دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

نابرابری‌های احتمال و گشتاوری برای مجموع متغیرهای تصادفی در برخی دسته‌های وابستگی

آمنه نوروزی فیروز

استاد راهنما

دکتر نگار اقبال

مهر ۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادرم

ای پدر از تو هر چه می گویم باز هم کم می‌آورم. خورشیدی شدی و از روشنایی‌ات جان گرفتم و در ناامیدی‌ها نازم را کشیدی و لبریزم کردی از شوق، اکنون حاصل دستان خسته‌ات رمز موفقیتم شد. به خودم تبریک می‌گویم که تو را دارم و دنیا با همه بزرگیش مثل تو را ندارد .....

و تو ای مادر، ای شوق زیبایی نفس کشیدن، ای روح مهربان هستی‌ام، تو رنگ شادی‌هایم شدی و لحظه‌ها را با تمام وجود از من دور کردی و عمری خستگی‌ها را به جان خریدی تا اکنون توانستی طعم خوش پیروزی را به من بچشانی.

سپاس گزاری

منت خدای را عز و جل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون بر می‌آید مفرح ذات. در هر نفس دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

ابتدا وظیفه خود می‌دانم که از زحمات استاد راهنمای عزیزم سرکار خانم دکتر نگار اقبال که در انجام این پایان‌نامه همراهم بوده‌اند، نهایت سپاس و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از اساتید محترم دکتر محمدرضا ربیعی و دکتر احمد نزاکتی رضازاده که داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفتند، تشکر می‌نمایم.

سرانجام از پدر و مادر عزیزم که بعد از خدا پناهم، برادر و خواهران حامیان همیشگی‌ام و دو امید زندگی‌ام آراد و حمیدرضا تقدیر و تشکر می‌کنم.

آمنه نوروزی فیروز

مهر ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **آمنه نوروزی فیروز** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **نابرابری‌های احتمال و گشتاوری برای مجموع متغیرهای تصادفی در برخی دسته‌های وابستگی** ، تحت راهنمایی **دکتر نگار اقبال** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آمنه نوروزی فیروز
مهر ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

نابرابری‌های احتمال و گشتاوری نقش اساسی در مطالعه رفتار حدی مجموع‌های جزیی یک دنباله از متغیرهای تصادفی دارند. زمانی که مقدار احتمال دم یا گشتاور مجموع متغیرهای تصادفی قابل محاسبه نیست، با توجه به شرایطی که برای دنباله متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده، نابرابری‌های مختلفی توسط آمارداناان ارایه شده‌اند. در اکثر موارد شرط مستقل بودن برای داده‌هایی که در اختیار داریم، برقرار نیست. بنابراین باید از تعمیم نابرابری‌های احتمال و گشتاوری برای متغیرهای تصادفی وابسته برای بررسی رفتار حدی مجموع متغیرهای تصادفی استفاده کرد. به‌طور خاص می‌توان به دسته‌های متغیرهای پذیرفتنی، وابستگی زبرجمعی منفی و j–وابسته اشاره کرد.

کلمات کلیدی: متغیرهای پذیرفتنی، وابسته زبرجمعی منفی، j–وابسته، نابرابری روزنتال، نابرابری ناگایف

پیش‌گفتار

نابرابری‌های گشتاوری واحتمالی بیشتر برای حالت مستقل بررسی شده‌اند. حال اگر متغیرها را از حالت وابستگی به دسته‌های خاص اختصاص دهیم، نتایج جدیدی به‌دست می‌آوریم. در این پایان‌نامه برخی نابرابری‌های گشتاور مطلق را که با استفاده از تابع مشخصه اثبات شده‌اند، بیان می‌کنیم و در برخی موارد آن‌ها را در دسته‌های خاص، مانند پذیرفتنی و وابسته زبرجمعی منفی بررسی می‌کنیم و به نتایجی مشابه حالت استقلال می‌رسیم. نابرابری گشتاوری و احتمال رادر حالت j-وابسته بررسی می‌کنیم.

در این پایان‌نامه، فصل اول برخی مقدمات و تعاریف لازم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان می‌کنیم. فصل دوم نابرابری‌های گشتاور مطلق متغیرهای تصادفی متقارن را در حالت مستقل و پذیرفتنی و وابسته زبرجمعی منفی بررسی می‌کنیم. فصل سوم شامل نابرابری گشتاوری روزنتال است که تحت شرایط j-وابسته بیان و اثبات کرده و فصل را با مثالی از این نابرابری به پایان می‌رسانیم. فصل چهارم که شامل نابرابری ناگایف در همان حالت j-وابسته است، بیان و اثبات میکنیم و این فصل را نیز با مثالی که نشان دهنده کاربرد نابرابری است، کامل می‌کنیم.

مواردی که با یک ستاره نشان داده شده اثبات قضیه باز شده است و موارد دو ستاره قضیه و برهان توسط نویسندگان پایان‌نامه ارایه و اثبات شده‌اند.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. نوروزی فیروز، آ. و اقبال، ن. ، (۱۳۹۴). برخی نابرابری‌های گشتاوری برای متغیرهای پذیرفتنی ، چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران. یزد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل، برخی تعاریف و قضایا را که در فصل‌های بعد به آن نیاز داریم، بیان می‌کنیم.

۱.۱ گشتاورها

در آمار و احتمال، گشتاور[۱] معیاری کمی برای توصیف شکل یک توزیع احتمالاتی است. در این بخش برخی تعاریف و حالت‌های خاص از گشتاور را بیان می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر به کسلا و برگر (۲۰۰۲) مراجعه کنید.

تعریف ۱.۱.۱. به‌ازای $k = 1, 2, ..., n$، kامین گشتاور متغیر تصادفی X که با μ_k نشان داده می‌شود، به‌صورت $\mu_k = \mathbb{E}(X^k)$ تعریف می‌گردد.

نتیجه ۲.۱.۱. اگر $k = 1$، آن‌گاه گشتاور اول همان میانگین یا μ است.

تعریف ۳.۱.۱. kامین گشتاور X حول میانگین μ، kامین گشتاور مرکزی[۲] نامیده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu'_k = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^k\right]$$

نتیجه ۴.۱.۱. اگر $k = 2$، آن‌گاه گشتاور دوم مرکزی همان واریانس یا σ^2 است و σ، انحراف معیار است.

تعریف ۵.۱.۱. kامین گشتاور مرکزی نرمال شده[۳] متغیر تصادفی X از تقسیم kامین گشتاور مرکزی حول میانگین بر توان kام انحراف معیار به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر

$$N_k = \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mu)^k\right]}{\sigma^k}$$

[۱] Moment

[۲] Centeral moment

[۳] Normalized centeral moment

تعریف ۶.۱.۱. برای هر k، kامین گشتاور نمونه‌ای[۴] به‌صورت $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ تعریف می‌شود که X_1، X_2، $\ldots$، X_n نمونه‌هایی از جامعه هستند.

تعریف ۷.۱.۱. kامین گشتاور مطلق[۵] متغیر تصادفی X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{E}\left[|X|^k\right] = \begin{cases} \int |x|^k f(x)dx & \text{X پیوسته} \\ \sum_x |x|^k f(x) & \text{X گسسته} \end{cases}$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی احتمال(تابع احتمال) متغیر تصادفی X است.

۲.۱ تعریف شرط لیپ‌شیتس

جونیس و همکاران (۱۹۹۳)، ثابت لیپ‌شیتس را به‌صورت زیر بیان کردند.

تعریف ۱.۲.۱. اگر U زیرمجموعه بازی در $\mathbb{R}^n$ و تابع $f : U \to \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد، آنگاه گوییم، تابع f در در شرط لیپ‌شیتس[۶] از مرتبه k در نقطه $c \in U$ صدق می‌کند، اگر عدد مثبتی مانند M وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای تابع f در یک همسایگی از c

$$|f(x) - f(c)| \leq M|x - c|^k$$

ملاحظه ۲.۲.۱. هرگاه تنها از شرط لیپ‌شیتس اسم به میان آید، به معنای این است که $k = 1$.

ملاحظه ۳.۲.۱. اگر تابع f در شرط لیپ‌شیتس صدق کند، آنگاه f در همان نقطه c پیوسته است.

ملاحظه ۴.۲.۱. شرط لیپ‌شیتس را می‌توان جایگزین مشتق‌پذیری نمود؛ در حقیقت، مشتق‌پذیری در هر نقطه، شرط لیپ‌شیتس را نتیجه می‌دهد.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید $f(x) = x^2$ روی $[-1, 4]$ باشد. آن‌گاه

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\ &\leq \max_{x_1, x_2 \in [-1,4]} (|x_1 + x_2|)|x_1 - x_2| \\ &= 8|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

یعنی این‌که در این مورد می‌تواند $M = 8$ باشد.

[۴] Sample moment

[۵] Absolute moment

[۶] Condition lipschitz

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید $f(x)=x^m$ روی $I=[-a,a]$ باشد که a عدد گویا مثبت است. می‌خواهیم شرط لیپ‌شیتس را بررسی کنیم.
ابتدا x_1 و x_2 در I انتخاب می‌کنیم

$$|f(x_2)-f(x_1)| \;=\; |x_2^m-x_1^m|$$

می‌توانیم از رابطه زیر برای راحتی کار استفاده کنیم

$$\begin{aligned} x_2^m-x_1^m &= (x_2-x_1)(x_2^{m-1}-x_2^{m-2}x_1+...+x_2x_1^{m-2}+x_1^{m-1}) \\ &= (x_2-x_1)\sum_{i=0}^{m1}x_2^{m-1-i}x_1^i \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} (x_2-x_1)\sum_{i=0}^{m-1}x_2^{m-1-i}x_1^i &= \sum_{i=0}^{m-1}x_2^{m-i}x_1^i-\sum_{i=0}^{m-1}x_2^{m-1-i}x_1^{i+1} \\ &= x_2^m+\sum_{i=1}^{m-1}x_2^{m-i}x_1^i-\sum_{i=0}^{m-2}x_2^{m-1-i}x_1^{i+1}-x_1^m \end{aligned}$$

با تغییر اندیس در جمع دوم سمت راست

$$\begin{aligned} (x_2-x_1)\sum_{i=0}^{m-1}x_2^{m-1-i}x_1^i &= x_2^m+\sum_{i=1}^{m-1}x_2^{m-i}x_1^i-\sum_{i=1}^{m-1}x_2^{m-i}x_1^i-x_1^m \\ &= x_2^m-x_1^m \end{aligned}$$

بنابراین

$$|f(x_2)-f(x_1)| \;=\; |\sum_{i=0}^{m-1}x_2^{m-1-i}x_1^i||x_2-x_1|$$

حال به بررسی $|\sum_{i=0}^{m1}x_2^{m-1-i}x_1^i|$ می‌پردازیم

$$|\sum_{i=0}^{m-1}x_2^{m-1-i}x_1^i| \;\le\; \sum_{i=0}^{m-1}|x_2|^{m-1-i}|x_1|^i$$

چون x_1 و x_2 در $[-a,a]$ هستند، $|x_1|\le a$ و $|x_2|\le a$ است. بنابراین

$$|\sum_{i=0}^{m-1}x_2^{m-1-i}x_1^i| \;\le\; \sum_{i=0}^{m-1}a^{m-1-i}a^i=\sum_{i=0}^{m-1}a^{m-1}=ma^{m-1}$$

و

$$|f(x_2)-f(x_1)| \;\le\; ma^{m-1}|x_2-x_1|$$

۳.۱ توزیع پایدار

مندلبورت (۱۹۶۰)، توزیع پایدار را معرفی کرده است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید دو نمونه تصادفی مستقل و هم‌توزیع که پارامترهای مقیاس و مکان آن‌ها برابر هستند، وجود داشته باشد. اگر توزیع ترکیب خطی این دو نمونه یا متغیر با توزیع خود متغیر یکی باشد، آن‌گاه ترکیب خطی توزیع پایدار[۷] دارد. برای مثال فرض کنید X نرمال باشد، آن‌گاه برای هر دو نمونه مستقل $X_۱$ و $X_۲$ هم‌توزیع با X و ثابت‌های مثبت a و b، ترکیب خطی $aX_۱ + bX_۲$ هم‌توزیع $cX + d$ باشد.

در حالت کلی تابع چگالی احتمال را برای توزیع پایدار نمی‌توان به‌صورت تحلیلی بیان نمود، اما تابع مشخصه را می‌توان برای حالت پایدار نوشت. هر توزیع احتمالی با تبدیل فوریه تابع مشخصه $\phi(t)$ به‌صورت

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-ixt}dt$$

به‌دست می‌آید. به‌طور معادل متغیر تصافی X را پایدار می‌نامند، اگر تابع مشخصه آن را به‌صورت زیر

$$\varphi(t;\alpha,\beta,c,\mu) = \exp\left[it\mu - |ct|^{\alpha}(۱ - i\beta\operatorname{sgn}(t)\Phi)\right]$$

نوشت، که sgn تابع علامت t است و برای همه $\alpha \neq ۱$، $\Phi = \tan(\pi\alpha/۲)$ و به‌ازای $\alpha = ۱$، به‌صورت $\Phi = -\frac{۲}{\pi}\log|t|$ است.

خانواده توزیع‌های پایدار با ۴ پارامتر α، β، c و μ، پارامتری شده‌اند. مهم‌ترین پارامتر، پارامتر پایداری یا همان α است.

ملاحظه ۲.۳.۱. در توزیع‌های پایدار، $۰ < \alpha \leq ۲$ است. $\alpha = ۲$، توزیع نرمال و $\alpha = ۱$، توزیع کوشی را نتیجه می‌دهد.

ملاحظه ۳.۳.۱. $\beta \in [-۱,۱]$، پارامتر چولگی است. در حالت عادی در این محدوده چولگی معمولی تعریف نشده است، مثلا برای $\alpha < ۲$، توزیع گشتاورهای دوم و بالاتر را نمی‌پذیرد و چولگی برای سومین گشتاور مرکزی تعریف شده است.

ملاحظه ۴.۳.۱. در توزیع‌های پارامتر $|c| > ۰$، پارامتر مقیاس و $\mu \in (-\infty,\infty)$ ، پارامتر مکان است.

گزاره ۵.۳.۱. اگر $\alpha = ۲$، توزیع پایدار به توزیع نرمال با واریانس $۲c^۲$ و میانگین μ کاهش می‌یابد و پارامتر چولگی β اثر ندارد.

گزاره ۶.۳.۱. برای $\alpha = ۱$ و $\beta = ۰$، توزیع پایدار به توزیع کوشی با پارامتر مقیاس c و پارامتر مکان μ، تبدیل می‌شود و برای $\alpha = ۰/۵$ و $\beta = ۱$ توزیع لوی[۸] با پارامتر مقیاس c و پارامتر مکان μ را نتیجه می‌دهد.

---

[۷] Stability distribution

[۸] Levy distribution

۴.۱ متغیرهای تصادفی در دسته‌های خاص

۱.۴.۱ وابستگی پیوندی منفی

متغیرهای تصادفی پیوندی منفی توسط جاج و پروشان (۱۹۸۳)، بیان شده است.

تعریف ۱.۴.۱. متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_k پیوندی منفی[۹] هستند، اگر برای هر دو زیر مجموعه جدا از هم A_1 و A_2 از مجموعه $\{1, 2, ..., k\}$ و توابع صعودی f و g رابطه

$$\operatorname{cov}\left(f(X_i;\ \ i\in A_1),\ \ g(X_j;\ \ j\in A_2)\right)\leq 0$$

برقرار باشد.

ملاحظه ۲.۴.۱. اگر f و g دو تابع نزولی باشند، تعریف ۱.۴.۱ برقرار است. زیرا می‌دانیم اگر دو تابع نزولی باشند، منفی همان توابع صعودی می‌شود. به‌عبارت دیگر

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(-f(X_i;\ \ i\in A_1),\ \ -g(X_j;\ \ j\in A_2)\right)&\\ &= \operatorname{cov}\left(f(X_i;\ \ i\in A_1),\ \ g(X_j;\ \ j\in A_2)\right)\\ &\leq 0\end{aligned}$$

ملاحظه ۳.۴.۱. فرض کنید A_1، A_2، ...، A_n زیرمجموعه‌های جدا از هم مجموعه $\{1, 2, ..., k\}$ و f_1، f_2، ...، f_m توابعی مثبت و صعودی باشند. اگر X_1، X_2، ...، X_k متغیرهای تصادفی پیوندی منفی باشند، آن‌گاه

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j;\ \ j\in A_i)\right)\leq\prod_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left(f_i(X_j;\ \ j\in A_i)\right)$$

ملاحظه ۴.۴.۱. اگر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_k پیوندی منفی باشند، هر زیرمجموعه‌ای از دو یا بیشتر از آن‌ها نیز پیوندی منفی می‌باشند.

ملاحظه ۵.۴.۱. هر زیرمجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل، پیوندی منفی است.

مثال ۶.۴.۱. متغیرهای تصادفی همبسته منفی نرمال، پیوندی منفی هستند. فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نرمال باشند، به‌عبارت دیگر

$$(X_1, X_2)\sim N(\mu_1\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

اگر $\rho < 0$ باشد، آن‌گاه X_1 و X_2 همبسته منفی نرمال هستند. بنابراین پیوندی منفی نیز می‌باشد.

ملاحظه ۷.۴.۱. توابع صعودی روی زیرمجموعه‌های جدا از هم، از یک مجموعه از متغیرهای پیوندی منفی، پیوندی منفی است.

