^\perp$ باشد که همگرا به عضوی چون u از X باشد در این‌صورت برای هر $x \in G$،

$$\langle u, x \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} u_n, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, x \rangle = 0,$$

در نتیجه $u \in G^\perp$ و این یعنی $G^\perp$ بسته است. اثبات گزاره‌های دیگر با کمک تعریف واضح است. $\square$

در قضیه‌ی بعد ویژگی‌های اساسی تعامد در فضاهای ضرب داخلی را بیان می‌کنیم.[۲۵]

قضیه ۳.۲. *فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$، در این‌صورت تعامد دارای ویژگی‌های زیر است،*

ناتباهی [۷]*: $\lambda x \perp \mu y$ اگر و فقط اگر $\lambda x = 0$ یا $\mu y = 0$،*

ساده سازی [۸]*: اگر $x \perp y$ آنگاه $\lambda x \perp \lambda y$،*

پیوستگی [۹]*: فرض کنید $\{x_n\}, \{y_n\}$، دنباله‌هایی در X باشند که $x_n \to x, y_n \to y$. اگر برای هر n داشته باشیم $x_n \perp y_n$ آنگاه $x \perp y$،*

همگنی [۱۰]*: اگر $x \perp y$ آنگاه $\lambda x \perp \mu y$،*

تقارنی [۱۱]*: اگر $x \perp y$ آنگاه $y \perp x$،*

وجود از راست [۱۲]*: عدد حقیقی α موجود است به‌طوری‌که $x \perp (\alpha x + y)$،*

وجود از چپ [۱۳]*: عدد حقیقی α موجود است به‌طوری‌که $(\alpha x + y) \perp x$،*

یکتایی از راست [۱۴]*: برای $x \neq 0$، فقط یک عدد حقیقی α موجود است به‌طوری‌که $x \perp (\alpha x + y)$،*

یکتایی از چپ [۱۵]*: برای $x \neq 0$، فقط یک عدد حقیقی α موجود است به‌طوری‌که $(\alpha x + y) \perp x$،*

جمع پذیری از راست [۱۶]*: اگر $x \perp y$ و $x \perp z$، آنگاه $x \perp y + z$،*

جمع پذیری از چپ [۱۷]*: اگر $y \perp x$ و $z \perp x$، آنگاه $y + z \perp x$،*

توسیع از راست [۱۸]*: اگر $x \perp y$ آنگاه ابرصفحه بسته‌ی $H \subset X$ موجود است به‌طوری‌که $y \in H$ و $x \perp H$،*

توسیع از چپ [۱۹]*: اگر $x \perp y$ آنگاه ابرصفحه بسته‌ی $H \subset X$ موجود است به‌طوری‌که $x \in H$ و $H \perp y$،*

قطرهای متعامد [۲۰]*: عدد حقیقی یکتای α موجود است به‌طوری‌که $(x + \alpha y) \perp (x - \alpha y)$.*

برهان. برای اثبات به [۲۵] مراجعه کنید. □

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند،*

---

[۷] Non-degeneracy
[۸] simplification
[۹] continuity
[۱۰] Homogeneity
[۱۱] symmetry
[۱۲] right existence
[۱۳] left existence
[۱۴] right uniqueness
[۱۵] left uniqueness
[۱۶] right additivity
[۱۷] left additivity
[۱۸] right extension
[۱۹] left extension
[۲۰] orthogonal diagonals

(۱) $x \perp y$،

(۲) $\|x-y\|^{۲} = \|x\|^{۲} + \|y\|^{۲}$،

(۳) $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$،

(۴) $\|x+y\| = \|x-y\|$،

(۵) $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$،

(۶) $\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|$.

برهان. اثبات با توجه به تعریف نرم در فضاهای ضرب داخلی واضح است. □

۳.۲ فضاهای نرمدار خطی و تعامدهای تعمیم‌یافته

در این بخش ابتدا با مفهوم فضاهای خطی نرم‌دار متعامد خطی[۲۱] که کنو [۲۲] و همکارانش در سال ۲۰۱۴ معرفی کرده‌اند، آشنا می‌شویم. [۳۳]

تعریف ۷.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد که ۲ $\dim(X) \geq$ و $\perp \subset X^{۲}$ یک رابطه باشد به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند،

(۱) رابطه‌ی $\perp$ متقارن باشد و اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $y \perp x$ آنگاه $y = ۰$،

(۲) اگر $x, y \in X \backslash \{۰\}$ و $y \perp x$ آنگاه x و y مستقل خطی باشند،

(۳) اگر $x, y, z \in X$ و $x \perp y$ و $x \perp z$ آنگاه $x \perp (y+z)$،

(۴) اگر $x, y \in X$ و $y \perp x$ آنگاه برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $ax \perp by$،

(۵) اگر P یک زیرفضای دو بعدی از X باشد و $x \in P$ و $a > ۰$ آنگاه $y \in P$ وجود دارد که $x \perp y$ و $x + y \perp ax - y$.

در این‌صورت به دوتایی $(X, \perp)$ یک فضای خطی نرم‌دار متعامد می‌گویند.

توجه کنید که هر فضای خطی نرم‌دار را می‌توان به عنوان یک فضای خطی نرم‌دار متعامد در نظر گرفت، کافیست برای هر $x \in X$ تعریف کنیم $x \perp ۰, ۰ \perp x$ و برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$ تعریف کنیم $y \perp x$ اگر و فقط اگر x و y مستقل خطی باشند. به عنوان مثال هر فضای ضرب داخلی یک فضای خطی متعامد است. در زیر مثالی از فضاهای خطی متعامد را بیان می‌کنیم.

[۲۱] Orthoogonality normed linear spaces

[۲۲] Kanu

مثال ۸.۲ (فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$). فضای $\mathbb{R}^n$ را با ضرب داخلی زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

فرض کنید $x,y\in\mathbb{R}^n$ در این‌صورت داریم:

$$x\perp y \Rightarrow \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y,x\rangle = 0 \Rightarrow y\perp x.$$

فرض کنید $x,y\in\mathbb{R}^n$ و $x\perp y$ در این‌صورت برای هر $\alpha_i>0$ داریم:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 x_i y_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0,$$

در نتیجه x و y مستقل خطی‌اند. ویژگی‌های دیگر نیز به‌راحتی قابل بررسی است.

۴.۲ معرفی برخی از تعامدها در فضاهای خطی نرم‌دار

حال به معرفی برخی از تعامدهای تعمیم‌یافته در فضاهای خطی نرم‌دار می‌پردازیم. به عبارت دیگر تاریخچه‌ی کوتاهی از تعامدهای تعمیم‌یافته که توسط ریاضی‌دانان تعریف شده‌اند را بیان می‌کنیم.
اولین تعامد در فضاهای خطی نرم‌دار تعامد رابرتس است که در سال ۱۹۳۴ توسط رابرتس معرفی شد. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی تعامد رابرتس می‌توانید به [۲۳، ۲۴، ۵۱، ۲۵] مراجعه کنید.

تعریف ۹.۲. فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x,y\in X$، آنگاه بردار x را بر بردار y متعامد رابرتس می‌گوییم و با نماد $x\perp_R y$ نمایش می‌دهیم، هرگاه برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$، $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

بعد از رابرتس، در سال ۱۹۳۵ تعامد بیرخوف توسط بیرخوف معرفی شد. بیرخوف با تعریف این تعامد راه را برای دیگر ریاضی‌دانان چون جیمز و سینگر[۲۳] هموار ساخت. تعامد بیرخوف در فصول بعد بسیار پرکاربرد است، که از جمله‌ی این کاربردها می‌توان به بحث تعریف زوایا در فضاهای خطی نرم‌دار و بحث مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی اشاره کرد. به‌همین دلیل در مورد این تعامد و ویژگی‌های آن در بخش بعدی به طور مفصّل بحث می‌کنیم. تعامد بیرخوف اولین بار توسط بیرخوف در [۱۴] معرفی شد و جیمز بر روی خواص این تعامد در [۲۴، ۵۰] بحث کرده است. ما در این بخش فقط به تعریف تعامد بیرخوف بسنده می‌کنیم و بحث بیشتر درباره‌ی این موضوع را به بخش بعدی موکول می‌کنیم.

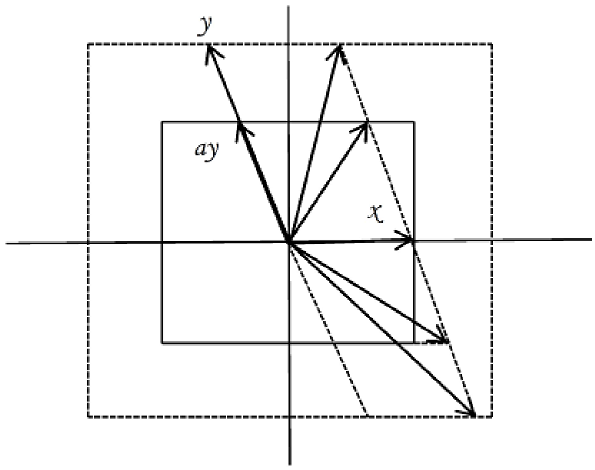
تعریف ۱۰.۲. فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x,y\in X$ در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد بیرخوف می‌گوییم و با نماد $x\perp_B y$ نمایش می‌دهیم، هرگاه برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$، $\|x+\alpha y\|\geq\|x\|$.

[۲۳] Singer

جیمز به عنوان اولین کسی بود که در سال ۱۹۴۵ مطالعات جامعی را در زمینه‌ی خواص تعامد بیرخوف در [۵۱] ارائه داد و همچنین در [۵۰] جیمز به بررسی خواص تعامد بیرخوف به کمک تابعک‌های خطی پرداخت که در بخش بعدی ما آن‌ها را به‌طور مفصّل بیان می‌کنیم. به‌همین دلیل در برخی از مقالات و کتاب‌ها به تعامد بیرخوف، تعامد بیرخوف-جیمز[۲۴] می‌گویند. بعلاوه جیمز تعامدهای دیگری به نام‌های تعامد متساوی‌الساقینی[۲۵] و تعامد فیثاغورسی[۲۶] را معرفی کرد، که این تعامدها هم جزو تعامدهای بسیار مهم هستند. تعامد بیرخوف و تعامدهای جیمز در بحث مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی بسیار پرکاربرد هستند که در بخش بعد در مورد آن‌ها بحث می‌کنیم. حال به معرفی تعامد متساوی‌الساقینی و فیثاغورسی جیمز می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$ در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد متساوی‌الساقینی می‌گوییم و با نماد $x \perp_J y$ نمایش می‌دهیم هرگاه داشته باشیم $\|x + y\| = \|x - y\|$.

با توجه به تعریف فوق واضح است که تعامد متساوی‌الساقینی جیمز حالت خاصی از تعامد رابرتس است، کافی است در تعریف تعامد رابرتس قرار دهیم $\alpha = 1$. بر طبق ویژگی‌های نرم واضح است که تعامد متساوی‌الساقینی متقارن است. اما این تعامد همه‌ی خواص تعامد در فضای ضرب داخلی را ندارد مثلاً شکل ۱.۲ نشان می‌دهد تعامد متساوی‌الساقینی جیمز در حالت کلی همگن نیست. با توجه به شکل متوجه می‌شویم که $\|x - y\| = \|x + y\|$ ولی $\|x + ay\| \neq \|x - ay\|$.



شکل ۱.۲: $x \not\perp_J ay$, $x \perp_J y$

تعریف ۱۲.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x را متعامد فیثاغورسی بر بردار y می‌گوییم و با نماد $x \perp_P y$ نمایش می‌دهیم هرگاه داشته باشیم $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

---

[24]Birkhoff-James orthogonality

[25]Isosceles orthogonality

[26]Pythagorean orthogonality

در سال ۱۹۵۷ سینگر تعامدی را نام تعامد سینگر معرفی کرد که به‌طور مستقیم از تعریف تعامد متساوی‌الساقینی جیمز بدست می‌آید، به عبارت دیگر تعامد سینگر نرمال شده‌ی تعامد جیمز است. در فصل چهارم نشان می‌دهیم که تعامد سینگر با $g-$تعامد معادل است.

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد سینگر می‌گوییم و با نماد $x \perp_S y$ نمایش می‌دهیم، هرگاه یا تساوی $\|x\|.\|y\| = 0$ یا تساوی $\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$ برقرار باشد.

در سال ۱۹۶۲ کارلسن[27] تعامدی را به نام تعامد کارلسن معرفی کرد. این تعامد در حقیقت خانواده‌ای از تعامدها را شامل می‌شود. به عنوان مثال تعامد متساوی‌الساقینی و تعامد فیثاغورسی جیمز حالات خاصی از این تعامد می‌باشند. تعامد کارلسن در برخی موارد مانند تعامد جیمز و فیثاغورسی متقارن و در برخی موارد متقارن نیست. کارلسن در [۵۲] ثابت کرده است که این تعامد همگن یا جمع پذیر از چپ (راست) است اگر و فقط اگر فضای X ضرب داخلی باشد.

تعریف ۱۴.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و برای هر $i = 1, 2, \ldots, m$، اعداد حقیقی ثابت $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ باشند که در شرایط زیر صدق کنند،

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \gamma_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \gamma_i = 1,$$

در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد کارلسن گوییم و با نماد $x \perp_C y$ هرگاه تساوی زیر برقرار باشد،

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|\beta_i x + \gamma_i y\|^2 = 0.$$

در سال ۱۹۶۷ جایلز[28] در [۳۱] تعامد در فضاهای نیم‌ضرب داخلی[29] را به‌صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱۵.۲. فرض کنید X یک فضای نیم‌ضرب داخلی با نیم ضرب $[.,.]$ باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x را بر بردار y، $G-$ متعامد می‌گوییم و با نماد $x \perp_G y$ نمایش می‌دهیم هرگاه داشته باشیم $[y, x] = 0$.

در سال ۱۹۷۸ کاپور و پراسد[30] در [۳۸] به ازای هر $a, b \in (0, 1)$، مفهوم $(ab)-$ تعامد را به‌صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۱۶.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x را بر بردار y، $(ab)-$ متعامد می‌گوییم و با نماد $x \perp y(ab)$ نمایش می‌دهیم هرگاه،

$$\|ax + by\|^2 + \|x + y\|^2 = \|ax + y\|^2 + \|x + by\|^2; \quad a, b \in (0, 1).$$

[27] Carlsson
[28] Giles
[29] semi inner product spaces
[30] Kapoor and Prasad

درسال ۱۹۸۳ ریاضی‌دانانی چون دیمینه و فریز و اندلافته[۳۱] تعمیمی از تعامد فیثاغورسی و متساوی‌الساقینی با نام $\alpha-$ تعامد را در [۷] معرفی کردند. به‌وضوح دیده می شود که $\alpha-$تعامد حالت خاصی از تعامد کارلسن است.

تعریف ۱۷.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت برای هر $\alpha \neq ۱$، $\alpha-$ تعامد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x \perp_\alpha y \Leftrightarrow (۱+\alpha^۲)\|x-y\|^۲ = \|x-\alpha y\|^۲ + \|\alpha x - y\|.$$

واضح است در تعریف قبل اگر $\alpha = ۰$ و $\alpha = -۱$ باشند به‌ترتیب تعامدهای فیثاغورسی و متساوی‌الساقینی به‌دست می‌آیند.

در سال ۱۹۸۵ دیمینه و همکارانش $\alpha-$تعامد را تعمیم دادند و مفهوم $(\alpha, \beta)-$ تعامد، برای هر $\alpha, \beta \neq ۱$ معرفی کردند. هم‌چنین در سال ۱۹۸۸ برای هر $a \in \mathbb{R}$ تعامدهای $a-$ متساوی‌الساقینی و $a-$ فیثاغورسی توسط آلنسو و بنیتز[۳۲] معرفی شدند، که حالات تعمیم‌یافته‌ای از تعامد متساوی‌الساقینی و فیثاغورسی هستند.

تعریف ۱۸.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای نرمدار خطی باشد و $x, y \in X$ در این صورت بردار x را بر بردار y، $(\alpha, \beta)-$ متعامد می‌نامیم و با نماد $(x \perp y)(\alpha, \beta)$ نمایش می‌دهیم هرگاه تساوی زیر برای هر $\alpha, \beta \neq ۱$ برقرار باشد،

$$\|x-y\|^۲ + \|\alpha x - \beta y\|^۲ = \|x - \beta y\|^۲ + \|y - \alpha x\|^۲.$$

تعریف ۱۹.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت تعامدهای $a-$ متساوی‌الساقینی و $a-$ فیثاغورسی به ازای هر عدد حقیقی ناصفر a به‌ترتیب به‌صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم،

$$\begin{aligned} x \perp y(aJ) &\Leftrightarrow \|x - ay\| = \|x + ay\|, \\ x \perp y(aP) &\Leftrightarrow \|x - ay\|^۲ = \|x\|^۲ + a^۲\|y\|^۲. \end{aligned}$$

در سال ۱۹۹۵ بویسوس[۳۳] تعامدی را به نام تعامد بویسوس معرفی کرد. همچنین این تعامد همان حالت پیوسته‌ی تعامد کارلسن است. این تعامد روی فضاهای اندازه‌پذیر تعریف شده است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲۰.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد بویسوس می‌گوییم و با نماد $x \perp_M y$ نمایش می‌دهیم، هرگاه داشته باشیم

$$\int_\Omega \alpha(\omega)\|\beta(\omega)x + \gamma(\omega)y\|^۲ \mathrm{d}\mu(\omega) = ۰,$$

[۳۱] Diminnie,Freese,Andalafte

[۳۲] Benitez

[۳۳] Boussouis

که در آن (Ω,μ) یک فضای اندازه‌پذیر مثبت است و α,β,γ توابعی اندازه‌پذیر برحسب μ از Ω به $\mathbb{R}$ است، به‌طوری‌که تقریباً همه جا $\alpha(\omega)\neq 0$ و $\alpha\beta^2$ و $\alpha\gamma^2$ برحسب μ انتگرال‌پذیر هستند و

$$\int_\Omega \alpha(\omega)\beta^2(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)=\int_\Omega \alpha(\omega)\gamma^2(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)=0,\qquad \int_\Omega \alpha(\omega)\beta(\omega)\gamma(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)=1.$$

در سال ۲۰۱۰ خلیل و الخوالده[۳۴] نوع جدیدی از تعامد، به نام تعامد فاصله‌ای[۳۵] را معرفی کردند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲۱. فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x,y\in X$، در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد فاصله‌ای می‌گوییم و با نماد $x\perp_d y$ نمایش می‌دهیم، هرگاه داشته باشیم

$$d(x,[y])=\|x\| \quad , \quad d(y,[x])=\|y\|,$$

که در آن $[x]=\mathrm{span}\{x\}$ و $[y]=\mathrm{span}\{y\}$.

در سال ۲۰۱۱ ریاضی‌دانی به نام عبداللّه تلفه[۳۶] در [۱] نوعی از تعامد به نام $(\alpha,\beta,\gamma)-$ تعامد را معرفی کرد که در آن $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$ و $\alpha\neq 1,\beta\neq\gamma$. همچنین این تعامد تعمیمی از تعامد (α,β) است. برای اطلاعات بیشتر در مورد این تعامد به منبع [۱] مراجعه کنید.

تعریف ۲.۲۲. فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد. همچنین فرض کنید α,β,γ اعداد حقیقی ثابتی باشند به‌طوری‌که $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$ و $\alpha\neq 1,\beta\neq\gamma$، در این‌صورت برای $x,y\in X$، بردار x را بر بردار y، $(\alpha,\beta,\gamma)-$ متعامد می‌گوییم و با نماد $x\perp y(\alpha,\beta,\gamma)$ نمایش می‌دهیم هرگاه تساوی زیر را داشته باشیم،

$$\|x-\gamma y\|^2+\|\alpha x-\beta y\|^2=\|x-\beta y\|^2+\|\gamma y-\alpha x\|^2.$$

علاوه بر این تعامدها، تعامدهای دیگری نیز روی فضاهای خطی نرم‌دار معرفی شده‌اند. به‌عنوان مثال می‌توان تعامد دیمینه در [۳۰]، تعامد مساحتی در [۲۶، ۲۲] و تعامد ارتفاعی در [۳، ۲۷] را نام برد. اخیراً ماتینی و اسپیروا[۳۷] دو نوع تعامد هندسی را تعریف کردند، اولی مربوط در صفحه‌ی مینکوفسکی به نام قضیه‌ی سه دایره[۳۸] [۱۸، ۱۹] و دوّمی به نام تعامد وتری[۳۹] در [۱۷] که ویژگی‌های وترهای دایره‌ی واحد را بیان می‌کند. همچنین در [۸] نوعی از تعامد معرفی شده و با تعامدهای بیرخوف و فیثاغورسی و تعامد جیمز مقایسه شده است و این تعامد در مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی به کمک ناوردایی نرم و ویژگی‌های ناوردایی دوران بسیار پرکاربرد است. در [۲] نوعی از تعامد بررسی شده است که در حالت فضاهای اقلیدسی با تعامد بیرخوف و تعامدهای متساوی‌الساقینی و فیثاغورسی معادل است. با الهام گرفتن از تعامد متساوی‌الساقینی و فیثاغورسی جیمز دو نوع تعامد دیگر در [۵۳] معرفی شده‌اند.

[34] Khalil and Alkhawalda
[35] Distance orthogonality
[36] Abdalla Tallafha
[37] Martini and Spirova
[38] Three circles theorem
[39] Chordal orthogonality

۵.۲ تعامد بیرخوف در فضاهای خطی نرم‌دار

تعامد بیرخوف جزو مهم‌ترین تعامدهای تعمیم‌یافته در فضاهای خطی نرم‌دار است. این تعامد در سال ۱۹۳۵ توسط بیرخوف در [۱۴] معرفی شد. در این بخش با این تعامد و ویژگی‌های آن در فضاهای خطی نرم‌دار آشنا می‌شویم. همان‌طور که گفته شد بعد از این‌که بیرخوف این تعامد را معرفی کرد، یکی از ریاضی‌دانان به نام جیمز مطالعاتی را در زمینه‌ی ویژگی‌های مهم این تعامد انجام داد. [۵۰، ۵۱] هم‌چنین در این بخش با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان می‌دهیم که این تعامد برخی از خواص تعامد در فضاهای ضرب داخلی را ندارد، مثلاً تعامد بیرخوف در حالت کلی متقارن و جمع‌پذیر نیست. هم‌چنین به بررسی رابطه‌ی بین تعامد بیرخوف و مشتق‌پذیری نرم می‌پردازیم و سپس روی نرم فضا شرایطی را فراهم می‌سازیم که تعامد بیرخوف متقارن و جمع‌پذیر باشد. به غیر از جیمز و بیرخوف از جمله‌ی افرادی که در این زمینه کار کرده‌اند می‌توان آلنسو و کارلس بنیتز در [۲۳] و [۲۴] اشاره کرد. در بخش قبل با تعریف تعامد بیرخوف آشنا شدیم. در این بخش جهت یادآوری این تعریف را دوباره بیان می‌کنیم و سپس به طور مفصّل به بررسی این تعامد و خواص آن می‌پردازیم.

تعریف ۲۳.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x را بر بردار y متعامد بیرخوف می‌گوییم و با نماد $x \perp_B y$ نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$.

نکته ۲۴.۲. *فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، در این‌صورت تعامد بیرخوف با تعامد معرفی شده در فضاهای ضرب داخلی معادل است.*

برهان. فرض کنید $x, y \in X$ و $\langle x, y\rangle = ۰$، در این‌صورت به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\|x+\alpha y\|^۲ = \langle x+\alpha y\, ,\, x+\alpha y\rangle = \|x\|^۲ + \alpha^۲\|y\|^۲.$$

پس به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، می‌توان نتیجه گرفت که $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$. حال اگر $x \perp_B y$ آنگاه به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، داریم $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$. به برهان خلف فرض کنید $\langle x, y\rangle \neq ۰$. قرار دهید $\alpha = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$، در این‌صورت می‌توان نتیجه گرفت،

$$\|x+\alpha y\|^۲ = \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \|x\|^۲ + ۲\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^۲\|y\|^۲ = \|x\|^۲ - \frac{\langle x,y\rangle^۲}{\|y\|^۲}.$$

در نتیجه $\|x+\alpha y\| < \|x\|$ و این با متعامد بیرخوف بودن x بر y متناقض است. □

در قضیه بعد برخی از نتایج ساده در مورد تعامد بیرخوف را بیان می‌کنیم. هم‌چنین با ارائه‌ی مثال‌هایی نشان می‌دهیم که تعامد بیرخوف در حالت کلی متقارن و جمع‌پذیر نیست.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y, z \in X$ و $t \in \mathbb{R}$، در این‌صورت گزاره‌های زیر نتایج ساده در مورد تعامد بیرخوف هستند،*

(۱) $0 \perp_B x$ و $x \perp_B 0$،

(۲) $x \perp_B x$ *اگر و فقط اگر* $x = 0$،

(۳) *اگر* $x \perp_B y$ *آنگاه* $x \perp_B (ty)$،

(۴) *اگر* $x \perp_B y$ *آنگاه لزومی ندارد که* $y \perp_B x$، *یعنی در حالت کلی تعامد بیرخوف متقارن نیست.*

(۵) *اگر* $x \perp_B y$ *و* $x \perp_B z$ *آنگاه لزومی ندارد که* $x \perp_B y + z$، *یعنی در حالت کلی تعامد بیرخوف جمع‌پذیر نیست.*

برهان. اثبات (۱) و (۲) و (۳) با استفاده از تعریف تعامد بیرخوف واضح است. امّا برای (۴) و (۵) مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.
فضای خطی نرم‌دار حقیقی $X = (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ که در آن $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ برای هر $x = (x_1, x_2) \in X$ را در نظر بگیرید، قرار دهید $x = (-2, 1), y = (1, 1)$. آنگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

$$\|x + \alpha y\|_1 = |-2 + \alpha| + |1 + \alpha| \geq 3 = \|x\|_1,$$

بنابراین $x \perp_B y$. حال برای $\alpha = \frac{1}{2}$، می‌توان نوشت

$$\|y + \alpha x\|_1 = \|(0, \frac{3}{2})\|_1 = \frac{3}{2} \ngeq 2 = \|y\|_1.$$

هم‌چنین فرض کنید $x = (2, 2), y = (5, -4), z = (-3, 5)$، در این‌صورت برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، داریم:

$$\|x + \alpha y\|_1 = |2 + 5\alpha| + |2 - 4\alpha| \geq 4 = \|x\|_1,$$
$$\|x + \alpha z\|_1 = |2 - 3\alpha| + |2 + 5\alpha| \geq 4 = \|x\|_1.$$

در این‌صورت $x \perp_B y$ و $x \perp_B z$. حال قرار دهید $\alpha = -1$ در این‌صورت

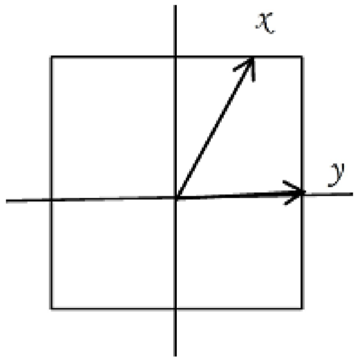
$$\|x + \alpha(y + z)\|_1 = \|(0, 1)\|_1 = 1 \ngeq 4 = \|x\|_1. \quad (1.2)$$

بنابراین x متعامد بیرخوف بر $y + z$ نیست. □

قضیه ۶.۲. *فرض کنید* $(X, \|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد و* $x, y \in X$. *اگر* $S \subset X$، *آنگاه* $x \perp_B y$ *اگر و فقط اگر* $\|x\| = d(x, [y])$، *که در آن* $[y]$ *زیرفضای تولید شده توسط* y *است.*

برهان. فرض کنید $x \perp_B y$ آنگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

$$\|x\| \leq \|x + \alpha y\| \leq \|x\| + |\alpha|\|y\|,$$



شکل ۲.۲: $x \not\perp_B y$, $x \perp_B y$

بنابراین

$$\|x\| = \inf\{\, \|x + \alpha y\|; \quad \alpha \in \mathbb{R}\,\} = \inf\{\, \|x - z\|;\ z \in [y]\,\} = d(x, [y]),$$

بر عکس اگر $\|x\| = d(x, [y])$ آنگاه برای هر $z \in [y]$، می‌توان نتیجه گرفت که $\|x\| \leq \|x - z\|$.
بنابراین برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$. پس $x \perp_B y$ $\square$

تعریف ۲۵.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $G \subset X$ و $x \in X$، در این‌صورت بردار x را متعامد بیرخوف بر مجموعه‌ی G می‌گوییم و با نماد $x \perp_B G$ نمایش می‌دهیم، هرگاه برای هر $y \in G$، $x \perp_B y$.

طبق تعریف ۲۵.۲ واضح است که برای هر $G \subset X$، $G \perp_B 0$. همان‌طور که در هر فضای ضرب داخلی مفهوم متمم متعامد را تعریف کردیم در فضاهای خطی نرم‌دار حقیقی نیز می‌توان متمم متعامد بیرخوف [۴۰] را تعریف کرد.

تعریف ۲۶.۲. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و G یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از X باشد، در این‌صورت متمم متعامد بیرخوف G که با نماد $G^{\perp}(B)$ نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$G^{\perp}(B) := \{\, x \in X; \quad x \perp_B G\,\}.$$

نکته ۲۷.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $y \in X$. در این‌صورت متمم متعامد بیرخوف y را با نماد $y^{\perp}(B)$ نمایش داده و به فرم $\{\, x \in X; \quad x \perp_B y\,\}$ تعریف می‌شود. بعلاوه به ازای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی G از X داریم:*

$$G^{\perp}(B) = \bigcap_{y \in G} y^{\perp}(B),$$

[۴۰] Birkhoff orthogonal complement

زیرا به ازای هر $y \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} G^{\perp}(B) &= \{\, x \in X; \quad x \perp_B G \,\} = \{\, x \in X; \quad x \perp_B y \,\} \\ &= \bigcap_{y \in G} \{\, x \in X; \quad x \perp_B y \,\} = \bigcap_{y \in G} y^{\perp}(B). \end{aligned}$$

لم ۲.۲. *متمم متعامد بیرخوف در نتایج ساده‌ی زیر صدق می‌کند،*

(۱) $X^{\perp}(B) = \{\circ\}\,,\ \circ^{\perp}(B) = X$ ،

(۲) *اگر G یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از X باشد و t اسکالری حقیقی دلخواه باشد آنگاه*

(a) $\circ \in G^{\perp}(B)$ ،

(b) *اگر* $x \in G^{\perp}(B)$ *آنگاه* $tx \in G^{\perp}(B)$ ،

(c) $G \cap G^{\perp}(B)$ *صفر یا تهی است.*

(۳) *اگر C یک مخروط محدب*[۴۱] *در X باشد، آنگاه* $C \cap C^{\perp}(B) = \{\circ\}$ ،

(۴) *اگر M یک زیرفضا (مخروط محدب) از X باشد، آنگاه لزومی ندارد که $M^{\perp}(B)$ یک زیرفضا (مخروط محدب) از X باشد.*

برهان. گزاره‌ی (۱) را ثابت می‌کنیم، اثبات دیگر گزاره‌ها با توجه به تعریف متمم متعامد به راحتی قابل حصول است.

$$\begin{aligned} &X^{\perp}(B) = \{\, x \in X; \quad x \perp_B X \,\} = \{\, x \in X; \quad x \perp_B x \,\} = \{\circ\}, \\ &\circ^{\perp}(B) = \{\, x \in X; \quad x \perp_B \circ \,\} = X. \end{aligned}$$

□

مثال ۲۸.۲. فضای خطی نرم‌دار $X = (\mathbb{R}^{۲}, \|.\|_{۱})$ که در آن برای هر $x = (x_{۱}, x_{۲}) \in X$ داریم $\|x\|_{۱} = |x_{۱}| + |x_{۲}|$ را در نظر بگیرید.

زیرفضای $M = \text{span}\{(۱,۱)\}$ از X را در نظر بگیرید، آنگاه $M^{\perp}(B)$ شامل همه‌ی نقاطی چون $x = (x_{۱}, x_{۲}) \in X$ که برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ نامساوی $|x_{۱}| + |x_{۲}| \leq |x_{۱} + \lambda| + |x_{۲} + \lambda|$ برقرار است. حال قرار دهید $x = (-۳, ۵), y = (۴, -۳)$. چون برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، نامساوی‌های زیر برقرارند،

$$\begin{aligned} &|-۳| + |۵| = ۸ \leq |-۳ + \lambda| + |۵ + \lambda|, \\ &|۴| + |-۳| = ۷ \leq |۴ + \lambda| + |-۳ + \lambda|. \end{aligned}$$

[۴۱] Convex cone

پس،

$$x = (-۳, ۵), \quad y = (۴, -۳) \in M^{\perp}(B).$$

امّا $x + y = (۱, ۲) \notin M^{\perp}(B)$، زیرا اگر $\lambda = -۱$ آنگاه داریم:

$$|۱ + \lambda| + |۲ + \lambda| = ۱ \ngeq ۳ = |۱| + |۲|.$$

۱.۵.۲ تعامد بیرخوف و تابعک‌های خطی

در این بخش به کمک تابعک‌های خطی برخی از ویژگی‌های تعامد بیرخوف را بیان می‌کنیم. ابتدا روابط بین تعامد بیرخوف و ابرصفحه‌های گذرا از مبدأ را بررسی می‌کنیم. سپس خاصیت همگنی تعامد بیرخوف را ثابت می‌کنیم. در ادامه نیز به بررسی خواص وجودی و یکتایی و جمع‌پذیری تعامد بیرخوف به کمک مشتق تابع نرم می‌پردازیم. برای اطلاعات بیشتر به منابع [۵۰، ۲۵] مراجعه کنید.

قضیه ۷.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و f یک تابعک خطی ناصفر روی X باشد، در این‌صورت $|f(x)| = \|f\|.\|x\|$ اگر و فقط اگر $H \perp_B x$ به‌طوری‌که H یک ابرصفحه است که برای هر $h \in H$، $f(h) = ۰$. هم‌چنین اگر $G \subset X$ و $G \perp_B x$، آنگاه تابعک خطی ناصفر $f \in X^*$ موجود است که $f(x) = \|f\|.\|x\|$ و برای هر $y \in G$، $f(y) = ۰$ و هم‌چنین ابرصفحه‌ی H گذرا از مبدأ موجود است که $H \perp_B x$ و $G \subset H$.*

برهان. فرض کنید H ابرصفحه‌ای شامل همه‌ی اعضای $h \in H$ باشد که $f(h) = ۰$. هم‌چنین فرض کنید $|f(x)| = \|f\|.\|x\|$ در این‌صورت چون $f(h) = ۰$ لذا می‌توان نتیجه گرفت که،

$$|f(x)| = |f(x + h)| \leq \|f\|\|x + h\|,$$

بنابراین برای هر $h \in H$ نتیجه می‌گیریم، $\|x\| \geq \|x + h\|$. پس $H \perp_B x$. برعکس فرض کنید $H \perp_B x$ و $|f(x)| = p\|x\|$. در این‌صورت به ازای هر $h \in H$، $\|x\| \geq \|x + h\|$. بنابراین

$$|f(x + h)| = |f(x)| = p\|x\| \leq p\|x + h\|,$$

چون H یک ابرصفحه‌ی گذرا از مبدأ است لذا برای $y \in X$، $|f(y)| \leq p\|x\|$. و این یعنی $p = \|f\|$ و $|f(x)| = \|f\|.\|x\|$. □

قضیه‌ی بعد نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی ۷.۲ و اینکه برای هر عضو x از فضای خطی نرم‌دار X تابعک خطی $f \in X^*$ موجود است به‌طوری‌که $f(x) = \|f\|.\|x\|$.

قضیه ۸.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت هر عضو $x \in X$ حداقل بر یک ابرصفحه‌ی گذرا از مبدأ متعامد بیرخوف است.*

برهان. برای اثبات به [۵۰] مراجعه کنید. □

قضیه ۹.۲. *فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد و $x,y\in X$، در این‌صورت $x\perp_B \alpha x+y$ اگر و فقط اگر $f\in X^*$ موجود باشد که $|f(x)|=\|f\|.\|x\|$ بطوریکه $\alpha=-\dfrac{f(y)}{f(x)}$.*
همچنین اگر $x\perp_B \alpha x+y$ آنگاه نتیجه می‌گیریم $|\alpha|\leq\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$.