[۹] Negatively associated

۲.۴.۱ وابستگی زبرجمعی منفی

متغیرهای تصادفی وابسته زبرجمعی منفی[۱۰] توسط هو (۲۰۰۰) بیان شده است. این نوع وابستگی بر اساس توابع زبرجمعی شکل گرفته، که در ادامه ابتدا توابع زبرجمعی که توسط کمپرمن (۱۹۷۷) تعریف شده است را بیان کرده و سپس وابستگی زبرجمعی منفی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۴.۱. تابع $\phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ تابع زبرجمعی[۱۱] است، اگر برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$

$$\phi(\mathbf{x}\vee\mathbf{y})+\phi(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\geq\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})$$

که $\vee$ ماکسیمم مولفه‌ای و $\wedge$ مینیمم مولفه‌ای است، یعنی $\mathbf{x}\vee\mathbf{y}=(x_1\vee y_1,...,x_m\vee y_m)$ و $\mathbf{x}\wedge\ \mathbf{y}=(x_1\wedge y_1,...,x_m\wedge y_m)$.

تعریف ۹.۴.۱. تابع $\phi:\mathbb{Q}^m\to\mathbb{Q}$ تابع زبرجمعی تعمیم یافته[۱۲] است، اگر برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$

$$\phi(\mathbf{x}\vee\mathbf{y})+\phi(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\geq\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})$$

که $\vee$ ماکسیمم مولفه‌ای و $\wedge$ مینیمم مولفه‌ای است، یعنی $\mathbf{x}\vee\mathbf{y}=(x_1\vee y_1,...,x_m\vee y_m)$ و $\mathbf{x}\wedge\ \mathbf{y}=(x_1\wedge y_1,...,x_m\wedge y_m)$ و $\mathbb{Q}$ مجموعه همه اعداد موهومی و حقیقی است.

توجه ۱۰.۴.۱. در این پایان‌نامه هرجا اسم از زبرجمعی آورده شده است، منظور زبرجمعی تعمیم یافته است.

با توجه به تعریف ۹.۴.۱، بررسی زبرجمعی بودن یک تابع، به آسانی انجام‌پذیر نیست. کمپرمن (۱۹۷۷)، روشی را ارایه کرد که زبرجمعی بودن تابع را به سادگی می‌توان نشان داد. لم زیر این روش را بیان می‌کند.

لم ۱۱.۴.۱. اگر تابع ϕ دارای مشتق جزیی مرتبه دوم پیوسته باشد، زبرجمعی بودن تابع ϕ معادل است با

$$\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}\geq 0,\qquad\qquad 1\leq i\neq j\leq m$$

تعریف ۱۲.۴.۱. بردار تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_m)$ وابسته زبرجمعی منفی است، اگر برای هر تابع زبرجمعی ϕ

$$\mathbb{E}\left(\phi(X_1,X_2,...,X_m)\right)\leq\mathbb{E}\left(\phi(X_1^*,X_2^*,...,X_m^*)\right)$$

که X_1^*، X_2^*، . . . ، X_m^* متغیرهای تصادفی مستقل هستند و به‌ازای $1\leq i\leq m$، X_i و X_i^* هم‌توزیع هستند.

تعریف ۱۳.۴.۱. فرض کنید $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_m)$ و $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,...,Y_n)$ دو بردار تصادفی مستقل باشند. اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ وابسته زبرجمعی منفی باشند، آنگاه $(X_1,X_2,...,X_m,Y_1,Y_2,...,Y_n)$ نیز وابسته زبرجمعی منفی است.

---

[10] Negatively superadditive dependent

[11] Superadditive function

[12] Generalized superadditive function

ملاحظه ۱۴.۴.۱. وابستگی پیوندی منفی یک زوج متغیر تصادفی با وابستگی زیرجمعی منفی آن معادل است.

لم ۱۵.۴.۱. (کریستوفیدز و واگلاتو، ۲۰۰۴) اگر X_1، X_2، ...، X_m پیوندی منفی باشند، آن‌گاه وابسته زیرجمعی منفی نیز می‌باشند.

۳.۴.۱ پذیرفتنی

آنتونینی (۲۰۰۸)، متغیرهای تصادفی پذیرفتنی را به‌صورت زیر بیان کرد.

تعریف ۱۶.۴.۱. یک مجموعه متناهی از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n پذیرفتنی[۱۳] نامیده می‌شود، اگر برای هر λ حقیقی

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda\sum_{j=1}^{n}X_j\right\}\right]\leq\prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda X_j\right\}\right]$$

تعریف ۱۷.۴.۱. یک مجموعه متناهی از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n پذیرفتنی تعمیم یافته[۱۴] نامیده می‌شود، اگر برای هر λ

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\lambda\sum_{j=1}^{n}X_j\right\}\right]\leq\prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\lambda X_j\right\}\right]$$

توجه ۱۸.۴.۱. در این پایان‌نامه هرجا اسم از پذیرفتنی آورده شده است، منظور پذیرفتنی تعمیم یافته است.

گزاره ۱۹.۴.۱. یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی $\{X_n, n\geq 1\}$، پذیرفتنی است، اگر هر زیر مجموعه متناهی از آن، پذیرفتنی باشد.

سانگ (۲۰۱۱)، شرایط را ضعیف‌تر کرده و نتیجه را در قالب تعریف زیر بیان نموده است.

تعریف ۲۰.۴.۱. یک مجموعه متناهی از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n، δ-پذیرفتنی می‌نامیم، اگر برای $\delta>0$ و هر مقدار حقیقی $|\lambda|\leq\delta$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\right\}\right]\leq\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda X_i\right\}\right]$$

گزاره ۲۱.۴.۱. با توجه به تعریف ۲۰.۴.۱ یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی $\{X_n, n\geq 1\}$، δ-پذیرفتنی است، اگر هر زیر مجموعه متناهی از آن، δ-پذیرفتنی باشد.

[۱۳] Acceptable

[۱۴] Generalized acceptable

مثال جالب از متغیرهای تصادفی پذیرفتنی برای دنباله $\{X_n, n \geq 1\}$ را به‌صورت زیر شرح می‌دهیم. فلر (۱۹۷۱) نشان داد، ممکن است برای دو متغیر تصادفی X و Y، چگالی مجموع آن‌ها برابر با چگالی پیچش آن‌ها باشد. درحالی‌که X و Y نه مستقل هستند و نه وابسته ضعیف منفی می‌باشند. چون متغیرها کران‌دار هستند، تبدیل لاپلاس $\mathbb{E}(\exp\{\lambda X\})$ و $\mathbb{E}(\exp\{\lambda Y\})$ به‌ازای هر λ متناهی است و چون چگالی مجموع آن‌ها پیچشی از چگالی‌ها است، داریم

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda(X+Y)\}) = \mathbb{E}(\exp\{\lambda X\})\mathbb{E}(\exp\{\lambda Y\})$$

۴.۴.۱ j-وابسته

اسچونفیلد (۱۹۷۱) کلاسی از وابستگی‌های متغیرهای تصادفی که در سری‌های زمانی کاربرد فراوان دارد، به‌صورت زیر بیان کرده است.

تعریف ۲۲.۴.۱. خانواده $\{X_t\}$ از بردارهای تصادفی X_t، j-وابسته[15] نامیده می‌شود، اگر یک j صحیح و نامنفی وجود داشته باشد، به‌طوری‌که زیرمجموعه $\{X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_p}\}$ به‌طور تصادفی مستقل از هر زیرمجموعه $\{X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, ..., X_{\tau_q}\}$ باشد که مجموعه‌های اندیس $\{t_m\}_{m=1,2,...,p}$ و $\{\tau_k\}_{k=1,2,...,q}$ تحت شرط زیر انتخاب شوند

$$\min_m\{t_m\} - \max_k\{\tau_k\} > j$$

۵.۱ مارتینگل

مارتینگل توسط ویل (۱۹۳۹)، تعریف شده است. مارتینگل نقش اساسی در نظریه احتمال و آمار دارد. در این بخش ابتدا از گات (۲۰۰۶) میدان و سیگما میدان تعریف شده است و سپس تعریفی از مارتینگل، برخی از ویژگی‌های مارتینگل و چند مثال را از گات (۲۰۰۶)، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $A \in C$ یک مجموعه باشد. گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های A یک میدان نامیده می‌شود، اگر

الف) $\phi \in C$، که ϕ مجموعه تهی است.

ب) اگر $B \in C$، آن‌گاه $B^c \in C$،

ج) اگر $B \in C$ و $D \in C$، آن‌گاه $B \cup D \in C$.

بنابراین، یک میدان از زیرمجموعه‌های A، مجموعه‌ای ناتهی است که تحت عمل‌های مکمل و اجتماع بسته است، همچنین چون $(B \cap D)^c = B^c \cup D^c$، آن‌گاه تحت اشتراک نیز بسته است. بنابراین میدان[16] مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های A تحت اجتماع متناهی از زیرمجموعه‌های بسته است، یعنی این‌که اگر $A_1, ..., A_n \in C$، آن‌گاه $\cup_{i=1}^n A_i \in C$. برای مثال، مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های A یا $\{\phi, A\}$ در تعریف میدان صدق می‌کنند.

[15] j-dependent

[16] Field

تعریف ۱.۵.۲. مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، تشکیل سیگما میدان[۱۷] می‌دهند.

تعریف ۱.۵.۳. اگر X_1، X_2، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{F}_1$، $\mathcal{F}_2$، ... دنباله‌ای از سیگما میدان‌ها در $\mathcal{F}$ باشند و برای هر $n \geq 0$

۱) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$،

۲) X_n در $\mathcal{F}_n$ اندازه‌پذیر باشد،

۳) $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$،

۴) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$،

برقرار باشند، آن‌گاه دنباله $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ یک مارتینگل[۱۸] است.

اگر $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$، بدیهی است شرط اول برقرار است. بنابراین اگر $A \in \mathcal{F}_n$ باشد، در این‌صورت

$$\int_A X_{n+1} dP = \int_A X_n dP \tag{۱.۱}$$

اکنون اگر $h > 1$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP = ... = \int_A X_{n+h} dP$$

در نتیجه

$$\mathbb{E}(X_{n+h}|\mathcal{F}_n) = X_n$$

با جایگذاری $A = \Omega$ در رابطه (۱.۱)، تساوی زیر برقرار می‌شود.

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \ldots$$

تعریف ۱.۵.۴. اگر متغیر تصادفی X_n در شرایط زیر صدق کند

۱) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$،

۲) X_n در $\mathcal{F}_n$ اندازه‌پذیر باشد،

۳) $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$،

۴) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$،

---

[۱۷] σ-field

[۱۸] Martingale

آن‌گاه X_n زیرمارتینگل[۱۹] متناظر با $\mathcal{F}_n$ است.
در این حالت نیز، اگر $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$، برای هر $A \in \mathcal{F}_n$

$$\int_A X_{n+1} dP \geq \int_A X_n dP$$

اکنون اگر $A = \Omega$ باشد، آن‌گاه برای $h > 1$

$$\mathbb{E}(X_{n+h}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$$

و

$$\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2) \leq ...$$

برقرار می‌باشد.

تعریف ۵.۵.۱. اگر متغیر تصادفی X_n در شرایط

۱) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$،

۲) X_n در $\mathcal{F}_n$ اندازه‌پذیر باشد،

۳) $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$،

۴) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$،

صدق کند، آن‌گاه X_n زبرمارتینگل[۲۰] متناظر با $\mathcal{F}_n$ است.
در این حالت نیز اگر $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$، برای هر $A \in \mathcal{F}_n$

$$\int_A X_{n+1} dP \leq \int_A X_n dP$$

اکنون اگر $A = \Omega$ باشد، برای $h > 1$،

$$\mathbb{E}(X_{n+h}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$$

و

$$\mathbb{E}(X_1) \geq \mathbb{E}(X_2) \geq ...$$

برقرار می‌باشد.

برای مارتینگل، زیرمارتینگل و زبرمارتینگل تعریف‌هایی معادل نیز به صورت زیر وجود دارد.

ملاحظه ۶.۵.۱. دنباله X_n مارتینگل متناظر با $\mathcal{F}_n$ است، اگر و فقط اگر به‌ازای $0 \leq m \leq n$

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m$$

به‌عبارت دیگر

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_m) = ...\\ &= \mathbb{E}(X_{m+1}|\mathcal{F}_m) = X_m\end{aligned}$$

[۱۹] Submartingale

[۲۰] Supermartingale

ملاحظه ۷.۵.۱. دنباله X_n زیرمارتینگل متناظر با $\mathcal{F}_n$می‌باشد، اگر و فقط اگر به‌ازای $0 \leq m \leq n$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_m) \geq X_m$$

به‌عبارت دیگر

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_m) \geq \mathbb{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_m) \geq \dots \\ &\geq \mathbb{E}(X_{m+1}|\mathcal{F}_m) = X_m\end{aligned}$$

ملاحظه ۸.۵.۱. دنباله X_n زبرمارتینگل متناظر با $\mathcal{F}_n$ است، اگر و فقط اگر به‌ازای $0 \leq m \leq n$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_m) \leq X_m$$

به‌عبارت دیگر

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_m) \leq \mathbb{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_m) \leq \dots \\ &\leq \mathbb{E}(X_{m+1}|\mathcal{F}_m) = X_m\end{aligned}$$

تعریف ۹.۵.۱. دنباله $\{U_n; n \geq 0\}$ دنباله مارتینگل تفاضلی[۲۱] متناظر با $\mathcal{F}_n$ است، اگر

$$\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$$

تعریف ۱۰.۵.۱. دنباله $\{U_n; n \geq 0\}$ دنباله زیرمارتینگل تفاضلی[۲۲] متناظر با $\mathcal{F}_n$ است، اگر

$$\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq 0$$

تعریف ۱۱.۵.۱. دنباله $\{U_n; n \geq 0\}$ دنباله زبرمارتینگل تفاضلی[۲۳] متناظر با $\mathcal{F}_n$ است، اگر

$$\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq 0$$

لم ۱۲.۵.۱. فرض کنید $\{U_n; n \geq 0\}$ دنباله متناظر با $\mathcal{F}_n$ و انتگرال‌پذیر باشد. قرار دهید $X_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ در این صورت

الف) $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ مارتینگل است، اگر و فقط اگر $\{(U_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ دنباله مارتینگل تفاضلی باشد.

ب) $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ زیرمارتینگل است، اگر و فقط اگر $\{(U_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ دنباله زیرمارتینگل تفاضلی باشد.

پ) $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ زبرمارتینگل است، اگر و فقط اگر $\{(U_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ دنباله زبرمارتینگل تفاضلی باشد.

ت) امید دنباله مارتینگل تفاضلی صفر است.

---

[۲۱] Difference martingale sequence

[۲۲] Difference submartingale sequence

[۲۳] Difference supermartingale sequence

ث) امید ریاضی دنباله زیرمارتینگل تفاضلی نامنفی است.

ج) امید ریاضی دنباله زبرمارتینگل تفاضلی نامثبت است.

فریدمن (۱۹۷۵)، نابرابری نمایی مارتینگل را به‌صورت لم زیر ارایه نمود.

لم ۱۳.۵.۱. فرض کنید شرایط زیر برقرار باشد

$$V_n = \mathrm{var}\left\{X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right\} \tag{۲.۱}$$

$$|X_n| \leq 1 \quad , \quad \mathbb{E}\left\{X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right\} = 0 \tag{۳.۱}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} S_n &= X_1 + X_2 + ...X_n \\ T_n &= V_1 + V_2 + ... + V_n \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

فرض کنید τ یک زمان توقف و K یک عدد حقیقی مثبت و $\mathbb{P}\left\{|X_i| \leq K; i \leq \tau\right\} = 1$ باشند. آن‌گاه برای همه اعداد حقیقی مثبت a و b، نابرابری نمایی مارتینگل[۲۴] به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{P}\left\{S_n \geq a \quad, T_n \leq b \quad ; \quad n \leq \tau\right\} \leq \exp\left[-\frac{a^2}{2(Ka+b)}\right]$$

تعریف ۱۴.۵.۱. فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ زیر مارتینگل نامنفی باشد. آن‌گاه نابرابری دوب[۲۵] به‌ازای $p > 1$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{E}(\max_{1\leq j\leq n} X_j^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(X_n^p)$$

ریو (۲۰۰۹)، نابرابری را برای مارتینگل تفاضلی در قالب لم زیر بیان داشت.

لم ۱۵.۵.۱. فرض کنید X_1، X_2، ...، X_n مارتینگل‌های تفاضلی باشند و $p \geq 2$، در این‌صورت

$$\| \sum_{i=1}^{n} X_i \|_p^2 \leq (p-1) \sum_{i=1}^{n} \| X_i \|_p^2$$

مثال ۱۶.۵.۱. فرض کنید Y_1، Y_2، ... متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر باشد و به‌ازای $n \geq 0$، $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$، $Y_0 = X_0 = 0$ باشد. همچنین فرض کنید

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_0, Y_1, Y_2, ..., Y_n\} = \sigma\{X_0, X_1, X_2, ..., X_n\}$$

در این‌صورت $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ مارتینگل و $\{(Y_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ دنباله مارتینگل تفاضلی است. چون

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + 0 = X_n$$

[۲۴] Martingale exponential inequality

[۲۵] Doob inequality

مثال ۱۷.۵.۱. فرض کنید Y_1، Y_2، ... متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین یک باشند و به‌ازای $n \geq 1$

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k$$

که $Y_0 = X_0 = 1$ و $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ یک سیگما میدان است. در این‌صورت $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ مارتینگل است، چون

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_n.Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= X_n.\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= X_n.1 = X_n \end{aligned}$$

مثال ۱۸.۵.۱. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و همچنین $\{(X_n^{(1)}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ و $\{(X_n^{(2)}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ مارتینگل باشند. آن‌گاه

۱- $\{(aX_n^{(1)} + bX_n^{(2)}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ مارتینگل است،

۲- $\{(\max\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ زیرمارتینگل است،

۳- $\{(\min\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ زبرمارتینگل است.

۱) در حالت اول

$$\mathbb{E}(aX_{n+1}^{(1)} + bX_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n) = a\mathbb{E}(X_{n+1}^{(1)}|\mathcal{F}_n) + b\mathbb{E}(X_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n) = aX_n^{(1)} + bX_n^{(2)}$$

۲) چون

$$\max\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\} \geq X_n^{(1)}$$

و

$$\max\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\} \geq X_n^{(2)}$$

درنتیجه

$$\mathbb{E}\left(\max\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \geq \mathbb{E}\left(X_n^{(1)}|\mathcal{F}_{n-1}\right)$$

و

$$\mathbb{E}\left(\max\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \geq \mathbb{E}\left(X_n^{(2)}|\mathcal{F}_{n-1}\right)$$

بنابراین

$$\mathbb{E}(\max\{X_{n+1}^{(1)}, X_{n+1}^{(2)}\}|\mathcal{F}_n) \geq \max\{\mathbb{E}(X_{n+1}^{(1)}|\mathcal{F}_n), \mathbb{E}(X_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n)\} = \max\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}$$

۳) چون

$$\min\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\} \leq X_n^{(1)}$$

و

$$\min\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\} \leq X_n^{(2)}$$

درنتیجه

$$\mathbb{E}\left(\min\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n^{(1)}|\mathcal{F}_{n-1}\right)$$

و

$$\mathbb{E}\left(\min\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n^{(2)}|\mathcal{F}_{n-1}\right)$$

بنابراین

$$\mathbb{E}(\min\{X_{n+1}^{(1)}, X_{n+1}^{(2)}\}|\mathcal{F}_n) \leq \min\{\mathbb{E}(X_{n+1}^{(1)}|\mathcal{F}_n), \mathbb{E}(X_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n)\} = \min\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}$$

پس هر سه حالت برقرار شد.

۶.۱ روش جمع‌پذیری سیسارو

مجموعه‌ای از روش‌ها برای جمع سری از اعداد و توابع توسط سیسارو (۱۸۹۰)، معرفی شده‌است و با C_k نشان داده می‌شود. سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ با مجموع جزیی S_n و مجموع S با روش سیسارو مرتبه k یا C_k جمع‌پذیر است، اگر

$$\sigma_n^2 = \frac{S_n^k}{A_n^k} \to S, \quad n \to \infty$$

که S_n^k و A_n^k با ضرایب بسط

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \\
\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n &= \frac{1}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. بسط‌های σ_n^k و A_n^k می‌توانند به شکل

$$\begin{aligned}
\sigma_n^k &= \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} S_\nu = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\nu} a_\nu \\
A_n^k &= \binom{k+n}{n} = \frac{(k+1)\ldots(k+n)}{n!}, \quad k \neq -1, -2, \ldots
\end{aligned}$$

به‌دست آیند.

روش C_k یک روش جمع ماتریسی با ماتریس $[a_{n\nu}]$ است. در زیر آرایه‌های این ماتریس بیان شده است.

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \frac{A_{n-\nu}^{k-1}}{A_n^k} & \nu \leq n \\ 0 & \nu > n \end{cases}$$

برای $k = 0$ این روش منطبق با همگرایی معمولی و برای $k = 1$، روش میانگین حسابی است. روش C_k برای $k \geq 0$ کاملا منظم هستند ولی برای $k < 0$ نظم خاصی ندارند. کارآیی این روش وقتی k افزایش می‌یابد، بیشتر می‌شود. اگر سری با روش C_k جمع‌پذیر باشد، آن‌گاه بسط سری با $C_{k'}$ برای $k' > k > 1$ نیز جمع‌پذیر است. این خاصیت برای $k < -1$ وجود ندارد، زیرا در روش C_k در جمع‌پذیری سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$، $a_n = o(n_k)$ است.

فصل ۲

نابرابری گشتاوری در دسته‌های خاص از وابستگی

۱.۲ مقدمه

تقریبا در هر شاخه از علوم کمی، نابرابری‌ها نقش مهمی در پیشرفت آن علم ایفا می‌کنند و حتی از برابری‌ها بیشتر مورد توجه هستند. انتخاب یا تایید کردن نابرابری مناسب معمولا یک ترقی کلیدی در حل یک مساله است. اگر مقدار دقیق گشتاور قابل محاسبه نباشد، می‌توان از نابرابری‌های موجود استفاده کرد. در این شرایط کران بالا یا پایین به‌دست آورده می‌شود، البته این کران انتخابی باید به‌ترین و دقیق‌ترین کران باشد، یعنی کران هر چه به عبارت مورد بررسی نزدیک‌تر باشد، جواب نهایی ما قابل اعتمادتر می‌شود. از متداول‌ترین نابرابری‌های گشتاوری می‌توان به موارد زیر اشاره کرد، برای کسب اطلاعات بیشتر به گات (۲۰۰۶) مراجعه کنید.

۱. **نابرابری هولدر** [۱] : فرض کنید $p > ۱$، $q > ۱$ و $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ باشد. اگر $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ و $\mathbb{E}|Y|^q < \infty$، آن‌گاه

$$\mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{۱/p}(\mathbb{E}|Y|^q)^{۱/q}$$

برای $۰ < p < ۱$ و $q = -\frac{p}{۱-p}$

$$\mathbb{E}|XY| \geq (\mathbb{E}|X|^p)^{۱/p}(\mathbb{E}|Y|^q)^{۱/q}$$

تعمیمی از نابرابری هولدر است.

۲. **نابرابری کوشی-شوارتز**[۲] : در نابرابری هولدر اگر $p = q = ۲$ باشد

$$|\mathbb{E}(XY)|^۲ \leq (\mathbb{E}|X|^۲)^{۱/۲}(\mathbb{E}|Y|^۲)^{۱/۲} = \sqrt{\mathbb{E}(X^۲).\mathbb{E}(Y^۲)} = \| X \|_۲ . \| Y \|_۲$$

[۱] Holder Inequality

[۲] Cauchy-Schwartz Inequality

۳. **نابرابری ینسن**[۳] : فرض کنید $h(.)$ تابعی محدب روی $\mathbb{R}$ و X یک متغیر تصادفی با تکیه‌گاه $\mathbb{R}$ باشد. اگر $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{E}(h(X))$ موجود باشد، آن‌گاه

$$h(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(h(X))$$

۴. **نابرابری لیاپانوف**[۴] : فرض کنید X متغیر تصادفی و s و r اعداد حقیقی که $0 \leq s \leq r$ باشند، آن‌گاه

$$(\mathbb{E}(|X|^s))^{\frac{1}{s}} \leq (\mathbb{E}(|X|^r))^{\frac{1}{r}}$$

۵. **نابرابری** C_r[۵] : فرض کنید X_1، X_2، $\ldots$، X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشند. اگر عدد حقیقی مثبت $r > 0$ وجود داشته باشد که به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، $\mathbb{E}|X_i|^r < \infty$ باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{E}|\sum_{i=1}^{n} X_i|^r \leq C_r \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^r$$

که C_r مقادیر زیر را اختیار می‌کند

$$C_r = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 2^{r-1} & r \geq 1 \end{cases}$$

در این فصل ابتدا نابرابری‌هایی را در حالت استقلال بررسی کرده و آن‌ها را به مجموع متغیرهای تصادفی تعمیم داده و در بعضی موارد نابرابری‌ها را برای متغیرهای با شرط پذیرفتنی و وابسته زیرجمعی منفی به‌ترتیب طبق تعاریف ۱۷.۴.۱ و ۹.۴.۱ در فصل اول، بررسی می‌کنیم.

۲.۲ تعاریف و لم‌های مورد نیاز

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی باشد، آن‌گاه تابع مشخصه[۶] X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX))$$

تابع مشخصه از دو قسمت حقیقی و موهومی تشکیل شده است، که قسمت حقیقی به صورت $\mathcal{R}(\varphi_X(t))$ و قسمت موهومی به صورت $\mathcal{I}(\varphi_X(t))$ نشان داده می‌شود. بنابراین

$$\varphi_X(t) = \mathcal{R}(\varphi_X(t)) + i\mathcal{I}(\varphi_X(t))$$

[۳] Jensen Inequality

[۴] Lyapunov Inequality

[۵] C_r Inequality

[۶] Characteristic Function

تعریف ۲.۲.۲. برای مقدار ثابت c، متغیر تصادفی X حول c متقارن[۷] است، اگر و فقط اگر $X-c$ و $X+c$ هم‌توزیع باشند.

ملاحظه ۳.۲.۲. اگر $c=0$ باشد، متغیر تصادفی X را متقارن می‌گویند.

در ادامه برخی خواص تابع مشخصه از گات (۲۰۰۶) در قالب لم بیان و در بعضی موارد اثبات شده است.

لم ۴.۲.۲. اگر X متغیر تصادفی با تابع مشخصه $\varphi_X(t)$ باشد. آن‌گاه
$\overline{\varphi_X(t)}=\varphi_X(-t)=\varphi_{-X}(t)$

برهان. بنا به تعریف مزدوج در اعداد مختلف،

$$\begin{aligned}\overline{e^{itx}} &= \overline{\cos(tx)+i\sin(tx)}=\cos(tx)-i\sin(tx)=e^{(-i)tx}\\ &= \cos((-t)x)+i\sin((-t)x)=e^{i(-t)x}\\ &= \cos(t(-x))+i\sin(t(-x))=e^{it(-x)}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}(e^{(-i)tX})=\mathbb{E}(e^{i(-t)X})=\mathbb{E}(e^{it(-X)}).$$

□

لم ۵.۲.۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند، آن‌گاه $\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)<\infty$، اگر و فقط اگر X و Y هم‌توزیع باشند.

لم ۶.۲.۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توابع مشخصه به ترتیب $\varphi_X(t)$ و $\varphi_Y(t)$ باشند، آن‌گاه

۱) $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t).\varphi_Y(t)$،

۲) $\varphi_{X-Y}(t)=\varphi_X(t).\varphi_Y(-t)$.

برهان. با توجه به تعریف تابع مشخصه و استقلال متغیرهای تصادفی

$$1)\varphi_{X+Y}(t)=\mathbb{E}(e^{it(X+Y)})=\mathbb{E}(e^{itX}.e^{itY})=\mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{itY})=\varphi_X(t).\varphi_Y(t)$$

$$2)\varphi_{X-Y}(t)=\mathbb{E}(e^{it(X-Y)})=\mathbb{E}(e^{itX}.e^{it(-Y)})=\mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{i(-t)Y})=\varphi_X(t).\varphi_Y(-t)$$

□

[۷] Symmetry

نتیجه ۷.۲.۲. اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع مشخصه $\varphi(t)$ باشند، آن‌گاه

۱) $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi(t)\varphi(t) = (\varphi(t))^{۲}$،

۲) $\varphi_{X-Y}(t) = \varphi(t)\varphi(-t) = |\varphi(t)|^{۲}$.

برهان. با توجه به برهان لم ۶.۲.۲ و فرض هم‌توزیع بودن

$$\begin{aligned}
۱)\ \varphi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX}.e^{itY}) \\
&= \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}^{۲}(e^{itX}) \\
&= (\mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)))^{۲} \\
&= \varphi^{۲}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
۲)\ \varphi_{X-Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{it(X-Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX}.e^{it(-Y)}) \\
&= \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{it(-X)}) \\
&= (\mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)))(\mathbb{E}(\cos(tX)) - i\mathbb{E}(\sin(tX))) \\
&= \mathbb{E}^{۲}(\cos(tX)) + \mathbb{E}^{۲}(\sin(tX)) \\
&= |\varphi(t)|^{۲}
\end{aligned}$$

□

لم ۸.۲.۲. متغیر تصادفی X متقارن است، اگر و فقط اگر $\varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$.

برهان. با توجه به لم ۴.۲.۲،

$$\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$$

اگر $\varphi_X(t)$ حقیقی مقدار باشد، آن‌گاه $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t)$ و این دلالت دارد بر این‌که $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t)$، یعنی X و $-X$ تابع مشخصه یکسان دارند. از این‌رو توزیعشان نیز یکی می‌شود. از طرف دیگر اگر هم‌توزیع باشند، آن‌گاه $\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t)$، که با لم ۴.۲.۲

$$\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$$

یعنی $\varphi_X(t)$ حقیقی مقدار است. □

لم ۹.۲.۲. (هیتکت و پیتمن، ۱۹۷۲) فرض کنید X دارای تابع مشخصه $\varphi_X(t)$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $n \geq ۱$

$$۱ - \mathcal{R}(\varphi_X(nt)) \leq n(۱ - \mathcal{R}^n(\varphi_X(t)))$$

لم ۱۰.۲.۲. (ون بهر، ۱۹۶۵) فرض کنید X یک متغیر تصادفی ساده با تابع توزیع $F(x)$ و تابع مشخصه $\varphi_X(t)$ باشد، اگر برای $p > ۰$، $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ و برای عدد صحیح و غیر منفی k، $\alpha_k = \mathbb{E}(X^k)$، آن‌گاه

$$\mathbb{E}|X|^p = |c(p)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{R}(\varphi_X(t)) - \sum\limits_{k=۰}^{s} \frac{(-۱)^k \alpha_{۲k} t^{۲k}}{(۲k)!}}{|t|^{p+۱}} dt \tag{۱.۲}$$

که s قسمت صحیح $\frac{p}{۲}$ است و

$$\begin{aligned} c(p) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱-\cos(u)}{|u|^{p+۱}} du\right) - ۱ \\ &= \left(\frac{\Gamma(p+۱)}{\pi}\right) \cos\frac{(p+۱)\pi}{۲} \end{aligned}$$

لم ۱۱.۲.۲. (ون بهر، ۱۹۶۵) زمانی‌که $۰ < p < ۲$ می‌توان از

$$\mathbb{E}|X|^p = -c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(۱-\mathcal{R}(\varphi_X(t)))}{|t|^{p+۱}} dt \tag{۲.۲}$$

استفاده کرد، که در آن

$$|x|^p = -c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(۱-\cos(xt))}{|t|^{p+۱}} dt \tag{۳.۲}$$

برهان. با استفاده از رابطه (۳.۲)، برای حالتی که $۰ < p < ۲$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(۱-\cos(xt))}{|t|^{p+۱}} dt\right) dF(x) \\ &= -c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (۱-\cos(xt)) dF(x)\right) dt \\ &= -c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} \mathbb{E}(۱-\cos(xt)) dt \\ &= -c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱-\mathcal{R}(\varphi_X(t))}{|t|^{p+۱}} dt \end{aligned}$$

با توجه به این‌که تابع زیر انتگرال نامنفی است، می‌توان ترتیب انتگرال‌ها را تغییر داد. □

۳.۲ نابرابری گشتاور مطلق

این بخش قسمت اصلی این فصل را تشکیل می‌دهد. نتایج این فصل از یوشاکوف (۲۰۱۱)، به‌دست آمده که شامل چند نابرابری گشتاوری مطلق برای متغیرهای تصادفی مستقل بیان و اثبات شده است.

سپس این نابرابری‌ها به مجموع متغیرهای تصادفی تعمیم داده شده و در بعضی حالت‌ها نتایجی برای شرایط خاص به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۳.۲ (*). فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ باشد. آن‌گاه

۱) اگر $۰ < p < ۲$

$$\mathbb{E}(|X-Y|^p) \leq \mathbb{E}(|X+Y|^p)$$

نابرابری به برابری تبدیل می‌شود، اگر و فقط اگر X و Y حول صفر متقارن باشند.

۲) اگر $۲ < p < ۴$ و $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = ۰$ باشد

$$\mathbb{E}(|X-Y|)^p \geq \mathbb{E}(|X+Y|^p)$$

نابرابری به برابری تبدیل می‌شود، اگر و فقط اگر X و Y حول صفر متقارن باشند.

برهان. ۱) بدیهی است که نابرابری به ازای $p = ۲$ برقرار است، چون

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-Y)^۲ &= \mathbb{E}(X^۲) + \mathbb{E}(Y^۲) - ۲\mathbb{E}(XY) \\
&= \mathbb{E}(X^۲) + \mathbb{E}(Y^۲) - ۲\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(X^۲) + \mathbb{E}(Y^۲) - ۲\mathbb{E}^۲(X) \\
&\leq \mathbb{E}(X^۲) + \mathbb{E}(Y^۲) + ۲\mathbb{E}^۲(X) \\
&= \mathbb{E}(X^۲) + \mathbb{E}(Y^۲) + ۲\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(X+Y)^۲
\end{aligned}$$

و در این حالت برابری زمانی حاصل می‌شود که

$$\mathbb{E}(X-Y)^۲ = \mathbb{E}(X+Y)^۲ \Longleftrightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = ۰ \qquad (۴.۲)$$

فرض کنید $\varphi(t)$ تابع مشخصه X و Y باشد. با توجه به نتیجه ۷.۲.۲

$$\begin{aligned}
\varphi_{X-Y}(t) &= |\varphi(t)|^۲ \\
\varphi_{X+Y}(t) &= \varphi^۲(t)
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\varphi_{X-Y}(t)) &= \mathcal{R}(|\varphi_X(t)|^۲) \\
&= \mathcal{R}\left[\mathbb{E}^۲(\cos(tX)) + \mathbb{E}^۲(\sin(tX))\right] \\
&= \mathbb{E}^۲(\cos(tX)) + \mathbb{E}^۲(\sin(tX))
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\varphi_{X+Y}(t)) &= \mathcal{R}(\varphi_X^۲(t)) \\
&= \mathcal{R}\left(\mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX))\right)^۲ \\
&= \mathbb{E}^۲(\cos(tX)) - \mathbb{E}^۲(\sin(tX))
\end{aligned}$$

در نتیجه $\mathcal{R}(\varphi_{X+Y}(t)) \leq \mathcal{R}(\varphi_{X-Y}(t))$ است.
با استفاده از لم ۱۱.۲.۲

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X-Y|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_{X-Y}(t)))dt \\
&= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-|\varphi_X(t)|^۲)dt \\
&\leq -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_X^۲(t)))dt \\
&= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_{X+Y}(t)))dt \\
&= \mathbb{E}|X+Y|^p
\end{aligned}$$

اگر X و Y متقارن باشند، آن‌گاه

$$\mathbb{E}|X-Y|^p = \mathbb{E}|X+Y|^p$$

فرض کنید برابری (۴.۲) برقرار باشد، آن‌گاه نابرابری به برابری تبدیل می‌شود، اگر

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-|\varphi_X(t)|^۲)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_X^۲(t)))dt$$

یا به‌طور معادل

$$(\mathcal{R}\varphi_X(t))^۲ + (\mathcal{I}\varphi_X(t))^۲ = |\varphi_X(t)|^۲ = \mathcal{R}(\varphi_X^۲(t)) = (\mathcal{R}(\varphi_X(t)))^۲ - (\mathcal{I}(\varphi_X(t)))^۲$$

و این زمانی رخ می‌دهد که $\mathcal{I}(\varphi_X(t)) \equiv ۰$، پس X حول صفر متقارن است.