برهان. قسمت اول بر طبق قضیه‌ی ۷.۲ و ۸.۲ واضح است. بر طبق تعریف، $x\perp_B \alpha x+y$ اگر و فقط اگر به ازای هر $k\in\mathbb{R}$، $\|x+k(\alpha x+y)\|\geq\|x\|$. حال اگر $k=-\dfrac{1}{\alpha}$ آنگاه $|\alpha|\leq\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$. □

با توجه به قضیه‌ی ۹.۲ می‌توان به نتیجه‌ی زیر رسید.

نتیجه ۱.۲. *فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x,y\in X$، در این‌صورت $x\perp_B y$ اگر و فقط اگر $f\in X^*$ موجود باشد که $|f(x)|=\|f\|.\|x\|$ و $f(y)=0$. به عبارت دیگر $y\in\ker(f)$.*

در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم که تعامد بیرخوف همگن است، یعنی اگر $x\perp_B y$ آنگاه برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$، نتیجه می‌گیریم که $x\perp_B \lambda y$.

قضیه ۱۰.۲. *فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت تعامد بیرخوف همگن است.*

برهان. فرض کنید $x\perp_B y$ در این‌صورت به ازای هر $\alpha\in\mathbb{R}$، داریم $\|x+\alpha y\|\geq\|x\|$. حال قرار دهید $\alpha=\lambda\mu$ در این‌صورت $\|x+(\lambda\mu)y\|\geq\|x\|$. لذا به ازای هر $\mu\in\mathbb{R}$، $\|x+\mu(\lambda y)\|\geq\|x\|$ در نتیجه $x\perp_B \lambda y$. □

۲.۵.۲ وجود عضوهای متعامد

در این بخش به بررسی ویژگی وجودی تعامد بیرخوف می‌پردازیم. به این معنی که در هر فضای خطی نرم‌دار X برای هر $x,y\in X$ عدد حقیقی α موجود است بطوریکه $x\perp_B \alpha x+y$. در اثبات این ویژگی از خواص مشتق تابع نرم استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۲. *فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، برای هر $x,y\in X$ عدد حقیقی α موجود است به‌طوری‌که $x\perp_B \alpha x+y$. بعلاوه چنین عددی در شرط $|\alpha|\leq\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$ صدق می‌کند و اگر $x\perp_B \alpha x+y$ و $x\perp_B \beta x+y$ آنگاه برای هر γ بین α و β، $x\perp_B \gamma x+y$.*

برهان. برای اثبات به [۲۵] مراجعه کنید. □

پیوستگی تعامد بیرخوف و قضیه‌ی ۱۱.۲ ایجاب می‌کنند که برای هر $x,y\in X$، یک بازه بسته روی خط حقیقی موجود است که برای هر α در این بازه داریم $x\perp_B \alpha x+y$. جیمز روش زیر را برای تعیین این بازه معرفی کرد.

قضیه ۱۲.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x \neq ۰$ و y دو بردار در X باشند، قرار دهید،*

$$\lim_{n\to\infty}(\|nx+y\|-\|nx\|)=-A\|x\|, \quad \lim_{n\to\infty}(\|nx\|-\|nx-y\|)=-B\|x\|,$$

در این‌صورت A و B به‌ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقادیر اسکالر چون a هستند که $x \perp_B ax+y$.

برهان. برای هر n، $\big|\|nx+y\|-\|nx\|\big| \leq \|y\|$ و حد عبارت $\|nx+y\|-\|nx\|$ وقتی n به سمت بی نهایت میل می کند وجود دارد. فرض کنید $-r\|x\|$ چنین نقطه‌ی حدی و $\{n_i\}$ دنباله‌ای از اعداد باشد که $\lim_{i\to\infty} n_i=\infty$ و $\lim_{i\to\infty}(\|n_ix+y\|-\|n_ix\|)=-r\|x\|$. واضح است این حد برای هر عدد a با عبارت $\lim_{i\to\infty}(\|n_ix+(ax+y)\|-\|n_ix\|-a\|x\|)$ مساوی است.
حال اگر $x \perp_B ax+y$ باشد، آنگاه $\|n_ix+(ax+y)\| \geq \|n_ix\|$ و بنابراین داریم:

$$\lim_{i\to\infty}(\|n_ix+(ax+y)\|-\|n_ix\|) \geq -a\|x\|,$$

پس اگر A بزرگترین کران پایین همه اعداد مانند a باشد که $x \perp_B ax+y$، آنگاه داریم:

$$\lim_{i\to\infty}(\|n_ix+(ax+y)\|-\|n_ix\|) \geq -A\|x\|. \tag{۲.۲}$$

حال فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد و عدد N طوری اختیار شود که برای هر $n_i > N$ داشته باشیم

$$\big|\|n_ix+y\|-\|n_ix\|+r\|x\|\big| < \epsilon\|x\|.$$

حال اگر $n_i > |r|$ لذا می توان نوشت که

$$\big|\|n_ix+y\|-\|(n_i-r)x\|\big| < \epsilon\|x\|,$$

در این‌صورت عدد e_i موجود است که $|e_i|<\epsilon$ و $\|n_ix+y\|=\|(n_i-r+e_i)x\|$. از طرفی،

$$\begin{aligned}&\|[(n_i-۲^{-۱}r+۲^{-۱}e_i)x+۲^{-۱}y]+[(۲^{-۱}r-۲^{-۱}e_i)x+۲^{-۱}y]\|\\ &=\|[(n_i-۲^{-۱}r+۲^{-۱}e_i)x+۲^{-۱}y]-[(۲^{-۱}r-۲^{-۱}e_i)x+۲^{-۱}y]\|,\end{aligned}$$

از طرفی به ازای هر $|k| \geq ۱$ و با توجه به قضیه‌ی ۴.۱ از [۵۱] داریم:

$$\begin{aligned}&\|[(n_i-۲^{-۱}r+۲^{-۱}e_i)x+۲^{-۱}y]+k[(۲^{-۱}r-۲^{-۱}e_i)x+۲^{-۱}y]\|\\ &\qquad\qquad \geq \|(n_i-۲^{-۱}+۲^{-۱}e_i)x+۲^{-۱}y\|,\end{aligned}$$

حال اگر قرار دهید $k=۲m$ و نامساوی را بر $|m|$ تقسیم کنیم، لذا داریم:

$$\left\|\left[\frac{(۲n_i-r+e_i)x+y}{۲m}\right]+(r-e_i)x+y\right\| \geq \left\|\frac{(۲n_i-r+e_i)x+y}{۲m}\right\|,$$

از آن‌جایی‌که $|e_i| < \epsilon$ لذا $\lim_{i\to\infty} e_i = 0$. بنابراین اگر p عددی دلخواه و n_i به بی نهایت میل کند. حال اگر قرار دهید $m = \frac{n_i}{p}$، در نتیجه به ازای هر p داریم $\|px\| \geq \|px + (rx + y)\|$. بنابراین اگر $-r\|x\|$ حد عبارت $\|nx + y\| - \|nx\|$ وقتی $n \to \infty$ باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $x \perp_B rx + y$. از طرفی نشان داده شد که $-A\|x\| \leq -r\|x\|$ یا $A \geq r$. لذا نتیجه می‌شود که $r = A$ و $\lim_{n\to\infty}(\|nx+y\| - \|nx\|)$ موجود و مساوی با $-A\|x\|$ و در نتیجه $x \perp_B Ax+y$. اگر B بزرگترین عددی باشد که $x \perp_B Bx+y$، آنگاه $(-B)$ کوچکترین عددی است که $x \perp_B -Bx-y$ بنابراین، $\lim_{n\to\infty}(\|nx\| - \|nx-y\|) = -B\|x\|$. □

قضیه ۱۳.۲. *فرض کنید x, y دو عضو ناصفر فضای خطی نرم‌دار X باشند، اگر $x \perp_B \alpha x + y$ و $y \perp_B \beta y + x$ آنگاه $|\alpha\beta| \leq 1$. در صورتی‌که تعامد بیرخوف متقارن باشد، آنگاه $0 \leq \alpha\beta \leq 1$.*

برهان. فرض کنید $x \perp_B \alpha x+y$ در این‌صورت به ازای هر $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ داریم $\|x\| \geq \|x+\lambda_1(\alpha x+y)\|$. قرار دهید $\lambda_1 = -\frac{1}{\alpha}(\alpha \neq 0)$، آنگاه $\|x\| \geq \|x + (-\frac{1}{\alpha})(\alpha x + y)\|$. پس $|\alpha| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|}$. حال اگر $y \perp_B \beta y + x$ آنگاه به ازای هر $\lambda_2 \in \mathbb{R}$، داریم $\|y\| \geq \|y + \lambda_2(\beta y + x)\|$. قرار دهید $\lambda_2 = -\frac{1}{\beta}(\beta \neq 0)$ در این‌صورت می‌توان نوشت $\|y\| \geq \|y + (-\frac{1}{\beta})(\beta y + x)\|$ و این یعنی $|\beta| \leq \frac{\|x\|}{\|y\|}$. در نتیجه، $|\alpha\beta| \leq 1$.

فرض کنید تعامد متقارن باشد و $x \perp_B \alpha x + y$ در این‌صورت $\alpha x + y \perp_B x$. لذا به ازای هر $k_1 \in \mathbb{R}$ داریم: $\|\alpha x + y + k_1 x\| \geq \|\alpha x + y\|$. اگر $y \perp_B \beta y + x$ آنگاه به ازای هر $k_2 \in \mathbb{R}$ داریم $\|y + k_2(\beta y + x)\| \geq \|y\|$. حال قرار دهید $k_1 = -\alpha$، در نتیجه $\|y\| \geq \|\alpha x + y\|$. از طرفی قرار دهید $k_2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}$، لذا $\|\alpha x + y\| \geq |1 - \alpha\beta|\|y\|$. پس $\|y\| \geq |1 - \alpha\beta|\|y\|$ و $\alpha\beta \geq 0$ از طرفی $|\alpha\beta| \leq 1$ در نتیجه $0 \leq \alpha\beta \leq 1$. □

قضیه ۱۴.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت عدد حقیقی α موجود است به‌طوری‌که $x \perp_B \alpha x + y$. بعلاوه،*

$$\|\alpha x + y\| = \inf\{\, \|\beta x + y\|; \quad \beta \in \mathbb{R}\,\}.$$

اگر $x \perp_B Ax + y$ و $x \perp_B Bx + y$، آنگاه برای هر عدد حقیقی γ بین A و B، $x \perp_B \gamma x + y$.

برهان. بر طبق تعریف تعامد بیرخوف $x \perp_B \alpha x + y$ اگر و فقط اگر به ازای هر $k \in \mathbb{R}$ داشته باشیم، $\|ax + y\| \leq \|(\alpha x + y) + kx\|$ یا اگر و فقط اگر $\|\alpha x + y\|$ کوچکترین مقدار $\|\beta x + y\|$ است. چون $\|\beta x + y\|$ در β پیوسته است لذا مینیمم خود را اختیار می‌کند. حال فرض کنید $x \perp_B Ax + y$ و $x \perp_B Bx + y$. چون تابع $f(n) = \|x + ny\|$ محدب است، آنگاه برای هر عدد حقیقی γ بین A و B داریم، $\|Bx + y\| = \|Ax + y\| = \|\gamma x + y\|$. در نتیجه برای هر γ بین A و B داریم $x \perp_B \gamma x + y$. □

لم ۳.۲. *فرض کنید* $(X, \|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد و* $x, y \in X$*، اگر* $x \perp_B Ax + y$ *و* $x \perp_B Mx + y$ *آنگاه برای هر* a *بین* A *و* M*،* $x \perp_B ax + y$.

برهان. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $A < M$. اگر $x \perp_B Ax + y$ و $x \perp_B Mx + y$، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{R}$ داریم $\|x + k(Ax + y)\| \geq \|x\|$ و $\|x + k(Mx + y)\| \geq \|x\|$. حال فرض کنید $A \leq a \leq M$. اگر $k \geq ۰$ آنگاه داریم:

$$\|x + k(ax + y)\| = \|[۱ + k(a - A)]x + k(Ax + y)\| \geq \|[۱ + k(a - A)]x\| \geq \|x\|.$$

اگر $k \leq ۰$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|x + k(ax + y)\| = \|[۱ + k(a - M)]x + k(Mx + y)\| \geq \|[۱ + k(a - M)]x\| \geq \|x\|.$$

در این‌صورت به ازای هر $A \leq a \leq M$ و به ازای هر $k \in \mathbb{R}$، $x \perp_B ax + y$. □

قضیه‌ی زیر نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۱۲.۲ است که بازه‌ای را که عدد a در آن قرار می‌گیرد را تعیین می‌کند. سپس با ارائه‌ی مثالی این قضیه را بیشتر درک می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۲. *فرض کنید* $(X, \|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد و* $x, y \in X$*، در این‌صورت* $x \perp_B ax + y$ *اگر و فقط اگر*

$$-\lim_{n \to \infty} \|nx + y\| - \|nx\| \leq a\|x\| \leq -\lim_{n \to \infty} \|nx\| - \|nx - y\|.$$

برهان. برای اثبات به [۵۰] مراجعه کنید. □

مثال ۲۹.۲. فضای باناخ X شامل اعضایی چون $(a, b) \in \mathbb{R}^۲$ را که نرم این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید،

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^۲ + b^۲ + |ab|}.$$

فرض کنید $x = (۱, ۰)$ و $y = (۰, ۱)$ در این‌صورت، $nx + y = (n, ۱)$ و $nx - y = (n, -۱)$. طبق قضیه‌ی ۱۵.۲، $x \perp_B ax + y$ اگر و فقط اگر $\frac{-۱}{۲} \leq a \leq \frac{۱}{۲}$. این بدان معناست $(۱, ۰) \perp_B (a, ۱)$ اگر و فقط اگر $\frac{-۱}{۲} \leq a \leq \frac{۱}{۲}$. و این معادل است با اینکه بگوییم برای هر $k \in \mathbb{R}$،

$$[(۱ + ka)^۲ + k^۲ + |k(۱ + ka)|]^{\frac{۱}{۲}} \geq ۱ \;\Leftrightarrow\; |a| \leq \frac{۱}{۲}.$$

فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت مشتق‌های چپ و راست تابع نرم به فرم زیر هستند. نام دیگر این مشتق‌ها، مشتق گتوی نرم است.

$$\tau_+(x; y) := \lim_{h \to ۰^+} \frac{۱}{h}(\|x + hy\| - \|x\|),$$

$$\tau_-(x; y) := \lim_{h \to ۰^-} \frac{۱}{h}(\|x + hy\| - \|x\|).$$

اگر $x \neq ۰$ آنگاه

$$\tau_+(x;y) = -A\|x\|, \qquad \tau_-(x;y) = -B\|x\|, \tag{۳.۲}$$

که بر طبق قضیه‌ی ۱۲.۲، A و B به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عددی چون a هستند که $x \perp_B ax+y$.
اگر مشتق تابع نرم در x موجود باشد، آنگاه $\tau_+(x;y)$ بر حسب y خطی است. اما در حالت کلی این مشتق خطی نیست، ولی این مشتق در شرایط زیر صدق می‌کند،

$$\tau_+(x;y+z) \leq \tau_+(x;y) + \tau_+(x;z), \tag{۴.۲}$$

$$\tau_+(x;ty) = t\tau_+(x;y); \quad t \geq ۰, \tag{۵.۲}$$

$$\tau_+(x;x) = \|x\|, \quad |\tau_+(x;y)| \leq \|y\|. \tag{۶.۲}$$

قسمت ۴.۲ نتیجه مستقیمی است که از نامساوی مثلث در نرم به‌دست می‌آید، حال آن‌که تساوی ۵.۲ از این‌که $-\dfrac{\tau_+(x;ty)}{\|x\|}$ و $-\dfrac{\tau_+(x;y)}{\|x\|}$، به‌ترتیب کوچکترین اعدادی چون a و b هستند که $x \perp_B ax + ty$ و $x \perp_B bx + y$. نامساوی ۶.۲ نیز از اینکه $x + y \left[\dfrac{\tau_+(x;y)}{\|x\|}\right] - x \perp_B$ و قضیه‌ی ۹.۲ به‌دست می‌آید. اگر A کوچکترین عددی چون a باشد که $x \perp_B ax + sy$، آنگاه $A - r$ کوچکترین عددی چون b است که $x \perp_B bx + (rx + sy)$. لذا با توجه به این برای هر اعداد حقیقی $s \geq ۰$ و هر r داریم:

$$\tau_+(x; rx + sy) = r\|x\| + s.\tau_+(x;y). \tag{۷.۲}$$

اگر x عضوی از فضای خطی نرم‌دار X باشد و f تابعک خطی باشد که $f(x) = \|x\|$ و $\|f\| = ۱$ آنگاه برای هر y،

$$\tau_-(x;y) \leq f(y) \leq \tau_+(x;y),$$

حال اگر $\tau_-(x;y) \leq a \leq \tau_+(x;y)$، آنگاه تابعک خطی چون F موجود است که،

$$F(y) = a, \quad \|F\| = ۱, \quad F(x) = \|x\|.$$

هم‌چنین بر طبق ۳.۲،

$$x \perp_B ax + y \ \Leftrightarrow\ \tau_-(x;y) \leq -a\|x\| \leq \tau_+(x;y). \tag{۸.۲}$$

اگر $\tau_-(x;y) = \tau_+(x;y) = ۰$ آنگاه بر طبق ۸.۲ نتیجه می‌گیریم که $x \perp_B y$ و $y \perp_B x$.

قضیه ۱۶.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت شرط لازم و کافی برای این‌که $\tau_+(y;x) = ۰$ در شرط $\tau_+(x;y) = ۰$ نیز صدق کند آن است که تعامد بیرخوف در X متقارن باشد و عدد یکتای a موجود باشد به‌طوری‌که $x \perp_B ax + y$.*

برهان. اگر برای هر $x \neq \circ$ و y عدد یکتای a موجود باشد که $x \perp_B ax + y$ آنگاه از ۸.۲،

$$x \perp_B y \;\Leftrightarrow\; \tau_+(x;y) = \circ.$$

بنابراین اگر تعامد بیرخوف متقارن باشد و $x, y \in X$ ناصفر باشند، آنگاه

$$\tau_+(y,x) = \circ \Leftrightarrow \tau_+(x;y) = \circ.$$

حال فرض کنید $x \neq \circ$ و $x \perp_B y$. فرض کنید A و B اعدادی باشند به‌طوری‌که $x \perp_B ax + y$ اگر و فقط اگر $A \leq a \leq B$، در حالی‌که بر طبق ۸.۲ نتیجه می‌گیریم که $A \leq \circ \leq B$. آنگاه $a = \circ$ کوچکترین مقدار از a است که $x \perp_B (A+a)x + y$ یا $x \perp_B ax + (Ax + y)$. پس بر طبق ۸.۲ نتیجه می‌گیریم که $\tau_+(x; Ax + y) = \circ$. حال اگر $Ax + y = \circ$ آنگاه $Ax + y \perp_B x$. و نیز اگر $Ax + y \neq \circ$، آنگاه از فرض این‌که $\tau_+(Ax + y; x) = \circ$ نتیجه می‌گیریم که $Ax + y \perp_B x$. به طور مشابه $a = \circ$ بزرگترین مقدار از a است که $x \perp_B (B+a)x + y$ یا $x \perp_B ax + (Bx + y)$. پس

$$\tau_-(x; Bx + y) = -\tau_+(x; -Bx - y) = \circ, \quad \tau_+(-Bx - y; x) = \circ.$$

و اگر $Bx+y \neq \circ$، آنگاه $x \perp_B Bx+y$. چون $A \leq \circ \leq B$ و $Ax+y \perp_B x$ و $Bx+y \perp_B x$ نتیجه می‌گیریم $y \perp_B x$. پس تعامد متقارن است اگر $\tau_+(y;x) = \circ$ در شرط $\tau_+(x;y) = \circ$ به ازای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$ صدق کند. حال فرض کنید دو عضو $x \neq \circ$ و y موجود باشند که $ax+y \perp_B x$. اگر $A' \leq a \leq B'$ که $A' \neq B'$. پس بر طبق متقارن بودن $ax + y \perp_B x$ و $\|ax + y\|$ برای هر $A' \leq a \leq B'$ مینیمم و ثابت است. اگر $A' < \alpha < B'$، آنگاه $\|\alpha x + y + hx\| - \|\alpha x + y\| = \circ$ در صورتی‌که $A' < \alpha \pm |h| < B'$. بنابراین

$$\tau_+(\alpha x + y; x) = \tau_-(\alpha x + y; x) = \circ,$$

همچنین از فرض قضیه نتیجه می‌گیریم که

$$\tau_+(x; \alpha x + y) = \tau_-(x; \alpha x + y) = \circ,$$

و بر طبق ۸.۲ این ناممکن است اگر $A' \neq B'$. پس برای هر $x \neq \circ$ و y عدد یکتای a موجود است که $x \perp_B ax + y$. □

۳.۵.۲ یکتایی و جمع‌پذیری تعامد بیرخوف

در این بخش درباره‌ی یکتایی و جمع‌پذیری تعامد بیرخوف به کمک تابعک‌های خطی می‌پردازیم. در بخش قبل در مورد وجود عناصر متعامد ثابت کردیم که برای هر دو عضو $x, y \in X$ اعداد حقیقی چون a و b موجودند که به ترتیب $x \perp_B ax + y$ و $bx + y \perp_B x$. این اعداد در حالت کلی یکتا نیستند و

یکتایی این اعداد به مفهوم مشتق‌پذیری نرم و اکیداً محدب بودن فضا بستگی دارد. از آن‌جایی‌که تعامد بیرخوف در حالت کلی متقارن نیست، این یکتایی را به‌صورت زیر می‌توان تعریف کرد. همچنین از ۸.۲ نتیجه می‌گیریم که برای هر $x \neq 0$ و y، $\tau_+(x;y) = \tau_-(x;y)$ اگر و فقط اگر عدد یکتای $a \in \mathbb{R}$ موجود باشد که $x \perp_B ax + y$.

تعریف ۳۰.۲. تعامد بیرخوف یکتای راست است اگر و فقط اگر برای هر $x \neq 0$ و y فقط یک عدد حقیقی چون a موجود باشد که $x \perp_B ax + y$.

تعریف ۳۱.۲. تعامد بیرخوف یکتای چپ است اگر و فقط اگر برای هر $x \neq 0$ و y فقط یک عدد حقیقی چون a موجود باشد که $ax + y \perp_B x$.

دقت کنید اگر تعامد بیرخوف متقارن باشد، آنگاه تعامد بیرخوف یکتای راست است اگر و فقط اگر یکتای چپ باشد. در قضایای بعد در مورد شرایط لازم و کافی برای یکتایی و جمع‌پذیری تعامد بیرخوف بحث می‌کنیم. مشتق گتوی نرم در هر فضای ضرب داخلی در هر نقطه‌ی ناصفر موجود و با $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|}$ برابر است. بنابراین در هر فضای ضرب داخلی $x \perp ax + y$ اگر و فقط اگر $\tau(x; ax + y) = 0$ یا به عبارت دیگر $\tau(x;y) = -a\|x\|$. این مطلب را می‌توان به فضاهای خطی نرم‌دار که تابع نرم در آن‌ها مشتق‌پذیر گتو است توسیع داد. بنابراین در این فضاها، $\tau_+(x;y) = \tau_-(x;y) = -a\|x\|$.

قضیه ۱۷.۲. *تعامد بیرخوف در هر فضای خطی نرم‌دار یکتای راست است اگر و فقط اگر نرم روی فضا در هر نقطه‌ی ناصفر مشتق‌پذیر گتو باشد، به عبارت دیگر اگر مشتق نرم $\tau(x;y)$ در هر نقطه‌ی ناصفر $x \in X$ موجود باشد، آنگاه $\tau(x;y) = -a\|x\|$ به‌طوری‌که a عددی است که $x \perp_B ax + y$.*

برهان. اثبات این قضیه به کمک نامساوی ۸.۲ واضح است. □

با توجه به این‌که اگر $\tau(x;y)$ موجود باشد آنگاه $\tau(x;y)$ یک تابعک خطی برحسب y است، در نتیجه اگر $x \perp_B y$ و $x \perp_B z$ آنگاه $x \perp_B (y + z)$. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم عکس این مطلب نیز درست است. به عبارت دیگر بین جمع‌پذیری تعامد بیرخوف و یکتایی تعامد بیرخوف ارتباط ایجاد می‌کند.

قضیه ۱۸.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت تعامد بیرخوف در هر فضای خطی نرم‌دار جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر یکتای راست باشد یا به عبارت دیگر اگر و فقط اگر تابع نرم در هر نقطه‌ی ناصفر مشتق‌پذیر گتو باشد.*

برهان. اگر تعامد بیرخوف یکتای راست باشد و $x \perp_B y$ و $x \perp_B z$ آنگاه y و z به ابرصفحه‌ی H گذرا از مبدا متعلق هستند.(بر طبق قضیه‌ی ۸.۲) حال اگر برای هر y عدد یکتای a موجود باشد که $x \perp_B ax + y$ آنگاه ابرصفحه‌ی H یکتاست، در این‌صورت $y + z \in H$ و $x \perp_B y + z$.

برعکس فرض کنید تعامد بیرخوف جمع‌پذیر باشد و $x \perp_B ax + y$ و $x \perp_B bx + y$، در این‌صورت

$x \perp_B -(bx+y)$ و بر طبق خاصیت جمع‌پذیری نتیجه می‌گیریم که $x \perp_B (a-b)x$. در نتیجه برای هر $k \in \mathbb{R}$، $\|x+k(a-b)x\| \geq \|x\|$. و این نامساوی برای هر $k \in \mathbb{R}$ برقرار است اگر و فقط اگر $a=b$. بنابراین تعامد بیرخوف یکتای راست است اگر جمع‌پذیر باشد.
با توجه به قضیه‌ی ۱۷.۲ می‌توان نتیجه گرفت که تعامد بیرخوف جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر در هر نقطه‌ی ناصفر مشتق‌پذیر گتو باشد. از طرفی اگر نرم فضای X در هر نقطه‌ی ناصفر مشتق گتو داشته باشد آنگاه $x \perp_B y$ اگر و فقط اگر $\tau(x;y)=۰$ و نقاط y که در شرط $\tau(x;y)=۰$ صدق می‌کنند، متعلق به ابرصفحه‌ی یکتای H می‌باشند که $x \perp_B H$. حال اگر $\tau(x;y)$ موجود باشد آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $\tau(x;y)+\tau(x;z)=\tau(x;y+z)$ و $x \perp_B y$ و $x \perp_B z$ لذا $x \perp_B y+z$. □

اکر تعامد بیرخوف یکتای راست باشد، یا اگر نرم فضا در هر نقطه مشتق‌پذیر گتو باشد، آنگاه عدد α به‌طوری‌که $x \perp_B \alpha x+y$ یکتاست و $\tau(x;ax+y)=۰$. پس تعامد بیرخوف یکتای راست است اگر و فقط اگر نرم فضا در هر نقطه‌ی ناصفر مشتق‌پذیر گتو باشد، اما این مطلب برای یکتایی چپ تعامد بیرخوف درست نیست مگر آن‌که تعامد بیرخوف متقارن باشد. در قضیه بعد به دنبال پیدا کردن شرط لازم و کافی برای اینکه تعامد بیرخوف یکتای چپ باشد هستیم.

قضیه ۱۹.۲. *فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت فضای X اکیداً محدب است اگر و فقط اگر تعامد بیرخوف یکتای چپ باشد.*

برهان. اگر X اکیداً محدب نباشد، آنگاه عناصر x و $y \neq ۰$ موجودند به‌طوری‌که برای هر $t \in \mathbb{R}$،

$$\|x\|+\|y\|=\|x+y\|, \quad x \neq ty.$$

از طرفی برای هر $۰ \leq k \leq ۱$ می‌توان نوشت،

$$x+y=(۱-k)x+ky+kx+(۱-k)y,$$

پس

$$\|x+y\| \leq \|(۱-k)x+ky\|+k\|x\|+(۱-k)\|y\|.$$

چون $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ در نتیجه،

$$\|x\|+\|y\| \leq \|(۱-k)x+ky\|+k\|x\|+(۱-k)\|y\|,$$

پس نتیجه می‌گیریم که،

$$\|(۱-k)x+ky\| \geq (۱-k)\|x\|+k\|y\|.$$

از طرفی $\|(۱-k)x+ky\| \leq (۱-k)\|x\|+k\|y\|$، در نتیجه برای هر $۰ \leq k \leq ۱$،

$$\|(۱-k)x+ky\| = (۱-k)\|x\|+k\|y\|.$$

اگر $k = \dfrac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$ در این‌صورت $\big\|(\|y\|x+\|x\|y)\big\| = ۲\|x\|.\|y\|$. حال قرار دهید

$$x^{'} = \|y\|x+\|x\|y, \quad y^{'} = \|y\|x-\|x\|y.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\|x^{'}+y^{'}\| = \|x^{'}-y^{'}\| = \|x^{'}\|.$$

پس اگر $|a| \leq ۱$ آنگاه $\|x^{'}+ay^{'}\| = \|x^{'}\|$ و اگر $|a| \geq ۱$ در این‌صورت $\|x^{'}+ay^{'}\| \geq \|x^{'}\|$. بنابراین اگر $|a| \leq ۱$ آنگاه $x^{'}+ay^{'} \perp_B y^{'}$. از آن‌جایی‌که $y^{'}=۰$ ایجاب می‌کند $x = \left(\dfrac{\|x\|}{\|y\|}\right)y$، و این بدان معناست که تعامد بیرخوف یکتای چپ نیست. برعکس، نامساوی مثلث برای نرم ایجاب می‌کند که تابع $f(n)=\|x+ny\|$ حقیقی مقدار و مقعر رو به بالا است. بنابراین اگر نرم مشتق‌پذیر گتو باشد، در این صورت $\tau(x+ny;y) = f^{'}(n)$ صعودی یکنوا و بنابراین پیوسته است و با $-a_n\|x+ny\|$ مساوی است به‌طوری‌که $x+ny \perp_B a_n(x+ny)+y$. حال اگر فضای خطی نرم‌دار X اکیداً محدب باشد آنگاه تابع $f(n)=\|x+ny\|$ محدب و $f^{'}(n)$ تابعی پیوسته و صعودی است.
اگر $y \perp_B x+ay$ و $y \perp_B x+by$ آنگاه $\|x+by\| = \|x+ay\|$، چون هر کدام مینیمم هستند، لذا برای هر $a \leq n \leq b$ عبارت $\|x+ny\|$ ثابت است(بر طبق قضیه‌ی ۱۴.۲). بنابراین تعامد بیرخوف در هر فضای اکیداً محدب یکتای چپ است. $\square$

قضیه ۲۰.۲. *فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند،*

(۱) *X هموار است.*

(۲) *تعامد بیرخوف در X یکتای راست است.*

(۳) *تعامد بیرخوف در X جمع پذیر راست است.*

برهان. (۲) $\rightarrow$ (۱). فرض کنید X یک فضای هموار باشد و $۰ \neq x \in X$ در این‌صورت تابعک یکتای $f \in S(X^*)$ موجود است به‌طوری‌که $f(x)=\|x\|$. حال برای هر $y \in X$ عدد $\alpha = -\dfrac{f(y)}{f(x)}$ یکتا اسکالری است که $x \perp_B (\alpha x+y)$.
(۱) $\rightarrow$ (۲). فرض کنید تعامد بیرخوف در X یکتای راست باشد و $۰ \neq x \in X$. هم‌چنین فرض کنید $f \in S(X^*)$ در شرط $f(x)=\|x\|$ صدق کند، اگر $y \in X$ آنگاه بر طبق یکتایی راست تعامد بیرخوف برای اسکالر یکتای $\alpha = -\dfrac{f(y)}{f(x)}$ داریم $x \perp_B \alpha x+y$. بنابراین $f(y) = -\alpha f(x)$ و لذا $x \in X$ دارای فقط یک تابعک پشتیبان است و این یعنی X هموار است.

(۳) $\to$ (۱). فرض کنید X یک فضای هموار باشد و نگاشت $f_x \longmapsto x$ از $X\backslash\{\circ\}$ به $X^*\backslash\{\circ\}$ یک نگاشت پشتیبان باشد. فرض کنید $X \ni x \neq \circ$ و $x \perp_B y$ و $x \perp_B z$. در این‌صورت بر طبق یکتایی راست تعامد بیرخوف عدد یکتای α که $x \perp_B (\alpha x + y)$ برابر با صفر است. مشابهاً برای عدد یکتای β که $x \perp_B (\beta x + z)$ به‌همین ترتیب است. به هر حال در هر دو حالت $f_x(y) = \circ = f_x(z)$. بنابراین $f_x(y+z) = f_x(y) + f_x(z) = \circ$ و این یعنی $x \perp_B (y+z)$.

(۲) $\to$ (۳). فرض کنید تعامد بیرخوف در X از راست جمع‌پذیر باشد، و فرض کنید $X \ni x \neq \circ$ طوری باشد که $x \perp_B (\alpha x + y)$ و $x \perp_B (\beta x + y)$. حال چون $x \perp_B -(\beta x + y)$ و بر طبق جمع‌پذیری از راست داریم $x \perp_B (\alpha x + y) - (\beta x + y)$ در نتیجه $x \perp_B (\alpha x - \beta x)$ بنابراین $x \perp_B (\alpha - \beta)x$. بنابراین برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|x\| \leq \|x + \lambda(\alpha - \beta)x\| = |۱ + \lambda(\alpha - \beta)|\|x\|,$$

و این بدان معناست که α و β باید مساوی باشند و در نتیجه تعامد یکتای راست است. □

۴.۵.۲ مثال

برای این‌که درک بهتری از یکتایی چپ و راست تعامد بیرخوف داشته باشید، فضای باناخ $(C([\circ, ۱]), \|.\|)$ را که در آن $\|f\| = \sup_{x\in(\circ,۱)} |f(x)|$ در نظر بگیرید. ابتدا قضیه‌ی زیر را در مورد یکتایی چپ بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۱.۲. *تعامد بیرخوف در هر زیرمجموعه‌ی T از C یکتای چپ (اکیداً محدب) است اگر و فقط اگر تابعک‌های خطی ناصفر در T که قدر مطلق آن‌ها ماکزیممشان را در یک نقطه‌ی مشترک اختیار می‌کنند، به‌صورت حاصل‌ضرب اسکالری از یکدیگر باشند.*

برهان. اگر تابعک‌های ناصفر f و g که در آن $|f|$ و $|g|$ هر دو در نقطه‌ی مشترک a ماکزیمم هستند، موجود باشند آنگاه یا تساوی $\|f + g\| = |f(a) + g(a)|$ یا تساوی $\|f - g\| = |f(a) - g(a)|$ برقرار است. بنابراین $\|f\| + \|g\|$ یا با $\|f + g\|$ مساوی است و یا با $\|f - g\|$ مساوی است. اگر T یک فضای اکیداً محدب (یا تعامد بیرخوف یکتای چپ باشد) باشد، آنگاه عدد حقیقی t موجود است که $f = tg$. برعکس، فرض کنید T اکیداً محدب نباشد، آنگاه تابعک‌های خطی ناصفر $f, g \in T$ موجود است که $\|f + g\| = \|g\| + \|f\|$ و برای هر t داریم $f \neq tg$. فرض کنید $\|f\| = |f(a)|$ و $\|g\| = |g(b)|$ و $\|f + g\| = |f(c) + g(c)|$. بنابراین $|f(c) + g(c)| = |f(a)| + |g(b)|$. امّا برطبق نامساوی مثلث، $|f(c) + g(c)| \leq |f(c)| + |g(c)|, |f(c)| \leq |f(a)|$ و $|g(c)| \leq |g(b)|$. بنابراین

$$|f(c)| = |f(a)| \quad , \quad |g(c)| = |g(b)|,$$

و این یعنی، $|f|$ و $|g|$ ماکزیمم خود را در c اختیار می‌کنند، در حالی‌که f و g به صورت حاصل‌ضرب اسکالری از هم نیستند. □

قضیه‌ی قبل به ما این امکان را می‌دهد که مشخص کنیم چه وقت تعامد بیرخوف در یک زیرمجموعه‌ی خطی T از C، یکتای چپ است یا چه وقت T اکیداً محدب است. در قضایای قبلی نتیجه گرفتیم که تعامد بیرخوف یکتای راست است اگر و فقط اگر نرم مشتق‌پذیر گتو باشد و این نیز مستلزم محاسبه‌ی $\tau_+(x;y)$ و $\tau_-(x;y)$ است. حال فضای باناخ $(C([\circ,\text{۱}]),\|.\|)$ را در نظر بگیرید، در این فضا داریم:

$$\tau_\pm(f;g)=\lim_{h\to\circ^\pm}\frac{\max|f+hg|-\max|f|}{h}.$$

فرشه در [۳۵] ثابت کرده است که تابع نرم فضای باناخ C مشتق‌پذیر گتو در نقطه‌ی f است اگر و فقط اگر $|f|$ ماکزیمم خود را فقط در یک نقطه اختیار کند.