۲) چون $۲ < p < ۴$ آن‌گاه $c(p) > ۰$ می‌شود. از طرفی $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = ۰$ است. با توجه به لم ۱۰.۲.۲

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X-Y|^p &= c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{R}(\varphi_{X-Y}(t)) - \sum_{k=۰}^{s}\frac{(-۱)^k\alpha_{۲k}t^{۲k}}{(۲k)!}}{|t|^{p+۱}}dt \\
&= c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(|\varphi(t)|^۲-۱+\mathbb{E}(X-Y)^۲.\frac{t^۲}{۲})dt \\
&\geq c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\mathcal{R}(\varphi^۲(t))-۱+\mathbb{E}(X+Y)^۲.\frac{t^۲}{۲})dt \\
&= \mathbb{E}|X+Y|^p
\end{aligned}$$

با استدلالی مشابه می‌توان برای $p=۴$ نشان داد که برابری رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر X متقارن باشد.
بنابراین اگر $p=۴$ و $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = ۰$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{E}|X-Y|^p = \mathbb{E}|X+Y|^p$ می‌شود. □

قضیه ۲.۳.۲ (*). فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و متقارن حول صفر باشند، X' مستقل از متغیر تصادفی X و هم‌توزیع با X باشد و Y' مستقل از متغیر تصادفی Y و هم‌توزیع با Y

باشد.

۱) اگر $۰ < p < ۲$ آن‌گاه

$$\mathbb{E}|X+X'|^p + \mathbb{E}|Y+Y'|^p \leq ۲\mathbb{E}|X+Y|^p$$

نابرابری به برابری تبدیل می‌شود، اگر و فقط اگر X و Y هم‌توزیع باشند.

۲) اگر $۲ < p < ۴$ آن‌گاه

$$\mathbb{E}|X+X'|^p + \mathbb{E}|Y+Y'|^p \geq ۲\mathbb{E}|X+Y|^p$$

نابرابری به برابری تبدیل می‌شود، اگر و فقط اگر X و Y هم‌توزیع باشند.

برهان. ۱) فرض کنید تابع مشخصه X و Y را به‌ترتیب با $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ نشان می‌دهیم، با توجه به نتیجه ۷.۲.۲ و متقارن بودن متغیرها

$$\varphi_{X+X'}(t) = \mathbb{E}(e^{it(X+X')}) = \mathbb{E}^۲(e^{itX}) = \varphi^۲(t)$$

$$\psi_{Y+Y'}(t) = \mathbb{E}(e^{it(Y+Y')}) = \mathbb{E}^۲(e^{itY}) = \psi^۲(t)$$

با استفاده از لم ۱۱.۲.۲ و با توجه به نتیجه ۷.۲.۲

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X+X'|^p + \mathbb{E}|Y+Y'|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\varphi^۲(t))dt \\
&\quad -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\psi^۲(t))dt \\
&= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۲-\varphi^۲(t)-\psi^۲(t))dt \\
&= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۲-(\varphi(t)-\psi(t))^۲ \\
&\quad -۲\varphi(t)\psi(t))dt \\
&\leq -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۲-۲\varphi(t)\psi(t))dt \\
&= -۲c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\varphi(t)\psi(t))dt \\
&= ۲\mathbb{E}|X+Y|^p
\end{aligned}$$

۲) با استفاده از لم ۱۰.۲.۲، چون $۲ < p < ۴$، $c(p) > ۰$، با توجه به نتیجه ۷.۲.۲

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X+X'|^p + \mathbb{E}|Y+Y'|^p &= c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\varphi^۲(t)+\mathbb{E}(X+X')^۲.\frac{t^۲}{۲}-۱)dt \\
&\quad + c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\psi^۲(t)+\mathbb{E}(Y+Y')^۲.\frac{t^۲}{۲}-۱)dt \\
&= c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\varphi^۲(t)+\psi^۲(t)+\mathbb{E}(X+X')^۲.\frac{t^۲}{۲} \\
&\quad + \mathbb{E}(Y+Y')^۲.\frac{t^۲}{۲}-۲)dt \\
&\geq ۲c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\varphi(t)\psi(t)+\mathbb{E}(X+Y)^۲.\frac{t^۲}{۲}-۱)dt \\
&= ۲\mathbb{E}|X+Y|^p
\end{aligned}$$

□

توجه ۳.۳.۲. نابرابری‌های قضیه ۲.۳.۲ به برابری تبدیل می‌شود، اگر و فقط اگر به‌ازای هر t

$$\varphi_X^۲(t)+\psi_Y^۲(t) = ۲\varphi_X(t)\psi_Y(t)$$

و این زمانی برقرار است که $(\varphi_X(t)-\psi_Y(t))^۲ = ۰$ باشد و این یعنی X و Y هم‌توزیع باشند.

قضیه ۴.۳.۲ (**). فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پذیرفتنی و متقارن حول صفر باشند.

۱) اگر $۰ < p < ۲$، آن‌گاه

$$\mathbb{E}|X+X'|^p + \mathbb{E}|Y+Y'|^p \leq ۲\mathbb{E}|X+Y|^p$$

۲) اگر $۲ < p < ۴$، آن‌گاه

$$\mathbb{E}|X+X'|^p + \mathbb{E}|Y+Y'|^p \geq ۲\mathbb{E}|X+Y|^p$$

برهان. فرض کنید تابع مشخصه X و Y را به‌ترتیب با $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ نشان می‌دهیم. با استفاده از لم ۱۱.۲.۲ و تعریف ۱۷.۴.۱

$$\begin{aligned}
۱)\ \ ۲\mathbb{E}|X+Y|^p &= -۲c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\varphi_{X+Y}(t))dt \\
&\geq -۲c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-(\varphi(t)\psi(t)))dt \\
&\geq -c(p)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\varphi^۲(t))dt + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\psi^۲(t))dt\right] \\
&= \mathbb{E}|X+X'|^p + \mathbb{E}|Y+Y'|^p
\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱۰.۲.۲ و تعریف ۱۷.۴.۱

$$
\begin{aligned}
۲)\ ۲\mathbb{E}|X+Y|^p &= ۲c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\varphi_{X+Y}(t)+\mathbb{E}(X+Y)^۲.\frac{t^۲}{۲}-۱)dt \\
&\leq ۲c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}((\varphi(t)\psi(t))+\mathbb{E}(X+Y)^۲\frac{t^۲}{۲}-۱)dt \\
&\leq c(p)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\varphi^۲(t)+\mathbb{E}(X+X')^۲\frac{t^۲}{۲}-۱)dt \\
&\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(\psi^۲(t)+\mathbb{E}(Y+Y')^۲\frac{t^۲}{۲}-۱)dt\Big] \\
&= \mathbb{E}|X+X'|^p+\mathbb{E}|Y+Y'|^p
\end{aligned}
$$

□

قضیه ۵.۳.۲ (*). فرض کنید $۰ < p < ۲$ و X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، X' مستقل از متغیر تصادفی X و هم‌توزیع با X باشد و Y' مستقل از متغیر تصادفی Y و هم‌توزیع با Y باشد. آنگاه

$$\mathbb{E}|X-X'|^p+\mathbb{E}|Y-Y'|^p\leq ۲\mathbb{E}|X-Y|^p \tag{۵.۲}$$

برهان. فرض کنید $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ به ترتیب تابع مشخصه X و Y باشند، آنگاه با لم ۱۱.۲.۲

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|X-X'|^p+\mathbb{E}|Y-Y'|^p &= -c(p)\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-|\varphi(t)|^۲)dt \\
&\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-|\psi(t)|^۲)dt\Big) \\
&\leq -۲c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi(t)\overline{\psi(t)}))dt \\
&= ۲\mathbb{E}|X-Y|^p
\end{aligned}
$$

□

توجه ۶.۳.۲. نابرابری (۵.۲) به برابری تبدیل می‌شود، اگر و فقط اگر به‌ازای هر t، رابطه زیر برقرار باشد

$$|\varphi_X(t)|^۲+|\psi_Y(t)|^۲=۲\mathcal{R}(\varphi_X(t)\overline{\psi_Y(t)})$$

چون

$$|\varphi_X(t)|^۲+|\psi_Y(t)|^۲-۲\mathcal{R}(\varphi_X(t)\overline{\psi_Y(t)})=|\varphi(t)-\psi(t)|^۲=۰$$

و این در صورتی امکان دارد که $\varphi_X(t)\equiv\psi_Y(t)$ باشد، یعنی X و Y توزیع یکسان داشته باشند.

توجه ۷.۳.۲. نابرابری (۵.۲) در حالت کلی برای $p>۲$ درست نیست. اما اگر X و Y توزیع متقارن داشته باشند، آنگاه برای $۲<p<۴$ عکس نابرابری ۵.۲ برقرار است که دقیقا حالت اول قضیه (۴.۳.۲) نتیجه می‌شود.

مثال ۸.۳.۲. تحت شرایط قضیه ۵.۳.۲ فرض کنید Y با احتمال ۱ صفر باشد و X دارای توزیع برنولی متقارن باشد. اگر $p > ۲$، آنگاه

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X-X'|^p + \mathbb{E}|Y-Y'|^p &= \mathbb{E}|X-X'|^p \\ &= ۲^p(\frac{۱}{۴}) + ۲^p(\frac{۱}{۴}) = ۲^{p-۱} \\ &> ۲ = ۲\mathbb{E}|X|^p = ۲\mathbb{E}|X-Y|^p \end{aligned}$$

در نتیجه عکس نابرابری (۵.۲) حاصل شد. در حقیقت شرایط قضیه برقرار ۵.۳.۲ است، اما نابرابری (۵.۲) برقرار نیست و این به این معنی است که $۰ < p < ۲$ در قضیه ۵.۳.۲ شرط لازم است.

قضیه ۹.۳.۲ (**). اگر X و Y متغیرهای تصادفی وابسته زبر جمعی منفی باشند، آنگاه

$$\mathbb{E}|X-X'|^p + \mathbb{E}|Y-Y'|^p \leq ۲\mathbb{E}|X-Y|^p$$

برهان. فرض کنید X^* و Y^* متغیرهای مستقل باشند، با توجه به تعریف ۹.۴.۱ و با استفاده از لم ۱۱.۲.۲

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X-X'|^p + \mathbb{E}|Y-Y'|^p &= -c(p)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-|\varphi(t)|^۲)dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-|\psi(t)|^۲)dt\right) \end{aligned}$$

طبق تعریف زبرجمعی بودن

$$\mathcal{R}(\varphi_{X-Y}(t)) \leq \mathcal{R}(\varphi_{X^*-Y^*}(t))$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X^*-Y^*|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_{X^*-Y^*}(t)))dt \\ &\leq -c(p)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_{X-Y}(t)))dt \\ &= \mathbb{E}|X-Y|^p \end{aligned}$$

□

اکنون نابرابری‌ها برای مجموع n متغیر تصادفی با شرایط مشابه تعمیم داده می‌شود.

قضیه ۱۰.۳.۲ (*). فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، …، X_n متغیرهای تصادفی هم‌توزیع، مستقل و متقارن باشند. آنگاه برای هر $۱ \leq p \leq ۲$

$$n^{p-۱}\mathbb{E}|X_۱|^p \leq \mathbb{E}|X_۱ + \ldots + X_n|^p \tag{۶.۲}$$

برهان. برای $p = ۲$ بدیهی است که

$$n\mathbb{E}|X_۱|^۲ = \mathbb{E}|X_۱ + \ldots + X_n|^۲$$

با استفاده از لم ۹.۲.۲ و لم ۱۱.۲.۲

$$\begin{aligned} n^p\mathbb{E}|X_1|^p = \mathbb{E}|nX_1|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\varphi_{X_1}(nt))dt \\ &\leq -nc(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\varphi^n_{X_1}(t))dt \\ &= -nc(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\varphi_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t))dt \\ &= n\mathbb{E}|X_1+\ldots+X_n|^p \end{aligned}$$

در نتیجه

$$n^{p-1}\mathbb{E}|X_1|^p \leq \mathbb{E}|X_1+\ldots+X_n|^p$$

□

بهر و اسین (۱۹۶۵) کرانی برای گشتاور مجموع به‌دست آوردند که در لم زیر ارایه می‌شود.

لم ۱۱.۳.۲. فرض کنید X_1، X_2، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و متقارن حول صفر باشند و برای $1 \leq p \leq 2$

$$\mathbb{E}|X_1+\ldots+X_n|^p \leq n\mathbb{E}|X_1|^p \tag{۷.۲}$$

گزاره ۱۲.۳.۲. در رابطه با نابرابری‌های (۶.۲) و (۷.۲) این سوال مطرح است که کدام کران، کران پایین در (۶.۲) یا کران بالا در (۷.۲) گشتاور مجموع را بهتر شرح می‌دهد؟ به‌عبارتی دیگر کران‌های خوبی هستند؟ شاید هر توانی برای n بین $p-1$ و ۱ بتواند به خوبی $\mathbb{E}|X_1+\ldots+X_n|^p$ را شرح دهد و بهترین نتیجه زمانی به‌دست می‌آید که توان n، بین $\frac{p}{2}$ و ۱ باشد.

فرض کنید X_j توزیع پایدار متقارن با پارامترهای ۱ و α داشته باشد. با توجه به تعریف توزیع پایدار در بخش ۳.۱، یعنی این‌که تابع مشخصه X_j که $p < \alpha \leq 2$ به‌صورت $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{E}|X_j| < \infty$ و تابع مشخصه $X_1+\ldots+X_n$

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{nX_1}(t) = \varphi_{X_1}(n^{\frac{1}{\alpha}}t)$$

بنابراین $\mathbb{E}|X_1+\ldots+X_n|^p = \mathbb{E}|n^{\frac{1}{\alpha}}X_1|^p = n^{\frac{p}{\alpha}}\mathbb{E}|X_1|^p$.

گزاره ۱۳.۳.۲. اگر $n=2$ در نظر بگیریم نابرابری (۶.۲) را در موارد غیرمتقارن نیز داریم.

قضیه ۱۴.۳.۲ (**). فرض کنید X_1، X_2، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی هم‌توزیع، پذیرفتنی و متقارن باشند. آن‌گاه برای هر $1 \leq p \leq 2$

$$n^{p-1}\mathbb{E}|X_1|^p \leq \mathbb{E}|X_1+\ldots+X_n|^p$$

برهان. با استفاده از لم ۹.۲.۲ ، ۱۱.۲.۲ و با توجه به قضیه ۱۰.۳.۲ و تعریف ۱۷.۴.۱

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_1+....+X_n|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\varphi_{X_1+....+X_n}(t))dt\\
&\geq -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\varphi^n_{X_1}(t))dt\\
&= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\varphi^n_{X_1^*}(t))dt\\
&= \mathbb{E}|X_1^*+...+X_n^*|^p\\
&\geq n^{p-1}\mathbb{E}|X_1^*|^p \geq n^{p-1}\mathbb{E}|X_1|^p
\end{aligned}$$

که X_1^*، X_2^*، . . .، X_n^*متغیرهای تصادفی مستقل می‌باشند. □

قضیه ۱۵.۳.۲ (*). اگر X و Y هم‌توزیع و مستقل باشند، آن‌گاه برای هر $0 < p < 2$

$$2^{p-1}\mathbb{E}|X|^p \leq \mathbb{E}|X+Y|^p$$

می‌شود.

برهان. فرض کنید $\varphi(t)$ تابع مشخصه X و Y باشد. با استفاده از لم ۹.۲.۲ و لم ۱۱.۲.۲

$$\begin{aligned}
2^p\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E}|2X|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\mathcal{R}(\varphi_X(2t))dt\\
&\leq -2c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-(\mathcal{R}(\varphi_X(t)))^2)dt\\
&\leq -2c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{p+1}}(1-\mathcal{R}(\varphi_X^2(t)))dt\\
&= 2\mathbb{E}|X+Y|^p
\end{aligned}$$

در نتیجه $2^{p-1}\mathbb{E}|X|^p \leq \mathbb{E}|X+Y|^p$. □

گزاره ۱۶.۳.۲. طبق قضیه ۱۵.۳.۲ اگر $p \geq 1$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{E}|X|^p \leq \mathbb{E}|X+Y|^p$ و در صورتی‌که $p < 1$ باشد، لزومی ندارد که رابطه برقرار باشد که مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد. قضیه ۱۵.۳.۲ به‌ازای هر $0 < p < 2$ برقرار است.

مثال ۱۷.۳.۲. فرض کنید X دارای توزیع برنولی متقارن باشد. اگر $p < 1$ باشد، طبق قضیه ۱۵.۳.۲

$$2^{p-1}\mathbb{E}|X|^p \leq \mathbb{E}|X+Y|^p$$

در صورتی‌که

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X|^p &= |-1|(\tfrac{1}{2})+|1|(\tfrac{1}{2})\\
&= 1\\
&> 2^{p-1} = \mathbb{E}|X+Y|^p
\end{aligned}$$

قضیه ۱۸.۳.۲ (**). اگر X و Y پذیرفتنی و هم‌توزیع باشند، آنگاه برای هر $۰ < p < ۲$

$$۲^{p-۱}\mathbb{E}|X|^p \leq \mathbb{E}|X+Y|^p$$

می‌شود.

برهان. با استفاده از لم ۹.۲.۲ ، ۱۱.۲.۲ و با توجه به قضیه ۱۵.۳.۲ و تعریف ۱۷.۴.۱

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X+Y|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_{X+Y}(t)))dt\\ &\geq -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-\mathcal{R}(\varphi_{X^*}^{۲}(t)))dt\\ &= \mathbb{E}|X^*+Y^*|^p\\ &\geq ۲^{p-۱}\mathbb{E}|X^*|^p \geq ۲^{p-۱}\mathbb{E}|X|^p\end{aligned}$$

X^* و Y^* متغیرهای مستقل و هم‌توزیع هستند. ملاحظه می‌کنید دراین حالت نیز کران پایین همانند حالت استقلال شده است. □

قضیه ۱۹.۳.۲ (*). فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل باشند. اگر $۰ < p < ۲$ باشد، آنگاه

$$\mathbb{E}|X-Y|^p \leq -\frac{۴c(p)}{p(۲-p)}(var(X))^{\frac{p}{۲}} \tag{۸.۲}$$

برهان. فرض کنید $\varphi_X(t)$ تابع مشخصه X باشد. $\sigma^۲ = \mathrm{var}(X)$ تعریف می‌کنیم. آنگاه برای هر t،

$$|\varphi_X(t)|^۲ \geq \max\{۰, ۱-\sigma^۲t^۲\} \tag{۹.۲}$$

اگر $\max\{۰,۱-\sigma^۲t^۲\} = ۰$ باشد، آنگاه $۱-\sigma^۲t^۲ < ۰$، $|t| > \frac{۱}{\sigma}$ و اگر $\max\{۰,۱-\sigma^۲t^۲\} = ۱-\sigma^۲t^۲$ باشد، آنگاه $۱-\sigma^۲t^۲ < ۰$، $|t| \leq \frac{۱}{\sigma}$ می‌شود. حال با استفاده از لم ۱۱.۲.۲ و نابرابری (۹.۲) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X-Y|^p &= -c(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{p+۱}}(۱-|\varphi_X(t)|^۲)dt\\ &\leq -c(p)\left(\sigma^۲\int_{|t|\leq\frac{۱}{\sigma}}|t|^{۱-p}dt+\int_{|t|>\frac{۱}{\sigma}}\frac{dt}{|t|^{p+۱}}dt\right)\\ &= -c(p)\frac{۴}{p(۲-p)}\sigma^p\end{aligned}$$

□

مثال ۲۰.۳.۲. فرض کنید در نابرابری (۸.۲)، $p = ۱$، آنگاه

$$\mathbb{E}|X-Y| \leq \frac{۴}{\pi}(Var(X))^{\frac{۱}{۲}} \leq \frac{۴}{\pi}(\mathbb{E}(X^۲))^{\frac{۱}{۲}}$$

از طرفی براساس نابرابری لیاپانوف برای $۰ < p \leq r$، می‌توان نوشت

$$\mathbb{E}|X-Y|^p \leq (\mathbb{E}|X-Y|^r)^{\frac{p}{r}}$$

اگر در رابطه بالا $r = ۲$ ، آن‌گاه

$$\mathbb{E}|X-Y|^p \leq (\mathbb{E}|X-Y|^۲)^{\frac{p}{۲}}, \qquad ۰ < p \leq ۲$$

مانند نابرابری (۸.۲) اگر $p = ۱$ قرار دهیم

$$\mathbb{E}|X-Y| \leq ۲\mathbb{E}|X| \leq ۲(\mathbb{E}(X^۲))^{\frac{۱}{۲}}$$

با مقایسه کران‌های بالا در نابرابری (۸.۲) و رابطه اخیر، به‌ازای $p = ۱$ نابرابری (۸.۲) کران کوچک‌تری دارد.

۴.۲ نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

نابرابری‌های ارایه شده در این فصل را در حالت‌های استقلال و پذیرفتنی و زبرجمعی منفی بررسی کردیم، می‌توان این نابرابری‌ها را به متغیرهایی اختصاص داد که به دسته خاصی تعلق ندارند و همین نتایج را به‌دست آورد.

فصل ۳

نابرابری روزنتال برای مجموع متغیرهای تصادفی

۱.۳ مقدمه

نابرابری‌های گشتاوری در بررسی ویژگی‌های مجموع متغیرهای تصادفی نقش مهمی دارند. نابرابری‌های زیادی برای متغیرهای تصادفی مستقل به‌دست آمده است، برای مثال می‌توان به لین و بای (۲۰۱۰) اشاره کرد. نابرابری روزنتال[۱] از مهم‌ترین نابرابری‌های گشتاوری محسوب می‌شود. فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی و $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ مجموع متغیرهای تصادفی باشد، آن‌گاه نابرابری روزنتال یک کران برای گشتاور $E|S_n|^p$ ایجاد می‌کند. اولین بار روزنتال (۱۹۷۰)، نابرابری را در حالت استقلال به صورت زیر بیان کرد.

فرض کنید $۱ < p < \infty$ و $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\left(\int |S_n|^p dp\right)^{۱/p} &\leq ۲^p \max\left\{\left(\int |x_۱|^p dp + \ldots + \int |x_n|^p dp\right)^{۱/p},\right.\\ &\left.\int |x_۱| dp + \ldots + \int |x_n| dp\right\}\end{aligned}$$

برای $۰ \leq r \leq p$

$$\mu_r = \left(\int |x_۱ + \ldots + x_n|^r dp\right)^{۱/r}$$

$$N_p = \left(\int \left(|x_۱|^p + \ldots + |x_n|^p\right) dP\right)^{۱/p}$$

فرض کنید برای هر i، $X_i \geq ۰$. اکنون

$$\mu_p^p = \int (x_۱ + \ldots + x_n)^{p-۱}(x_۱ + \ldots + x_n) dP$$

[۱] Rosenthal Inequality

چون طبق نابرابری C_r

$$\begin{aligned}\int (x_1+...+x_n)^{p-1}x_1 dP &\le 2^{p-1}\int\left[x_1^{p-1}+(x_2+...+x_n)^{p-1}\right]x_1 dP\\ &= 2^{p-1}\left[\int x_1^p dP+\int (x_2+...+x_n)^{p-1}dP\int x_1 dP\right]\\ &\le 2^{p-1}\left[\int x_1^p dP+\int (x_1+...+x_n)^{p-1}dP\int x_1 dP\right]\end{aligned}$$

برابری زمانی رخ می‌دهد که x_1 و $(x_2+...+x_n)$ مستقل باشند. به‌طور مشابه برای هر $1\le i\le n$

$$\int (x_1+...+x_n)^{p-1}x_i dP \le 2^{p-1}\left[\int x_i^p dP+\mu_{p-1}^{p-1}\int x_i dP\right]$$

به‌دست می‌آوریم. بنابراین

$$\mu_p^p \le 2^{p-1}(N_p^p+\mu_{p-1}^{p-1}N_1)$$

طبق نابرابری هولدر $\mu_{p-1}\le \mu_p$، پس

$$\mu_p^p \le 2^{p-1}(N_p^p+\mu_p^{p-1}N_1)\le 2^p\max\left\{N_p^p,\mu_p^{p-1}N_1\right\}$$

یا

$$\mu_p \le \max\left\{2N_p, 2^pN_1\right\}\le 2^p\max\left\{N_p,N_1\right\}$$

حال فرض کنید علاوه بر این‌که $1\le p<\infty$ و X_1، X_2، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند، برای هر $i\ge 1$، $\mathbb{E}(X_i)=0$ باشد، آن‌گاه

۱. اگر ϵ_1، ϵ_2، $\ldots$، ϵ_n برای همه $i\ge 1$، معلوم باشد و $\epsilon_i=\pm 1$، آن‌گاه

$$\left(\int |\epsilon_1x_1+...+\epsilon_nx_n|^p dP\right)^{1/p}\le 2\left(\int |x_1+...+x_n|^p dP\right)^{1/p}$$

۲. برای $p<2$

$$\left(\int |x_1+...+x_n|^p dP\right)^{1/p}\le 2\left(\int |x_1|^p dP+...+\int |x_n|^p dP\right)^{1/p}$$

و برای $p>2$

$$\left(\int |x_1+...+x_n|^p dP\right)^{1/p}\ge \frac{1}{2}\left(\int |x_1|^p dP+...+\int |x_n|^p dP\right)^{1/p}$$

اکنون فرض کنید که $p>2$ باشد، آن‌گاه ثابت $B(p)$ که فقط به n وابسته است، وجود دارد، به‌طوری‌که

اگر $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند و برای هر $i \geq ۱$، $\mathbb{E}(X_i) = ۰$، آن‌گاه

$$\left(\int |\sum_{i=۱}^{n} x_i|^p dP\right)^{۱/p} \leq B(p) \max\left\{\left(\sum_{i=۱}^{n}\int |x_i|^p dP\right)^{۱/p}, \left(\sum_{i=۱}^{n}\int |x_i|^۲ dP\right)^{۱/۲}\right\} \tag{۱.۳}$$

$$\left(\int |\sum_{i=۱}^{n} x_i|^p dP\right)^{۱/p} \geq \frac{۱}{۲} \max\left\{\left(\sum_{i=۱}^{n}\int |x_i|^p dP\right)^{۱/p}, \left(\sum_{i=۱}^{n}\int |x_i|^۲ dP\right)^{۱/۲}\right\}$$

به‌طور معادل می‌توان نابرابری (۱.۳) را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\mathbb{E}(|S_n|^p) \leq B(p) \max\left\{\mu_{n,۲}^{p/۲}, \mu_{n,p}\right\} \tag{۲.۳}$$

برای محاسبه ثابت $B(p)$، بحث‌های زیادی صورت گرفته است. پاینلیس و یوتف (۱۹۸۴)، نشان دادند اگر $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و دارای گشتاورهای مرتبه p، $p > ۲$، متناهی باشند، آن‌گاه

$$\mathbb{E}(|S_n|^p) \leq \frac{p(p-۱)}{۲} \max\left\{۱, ۲^{p-۳}\right\} \max\left\{\mu_{n,۲}^{P/۲}, \mu_{n,p}\right\}$$

و $\mu_{n,p} = \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(|X_i|^p)$ است. جانسن و همکاران (۱۹۸۵)، اثبات کردند که اگر $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و متقارن باشند که دارای گشتاورهای مرتبه p، $p > ۲$، متناهی باشند، آن‌گاه

$$\mathbb{E}(|S_n|^p) \leq \frac{۱۴/۵p}{\log p} \max\left\{\mu_{n,۲}^{p/۲}, \mu_{n,p}\right\} \tag{۳.۳}$$

هیتچنکو (۱۹۹۰)، بهترین ثابت برای حالت مارتینگلی نابرابری روزنتال را به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\mathbb{E}(|S_n|^p) \leq \frac{p}{\log p} \max\left\{\mu_{n,۲}^{p/۲} + \mu_{n,p}\right\}$$

آیبراجیموف و شاراخمیتوف (۲۰۰۲)، برای متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n با $\mathbb{E}(X_i) = ۰$ و $\mathbb{E}(|X_i|^p) < \infty$، $p > ۲$ با تعریف $i = ۱, ۲, ..., n$ و $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ ، آن‌گاه $B(۲m)$ در نابرابری

$$\mathbb{E}(|S_n|^p) \leq B(p) \max\left\{\mu_{n,۲}^{p/۲} + \mu_{n,p}\right\}$$

برای $p = ۲m$ و $m \in \mathbb{N}$ به‌صورت زیر محاسبه کردند.

$$B(۲m) = (۲m)! \sum_{j=۱}^{۲m} \sum_{r=۱}^{j} \sum \Pi_{k=۱}^{r} \frac{(m_k!)^{-j_k}}{j_k!}$$

که جمع داخلی همه مقادیر طبیعی $m_۱ > m_۲ > \ldots > m_r > ۱$ و $j_۱$، $j_۲$، $\ldots$، j_n با شرایط $m_۱ j_۱ + m_۲ j_۲ + \ldots + m_r j_r = ۲m$ و $j_۱ + j_۲ + \ldots + j_r = j$ را می‌گیرد. علاوه بر این

$$B(p) = \mathbb{E}(\theta - ۱)^p$$

که θ دارای توزیع پواسون با پارامتر ۱ است.

تا به این‌جا نابرابری‌ها با فرض مستقل بودن متغیرهای تصادفی مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه کران برای متغیرهایی که در دسته‌های خاص از وابستگی می‌باشند، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

شائو (۱۹۹۵)، نشان داد اگر متغیرهای تصادفی ρ-آمیخته در نظر گرفت. برای این منظور ابتدا ρ-آمیخته را از کلموگروف و روزانوف (۱۹۶۰) بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$، ρ-آمیخته[۲] نامید می‌شود، وقتی $n \to \infty$،

$$\rho(n) = \sup_{k\geq 1, X\in L^2(\mathcal{F}_1^k), Y\in L^2(\mathcal{F}_{k+n}^\infty)} \frac{|Cov(X,Y)|}{\| X \|_2 \| Y \|_2} \longrightarrow 0$$

که $\mathcal{F}_n^m$ سیگما میدان تولید شده توسط متغیرهای تصادفی X_n، X_{n+1}، $\dots$، X_m و $\rho(n)$ ضریب همبستگی ماکسیمال است. $\| X \|_2$ و $\| Y \|_2$ نرم در فضای L_2 هستند. به‌عبارت دیگر

$$\|X\|_2 = \left(\int |X|^2 dx\right)^{1/2},$$

حال فرض کنید X_i متغیرهای تصادفی با $E(X_i) = 0$ و برای $p \geq 2$، $E|X_i|^p < \infty$ باشند، آن‌گاه ثابت مثبت $B = B(p, \rho(.))$ که فقط به p و $\rho(.)$ وابسته است، وجود دارد و برای هر $k \geq 0$ و $n \geq 1$، اگر $S_n(k) = \sum_{i=k+1}^{k+n} X_i$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\max_{1\leq i\leq n} |S_k(i)|^p\right) \;\; &\leq \;\; B\left[n^{p/2} \exp\left(B \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i)\right) \max_{k<i\leq k+n} \| X_i \|_2^p\right. \\ &\left. + n \exp\left(B \sum_{k=0}^{[\log n]} \rho^{2/p}(2^i)\right) \max_{k<i\leq k+n} \| X_i \|_p^p\right]\end{aligned}$$

حال اگر همین حالت به متغیرهای تصادفی بریده شده تعمیم داده شود، برای هر $0 < A \leq \infty$ و $x > 0$ با

$$2n \max_{k<i\leq k+n} \mathbb{E}|X_i| I\left\{|X_i| \geq A\right\} \leq x$$

برای ماکسیمم مجموع‌های جزیی

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{i\leq n} |S_k(i)| \geq x) \;\; &\leq \;\; \sum_{i=k+1}^{k+n} \mathbb{P}(|X_i| \geq A) \\ &+ B x^{-p} \left[n^{p/2} \exp\left(B \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i)\right) \max_{k<i\leq k+n} \| X_i I\left\{|X_i| \leq A\right\} \|_2^p\right. \\ &\left. + n \exp\left(B \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho^{2/p}(2^i)\right) \max_{k<i\leq k+n} \mathbb{E}|X_i|^p I\left\{|X_i| \leq A\right\}\right]\end{aligned}$$

[۲] ρ- mixing

از جهتی اگر $p \geq ۲$، $\mathbb{E}(X_i) = ۰$، $\| X_i \|_p < \infty$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} \rho^{۲/p}(۲^n) < \infty$ باشد، آن‌گاه ثابت مثبت $B = B(p, \rho(.))$ وجود دارد که فقط به p و $\rho(.)$ وابسته است، به‌طوری‌که برای هر $k > ۰$ و $n \geq ۱$

$$\mathbb{E}(\max_{i \leq n} |S_k(i)|^p) \leq B \left((n \max_{k<i\leq k+n} (\mathbb{E}(X_i^۲)))^{p/۲} + n \max_{k<i\leq k+n} (\mathbb{E}(|X_i|^p)) \right)$$

و

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{i \leq n} |S_k(i)| \geq x) \leq & \sum_{i=k+۱}^{k+n} \mathbb{P}(|X_i| \geq A) \\ & + Bx^{-p} \left[n^{p/۲} \max_{k<i\leq k+n} \| X_i I\{|X_i| \leq A\} \|_۲^p \right. \\ & \left. + n \max_{k<i\leq k+n} (\mathbb{E}(|X_i|^p I\{|X_i| \leq A\}) \right] \end{aligned}$$

شائو (۲۰۰۰)، برای $p \geq ۲$ و متغیرهای تصادفی پیوندی منفی $X_۱$، $X_۲$، $\ldots$، X_n با میانگین صفر و $\mathbb{E}|X_i|^p < \infty$ که S_n^* ماکسیمم قدرمطلق مجموع‌هایی جزیی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی است و $X_۱^*$، $X_۲^*$، $\ldots$، X_n^* متغیرهای تصادفی مستقل باشند، به‌طوری‌که به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ..., n$ توزیع X_i و X_i^* یکسان باشد، کران زیر را بیان کرد:

$$\| S_n^* \|_p \leq ۲(۱۵p/\log p)^p \left(\mu_{n,p}^{۱/p} + \mu_{n,۲}^{۱/۲} \right)$$

همچنین پلیگرات و همکاران (۲۰۰۷)، برای $S_n = \sum_{k=۱}^{j} X_k$ و $S_n^* = \max_{i \leq n} |S_i|$ و $p \geq ۲$ که $\mathbb{E}(|X_۱|^p) < \infty$ نشان دادند که

$$\| S_n^* \|_p \leq c_p n^{۱/۲} \left[\| X_۱ \|_p + \sum_{j=۱}^{n} j^{-۳/۲} \| \mathbb{E}(S_j|\mathcal{F}_۰) \|_p \right]$$

ریو (۲۰۰۹)، اثبات دیگر اگر $۲ < p \leq ۳$ باشد، آن‌گاه نابرابری روزنتال برای فرآیندهای ایستا به‌صورت زیر است:

$$\| S_n \|_p \leq c_p n^{۱/۲} \sigma_N + c_p n^{۱/p} (\| X_۰ \|_p + \Delta_N^{۱/۲} + D_N) \qquad (۴.۳)$$

که $N = \min\{i : n^i \geq n\}$ و

$$\sigma_N = \| X_۰ \|_۲ + \frac{۱}{۲} \sum_{l=۰}^{N-۱} ۲^{-l/۲} \| \mathbb{E}(S_{n^l}|\mathcal{F}_۰) \|_۲$$

$$\Delta_N = \sum_{l=۰}^{N-۱} ۲^{-۲/p} \| \mathbb{E}(S_{۲^l}^۲|\mathcal{F}_۰) - \mathbb{E}(S_{۲^l}^۲) \|_{p/۲}$$

$$D_N = \sum_{l=۰}^{N-۱} ۲^{-l/p} \| \mathbb{E}(S_{۲^l}|\mathcal{F}_۰) \|_p$$

مرلیود و پلیگرات (۲۰۱۱)، برای $p > ۲$، طبق تعاریف قبلی S_n و S_n^*، نابرابری‌های زیر را بیان نمودند:

$$\| S_n^* \|_p \leq c_p n^{۱/p} \Bigg[\| X_۰ \|_p + \sum_{k=۱}^{n} \frac{\| \mathbb{E}(S_k|\mathcal{F}_۰) \|_p}{k^{۱+۱/p}} + \left(\sum_{k=۱}^{n} \frac{\| \mathbb{E}(S_k^۲|\mathcal{F}_۰) \|_{p/۲}^{\sigma}}{k^{۱+۲\sigma/p}} \right)^{۱/(۲\sigma)} \Bigg] \tag{۵.۳}$$

که $\sigma = \min(۱, (p-۲)^{-۱})$ است.