قضیه ۲۲.۲. *اگر $f\neq\circ$ و g عضوهایی از فضای C باشند، آنگاه*

$$\tau_+(f;g)=\max_A g(sgnf),\quad \tau_-(f;g)=\min_A g(sgnf),$$

که در آن A مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی چون α است که $|f(\alpha)|=\|f\|$.

برهان. از آن‌جایی‌که

$$\tau_+(f,g)=\lim_{h\to\circ^+}\frac{\|f+hg\|-\|f\|}{h}=\lim_{n\to\infty}\|nf+g\|-\|nf\|,$$

لذا بر طبق قضیه‌ی ۱۵.۲ نتیجه می‌گیریم که $\tau_+(f,g)$ موجود است. حال اگر $\|f\|=|f(\alpha)|$، آنگاه

$$\tau_+(f,g)\geq\lim_{h\to\circ^+}\frac{|f(\alpha)+hg(\alpha)|-|f(\alpha)|}{h}=g(\alpha)[sgnf(\alpha)],$$

بنابراین $\tau_+(f,g)\geq\max_A g(sgnf)$. حال فرض کنید $\lim_{h\to\circ^+}a_h=a$ و a_h اعدادی باشند که $\|f+hg\|=|f(a_h)+hg(a_h)|$، حال چون $\|f+hg\|$ در h پیوسته است لذا نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{h\to\circ^+}|f(a_h)+hg(a_h)|=\|f\|\Rightarrow|f(a)|=\|f\|.$$

آنگاه

$$\frac{\|f+hg\|-\|f\|}{h}=\frac{|f(a_h)+hg(a_h)|-\|f\|}{h}\leq\frac{|f(a_h)+hg(a_h)|-|f(a_h)|}{h},$$

و اگر $h\to\circ^+$ در بین مقادیر h' که $a_{h'}\to a$، آنگاه نتیجه می‌گیریم که

$$\tau_+(f,g)\leq\lim_{h'\to\circ^+}g(a_{h'})[sgnf(a_{h'})]=g(a)[sgnf(a)]\leq\max_A g(sgnf),$$

در نتیجه $\tau_+(f;g)=\max_A g(sgnf)$. از طرفی $\tau_-(f;g)=-\tau_+(f;-g)$. پس می‌توان نوشت

$$\tau_-(f;g)=-\big(\max_A -g(sgnf)\big)=\min_A g(sgnf).$$

□

همچنین اگر $f,g\in C$ آنگاه با توجه به این قضیه و رابطه‌ی ۸.۲ و اینکه $sgnf=\dfrac{|f|}{f}$ داریم:

$$f\perp_B af+g \ \Leftrightarrow\ \min_A \frac{g}{f}\le -a\le \max_A \frac{g}{f}. \tag{۹.۲}$$

که در آن A مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی چون α است که $\|f\|=|f(\alpha)|$. بنابراین اگر $\alpha\in A$ آنگاه $f\perp_B -\left(\dfrac{g(\alpha)}{f(\alpha)}\right)f+g$. پس واضح است که تعامد بیرخوف یکتای راست است و مشتق گتوی نرم $\tau(f;g)$ موجود است اگر و فقط اگر $|f(\alpha)|$ دارای مقادیر یکسان به ازای هر $\alpha\in A$ باشد و $g(\alpha).f(\alpha)$ دارای علامت یکسان برای $\alpha\in A$ باشد. اگر برای α که $\|f\|=|f(\alpha)|$ داشته باشیم $g(\alpha)=۰$، آنگاه $f\perp_B g$. و این یک شرط لازم برای $f\perp_B g$ نیست مگر اینکه تعامد بیرخوف یکتای راست است.

۵.۵.۲ تعامد و مشخصه سازی فضاهای ضرب داخلی

به عنوان کاربردی از بحث تعامد در این بخش می‌خواهیم به کمک مفهوم تعامدها به مشخصه سازی فضاهای ضرب داخلی می‌پردازیم. ابتدا چند قضیه‌ی پرکاربرد زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۳.۲. *اگر $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x\neq ۰, y\in X$ آنگاه اعداد a,b,c,d موجودند به‌طوری‌که $x\perp_J ax+y, x\perp_P bx+y, x\perp_B cx+y$ و همچنین $dx+y\perp_B x$.* **بعلاوه** *اگر $\|x\|\le\|y\|$ آنگاه $|a|\le \dfrac{\|y\|}{\|x\|}$.*

برهان. برای اثبات به [۵۰] و [۵۱] رجوع کنید. □

در قضیه‌ی بعد یکتایی تعامد متساوی‌الساقینی جیمز و فیثاغورسی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۴.۲. *اگر $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند،*

(۱) *تعامد متساوی‌الساقینی در X یکتاست اگر و فقط اگر X یک فضای اکیداً محدب باشد،*

(۲) *تعامد فیثاغورسی یکتاست.*

برهان. اثبات (۱). فرض کنید X یک فضای اکیداً محدب باشد و تعامد متساوی‌الساقینی یکتا نباشد. به‌راحتی می‌توان دید که $x\neq ۰, y\in X$ و عدد $\alpha>۰$ موجودند، به‌طوری‌که $x\perp_J y$ و $x\perp_J (\alpha x+y)$. تابع $q(t)=\|y+tx\|$ برای هر $-\infty<t<\infty$ یک تابع اکیداً محدب با خاصیت $q(۱)=q(-۱)$ و $q(\alpha+۱)=q(\alpha-۱)$ است. در حالت $۰<\alpha\le ۲$ داریم:

$$\begin{aligned} q(\alpha-۱)&=q\left(\frac{۲-\alpha}{۲}(-۱)+\frac{\alpha}{۲}\right)<q(۱)\\ &=q\left(\frac{\alpha}{۲}(\alpha-۱)+\left(۱-\frac{\alpha}{۲}\right)(\alpha+۱)\right)<q(\alpha+۱), \end{aligned}$$

و این یک تناقض است. اما در حالت $\alpha > 2$ تابع $q(t)$ دارای دو مینیمم موضعی مجزا است، یکی در بازه‌ی $[-1, 1]$ و دیگری در بازه‌ی $[\alpha - 1, \alpha + 1]$. اما از آن‌جایی‌که q اکیداً محدب است، لذا فقط در یک نقطه می‌تواند مینیمم داشته باشد و این تناقض است.

اثبات (۲). فرض کنید تعامد فیثاغورسی یکتا نباشد، در این‌صورت عضوهای $x \neq 0, y \in X$ و عدد $\alpha > 0$ موجودند به‌طوری‌که $x \perp_P y$ و $x \perp_P \alpha x + y$. بنابراین

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \|x + \alpha x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|\alpha x + y\|^2. \tag{10.2}$$

قرار دهید $g(t) = \|y + tx\|^2$ در این‌صورت بر طبق ۱۰.۲،

$$g(1) = \|x\|^2 + g(0), \tag{11.2}$$

$$g(\alpha + 1) = \|x\|^2 + g(\alpha). \tag{12.2}$$

واضح است که g یک تابع محدب روی $-\infty < t < \infty$ است. ابتدا نشان می‌دهیم برای $0 < t < 1$ و s_1 و s_2 که $g(s_1) \neq g(s_2)$ داریم:

$$g(ts_1 + (1-t)s_2) < tg(s_1) + (1-t)g(s_2). \tag{13.2}$$

چون

$$\begin{aligned}
g(ts_1 + (1-t)s_2) &= \|t(y + s_1x) + (1-t)(y + s_2x)\|^2 \\
&\leq t^2\|y + s_1x\|^2 + (1-t)^2\|y + s_2x\|^2 + 2t(1-t)\|y + s_1x\|\|y + s_2x\| \\
&= t\|y + s_1x\|^2 + (1-t)^2\|y + s_2x\|^2 \\
&+ (t^2 - t)\left[\|y + s_1x\|^2 + \|y + s_2x\|^2 - 2\|y + s_1x\|\|y + s_2x\|\right] \\
&= tg(s_1) + (1-t)g(s_2) - t(1-t)|\|y + s_1x\| - \|y + s_2x\||^2 \\
&\leq tg(s_1) + (1-t)g(s_2).
\end{aligned}$$

حال فرض کنید $0 < \alpha < 1$، در این‌صورت با استفاده از ۱۱.۲ و ۱۳.۲،

$$g(\alpha) < \alpha g(1) + (1-\alpha)g(0), \tag{14.2}$$

$$\begin{aligned}
g(1) &< \alpha g(\alpha) + (1-\alpha)g(\alpha+1) \\
&= \alpha g(\alpha) + (1-\alpha)(g(\alpha) + g(1) - g(0)).
\end{aligned} \tag{15.2}$$

در نتیجه $\alpha g(1) + (1-\alpha)g(0) < g(\alpha)$ و این با ۱۴.۲ در تناقض است. در حالت $\alpha > 1$ با استفاده از محدب بودن g و ۱۱.۲ و ۱۲.۲ نتیجه می‌گیریم $g(0) \neq g(\alpha)$ و $g(1) \neq g(\alpha + 1)$ و بر طبق ۱۳.۲،

$$g(1) < \frac{\alpha - 1}{\alpha} g(0) + \frac{1}{\alpha} g(\alpha), \tag{16.2}$$

و هم‌چنین نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} g(\alpha) &< \frac{g(1)}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} g(\alpha+1) \\ &= \frac{g(1)}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} (g(\alpha) + g(1) - g(0)). \end{aligned}$$

در حالت $\alpha = 1$،

$$\begin{aligned} g(2) &= g(1) + \|x\|^2 = g(0) + 2\|x\|^2, \\ g(1) &< \frac{1}{2}(g(0) + g(2)) = g(0) + \|x\|^2. \end{aligned}$$

و این نادرست است. در نتیجه در هر حالت به تناقض رسیدیم، پس تعامد فیثاغورسی در هر فضای خطی نرم‌دار یکتاست. $\square$

در حالت کلی تعامد فیثاغورسی همگن نیست. در سال ۱۹۵۶ هازل[۴۲] در [۱۵] ثابت کرد که یک فضای ضرب داخلی است اگر تعامد فیثاغورسی همگن باشد، به عبارت دیگر هازل به یک مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی به کمک تعامد فیثاغورسی رسید.

قضیه ۲۵.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت اگر تعامد فیثاغورسی همگن باشد، آنگاه X یک فضای ضرب داخلی است.*

برهان. ابتدا دقت می‌کنیم منظور از این‌که تعامد فیثاغورسی همگن است، یعنی برای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$،

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2 \Rightarrow \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x - \mu y\|^2.$$

فرض کنید $x, y \in X$ و $\|x\| \geq \|y\|$. تابع پیوسته‌ی f با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید،

$$f(\lambda) = \|x - (y + \lambda x)\|^2 - \|x\|^2 - \|y + \lambda x\|^2.$$

فرض کنید $f(0) = \|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \geq 0$، چون $f(1) = \|y\|^2 - \|x\|^2 - \|x+y\|^2 \leq 0$ آنگاه $\lambda \in [0, 1]$ موجود است که $f(\lambda) = 0$. حال فرض کنید $f(0) < 0$. اگر $f(-1) \geq 0$ آنگاه $\lambda \in [-1, 0)$ موجود است که $f(\lambda) = 0$. همچنین اگر $f(-1) = \|2x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|x-y\|^2 < 0$، آنگاه داریم :

$$\begin{aligned} f(-2) &= \|3x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|2x - y\|^2 \\ &> \|3x - y\|^2 - 2\|x\|^2 - \|x - y\|^2 \\ &> \|3x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|3x\|.\|y\| - 3\|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= 6\|x\|(\|x\| - \|y\|) \geq 0. \end{aligned}$$

[۴۲] Hazel

بنابراین $\lambda \in [-۲, -۱)$ موجود است که $f(\lambda) = ۰$. حال فرض کنید λ^* ریشه‌ی حقیقی $f(\lambda) = ۰$ باشد، قرار دهید $z = y + \lambda^* x$ به‌طوری‌که $\|x - z\|^۲ = \|x\|^۲ + \|z\|^۲$. در این‌صورت نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\|x-y\|^۲ + \|x+y\|^۲ &= \|x - z + \lambda^* x\|^۲ + \|x + z - \lambda^* x\|^۲\\ &= \|x(۱+\lambda^*) - z\|^۲ + \|x(۱-\lambda^*) + z\|^۲\\ &= (۱+\lambda^*)^۲\|x\|^۲ + \|z\|^۲ + (۱-\lambda^*)^۲\|x\|^۲ + \|z\|^۲\\ &= ۲\|x\|^۲ + ۲\big(\lambda^{*۲}\|x\|^۲ + \|z\|^۲\big) = ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲,\end{aligned}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲),$$

و این یعنی قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع برقرار است و در نتیجه فضای X ضرب داخلی است. □

در قضایای زیر به بحث مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی توسط تعامد براساس ایده‌ی کاپور و پراسد در [۳۸] می‌پردازیم.

قضیه ۲۶.۲. *اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند.*

(i) *X یک فضای ضرب داخلی است.*

(ii) *برای هر $x, y \in X$، اگر $x \perp_P y$ آنگاه $x \perp_J y$.*

(iii) *برای هر $x, y \in X$، اگر $x \perp_J y$ آنگاه $x \perp_P y$.*

برهان. $(i) \Rightarrow (ii)$ واضح است. برای اثبات $(ii) \Rightarrow (iii)$ ابتدا نشان می‌دهیم اگر (ii) برقرار باشد آنگاه X یک فضای اکیداً محدب است. فرض کنید این‌طور نباشد در این صورت عضوهای $x \neq y \in X$ موجودند به‌طوری‌که $۱ = \frac{\|x-y\|}{۲} = \|y\| = \|x\|$ و $x \not\perp_P y$. از طرفی بر طبق قضیه‌ی ۲۳.۲ عدد $\alpha \neq ۰$ موجود است بطوریکه $x \perp_P \alpha x + y$، لذا

$$\|x + \alpha x + y\|^۲ = \|\alpha x + y\|^۲ + \|x\|^۲ = ۱ + \|\alpha x + y\|^۲. \tag{۱۷.۲}$$

بنابراین

$$\|(۱+\alpha)x + y\| = \|(۱-\alpha)x + y\|. \tag{۱۸.۲}$$

از طرفی بر طبق قضیه‌ی ۲۳.۲ می‌توان گفت $|\alpha| \leq ۱$ و همچنین بر طبق ۱۷.۲ می‌توان نوشت،

$$(۲+\alpha)^۲ = (۲+\alpha)^۲\left\|\frac{(۱+\alpha)x + y}{۲+\alpha}\right\|^۲ = ۱ + \|\alpha x + y\|^۲ \geq ۱,$$

در نتیجه $\alpha \geq -۱$ و بنابراین $\alpha = -۱$ و همچنین از رابطه‌ی ۱۷.۲ داریم $\|x-y\|^۲ + ۱ = \|y\|^۲ = ۱$. و این با فرض اینکه $x \neq y$ در تناقض است. لذا فضای X اکیداً محدب است. حال فرض کنید گزاره‌ی (ii) گزاره‌ی (iii) را ایجاب نکند. در این‌صورت نقاط $x,y \in X$ موجودند که $x \perp_J y$ اما $x \not\perp_P y$. عدد $\alpha \neq ۰$ را طوری انتخاب کنید که $x \perp_P \alpha x + y$. از طرفی بر طبق (ii) داریم $x \perp_J \alpha x + y$. بنابراین $x \perp_J y$ و $x \perp_J \alpha x + y$، که این با یکتایی تعامد متساوی‌الساقینی در قضیه‌ی ۲۴.۲ در تناقض است. برای اثبات (iii) به (i) از تذکر ۶.۱ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\|x\| = \|y\| = ۱$، در این‌صورت $x + y \perp_J x - y$ و بنابراین

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = \|x+y+x-y\|^۲ = ۴.$$

پس بر طبق تذکر ۶.۱، X یک فضای ضرب داخلی است. □

قضیه ۲۷.۲. *اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *فضای X یک فضای ضرب داخلی است.*

(۲) *برای هر $x,y \in X$، اگر $x \perp_P y$ آنگاه $x \perp_B y$.*

(۳) *برای هر $x,y \in X$، اگر $x \perp_B y$ آنگاه $x \perp_P y$.*

برهان. اثبات (۲) $\Leftarrow$ (۱) واضح است. برای اثبات (۳) $\Leftarrow$ (۲) ابتدا نشان می‌دهیم اگر (۲) برقرار باشد آنگاه X یک فضای اکیداً محدب است. در غیر این‌صورت، فرض کنید $x \neq y$ به‌طوری‌که داشته باشیم $\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{۲}\right\|$ و $x \not\perp_P \frac{x+y}{۲}$. در این‌صورت $\alpha \neq ۰$ موجود است که $\alpha\left(\frac{x+y}{۲}\right) + x \perp_P \frac{x+y}{۲}$، آنگاه

$$\left\|(\alpha+۱)\frac{x+y}{۲} + x\right\|^۲ = ۱ + \left\|\alpha\left(\frac{x+y}{۲}\right) + x\right\|^۲. \tag{۱۹.۲}$$

و بنابراین برای هر $k \in \mathbb{R}$،

$$\left\|\frac{x+y}{۲} + \alpha k\left(\frac{x+y}{۲}\right) + kx\right\| \geq \left\|\frac{x+y}{۲}\right\| = ۱. \tag{۲۰.۲}$$

قرار دهید $k = -\frac{۱}{\alpha}$. در این‌صورت بر طبق رابطه‌ی ۲۰.۲، $|\alpha| \leq ۱$. دوباره در رابطه‌ی ۲۰.۲ قرار دهید $k = -\frac{۱}{\alpha+۲}$ و همچنین با استفاده از این‌که هر ترکیب محدب از x و y از نرم یک است پس، $\left|\frac{۱}{\alpha+۲}\right| \geq ۱$. بنابراین $\alpha = -۱$ و لذا

$$۱ = \left\|\frac{x+y}{۲} + \frac{x-y}{۲}\right\|^۲ = \left\|\frac{x+y}{۲}\right\|^۲ + \left\|\frac{x-y}{۲}\right\|^۲ = ۱ + \left\|\frac{x-y}{۲}\right\|^۲.$$

در نتیجه $x = y$ و این تناقض است، بنابراین X یک فضای اکیداً محدب است. فرض کنید (۲) گزاره‌ی (۳) را ایجاب نکند. همچنین فرض کنید $x, y \in X$ طوری باشند که $y \perp_B x$ اما $y \not\perp_P x$. از طرفی عدد $\alpha \neq ۰$ موجود است که $y \perp_P x + \alpha y$. اما بر طبق (۲) داریم $y \perp_B x + \alpha y$. و این با یکتایی چپ تعامد بیرخوف در هر فضای اکیداً محدب تناقض دارد. بنابراین $(۳) \Rightarrow (۲)$. حال $(۱) \Rightarrow (۳)$ را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\|x\| = \|y\| = ۱$. اگر $x \perp_B y$ و $x - y \perp_B x + y$ آنگاه داریم:

$$۴ = \|x + y + x - y\|^۲ = \|x + y\|^۲ + \|x - y\|^۲$$

حال اگر $y \not\perp_B x$ آنگاه $z \in X$ را طوری اختیار می‌کنیم که $z \perp_B x$ و $x - z \perp_B x + z$. (به [۳۲] مراجعه کنید.) بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\|z\|^۲ = \left\|\frac{(x+z)-(x-z)}{۲}\right\|^۲ &= \left\|\frac{x+z}{۲}\right\|^۲ + \left\|\frac{x-z}{۲}\right\|^۲ \\ &= \left\|\frac{x}{۲}\right\|^۲ + \left\|\frac{z}{۲}\right\|^۲ + \left\|\frac{x}{۲}\right\|^۲ + \left\|\frac{z}{۲}\right\|^۲ .\end{aligned}$$

و این یعنی $\|x\| = \|z\| = ۱$. فرض کنید α, β طوری باشند که $y = \alpha x + \beta z$. پس

$$\begin{aligned}&\|y\|^۲ = \|\alpha x + \beta z\|^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ \\ &\|x + y\|^۲ = \|(۱ + \alpha)x + \beta z\|^۲ = (۱ + \alpha)^۲ + \beta^۲ \\ &\|x - y\|^۲ = \|(۱ - \alpha)x - \beta z\|^۲ = (۱ - \alpha)^۲ + \beta^۲.\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $۴ = ۲ + ۲(\alpha^۲ + \beta^۲) = \|x - y\|^۲ + \|x + y\|^۲$. در نتیجه بر طبق ۶.۱، X یک فضای ضرب داخلی است. □

نتیجه ۲.۲. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر عدد ثابت* $\alpha \neq ۰, ۱$ *موجود باشد که داشته باشیم*

$$\|x + y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ \Rightarrow \|x + \alpha y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|\alpha y\|^۲$$

برهان. حالت $\alpha = -۱$ در لم ۵.۳ توسط دی (Day) در [۳۷] ثابت شده است. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید که $\alpha > ۱$. همچنین فرض کنید $x, y \in X$ طوری باشند که $\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲+\|y\|^۲$. به استقرا روی n می‌توان ثابت کرد که برای هر $n \geq ۱$،

$$\|y + \alpha^n x\|^۲ = \|y\|^۲ + \|\alpha^n x\|^۲.$$

بنابراین برای هر $n \geq ۱$ نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha^n \left(\|x + \alpha^{-n} y\|^۲ - \|x\|^۲\right) = \alpha^{-n}\|y\|^۲. \qquad (۲۱.۲)$$

بر طبق رابطه‌ی ۲۱.۲،

$$۲\|x\|\tau_+(x;y) = ۰, \tag{۲۲.۲}$$

و این یعنی $x \perp_B y$، پس $x \perp_P y$ عبارت $x \perp_B y$ را نتیجه می‌دهد، در نتیجه بر طبق قضیه‌ی ۲۷.۲ فضای X یک فضای ضرب داخلی است. □

قضیه ۲۸.۲. *اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند،*

(۱) *فضای X یک فضای ضرب داخلی است.*

(۲) *برای هر $x, y \in X$، اگر $x \perp_B y$ آنگاه $x \perp_J y$.*

(۳) *برای هر $x, y \in X$، اگر $x \perp_J y$ آنگاه $x \perp_B y$.*

برهان. اثبات (۲) $\Rightarrow$ (۱) و (۳) $\Rightarrow$ (۱) واضح است. حال فرض کنید گزاره‌ی (۲) برقرار باشد و همچنین فرض کنید $x \neq ۰, y \in X$. حال عدد α را طوری اختیار می‌کنیم که $x \perp_B \alpha x + y$. از طرفی چون تعامد بیرخوف همگن است لذا برای هر k داریم $x \perp_B k(\alpha x + y)$. از طرفی بر طبق (۲) برای هر k می‌توان نوشت $x \perp_J k(\alpha x + y)$. بنابراین بر طبق نتیجه‌ی ۴.۷ از [۵۱] داریم (۱) $\Rightarrow$ (۲). برای اثبات (۱) $\Rightarrow$ (۳) فرض کنید $\|x\| = \|y\|$ در این‌صورت $x+y \perp_J x-y$ و بنابراین $x+y \perp_B x-y$. پس برای هر k داریم:

$$\|x + y + k(x - y)\| \geq \|x + y\|.$$

در حالت خاص برای $\alpha > ۱$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\left\|x + y + \frac{\alpha^۲ - ۱}{\alpha^۲ + ۱}(x - y)\right\| \geq \|x + y\|.$$

بنابراین برای هر $\alpha > ۱$،

$$\|\alpha x + \alpha^{-۱} y\| \geq \frac{\alpha^۲ + ۱}{۲\alpha}\|x + y\| \geq \|x + y\|.$$

بنابراین گزاره‌ی (۳) نتیجه‌ی زیر را برای هر $\alpha \neq ۰$ ایجاب می‌کند،

$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|\alpha x + \alpha^{-۱} y\| \geq \|x + y\|.$$

با توجه به تذکر ۶.۱ نتیجه می‌گیریم که فضای X یک فضای ضرب داخلی است. □

فصل ۳

زاویه

۱.۳ مقدمه

همه‌ی ما در هندسه‌ی مقدماتی با مفهوم زاویه در فضاهای اقلیدسی آشنا شدیم . در آنجا یاد گرفتیم که زاویه یا گوشه [۱] به ناحیه‌ای از صفحه گفته می‌شود که بین دو نیم‌خط که سر مشترک دارند محصور شده است. به سر مشترک این دو نیم‌خط رأس زاویه یا گوشه می‌گویند. بزرگی یک زاویه «مقدار چرخشی» (دورانی) است که دو نیم‌خط از گوشه‌ی زاویه نسبت به یکدیگر دارند، با بدست آوردن طول کمانی تولید شده در اثر چرخش می‌توان اندازه‌ی زاویه را بدست آورد.

مفهوم زاویه آن‌قدر مهم است که اصل‌های چهارم و پنجم از اصول اقلیدس درباره‌ی زاویه است. حال از هندسه‌ی اقلیدسی جدا می شویم و وارد فضاهای آنالیزی می‌شویم. در فصل گذشته مفهوم تعامد را به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم دادیم و انواع مختلفی از تعامدها را در فضاهای نرم‌دار معرفی کردیم. در هر فضای نرم‌دار ما فقط با نرم سروکار داریم مثلاً به کمک نرم می‌توانیم فاصله‌ی بین دو بردار را اندازه بگیریم ولی زاویه‌ی بین دو بردار را نمی‌توانیم اندازه بگیریم. برخلاف فضاهای ضرب داخلی که مفهوم تعامد از مفهوم زاویه منتج می‌شود در حالت کلی در فضاهای نرم‌دار خطی مفهوم تعامد همواره از مفهوم زاویه منتج نمی‌شود و این یک حفره برای فضاهای نرم‌دار محسوب می‌شد. به‌خاطر همین ریاضی‌دانان با ایجاد برخی از تعاریف از زاویه‌ها که به مفهوم تعامد مرتبط هستند این حفره را پرکردند. در این فصل به دنبال این هستیم تا زاویه‌ی اقلیدسی را از فضاهای اقلیدسی به فضاهای نرم‌دار خطی تعمیم دهیم. در بخش اول زاویه در فضاهای ضرب داخلی را معرفی می‌کنیم و با ویژگی‌های این زاویه آشنا می‌شویم. سپس مفهوم زاویه‌ی تعمیم‌یافته در فضاهای خطی نرم‌دار را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در هر فضای نرم‌دار خطی اگر این زاویه‌ی تعمیم یافته را بتوان تعریف کرد آنگاه این فضا، فضایی ضرب داخلی است. در بخش دوم با برخی از زوایای معرفی شده در فضاهای نرم‌دار و خواص این زوایا آشنا می‌شویم . زوایای زیادی توسط ریاضی‌دانان در فضاهای خطی نرم‌دار معرفی شده است. از جمله این ریاضی‌دانان

[۱] Angulus

می‌توان به ولنتین[۲] و ویمنت[۳] در[۳۰، ۲۹] و دیمینه[۴] و همکارانش در [۹، ۱۱] و میلیسیک در [۴۲] همچنین هندرا[۵] و همکارانش در [۱۶] را نام برد، که در این فصل و فصول بعدی با این زوایا بیشتر آشنا می شویم. همچنین در این فصل از برخی از زوایای معرفی شده در مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی استفاده می‌شود. در این فصل از منابع مذکور در بالا استفاده می‌کنیم مگر اینکه در متن منبع به روشنی مشخص شده باشد.

۲.۳ زاویه در فضاهای ضرب داخلی

ابتدا در بخش اول با مفهوم زاویه در فضاهای ضرب داخلی آشنا می شویم. سپس به بررسی ویژگی‌های هندسی این زاویه می‌پردازیم. در این بخش از منبع [۱۶] استفاده شده است.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر $x, y \in X$ که با نماد $A(x,y)$ نمایش داده می‌شود را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A(x,y) = \arccos\left[\frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|.\|y\|}\right],$$

که در این تعریف $\langle x,x \rangle = \|x\|^۲$ نرم القاشده توسط ضرب داخلی نامیده می‌شود. چون ضرب داخلی در نامساوی کوشی شوارتس صدق می‌کند در این‌صورت زاویه‌ی تعریف شده خوش‌تعریف است. از طرفی واضح است که $x \perp y$ اگر و فقط اگر $A(x,y) = \frac{\pi}{۲}$.
در واقع زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر در فضای ضرب داخلی X را می‌توان به عنوان تابعی حقیقی مقدار روی $X \times X$ به توی $[۰, \pi]$ در نظر گرفت که برای هر $x, y \in X$ در شرایط زیر صدق می‌کند،

توازی [۶]: $A(x,y) = ۰$ اگر و فقط اگر x و y در یک راستا و هم‌جهت باشند و $A(x,y) = \pi$ اگر و فقط اگر x و y در یک راستا و در جهت‌های مخالف هم باشند،

تقارنی : $A(x,y) = A(y,x)$،

همگنی : برای هر دو عضو $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$،

$$A(\alpha x, \beta y) = \begin{cases} A(x,y); & \alpha\beta > ۰, \\ \pi - A(x,y); & \alpha\beta < ۰. \end{cases}$$

پیوستگی : اگر $\{x_n\}, \{y_n\}$ دو دنباله در فضای X باشند به‌طوری‌که به‌ترتیب به x و y همگرا باشند، آنگاه $A(x_n, y_n)$ نیز همگرا به $A(x,y)$ می‌باشد.

[۲] Valentine
[۳] Wayment
[۴] Diminnie
[۵] Hendra
[۶] parallism

۳.۳ زاویه‌ی تعمیم‌یافته در فضاهای خطی نرم‌دار

همان‌طور که در فصل دوم تعامد در فضاهای ضرب داخلی را به فضاهای خطی نرم‌دار تعمیم دادیم با توجه به این مطلب در این بخش به کمک ایده‌ی دیمینه و همکارانش در [۱۱] می‌خواهیم زاویه در فضای ضرب داخلی را به فضاهای نرمدار خطی تعمیم دهیم. سپس براساس ویژگی‌های هندسی زاویه در فضاهای اقلیدسی اصول موضوعه‌ی زاویه در فضاهای نرم‌دار را معرفی می‌کنیم و در انتهای این بخش ثابت می‌کنیم اگر زاویه‌ای را بتوان بر روی یک فضای نرم‌دار تعریف کرد که در همه‌ی اصول موضوعه زاویه صدق کند، آنگاه فضای خطی نرم‌دار یک فضای ضرب داخلی است و زاویه‌ی تعمیم‌یافته با زاویه‌ی معمولی در فضاهای ضرب داخلی برابر است. از طرف دیگر ما به یک مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی دست پیدا می‌کنیم.

تعریف ۲.۳. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $\overline{X}$ مجموعه‌ی اعضای ناصفر فضای X باشد. یک زاویه‌ی تعمیم‌یافته[۷] روی X، یک تابع حقیقی مقدار است که روی $\overline{X} \times \overline{X}$ تعریف می‌شود و در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند،

(۱) برای هر $x \in \overline{X}$، $A(x, y)$ تابعی پیوسته نسبت به y از $\overline{X}$ به توی $[0, \pi]$ می باشد، به عبارت دیگر اگر $\{y_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که $y_n \to y$ آنگاه $A(x, y_n) \to A(x, y)$،

(۲) برای هر $x, y \in \overline{X}$، $A(x, y) = A(y, x)$،

(۳) برای هر $x, y \in \overline{X}$ و $\alpha, \beta > 0$، $A(\alpha x, \beta y) = A(x, y)$،

(۴) برای هر $x, y \in \overline{X}$ و $\alpha, \beta > 0$، $A(x, \alpha x + \beta y) + A(\alpha x + \beta y, y) = A(x, y)$،

(۵) $A(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $\alpha > 0$ موجود باشد که $x = \alpha y$،

(۶) برای هر $x, y, x', y' \in X$، اگر $\|x\| = \|x'\|$ و $\|y\| = \|y'\|$ و $A(x, y) = A(x', y')$ و $x \neq y$ و $x' \neq y'$ آنگاه $A(x - y, -y) = A(x' - y', -y')$.

ویژگی های (۱) تا (۶) شبیه ویژگی‌های هندسی زاویه در فضاهای اقلیدسی می‌باشند، که شامل تقارنی (۲) ، جمع پذیری زاویه‌ها با یک رأس و ضلع مشترک (۴) ، همگنی (۳) ، توازی (۵) و حالت ضلع -زاویه -ضلع از همنهشتی مثلث‌ها[۸] (۶) می‌باشند. برخی دیگر از ویژگی های زاویه‌ی تعمیم‌یافته در فضاهای خطی نرم‌دار در لم‌های بعدی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد، ازجمله موارد می‌توان به زوایای متقابل به رأس[۹]، زوایای مکمل[۱۰] و حالات دیگر همنهشتی دو مثلث اشاره کرد.

توجه کنید سه‌تایی $(X, \|.\|, A(.,.))$ را یک فضای ضرب داخلی می‌گویند اگر ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ روی X موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ و برای هر دو عضو ناصفر

[۷] Generalized angle

[۸] triangle congruence

[۹] vertical angles

[۱۰] supplementary angles

$x,y \in X$ داشته باشیم $A(x,y) = \arccos\left[\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|.\|y\|}\right]$. یعنی زاویه‌ی تعمیم‌یافته با زاویه‌ی تعریف شده در فضاهای ضرب داخلی یکی باشد. در لم بعدی برخی دیگر از ویژگی‌های اضافی $A(.,.)$ را بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۳. *فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد که روی آن بتوان زاویه‌ی تعمیم‌یافته‌ی $A(.,.)$ را تعریف کرد، در این‌صورت به ازای هر $x,y \in \overline{X}$، گزاره‌های زیر برقرارند،*

(۷) $A(x,y) = \pi$ *اگر و فقط اگر* $\alpha < ۰$ *موجود باشد که* $x = \alpha y$،

(۸) $A(x,y) + A(-x,y) = \pi$،

(۹) $A(x,y) = A(-x,-y)$.

برهان. برای اثبات (۷) از ویژگی (۱) استفاده می‌کنیم، یعنی $y \in \overline{X}$ موجود است که $A(x,y) = \pi$. اگر x و y مستقل خطی باشند، قرار دهید $z = ۲y - x$. در این‌صورت $y = \frac{x}{۲} + \frac{z}{۲}$ و طبق (۴) و (۵) می‌توان نتیجه گرفت که $A(x,y) < A(x,z) \le \pi$ و این تناقض است. در این‌صورت $\alpha \neq ۰$ موجود است که $y = \alpha x$ و طبق (۵)، $\alpha < ۰$ است و نتیجه حاصل می‌شود.
برهان (۸) وقتی که x و y وابسته‌ی خطی هستند واضح است. فرض کنید x و y مستقل خطی باشند، قرار دهید $z_n = \frac{۱}{n}y + (۱ - \frac{۱}{n})(-x)$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} z_n = -x, \quad \lim_{n\to\infty} A(x,z_n) = \pi, \quad \lim_{n\to\infty} A(y,z_n) = A(y,-x) = A(-x,y).$$

حال چون $y = nz_n + (n-۱)x$ با استفاده از (۴)،

$$A(x,z_n) = A(x,y) + A(y,z_n),$$

حال وقتی $n \to \infty$ در این‌صورت می‌توان نتیجه گرفت که

$$A(x,y) + A(y,-x) = \pi.$$

برهان (۹) بر طبق (۸) و (۲) واضح است چون

$$A(x,y) + A(x,-y) = \pi = A(-x,-y) + A(x,-y),$$

و در نتیجه $A(x,y) = A(-x,-y)$. □

لم ۲.۳. *برای هر $x,y,x',y' \in X$، اگر $\|x\| = \|x'\|$ و $\|y\| = \|y'\|$ و $A(x,y) = A(x',y')$ آنگاه* $\|x-y\| = \|x'-y'\|$.