ملاحظه ۲.۱.۳. اگر X_iها مستقل باشند، آن‌گاه

$$\mathbb{E}(S_k^۲|\mathcal{F}_۰) = \mathbb{E}(S_k^۲) = k \| X_۰ \|_۲^۲$$

بنابراین نابرابری (۵.۳) به (۲.۳) کاهش می‌یابد.

ملاحظه ۳.۱.۳. یک گام کلیدی در اجرای نابرابری (۵.۳) بررسی مقدار

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{\| \mathbb{E}(S_k^۲|\mathcal{F}_۰) \|_{p/۲}^{\sigma}}{k^{۱+۲\sigma/p}} \leq \sum_{k=۱}^{n} \frac{\| \mathbb{E}(S_k^۲|\mathcal{F}_۰) - \mathbb{E}(S_k^۲) \|_{p/۲}^{\sigma}}{k^{۱+۲\sigma/p}} + \sum_{k=۱}^{n} \frac{\mathbb{E}[(S_k^۲)]^{\sigma}}{k^{۱+۲\sigma/p}}$$

است. برای انجام این کار، باید $\| \mathbb{E}(S_k|\mathcal{F}_۰) \|_p$ و $\| \mathbb{E}(S_k^۲|\mathcal{F}_۰) - \mathbb{E}(S_k^۲) \|_{p/۲}$ کنترل شود.

همین مسئله باعث ایجاد نوع دیگر از نابرابری شده است که در این فصل تحت قضیه‌ای از لیو و همکاران (۲۰۱۳)، بیان و اثبات می‌گردد که قسمت اساسی این فصل را نیز تشکیل می‌دهد. با بیان این نابرابری دیگر به بررسی $\| \mathbb{E}(S_k|\mathcal{F}_۰) \|_p$ و $\| \mathbb{E}(S_k^۲|\mathcal{F}_۰) - \mathbb{E}(S_k^۲) \|_{p/۲}$ نیاز نداریم. در واقع نابرابری بیان شده در قضیه با استفاده از تابع اندازه وابستگی اثبات شده است، که یکی از برتری‌های این نوع نابرابری روزنتال که سادگی محاسبه‌اش است را نتیجه می‌دهد. برای درک بهتر از تابع اندازه وابستگی تعریفی از آن بر اساس وو (۲۰۰۵) بیان کرده و در این پایان‌نامه نیز از همین تعریف استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $\{X_n; n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از فرآیندهای ایستا به شکل

$$X_i = g(\ldots, \epsilon_{i-۱}, \epsilon_i)$$

باشد، که به‌ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، ϵ_iها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند و g تابع اندازه‌پذیر است.

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنید به‌ازای $i, j \in \mathbb{Z}$، ϵ_i و ϵ'_j متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند. همچنین $\mathcal{F}_n = (\ldots, \epsilon_{n-۱}, \epsilon_n)$، سیگما میدان تعریف شده روی X_n باشد و

$$X'_n = g(\mathcal{F}_{-۱}, \epsilon'_۰, \epsilon_۱, \ldots, \epsilon_n)$$

اگر g تابع اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\theta_{n,p} = \| X_n - X'_n \|_p$$

تابع اندازه وابستگی[۳] نامیده می‌شود و مجموع دمی براساس تابع اندازه وابستگی $\Theta_{m,p} = \sum_{i=m}^{\infty} \theta_{i,p}$ تعریف می‌شود.

[۳] Functional dependence measure

۲.۳ نابرابری روزنتال برای مجموع متغیرهای تصادفی j-وابسته

نابرابری روزنتال نوعی نابرابری گشتاوری می‌باشد، در حالتی که متغیرهای تصادفی مستقل باشند، افراد زیادی این نابرابری را مورد بررسی قرار داده‌اند. اما مساله اصلی زمانی است که متغیرهای تصادفی مستقل نباشند که در واقعیت نیز به این گونه است، برای مثال داده‌های سری زمانی می‌توانند به زمان وابسته باشند. در این بخش نوعی نابرابری روزنتال را برای متغیرهای تصادفی در دسته خاص از وابستگی به نام j - وابسته بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳ (*). فرض کنید $\mathbb{E}(X_۱) = ۰$ و به‌ازای $p > ۲$، $\mathbb{E}(|X_۱|^p) < \infty$ و S_n^* ماکسیمم قدرمطلق مجموع‌های جزیی باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \| S_n^* \|_p \;\leq\; & n^{۱/۲}\left[\frac{۸۷p}{\log p}\sum_{j=۱}^{n}\theta_{j,۲} + ۳(p-۱)^{۱/۲}\sum_{j=n+۱}^{\infty}\theta_{j,p} + \frac{۲۹p}{\log p}\| X_۱ \|_۲\right] \\ & + n^{۱/p}\left[\frac{۸۷p(p-۱)^{۱/۲}}{\log p}\sum_{j=۱}^{n} j^{۱/۲-۱/p}\theta_{j,p} + \frac{۲۹p}{\log p}\| X_۱ \|_p\right] \qquad (۶.۳) \end{aligned}$$

برهان. $S_{i,j}$ و $X_{k,j}$ برای $i \geq ۰$ و $j \geq ۰$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_{i,j} &= \sum_{k=۱}^{i} X_{k,j} \\ X_{k,j} &= \mathbb{E}(X_k | \epsilon_{k-j}, ..., \epsilon_k) \end{aligned}$$

$X_{k,j}$ به‌ازای $k \in \mathbb{Z}$، j–وابسته است. حال اگر تعریف شود

$$X_k = X_k - X_{k,n} + \sum_{j=۱}^{n}(X_{k,j} - X_{k,j-۱}) + X_{k,۰} \qquad (۷.۳)$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} \| S_n^* \|_p \;\leq\; & \| \max_{۱\leq i\leq n} |S_i - S_{i,n}| \, \|_p \\ & + \sum_{j=۱}^{n} \| \max_{۱\leq i\leq n} |S_{i,j} - S_{i,j-۱}| \, \|_p + \| \max_{۱\leq i\leq n} |S_{i,۰}| \, \|_p \qquad (۸.۳) \end{aligned}$$

که S_n^* ماکسیمم قدر مطلق مجموع جزیی X_kها است. حال هرکدام از جملات سمت راست نابرابری (۸.۳) را جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

از جمله دوم $\sum_{j=۱}^{n} \| \max_{۱\leq i\leq n} |S_{i,j} - S_{i,j-۱}| \, \|_p$، شروع می‌کنیم:

$$\| \max_{۱\leq i\leq n} |S_{i,j} - S_{i,j-۱}| \, \|_p \leq \| S_{n,j} - S_{n,j-۱} \|_p + \| \max_{۰\leq i\leq n-۱} |\sum_{k=n-i}^{n} (X_{k,j} - X_{k,j-۱})| \, \|_p \qquad (۹.۳)$$

$\{X_{k,j}-X_{k,j-1}, 1\leq k\leq n\}$، j-وابسته است. به‌ازای $0\leq k\leq n-1$، $X_{n-k,j}$ با سیگما میدان $\mathcal{F}_j=\sigma(\epsilon_{n-k-j},\epsilon_{n-k-j+1},...)$ مارتینگل است. چون

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n-k,j}|\mathcal{F}_{j-1}) &= \mathbb{E}\left(X_{n-k,j}|\epsilon_{n-k-j+1},\epsilon_{n-k-j+2},...\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{n-k}|\epsilon_{n-k-j},\epsilon_{n-k-j+1},...)|\epsilon_{n-k-j+1},...\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X_{n-k}|\epsilon_{n-k-j+1},...,\epsilon_{n-k}\right)\end{aligned}$$

از طرفی طبق تعریف می‌توان نوشت

$$\mathbb{E}\left(X_{n-k}|\epsilon_{n-k-j+1},...,\epsilon_{n-k}\right)=X_{n-k,j-1}$$

بنابراین $X_{n-k,j-1}$ با سیگما میدان $\mathcal{F}_{j-1}=\sigma(\epsilon_{n-k-j+1},\epsilon_{n-k-j+2},...)$ نیز مارتینگل است. پس با این استدلال می‌توان نتیجه گرفت که $X_{n-k,j}-X_{n-k,j-1}$، مارتینگل‌های تفاضلی با سیگما میدان $\sigma(\epsilon_{n-k-j},\epsilon_{n-k-j+1},...)$ هستند. زیرا

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n-k,j}-X_{n-k,j-1}|\mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}(X_{n-k,j}|\mathcal{F}_{i-1})-\mathbb{E}(X_{n-k,j-1}|\mathcal{F}_{i-1})\\ &= X_{n-k,j-1}-X_{n-k,j-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

و این نشان دهنده مارتینگل تفاضلی بودن $X_{n-k,j}-X_{n-k,j-1}$ است.

طبق تعریف ۴.۵.۱، به‌ازای $0\leq i\leq n-1$، $|\sum_{k=n-i}^{n}(X_{k,j}-X_{k,j-1})|$ یک زیرمارتینگل نامنفی با سیگما میدان $\sigma(\epsilon_{n-i-j},\epsilon_{n-i-j+1},...)$، است. زیرا

$$\mathbb{E}(X_{n-k,j}|\epsilon_{n-i-j},\epsilon_{n-i-j+1},...)\geq\sum_{k=n-i}^{n}(X_{k,j}-X_{k,j-1})$$

با استدلال مشابه می‌توان نوشت

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n-k}|\epsilon_{n-k-j},\epsilon_{n-k-j+1},...)|\epsilon_{n-i-j},\epsilon_{n-i-j+1},...)\geq\sum_{k=n-i}^{n}(X_{k,j}-X_{k,j-1})$$

چون $|\sum_{k=n-i}^{n}(X_{k,j}-X_{k,j-1})|$ زیرمارتینگل نامنفی شده، می‌توانیم طبق لم ۱۴.۵.۱، از نابرابری دوب استفاده کنیم.

$$\|\max_{0\leq i\leq n-1}|\sum_{k=n-i}^{n}(X_{k,j}-X_{k,j-1})|\|_p\leq\frac{p}{p-1}.\|S_{n,j}-S_{n,j-1}\|_p \qquad (10.3)$$

اگر $Y_{i,j}=\sum_{k=1+(i-1)j}^{(ij)\wedge n}(X_{k,j}-X_{k,j-1})$ که $\wedge$ مینیمم n و (ij) را نشان می‌دهد و $l=\frac{n}{j}+1$ تعریف کنیم، آن‌گاه

$$|S_{n,j}-S_{n,j-1}|=|\sum_{i=1}^{l}Y_{ij}| \qquad (11.3)$$

مشاهده می‌شود $Y_{۱,j}$، $X_{۳,j}$، ... مستقل و همچنین $Y_{۲۱,j}$، $X_{۴,j}$، ... مستقل می‌باشند، زیرا

$$
\begin{aligned}
Y_{۱,j} &= \sum_{k=۱}^{(j)\wedge n} (X_{k,j} - X_{k,j-۱}) \\
Y_{۳,j} &= \sum_{k=۱+۲j}^{(۳j)\wedge n} (X_{k,j} - X_{k,j-۱})
\end{aligned}
$$

به همین صورت

$$
\begin{aligned}
Y_{۲,j} &= \sum_{k=۱+j}^{(۲j)\wedge n} (X_{k,j} - X_{k,j-۱}) \\
Y_{۴,j} &= \sum_{k=۱+۳j}^{(۴j)\wedge n} (X_{k,j} - X_{k,j-۱})
\end{aligned}
$$

با نابرابری (۳.۳)

$$
\begin{aligned}
\| S_{n,j} - S_{n,j-۱} \|_p &\leq \frac{۱۴/۵p}{\log p} \Bigg[\| \sum_{i \text{ فرد}} Y_{i,j} \|_۲ \\
&+ \| \sum_{i \text{ زوج}} Y_{i,j} \|_۲ + \left(\sum_{i \text{ فرد}} \| Y_{i,j} \|_p^p \right)^{۱/p} \\
&+ \left(\sum_{i \text{ زوج}} \| Y_{i,j} \|_p^p \right)^{۱/p} \Bigg] \qquad (۱۲.۳)
\end{aligned}
$$

برای $۱ \leq i \leq l$، طبق لم ۱.۵.۱۵، برای هر جمله سمت راست نابرابری (۱۲.۳) داریم

$$
\begin{aligned}
\| Y_{i,j} \|_p &\leq \left((p-۱) \sum_{k=۱+(i-۱)j}^{(ij)\wedge n} \| (X_{k,j} - X_{k,j-۱}) \|_p^۲ \right)^{۱/۲} \qquad (۱۳.۳) \\
&\leq (p-۱)^{۱/۲} [(ij) \wedge n - (i-۱)j]^{۱/۲} \| X_{۱,j} - X_{۱,j-۱} \|_p \\
&\leq (p-۱)^{۱/۲} [(ij) \wedge n - (i-۱)j]^{۱/۲} \theta_{j,p} \qquad (۱۴.۳)
\end{aligned}
$$

و برای $p = ۲$

$$
\| Y_{i,j} \|_۲ \leq [(ij) \wedge n - (i-۱)j]^{۱/۲} \theta_{j,۲}
$$

آن‌گاه

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i \text{ فرد}} \| Y_{ij} \|_p^p \right)^{۱/p} &\leq \left(\sum_{i \text{ فرد}} (p-۱)^{p/۲} [(ij) \wedge n - (i-۱)j]^{p/۲} \| X_{۱,j} - X_{۱,j-۱} \|_p^p \right)^{۱/p} \\
&= \left(\frac{n}{j} \right)^{۱/p} (p-۱)^{۱/۲} [(ij) \wedge n - (i-۱)j]^{۱/۲} \| X_{۱,j} - X_{۱,j-۱} \|_p \\
&\leq n^{۱/p} (p-۱)^{۱/۲} j^{۱/۲-۱/p} \theta_{j,p} \qquad (۱۵.۳)
\end{aligned}
$$

و همچنین

$$\begin{aligned}\| \sum_{i \text{ فرد}} Y_{i,j} \|_۲ &\leq \left(\frac{n}{j}\right)^{۱/۲} \| Y_{i,j} \|_۲ \\ &\leq \left(\frac{n}{j}\right)^{۱/۲} [(ij) \wedge n - (i-۱)j]^{۱/۲} \theta_{j,۲} \\ &\leq \sqrt{n}\theta_{j,۲} \end{aligned} \qquad (۱۶.۳)$$

نابرابری (۱۵.۳) و (۱۶.۳) را برای iهای زوج نیز به‌دست می‌آید. نهایتا نابرابری (۱۲.۳) برای $۱ \leq j \leq n$

$$\| S_{n,j} - S_{n,j-۱} \|_p \leq \frac{۲۹p}{\log p} \left(\sqrt{n}\theta_{j,۲} + (p-۱)^{۱/۲} n^{۱/۲} j^{۱/۲-۱/p} \theta_{j,p}\right) \qquad (۱۷.۳)$$

با نابرابری‌های (۹.۳) تا (۱۷.۳) و با توجه به این‌که $p/(p-۱) \leq ۲$ وقتی که $p \geq ۲$، باشد

$$\begin{aligned}&\sum_{j=۱}^{n} \| \max_{۱\leq i\leq n} |S_{i,j} - S_{i,j-۱}| \|_p \\ &\leq \frac{۸۷p}{\log p}\left(\sqrt{n}\sum_{j=۱}^{n}\theta_{j,۲} + (p-۱)^{۱/۲} n^{۱/p} \sum_{j=۱}^{n} j^{۱/۲-۱/p}\theta_{j,p}\right)\end{aligned} \qquad (۱۸.۳)$$

جمله اول در نابرابری (۸.۳)، مشابه روشی که برای جمله دوم وجود داشت، اثبات می شود.

$$\begin{aligned}\| \max_{۱\leq i\leq n} |S_i - S_{i,n}| \|_p &\leq \| S_n - S_{n,n} \|_p \\ &+ \| \max_{۰\leq i\leq n-۱} |\sum_{k=n-i}^{n} (X_k - X_{k,n})| \|_p . \end{aligned} \qquad (۱۹.۳)$$