برهان. اگر x و y وابسته‌ی خطی باشند، نتیجه واضح است. اما اگر x و y مستقل خطی باشند و $\|x'-y'\| \neq \|x-y\|$. فرض کنید $\|x-y\| > \|x'-y'\|$، در این‌صورت بر طبق ویژگی‌های (۵) و (۷) و فرض لم، واضح است که x' و y' نیز مستقل خطی‌اند. بنابراین عددی چون $0 < \alpha < 1$ و همچنین $x^* = \alpha x' + (1-\alpha)y'$ موجودند که $\|x-y\| = \alpha\|x'-y'\| = \|x^*-y'\|$. در این‌صورت طبق (۳) و (۶)، $A(x^*-y', y') = A(x'-y', -y')$. با استفاده دوباره از (۶) برای $x-y, -y, x^*-y', -y'$ نتیجه می‌گیریم که $A(x,y) = A(x^*, y')$ که این با فرض لم و (۴) در تناقض است. بنابراین $\|x-y\| = \|x'-y'\|$ و اثبات کامل است. $\square$

لم ۳.۳. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی اکیداً محدب باشد، در این‌صورت برای هر $x, y, x', y' \in X$، اگر $\|x\| = \|x'\|$ و $\|y\| = \|y'\|$ و $\|x-y\| = \|x'-y'\|$ آنگاه $A(x,y) = A(x', y')$.*

برهان. اگر x و y وابسته‌ی خطی باشند، آنگاه اثبات واضح است.
فرض کنید $x, y \in X$ مستقل خطی باشند، اگر $A(x,y) \neq A(x', y')$، آنگاه طبق ویژگی (۶) همه زوایای متناظر نامساویند. بنابراین می‌توان فرض کرد که

$$A(-x, y-x) > A(-x', y'-x'), \quad A(x,y) > A(x', y').$$

تحت فرضیات، نقطه‌ی y_1 که از لحاظ جبری درون مثلثی که توسط x و y و $y-x$ ایجاد می‌شود طوری انتخاب می‌کنیم که $\|y_1\| = \|y\|, \|y_1 - x\| = \|y-x\|$.
در حالت خاص، چون $A(-x, ty-x)$ تابعی پیوسته از t است، لذا عددی چون $t_0 \in (0,1)$ موجود است که $A(-x, t_0 y - x) = A(-x', y'-x')$. اگر $y_0 = t_0 y$، آنگاه برای $u = \dfrac{\|y'-x'\|}{\|y_0 - x\|}$، اگر $y_1 = u y_0 + (1-u)x$ در این‌صورت

$$\|y_1 - x\| = \|y' - x'\| = \|y - x\|.$$

همچنین از لم ۲.۳ و ویژگی (۶) می توان نتیجه گرفت که

$$\|y_1\| = \|y'\| = \|y\|, \quad A(y_1, x) = A(y', x') < A(y, x) = A(y_0, x).$$

آنگاه طبق (۴) نتیجه می‌گیریم که $0 < u < 1$ و y_1 نقطه‌ی مطلوب است.
حال برای $\lambda = \dfrac{1-u}{1-ut_0}$ و $t = \dfrac{1}{1-ut_0} > 1$،

$$\lambda x = t y_1 + (1-t)y, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{۱.۳}$$

در نتیجه λx نسبت به y و y_1 خطی است. حال اگر در ۱.۳ داشته باشیم $\|y_1\| = \|y\|$ و $t > 1$ آنگاه،

$$\|ty_1\| = \|(t-1)y + \lambda x\| \Rightarrow \|ty\| \leq (1-t)\|y\| + \lambda\|x\|.$$

مشابهاً

$$\|x - y_۱\| = \|x - y\|, \quad (۱ - \lambda) = t(x - y_۱) + (۱ - t)(x - y).$$

در نتیجه می‌توان گفت $\|x - y\| \leq \|x\|(۱ - \lambda)$. اما چون فضای X اکیداً محدب است لذا،

$$\lambda\|x\| + (۱ - \lambda)\|x\| = \|x\| < \|y\| + \|y - x\|.$$

در نتیجه یکی از نامساوی‌های $\|y\| > \lambda\|x\|$ یا $\|y - x\| > \|x\|(۱ - \lambda)$ باید برقرار باشد که این یک تناقض است. □

دی[11] در [۳۶] قضیه‌ی زیر را ثابت کرده است که در قضیه‌ی مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی استفاده می‌شود.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد، در این‌صورت برای هر $x, y \in X$، که $\|x + y\| = \|x - y\|$ اگر $\|y\| = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|y + \lambda x\|$، آنگاه X یک فضای ضرب داخلی است.*

برهان. برای اثبات به [۳۶] مراجعه کنید. □

حال وقت آن رسیده است که قضیه‌ی مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی را بیان کنیم. در این قضیه ثابت می‌کنیم اگر در یک فضای خطی نرم‌دار چون X بتوان زاویه‌ی تعمیم‌یافته‌ی $A(.,.)$ را تعریف کرد، آنگاه فضای X یک فضای ضرب داخلی است. برای اثبات از قضیه‌ی ۱.۳ کمک می‌گیریم.

قضیه ۲.۳ (قضیه‌ی مشخصه‌سازی). *فضای $(X, \|.\|, A(.,.))$ یک فضای ضرب داخلی است.*

برهان. فرض کنید x و y مستقل خطی باشند، از آنجایی‌که تابع

$$f(t) = A(x - y, tx - y) - A(tx - y, -x - y),$$

برای هر $t \in [-۱, ۱]$ پیوسته است و چون

$$f(۱) = -A(x - y, -x - y) < ۰, \quad f(-۱) = A(x - y, -x - y) > ۰.$$

لذا طبق قضیه‌ی مقدار میانی برای توابع پیوسته، $t^* \in (-۱, ۱)$ موجود است که $f(t^*) = ۰$. پس

$$A(x - y, t^*x - y) = A(t^*x - y, -x - y),$$

در نتیجه بر طبق لم ۲.۳ داریم:

$$\|(t^*x - y) - (x - y)\| = \|(t^*x - y) - (-x - y)\| \Rightarrow \|(t^* - ۱)x\| = \|(t^* + ۱)x\|,$$

[11] Day

و این یعنی این‌که، $t^* = ۰$ در نتیجه $A(x-y,-y) = A(-x-y,-y)$. آنگاه بر طبق ویژگی (۶) و برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $A(\lambda x, y) = A(-\lambda x, y)$ و طبق لم ۲.۳ داریم $\|y - \lambda x\| = \|y + \lambda x\|$، پس

$$\|y\| \leq \frac{۱}{۲}\|y + \lambda x\| + \frac{۱}{۲}\|y - \lambda\| = \|y + \lambda x\|.$$

حال کافیست نشان دهیم $A(x,y)$ با $A^*(x,y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|.\|y\|}$ برابر است. اگر $x, y \in X$، بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $\|x\| = \|y\| = ۱$ و از آنجایی‌که $A(x,y) + A(-x,y) = \pi$ می‌توان فرض کرد که $A(x,y) \geq \frac{\pi}{۲}$. اگر $z(t) = tx + (۱-t)y$ آنگاه تابعی پیوسته از t است و بنابراین $t^* \in [۰, ۱)$ موجود است که $A(x, z(t^*)) = \frac{\pi}{۲}$.

اگر $z = \frac{z(t^*)}{\|z(t^*)\|}$ آنگاه $A(z,x) = A(z,-x) = \frac{\pi}{۲}$. بر طبق لم ۲.۳، $\|z+x\| = \|z-x\|$ در نتیجه

$$A^*(x,z) = A^*(-x,z) = \frac{\pi}{۲} = A(x,z) = A(-x,z).$$

حال قرار دهید:

$$S = \Big\{ t \in [۰, ۱]; \quad A(\,x,\, t(-x) + (۱-t)z\,) = A^*(\,x, t(-x) + (۱-t)z\,) \Big\}.$$

واضح است که $S \neq \emptyset$. چون $۰, ۱ \in S$. از طرفی A و A^* هر دو پیوسته‌اند، لذا S بسته است. برای اینکه نشان دهیم $S = [۰, ۱]$ کافیست نشان دهیم S شامل هر عدد حقیقی بین هر دو عدد آن است. فرض $t_۱, t_۲ \in S$ و $۰ \leq t_۱ < t_۲ \leq ۱$ قرار دهید:

$$u_i = t_i(-x) + (۱-t_i)z, \quad i = ۱, ۲.$$

آنگاه $A(x, u_i) = A^*(x, u_i)$ و بر طبق ویژگی (۸)،

$$A(-x, u_i) = A^*(-x, u_i), \quad i = ۱, ۲.$$

چون $u_۱ \left(\frac{۱-t_۲}{۱-t_۱}\right) + \left(\frac{t_۲-t_۱}{۱-t_۱}\right)(-x) = u_۲$، بر طبق ویژگی (۴) داریم:

$$\begin{aligned} A(u_۱, u_۲) &= A(-x, u_۱) - A(-x, u_۲), \\ A^*(u_۱, u_۲) &= A^*(-x, u_۱) - A^*(-x, u_۲). \end{aligned}$$

چون $A(u_۱, u_۲) = A^*(u_۱, u_۲)$. حال اگر $(i = ۱, ۲)$ $u'_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ آنگاه از لم ۳.۳،

$$A(u'_i, u'_۱ + u'_۲) = \frac{۱}{۲}A(u'_۱, u'_۲) = \frac{۱}{۲}A^*(u'_۱, u'_۲) = A^*(u'_i, u'_۱ + u'_۲),$$

از طرفی چون عبارت $u'_۱ + u'_۲$ را می‌توان به فرم $\alpha(-x) + \beta u_۱$ برای هر $\alpha, \beta > ۰$ نوشت در نتیجه بر طبق (۴)،

$$A^*(-x, u'_۱ + u'_۲) = A(-x, u'_۱ + u'_۲),$$

و بر طبق ویژگی (۸)،

$$A(x, u'_۱ + u'_۲) = A^*(x, u'_۱ + u'_۲),$$

اما برای $\lambda = \frac{\|u_۱\|.\|u_۲\|}{\|u_۱\| + \|u_۲\|} > ۰$ و $t = \frac{\|u_۲\| t_۱ + \|u_۱\| t_۲}{\|u_۱\| + \|u_۲\|}$،

$$\lambda(u'_۱ + u'_۲) = t(-x) + (۱ - t)z.$$

بنابراین $t \in S$ و چون $t_۱ < t < t_۲$ لذا $S = [۰, ۱]$.

پس برای هر $x, y \in X$، $A(x, y) = A^*(x, y)$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

۴.۳ معرفی برخی از زوایای تعمیم‌یافته در فضاهای خطی نرم‌دار

در این بخش سعی داریم با برخی از زوایای معرفی شده در فضاهای خطی نرم‌دار آشنا شویم، زوایایی که در این بخش معرفی می‌شوند لزوماً در همه‌ی اصول موضوعه زاویه‌ی تعمیم‌یافته صدق نمی‌کنند، در نتیجه نمی‌توان گفت که لزوماً فضای خطی نرم‌دار یک فضای ضرب داخلی است. ابتدا در این بخش با $P-$ زاویه و $J-$ زاویه آشنا می‌شویم، که در سال ۲۰۰۸ توسط هندرا و همکارانش در [۱۶] معرفی شد. همان‌طور که در ابتدای فصل گفتیم برخی زوایا در هر فضای نرمدار خطی به کمک مفهوم تعامد معرفی می‌شوند. $P-$زاویه و $J-$زاویه از همین نوع زوایا هستند که به‌ترتیب به کمک تعامد فیثاغورسی و تعامد سینگر تعریف می‌شوند. در این بخش هم‌چنین با ویژگی‌های این زوایا نیز آشنا می‌شویم. سپس با زوایای ویلسن که در سال ۱۹۷۱ توسط ولنتاین[۱۲] و ویمنت[۱۳] در [۲۹] و لیانا[۱۴] و همکارانش در [۳۴] معرفی شد، آشنا می‌شویم. هم‌چنین ثابت می‌کنیم اگر تحت شرایطی بتوان زاویه‌ی ویلسن را در فضاهای خطی نرم‌دار معرفی کرد، آنگاه این فضا یک فضای ضرب داخلی است. یعنی با کمک زاویه‌ی ویلسن به یک مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی دست می‌یابیم. بعلاوه در این بخش با یکی از مهم‌ترین زوایای تعریف شده در سال ۱۹۹۳ توسط میلیسیک در [۴۱] آشنا می‌شویم. این زاویه به $g-$ زاویه معروف است و توسط تابعک g تعریف می‌شود و بعد از اینکه با تعریف و ویژگی‌های این زاویه آشنا می‌شویم، به کمک این زاویه، $g-$ تعامدهایی را تعریف می‌کنیم و به کمک این تعامدها به دو مشخصه‌سازی از فضاهای پیش‌هیلبرت می‌رسیم. این زاویه در فصول بعدی برای معرفی نوعی دیگر از تعامد و زوایا در

[۱۲] Valentine
[۱۳] Wayment
[۱۴] Liana

فضاهای شبه ضرب داخلی بسیار پرکاربرد است. همچنین در فصول بعدی به کمک رابطه‌ای که بین $g-$ زاویه و تعامد بیرخوف در فضاهای خطی نرم‌دار هموار وجود دارد به تعریف زوایای بسیار جالب می‌پردازیم، البته درکنار تعامد بیرخوف و $g-$ زاویه از مفاهیم دیگر چون مفهوم بهترین تقریب و تصاویر نیز استفاده می‌کنیم.

۱.۴.۳ $P-$ زاویه و $J-$ زاویه در فضاهای خطی نرم‌دار

در فصل دوم با مفهوم تعامد فیثاغورسی و تعامد متساوی‌الساقینی جیمز آشنا شدیم . در این بخش می‌خواهیم به کمک این دو تعامد دو زاویه به نام‌های $P-$ زاویه و $J-$ زاویه را معرفی کنیم. همچنین در ادامه قصد داریم با ویژگی‌های این دو زاویه آشنا شویم. این دو زاویه در همه‌ی ویژگی‌های زاویه‌ی تعمیم‌یافته صدق نمی‌کنند، در نتیجه در حالت کلی این زوایا با زاویه‌ی معمولی برابر نیستند اما اگر فضا ضرب داخلی باشد آنگاه به کمک قانون کسینوس‌ها[۱۵] و اتحاد قطبی[۱۶] می‌توان نشان داد که این دو زاویه منطبق بر زاویه‌ی معمولی هستند. در این بخش از منبع [۱۶] استفاده می‌شود.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد، $P-$ زاویه بین دو بردار ناصفر $x, y \in X$ را با نماد $A_P(x,y)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A_P(x,y) := \arccos\left[\frac{\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲} - \|x-y\|^{۲}}{۲\|x\|.\|y\|}\right]. \qquad (۲.۳)$$

تعریف ۴.۳. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد، $J-$ زاویه بین دو بردار ناصفر $x, y \in X$ را با نماد $A_J(x,y)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A_J(x,y) := \arccos\left[\frac{\|x+y\|^{۲} - \|x-y\|^{۲}}{۴\|x\|.\|y\|}\right]. \qquad (۳.۳)$$

به‌راحتی می‌توان به کمک ویژگی‌های نرم نشان داد که این دو زاویه خوش‌تعریف هستند.

نتیجه ۱.۳. *با توجه به تعاریف فوق نتایج ساده‌ی زیر برقرار هستند،*

۱. $A_P(x,y) = \frac{\pi}{۲}$ *اگر و فقط اگر* $x \perp_P y$،

۲. $A_J(x,y) = \frac{\pi}{۲}$ *اگر و فقط اگر* $x \perp_J y$.

نتیجه ۲.۳. *فرض کنید* $(X, \langle .,. \rangle)$ *یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه* $P-$ *زاویه و* $J-$ *زاویه با زاویه‌ی معمولی برابر می‌باشند، چون در هر فضای ضرب داخلی روابط زیر برقرارند.*

$$\frac{\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲} - \|x-y\|^{۲}}{۲} = \langle x, y\rangle \quad \text{قانون کسینوس‌ها},$$
$$\frac{\|x+y\|^{۲} - \|x-y\|^{۲}}{۲} = \langle x, y\rangle \quad \text{اتحاد قطبی}.$$

[۱۵]Cosine law

[۱۶]Polarization identity

در یک فضای خطی نرم‌دار $P-$ زاویه و $J-$ زاویه دارای خواص مشابه‌ای هستند، مثلاً هر دو در خاصیت‌های توازی و تقارنی و همگنی و پیوستگی صدق می‌کنند و در خاصیت همگنی صدق نمی‌کنند. در دو گزاره‌ی بعدی ویژگی‌های $P-$ زاویه و $J-$ زاویه را بیان می‌کنیم و با ارائه‌ی مثالی نشان می‌دهیم که این دو زاویه دارای خاصیت همگنی نیستند.

گزاره ۱.۳. *$P-$ زاویه برای هر $x, y \in X$ در شرایط زیر صدق می‌کند،*

(۱) *اگر x و y در یک راستا و هم‌جهت باشند، آنگاه $A_P(x,y) = 0$ و اگر در یک راستا و در جهت‌های مخالف باشند، آنگاه $A_P(x,y) = \pi$،*

(۲) $A_P(x,y) = A_P(y,x)$،

(۳) *برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $A_P(\alpha x, \alpha y) = A_P(x,y)$،*

(۴) *اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله‌ی همگرا در فضای خطی نرم‌دار X باشند و $x_n \to x$ و $y_n \to y$ آنگاه می توان نتیجه گرفت که $A_P(x_n, y_n) \to A_P(x,y)$.*

برهان. (۱) برای هر $x \in X$ و $k \in \mathbb{R}$ داریم $\|kx\| = |k|.\|x\|$. حال اگر x و y در یک راستا و هم‌جهت باشند، آنگاه $y = kx$ برای $k > 0$ و بنابراین $A_P(x,y) = \arccos(1) = 0$ و اگر x و y در یک راستا و جهت‌های مخالف باشند، آنگاه $y = kx$ برای $k < 0$ بنابراین $A_P(x,y) = \arccos(-1) = \pi$.
(۲) از آنجایی‌که برای هر $x, y \in X$ داریم $\|x-y\| = \|y-x\|$ در این‌صورت تقارنی بودن واضح است.
(۳) واضح است.
(۴) از آنجایی‌که نرم و تابع arccos پیوسته هستند در این‌صورت با توجه به این گزاره‌ی (۴) نتیجه می‌شود.

□

گزاره ۲.۳. *$J-$ زاویه برای هر $x, y \in X$ در شرایط زیر صدق می‌کند،*

(a) *اگر x و y در یک راستا و هم‌جهت باشند در این‌صورت $A_J(x,y) = 0$ و اگر در یک راستا و در جهت‌های مخالف باشند، آنگاه $A_J(x,y) = \pi$،*

(b) $A_J(x,y) = A_J(y,x)$،

(c) *برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، داریم:*

$$A_J(\alpha x, \alpha y) = A_J(x,y), \quad A_J(\alpha x, -\alpha y) = \pi - A_J(x,y).$$

(d) *اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله‌ی همگرا در فضای خطی نرم‌دار X باشند و $x_n \to x$ و $y_n \to y$ در این‌صورت $A_J(x_n, y_n) \to A_J(x,y)$.*

برهان. اثبات گزاره های (a) و (b) و (d) همانند گزاره‌ی قبل است.
برای اثبات (c) داریم :

$$A_J(\alpha x, \alpha y) = \arccos(u(x, y)),$$

بنابراین

$$A_J(\alpha x, -\alpha y) = \arccos(-u(x, y)) = \pi - A_I(\alpha x, \alpha y) = \pi - A_I(x, y).$$

□

مثال ۵.۳. خاصیت همگنی در حالت کلی در $P-$ زاویه و $J-$ زاویه برقرار نیست. برای این منظور فضای $(l^۱, \|.\|_۱)$ را در نظر بگیرید.
فرض کنید $x = (۳, ۶, ۰, ۰, ۰, \cdots)$ و $y = (۸, -۴, ۰, ۰, ۰, \cdots)$ دو عضو ناصفر در فضای $l^۱$ باشند، در اینصورت داریم:

$$A_P(x, y) = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x \perp_P y,$$

امّا به‌راحتی می‌توان دید که $A_P(x, ۲y) \neq \frac{\pi}{۲}$ و این نشان می‌دهد که $P-$ زاویه خاصیت همگنی را ندارد. مشابهاً با قرار دادن $x = (۲, ۱, ۰, ۰, ۰, \cdots)$ و $y = (۱, -۲, ۰, ۰, ۰, \cdots)$، $A_J(x, y) = \frac{\pi}{۲}$ ولی $A_J(x, ۲y) \neq \frac{\pi}{۲}$.

۲.۴.۳ زوایای ویلسن در فضاهای خطی نرم‌دار

در این بخش با یکی دیگر از زوایای معرفی شده در فضاهای خطی نرم‌دار به نام زاویه‌ی ویلسن[۱۷] آشنا می‌شویم. ابتدا زاویه‌ی ویلسن را در فضاهای متریک و فضاهای خطی نرم‌دار بیان می‌کنیم، سپس به تعریف زاویه‌ی ویلسن که توسط دو نیم‌خط $R_۱$ و $R_۲$ ایجاد می‌شود، می‌پردازیم. در این بخش با دو کاربرد زاویه‌ی ویلسن آشنا می‌شویم. اولی به کمک زوایای ویلسن نشان می‌دهیم هر چهار نقطه از فضای باناخ که سه نقطه از آن روی یک خط قرار دارد با چهار نقطه از فضای اقلیدسی متناظر هستند. کاربرد دومی نیز در انتهای این بخش ثابت می‌کنیم اگر تحت شرایطی در یک فضای خطی نرم‌دار بتوان زاویه‌ی ویلسن را تعریف کرد، آنگاه آن فضا یک فضای ضرب داخلی است. در این بخش از منابع [۳۰، ۳۴] استفاده می‌شود.

تعریف ۶.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $x, y, z \in X$ و $x \neq y$ و $x \neq z$، در این‌صورت زاویه‌ی ویلسن با رأس x را با نماد $(\widehat{yxz})_W$ نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$(\widehat{yxz})_W := \arccos\left[\frac{d^۲(x, y) + d^۲(x, z) - d^۲(y, z)}{۲d(x, y).d(x, z)}\right]. \qquad (۴.۳)$$

[۱۷] Wilson Angles

از آنجایی‌که در هر فضای متریک خاصیت نامساوی مثلث برقرار است لذا،

$$\begin{aligned} & d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z) \\ & \Rightarrow d^{۲}(y,z) \leq d^{۲}(x,y) + d^{۲}(x,z) + ۲d(x,y)d(x,z) \\ & \Rightarrow -۲d(x,y)d(x,z) \leq d^{۲}(y,x) + d^{۲}(x,z) - d^{۲}(y,z), \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} & d(y,z) \geq d(x,y) - d(x,z) \\ & \Rightarrow d^{۲}(y,z) \geq d^{۲}(x,y) + d^{۲}(x,z) - ۲d(x,y)d(x,z) \\ & \Rightarrow ۲d(x,y)d(x,z) \geq d^{۲}(y,x) + d^{۲}(x,z) - d^{۲}(y,z), \end{aligned}$$

لذا از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت که

$$-۱ \leq \left[\frac{d^{۲}(x,y) + d^{۲}(x,z) - d^{۲}(y,z)}{۲d(x,y).d(x,z)}\right] \leq ۱.$$

در نتیجه تعریف فوق خوش‌تعریف است. دقت کنید اگر فضای X اقلیدسی باشد، تساوی ۴.۳ همان قانون کوسینوس‌ها است. در گزاره‌ی بعدی ویژگی‌های زاویه‌ی ویلسن در فضاهای متریک را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۳.۳. *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $x,y,z \in X$ و $x \neq y$ و $x \neq z$ در این‌صورت زاویه‌ی ویلسن در شرایط زیر صدق می‌کند.*

۱. $(\widehat{yxz})_W = (\widehat{zxy})_W$،

۲. $(\widehat{yxz})_W = ۰$ *اگر و فقط اگر یکی از تساویهای* $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$ *یا* $d(x,z) + d(y,z) = d(x,y)$ *برقرار باشد،*

۳. $(\widehat{yxz})_W = \pi$ *اگر و فقط اگر* $d(x,y) + d(x,z) = d(y,z)$.

حال تعریف زاویه‌ی ویلسن در فضاهای خطی نرم‌دار بیان می‌کنیم. همانند فضاهای متریک به‌راحتی می‌توان نشان داد که این زاویه خوش‌تعریف است.

تعریف ۷.۳. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x,y,z \in X$ و $x \neq y$ و $x \neq z$، در این‌صورت زاویه‌ی ویلسن با رأس x را به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$(\widehat{yxz})_W := \arccos\left[\frac{\|x-y\|^{۲} + \|x-z\|^{۲} - \|y-z\|^{۲}}{۲\|x-y\|.\|x-z\|}\right]. \qquad (۵.۳)$$

نکته ۸.۳. *در هر فضای خطی نرم‌دار اکیداً محدب $(X, \|.\|)$ پاره‌خطی که از نقطه‌ی x شروع و به نقطه‌ی y ختم می‌شود را با نماد $S(x, y)$ نمایش داده و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،*

$$S(x, y) := \{\, \lambda x + (1 - \lambda)y; \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \,\},$$

به عبارت دیگر هر پاره‌خط یک منحنی پیوسته است که $x(t) \longmapsto t$ و دارای طول $\|x - y\|$ است و در شرایط $x(0) = x$ و $x(1) = y$ صدق می‌کند. همچنین نیم‌خطی که از نقطه‌ی x شروع و از y می‌گذرد را با نماد $R(x, y)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت $R(x, y) = \{\, \lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda \geq 0 \,\}$ تعریف می‌شود. همچنین در هر فضای نرم‌دار، خطی که از دو نقطه‌ی x و y می‌گذرد را با نماد $L(x, y)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$L(x, y) := \{\, z \in X; \quad z = \lambda x + (1 - \lambda)y \,\},$$

حال به دنبال تعریف زاویه‌ی ویلسن بین دو نیم‌خط هستیم. فرض کنید $R_1 = R(x, y)$ و $R_2 = R(x, z)$ دو نیم‌خط باشند که دارای نقطه‌ی مشترک ابتدایی x باشند و y و z نقاطی به ترتیب روی R_1 و R_2 باشند، در این‌صورت R_1 و R_2 زاویه‌ی $A_w(R_1, R_2)$ را می‌سازند اگر $\lim(\widehat{yxz})_W$ وقتی که y و z به x میل می‌کنند موجود باشد. با توجه به توضیح فوق تعریف زیر را داریم.

تعریف ۹.۳. فرض کنید R_1 و R_2 دو نیم‌خط با نقطه‌ی مشترک ابتدایی x باشند، در این‌صورت زاویه‌ی ویلسن بین R_1 و R_2 را در صورت وجود حد به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A_w(R_1, R_2) := \lim_{y,z \to x} (\widehat{yxz})_W, \tag{۶.۳}$$

که در آن $y \in R_1$ و $z \in R_2$.

قضیه ۳.۳. *فرض کنید یک فضای نرم‌دار باناخ باشد و $x, y, z \in X, x \neq y, x \neq z$ و همچنین زاویه‌ی ویلسن $A_w(R_1, R_2)$ موجود باشد، آنگاه*

$$A_w(R_1, R_2) = \arccos\left[\frac{\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y - z\|^2}{2\|x - y\|.\|x - z\|}\right]. \tag{۷.۳}$$

برهان. چون $A_w(R_1, R_2)$ موجود است لذا این حد مستقل از هر مسیری است که y و z به ترتیب روی نیم‌خط های $R(x, y)$ و $R(x, z)$ به x میل کنند. از طرفی نگاشت $(1-\lambda)\|x-y\| \longmapsto \lambda x+(1-\lambda)y$ تناظری یک بیک بین خط $L(x, y)$ و خط اعداد حقیقی است، لذا

$$\begin{aligned}
\lim_{y,z \to x} (\widehat{yxz})_W &= \lim_{\lambda \to 1} \arccos \frac{\|x - (1 - \lambda)y - \lambda x\|^2 + \|x - (1 - \lambda)z - \lambda x\|^2}{2\|x - (1 - \lambda)y - \lambda x\|} \\
&\quad \frac{-\|(1 - \lambda)y + \lambda x - (1 - \lambda z - \lambda x\|^2}{\|x - (1 - \lambda)z - \lambda x\|} \\
&= \arccos \lim_{\lambda \to 1} \frac{(1 - \lambda)^2\|x - y\|^2 + (1 - \lambda)^2\|x - z\|^2 - (1 - \lambda)^2\|y - z\|^2}{2(1 - \lambda)^2\|x - y\|.\|x - z\|} \\
&= \arccos \frac{\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y - z\|^2}{2\|x - y\|.\|x - z\|} = A_w(R_1, R_2).
\end{aligned}$$

□

یکی از کاربردهای زاویه‌ی ویلسن در قضیه بعد است که ثابت شده هر چهار نقطه از فضای باناخ X با چهار نقطه از صفحه‌ی اقلیدسی متناظر است، سپس به کمک این قضیه برخی از خواص زاویه‌ی ویلسن بین دو نیم‌خط ثابت شده است.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید x, y, z, t چهار نقطه از فضای باناخ X باشند، به‌طوری‌که سه نقطه‌ی y, z, t روی یک خط واقع باشند، آنگاه نقاط x', y', z', t' از صفحه‌ی اقلیدسی موجود می‌باشند که با نقاط x, y, z, t متناظر هستند.*

برهان. فرض کنید y, z, t روی یک خط واقع باشند و نقطه‌ی z بین y و t قرار داشته باشد. اکنون نقاط x', y', t' در صفحه‌ی اقلیدسی موجودند به‌طوری‌که با x, y, t متناظر هستند. حال فرض کنید z' نقطه‌ای در صفحه‌ی اقلیدسی باشد که بین y' و t' باشد به‌طوری‌که $d(y', z') = d(y, z)$ و $d(z', t') = d(z, t)$. اکنون، $d(x, y) = d(x', y'), d(x, t) = d(x', t'), d(y, z) = d(y', z'), d(z, t) = d(z', t')$، در این‌صورت کافیست نشان دهیم $d(x, z) = d(x', z')$. طبق تعریف زاویه‌ی ویلسن،

$$\begin{aligned}
cosA_w(R(y,x),R(y,z)) &= \frac{d^۲(x,y)+d^۲(y,z)-d^۲(x,z)}{۲d(x,y).d(y,z)} \\
&= \frac{d^۲(x,y)+d^۲(y,t)-d^۲(x,t)}{۲d(x,y).d(y,t)} \\
&= \frac{d^۲(x',y')+d^۲(y',t')-d^۲(x',t')}{۲d(x',y').d(y',t')} \\
&= \frac{d^۲(x',y')+d^۲(y',z')-d^۲(x',z')}{۲d(x',y').d(y',z')}.
\end{aligned}$$

از این تساوی‌ها نتیجه می‌شود $d(x, z) = d(x', z')$ و این برهان قضیه را کامل می‌کند. □

نتیجه ۳.۳. *فرض کنید x, y, z, t چهار نقطه از فضای باناخ X باشند، به‌طوری‌که سه نقطه‌ی y, z, t روی یک خط واقع باشند و نقطه‌ی z بین y و t باشد. اگر $R_۱ = R(z, y)$ و $R_۲ = R(z, t)$ و $R_۳ = R(z, x)$ نیم‌خط باشند، در این‌صورت*

$$A_w(R_۱, R_۳) + A_w(R_۳, R_۲) = \pi.$$

برهان. برطبق قضیه‌ی ۴.۳، نقاط x', y', z', t' از صفحه‌ی اقلیدسی موجودند به‌طوری‌که با نقاط x, y, z, t متناظر هستند. از طرفی بر طبق قضیه‌ی ۳.۳ زاویه‌ی بین دو نیم‌خط در صفحه‌ی اقلیدسی به کمک قاعده‌ی کوسینوس‌ها، که در هر مثلث برقرار است داده شده است. □

قضیه ۵.۳. *فرض کنید x, y, z نقاطی از فضای باناخ X باشند و y بین x و z باشد، در این‌صورت برای نیم‌خط‌های $R_۱ = R(y, x)$ و $R_۲ = R(y, z)$ می‌توان نتیجه گرفت که $A_w(R_۱, R_۲) = \pi$.*

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{z_n\}$ دنباله‌ای از نقاط به‌ترتیب روی نیم‌خط‌های R_1 و R_2 باشند، به‌طوری‌که $x_n \neq y \neq z_n$ آنگاه $d(x_n, z_n) = d(x_n, y) + d(y, z_n)$ و در نتیجه

$$\frac{d^2(x_n, y) + d^2(z_n, y) - d^2(x_n, z_n)}{2d(x_n, y).d(z_n, y)} = -1.$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{x,z\to y}(\widehat{xyz})_W = \pi$. □

حال یکی دیگر از کاربردهای زاویه‌ی ویلسن را معرفی می‌کنیم، در قضیه‌ی بعدی به کمک زاویه‌ی ویلسن به یک مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی دست می‌یابیم.

قضیه ۶.۳ (قضیه‌ی مشخصه‌سازی). *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باناخ باشد. در این‌صورت فضای X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر $\lim(\widehat{yxz})_W$ موجود باشد وقتی‌که y و z میل می‌کنند به x به‌ترتیب روی نیم‌خط‌های ρ و σ برای هر سه نقطه‌ی $x, y, z \in X$ و هر جفت از نیم خط‌های ρ و σ که به ترتیب از نقاط x, y و x, z می‌گذرند.*

برهان. فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد، هم‌چنین فرض کنید

$$\rho = R(x, y) = \{a \in X \quad ; \quad a = \lambda x + (1 - \lambda)y\},$$
$$\sigma = R(x, z) = \{b \in X \quad ; \quad b = \mu x + (1 - \mu)z\}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\lim_{y,z\to x}(\widehat{yxz})_W &= \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1} \frac{\|x - (1 - \lambda)y - \lambda x\|^2 + \|x - (1 - \mu)z - \mu x\|^2}{2\|x - (1 - \lambda)y - \lambda x\|.\|x - (1 - \mu)z - \mu x\|} - \\
&- \frac{\|\lambda x + (1 - \lambda)y - \mu x - (1 - \mu)z\|^2}{2\|x - (1 - \lambda)y - \lambda x\|.\|x - (1 - \mu)z - \mu x\|} \\
&= \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1} \frac{(1 - \lambda)^2\|x - y\|^2 + (1 - \mu)^2\|x - z\|^2}{2(1 - \lambda)(1 - \mu)\|x - y\|.\|x - z\|} - \\
&- \frac{\langle(1 - \lambda)(y - x) + (1 - \mu)(x - z), (1 - \lambda)(y - x) + (1 - \mu)(x - z)\rangle}{2(1 - \lambda)(1 - \mu)\|x - y\|.\|x - z\|} \\
&= \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1} \frac{2(1 - \lambda)(1 - \mu)\langle x - z, x - y\rangle}{2(1 - \lambda)(1 - \mu)\|x - y\|.\|x - z\|} \\
&= \arccos \frac{\langle x - z, x - y\rangle}{\|x - y\|.\|x - z\|},
\end{aligned}$$

و این یعنی اینکه $\lim_{y,z\to x}(\widehat{yxz})_W$ موجود است. برعکس فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و $\lim_{y,z\to x}(\widehat{yxz})_W$ موجود باشد، در نتیجه از هر مسیر روی نیم‌خط‌های ρ و σ مقادیر این حدها با هم

برابرند، پس

$$\lim_{y,z\to x}(\widehat{yxz})_W = \arccos\lim_{\lambda\to ۱}\frac{\|x-(۱-\lambda)y-\lambda x\|^۲+\|x-(۱-\lambda)z-\lambda x\|^۲}{۲\|x-(۱-\lambda)y-\lambda x\|.\|x-(۱-\lambda)z-\lambda x\|}-$$
$$-\frac{\|\lambda x+(۱-\lambda)y-\lambda x-(۱-\lambda)z\|^۲}{۲\|x-(۱-\lambda)y-\lambda x\|.\|x-(۱-\lambda)z-\lambda x\|}$$
$$=\arccos\frac{\|x-y\|^۲+\|x-z\|^۲-\|y-z\|^۲}{۲\|x-y\|.\|x-z\|}. \tag{۸.۳}$$

از طرفی

$$\lim_{y,z\to x}(\widehat{yxz})_W = \arccos\lim_{\lambda,\mu\to ۱}\frac{(۱-\lambda)^۲\|x-y\|^۲+(۱-\mu)^۲\|x-z\|^۲}{۲(۱-\lambda)(۱-\mu)\|x-y\|.\|x-z\|}-$$
$$-\frac{\|(۱-\mu)(x-z)-(۱-\lambda)(x-y)\|^۲}{۲(۱-\lambda)(۱-\mu)\|x-y\|.\|x-z\|},$$

قرار دهید $۱-\lambda=\alpha, ۱-\mu=\beta$ در این‌صورت $\alpha,\beta\to ۰$ و می‌توان نتیجه گرفت که،

$$\lim_{y,z\to x}(\widehat{yxz})_W = \arccos\lim_{\alpha,\beta\to ۰}\frac{\alpha^۲\|x-y\|^۲+\beta^۲\|x-z\|^۲-\|\beta(x-z)-\alpha(x-y)\|^۲}{۲\alpha\beta\|x-y\|.\|x-z\|},$$

با قرار دادن $\beta=\frac{\alpha}{۲}$،

$$\lim_{y,z\to x}(\widehat{yxz})_W = \arccos\lim_{\alpha\to ۰}\frac{\alpha^۲\|x-y\|^۲+\frac{\alpha^۲}{۴}\|x-z\|^۲-\|\frac{\alpha}{۲}(x-z)-\alpha(x-y)\|^۲}{\alpha^۲\|x-y\|.\|x-z\|}$$
$$=\arccos\frac{\|x-y\|^۲+\frac{۱}{۴}\|x-z\|^۲-\|\frac{۱}{۲}(x-z)-(x-y)\|^۲}{\|x-y\|.\|x-z\|}, \tag{۹.۳}$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی ۸.۳ و ۹.۳،

$$\frac{\|x-y\|^۲+\|x-z\|^۲-\|y-z\|^۲}{۲\|x-y\|.\|x-z\|}=\frac{\|x-y\|^۲+\frac{۱}{۴}\|x-z\|^۲-\|\frac{۱}{۲}(x-z)-(x-y)\|^۲}{\|x-y\|.\|x-z\|}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\|x-y\|^۲+\frac{۱}{۲}\|x-z\|^۲-\frac{۱}{۲}\|y-z\|^۲$$
$$=\|x-y\|^۲+\frac{۱}{۴}\|x-z\|^۲-\|\frac{۱}{۲}(x-z)-(x-y)\|^۲$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\|x-y\|^۲-\frac{۱}{۴}\|x-z\|^۲=\|\frac{۱}{۲}(x-z)-(x-y)\|^۲-\frac{۱}{۲}\|y-z\|^۲$$
$$\Rightarrow ۲\|x-y\|^۲-\|x-z\|^۲=۴\|\frac{۱}{۲}(x-z)-(x-y)\|^۲-۲\|y-z\|^۲$$
$$\Rightarrow ۲\|x-y\|^۲+۲\|y-z\|^۲=\|x-z\|^۲+\|(x-z)-۲(x-y)\|^۲$$
$$\Rightarrow ۲\|x-y\|^۲+۲\|y-z\|^۲=\|x-z\|^۲+\|(y-z)-(x-y)\|^۲,$$

حال قرار دهید $A = x - y$ و $B = y - z$ در این‌صورت

$$۲\|A\|^۲ + ۲\|B\|^۲ = \|A + B\|^۲ + \|A - B\|^۲.$$

و این بدان معناست که فضای X یک فضای ضرب داخلی است. $\square$

۳.۴.۳ $g-$ زاویه در فضاهای خطی نرم‌دار حقیقی

در این بخش با یکی از مهم‌ترین زوایا در فضاهای خطی نرم‌دار آشنا می‌شویم. این زاویه توسط میلیسیک در سال ۱۹۹۳ با نام $g-$زاویه معرفی شد. این زاویه به کمک تابعک g که توسط مشتق گتوی[۱۸] نرم بدست می‌آید، تعریف می‌شود، لذا ابتدا در این بخش تابعک g را معرفی و خواص اساسی این تابعک را بیان می‌کنیم و سپس ویژگی‌های مهم $g-$ زاویه را بررسی می‌کنیم. همچنین به کمک این زاویه‌ی $g-$تعامدهای را نیز تعریف می‌کنیم که بسیار مهم هستند، بعلاوه در فصول بعدی این زاویه بسیار پرکاربرد است. در این بخش به عنوان کاربردی از $g-$زاویه به مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی نیز می‌پردازیم. البته با کاربردهای دیگر این زاویه در فصول بعدی بیشتر آشنا می‌شویم. در این بخش از منبع [۴۱] استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد که $\dim(X) > ۱$. تابعک $g : X^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود،

$$g(x, y) := \frac{\|x\|}{۲}\big(\tau_+(x, y) + \tau_-(x, y)\big), \qquad (۱۰.۳)$$

که در آن $\tau_\pm(x, y)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\tau_\pm(x, y) := \lim_{t \to ۰^\pm} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}. \qquad (۱۱.۳)$$

برای اثبات وجود حد بالا می‌توانید به منبع [۴] مراجعه کنید. همچنین این تابعک برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ دارای ویژگی‌های اساسی زیر است که برای اثبات به [۴] رجوع کنید.

$$g(x, x) = \|x\|^۲, \qquad (۱۲.۳)$$

$$g(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta g(x, y), \qquad (۱۳.۳)$$

$$g(x, x + y) = \|x\|^۲ + g(x, y), \qquad (۱۴.۳)$$

$$|g(x, y)| \leq \|x\|.\|y\|, \qquad (۱۵.۳)$$

$$\|x\|\frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \leq g(x, y) \leq \|x\|\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}; \quad \lambda < ۰ , t > ۰. \qquad (۱۶.۳)$$

[۱۸] Gateaux derivatives

نکته ۱۱.۳. *در تعریف ۱۰.۳ اگر X یک فضای خطی نرم‌دار هموار باشد که $\dim(X) > ۱$، در این‌صورت تابعک g به فرم زیر است،*

$$g(x,y) = \|x\| \lim_{t\to ۰} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}. \tag{۱۷.۳}$$

برهان. بر طبق تعریف فضای هموار، $\tau_+(x,y) = \tau_-(x,y)$ در نتیجه اثبات واضح است. □

نکته ۱۲.۳. *اگر تابعک $g(x,y)$ نسبت به y خطی باشد، در این‌صورت g را نیم‌ضرب داخلی روی X می‌نامند. برای مثال، تابعک زیر یک نیم‌ضرب داخلی روی فضای $(l^p, \|.\|_p)$ است که در آن $۱ \leq p < \infty$.*

$$g(x,y) = \|x\|_p^{۲-p} \sum_k |x_k|^{p-۱} sgn(x_k) y_k; \quad x = (x_k),\ y = (y_k) \in l^p. \tag{۱۸.۳}$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد فضاهای نیم‌ضرب داخلی به فصل اول و منابع [۳۱] و [۵۴] مراجعه کنید.

حال به کمک تابعک g به تعریف $g-$ زاویه در هر فضای خطی نرم‌دار می‌پردازیم و ویژگی‌های این زاویه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا در هر مثلث با رئوس x,y,z مفهوم $g-$زاویه با رأس x را بیان می‌کنیم. سپس به کمک این مفهوم حالات خاص دیگر را بدست می‌آوریم.

تعریف ۱۳.۳. فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد و $x,y,z \in X$ و $x \neq y$ و $x \neq z$، در این‌صورت $g-$ زاویه‌ی با رأس x از مثلث xyz را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$(\widehat{yxz})_g := \arccos\left[\frac{g(x-y,x-z)+g(x-z,x-y)}{۲\|x-y\|.\|x-z\|}\right].$$

طبق ویژگی ۱۵.۳ تعریف فوق خوش‌تعریف است. چون

$$|g(x-y,x-z)| \leq \|x-y\|.\|x-z\|, \quad |g(x-z,x-y)| \leq \|x-z\|.\|x-y\|,$$

از دو رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\big|g(x-y,x-z)+g(x-z,x-y)\big| \leq ۲\|x-z\|.\|x-y\|.$$

در حالت خاص اگر $x = ۰$ در این‌صورت $g-$زاویه بین دو بردار ناصفر $y,z \in X$ را با نماد $A_g(y,z)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$A_g(y,z) := \arccos\left[\frac{g(y,z)+g(z,y)}{۲\|z\|.\|y\|}\right], \tag{۱۹.۳}$$

در رابطه‌ی ۱۹.۳ اگر $g(y,z) = g(z,y)$، آنگاه $A_g(y,z)$ به‌صورت زیر بدست می‌آید،

$$A_g(y,z) := \arccos\left[\frac{g(y,z)}{\|z\|.\|y\|}\right]. \tag{۲۰.۳}$$

نکته ۱۴.۳. *به کمک $g-$زاویه تعامدهایی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد،*

(۱) *فرض کنید x و y دو عضو ناصفر در فضای خطی نرم‌دار حقیقی X باشند، در این‌صورت x را بر y، $g-$ متعامدگوییم و با نماد $y \perp^g x$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،*

$$x \perp^g y \Leftrightarrow A_g(x,y) = \frac{\pi}{۲} \Leftrightarrow g(x,y) + g(y,x) = ۰,$$

(۲) *در حالت خاص اگر $g(x,y) = g(y,x)$، آنگاه*

$$x \perp_g y \Leftrightarrow g(x,y) = g(y,x) = ۰.$$

توجه کنید که از $g-$ تعامدهای معرفی شده نتیجه‌ی می‌گیریم که برای بردارهای ناصفر $x, y \in X$ اگر $y \perp_g x$ و $x \perp_g y$ آنگاه $y \perp^g x$. در مثال بعدی نشان می‌دهیم که هر دو شرط یعنی $y \perp_g x$ و $x \perp_g y$ با هم باید برقرار باشند.

مثال ۱۵.۳. فضای $(l^۱, \|.\|_۱)$ را در نظر بگیرید .
قرار دهید $x = (۱,۱,۱,۰,۰,\cdots)$ و $y = (۲,-۱,-۳,۰,۰,\cdots)$ دو عضو از فضای $l^۱$ باشند، از طرفی بر طبق ۱۸.۳،

$$g(x,y) = \|x\|_۱ \sum_k sgn(x_k) y_k = \|x\|_۱ \sum_k \frac{x_k y_k}{|x_k|}; \quad x = (x_k),\ y = (y_k) \in l^۱,$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که $g(x,y) = ۰$ ولی $g(y,x) \neq ۰$ به عبارت دیگر $y \perp_g x$ ولی $x \not\perp_g y$ و هم‌چنین با یک محاسبه‌ی ساده متوجه می‌شویم که $y \not\perp^g x$.

در مثال بعدی نشان می‌دهیم در حالت کلی زاویه‌ی ویلسن بین دو بردار با $g-$ زاویه بین همان دو بردار با هم برابر نیستند.

مثال ۱۶.۳. فضای $(l^۱, \|.\|_۱)$ را در نظر بگیرید .
فرض کنید $x = (۱,-۲,۰,۰,۰,\cdots)$ و $y = (-۱,-۱,۰,۰,۰,\cdots)$ در این‌صورت زاویه‌ی ویلسن بین دو بردار x و y با $g-$ زاویه بین x و y برابر نیست. چون

$$A_g(x,y) = \arccos(\frac{۱}{۵}), \quad A_W(x,y) = \pi.$$

لم ۴.۳. *$g-$ زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر در فضای خطی نرم‌دار حقیقی X در شرایط زیر صدق می‌کند،*

(a) *اگر x و y در یک راستا و هم‌جهت باشند، در این‌صورت $A_g(x,y) = ۰$ و اگر در یک راستا و دارای جهت‌های مخالف باشند در این‌صورت $A_g(x,y) = \pi$،*

(b) برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$،

$$A_g(\alpha x, \beta y) = \begin{cases} A_g(x, y); & \alpha\beta > ۰, \\ \pi - A_g(x, y); & \alpha\beta < ۰. \end{cases}$$

(c) اگر $\{y_n\}$ دنباله‌ای همگرا در فضای خطی نرم‌دار X باشد و $y_n \to y$ در این‌صورت، $A_g(x, y_n) \to A_g(x, y)$.

نکته ۱۷.۳. *در حالت کلی تابعک g دارای خاصیت جابجایی نیست، پس $g-$ زاویه بین دو بردار ناصفر $x, y \in X$ نیز در حالت کلی متقارن نیست، یعنی $A_g(x, y) \neq A_g(y, x)$.*

مثال ۱۸.۳. فضای خطی نرم‌دار $(l^۱, \|.\|_۱)$ را در نظر بگیرید، در این‌صورت

$$g(x, y) = \|x\|_۱ \sum_k sgn(x_k)\, y_k = \|x\|_۱ \sum_k \frac{x_k y_k}{|x_k|},$$

قرار دهید $x = (-۱, ۲, ۰, ۰, \cdots)$ و $y = (۱, ۱, ۰, ۰, \cdots)$، پس $g(x, y) = ۰$ و $g(y, x) = ۲$، یعنی $g(x, y) \neq g(y, x)$. در نتیجه داریم:

$$A_g(x, y) = \arccos \frac{g(x, y)}{\|x\|_۱ . \|y\|_۱} = \arccos(\frac{۰}{۶}) = \frac{\pi}{۲},$$
$$A_g(y, x) = \arccos \frac{g(y, x)}{\|x\|_۱ . \|y\|_۱} = \arccos(\frac{۱}{۳}).$$

پس $A_g(x, y) \neq A_g(y, x)$.

قضیه ۷.۳. *اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار اکیداً محدب باشد، و برای هر $x, y \in S(X)$ داشته باشیم $x \perp_g (x - y)$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $x = y$.*

برهان. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار اکیداً محدب باشد، به‌طوری‌که $x \perp_g (x - y)$ در این‌صورت

$$g(x, x - y) = ۰ \Rightarrow g(x, x) - g(x, y) = ۰ \Rightarrow g(x, y) = ۱,$$
$$g(x, x + y) = g(x, x) + g(x, y) = ۲,$$

از طرفی چون $|g(x, x + y)| \leq \|x\|.\|x + y\|$ بنابراین $\|x + y\| = ۲$ از طرفی چون X یک فضای نرم‌دار اکیداً محدب است لذا نتیجه می‌گیریم که $x = y$. □

قضیه ۸.۳. *اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار اکیداً محدب باشد به‌طوری‌که $x, y, z \in X$ و $x \neq y$ و $z \neq x$. در این صورت $(\widehat{yxz})_g$ دارای ویژگی‌های زیر است،*

(۱) $(\widehat{yxz})_g = (\widehat{zxy})_g$ و $۰ \leq (\widehat{yxz})_g \leq \pi$، (۲) $(\widehat{yxz})_g = 0$ *اگر و فقط اگر یکی از تساویهای* $\|x-z\| = \|x-y\| + \|y-z\|$ *یا* $\|x-y\| = \|x-z\| + \|y-z\|$ *برقرار باشد،*

(۳) $(\widehat{yxz})_g = \pi$ *اگر و فقط اگر* $\|y-z\| = \|x-y\| + \|x-z\|$.

برهان. با استفاده از تعریف ۱۳.۳ اثبات (۱) واضح است.
برای اثبات (۲) فرض کنید $\|x-z\| = \|x-y\| + \|y-z\|$ در نتیجه

$$\|(x-y)+(y-z)\| = \|x-y\| + \|y-z\|.$$

از طرفی X یک فضای نرم‌دار اکیداً محدب است لذا $t > 0$ موجود است که $(y-z) = t(x-y)$ بنابراین طبق خواص ۱۲.۳ و ۱۳.۳،

$$(\widehat{yxz})_g = \arccos \frac{(1+t)\|x-y\|}{\|x-z\|} = \arccos(1) = 0.$$

در حالت $\|x-y\| = \|x-z\| + \|y-z\|$ نیز به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.
حال فرض کنیم $(\widehat{yxz})_g = 0$ آنگاه داریم :

$$g(x-y, x-z) + g(x-z, x-y) = 2\|x-y\|.\|x-z\|,$$

بر طبق رابطه‌ی ۱۵.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$g(x-y, x-z) = g(x-z, x-y) = \|x-y\|.\|x-z\|.$$

حال قرار دهید $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ و $v = \frac{x-z}{\|x-z\|}$، در این صورت، $g(u,v) = g(v,u) = 1$ بنابراین

$$g(u, u-v) = 0 \quad , \quad g(v, u-v) = 0,$$

پس $u \perp_g (u-v)$ و $v \perp_g (v-u)$.
از طرفی طبق قضیه‌ی ۷.۳ در هر فضای اکیداً محدب برای هر $u, v \in S(X)$ اگر $u \perp_g (u-v)$ آنگاه $u = v$. لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$\frac{x-y}{\|x-y\|} = \frac{x-z}{\|x-z\|} \Rightarrow x-y = \frac{\|x-y\|}{\|x-z\|}(x-z)$$
$$\Rightarrow \|x-y\| + \|y-z\| = \|x-z\|.$$

اکنون خاصیت (۳) را ثابت می‌کنیم فرض $\|y-z\| = \|x-y\| + \|x-z\|$ چون X یک فضای نرم‌دار اکیداً محدب است، لذا $t > 0$ موجود است که $x-y = t(z-x)$ بنابراین

$$(\widehat{yzx})_g = \arccos \frac{-t\|x-z\|}{\|x-y\|} = \arccos(-1) = \pi.$$

بالعکس اگر $(\widehat{yzx})_g = \pi$ آنگاه $g(x-y, x-z) + g(x-z, x-y) = -2\|x-y\|.\|x-z\|$ در این‌صورت طبق ۱۵.۳، $g(x-y, x-z) = g(x-z, x-y) = -\|x-y\|.\|x-z\|$ در نتیجه همانند حالت قبلی می‌توان نشان داد که (۳) نیز برقرار است. □

قضیه ۹.۳. *فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار اکیداً محدب باشد و $R_1 = R(x,y)(x \neq y)$ و $R_2 = R(x,z)(x \neq z)$ دو نیم‌خط در فضای X باشند، آنگاه زاویه‌ی $A_g(R_1, R_2)$ وجود دارد و هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که $A_g(R_1, R_2) = A_g(x-y, x-z)$.*

برهان. فرض کنید $y \in R_1(x \neq y)$ و $z \in R_2(x \neq z)$. از طرفی در هر فضای اکیداً محدب،

$$R(x,y) = \{\, \lambda x + (1-\lambda)y; \quad \lambda \geq 0 \,\},$$
$$S(x,y) = \{\, \lambda x + (1-\lambda)y; \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \,\}.$$

قرار دهید $y' = \lambda x + (1-\lambda)y$ و $z' = tx + (1-t)y$ که $\lambda, t \in [0,1]$ آنگاه

$$\begin{aligned}
&\lim_{y',z' \to x} \frac{g(x-y', x-z') + g(x-z', x-y')}{2\|x-y'\|.\|x-z'\|} \\
&= \lim_{t,\lambda \to 1} \frac{(1-\lambda)(1-t)\big[g(x-y,x-z) + g(x-z,x-y)\big]}{2(1-\lambda)(1-t)\|x-y\|.\|x-z\|} \\
&= \cos\big(A_g(x-y,x-z)\big),
\end{aligned}$$

در نتیجه $A_g(R_1,R_2) = A_g(x-y,x-z)$. □

توجه کنید که قضیه‌ی ۹.۳ همانند قضیه‌ی ۳.۳ است، با این تفاوت که در قضیه‌ی ۹.۳ فرض شده است فضای X، اکیداً محدب است ولی در قضیه‌ی ۳.۳ فرض شده است که فضای X باناخ و زاویه‌ی $A_w(R_1,R_2)$ موجود است. از قضیه‌ی ۹.۳ و قضیه‌ی ۳.۳ نتیجه‌ی بعد بدست می‌آید.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار اکیداً محدب باشد و نقطه‌ی x بین y و z باشد، ($x = \lambda y + (1-\lambda)z; \lambda \in (0,1)$) در این‌صورت*

$$A_g\big(R(x,y), R(x,z)\big) = \pi.$$

در قضیه‌ی بعد به کمک $g-$زاویه به یک مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی دست می‌یابیم.

قضیه ۱۰.۳ (قضیه‌ی مشخصه‌سازی). *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار حقیقی باشد که $\dim(X) > 1$. در این‌صورت برای هر $x,y,z \in X$ گزاره‌های زیر معادلند،*

(a) *نرم روی X توسط ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ القاشده است.*

(b) $g(x,y) = g(y,x)$.

(c) $g(x+y,z) = g(x,z) + g(y,z)$.

(d) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|.\|y\| \cos\big(A_g(x,y)\big)$.

(e) $A_w(x,y) = A_g(x,y)$.

برهان. اگر $\|.\|$ نرم تولید شده توسط ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد یعنی $(\forall x \in X \Rightarrow \|x\|^۲ = \langle x,x \rangle)$ آنگاه برای هر $x, y \in X$،

$$g(x,y) = \langle x,y \rangle.$$

بنابراین گزاره‌ی (a) گزاره‌های $(b),(c),(d),(e)$ را ایجاب می‌کند. حال نشان می‌دهیم که $(b) \Longrightarrow (d)$ و $(d) \Longrightarrow (c)$ و $(d) \Longrightarrow (e)$ و $(a) \Longrightarrow (d)$ برای اثبات $(d) \Longrightarrow (b)$ از ۱۴.۳ استفاده می‌کنیم،

$$\begin{aligned} g(x+y,x) &= g(x+y, x+y-y) = g(x+y,x+y) - g(x+y,y) \\ &\Rightarrow g(x+y,x) = \|x+y\|^۲ - g(x+y,y) \\ &\Rightarrow \|x+y\|^۲ = g(x+y,x) + g(x+y,y), \end{aligned}$$

حال بر طبق گزاره‌ی (b)،

$$\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + g(x,y) + g(y,x),$$

در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|x-y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ - ۲\|x\|\|y\| \cos\big(A_g(x,y)\big).$$

اثبات $(d) \Longrightarrow (c)$ واضح است کافی است قرار دهید $z = x+y$.
اثبات $(d) \Longrightarrow (e)$ واضح است.
$(a) \Longrightarrow (d)$ بر طبق (d)،

$$\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + ۲\|x\|\|y\| \cos\big(A_g(x,y)\big),$$

در صورتی‌که $y \perp^g x$ آنگاه $A_g(x,y) = \frac{\pi}{۲}$ در نتیجه $\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$ پس می‌توان گفت که

$$\|x-y\|^۲ + \|x+y\|^۲ = ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲.$$

یعنی قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع برقرار است لذا X یک فضای ضرب داخلی است. □

نتیجه ۵.۳. *فضای خطی نرم‌دار حقیقی X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر قانون کوسینوس‌ها (d) برقرار باشد.*

حال به کمک $g-$زاویه به دنبال مشخصه‌سازی فضاهای پیش‌هیلبرت هستیم. به این منظور ابتدا دو لم زیر که در قضیه‌ی مشخصه سازی استفاده می‌شوند را بیان می‌کنیم.

لم ۵.۳. *فرض کنید* $(X, \|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد که* $\dim(X) \geq ۳$. *همچنین فرض کنید برای هر* $u, v \in S(X)$،

$$\tau_+(u, v) \geq ۰ \Longrightarrow \tau_+(v, u) \geq ۰, \qquad (۲۱.۳)$$

آنگاه X *یک فضای ضرب داخلی است.*

برهان. برای اثبات به [۳۹] مراجعه کنید. □

لم ۶.۳. *فضای خطی نرم‌دار* X*، یک فضای اکیداً محدب است اگر و فقط اگر برای هر* $x \in X \backslash \{۰\}$ *و* $y \in X$*، عدد یکتای* $\alpha \in \mathbb{R}$ *موجود باشد، به‌طوری‌که*

$$\|\alpha x + y\| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\lambda x + y\|.$$

برهان. برای اثبات به [۲۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۱.۳ (قضیه‌ی مشخصه‌سازی). *فرض کنید* $(X, \|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد که* $\dim(X) \geq ۳$*، در این‌صورت* X *یک فضای پیش‌هیلبرت است اگر و فقط اگر فضای* X *اکیداً محدب باشد و برای هر* $u, v \in S(X)$*، اگر* $u \perp_g v$ *آنگاه* $v \perp_g u$.

برهان. فرض کنید X یک فضای پیش‌هیلبرت باشد. از آنجایی‌که هر فضای پیش‌هیلبرت یک فضای اکیداً محدب است و همچنین

$$g(x, y) = \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = ۰.$$

اکنون فرض کنید X یک فضای اکیداً محدب باشد و برای هر $u, v \in S(X)$ داشته باشیم

$$u \perp_g v \Rightarrow v \perp_g u. \qquad (۲۲.۳)$$

طبق لم ۵.۳ کافیست نشان دهیم ۲۱.۳ معادل با ۲۲.۳ است. به برهان خلف فرض کنیم عبارت ۲۲.۳ ادعای ۲۱.۳ را ثابت نکند، در این‌صورت $u, v \in S(X)$ موجودند که به‌طوری‌که $\tau_+(u, v) \geq ۰$ و $\tau_+(v, u) < ۰$. از طرفی چون $\tau_-(v, u) \leq \tau_+(v, u)$ در نتیجه داریم $g(v, u) < ۰$. قرار دهید $t = -g(v, u)$. در این‌صورت $u + tv \neq ۰$ و $g(v, u + tv) = ۰$. در نتیجه $g\left(v, \dfrac{u + tv}{\|u + tv\|}\right) = ۰$. بنابراین بر طبق ۲۲.۳ می‌توان گفت که $g(u + tv, v) = ۰$. حال با کمک ویژگی‌های تابعک g و τ_+،

$$\begin{aligned}
g(u + tv, v) = ۰ &\Leftrightarrow g(u + tv, tv) = ۰ \\
&\Leftrightarrow g(u + tv, u + tv - u) = ۰ \\
&\Leftrightarrow \|u + tv\|^۲ - g(u + tv, u) = ۰ \\
&\Rightarrow \|u + tv\|^۲ = g(u + tv, u) \\
&\Rightarrow \|u + tv\|^۲ = |g(u + tv, u)| \leq \|u + tv\|.\|u\| \quad \Rightarrow \|u + tv\| \leq ۱,
\end{aligned}$$

حال اگر $\|u+tv\| < ۱$ آنگاه $۰ < \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t}$. در نتیجه $\tau_+(u,v) \leq \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t}$ لذا $\tau_+(u,v) < ۰$ که این تناقض است چون $\tau_+(u,v) \geq ۰$. حال فرض کنید $\|u+tv\| = ۱$ آنگاه از تساوی $g(u+tv, v) = ۰$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ نتیجه می‌گیریم که $\|u\| = \|u+tv\| \leq \|u+(t+\lambda)v\|$. در نتیجه

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|u+(t+\lambda)v\| = \|u\| = \|u+tv\|,$$

حال بر طبق لم ۶.۳ می‌توان نتیجه گرفت $t = ۰$. یعنی $g(v,u) = ۰$ و این با $t = -g(v,u) > ۰$ در تناقض است. $\square$

فصل ۴

فضاهای شبه ضرب داخلی و زوایا

۱.۴ مقدمه

در این فصل می‌خواهیم به کمک تابعک g نوعی از فضاهای خطی نرم‌دار به نام فضاهای شبه ضرب داخلی [۱] را معرفی کنیم. ابتدا در بخش اول فضاهای شبه ضرب داخلی را معرفی کرده و برخی از خواص این فضا را در قالب قضایا و نتایج بیان می‌کنیم. همچنین در انتهای بخش به کمک $g-$زاویه ثابت می‌کنیم که هر فضای شبه ضرب داخلی، اکیداً محدب است. سپس مفهوم همگرایی ضعیف دنباله‌ها را در فضاهای شبه ضرب داخلی مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش دوم به بحث تعامد و زاویه در فضاهای شبه ضرب داخلی براساس ایده‌ی پاوله میلیسیک می‌پردازیم. در این فصل به کمک $g-$تعامد ثابت می‌کنیم که در هر فضای شبه ضرب داخلی، طول قطرهای متوازی‌الاضلاع با هم برابر و بر هم عمودند اگر و فقط اگر متوازی‌الاضلاع یک $g-$مستطیل باشد. در ادامه ثابت می‌کنیم که $g-$ تعامد به‌طور یکتا حل‌پذیر[۲] است یعنی برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$، عدد یکتای $a \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که $x \perp (ax+y)(g)$. همچنین تحت شرایط خاصی ثابت می‌کنیم که بردار $(-ax)$ بهترین تقریب بردار y نسبت به زیرفضای تولید شده توسط x است و در انتهای فصل درباره‌ی شرایط لازم و کافی برای اینکه یک فضای شبه ضرب داخلی، ضرب داخلی باشد بحث می‌کنیم. در این فصل از منابع [۴۴، ۴۷، ۴۰] استفاده شده است بجز در مواقعی که منبع به روشنی مشخص شده باشد.

۲.۴ فضاهای شبه ضرب داخلی

در این بخش ابتدا با مفهوم فضاهای شبه ضرب داخلی آشنا می‌شویم و سپس به بررسی خواص فضاهای شبه ضرب داخلی می‌پردازیم. همچنین مفهوم همگرایی ضعیف دنباله‌ها را در فضاهای شبه ضرب داخلی معرفی می‌کنیم. در این بخش از منبع [۴۴] استفاده شده است.

---

[۱] quasi-inner product spaces

[۲] uniquely solvable

تعریف ۱.۴. فضای خطی نرم‌دار $(X, \|.\|)$ یک فضای شبه ضرب داخلی نامیده می‌شود هرگاه تساوی زیر برای هر $x, y \in X$ برقرار باشد،

$$\|x+y\|^۴ - \|x-y\|^۴ = ۸\Big(\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x)\Big). \qquad (۱.۴)$$

که در آن تابعک g همان تابعک معرفی شده در فصل قبل است، این تابعک همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد نسبت به متغیر دوم خطی است. اگر $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه $g(x,y) = \langle x,y \rangle$. بنابراین

$$\|x+y\|^۴ - \|x-y\|^۴ = ۸\big(\|x\|^۲ + \|y\|^۲\big)\langle x,y \rangle,$$

در نتیجه

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲\big(\|x\|^۲ + \|y\|^۲\big),$$

که این همان قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع است، به عبارت دیگر رابطه‌ی ۱.۴ تعمیمی از قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع در فضاهای ضرب داخلی است. در مثال بعدی نمونه‌ای از یک فضای شبه ضرب داخلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۲.۴. در فضاهای $(l^p, \|.\|_p)$ تابعک g به‌صورت زیر است، برای اثبات این مطلب به [۴] مراجعه کنید.

$$g(x,y) = \|x\|_p^{۲-p} \sum_k |x_k|^{p-۱}(sgn\, x_k) y_k; \quad x = (x_k) \in l^p \backslash \{\circ\},\ y = (y_k) \in l^p.$$

در این‌صورت به‌راحتی می‌توان نشان داد که فضای $(l^۱, \|.\|_۱)$ یک فضای شبه ضرب داخلی نیست ولی فضای $(l^۴, \|.\|_۴)$ یک فضای شبه ضرب داخلی است.
برای $p = ۱$ تابعک g به صورت زیر است،

$$g(x,y) = \|x\|_۱ \sum_k (sgn x_k) y_k; \quad x = (x_k) \in l^۱ \backslash \{\circ\},\ y = (y_k) \in l^۱.$$

حال اگر قرار دهید $x = (۱, ۱, ۲, \circ, \circ, \cdots)$ و $y = (۱, -۱, ۱, \circ, \circ, \cdots)$، در این‌صورت واضح است تساوی ۱.۴ برقرار نیست.
برای $p = ۴$،

$$\|x\|^۲ g(x,y) = \sum_k x_k^۳ y_k; \quad x = (x_k) \in l^۴ \backslash \{\circ\},\ y = (y_k) \in l^۴,$$
$$\|y\|^۲ g(y,x) = \sum_k y_k^۳ x_k; \quad y = (y_k) \in l^۴ \backslash \{\circ\},\ x = (x_k) \in l^۴.$$

از دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم

$$\|x\|^{۲}g(x,y)+\|y\|^{۲}g(y,x)=\sum_k(x_k^{۳}y_k+y_k^{۳}x_k),$$

از طرفی،

$$\|x+y\|^{۴}-\|x+y\|^{۴}=\sum_k(x_k+y_k)^{۴}-(x_k-y_k)^{۴}=۸(x_k^{۳}y_k+x_ky_k^{۳}),$$

در نتیجه تساوی ۱.۴ در $l^{۴}$ برقرار است.

تعریف ۳.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، در این‌صورت نرم روی X را در نقطه‌ی $x_{\circ}\in S(X)$ مشتق‌پذیر فرشه[۳] می‌گوییم هرگاه حد زیر به طور یکنواخت برای هر $y\in S(X)$ موجود باشد،

$$\lim_{\lambda\to\circ}\frac{\|x_{\circ}+\lambda y\|-\|x_{\circ}\|}{\lambda}.$$

همچنین اگر نرم X در هر نقطه‌ی $x_{\circ}\in S(X)$ مشتق‌پذیر فرشه باشد، آنگاه می‌گوییم X دارای نرم مشتق‌پذیر فرشه است.

تعریف ۴.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، آنگاه نرم روی X را به‌طور یکنواخت مشتق‌پذیر فرشه[۴] می‌گویند، هرگاه برای هر $x,y\in S(X)$ حد زیر به‌طور یکنواخت وجود داشته باشد،

$$\lim_{\lambda\to\circ}\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}.$$

به عبارت دیگر اگر $\lim_{\lambda\to\circ}\dfrac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}=A$، هرگاه استلزام منطقی زیر برای هر $\epsilon>\circ$ داده شده برقرار باشد،

$$\exists\,\delta>\circ,\quad \forall\,x,y\in X,\quad \forall\,\lambda,\ |\lambda|<\delta\Longrightarrow\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-A\right|<\epsilon$$

حال برخی از ویژگی‌های مهم فضاهای شبه ضرب داخلی را در قالب قضایا و نتایج بیان می‌کنیم [۲۸، ۴۰].