برای جمله دوم سمت راست نابرابری (۱۹.۳) با استفاده از تعریف ۱۴.۵.۱

$$\| \max_{۰\leq i\leq n-۱} |\sum_{k=n-i}^{n} (X_k - X_{k,n})| \|_p \leq \frac{p}{p-۱} . \| S_n - S_{n,n} \|_p \qquad (۲۰.۳)$$

از لم ۱۵.۵.۱ داریم

$$\| S_n - S_{n,n} \|_p \leq (p-۱)^{۱/۲} n^{۱/۲} \sum_{j=n+۱}^{\infty} \theta_{j,p} \qquad (۲۱.۳)$$

بنابراین با نابرابری‌های (۱۹.۳) و (۲۰.۳)

$$\| \max_{۱\leq i\leq n} |S_i - S_{i,n}| \|_p \leq ۳(p-۱)^{۱/۲} n^{۱/۲} \sum_{j=n+۱}^{\infty} \theta_{j,p} \qquad (۲۲.۳)$$

برای جمله سوم در سمت راست نابرابری (۸.۳)، توجه کنید که $X_{k,۰}, k \in \mathbb{Z}$، مستقل هستند، مجددا طبق تعریف ۱۴.۵.۱، داریم

$$\| \max_{۱\leq i\leq n} |S_{i,۰}| \|_p \leq \frac{p}{p-۱} \| S_{n,۰} \|_p \qquad (۲۳.۳)$$

همچنین اگر (۳.۳) را اعمال کنیم، آن‌گاه

$$\| S_{n,0} \|_p \le \frac{14/5p}{\log p} \left(n^{1/2} \| X_1 \|_2 + n^{1/p} \| X_1 \|_p \right) \tag{۲۴.۳}$$

با استفاده از نابرابری (۲۳.۳) و (۲۴.۳)

$$\| \max_{1\le i\le n} |S_{i,0}| \|_p \le \frac{29p}{\log p} \left(n^{1/2} \| X_1 \|_2 + n^{1/p} \| X_1 \|_p \right) \tag{۲۵.۳}$$

در نهایت با جای‌گذاری نابرابری‌های (۱۸.۳)، (۲۲.۳) و (۲۵.۳) در نابرابری (۸.۳) رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
\| S_n^* \|_p &\le 3(p-1)^{1/2} n^{1/2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \theta_{j,p} \\
&+ \frac{87p}{\log p} \left(\sqrt{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_{j,2} + (p-1)^{1/2} n^{1/p} \sum_{j=1}^{n} j^{1/2-1/p} \theta_{j,p} \right) \\
&+ \frac{29p}{\log p} \left(n^{1/2} \| X_1 \|_2 + n^{1/p} \| X_1 \|_p \right) \\
&\le n^{1/2} \left[\frac{87p}{\log p} \sum_{j=1}^{n} \theta_{j,2} + 3(p-1)^{1/2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \theta_{j,p} + \frac{29p}{\log p} \| X_1 \|_2 \right] \\
&+ n^{1/p} \left[\frac{87p(p-1)^{1/2}}{\log p} \sum_{j=1}^{n} j^{1/2-1/p} \theta_{j,p} + \frac{29p}{\log p} \| X_1 \|_p \right]
\end{aligned}$$

□

گزاره ۲.۲.۳ (*). در قضیه ۱.۲.۳ چون $p > 2$

$$\| X_j - X_j' \|_2 \le \| X_j - X_j' \|_p$$

پس $\theta_{j,2} \le \theta_{j,p}$ می‌شود. در نتیجه $\sum_{j=1}^{n} \theta_{j,2} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \theta_{j,p}$ در نابرابری (۶.۳) را می‌توان با $\Theta_{1,2} + \Theta_{n+1,p}$ جایگزین کرد. بنابراین نابرابری را می‌توان به صورت

$$\| S_n^* \|_p \le c_p n^{1/2} (\Theta_{1,2} + \| X_1 \|_2) + c_p n^{1/2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \min(j,n)^{1/2-1/p} \theta_{j,p} + \| X_1 \|_p \right]$$

نوشت.

برهان. براساس قضیه ۱.۲.۳ و با توجه به این‌که

$$p > 2 \Longrightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{2} \Longrightarrow n^{1/p} < n^{1/2}$$

$$\| S_n^* \|_p \le n^{1/2} \left[\frac{87p}{\log p} \sum_{j=1}^{n} \theta_{j,2} + 3(p-1)^{1/2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \theta_{j,p} + \frac{29p}{\log p} \| X_1 \|_2 \right]$$

$$
\begin{aligned}
&+n^{۱/p}\left[\frac{۸۷p(p-۱)^{۱/۲}}{\log p}\sum_{j=۱}^{n} j^{۱/۲-۱/p}\theta_{j,p}+\frac{۲۹p}{\log p}\parallel X_۱\parallel_p\right]\\
\leq\ & n^{۱/۲}\left[\frac{۸۷p}{\log p}\sum_{j=۱}^{n}\theta_{j,۲}+\frac{۸۷p}{\log p}\parallel X_۱\parallel_۲\right]\\
&+n^{۱/p}\left[۳(p-۱)^{۱/۲}\sum_{j=n+۱}^{\infty} n^{۱/۲-۱/p}\theta_{j,p}\right.\\
&\left.+\frac{۸۷p(p-۱)^{۱/۲}}{\log p}\sum_{j=۱}^{n} j^{۱/۲-۱/p}\theta_{j,p}+\frac{۸۷p}{\log p}\parallel X_۱\parallel_p\right]\\
\leq\ & n^{۱/۲}c_p\left[\Theta_{۱,۲}+\parallel X_۱\parallel_۲\right]+c_p n^{۱/p}\left[\sum_{j=۱}^{\infty}\min(j,n)^{۱/۲-۱/p}\theta_{j,p}+\parallel X_۱\parallel_p\right]
\end{aligned}
$$

□

ملاحظه ۳.۲.۳. اگر X_iها مستقل باشند، آن‌گاه به‌ازای $j \geq ۱$، $\theta_{j,۲} = ۰$ و $\theta_{j,p} = ۰$ است، و نابرابری (۶.۳) به نابرابری (۲.۳) کاهش می‌یابد.

۳.۳ کاربرد نابرابری روزنتال

سری زمانی غیر خطی زیر را در نظر بگیرید. برای مثالی از این سری‌ها می‌توانید به دایاکانیس و فریدمن (۱۹۹۹)، مراجعه کنید.

$$X_i = F(X_{i-۱},\epsilon_i) = F_{\epsilon_i}(X_{i-۱}) \qquad (۲۶.۳)$$

که در آن F تابع اندازه پذیر دومتغیره و به‌ازای $i \in \mathbb{Z}$، ϵ_iها مستقل و هم‌توزیع هستند. $x_۰$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای $p > ۰$

$$k_p := \parallel x_۰ - F_{\epsilon_۰}(x_۰)\parallel_p < \infty \qquad (۲۷.۳)$$

سپس ثابت لیپ‌شیتس[۴] را به صورت

$$L_p := \sup_{x\neq x'}\frac{\parallel F_{\epsilon_۰}(x) - F_{\epsilon_۰}(x')\parallel_p}{|x-x'|} < ۱ \qquad (۲۸.۳)$$

[۴] Constant Lipschitz

محاسبه می‌شود. با قضیه ۲ در وو و شائو (۲۰۰۴)، شرایط (۲۷.۳) و (۲۸.۳) با هم نشان می‌دهند که (۲۶.۳) حل ارگودیک ایستا با

$$\begin{aligned} \| X_\circ \|_p &= \| x_\circ - x_\circ - F_{\epsilon_\circ}(x_\circ) \|_p \\ &\leq \| x_\circ \|_p + \| x_\circ - F_{\epsilon_\circ}(x_\circ) \|_p \\ &= |x_\circ| + \| x_\circ - F_{\epsilon_\circ}(x_\circ) \|_p \\ &= |x_\circ| + k_p \\ &\leq |x_\circ| + \frac{k_p}{1 - L_p} := K_p \end{aligned}$$

نابرابری آخر برقرار است، چون $1 > 1 - L_p > 0$. همچنین تابع اندازه وابستگی

$$\begin{aligned} \theta_{i,p} &= \| X_i - X'_i \|_p \\ &\leq L_p^i \| X_\circ - X'_\circ \|_p \\ &\leq 2L_p^i \| X_\circ \|_p \leq 2K_p L_p^i \end{aligned}$$

حال قضیه ۱.۲.۳ را به فرآیند (X_i) اعمال می‌کنیم. فرض کنید $\mathbb{E}(X_i) = 0$ باشد و $A = 1/2 - 1/p$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \theta_{j,p} + n^{-A} \sum_{j=1}^{n} j^A \theta_{j,p}}{2K_p} &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} L_P^j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^A L_P^j \\ &\leq \min\left(\sum_{j=1}^{\infty} L_P^j, n^{-A} \sum_{j=1}^{\infty} j^A L_P^j\right) \qquad (۲۹.۳) \end{aligned}$$

ثابت C_A وجود دارد، به‌طوری‌که

۱) اگر $L_p \geq 1 - 1/n$، سمت راست نابرابری (۲۹.۳) کمتر از $C_A/(1 - L_p)$ می‌شود. چون

$$\sum_{j=1}^{\infty} L_P^j = C_A/(1 - L_p)$$

۲) اگر $L_p \leq 1 - 1/n$، طبق بخش ۶.۱ کمتر از $C_A/(n^A(1 - L_p)^{1+A})$ می‌شود، چون

$$n^{-A} \sum_{j=1}^{\infty} j^A L_P^j = C_A/(n^A(1 - L_p)^{1+A})$$

با ترکیب این دو مورد، کران بالا برای (۲۹.۳) مانند $C_A \min(1/(1-L_p), (1/(n^A(1-L_p)^{1+A}))$

به‌دست می‌آید. از این‌رو با قضیه ۱.۲.۳

$$\begin{aligned}\| S_n^* \|_p &\leq c_p n^{1/2}\sum_{j=1}^{n}\theta_{j,2} + c_p n^{1/2}K_2 + c_p n^{1/p}K_p \\ &+n^{1/2}K_pC_A \min\left(\frac{1}{1-L_p}, \frac{1}{n^A(1-L_p)^{1+A}}\right) \\ &\leq \frac{2K_2c_pn^{1/2}}{1-L_2} + \frac{c_pn^{1/2}K_p}{1-L_p}\min(1, n^{-A}(1-L_p)^{-A}) \qquad (۳۰.۳)\end{aligned}$$

گزاره ۱.۳.۳. اگر ثابت مثبت λ_0 وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $L_p < 1-\lambda_0$ باشد، آن‌گاه

$$\| S_n^* \|_p \leq \frac{2K_2c_pn^{1/2}}{1-L_2} + O(n^{1/p})$$

که نابرابری روزنتال (۲.۳) را نتیجه می‌دهد.

گزاره ۲.۳.۳. فرض کنید $L_p = 1 - r_n$ با $r_n \to 0$، $r_n \geq 1/n$، آن‌گاه جمله دوم در (۳۰.۳) مرتبه $O(n^{1/p}r_n^{1/p-5/2})$ و اگر $r_n \leq 1/n$ مرتبه $O(n^{1/2}r_n^{-2})$ دارد.

ملاحظه ۳.۳.۳. اگر مدل $ARCH$

$$F_{\epsilon_i}(x) = \epsilon_i(a^2 + b^2x^2)^{1/2}$$

را در نظر بگیرید که ϵ_i نرمال استاندارد و هم‌توزیع و $a, b > 0$ هستند. آن‌گاه

$$\begin{aligned}L_p &:= \sup_{x\neq x'}\frac{\| \epsilon_0(a^2+b^2x^2)^{1/2} - \epsilon_0(a^2+b^2x'^2)^{1/2} \|_p}{|x-x'|} \\ &= \sup_{x\neq x'}\frac{\| \epsilon_0x(\frac{a^2}{x^2}+b^2)^{1/2} - \epsilon_0x'(\frac{a^2}{x'}+b^2)^{1/2} \|_p}{|x-x'|} \\ &= \sup_{x\neq x'}\frac{\| \epsilon_0x(b^2)^{1/2} - \epsilon_0x'(b^2)^{1/2} \|_p}{|x-x'|} \\ &= \sup_{x\neq x'}\frac{\| \epsilon_0b(x-x') \|_p}{|x-x'|} \\ &= \| b\epsilon_0 \|_p\end{aligned}$$

p_0 را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن $L_{p_0} = 1$ شود. از طرفی طبق گلدی (۱۹۹۱)، برای بعضی $C > 0$ وقتی‌که $x \to \infty$

$$\mathbb{P}(X_0 \geq x) \sim Cx^{-p_0}$$

و $\mathbb{E}(|X_0|^{p_0}) = \infty$ می‌شود. حال چون

$$L_p = L_{p_0} + O(|p-p_0|),$$

اگر $p - p_0 = O(r_n)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $L_p - 1 = O(r_n)$ می‌شود. به‌طورکلی وقتی $r_n \downarrow 0$، جمله دوم در (۳۰.۳) کران $n^{1/2}r_n^{-2}\min(1, (nr_n)^{-A})$ دارد.

فصل ۴

نابرابری ناگایف برای مجموع متغیرهای تصادفی

۱.۴ مقدمه

نابرابری ناگایف[۱] توسط ناگایف (۱۹۷۹)، به این صورت بیان شده است که فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ باشد. همچنین فرض کنید به ازای همه iها و $p > ۲$، $\parallel X_i \parallel_p = (\mathbb{E}|X_i|^p)^{۱/p} < \infty$ و $\mathbb{E}(X_i) = ۰$ باشد. طبق نتیجه ۱.۷ در ناگایف[۲] (۱۹۷۹)، برای x مثبت و $y_۱, ..., y_n > ۰$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geq x) &\leq \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + \exp\left\{-\frac{a_p x^۲}{\sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(X_i^۲ . ۱_{X_i \leq y_i})}\right\} \\ &+ \left(\frac{\sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(X_i^p . ۱_{۰ \leq x_i \leq y_i})}{\beta x y^{p-۱}}\right)^{\beta x / y} \end{aligned} \qquad (۱.۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} y &= \max_{۱ \leq i \leq n} \{y_i\}, \\ \beta &= p/(p+۲), \\ a_p &= ۲e^{-p}(p+۲)^{-۲} \end{aligned}$$

گزاره ۱.۱.۴. برای $۱ \leq i \leq n$، با $y_i = x\beta$ و $\mu_{n,p} = \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(|X_i|^p)$ با استفاده از نابرابری (۱.۴) و نتیجه ۱.۸ ناگایف (۱۹۷۹) داریم

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq x) \leq \left(۱ + \frac{۲}{p}\right)^p \frac{\mu_{n,p}}{x^p} + ۲\exp\left(-\frac{a_p x^۲}{\mu_{n,۲}}\right) \qquad (۲.۴)$$

---

[۱] Nagaev Inequality

[۲] Nagaev

گزاره ۲.۱.۴. اگر X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند، آن‌گاه

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq x) \leq \left(1 + \frac{2}{p}\right)^p \frac{n \parallel X_0 \parallel_p^p}{x^p} + 2\exp\left(-\frac{a_p x^2}{n \parallel X_0 \parallel_2^2}\right) \tag{۳.۴}$$

گزاره ۳.۱.۴. اگر از نابرابری مارکوف[3] و نابرابری (۶.۳) استفاده شود، آن‌گاه

$$\mathbb{P}(S_n^* \geq x) \leq \frac{\parallel S_n^* \parallel_p^p}{x^p} = O\left(\frac{n^{p/2}}{x^p}\right)$$

در مقایسه، کران $O(n/x^p)$ در (۳.۴) قوی‌تر است.

گزاره ۴.۱.۴. نابرابری (۲.۴) برای S_n^*، ماکسیمم قدرمطلق مجموع‌های جزیی، وقتی که X_1، X_2، $\ldots$، X_n متغیرهای مستقل با میانگین صفر باشد، طبق بورکوف (۱۹۷۲) به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbb{P}(S_n^* \geq x) \leq \left(1 + \frac{2}{p}\right)^p \frac{\mu_{n,p}}{x^p} + 2\exp\left(-\frac{a_p x^2}{\mu_{n,2}}\right) \tag{۴.۴}$$

در رابطه با داده‌های زمان‌مند و سری زمانی، X_iها اغلب وابسته هستند، آن‌گاه مشکلی که مطرح می‌شود، این است که چگونه نابرابری ناگایف به متغیرهای تصادفی وابسته تعمیم داده شود.

ناگایف (۲۰۰۷)، نشان داد S_k برای $k \geq 0$، زیرمارتینگل با دنباله غیر نزولی سیگما میدان $\{\mathcal{F}_k\}_0^\infty$ می‌باشد که $X_k = S_k - S_{k-1}$ و $S_0 = 0$ است. متغیر تصادفی σ_k^2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\sigma_k^2 = \mathbb{E}\{X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\}$$

همچنین

$$B_k^2 = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2, \quad \bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k, \quad \bar{X}_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k, \quad A_p = \sum_{j=1}^{n} |X_j|^p$$

$$Q(x) = \mathbb{P}(\bar{X}_n > x) + \mathbb{P}(B_n > x)$$

حال اگر $0 < \gamma \leq 1$، برای $p \geq \max\{e^6, e^4/\gamma^2\}$ باشد، آن‌گاه برای همه $x > 0$

$$\mathbb{P}(\bar{S}_n > x) < c(p,\gamma) x^{-p} \int_0^x Q(\epsilon_p u) u^{p-1} du \tag{۵.۴}$$

که در آن

$$\epsilon_p = \frac{\ln p - 2\ln\ln p}{2p}, \qquad c(p,\gamma) = \frac{2e^{6\gamma p}}{\gamma}$$

ملاحظه ۵.۱.۴. اگر $\epsilon_p = \eta/p$ ، به‌ازای $p > 0$ و $c(p,\gamma)$ جایگزین با $c_1(p,\eta) = pe^{3\eta\alpha(\eta)}/(\eta\alpha(\eta))$ که $\alpha(\eta) = e^{\eta+1}$، آن‌گاه نابرابری (۵.۴) به‌صورت

$$\mathbb{P}(\bar{S}_n > x) < c_1(p,\eta) x^{-p} \int_0^x Q(\epsilon_p u) u^{p-1} du$$

است.