قضیه ۱.۴. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، آنگاه X یک فضای هموار است.*

برهان. فرض کنید $t\in\mathbb{R}$ و $x,y\in X$. بر طبق ۱.۴ می‌توان نوشت

$$\|(x+ty)+y\|^{۴}-\|(x+ty)-y\|^{۴}=۸\big(\|x+ty\|^{۲}g(x+ty,y)+\|y\|^{۲}g(y,x+ty)\big).\tag{۲.۴}$$

[۳] Frechet differentiale

[۴] uniformly Frechet differentiable

از طرفی $g(y,x+ty)=g(y,x)+t\|y\|^{۲}$، بر طبق ۲.۴،

$$\|x+y\|^{۴}-\|x-y\|^{۴}=۸\big(\|x\|^{۲}\lim_{t\to ۰}g(x+ty,y)+\|y\|^{۲}g(y,x)\big), \qquad (۳.۴)$$

با استفاده دوباره از ۱.۴ و با کمک رابطه‌ی ۲.۴،

$$\lim_{t\to ۰}g(x+ty,y)=g(x,y), \qquad (۴.۴)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱.۴ برای بردارهای $x+\frac{t}{۲}y$ و $\frac{t}{۲}y$ می‌توان نوشت

$$\|x+ty\|^{۴}-\|x\|^{۴}=۸\left(\frac{t}{۲}\|x+\frac{t}{۲}y\|^{۲}g(x+\frac{t}{۲}y,y)+\left(\frac{t}{۲}\right)^{۳}\|y\|^{۲}g(y,x+\frac{t}{۲}y)\right),$$

بنابراین برای هر $t\neq ۰$،

$$\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}=\frac{۴\|x+\frac{t}{۲}y\|^{۲}g(x+\frac{t}{۲}y,y)+t^{۲}\|y\|^{۲}g(y,x)+\frac{t^{۳}}{۲}\|y\|^{۴}}{(\|x+ty\|^{۲}+\|x\|^{۲})\,(\|x+ty\|+\|x\|)},$$

بنابراین طبق ۴.۴،

$$\tau_{\pm}(x,y)=\frac{g(x,y)}{\|x\|}, \qquad x\neq ۰,$$

و این یعنی $\tau_{+}(x,y)=\tau_{-}(x,y)$. □

نتیجه ۱.۴. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، آنگاه نگاشت $x\longmapsto g(x,.)$ یک نگاشت پشتیبان است.*

برهان. چون X یک فضای هموار است، در نتیجه $\tau_{+}(x,y)=\tau_{-}(x,y)$. از طرفی تابعک g نسبت به متغیر دوم خطی است و همچنین

$$g(x,.)\in I_x, \quad \big(I_x=\{\,f\in X^{*}|f(x)=\|f\|.\|x\|, \quad \|f\|=\|x\|\,\}\big),$$

بنابراین نگاشت $g(x,.)\longmapsto x$ از $X\backslash\{۰\}$ به $X^{*}\backslash\{۰\}$ دارای ویژگی‌های زیر است.

$$(i) \qquad x\in S(X)\Rightarrow \|g(x,.)\|=۱=g(x,x),$$

$$(ii) \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow g(\lambda x,.)=\lambda g(x,.).$$

و در نتیجه نگاشت $g(x,.)\longmapsto x$ یک نگاشت پشتیبان است. □

تعریف ۵.۴. فضای خطی نرم‌دار $(X,\|.\|)$ را یک فضای به‌طور یکنواخت هموار [5] گوییم هرگاه برای هر $\epsilon>۰$، $\delta>۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in S(X)$ و هر $y\in X$ که $\|y\|<\delta$ داشته باشیم

$$\|x+y\|+\|x-y\|<۲+\epsilon\|y\|.$$

[5] uniformly smooth

تعریف ۶.۴. فضای خطی نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را به‌طور یکنواخت محدب[۶] می‌گوییم، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر $x, y \in S(X)$ و $\|x - y\| \geq \epsilon$، آنگاه $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$.

قضیه ۲.۴. *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند،*

(a) *نگاشت پشتیبان $f_x \longmapsto x$ از $S(X)$ به $S(X^*)$ وجود دارد که به‌طور یکنواخت پیوسته است؛*

(b) *نرم روی X به‌طور یکنواخت مشتق‌پذیر فرشه است؛*

(c) *X به‌طور یکنواخت هموار است؛*

(d) *X^* به‌طور یکنواخت محدب است؛*

(e) *هر نگاشت پشتیبان $f_x \longmapsto x$ به‌طور یکنواخت پیوسته از $S(X)$ به $S(X^*)$ است.*

برهان. برای اثبات به صفحه‌ی ۳۶ از [۲۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۳.۴. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، آنگاه X به‌طور یکنواخت هموار است.*

برهان. بر طبق قضیه‌ی ۲.۴ فضای نرم‌دار X به طور یکنواخت هموار است اگر و فقط اگر نگاشت پشتیبان چون $f_x \longmapsto x$ موجود باشد که به‌طور یکنواخت پیوسته از $S(X)$ به $S(X^*)$ باشد. بنابراین کافیست ثابت کنیم که نگاشت پشتیبان $g(x, .) \longmapsto x$ یک نگاشت به‌طور یکنواخت پیوسته از $S(X)$ به $S(X^*)$ است. فرض کنید $x, y, t \in S(X)$، پس بر طبق تعریف فضای شبه ضرب داخلی،

$$g(x,t) + g(t,x) = \frac{1}{8}\left(\|x+t\|^4 - \|x-t\|^4\right),$$
$$g(y,t) + g(t,y) = \frac{1}{8}\left(\|y+t\|^4 - \|y-t\|^4\right).$$

بنابراین

$$g(x,t) - g(y,t) = \frac{1}{8}\left[\,\left(\|x+t\|^4 - \|y+t\|^4 + \|y-t\|^4 - \|x-t\|^4\right)\,\right] - g(t, x-y), \tag{5.4}$$

پس

$$|g(x,t) - g(y,t)| \leq \frac{1}{8}[32\|x-y\| + 32\|x-y\|] + \|x-y\| = 9\|x-y\|,$$

در نتیجه، $\|g(x,.) - g(y,.)\| \leq 9\|x-y\|$.

و این یعنی نگاشت $g(x,.) \longmapsto x$ به طور یکنواخت پیوسته از $S(X)$ به $S(X^*)$ است. □

نتیجه ۲.۴. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، آنگاه نرم فضای X مشتق‌پذیر فرشه است.*

[۶] uniformly convex

برهان. بر طبق قضیه‌ی ۲.۴ و ۳.۴ اثبات واضح است. □

نتیجه ۳.۴. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، آنگاه X^* به‌طور یکنواخت محدب است.*

برهان. بر طبق قضیه‌ی ۲.۴ و ۳.۴ اثبات واضح است. □

برای اطلاعات بیشتر در مورد دیگر ویژگی‌های فضاهای شبه ضرب داخلی همانند انعکاسی بودن و بسیار هموار بودن به منبع [۴۰] مراجعه کنید. قضیه‌ی ۴.۴ در فصل دوم ثابت شده است چون در قضیه‌ی ۶.۴ استفاده می‌شود بار دیگر آن را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۴.۴. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $f \in X^*$، در این‌صورت برای هر $y \in \ker(f)$، $x \perp_B y$ اگر و فقط اگر $|f(x)| = \|f\|.\|x\|$.*

قضیه‌ی بعد نیز در اثبات قضیه‌ی ۶.۴ استفاده می‌شود و اثبات این قضیه را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

قضیه ۵.۴. *فضای خطی نرم‌دار X هموار است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in X\backslash\{0\}$، داشته باشیم*

$$x \perp_g y \Leftrightarrow x \perp_B y.$$

در قضایای قبلی ثابت کردیم که فضای شبه ضرب داخلی هموار، به طور یکنواخت هموار، به طور یکنواخت محدب است. در قضایای بعدی می‌خواهیم به کمک $g-$زاویه ثابت کنیم که هر فضای شبه ضرب داخلی، اکیداً محدب است.

قضیه ۶.۴. *فرض کنید $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار هموار باشد، در این‌صورت X یک فضای اکیداً محدب است اگر و فقط اگر برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$، اگر $\cos A_g(x, y) = 1$ آنگاه $\lambda > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $y = \lambda x$.*

برهان. فرض کنید X هموار و اکیداً محدب باشد، چون $\cos A_g(x, y) = 1$ در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{g(x, y) + g(y, x)}{2\|x\|.\|y\|} = 1 &\Leftrightarrow g(x, y) + g(y, x) = 2\|x\|.\|y\| \\ &\Leftrightarrow g(x, y) = g(y, x) = \|x\|.\|y\|. \end{aligned}$$

چون X هموار است، پس $g(x, y)$ یک نیم‌ضرب داخلی است. بنابراین از این‌که $g(x, y) = \|x\|.\|y\|$ بر طبق قضیه‌ی ۶.۱ نتیجه می‌گیریم $\lambda > 0$ موجود است که $y = \lambda x$. برعکس فرض کنید X هموار و اگر $\cos A_g(x, y) = 1$، آنگاه $\lambda > 0$ موجود باشد که $y = \lambda x$. پس برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$،

$$g(x, y) = \|x\|.\|y\|, \tag{۶.۴}$$

پس بر طبق قضیه‌ی ۴.۴ نتیجه می‌گیریم که $y \perp_B g(x,.)$، در این‌صورت بر طبق قضیه‌ی ۵.۴ برای هر $h \in g(x,.)$، $g(y,h) = ۰$. حال فرض کنید $y = \lambda x + h$ که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$ و $h \in g(x,.)$ بنابراین

$$g(y,y) = \|y\|^۲ = \lambda g(y,x) + g(y,h).$$

یعنی

$$\|y\|^۲ = \lambda g(y,x). \tag{۷.۴}$$

هم‌چنین $g(x,y) = \lambda \|x\|^۲$. بر طبق ۶.۴ می‌توان نتیجه گرفت $\lambda\|x\| = \|y\|$. بنابراین از ۷.۴، $g(y,x) = \|x\|.\|y\|$. بنابراین، $\cos A_g(x,y) = ۱$ پس $\lambda > ۰$ موجود است که $y = \lambda x$. لذا برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$ از فرض اینکه $g(x,y) = \|x\|.\|y\|$ نتیجه گرفتیم که $\lambda > ۰$ موجود است که $y = \lambda x$. پس طبق قضیه‌ی ۶.۱ می‌توان نتیجه گرفت که X یک فضای اکیداً محدب است. □

نتیجه ۴.۴. *فرض کنید X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، در این‌صورت X اکیداً محدب است.*

برهان. در هر فضای شبه ضرب داخلی X، برای هر $x, y \in X \backslash \{۰\}$،

$$۱۶ - \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^۴ \geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|^۴ - \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^۴ = ۱۶ \cos A_g(x,y). \tag{۸.۴}$$

اگر $\cos A_g(x,y) = ۱$، آنگاه داریم:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^۴ \leq ۰.$$

بنابراین $y = \frac{\|y\|}{\|x\|}x$. از آنجایی‌که X هموار است، طبق قضیه‌ی ۶.۴ واضح است که X اکیداً محدب است. □

۱.۲.۴ همگرایی ضعیف در فضاهای شبه ضرب داخلی

در این بخش می‌خواهیم مفهوم همگرایی ضعیف[۷] دنباله‌ها را در فضای شبه ضرب داخلی بیان کنیم. می‌دانیم در هر فضای ضرب داخلی اگر $x_n \to x_۰$ و $\|x_n\| \to \|x_۰\|$ آنگاه $\|x_n - x_۰\| \to ۰$. اما این موضوع در هر فضای نرمدار درست نیست. یکی از این فضاهای خطی نرم‌دار فضای شبه ضرب داخلی است. در دو قضیه‌ی بعد این موضوع را بررسی می‌کنیم. در این بخش از منبع [۴۴] استفاده می‌شود.

قضیه ۷.۴. *اگر X یک فضای خطی نرم‌دار هموار و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای X باشند و $x_۰ \in X$، در این‌صورت اگر،*

(۱) $x_n \longrightarrow x_۰$ $\quad (n \to \infty)$،

[۷] weak convergence

(۲) $\|x_n\| \longrightarrow \|x_\circ\| \quad (n \to \infty)$،

آنگاه $\|x_\circ\|^{۲} \longrightarrow g(x_n, x_\circ)$ *وقتی‌که*، $n \to \infty$.

برهان. چون X هموار است و برای هر $x \in X$ داریم $g(x,.) \in X^*$. از طرفی طبق (۲) برای هر $\epsilon > \circ$،

$$\exists\, N_{۱} \in \mathbb{N}; \quad \forall\, n \geq N_{۱} \Rightarrow |g(x_n, x_n) - \|x_\circ\|^{۲}| < \frac{\epsilon}{۲}, \tag{۹.۴}$$

هم‌چنین بر طبق (۱) برای هر $n \geq N_{۱}$ و هر $\epsilon > \circ$،

$$\exists\, N_{۲} \in \mathbb{N}; \quad \forall\, m \geq N_{۲} \Rightarrow |g(x_n, x_m) - g(x_n, x_\circ)| < \frac{\epsilon}{۲}. \tag{۱۰.۴}$$

پس برای $N_\circ = \max\{N_{۱}, N_{۲}\}$ و $m = n \geq N_\circ$ و طبق ۱۰.۴ می‌توان نتیجه گرفت که،

$$|g(x_n, x_n) - g(x_n, x_\circ)| < \frac{\epsilon}{۲},$$

لذا برای هر $n \geq N_\circ$،

$$|g(x_n, x_\circ) - \|x_\circ\|^{۲}| - |g(x_n, x_n) - \|x_\circ\|^{۲}| \leq |g(x_n, x_n) - g(x_n, x_\circ)| < \frac{\epsilon}{۲}.$$

با استفاده از ۹.۴ برای هر $n \geq N_\circ$،

$$|g(x_n, x_\circ) - \|x_\circ\|^{۲}| < \epsilon,$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} g(x_n, x_\circ) = \|x_\circ\|^{۲}$. □

قضیه ۸.۴. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و $x_n \in X (n \in \mathbb{N})$ و $x_\circ \in X$ به‌طوری‌که،*

(a) $x_n \longrightarrow x_\circ \quad (n \to \infty)$،

(b) $\|x_n\| \longrightarrow \|x_\circ\| \quad (n \to \infty)$،

آنگاه $\|x_n - x_\circ\| \longrightarrow \circ$ *وقتی‌که*، $n \to \infty$.

برهان. بر طبق ۱.۴،

$$\|x_n + x_\circ\|^{۴} - \|x_n - x_\circ\|^{۴} = ۸\big(\|x_n\|^{۲} g(x_n, x_\circ) + \|x_\circ\|^{۲} g(x_\circ, x_n)\big), \tag{۱۱.۴}$$

با استفاده از این رابطه‌ی نتیجه می‌گیریم که،

$$۸\big(\|x_n\|^{۲} g(x_n, x_\circ) + \|x_\circ\|^{۲} g(x_\circ, x_n)\big) \leq (\|x_n\| + \|x_\circ\|)^{۴} - \|x_n - x_\circ\|^{۴}. \tag{۱۲.۴}$$

چون X یک فضای هموار است، از (a) نتیجه می‌گیریم وقتی $n \to \infty$ آنگاه $g(x_\circ, x_n) \longrightarrow \|x_\circ\|^۲$.
از طرفی طبق قضیه‌ی ۷.۴ می‌توان نتیجه گرفت که وقتی $n \to \infty$ داریم

$$g(x_n, x_\circ) \longrightarrow \|x_\circ\|^۲,$$

بنابراین بر طبق رابطه‌ی ۱۲.۴ و (b)،

$$۱۶\|x_\circ\|^۴ \leq ۱۶\|x_\circ\|^۴ - \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\circ\|^۴,$$

پس، $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\circ\|^۴ = \circ$. □

۳.۴ تعامد و زاویه در فضاهای شبه ضرب داخلی

در فصل قبل با مفهوم تعامد و زاویه در فضاهای خطی نرم‌دار آشنا شدیم و به کمک تابعک g زوایا و تعامدهایی را تعریف کردیم. در این بخش می‌خواهیم به کمک تابعک g در فضاهای شبه ضرب داخلی نوع دیگری از $g-$ تعامد را معرفی کنیم. سپس در قضیه‌ای شباهت بین فضاهای ضرب داخلی و فضاهای شبه ضرب داخلی را بیان می‌کنیم. در این بخش رابطه‌ی بین $g-$ تعامد و تعامدهای سینگر و متساوی‌الساقینی جیمز را نیز مشخص می‌کنیم. هم‌چنین در مورد حل‌پذیری $g-$ تعامد در فضاهای شبه ضرب داخلی نیز بحث می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم عدد یکتای $a \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که $x \perp (ax+y)(g)$، در حالی که $\|x\|.\|y\| \neq \circ$. سپس در شرایط خاصی نشان می‌دهیم که بردار $(-ax)$ بهترین تقریب بردار y نسبت به زیر فضای تولید شده توسط x است و در انتهای این بخش شرط لازم و کافی برای این‌که یک فضای شبه ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی باشد را بیان می‌کنیم. در این بخش از منبع [۴۴] استفاده می‌کنیم.

تعریف ۷.۴. فرض کنید X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$، در این‌صورت بردار x و y را بر هم $g-$ متعامد گوییم و با نماد $x \perp y(g)$ نمایش می‌دهیم اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x) = \circ. \qquad (۱۳.۴)$$

نکته ۸.۴. *به‌طور کلی تاکنون در هر فضای خطی نرم‌دار $(X, \|.\|)$ سه نوع تعامد به کمک تابعک g تعریف کردیم که به‌صورت‌های زیر هستند،*

$$x \perp^g y \;\Leftrightarrow\; g(x,y) + g(y,x) = \circ, \qquad (۱۴.۴)$$

$$x \perp_g y \;\Leftrightarrow\; g(x,y) = g(y,x) = \circ, \qquad (۱۵.۴)$$

$$x \perp y(g) \;\Leftrightarrow\; \|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x) = \circ. \qquad (۱۶.۴)$$

دقت کنید در صورتی $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، روابط ۱۴.۴ و ۱۵.۴ و ۱۶.۴ به $\langle x, y\rangle = \circ$ کاهش می‌یابند. بعلاوه توجه می‌کنیم که، $\perp_g \subset \perp^g \cap \perp(g)$.

حال در قضیه بعد به دنبال بررسی شباهت بین فضاهای شبه ضرب داخلی و فضاهای ضرب داخلی به کمک $g-$تعامد هستیم. به این منظور فرض کنید نقاط $(\circ, x, y, x+y)$ رئوس یک متوازی‌الاضلاع باشند و $\|x+y\|$ و $\|x-y\|$ طول قطرهای آن باشند. حال اگر $\|x\| = \|y\|$ آنگاه این متوازی‌الاضلاع یک لوزی است و اگر $x \perp y$ می‌گوییم این متوازی‌الاضلاع یک مستطیل است، به‌طوری‌که $\perp \in \{\perp_g, \perp^g, \perp (g)\}$.

قضیه ۹.۴. *فرض کنید X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند،*

(۱) *طول قطرهای متوازی‌الاضلاع $(\circ, x, y, x+y)$ مساویند اگر و فقط اگر این متوازی‌الاضلاع یک $g-$ مستطیل باشد، یعنی $x \perp y(g)$،*

(۲) *قطرهای لوزی $(\circ, x, y, x+y)$ بر هم $g-$ متعامد هستند، یعنی $(x-y) \perp (x+y)(g)$،*

(۳) *متوازی‌الاضلاع $(\circ, x, y, x+y)$ یک $g-$مربع است اگر و فقط اگر طول قطرهای آن مساوی و قطرها بر هم عمود باشند،*

(۴) *برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$،*

$$\left(x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right) \perp \left(x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right)(g).$$

برهان. اثبات (۱) به کمک رابطه‌ی ۱.۴ واضح است.
برای اثبات (۲) در رابطه‌ی ۱.۴ به جای x و y به‌ترتیب از $x+y$ و $x-y$ استفاده می‌کنیم، در نتیجه

$$\|۲x\|^۴ - \|۲y\|^۴ = ۸\big(\|x+y\|^۲ g(x+y, x-y) + \|x-y\|^۲ g(x-y, x+y)\big),$$

حال اگر $\|x\| = \|y\|$ آنگاه $(x-y) \perp (x+y)(g)$.
برای اثبات (۳) اگر $(\circ, x, y, x+y)$ یک $g-$ مربع باشد، آنگاه $x \perp y(g)$. بر طبق رابطه‌ی ۱.۴،

$$\|x+y\| = \|x-y\|.$$

بعلاوه بر طبق (۲) از این‌که $\|x\| = \|y\|$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x-y) \perp (x+y)(g).$$

برای اثبات عکس، طبق ۱.۴ و این‌که $\|x+y\| = \|x-y\|$ نتیجه می‌گیریم $x \perp y(g)$ و از رابطه‌ی ۱.۴ و $(x-y) \perp (x+y)(g)$ نتیجه می‌گیریم $\|x\| = \|y\|$.
برای اثبات (۴) کافی است در رابطه‌ی ۱.۴ به جای x و y به‌ترتیب از $x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y$ و $x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y$ استفاده کرد، در نتیجه

$$\circ = \left\|x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\|^۲ g\left(x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y, x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right) + \left\|x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\|^۲ g\left(x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y, x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right).$$

$\square$

نکته ۹.۴. *در هر فضای شبه ضرب داخلی چون X روابط زیر همواره درست هستند،*

$$x \perp^g y \;\Leftrightarrow\; \left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|, \tag{۱۷.۴}$$

$$x \perp y(g) \Leftrightarrow \|x+y\| = \|x-y\|. \tag{۱۸.۴}$$

رابطه‌ی ۱۷.۴ بدان معناست که تعامد $\perp^g$ معادل با تعامد سینگر است و هم‌چنین رابطه‌ی ۱۸.۴ نشان می‌دهد که تعامد $\perp(g)$ با تعامد متساوی‌الساقینی جیمز معادل است. یعنی می‌توان نوشت،

$$x \perp^g y \;\Leftrightarrow\; x \perp_S y, \tag{۱۹.۴}$$

$$x \perp y(g) \;\Leftrightarrow\; x \perp_J y. \tag{۲۰.۴}$$

در سال ۲۰۱۱ میلیسیک در [۴۹] قضیه‌ی زیر را ثابت کرد که با کمک تابعک g بین تعامد بیرخوف و سینگر و جیمز ارتباط ایجاد می‌کند.

قضیه ۱۰.۴. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و $x, y \in X\backslash\{۰\}$، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند،*

(a) $x \perp_S y \Leftrightarrow x \perp_B z$ *وقتی‌که*

$$z = g\left(y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right)x + y \in span\{x, y\}.$$

(b) $x \perp_J y \Leftrightarrow x \perp_B h$ *وقتی‌که*

$$h = \|x\|^۲ y + g\left(\|y\|^۲ y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right)x \in span\{x, y\}.$$

برهان. اثبات (a)

$$\begin{aligned} g(x,y)+g(y,x) &= g(x,y) + \|x\|^۲ g\left(y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right) \\ &= g(x,y) + g(x,x) g\left(y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right) \\ &= g\left(x, y + g\left(y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right)x\right) \\ &= g(x,z), \end{aligned}$$

به‌طوری‌که $z = g\left(y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right)x + y$، بنابراین

$$x \perp^g y \;\Leftrightarrow\; g(x,y)+g(y,x) = ۰ \;\Leftrightarrow\; g(x,z) = ۰,$$

از طرفی در هر فضای شبه ضرب داخلی،

$$x \perp_g y \;\Leftrightarrow\; x \perp_B z,$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$x \perp_S y \iff x \perp_B z.$$

اثبات (b)

$$\begin{aligned}\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x) &= \|x\|^۲ g(x,y) + \|x\|^۲ g\left(\|y\|^۲ y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right)\\ &= g(x, \|x\|^۲ y) + g\left(\|y\|^۲ y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right)\|x\|^۲\\ &= g(x,h),\end{aligned}$$

به‌طوری‌که $h = \|x\|^۲ y + g\left(\|y\|^۲ y, \frac{x}{\|x\|^۲}\right) x$. در نتیجه می‌توان گفت که،

$$x \perp y(g) \iff g(x,h) = ۰,$$

لذا نتیجه می‌گیریم،

$$x \perp_J y \iff x \perp_B h.$$

□

قضیه ۱۱.۴. *فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. اگر $x \perp^g y$، آنگاه*

(۱) $\min\{\, \|x\|, \|y\|\,\} \leq \|x+y\|$،

(۲) $\max\{\, \|x\|, \|y\|\,\} \leq ۲\|x+y\|$،

(۳) $(t > ۰) \quad \|x+ty\| \geq \|x\| + \frac{t}{\|x\|} g(x,y), \quad \|y\| > \|x+y\| \Rightarrow g(x,y) > ۰$.

برهان. اثبات (۱)

$$x \perp^g y \iff g(x,y) + \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + g(y,x) = \|x\|^۲ + \|y\|^۲,$$

در این‌صورت

$$g(x, x+y) + g(y, x+y) = \|x\|^۲ + \|y\|^۲, \tag{۲۱.۴}$$

در نتیجه طبق رابطه‌ی ۲۱.۴ نتیجه می‌گیریم که

$$\|x\|^۲ + \|y\|^۲ \leq \|x+y\|(\|x\| + \|y\|), \tag{۲۲.۴}$$

فرض کنید $\|x\| \leq \|y\|$ و $\|x\| \leq \|x+y\|$. در این‌صورت بر طبق رابطه‌ی ۲۲.۴،

$$\|x\|^۲ + \|y\|^۲ < \|x\|^۲ + \|x\|.\|y\|,$$

و این یعنی $\|y\| > \|x\|$، که این با فرض تناقض دارد.

اثبات (۲) فرض کنید $\|x\| \leq \|y\|$. بنابراین بر طبق ۲۲.۴،

$$\|y\|^۲ \leq \|x\|^۲ + \|y\|^۲ \leq \|x+y\|(\|x\| + \|y\|) \leq ۲\|y\|.\|x+y\|,$$

پس نتیجه می‌گیریم که، $\|y\| \leq ۲\|x+y\|$.

اثبات (۴)

$$\|y\| > \|x+y\| \;\Rightarrow\; \frac{\|x+y\| - \|y\|}{۱} < ۰, \tag{۲۳.۴}$$

در نتیجه بر طبق رابطه‌ی ۱۶.۳، $g(x,y) < ۰$ و چون $g(x,y) + g(y,x) = ۰$ در نتیجه $g(x,y) > ۰$ و بعلاوه بر طبق رابطه‌ی ۱۶.۳،

$$g(x,y) \leq \|x\| \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \;\Rightarrow\; \|x+ty\| \geq \|x\| + \frac{t}{\|x\|} g(x,y); \quad t > ۰.$$

□

قضیه ۱۲.۴. *فرض کنید X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$. اگر $x \perp y(g)$، در این‌صورت $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x \pm y\|$.*

برهان. فرض کنید $x, y \in X$ دو عضو ثابت دلخواه باشند. تابع $f(t) = \|x+ty\|$ را در نظر بگیرید. این تابع روی $\mathbb{R}$ محدب است. حال فرض کنید که $x \perp y(g)$ و $\|x\| > \|x+y\|$. بر طبق رابطه‌ی ۱۸.۴ نتیجه می‌گیریم، $f(-۱) = f(۱) < f(۰)$ و این با محدب بودن f در تناقض است. □

در قضیه‌ی بعد می‌خواهیم ثابت کنیم که $g-$ تعامد تعریف شده در فضاهای شبه ضرب داخلی به‌طور یکتا حل‌پذیر[۸] است، یعنی عدد یکتای $a \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر دو عضو ناصفر $x, y \in X$ داریم $x \perp (ax+y)(g)$. این قضیه نشان می‌دهد که $g-$تعامد در هر فضای شبه ضرب داخلی X یکتای راست است.

قضیه ۱۳.۴. *فرض کنید X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و $x \neq ۰, y \in X$. در این‌صورت عدد یکتای $a \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که $x \perp (ax+y)(g)$.*

[۸] uniquely solvable

برهان. اگر $x \perp y(g)$ آنگاه $a = 0$.
فرض کنید $x \not\perp y(g)$ در این‌صورت برای $x, y \in X\backslash\{0\}$ ثابت، تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید؛

$$f(t) = \|tx + y\|^2 g(tx + y, x) + \|x\|^2 g(x, tx + y),$$

بر طبق رابطه‌ی ۱.۴،

$$f(t) = \frac{1}{8}(\|(t + 1)x + y\|^4 - \|(t - 1)x + y\|^4),$$

بنابراین تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. از طرفی می‌توان نوشت،

$$g\left(x + \frac{y}{t}, x\right) = g\left(x + \frac{y}{t}, x + \frac{y}{t} - \frac{y}{t}\right) = \left\|x + \frac{y}{t}\right\|^2 - \frac{1}{t} g\left(x + \frac{y}{t}, y\right), \ (t \neq 0).$$

از روابط ۱۳.۳ و ۱۴.۳،

$$f(t) = t^3 \left\|x + \frac{y}{t}\right\|^4 - t^2 \left\|x + \frac{y}{t}\right\|^2 g\left(x + \frac{y}{t}, y\right) + t\|x\|^4 + \|x\|^2 g(x, y), \ (t \neq 0). \tag{۲۴.۴}$$

چون X هموار است بر طبق [۳۱]،

$$\lim_{t \to \pm\infty} g\left(x + \frac{y}{t}, y\right) = g(x, y),$$

بنابراین طبق ۲۴.۴ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = \pm\infty.$$

بنابراین $a \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که $f(a) = 0$ یا $x \perp (ax + y)(g)$. برای اثبات یکتایی اگر $a' \neq a$ موجود باشد به‌طوری‌که $x \perp (a'x + y)(g)$. بر طبق ۱.۴،

$$\begin{aligned} &\|(a + 1)x + y\| = \|(a - 1)x + y\|, \\ &\|ax + y\|^2 g(ax + y, x) + \|x\|^2 g(x, ax + y) = 0. \end{aligned} \tag{۲۵.۴}$$

$$\begin{aligned} &\|(a' + 1)x + y\| = \|(a' - 1)x + y\|, \\ &\|a'x + y\|^2 g(a'x + y, x) + \|x\|^2 g(x, a'x + y) = 0. \end{aligned} \tag{۲۶.۴}$$

در این‌صورت برای a و a' یکی از دو حالت زیر ممکن است اتفاق بیافتد،

$$[a' - 1, a' + 1] \subset [a - 1, a + 1], \quad ([a - 1, a + 1] \subset [a' - 1, a' + 1])$$

در این حالت $a = a'$ زیرا $(a+۱) - (a-۱) = ۲$.
اگر این حالات را نداشتیم، قرار دهید؛

$$\alpha = \min\{a' - ۱, a - ۱\}, \qquad \beta = \max\{a' + ۱, a + ۱\}.$$

پس طبق محدب بودن تابع $f(t) = \|y+tx\|$ نتیجه می‌گیریم که تابع f روی بازه‌ی $[\alpha, \beta]$ ثابت است و بنابراین تابع f برای هر $t \in [\alpha, \beta]$ مینیمم خود را اختیار می‌کند. از طرفی چون فضای X هموار است، در این‌صورت $f'(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ موجود است و برای هر $t \in (\alpha, \beta)$ داریم $f'(t) = ۰$. بعلاوه برای هر $t \in (\alpha, \beta)$ داریم $x \perp_B tx + y$ و بنابراین برای هر $t \in (\alpha, \beta)$، $g(tx + y, x) = ۰$. از آنجاییکه $a, a' \in (\alpha, \beta)$ طبق روابط ۲۵.۴ و ۲۶.۴،

$$a = a' = -\frac{g(x, y)}{\|x\|^۲}.$$

□

حال فرض کنید $P_{[x]}(y)$ بهترین تقریب بردار y نسبت به زیرفضای تولید شده توسط x باشد. بعلاوه اگر $x \perp (ax + y)$ آنگاه $(-ax)$ را تصویر بردار y بر روی بردار x نسبت به تعامد $\perp$ می‌گوییم. در قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین این تصویر و $P_{[x]}(y)$ را پیدا می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۴. *اگر X یک فضای هموار باشد و $x \perp (ax + y)$ به‌طوری‌که $\perp \in \{\perp_g, \perp^g, \perp (g)\}$. آنگاه $(-ax) \in P_{[x]}(y)$ اگر و فقط اگر*

$$a = -\frac{g(x, y)}{\|x\|^۲}. \tag{۲۷.۴}$$

برهان. فرض کنید $x \perp (ax + y)(g)$ و $-ax \in P_{[x]}(y)$. در این‌صورت به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ نتیجه می‌گیریم که $\|y + ax\| \leq \|y - \lambda x\|$. بنابراین برای هر $t \in \mathbb{R}$،

$$\|y + ax\| \leq \|y + ax + tx\|.$$

و این یعنی $x \perp_B (y + ax)$، پس $g(ax + y, x) = ۰$. حال چون $x \perp (ax + y)(g)$، بنابراین

$$\|ax + y\|^۲ g(ax + y, x) + \|x\|^۲ g(x, ax + y) = ۰,$$

در نتیجه

$$\|x\|^۲ g(x, ax + y) = ۰ \Rightarrow \|x\|^۲ g(x, ax) + \|x\|^۲ = ۰,$$

پس

$$a = -\frac{g(x, y)}{\|x\|^۲}.$$

حال فرض کنید $x \perp (ax+y)(g)$ و رابطه‌ی ۲۷.۴ را داشته باشیم، پس

$$g(ax+y,x)=\circ \;\Leftrightarrow\; (ax+y)\perp_B x \Leftrightarrow \|ax+y\|\leq \|ax+y+tx\|$$
$$\Leftrightarrow \|y-(-ax)\|\leq \|y-\lambda x\|, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

لذا نتیجه می‌گیریم $(-ax)\in P_{[x]}(y)$. اثبات بقیه‌ی حالات نیز بهمین طریق است. □

در انتهای این بخش به دنبال پاسخ به این سوال هستیم که چه وقت یک فضای شبه ضرب داخلی یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۱۵.۴. *فضای شبه ضرب داخلی X یک فضای ضرب داخلی است اگر شرط زیر روی X برقرار باشد،*

$$\|x+y\|=\|x-y\| \;\Leftrightarrow\; g(x,y)=\circ. \tag{۲۸.۴}$$

برهان. اگر X یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $\langle .,.\rangle$ باشد، در این‌صورت برای هر $x,y\in X$،

$$g(x,y)=g(y,x)=\langle x,y\rangle,$$

بنابراین روابط ۱.۴ و ۲۸.۴ برقرارند.
حال فرض کنید روابط ۱.۴ و ۲۸.۴ برقرار باشند. از رابطه‌ی ۲۸.۴ برای هر $x,y\in X$ و $t\in\mathbb{R}$،

$$\|x+ty\|^۴-\|x-ty\|^۴=۸t\big(\|x\|^۲g(x,y)+t^۲\|y\|^۲g(x,y)\big). \tag{۲۹.۴}$$

حال فرض کنید $\|x+y\|=\|x-y\|$. پس از ۲۸.۴ و ۲۹.۴ نتیجه می‌گیریم، $g(x,y)=\circ$ و بنابراین $g(x,y)=g(y,x)=\circ$. بنابراین بر طبق رابطه‌ی ۲۹.۴ برای هر $t\in\mathbb{R}$ داریم $\|x+ty\|=\|x-ty\|$. یعنی X یک فضای شبه ضرب داخلی است بطوریکه در آن برای هر $x,y\in X$ و $t\in\mathbb{R}$،

$$\|x+y\|=\|x-y\|\Rightarrow \|x+ty\|=\|x-ty\|,$$

پس بر طبق تذکر ۶.۱، فضای X یک فضای ضرب داخلی باشد. □

۴.۴ بهترین تقریب و $g-$ تعامد در فضاهای باناخ هموار و به‌طور یکنواخت محدب

به عنوان کاربردی از $g-$تعامد در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ی بین $g-$تعامد و بهترین تقریب در هر فضای باناخ هموار و به‌طور یکنواخت محدب را بیابیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم اولاً نشان دهیم بردار ax بهترین تقریب بردار y نسبت به زیر فضای تولید شده توسط x است اگر و فقط اگر $g(y-ax,x)=\circ$.

ثانیاً در فضاهای باناخ خاصی می‌خواهیم این معادله را حل کنیم و مقادیر a را بیابیم و در انتهای بخش بهترین تقریب y را نسبت به زیرفضای M یعنی $P_M(y)$ بدست می‌آوریم. در این بخش از منبع [۴۸] استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۴. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $K \subset X$، مجموعه‌ی همه‌ی بهترین تقریب‌های از $x \in X$ به K را با نماد $P_K(x)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$P_K(x) := \{ y \in K; \quad \|x-y\| = d(x,K) \}.$$

لم ۱.۴. *اگر X یک فضای هموار باشد و $x, y \in X$ در این‌صورت ادعاهای زیر درست هستند،*

(i) *برای هر* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$،

$$g(\alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha x+\beta y\|^2 = \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'} g(\alpha x+\beta y, y),$$

(ii) *برای هر* $\beta, \beta' \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$،

$$g(\alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha x+\beta y\|^2 = \frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\beta'} g(\alpha x+\beta y, x).$$

برهان. بر طبق ویژگی‌های تابعک g ثابت می‌کنیم، پس

$$\begin{aligned}
g(\alpha x+\beta y, \alpha' x+\beta' y) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} g(\alpha x+\beta y, \alpha x+\frac{\alpha\beta'}{\alpha'} y) = 0\\
&\Leftrightarrow g(\alpha x+\beta y, \alpha x+\frac{\alpha\beta'}{\alpha'} y+\beta y-\beta y) = 0\\
&\Leftrightarrow g(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y+\frac{\alpha\beta'}{\alpha'} y-\beta y) = 0\\
&\Leftrightarrow g(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y)+g(\alpha x+\beta y, -(\beta-\frac{\alpha\beta'}{\alpha'})y) = 0\\
&\Leftrightarrow \|\alpha x+\beta y\|^2 - \left(\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'}\right) g(\alpha x+\beta y, y) = 0\\
&\Leftrightarrow \|\alpha x+\beta y\|^2 = \left(\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'}\right) g(\alpha x+\beta y, y).
\end{aligned}$$

□

قضیه ۱۶.۴. *فرض کنید X یک فضای نرم‌دار هموار و به‌طور یکنواخت محدب باشد و $x, y \in X\backslash\{0\}$ دو بردار مستقل خطی ثابت باشند، در این‌صورت عدد یکتای $a \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که،*

$$\begin{aligned}
P_{[x]}y = ax &\Leftrightarrow g(y-ax, x) = 0,\\
&\Leftrightarrow \|y-ax\|^2 = g(y-ax, y), \quad sgn\, a = sgn\, g(y,x).
\end{aligned}$$

برهان. فرض کنید $P_{[x]}y = ax$. چون X یک فضای هموار و به‌طور یکنواخت محدب است، لذا برای هر $x, y \in X\backslash\{\circ\}$، تابع حقیقی مقدار $f(t) = \|y - tx\|$ پیوسته است و مینیمم یکتای خودش را در نقطه‌ی $t = a$ اختیار می‌کند. از طرفی بر طبق تعریف تابعک g،

$$\begin{aligned} f^{'}(t) &= \lim_{h\to\circ} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to\circ} \frac{\|y - (t+h)x\| - \|y - tx\|}{h} \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{\|y - tx - hx\| - \|y - tx\|}{h} = -\frac{g(y - tx, x)}{\|y - tx\|}. \end{aligned}$$

چون $f(a) = \min_{t\in\mathbb{R}}\left[f(t)\right]$ و f مشتق پذیر است. در نتیجه $f^{'}(a) = \circ$ پس $g(y - ax, x) = \circ$ حال طبق لم ۱.۴،

$$g(y - ax, x) = \circ \iff \|y - ax\|^{۲} = g(y - ax, y).$$

برعکس، اگر $a \in \mathbb{R}$ باشد که $g(y - ax, x) = \circ$ در این‌صورت برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $g(y - ax, \lambda x) = \circ$. و بر طبق ویژگی‌های تابعک g و هر $\lambda \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} g(y - ax, \lambda x) = \circ &\Rightarrow \|y - ax\|^{۲} + g(y - ax, \lambda x) = \|y - ax\|^{۲} \\ &\Rightarrow g(y - ax, y - ax + \lambda x) = \|y - ax\|^{۲} \\ &\Rightarrow \|y - ax\|^{۲} = g(y - ax, y - ax + \lambda x) \le \|y - ax\|.\|y - ax + \lambda x\| \\ &\Rightarrow \|y - ax\| \le \|y - (a - \lambda)x\|. \end{aligned}$$

پس $\min_{t\in\mathbb{R}}\left[f(t)\right] = f(a)$. $\square$

در مثال‌های زیر می‌خواهیم در مورد حل‌پذیری معادله‌ی $g(y - ax, x) = \circ$ در حالت‌های خاص بحث کنیم.

مثال ۱۱.۴. فضای باناخ $X = l^{۴}$ را که هموار و به طور یکنواخت است را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف تابعک g در این فضا داریم:

$$g(x, y) = \|x\|^{-۲} \sum_i x_i^{۳} y_i; \quad x = (x_۱, x_۲, \cdots),\ y = (y_۱, y_۲, \cdots) \in l^{۴}\backslash\{\circ\}.$$

بنابراین بر طبق قضیه‌ی ۱۶.۴،

$$\begin{aligned} g(y - ax, x) = \circ &\iff \|y - ax\|^{-۲} \sum_i (y_i - ax_i)^{۳} x_i = \circ \\ &\iff \sum_i (y_i - ax_i)^{۳} x_i = \circ \\ &\iff \sum_i y_i^{۳} x_i - ۳a \sum_i y_i^{۲} x_i^{۲} + ۳a^{۲} \sum_i y_i x_i^{۳} - a^{۳} \sum_i x_i^{۴} = \circ. \end{aligned}$$

از آنجایی‌که معادله‌ی فوق یک معادله‌ی درجه‌ی سوم برحسب a است و فضای X به‌طور یکنواخت محدب است لذا این معادله دارای جواب یکتا برای a است.

نکته ۱۲.۴. *اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه $g(x,y)=\langle x,y\rangle$ و لذا داریم:*

$$\begin{aligned} g(y-ax,x)=\circ &\Rightarrow \langle y-ax,x\rangle=\circ \Rightarrow \langle y,x\rangle - a\langle x,x\rangle=\circ \\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle - a\|x\|^{\text{۲}}=\circ \Rightarrow a=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^{\text{۲}}} \\ &\Rightarrow P_{[x]}(y)=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^{\text{۲}}}x. \end{aligned}$$

نتیجه ۵.۴. *فرض کنید X یک فضای هموار و به‌طور یکنواخت محدب باشد و $x,y\in X\backslash\{\circ\}$ مستقل خطی باشند و $p=\{tx+(\text{۱}-t)y;\ t\in\mathbb{R}\}$. در این‌صورت بردار $ax+(\text{۱}-a)y$ یکتا بهترین تقریب بردار z نسبت به بردارهای p است اگر و فقط اگر $g\big(z-y-a(x-y)\,,\,x-y\big)=\circ$.*

برهان. کافی است قرار دهید $f(t)=\|z-(tx+(\text{۱}-t)y)\|=\|z-y-t(x-y)\|$ و از قضیه‌ی ۱۶.۴ استفاده کنید. □

نتیجه ۶.۴. *اگر X یک فضای هموار و $x,y\in S(X)$ مستقل خطی باشند، در اینصورت X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر $g(x+y,x-y)=\circ$.*

نکته ۱۳.۴. *فرض کنید $H=\{t\in X;\ g\big(z-y-a(x-y)\,,\,t\big)=\circ\}$ که H یک ابرصفحه در X و $x-y\in H$. در این‌صورت*

$$d(z,H)=\frac{g\big(z-y-a(x-y)\,,\,z-y\big)}{\|z-y-a(x-y)\|},$$

و این بدان معناست که

$$d(z,p)=d(z,H)=\|z-y-a(x-y)\|.$$

و لذا $P_{[p]}(z)=P_H(z)$.

قضیه ۱۷.۴. *اگر X یک فضای هموار باشد و $x,y\in X\backslash\{\circ\}$ مستقل خطی باشند، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند،*

(i) $sgn(a)=sgn(g(x,y))$،

(ii) $a\geq \dfrac{g(x,y)-\|x\|\|y\|}{\|x\|^{\text{۲}}}$،

(iii) $a=\dfrac{g(x,y)}{\|x\|^{\text{۲}}}$ اگر و فقط اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد،

(iv) $\left|a-\dfrac{g(x,y)}{\|x\|^{\text{۲}}}\right|\leq\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$.

برهان. (i) بر طبق قضیه‌ی ۱۶.۴ داریم $a=0$ اگر و فقط اگر $g(y,x)=0$. اگر $g(y,x)\neq 0$ آنگاه

$$g(y,y-ax)=g(y,y)-ag(y,x)=\|y\|^2-ag(y,x)$$
$$\leq \|y\|.\|y-ax\|\leq \|y\|^2 \Rightarrow ag(y,x)>0.$$

(ii)

$$g(x,y-ax)=g(x,y)-a\|x\|^2\leq \|x\|.\|y-ax\|\leq \|x\|.\|y\|$$
$$\Rightarrow a\|x\|^2\geq g(x,y)-\|x\|.\|y\|.$$

(iii) اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد در این‌صورت $a=\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}$ لذا $a=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$. بر عکس فرض کنید برای هر $x,y\in X\backslash\{0\}$،

$$P_{[x]}(y)=a(x,y)=\frac{g(x,y)}{\|x\|^2},$$

در این‌صورت

$$a(x,\alpha y)=\frac{g(x,\alpha y)}{\|x\|^2}=\alpha a(x,y)\quad \alpha\in\mathbb{R},$$
$$a(x,y_1+y_2)=\frac{g(x,y_1+y_2)}{\|x\|^2}=\frac{g(x,y_1)}{\|x\|^2}+\frac{g(x,y_2)}{\|x\|^2},$$

در نتیجه

$$P_{[x]}(\alpha y)=\alpha P_{[x]}(y)\quad ,\quad \alpha\in\mathbb{R},$$
$$P_{[x]}(y_1+y_2)=P_{[x]}(y_1)+P_{[x]}(y_2)\quad y_1,y_2\in X\backslash\{0\}. \tag{۳۰.۴}$$

در این‌صورت بر طبق ۳۰.۴ و ادعای ۱۳.۲ در [۱۲] می‌توان نتیجه گرفت که X یک فضای ضرب داخلی است.

(iv) اگر $H=\{\,z\in X;\ g(y-ax,z)=0\,\}$ یک ابرصفحه باشد، آنگاه $h\in H$ و $\lambda\in\mathbb{R}$ موجود است که $y-\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}x=\lambda(y-ax)+h$. بنابراین

$$g\left(y-ax,y-\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}x\right)=\lambda\|y-ax\|^2,$$

در نتیجه داریم:

$$g(y-ax,y)-\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}g(y-ax,x)=\lambda\|y-ax\|^2,$$

پس $\|y-ax\|^2=\lambda\|y-ax\|^2$. بنابراین اگر $\lambda=1$ آنگاه،

$$h=\left(a-\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}\right)x,\quad y-\frac{g(x,y)}{\|x\|^2}x=y-ax+h.$$

چون $g\left(x, y-\frac{g(x,y)}{\|x\|^۲}x\right)=۰$ لذا $g(h, y-ax)-\|h\|^۲=۰$. پس

$$\left|a-\frac{g(x,y)}{\|x\|^۲}\right|^۲\|x\|^۲\leq\left|a-\frac{g(x,y)}{\|x\|^۲}\right|\|x\|\|y-ax\|\leq\left|a-\frac{g(x,y)}{\|x\|^۲}\right|\|x\|\|y\|.$$

لذا (iv) درست است. □

نتیجه ۷.۴. *اگر X هموار و $z=y-\frac{g(x,y)}{\|x\|^۲}x$ باشد، آنگاه* $P_{[z]}(y)=۱$.

برهان. اگر $g(x,y)=۰$ آنگاه $z=y$ در نتیجه $P_{[z]}(y)=۱$. فرض کنید $g(x,y)\neq ۰$ قرار دهید $x=\frac{y-z}{g(x,y)}$. چون $g\left(x, y-\frac{g(x,y)}{\|x\|^۲}\right)=۰$، بنابراین طبق قضیه‌ی ۱۶.۴، $P_{[z]}(y)=۱$. □

قضیه ۱۸.۴. *اگر X یک فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب و هموار باشد و $e_۱,e_۲,\dots,e_n\in S(X)$ مستقل خطی باشند، قرار دهید $M:=\mathit{span}\{e_۱,e_۲,\dots,e_n\}$، آنگاه*

$$P_M(y)=\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k \quad\Leftrightarrow\quad g\left(y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k, e_i\right)=۰,\quad i=۱,۲,\dots,n$$

و این سیستم از معادلات دارای جواب یکتای $a=(a_۱,a_۲,\dots,a_n)$ است.

برهان. چون X یک فضای باناخ هموار و به‌طور یکنواخت محدب است تابع حقیقی

$$f(t_۱,t_۲,\dots,t_n)=\|y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k\|,$$

مینیمم خودش را در نقطه‌ی یکتای $a=(a_۱,a_۲,\dots,a_n)$ اختیار می‌کند و برای هر $i=۱,۲,\dots,n$ مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial t_i}(a_۱,a_۲,\dots,a_n)$ موجود است لذا داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t_i}(a_۱,a_۲,\dots,a_n)=۰\\ &\frac{\partial f}{\partial t_i}(t_۱,t_۲,\dots,t_n)=\lim_{h_i\to\infty}\frac{\|y-\sum_{k=۱}^{n}t_ke_k-h_ie_i\|-\|y-\sum_{k=۱}^{n}t_ke_k\|}{h_i}\\ &\qquad=-\frac{g(y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k,e_i)}{\|y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k\|},\end{aligned}$$

پس

$$g\left(y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k, e_i\right)=۰,$$

و این سیستم از معادلات دارای جواب یکتا است.

بر عکس فرض کنید $g\left(y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k,e_i\right)=۰$. در این‌صورت برای هر $\lambda_i\in\mathbb{R}$،

$$g\left(y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k,\lambda_ie_i\right)=۰\Rightarrow g\left(y-\sum_{k=۱}^{n}a_ke_k,\sum_{i=۱}^{n}\lambda_ie_i\right)=۰,$$

چون $x_\circ = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \in M$ و $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in M$، آنگاه برای هر $x \in M$،

$$g(y - x_\circ, x) = \circ \;\; \Rightarrow \;\; P_M(y) = x_\circ.$$

$\square$

فصل ۵

تعامد بیرخوف و زاویه

۱.۵ مقدمه

در فصل دوم به‌طور مفصّل با مفهوم تعامد بیرخوف آشنا شدیم، در آنجا ثابت کردیم که در هر فضای خطی نرم‌دار اکیداً محدب، تعامد بیرخوف از چپ یکتاست، یعنی برای هر $x, y \in X$، عدد حقیقی a موجود است به‌طوری‌که $(ax + y) \perp_B x$. هم‌چنین در فصل سوم و چهارم با مفهوم $g-$ زاویه و در نتیجه‌ی آن با $g-$ تعامد آشنا شدیم، در این فصل می‌خواهیم به کمک خاصیت یکتایی چپ تعامد بیرخوف تعریفی از $B-$ زاویه بین دو بردار ناصفر، در یک فضای خطی نرم‌دار هموار و به‌طور یکنواخت محدب ارائه می‌دهیم. هم‌چنین تعریف دیگری از $g-$ زاویه بین دو بردار ناصفر در فضاهای شبه ضرب داخلی ارائه می‌دهیم، بعلاوه در این فصل $g-$ زاویه جهت‌دار و $B-$زاویه‌ی جهت‌دار بین دو بردار ناصفر را معرفی می‌کنیم، و از همه مهم‌تر برای تعریف این زوایا از مفهوم بهترین تقریب نیز استفاده می‌شود. در ادامه‌ی بحث به عنوان کاربردی از این زوایا ثابت می‌کنیم که $g-$ زاویه‌ی جهت‌دار و بدون جهت در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، در هر فضای شبه ضرب داخلی برابر با $\frac{\pi}{۳}$ است و در انتهای این فصل ثابت می‌کنیم که $g-$ زاویه‌ی بدون جهت بین یک ضلع و یک قطر در هر $g-$ مربع برابر با $\frac{\pi}{۴}$ است و این‌ها نقاط مشترکی بین فضای ضرب داخلی و فضای شبه ضرب داخلی است. در این فصل از منابع [۳۱، ۴۵، ۴۳] استفاده می‌شود بجز در مواقعی که به روشنی منبع مشخص شده باشد.

۲.۵ $B-$ زاویه و $g-$ زاویه در فضاهای خطی نرم‌دار حقیقی

ابتدا این بخش را با قضیه‌ای شروع می‌کنیم که رابطه‌ی بین تعامد بیرخوف و $g-$ تعامد را مشخص می‌کند، سپس برخی دیگر از ویژگی‌های دیگر تعامد بیرخوف را به کمک $g-$ تعامد بیان می‌کنیم. در قضایای زیر منظور از $P_{[x]}y$ مجموعه‌ی بهترین تقریب بردار y نسبت به زیر فضای تولید شده توسط x است. ابتدا بخش را با یک تعریف و چند لم که در اثبات قضیه‌ی ۱.۵ کاربرد دارد، شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۵. برای هر $x \in X\backslash\{0\}$،

$$I_x := \{\ f \in X^*; \quad f(x) = \|f\|.\|x\|,\ \|f\| = \|x\|\ \}.$$

لم ۱.۵. *برای هر* $x \in \backslash\{0\}$ *و هر* $y \in X$، $f \in I_x$ *موجود است به‌طوری‌که* $f(y) = g(x, y)$.

برهان. برای اثبات به [۴۳] مراجعه کنید. □

لم ۲.۵. *فرض کنید* $[.,.]$ *یک نیم‌ضرب داخلی روی* X^2 *باشد،* X *هموار است اگر و فقط اگر داشته باشیم*

$$[y, x] = 0 \Leftrightarrow x \perp_B y.$$

برهان. برای اثبات به [۴۳] مراجعه کنید. □

لم ۳.۵. (۱) *برای هر* $x, y \in X$ *و هر* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$،

$$g(x, \lambda x + \mu y) = \lambda\|x\|^2 + \mu g(x, y).$$

(۲) *اگر تابعک* $g(x, .)$ *برای هر* $x \in X\backslash\{0\}$ *جمع‌پذیر باشد، آنگاه تابعک* $[y, x] := g(y, x)$ *یک نیم‌ضرب داخلی روی* X^2 *است.*

برهان. برای اثبات به [۴۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۵. *فضای خطی نرم‌دار* X *هموار است اگر و فقط اگر برای هر* $x, y \in X\backslash\{0\}$، *داشته باشیم*

$$x \perp_g y \ \Leftrightarrow\ x \perp_B y. \tag{۱.۵}$$

برهان. ابتدا فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار هموار باشد، در این‌صورت I_x برای هر $x \neq 0$ تک عضوی است. همچنین بر طبق لم ۱.۵ تابعک یکتای $f \in I_x$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $y \in X$، $f(y) = g(x, y)$. بر طبق لم ۳.۵ تابعک $[y, x] := g(y, x)$ یکتا نیم‌ضرب داخلی روی X^2 است. حال با استفاده از لم ۲.۵ نتیجه می‌گیریم ۱.۵ برقرار است.
فرض کنید ۱.۵ برقرار باشد و f عضویی ثابت از I_x باشد، آنگاه $x \perp_B \ker(f)$ و با کمک ۱.۵ نتیجه می‌گیریم که $x \perp_g \ker(f)$. این بدان معناست که $\ker(f) \subset \ker(g(x, .))$. حال اگر $y \in \ker(g(x, .))$ موجود باشد که $y \notin \ker(f)$ آنگاه

$$y = \lambda x + h; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad h \in \ker(f),$$

در نتیجه بر طبق لم ۳.۵،

$$0 = g(x, y) = g(x, \lambda x + h) = \lambda\|x\|^2 + g(x, h) = \lambda\|x\|^2,$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $y = h \in \ker(f)$ و $\lambda = ۰$. که این با $y \notin \ker(f)$ تناقض دارد. بنابراین $\ker(g(x,.)) \subset \ker(f)$ و در نتیجه $\ker(g(x,.)) = \ker(f)$. از طرفی $g(x,x) = \|x\|^۲ = f(x)$. پس می‌توان گفت که $g(x,.) = f$. از طرفی $[y,x] = g(y,x)$ یک نیم‌ضرب داخلی است. بنابراین

$$[y,x] = ۰ \quad \Leftrightarrow \quad x \perp_B y,$$

در نتیجه بر طبق لم ۲.۵، فضای X هموار است. $\square$

قضیه ۲.۵. *فرض کنید X یک فضای نرم‌دار هموار و به‌طور یکنواخت محدب باشد و $x,y \in X\backslash\{۰\}$ دو بردار مستقل خطی ثابت باشند، در این‌صورت گزاره‌های زیر درست هستند.*

(۱) *اگر $z \in \mathrm{span}\{x,y\}$ و $y \perp_B x$ و $z \perp_B x$، آنگاه $\lambda \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که $z = \lambda y$،*

(۲) *اگر $x \perp_B (y-\alpha x)$ و $x \perp_B (y-\beta x)$ آنگاه $\alpha = \beta$.*

برهان. (۱) چون X یک فضای هموار است، پس

$$y \perp_B x\,,\; z \perp_B x \;\; \Leftrightarrow \;\; g(y,x) = ۰\,,\; g(z,x) = ۰,$$

حال چون $z \in \mathrm{span}\{x,y\}$ بنابراین $x = \alpha y + \beta z$. پس

$$g(y, \alpha y + \beta z) = ۰\,,\; g(z, \alpha y + \beta z) = ۰,$$

در نتیجه به دستگاه معادلات زیر دست پیدا می‌کنیم

$$\alpha\|y\|^۲ + \beta g(y,z) = ۰,$$
$$\alpha g(z,y) + \beta\|z\|^۲ = ۰.$$

این دستگاه دارای جواب نابدیهی برای هر α و β است اگر و فقط اگر

$$g(y,z)g(z,y) = \|y\|^۲\|z\|^۲ \Leftrightarrow |g(y,z)|.|g(z,y)| = \|y\|^۲\|z\|^۲, \tag{۲.۵}$$

در این‌صورت $|g(y,z)| = \|y\|.\|z\|$. چون اگر $|g(y,z)| < \|y\|.\|z\|$، در این‌صورت تساوی ۲.۵ درست نیست. پس طبق لم ۶.۱ نتیجه می‌گیریم که $\lambda \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که $z = \lambda y$.

برای اثبات (۲) بر طبق (۱)،

$$g(x, y-ax) = ۰\,,\; g(x, y-\beta x) = ۰ \Leftrightarrow g(x,y) - \alpha\|x\|^۲ = ۰$$

بنابراین $g(x,y) - \beta\|x\|^۲ = ۰$. و در نتیجه $\alpha = \beta$. $\square$

حال به دنبال چند تعریف از زوایا در فضای نرم‌دار هموار X هستیم. بر طبق ویژگی ۱۵.۳ تابعک g،

$$-۱ \leq \frac{\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x)}{\|x\|.\|y\|(\|x\|^۲ + \|y\|^۲)} \leq ۱. \tag{۳.۵}$$

تعریف ۲.۵. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار حقیقی هموار باشد و $x, y \in X \backslash \{\circ\}$، در این‌صورت $g-$ زاویه بین این دو بردار را بر طبق رابطه‌ی ۳.۵ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\angle_g(x, y) := \arccos\left[\frac{\|x\|^{۲} g(x, y) + \|y\|^{۲} g(y, x)}{\|x\|.\|y\|(\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲})}\right]. \qquad (۴.۵)$$

این زاویه دارای ویژگی‌های زیر است،

$$(۱)\ \angle_g(x, y) = \angle_g(y, x),$$

$$(۲)\ \angle_g(\lambda x, \lambda y) = \angle_g(x, y); \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

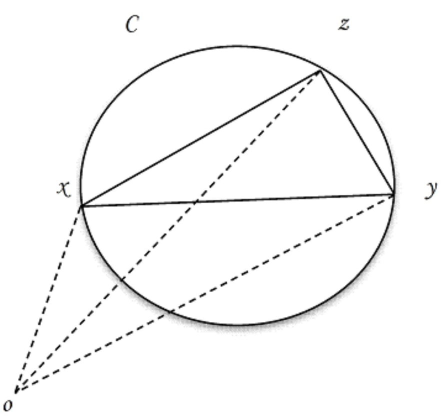
$$(۳)\ x \perp y(g) \Leftrightarrow \cos\angle_g(x, y) = \circ \Leftrightarrow \angle_g(x, y) = \frac{\pi}{۲}.$$

قضیه ۳.۵. *اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، آنگاه گزاره‌های زیر درست هستند،*

(a) *$g-$ زاویه روی قطر دایره $g-$ قائمه است، یعنی اگر C دایره‌ای در زیرفضای تولید شده توسط بردارهای x و y باشد که مرکز آن $\frac{x+y}{۲}$ و شعاع آن $\frac{\|x-y\|}{۲}$ باشد آنگاه،*

$$z \in C \Rightarrow (x - z) \perp (y - z)(g),$$

(b) *مرکز دایره‌ی محیطی حول مثلث $g-$ قائم‌الزاویه، برابر با وسط وتر مثلث $g-$ قائم‌الزاویه است.*



شکل ۱.۵: دایره‌ی محیطی

برهان. با توجه به شکل ۱.۵ گزاره‌های بالا را ثابت می‌کنیم.
(a) اگر $z \in C$ آنگاه $\frac{\|x-y\|}{۲} = \|z - \frac{x+y}{۲}\|$، یعنی $\|x - y\| = \|۲z - (x + y)\|$. پس می‌توان نوشت که $\|x - z - (y - z)\| = \|x - z + y - z\|$ و این یعنی $(x - z) \perp_J (y - z)$، از طرفی در هر فضای شبه ضرب داخلی،

$$(x - z) \perp_J (y - z) \Leftrightarrow (x - z) \perp (y - z)(g).$$

(b) فرض کنید C دایره‌ای باشد که به صورت $\frac{\|x-y\|}{2} = \|z - \frac{x+y}{2}\|$ با فرض اینکه $x \perp y(g)$ تعریف شود، لذا $\|x-y\| = \|x+y\|$ در نتیجه $0 \in C$ است. $\square$

حال به کمک تعامد بیرخوف، $B-$ زاویه‌ی جهت‌دار بین دو بردار ناصفر x و y را در فضای هموار و به‌طور یکنواخت محدب X معرفی می‌کنیم. به‌این منظور ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۴.۵. *فرض کنید X یک فضای هموار و به‌طور یکنواخت محدب باشد و $x, y \in X\backslash\{0\}$ دو بردار مستقل خطی باشند. در این‌صورت عدد حقیقی یکتای $\tau = \tau(x,y)$ موجود است به‌طوری‌که $\|y\| = \|y - \tau x\|$. و اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و y بر x متعامد بیرخوف نباشد، آنگاه عدد حقیقی یکتای p موجود است به‌طوری‌که، $(y-px) \perp px(g)$.*

برهان. تابع حقیقی مقدار f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$f(t) = \|y - tx\|; \qquad x, y \in X\backslash\{0\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

چون X یک فضای هموار و بهطور یکنواخت محدب است، لذا عدد یکتای $a = a(x,y)$ موجود است به‌طوری‌که

$$\min_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f(a) = \|y - ax\|, \quad g(y-ax, x) = 0, \ sgn\, a = sgn\, g(y,x). \tag{۵.۵}$$

از طرفی تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و محدب است، بنابراین بر طبق شکل ۲.۵، عدد یکتای $\tau = \tau(x,y) \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که

$$f(a) < \|y\| = \|y - \tau x\|,$$

اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، قرار می‌دهیم $p = \frac{\tau}{2}$ آنگاه $\|y - 2px\| = \|y\|$، بنابراین

$$\|(y-px) + px\| = \|(y-px) - px\|,$$

و این یعنی

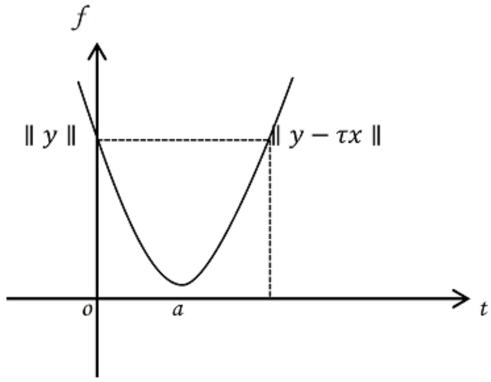
$$(y-px) \perp_J px \ \Leftrightarrow \ (y-px) \perp px(g).$$

در این حالت می‌توان نوشت، $P_x^g(y) = px$. از طرفی چون $\|y - 2px\| = \|y\|$، پس $\|px\| \leq \|y\|$. هم‌چنین طبق ۵.۵ و شکل ۲.۵،

$$0 < a < \tau \ \Leftrightarrow \ g(y,x) > 0, \quad \tau < a < 0 \ \Leftrightarrow \ g(y,x) < 0. \tag{۶.۵}$$

بنابراین با توجه به $\|y - \tau x\| = \|y\|$ نتیجه می‌گیریم $\|y\| \leq \|\tau x\| - \|y\|$. پس

$$\frac{\|\tau x\|}{2} \leq \|y\|. \tag{۷.۵}$$



شکل ۲.۵: نمودار

فرض کنید $g(y, x) > ۰$. اگر $a < \frac{\tau}{۲}$، آنگاه بر طبق ۵.۵ داریم، $\|ax\| \leq \frac{\|\tau x\|}{۲} \leq \|y\|$. اگر $a \geq \frac{\tau}{۲}$، آنگاه $\tau - a \leq \frac{\tau}{۲}$ و

$$\|(\tau - a)x\| \leq \frac{\|\tau x\|}{۲} \leq \|y\|.$$

بنابراین $\min\{a, \tau - a\} \leq \frac{\tau}{۲}$. البته اگر $g(y, x) < ۰$، آنگاه $\min\{|a|, |\tau - a|\} \leq \frac{|\tau|}{۲}$. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$-۱ \leq \frac{\|kx\|}{\|y\|} sgn\, g(y, x) \leq ۱, \quad x, y \in X\backslash\{۰\}\,;$$
$$k = \min\{|a|, |\tau - a|\}, \quad k = k(x, y). \tag{۸.۵}$$

□

حال رابطه‌ی ۸.۵ و خواص تعامد بیرخوف را در نظر بگیرید، می‌خواهیم $B-$زاویه‌ی جهت‌دار بین دو بردار x و y را تعریف کنیم.

تعریف ۳.۵. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار هموار و به‌طور یکنواخت محدب باشد، عدد

$$\cos_B \overrightarrow{(x, y)} := \frac{\|kx\|}{\|y\|} sgn\, g(y, x);$$
$$k = \min\{|a|, |\tau - a|\}; \quad x, y \in X\backslash\{۰\}. \tag{۹.۵}$$

را $B-$ کوسینوس زاویه‌ی جهت‌دار بین دو بردار x و y می‌گوییم.

بعلاوه عدد

$$\angle_B \overrightarrow{(x, y)} := \arccos_B \overrightarrow{(x, y)}, \tag{۱۰.۵}$$

را $B-$ زاویه‌ی جهت‌دار بین دو بردار x و y می‌گوییم.

تعریف ۴.۵. اگر

$$\cos_B(x,y) := \sqrt{|\cos_B \overrightarrow{(x,y)} \cos_B \overrightarrow{(y,x)}|\, sgn\, g(x,y)\, sgn\, g(y,x)}, \qquad (۱۱.۵)$$

باشد، آنگاه عدد

$$\angle_B(x,y) := \arccos_B(x,y), \qquad (۱۲.۵)$$

را $B-$ زاویه‌ی بدون جهت بین دو بردار ناصفر x و y می‌گوییم.

نکته ۵.۵. *اگر $(X,\langle .,.\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه $g(x,y)=\langle x,y\rangle$.* پس با توجه به قضیه‌ی ۱۶.۴ *داریم:*

$$\begin{aligned} g(y-ax,x)=\circ &\Rightarrow \langle y-ax,x\rangle=\circ \Rightarrow \langle y,x\rangle - a\langle x,x\rangle=\circ \\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle - a\|x\|^{۲}=\circ \Rightarrow a=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^{۲}} \\ &\Rightarrow a=\frac{g(x,y)}{\|x\|^{۲}}=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^{۲}}=\frac{g(y,x)}{\|x\|^{۲}}, \end{aligned}$$

یعنی $P_{[x]}(y)=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^{۲}}x$. *بنابراین* $\cos_B \overrightarrow{(x,y)}=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|.\|y\|}$.

قضیه ۴.۵. *فرض کنید X یک فضای هموار و اکیداً محدب باشد، آنگاه برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$،*

$$\begin{aligned} &(۱)\ \cos_B \overrightarrow{(\lambda x,y)}=\cos_B \overrightarrow{(x,y)}\, sgn\,\lambda, \\ &(۲)\ \cos_B \overrightarrow{(x,\lambda y)}=\cos_B \overrightarrow{(x,y)}\, sgn\,\lambda. \end{aligned}$$

برهان. (۱) فرض کنید $P_{[x]}(y)=ax$ و $k=\min\{|a|,|\tau-a|\}$ و $\|y\|=\|y-\tau x\|$ و $P_{[\lambda x]}(y)=b\lambda x$. پس

$$b\lambda=a,\quad \min\{|b\lambda|,|\tau-b\lambda|\}=\min\{|a|,|\tau-a|\}=k,$$

بنابراین بر طبق تعریف ۳.۵،

$$\begin{aligned} \cos_B \overrightarrow{(\lambda x,y)} &= \frac{\min\{|b\lambda|,|\tau-b\lambda|\}\|x\|}{\|y\|}\, sgn\, g(y,\lambda x) \\ &= \frac{\|kx\|}{\|y\|}\, sgn\,\lambda g(y,x)=\cos_B \overrightarrow{(x,y)} sgn\,\lambda. \end{aligned}$$

(۲) قرار دهید

$$P_{[x]}(y)=ax,\quad \|y\|=\|y-\tau x\|,\quad \|\lambda y\|=\|\lambda y-\tau_\lambda x\|,$$

آنگاه $P_{[x]}(\lambda y)=\lambda ax$ از طرفی چون $\|\lambda y\|=\|\lambda y-\lambda\tau x\|$، بنابراین

$$\tau_\lambda=\lambda\tau,\quad k_\lambda=\min\{|\lambda a|,|\lambda\tau-\lambda a|\}=|\lambda|k.$$

پس

$$\begin{aligned}\cos_B \overrightarrow{(x, \lambda y)} &= \frac{\|k_\lambda x\|}{\|\lambda y\|}\, sgn\, g(\lambda y, x)\\ &= \frac{\|kx\|}{\|y\|}\, sgn\, \lambda g(y, x)\\ &= \cos_B \overrightarrow{(x, y)}\, sgn\, \lambda.\end{aligned}$$

□

لم ۵.۵. *فرض کنید* $(X, \|.\|)$ *یک فضای خطی نرم‌دار باشد، آنگاه برای هر* $x, y \in S(X)$،

$$۱ - \|x - y\| \leq g(x, y) \leq \|x + y\| - ۱, \tag{۱۳.۵}$$

$$۱ - \|x - y\| \leq \cos A_g(x, y) \leq \|x + y\| - ۱, \tag{۱۴.۵}$$

$$۱ - \|\frac{x + y}{۲}\| \leq \frac{۱ - \cos A_g(x, y)}{۲} \leq \frac{\|x - y\|}{۲}. \tag{۱۵.۵}$$

برهان. با کمک ویژگی‌های تابعک g،

$$g(x, x \pm y) = ۱ \pm g(x, y) \leq \|x \pm y\|.$$

با کمک ۱۳.۵ ویژگی‌های ۱۴.۵ و ۱۵.۵ واضح است. □

همانطور که می‌دانید در هر مثلث متساوی‌الساقین زوایای رو به رو به اضلاع مساوی، برابرند. در قضیه‌ی بعد می‌خواهیم به کمک $B-$زاویه‌ی جهت‌دار در فضاهای خطی نرم‌دار هموار نیز این موضوع را ثابت کنیم.

قضیه ۵.۵. *فرض کنید* $(X, \|.\|)$ *یک فضای نرم‌دار حقیقی هموار باشد و* $x, y \in X\backslash\{۰\}$ *مستقل خطی باشند و* $\|y\| = \|y - x\|$*. آنگاه،*

$$\angle_B\overrightarrow{(x, y)} = \angle_B\overrightarrow{(-x, y - x)}.$$

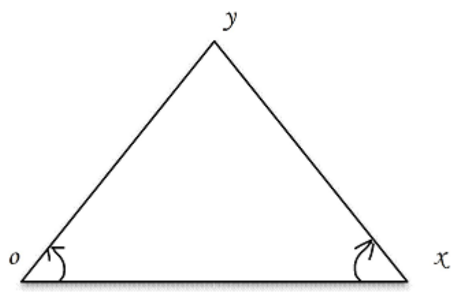
برهان. در هر فضای خطی نرم‌دار هموار X بر طبق لم ۵.۵ برای هر $x, y \in X$،

$$\|x\|(\|x\| - \|x - y\|) \leq g(x, y) \leq \|x\|(\|x + y\| - \|x\|), \tag{۱۶.۵}$$

چون $\|y\| = \|y - x\|$، لذا $g(y, x) > ۰$ و $g(y - x, -x) > ۰$.

فرض کنید $P_{[x]}(y) = ax$ و $P_{[x]}(y - x) = bx$. در این‌صورت $a, b > ۰$ و $g(y - ax, x) = ۰$ و

$$g(y - x - bx, x) = ۰ \;\; \Leftrightarrow \;\; g(y - (۱ + b)x, x) = ۰,$$



شکل ۳.۵: مثلث

حال با توجه به قضیه‌ی ۱۶.۴ نتیجه می‌گیریم که $a = b + ۱$، به‌طوری‌که $P_{[x]}(y-x) = (a-۱)x$.
با توجه به تعریف ۳.۵،

$$\begin{aligned}\cos_B \overrightarrow{(-x, y-x)} &= \frac{\|kx\|}{\|y-x\|} sgn\, g(y-x,-x)\\ &= \frac{\min\{a, ۱-a\}\|x\|}{\|y\|} = \cos_B \overrightarrow{(x,y)}.\end{aligned}$$

□

حال به کمک تعاریف ۳.۵ و ۴.۵ می‌خواهیم در هر فضای شبه ضرب داخلی X یک زاویه‌ی جدید به نام $g-$ زاویه‌ی جهت‌دار بین دو بردار ناصفر $x, y \in X$ را معرفی کنیم.

تعریف ۶.۵. فرض کنید X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و $x, y \in X\backslash\{۰\}$ و $p = \frac{\tau}{۲}$ (بر طبق لم ۴.۵) آنگاه،

$$\cos_g \overrightarrow{(x,y)} := \frac{\|px\|}{\|y\|} sgn\big(\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x)\big),$$

و عدد $\angle_g \overrightarrow{(x,y)} = \arccos_g \overrightarrow{(x,y)}$ را $g-$ زاویه‌ی جهت‌دار بین دو بردار x و y نامیده می‌شود.
در نتیجه برای هر $\lambda \neq ۰$،

$$y - px \perp px(g) \;\Rightarrow \lambda y - \lambda px \perp \lambda px(g),$$

پس

$$P_x^g(y) = px \Rightarrow P_{\lambda x}^g(\lambda y) = px,$$

بنابراین برای هر $\lambda \neq ۰$،

$$\cos_g \overrightarrow{(\lambda x, \lambda y)} = \cos_g \overrightarrow{(x,y)} sgn\, \lambda. \qquad (۱۷.۵)$$

تعریف ۷.۵. اگر

$$\cos_g(x,y) := \sqrt{\cos_g \overrightarrow{(x,y)} \cos_g \overrightarrow{(y,x)}}\, sgn\big(\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x)\big),$$

آنگاه عدد $\angle_g(x,y) = \arccos_g(x,y)$ را $g-$ زاویه‌ی بدون جهت بین x و y نامیده می‌شود.

نکته ۸.۵. *واضح است در هر فضای شبه ضرب داخلی،* $\cos_g(x,y) = \cos_g(y,x)$.
اگر $(X, \langle .,. \rangle)$ *یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه*

$$\begin{aligned}
(y-px) \perp px(g) &\Leftrightarrow \|y-px\|^۲ g(y-px,px) + \|px\|^۲ g(px, y-px) = ۰ \\
&\Leftrightarrow (\|y-px\|^۲ + \|px\|^۲)\langle px, y-px\rangle = ۰ \\
&\Leftrightarrow p = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^۲} \\
&\Rightarrow \|px\| = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|} \\
&\Rightarrow \cos_g \overrightarrow{(x,y)} = \frac{\|px\|}{\|y\|^۲} sgn((\|x\|^۲ + \|y\|^۲)\langle x,y\rangle) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|.\|y\|}.
\end{aligned}$$

در قضیه‌ی بعد می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر مثلث متساوی‌الاضلاع $g-$زاویه‌ی جهتدار و بدون جهت برهم منطبقند و مقدار آن برابر با $\frac{\pi}{۳}$ است.

قضیه ۶.۵. *فرض کنید* X *یک فضای شبه ضرب داخلی باشد و* $\|x\| = \|y\| = \|x-y\|$، *یعنی مثلث* $(۰, x, y)$ *متساوی‌الاضلاع باشد. در این‌صورت*

$$\angle_g \overrightarrow{(x,y)} = \angle_g(x,y) = \angle_g(y,x) = \frac{\pi}{۳}.$$

برهان. ابتدا از تساوی $\|x\| = \|y\| = \|y-x\|$ و نامساوی ۱۶.۵ نتیجه می‌گیریم که،

$$g(x,y) > ۰, \qquad g(y,x) > ۰.$$

پس

$$sgn\big(\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x)\big) = ۱.$$

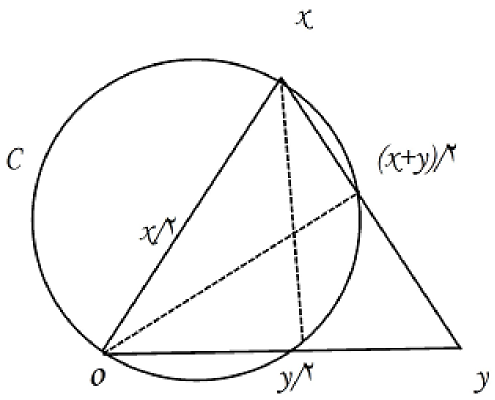
فرض کنید C دایره‌ای به مرکز $\frac{x}{۲}$ و قطر $\|x\|$ باشد، (شکل ۴.۵) آنگاه $\frac{x+y}{۲}, \frac{y}{۲} \in C$. از طرفی بر طبق قضیه‌ی ۳.۵،

$$(x - \frac{y}{۲}) \perp \frac{y}{۲}(g), \qquad \frac{x+y}{۲} \perp \frac{x-y}{۲}(g).$$

در نتیجه

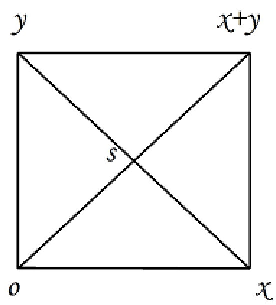
$$P_x^g(y) = \frac{x}{۲}, \quad P_y^g(x) = \frac{y}{۲},$$

حال بر طبق تعریف ۶.۵ نتیجه می‌گیریم که ، $\cos_g \overrightarrow{(x,y)} = \cos_g(y,x) = \frac{۱}{۲}$ بنابراین بر طبق تعریف ۷.۵، $\angle_g(x,y) = \frac{\pi}{۳}$. □



شکل ۴.۵: دایره مربوط به قضیه‌ی ۶.۵

قضیه ۷.۵. *فرض کنید* $(\circ, x, y, x+y)$ *یک* $g-$ *مربع باشد، یعنی* $x \perp y(g)$, $\|x\| = \|y\|$. *در این‌صورت* $\frac{\pi}{۴} = \angle_g(x, x+y)$*، یعنی* $g-$ *زاویه‌ی بدون جهت بین قطر و یک ضلع برابر با* $\frac{\pi}{۴}$ *است.*



شکل ۵.۵: $g-$مربع

برهان. اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد، در این‌صورت

$$sgn\big(\|x\|^۲ g(x,y) + \|y\|^۲ g(y,x)\big) = sgn\big(\|x+y\| - \|x-y\|\big),$$

و هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|۲x + y\| - \|x\| \geq \|۲x\| - \|y\| - \|y\| = \circ,$$

بر طبق شکل ۵.۵ چون $P_x^g(x+y) = x$، پس

$$\cos_g \overrightarrow{(x, x+y)} = \frac{\|x\|}{\|x+y\|} sgn(\|۲x + y\| - \|y\|) = \frac{\|x\|}{\|x+y\|}.$$

فرض s نقطه‌ی تقاطع بین قطرهای $[\circ, x+y]$ و $[x, y]$ باشد. آنگاه بر طبق قضیه‌ی ۳.۵، $P^g_{x+y}(x) = s$.
لذا بر طبق تعریف ۶.۵ نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned}
\cos_g \overrightarrow{(x+y, x)} &= \frac{\|s\|}{\|x\|} sgn(\|s+x\| - \|s-x\|) \\
&= \frac{\|x+y\|}{۲\|x\|} sgn(\|۲x\| - \|x\|) \\
&= \frac{\|x+y\|}{۲\|x\|},
\end{aligned}$$

بنابراین بر طبق تعریف ۷.۵،

$$\begin{aligned}
\cos_g(x, x+y) &= \sqrt{\cos_g \overrightarrow{(x, x+y)} \cos_g \overrightarrow{(x+y, x)} sgn(\|۲x+y\| - \|y\|)} \\
&= \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲},
\end{aligned}$$

بنابراین $\angle_g(x, x+y) = \frac{\pi}{۴}$. $\square$

فصل ۶

تصاویر، تعامد بیرخوف و زاویه در فضاهای خطی نرم‌دار

۱.۶ مقدمه

در این فصل می‌خواهیم در هر صفحه‌ی مینکوفسکی[۱] به کمک تصاویر[۲] تعریفی از زاویه‌ی $A_q(x,y)$ بین دو بردار ناصفر x و y در X ارائه دهیم، به‌طوری‌که x متعامد بیرخوف بر y است اگر و فقط اگر $A_q(x,y)=\frac{\pi}{۲}$. هم‌چنین در مورد ویژگی‌های این زاویه نیز بحث می‌کنیم. در این فصل از منبع [۵] استفاده شده است بجز در مواقعی که به روشنی منبع مشخص شده باشد.

۲.۶ تعامد بیرخوف و $q-$ زاویه در صفحه‌ی مینکوفسکی

از آنجاییکه زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر در هر فضای نرمدار خطی را می‌توان زاویه بین این دو بردار در زیر فضاهای تولید شده توسط این دو بردار نیز تعریف کرد، در نتیجه کافیست این زاویه را در صفحه‌ی مینکوفسکی (یک فضای نرمدار خطی دو بعدی) معرفی کنیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد هندسه‌ی صفحه‌ی مینکوفسکی به [۲۰] و [۲۱] مراجعه کنید.

فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک صفحه‌ی مینکوفسکی باشد. اگر $\{e_۱,e_۲\}$ یک پایه‌ی ثابت از فضای X باشد، آنگاه می‌توان هر $x\in X$ را به صورت $x=(x_۱,x_۲)$ که $x_۱,x_۲\in\mathbb{R}$ بیان کرد. بعلاوه متناسب با این پایه می‌توان پایه‌ی $\{\delta_{e_۱},\delta_{e_۲}\}$ را به عنوان پایه‌ای برای فضای دوگان X^* انتخاب نمود که برای هر δ_{e_i}

[۱] Minkowski plane

[۲] Projections

$i = ۱, ۲$ توابع خطی کراندار هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\delta_{e_i}(e_j) := \begin{cases} ۰, & i \neq j; \\ ۱, & i = j. \end{cases}$$

تعریف ۱.۶. فرض کنید $L(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی کراندار از X به X باشد. برای هر $T \in L(X)$، عملگر $T' \in L(X^*)$ را عملگر مزدوج باناخ[۳] T می‌گویند هرگاه برای هر $z \in X$ و $z' \in X^*$،

$$\big(T'z'\big)(z) = z'\big(Tz\big).$$

تعریف ۲.۶. فرض کنید X یک صفحه‌ی مینکوفسکی با پایه‌ی $\{e_۱, e_۲\}$ باشد و همچنین فرض کنید $x = (x_۱, x_۲)^t$ و $y = (y_۱, y_۲)^t$ دو بردار مستقل خطی در X تحت پایه‌ی $\{e_۱, e_۲\}$ باشند. قرار دهید

$$D_{xy} := \begin{bmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۲ & y_۲ \end{bmatrix},$$

توجه کنید چون x و y مستقل خطی هستند، لذا

$$|D_{xy}| = x_۱y_۲ - x_۲y_۱ \neq ۰.$$

حال P_{xy} را تصویر موازی[۴] y از X نسبت به زیرفضای تولید شده توسط x می‌نامیم، در این صورت P_{xy} به دو بردار x و y وابسته است و دارای نمایش زیر تحت پایه‌ی $\{e_۱, e_۲\}$ است،

$$P_{xy} = D_{xy}.\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}.D_{xy}^{-۱} = \frac{۱}{|D_{xy}|}\begin{bmatrix} x_۱y_۲ & -x_۱y_۱ \\ x_۲y_۲ & -x_۲y_۱ \end{bmatrix}.$$

گزاره ۱.۶. *برای هر دو بردار مستقل خطی* $x, y \in X$،

$$۱ \leq \|P_{xy}\| < +\infty,$$

بعلاوه قرار می‌دهیم

$$q(x,y) = \begin{cases} ۰; & \text{وابسته خطی باشند } y, x \\ \|P_{xy}\|^{-۱}; & \text{مستقل خطی باشند } y, x \end{cases}$$

تعریف ۳.۶. فرض کنید X یک صفحه‌ی مینکوفسکی باشد، برای هر $x, y \in X$، $q-$زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر x و y را با نماد $A_q(x,y)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A_q(x,y) = \arcsin\big(q(x,y)\big).$$

[۳]Banach conjugate operator

[۴]Projection parallel

قضیه ۱.۶. *$q-$ زاویه برای هر $x, y \in X$ در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند،*

(a) *$A_q(x,y) = ۰$ اگر و فقط اگر x و y وابسته‌ی خطی باشند،*

(b) *برای هر $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{۰\}$، $A_q(ax, by) = A_q(x,y)$،*

(c) *اگر $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ آنگاه $A_q(x_n, y_n) \longrightarrow A_q(x,y)$.*

برهان. (a) اگر x و y وابسته‌ی خطی باشند، واضح است $A_q(x,y) = ۰$. حال اگر x و y مستقل خطی باشند، آنگاه $۱ \leq \|P_{xy}\| < +\infty$، پس $A_q(x,y) > ۰$.
(b) برای هر $x, y \in X$ داده شده و $a, b \in \mathbb{R}$ اگر x و y وابسته خطی باشند، در این‌صورت می‌توان گفت $A_q(ax, by) = A_q(x,y) = ۰$ حال اگر x و y مستقل خطی باشند، آنگاه $P_{xy} = P_{ax.by}$، بنابراین

$$A_q(ax, by) = A_q(x,y).$$

(c) حال فرض کنید $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$. اگر x و y مستقل خطی باشند، باید فرض کنیم که x_n و y_n برای هر $n \in \mathbb{N}$ مستقل خطی هستند. بر طبق تعریف P_{xy} و پیوستگی تابع نرم، $q-$زاویه روی مجموعه‌ی $\{(x,y) \in X^۲; \quad y, x$ مستقل خطی باشند$\}$ پیوسته است و بنابراین، $A_q(x_n, y_n) \longrightarrow A_q(x,y)$.
حال حالتی را در نظر بگیرید که x و y وابسته خطی باشند. بر طبق نتیجه‌ی (a) و (b) باید فرض کنیم که دنباله‌های x_n و y_n برای هر $n \in \mathbb{N}$ مستقل خطی‌اند و $x_n \to x$ و $y_n \to x$. حال پایه‌ی $\{e_۱, e_۲\}$ استاندارد از X را در نظر می‌گیریم. قرار دهید $x = (\alpha, \beta)^t$ و $x_n = (\alpha_n, \beta_n)^t$ و $y_n = (\gamma_n, \xi_n)^t$.
پس

$$\alpha_n \to \alpha, \quad \beta_n \to \beta, \quad \gamma_n \to \alpha, \quad \xi_n \to \beta, \quad |D_{x_n y_n}| \to ۰.$$

از طرفی

$$P_{x_n y_n}(e_۱) = \frac{\xi_n}{\|D_{x_n y_n}\|}(\alpha_n e_۱ + \beta_n e_۲),$$
$$P_{x_n y_n}(e_۲) = \frac{-\gamma_n}{\|D_{x_n y_n}\|}(\alpha_n e_۱ + \beta_n e_۲).$$

بعلاوه، $x \neq ۰$ یعنی، $\alpha\beta \neq ۰$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{x_n y_n}\| \geq \max\{|\beta|, |\alpha|\}.\|\alpha e_۱ + \beta e_۲\|. \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\|D_{x_n y_n}\|} = +\infty,$$

بنابراین

$$A_q(x_n, y_n) \longrightarrow ۰ = A_q(x,x).$$

□

لم ۱.۶. *فرض کنید X یک صفحه‌ی مینکوفسکی باشد و $x, y \in X$ دو بردار مستقل خطی باشند. در این‌صورت برای هر $z \in X$ اعداد حقیقی a, b موجودند به‌طوری‌که*

$$z = ax + by,$$

بعلاوه این تجزیه یکتاست و

$$P_{xy}(z) = ax.$$

برهان. کافیست از تعریف مستقل خطی بودن بردارهای x و y و تعریف P_{xy} استفاده نمود. □

لم ۲.۶. *اگر x متعامد بیرخوف بر y باشد، آنگاه برای هر $a, b \in \mathbb{R}$،*

$$\|ax + by\| \geq \|ax\|.$$

برهان. اگر $a = ۰$ نتیجه واضح است.
حال فرض کنید $a \neq ۰$. چون x متعامد بیرخوف بر y است، لذا

$$\|ax + y\| = |a|\|x + \frac{b}{a}y\| \geq |a|\|x\| = \|ax\|.$$

□

قضیه ۲.۶. *فرض کنید $x = (x_۱, x_۲)^t$ و $y = (y_۱, y_۲)^t$ دو بردار در صفحه‌ی مینکوفسکی X تحت پایه‌ی $\{e_۱, e_۲\}$ باشند، در این‌صورت x متعامد بیرخوف بر y است اگر و فقط اگر*

$$A_q(x, y) = \frac{\pi}{۲},$$

و این بدان معناست که،

$$\|P_{xy}\| = ۱.$$

برهان. فرض کنید x بر y متعامد بیرخوف باشد، در این‌صورت واضح است x و y مستقل خطی‌اند.
در نتیجه برای هر $z \in X$،

$$z = ax + by \quad , \quad a, b \in \mathbb{R},$$

طبق لم ۱.۶ و بر طبق لم ۲.۶،

$$\|P_{xy}(z)\| = \|ax\| \leq \|ax + b\| = \|z\| \Rightarrow \|P_{xy}\| \leq ۱,$$

از طرفی چون $\|P_{xy}\| \geq ۱$ در نتیجه می‌توان گفت $\|P_{xy}\| = ۱$. برعکس فرض کنید که $\|P_{xy}\| = ۱$،
لذا برای هر $t \in \mathbb{R}$،

$$\|x\| = \|P_{xy}(x + ty)\| \leq \|P_{xy}\|\|x + ty\| = \|x + ty\|,$$

بنابراین x بر y متعامد بیرخوف است و این اثبات را کامل می‌کند. □

لم ۳.۶. *فرض کنید $x=(x_1,x_2)^t$ و $y=(y_1,y_2)^t$ دو بردار مستقل خطی در صفحه‌ی مینکوفسکی X تحت پایه $\{e_1,e_2\}$ باشند و هم‌چنین فرض کنید $x^{'}=(y_2,-y_1)^t$ و $y^{'}=(-x_2,x_1)^t$ دو بردار مستقل خطی در فضای دوگان X^* تحت پایه‌ی $\{\delta_{e_1},\delta_{e_2}\}$ باشند، آنگاه $P_{x'y'}$ عملگر مزدوج باناخ از P_{xy} است و این یعنی*

$$P_{x'y'}=P^{'}_{xy}.$$

برهان. ابتدا قرار دهید

$$D_{xy}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix},\quad D_{x'y'}=\begin{bmatrix}y_2 & -x_2\\ -y_1 & x_1\end{bmatrix},$$

در این صورت

$$D=|D_{xy}|=|D_{x'y'}|=x_1y_2-x_2y_1\neq 0,$$

بعلاوه می‌توان نتیجه گرفت که

$$P_{xy}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}x_1y_2 & -x_1y_1\\ x_2y_2 & -x_2y_1\end{bmatrix},\quad P_{x'y'}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}x_1y_2 & x_2y_2\\ -x_1y_1 & -x_2y_1\end{bmatrix},$$

از طرفی برای هر $z\in X$ و هر $z^{'}$،

$$z=ae_1+be_2,\quad z^{'}=c\delta_{e_1}+d\delta_{e_2},$$

لذا

$$\begin{aligned}(P_{x'y'}z^{'})z&=\frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix}\delta_{e_1} & \delta_{e_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1y_2 & x_2y_2\\ -x_1y_1 & -x_2y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right)\\ &=\frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1y_2 & x_2y_2\\ -x_1y_1 & -x_2y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}z^{'}(P_{xy}z)&=\frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix}\delta_{e_1} & \delta_{e_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1y_2 & -x_1y_1\\ x_2y_2 & -x_2y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right)\\ &=\frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix}c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1y_2 & -x_1y_1\\ x_2y_2 & -x_2y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right),\end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$(P_{x'y'}z^{'})z=z^{'}(P_{xy}z),$$

بنابراین $P_{x'y'}=P^{'}_{xy}$. □

قضیه ۳.۶. *فرض کنید x, y, x', y' به صورت لم ۳.۶ تعریف شده باشند، در این‌صورت،*

$$A_q(x,y) = A_q(x',y').$$

برهان. بر طبق لم ۳.۶،

$$\|P_{x'y'}\| = \|P'_{xy}\| = \|P_{xy}\|,$$

پس بر طبق قضیه‌ی ۲.۶،

$$A_q(x,y) = A_q(x',y').$$

□

برای $1 \le p \le \infty$ و هر $x = (x_1, x_2)$ نرم $\|x\|_p$ روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} \quad , \quad 1 \le p < \infty,$$

و همچنین

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

فضای $(\mathbb{R}^2, \|.\|_p)$ را با نماد l_2^p نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴.۶. *فرض کنید $1 \le p \le \infty$. برای هر دو بردار $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در l_2^p،*

$$A_q(x,y) = \arcsin\left(\frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\|x\|_p\|y\|_{\frac{p-1}{p}}}\right). \tag{۱.۶}$$

برهان. فرض کنید x و y مستقل خطی باشند. برای هر $z = (z_1, z_2) \in l_2^p$،

$$\begin{aligned}
\|P_{xy}(z)\|_p &= \frac{1}{\|D_{xy}\|}\left\|\begin{bmatrix} x_1y_2 & -x_1y_1 \\ x_2y_2 & -x_2y_1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2\end{bmatrix}\right\|_p \\
&= \frac{\|x\|_p}{\|D_{xy}\|}|y_2z_1 - y_1z_2| \\
&\le \frac{\|x\|_p}{\|D_{xy}\|}\|y\|_{\frac{p-1}{p}}\|z\|_p,
\end{aligned}$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که

$$\|P_{xy}\| = \frac{\|x\|_p\|y\|_{\frac{p-1}{p}}}{\|D_{xy}\|}.$$

حال اگر x و y وابسته خطی باشند آنگاه $|D_{xy}| = 0$، بنابراین

$$A_q(x,y) = \arcsin\left(\frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\|x\|_p\|y\|_{\frac{p-1}{p}}}\right).$$

□

نتیجه ۱.۶. *فرض کنید* $x = (x_۱, x_۲)$ *و* $y = (y_۱, y_۲)$ *دو بردار مستقل خطی در* $l_۲^\infty$ *باشند، در این‌صورت* $x \perp_B y$ *اگر و فقط اگر*

$$\|x\|_p \|y\|_{\frac{p-۱}{p}} = |x_۱ y_۲ - x_۲ y_۱|.$$

برهان. بر طبق رابطه‌ی ۱.۶ اثبات واضح است. □

مراجع

[1] Abdlla Tallafha, (α, β, γ)*-orthogonality*, (JJMS) 4(2), 2011, pp.115 - 126.

[2] C. Alsina, P. Cruells, M. S. Tomas, *Isosceles trapezoids, norms and inner products*, Arch. Math. (Basel) 72(3), 233–240 (1999).

[3] C. Alsina, C. Guijarro, M. S. Tomas, *A characterization of inner product spaces based on orthogonal relations related to heights theorem*, Rocky Mt. J. Math. 25(3), 843–849 (1995).

[4] C. Alsina, Justyna Sikorska, M. S. Tomas, *Norm derivatives and characterizations of inner product spaces*, Universitat Politecnica de Catalunya, Spain, 2010.

[5] Chen Zhi-zhi, Lin Wei, Luo Lü-lin, *Projections, Birkhoff orthogonality and angles in normed spaces*, Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun, 130012.

[6] C. R. Diminnie, *A new orthogonality relation for normed linear spaces*. Math. Nachr. 114, 197–203 (1983).

[7] C. R. Diminnie, E. Z. Andalafte, R. W. Freese, *An extension of Pythagorean and isosceles orthogonality and a characterization of inner product spaces* , J. Approx. Theory 39(4), 295–298 (1983).

[8] C. R. Diminnie, E. Z. Andalafte, R. W. Freese, *A study of generalized orthogonality relations in normed linear spaces*, Math. Nachr. 122, 197–204 (1985).

[9] C. R. Diminnie, E. Z. Andalafte, R. W. Freese, *Angles in normed linear spaces and a characterization of real inner product space*, math. Nachrichten 129 (1986), 197-205.

[10] C. R. Diminnie, E. Z. Andalafte, R. W. Freese, (α, β)*-orthogonality and a characterization of inner product spaces*, Math. Japonica 30, No. 3 (1985), 341-349.

[11] C. R. Diminnie, E. Z. Andalafte, R. W. Freese, *Generalized angles in normed linear spaces and a characterization of real inner product space*, Houston Journal of Mathematic, Volume 14, No. 4, 1988.

[12] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhauser Verlag, Basel Boston, 1986.

[13] F. Deutseh, *Best approximation in inner product spaces*, Springer Verlag, NewYork, 2000.

[14] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. 1(2), 169–172 (1935).

[15] Hazel Perfect, *Pythagorean orthogonality in a normed linear space*, University College, Swansea, 1956.

[16] Hendra Gunawan, Janny Lindiarni, Oki Neswan, *$P-, I-, g-$, and $D-$angles in normed spaces*, Institute of Technology Bandung(Indonesia), J. Sci., Vol.40. A, No. 1, (2008), 24-32.

[17] H. Martini, M. Spirova, *A new type of orthogonality for normed planes*, Czechoslov. Math. J. 60, 339–349 (2010).

[18] H. Martini, M. Spirova, *The Feuerbach circle and orthocentricity in normed planes*, Enseign. Math. (2) 53(3-4), 237–258 (2007).

[19] H. Martini, S. Wu, *On orthocentric systems in strictly convex normed planes*, Extracta Math. 24(1), 31–45 (2009).

[20] H. Martini, K. J. Swanepoel, *The geometry of Minkowski spaces -A survey. Part I*, Exposition. Math., 19(2001), 97–142.

[21] H. Martini, K. J. Swanepoel, *The geometry of Minkowski spaces -A survey. Part II*, Exposition. Math. 22(2004), 93–144.

[22] J. Alonso, C. Benitez, *Area orthogonality in normed linear spaces*, Arch. Math. (Basel) 68(1), 70–76 (1997).

[23] J. Alonso, C. Benitez, *Orthogonality in normed linear spaces: a survey.I. Main properties*, Extracta Math. 3(1), 1–15 (1988).

[24] J. Alonso, C. Benitez, *Orthogonality in normed linear spaces: a survey.II. relations between main orthogonalities*, Extracta Math. 4(3), 121–131 (1989).

[25] J. Alonso, Horst Martini, Senlin Wu, *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Aequat. Math. 83 (2012), 153–189, Springer.

[26] J. Alonso, *Ortogonalidad en espacios normados*, PhD thesis, Universidad de Extremadura.(1984).

[27] J. Alonso, M. L. Soriano, *On height orthogonality in normed linear spaces.*Rocky Mt.J. Math. 29(4), 1167–1183 (1999).

[28] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces - Selected Topics*, Springer - Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1975.

[29] J. E. Valentine, *Angles in metric spaces*, in "The Geometry of Metric and Linear Spaces, Lecture Notes in Math," (ed. L. M. Kelley), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[30] J. E. Valentine, S. G. Wayment, *Wilson angles in linear normed spaces*, Pacific J. Math. 36 (1971), 239-243.

[31] J. R. Giles, *Classes of semi-inner product space*, Trans. Amer. Math. Soc.v. 129 (1967), 436-446.

[32] K. Sundaresan, *Orthogonality and nonlinear functionals on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 187-190.

[33] Kanu, U. Richmond , Rauf, Kamilu, *On some results on linear orthogonality spaces*, Asian Journal of Mathematics and applications, Volume 2014, Article ID ama0155, 11 pages.

[34] Liana M. Eneeva, *On the Wilson angle in a normed space*, Vladikavkaz. Mat. Zh. 1999, Volume 1, Number 4, 60–63.

[35] M. Fréchet, *Sur la notion de différentielle*, J. Math. Pures Appl. vol. 16 (1937) pp. 233-250.

[36] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Springer. Verlag, New York, 1962.

[37] M. M. Day, *Some characterizations of inner product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1917), 320-337.

[38] O. P. Kapoor, Jagadish Prasad, *Orthogonality and characterizations of inner product spaces*, Bull. Austral. Math. SOC. VOL. 19 (1978), 403-416.

[39] P. L. Papini, *Inner products and norm derivatives* , J.Math.Anal.Appl.91(1983),592-598.

[40] P. M. Milicic, *A generalization of the parallelogram equality in normed spaces*, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) 38- 1 (1998) 71-75.

[41] P. M. Milicic, *Sur la* $g-$*angle dans un espace norme*, Mat. Vesnik 39(1987), 325-334.

[42] P. M. Milicic, *Sur la* $g-$*angle dans un espace norme*, Mat. Vesnik, 45 (1993), 43–48.

[43] P. M. Milicic, *Sur la* $g-$*orthogonalte dans un espace norme*, Mat. Vesnik, 39(1987), 325–334.

[44] P. M. Milicic, *On the quasi-inner product spaces*, Matematicki Bilten, 22(XLVIII) (1998), 19–30.

[45] P. M. Milicic, *On the* $B-$*Angle and* $g-$*angle in normed linear spaces*, Faculty of Mathematics University of Belgrade, vol. 8, iss.4, art. 99, 2007.

[46] P. M. Milicic, *On the best approximation in smooth and uniformly convex Banach space*, Facta Universitatis (Niš), Ser.Math. Inform., 20 (2005), 57–64.

[47] P. M. Milicic, *The $Thy-$angle and $g-$angle in a quasi-Inner Product space*, Matematica Moravica, Vol. 15-2(2011), 41-46.

[48] P. M. Milicic, *On the best approximation in smooth and uniformly convex Banach space*, Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform. 20 (2005), 57–64.

[49] P. M. Milicic, *Singer orthogonality and James orthogonality in the so-called quasi-inner product space*, Mathematica Moravica Vol. 15 - 1 (2011), 49–52.

[50] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Am. Math. Soc. 61, 265–292 (1947).

[51] R. C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. 12, 291–302 (1945).

[52] S. O. Carlsson, *Orthogonality in normed linear spaces*, Arikiv fur Matem.4(1962), 297-318.

[53] S. S. Dragomir, E. Kikianty, *Orthogonality connected with integral means and characterizations of inner product spaces.* J. Geom. 98(1–2), 33–49 (2010).

[54] S. S. Dragomir, *Semi-inner products and applications*, School of Computer Science and Mathematics, Victoria University of Technology, POBox 14428, Melbourne City MC, Victoria 8001, Australia, January 2003.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابرصفحه	Hyperplane
اکیداً محدب	Strictly convex
انعکاسی	Reflexive
باناخ	Banach
بهترین تقریب	Best approximation
به‌طور یکنواخت هموار	Uniformly smooth
پیش‌هیلبرت	Prehilbert
پیوسته	Continuous
تابعک	Functional
تصویر	Projection
تعامد	Orthogonality
تعامد بیرخوف	Birkhoff orthogonality
تعمیم یافته	Generalized
توسیع	Extension
جهت‌دار	Oriented
حل‌پذیر	solvable
دنباله	Sequence
زاویه	Angle
زاویه‌ی متقابل به رأس	Vertical angle
زیرفضا	Subspace
شبه ضرب داخلی	Quasi inner product
صفحه‌ی مینکوفسکی	Minkowski plane
عملگر	Operator
فاصله	Distance
فضای اقلیدسی	Euclidean space

فضای دوگان	Dual space
فضای متریک	Metric space
قطر	Diagonal
کراندار	Bounded
کوشی	Caushy
متعامد یکه	Orthonormal
متمم	Complement
مجموعه‌ی متعامد	Orthogonality set
مخروط محدب	Convex cone
محدب	Convex
مستطیل	Rectangle
مزدوج	Conjugate
مشتق گتو	Gateaux differential
مشخصه‌سازی	Characterization
مکمل	Supplementary
نگاشت پشتیبان	Support mapping
نیم‌ضرب داخلی	Semi inner product
همگرایی ضعیف	Weak convergence
همنهشتی مثلث	Triangle congruence
هموار	Smooth
یکتایی	Uniqueness

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Angle .... زاویه
Banach .... باناخ
Best approximation .... بهترین تقریب
Birkhoff orthogonality .... تعامد بیرخوف
Bounded .... کراندار
Caushy .... کوشی
Characterization .... مشخصه‌سازی
Complement .... متمم
Convex .... محدب
Convex cone .... مخروط محدب
Conjugate .... مزدوج
Continuous .... پیوسته
Diagonal .... قطر
Distance .... فاصله
Dual space .... فضای دوگان
Euclidean space .... فضای اقلیدسی
Extension .... توسیع
Functional .... تابعک
Gateaux differential .... مشتق گتو
Generalized .... تعمیم یافته
Hyperplane .... ابرصفحه
Metric Spaces .... فضاهای متریک
Minkowski plane .... صفحه‌ی مینکوفسکی
Operator .... عملگر
Oriented .... جهت‌دار

Orthogonal set .... مجموعه‌ی متعامد

Orthogonality .... تعامد

Orthonormal .... متعامد یکه

Prehilbert .... پیش‌هیلبرت

Prependicular .... عمود

Projection .... تصویر

Quasi inner product .... شبه ضرب داخلی

Rectangle .... مستطیل

Reflexive .... انعکاسی

solvable .... حل‌پذیر

Semi inner product .... نیم‌ضرب داخلی

Sequence .... دنباله

Smooth .... هموار

Strictly convex .... اکیداً محدب

Subspace .... زیرفضا

Support mapping .... نگاشت پشتیبان

Supplementary .... مکمل

Triangle congruence .... همنهشتی

Uniformly smooth .... به‌طور یکنواخت هموار

Uniqueness .... یکتایی

Vertical angle .... زاویه‌ی متقابل به رأس

Weak convergence .... همگرای ضعیف

نمایه

Aabstract

Nowadays, not only concepts orthogonality and angle play very important role at geometric research, but also these concepts are important at analysis research. For this reason, various types of orthogonalities and angles are defined in normed linear spaces.
In this thesis, at first we generalized concepts of orthogonality and angle to normed linear spaces and become familar with a variety of orthogonalities and angles. Then we use from this orthogonalities and angles in subjects of charactrizationof inner product spaces and the concept of best approximation. Moreover we try to use Birkhoff orthogonality and concept of best approximation for defintion of oriented angles. At of end we use projections to give a definition of an angle such that this angle have a relation with Birkhoff orthogonality.
In the first chapter we introduce theorems and basic concepts. In the second chapter concept of the orthogonality generalized from inner product spaces to normed linear spaces and becom acquainted with some of the orthogonality. Then in this chapter we discuss in deatail about one of the main orthogonality namely Birkhoff orthogonality and finally this chapter we covering to charactrization of inner product spaces with using of orthogonalities specifically Birkhoff orthogonality. In the third chapter we introduce generalized angles in normed linear spaces and become familar with some of the angles including wilson angles and g-angle and then by using these angles we covering charactrization of inner product spaces. In fourth chapter we introduce concepts of othogonality and angle in quasi- inner product spaces and become familar with one of the applications of g-orthogonalities in the best approximation. In the fifth chapter we introduce oriented angles by using of the Birkhoff orthogonality and concept of best approximation. In the sixth chapter in Minkowski plane, we use projections for definition of the q-angle such that this angle have a relation with Birkhoff orthogonality.
keywords: orthogonality, Birkhoff orthogonality, angle, quasi-inner product spaces, best approximation, Minkowski plane, projections

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Projection, Birkhoff Orthogonality And Angles In Real Normed Linear Spaces

Hasan Khaje

Supervisor

Dr. Mahdi Iranmanesh

September 2015