[3] Markov

۲.۴ نابرابری ناگایف برای مجموع متغیرهای تصادفی j-وابسته

نابرابری ناگایف کاربردهای گسترده‌ای دارد، که از آن جمله می‌توان در بیمه و مدیریت ریسک اشاره کرد. برای مثال، برای سطح کوچک $\alpha \in (۰,۱)$ اگر $x = x_\alpha$ باشد، به‌طوری‌که سمت راست نابرابری (۲.۴) مقدار α باشد، آن‌گاه چندک αام یا مقدار ریسک S_n با x_α کران‌دار است، چون

$$\mathbb{P}(S_n \geq x_\alpha) \leq \alpha$$

در این بخش نوع دیگر از نابرابری ناگایف تحت حالت j-وابسته از لیو و همکاران (۲۰۱۳) بیان و اثبات شده است. در روند اثبات از تابع دم گاوسی مانند که در ادامه مختصر به آن پرداخته می‌شود استفاده شده است. اگر $y > ۰$ و $q > ۰$ تابع دم‌گاوسی مانند [۴] را به‌صورت

$$G_q(y) = \sum_{j=۱}^{\infty} e^{-j^q y^۲}$$

داریم. با توجه به اینکه $\sup_{y\geq ۱} G_q(y)e^{y^۲} = G_q(۱)e$ می‌شود. از این‌رو اگر $y \geq ۱$، $G_q(y) \leq G_q(۱)ee^{-y^۲}$ می‌شود.

قضیه ۱.۲.۴ (*). فرض کنید $X_{k,j}$، متغیرهای j-وابسته باشند و S_n^* ماکسیمم قدر مطلق مجموع‌های جزیی باشد.

(i) اگر

$$\nu := \sum_{j=۱}^{\infty} \mu_j < \infty, \quad \mu_j = (j^{p/۲-۱}\theta_{j,p}^p)^{۱/(p+۱)} \tag{۶.۴}$$

آن‌گاه برای هر $x > ۰$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n^* \geq x) &\leq c_p \frac{n}{x^p}(\nu^{p+۱} + \| X_۱ \|_p^p) \\ &+۴\sum_{j=۱}^{\infty} \exp\left(\frac{c_p \mu_j^۲ x^۲}{n\nu^۲\theta_{j,۲}^۲}\right) + ۲\exp\left(-\frac{c_p x^۲}{n \| X_۱ \|_۲^۲}\right)\end{aligned} \tag{۷.۴}$$

(ii) فرض کنید $\alpha > ۱/۲ - ۱/p$ و $\Theta_{m,p} = O(m^{-\alpha})$ باشد. آن‌گاه ثابت‌های مثبت $C_۱$ و $C_۲$ وجود دارند، به‌طوری‌که برای هر $x > ۰$

$$\mathbb{P}(S_n^* \geq x) \leq \frac{C_۱\Theta_{۰,p}^p n}{x^p} + ۴G_{۱-۲/p}\left(\frac{C_۲ x}{\sqrt{n}\Theta_{۰,p}}\right) \tag{۸.۴}$$

(iii) اگر $\alpha < ۱/۲ - ۱/p$ و $\Theta_{m,p} = O(m^{-\alpha})$ باشد، آن‌گاه نوع دیگر از نابرابری (۸.۴) به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{P}(S_n^* \geq x) \leq \frac{C_۱\Theta_{۰,p}^p n^{p(۱/۲-\alpha)}}{x^p} + ۴G_{(p-۲)/(p+۱)}\left(\frac{C_۲ x}{n^{(۲p-۱-۲\alpha p)/(۲+۲p)}\Theta_{۰,p}}\right) \tag{۹.۴}$$

[۴] Gaussian-Like Tail Function

برهان. (i) از تجزیه (۷.۳) استفاده می‌کنیم. فرض کنید به ازای $j=1,\dots,n$، λ_j دنباله مثبت از اعداد حقیقی باشد، به‌طوری‌که $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \le 1$.

برای $i\in\mathbb{Z}$ و $\ell\in\mathbb{N}$، می‌نویسیم $\lfloor i\rfloor_\ell := \lfloor i/\ell\rfloor \ell$

$$M_{i,j}=\sum_{k=1}^{i}(X_{k,j}-X_{k,j-1}),\qquad M^*_{n,j}=\max_{1\le i\le n}|M_{i,j}| \tag{۱۰.۴}$$

آن‌گاه

$$S_{n,n}-S_{n,0}=\sum_{k=1}^{n}(X_{k,n}-X_{k,0})=\sum_{j=1}^{n}M_{n,j}$$

برای هر $1\le j\le n$، مانند (۱۱.۳)، فرض کنید

$$Y_{i,j}=\sum_{k=1+(i-1)j}^{(ij)\wedge n}(X_{k,j}-X_{k,j-1}),\quad 1\le i\le l$$

که $l=\lfloor n/j\rfloor+1$.

تعریف کنید

$$W^e_{s,j}=\sum_{i=1}^{s}(1+(-1)^i)/2.Y_{i,j}$$

و

$$W^o_{s,j}=\sum_{i=1}^{s}(1-(-1)^i)/2.Y_{i,j}$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M^*_{n,j}\ge 3\lambda_j x) &= \mathbb{P}(\max_{1\le i\le n}|M_{i,j}|\ge 3\lambda_j x)\\
&= \mathbb{P}(\max_{1\le i\le n}|M_{i,j}-M_{\lfloor i\rfloor_j,j}+M_{\lfloor i\rfloor_j,j}|\ge 3\lambda_j x)\\
&\le \mathbb{P}(\max_{i\le n}|M_{\lfloor i\rfloor_j,j}|\ge 2\lambda_j x)+\mathbb{P}(\max_{i\le n}|M_{\lfloor i\rfloor_j,j}-M_{i,j}|\ge \lambda_j x)\\
&\le \mathbb{P}(\max_{s\le l}|W^e_{l,j}|\ge \lambda_j x)+\mathbb{P}(\max_{s\le l}|W^o_{l,j}|\ge \lambda_j x)\\
&\quad +\frac{n}{j}\mathbb{P}(\max_{i\le j}|M_{i,j}|\ge \lambda_j x)
\end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

چون $Y_{2,j},Y_{4,j},\dots$، مستقل هستند، از (۱۳.۳) و (۴.۴) داریم

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max_{s\le l}|W^e_{l,j}|\ge\lambda_j x) &\le c_p\frac{(n/j)\mathbb{E}(|Y_{2,j}|^p)}{(\lambda_j x)^p}+2\exp\left(-c_p\frac{(\lambda_j x)^2}{(n/j)\mathbb{E}(|Y_{2,j}|^2)}\right)\\
&\le c_p\frac{(n/j)(p-1)^{p/2}j^{p/2}\theta^p_{j,p}}{(\lambda_j x)^p}+2\exp\left(c_p\frac{(\lambda_j x)^2}{(n/j)j\theta^2_{j,2}}\right)\\
&\le c_p\frac{n}{x^p}\frac{j^{p/2-1}\theta^p_{j,p}}{\lambda_j^p}+2\exp\left(c_p\frac{(\lambda_j x)^2}{n\theta^2_{j,2}}\right)
\end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

مشابه نابرابری (۱۲.۴) را برای $W^o_{s,j}$ نشان می‌دهیم،

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{s\le l}|W^o_{l,j}|\ge\lambda_j x) &\le c_p\frac{(n/j)\mathbb{E}(|Y_{۱,j}|^p)}{(\lambda_j x)^p}+۲\exp\left(-c_p\frac{(\lambda_j x)^۲}{(n/j)\mathbb{E}(|Y_{۱,j}|^۲)}\right)\\ &\le c_p\frac{(n/j)(p-۱)^{p/۲}j^{p/۲}\theta^p_{j,p}}{(\lambda_j x)^p}+۲\exp\left(c_p\frac{(\lambda_j x)^۲}{(n/j)j\theta^۲_{j,۲}}\right)\\ &\le c_p\frac{n}{x^p}\frac{j^{p/۲-۱}\theta^p_{j,p}}{\lambda^p_j}+۲\exp\left(c_p\frac{(\lambda_j x)^۲}{n\theta^۲_{j,۲}}\right) \qquad (۱۳.۴)\end{aligned}$$

برای جمله آخر در سمت راست (۱۱.۴)، با توجه به نابرابری دوب

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\max_{۱\le i\le j}|M_{i,j}|^p) &\le ۲^{p-۱}\mathbb{E}\left(|M_{j,j}|^p+\max_{۱\le i\le j}|\sum_{k=i}^{j}(X_{k,j}-X_{k,j-۱})|^p\right)\\ &\le c_p j^{p/۲}\theta^p_{j,p}\end{aligned}$$

آن‌گاه

$$\frac{n}{j}\mathbb{P}(\max_{i\le j}|M_{i,j}|\ge\lambda_j x) \le \frac{n}{j}\left(\frac{c_p j^{p/۲}\theta^p_{j,p}}{(\lambda_j x)^p}\right)=c_p\frac{n}{x^p}\frac{j^{p/۲-۱}\theta^p_{j,p}}{\lambda^p_j} \qquad (۱۴.۴)$$

در نتیجه از (۱۱.۴)، (۱۲.۴) و (۱۴.۴)، می‌توان نوشت

$$\mathbb{P}(M^*_{n,j}\ge ۳\lambda_j x) \le c_p\frac{n}{x^p}\frac{j^{p/۲-۱}\theta^p_{j,p}}{\lambda^p_j}+۴\exp\left(c_p\frac{(\lambda_j x)^۲}{n\theta^۲_{j,۲}}\right) \qquad (۱۵.۴)$$

چون $\| X_{۱,۰} \|\le\| X_۱ \|_۲$ و $\| X_{۱,۰} \|_p\le\| X_۱ \|_p$، بنابر (۴.۴)

$$\mathbb{P}(\max_{۱\le i\le n}|S_{i,۰}|\ge x)\le c_p\frac{n\| X_۱ \|^p_p}{x^p}+۲\exp\left(-\frac{c_p x^۲}{n\| X_۱ \|^۲_۲}\right) \qquad (۱۶.۴)$$

با (۷.۳) و (۲۲.۳) رابطه زیر را داریم

$$\Theta^{p/(p+۱)}_{n+۱,p}\le\sum_{l=n+۱}^{\infty}\theta^{p/(p+۱)}_{l,p}\le\sum_{l=n+۱}^{\infty}\left(\frac{l}{n}\right)^{(p/۲-۱)/(p+۱)}\theta^{p/(p+۱)}_{l,p}$$

اگر $\lambda_j=\mu_j/\nu$ انتخاب شود

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S^*_n\ge ۵x) &\le \sum_{j=۱}^{n}\mathbb{P}(M^*_{n,j}\le ۳\lambda_j x)\\ &\quad+\mathbb{P}(\max_{۱\le i\le n}|S_i-S_{i,n}|\ge x)+\mathbb{P}(\max_{۱\le i\le n}|S_{i,۰}|\ge x)\\ &\le c_p\frac{n}{x^p}\left(\nu^{p+۱}+\| X_۱ \|^p_p\right)+۴\sum_{j=۱}^{\infty}\exp\left(c_p\frac{(\mu_j x)^۲}{n\nu^۲\theta^۲_{j,۲}}\right)\\ &\quad+۲\exp\left(-\frac{c_p x^۲}{n\| X_۱ \|^۲_۲}\right)\end{aligned}$$

در نتیجه نابرابری (۷.۴) به‌دست می‌آید.

(ii) فرض کنید $\circ = \tau_\circ < \tau_1 < \ldots < \tau_L = n$ دنباله اعداد صحیح باشد. مانند (۱۰.۴) می‌توان نوشت

$$S_{i,n} - S_{i,\circ} = \sum_{l=1}^{L} \tilde{M}_{i,l} \quad , \quad \tilde{M}_{i,l} = \sum_{k=1}^{i} (X_{k,\tau_l} - X_{k,\tau_{l-1}})$$

آن‌گاه ثابت $c_p > \circ$ وجود دارد، به‌طوری‌که طبق لم ۱۵.۵.۱

$$\begin{aligned} \frac{\| \tilde{M}_{i,l} \|_p}{\sqrt{i}} &= \frac{\| \sum_{k=1}^{i} (X_{k,\tau_l} - X_{k,\tau_{l-1}}) \|_p}{\sqrt{i}} \\ &\le \frac{(p-1)^{1/2} i^{1/2} \| (X_{k,\tau_l} - X_{k,\tau_{l-1}}) \|_p}{\sqrt{i}} \\ &\le c_p \sum_{i=1+\tau_{l-1}}^{\tau_l} \theta_{i,p} =: c_p \tilde{\theta}_{l,p} \end{aligned}$$

و

$$\frac{\| \tilde{M}_{i,l} \|_2}{\sqrt{i}} \le \sum_{i=1+\tau_{l-1}}^{\tau_l} \theta_{i,2} =: \tilde{\theta}_{l,2}$$

فرض کنید $\tilde{M}^*_{n,l} = \max_{i \le n} |\tilde{M}_{i,l}|$ باشد. مجددا فرض کنید $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_L$ دنباله اعداد حقیقی مثبت و $\sum_{l=1}^{L} \tilde{\lambda}_l \le 1$ باشد. با عبارت‌های (۱۱.۴)، (۱۲.۴) و (۱۴.۴)، به‌طور مشابه داریم

$$\mathbb{P}(\tilde{M}^*_{n,l} \ge 3\tilde{\lambda}_l x) \le c_p \frac{n}{x^p} \frac{\tau_l^{p/2-1} \tilde{\theta}_{l,p}^p}{\tilde{\lambda}_l^p} + 4 \exp\left(c_p \frac{(\tilde{\lambda}_l x)^2}{n \tilde{\theta}_{l,2}^2} \right)$$

فرض کنید $\tilde{\mu}_l = (\tau_l^{p/2-1} \tilde{\theta}_{l,p}^p \Theta_{\circ,p}^{-p})^{1/(p+1)}$، $\tilde{\nu}_L = \sum_{l=1}^{L} \tilde{\mu}_l$ و $\tilde{\lambda}_l = \tilde{\mu}_l / \tilde{\nu}_L$ باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S^*_n \ge 5x) &\le \sum_{l=1}^{L} \mathbb{P}(\tilde{M}^*_{n,l} \ge 3\tilde{\lambda}_l x) \\ &\quad + \mathbb{P}(\max_{1 \le i \le n} |S_i - S_{i,n}| \ge x) + \mathbb{P}(\max_{1 \le i \le n} |S_{i,\circ}| \ge x) \\ &\le c_p \frac{n}{x^p} \tilde{\nu}_L^{(p+1)} + 4 \sum_{l=1}^{L} \exp\left(-c_p \frac{(\tilde{\lambda}_l x)^2}{n \tilde{\theta}_{l,2}^2} \right) + c_p \frac{n^{p/2} \Theta_{n+1,p}^p}{x^p} \\ &\quad + c_p \frac{n \| X_\circ \|_p^p}{x^p} + 2 \exp\left(- \frac{c_p x^2}{n \| X_\circ \|_2^2} \right) \end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

حال برای این‌که نابرابری (۸.۴) نشان داده شود، فرض کنید $A = (1/2 - 1/p)p/(1+p)$ و $B = \alpha p/(1+p)$ باشند. چون

$$\tilde{\theta}_{l,p} \le \Theta_{\tau_{l-1}+1,p}$$

است، از طرفی

$$\Theta_{\tau_{l-1}+1,p} = O((\tau_{l-1}+1)^{-\alpha})$$

همچنین

$$\tilde{\theta}_{l,p} \leq O((\tau_{l-1}+1)^{-\alpha})$$

حال اگر ثابتی مانند m وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$\tilde{\theta}_{l,p} \leq m(\tau_{l-1}+1)^{-\alpha}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}_L &= \sum_{l=1}^{L}(\tau_l^{p/2-1}\tilde{\theta}_{l,p}^{p})^{1/(p+1)} \\
&= O(1)\sum_{l=1}^{L}(\tau_l^{p/2-1}\tau_{l-1}^{-\alpha p})^{1/(1+p)} \\
&= O(1)\sum_{l=1}^{L}(\tau_l^{1/2-1/p}\tau_{l-1}^{-\alpha})^{p/(1+p)} \\
&= O(1)\sum_{l=1}^{L}\frac{\tau_l^{A}}{\tau_{l-1}^{B}}
\end{aligned}$$

اگر $A < B$ باشد و $\rho \in (A/B, 1)$ انتخاب شود، تعریف می‌کنیم
$L = 1 + \lfloor(\log\log n)/(\log \rho^{-1})\rfloor$

و برای $1 \leq l \leq L$، $\tau_l = \lfloor n^{\rho^{L-1}}\rfloor$ انتخاب گردد. چون $A < \rho B$ و $\tau_l^A/\tau_{l-1}^B \sim n^{\rho^{L-l(A-\rho B)}}$ آن‌گاه $\sum_{l=1}^{L}\tau_l^A/\tau_{l-1}^B = O(1)$ می‌شود. اگر $x = \sqrt{n}\Theta_{\circ,p}\tilde{\nu}_L^{1+1/p}y$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\frac{(\tilde{\lambda}_l x)^2}{n\tilde{\theta}_{l,2}^2} = \frac{\tilde{\mu}_l^2\tilde{\nu}_L^{2/p}\Theta_{\circ,p}^2y^2}{\tilde{\theta}_{l,2}^2} &\geq \frac{\tilde{\mu}_l^{2+2/p}\Theta_{\circ,p}^2y^2}{\tilde{\theta}_{l,2}^2} \\
&= \frac{(\tau_l^{p/2-1}\tilde{\theta}_{l,p}^{p}\Theta_{\circ,p}^{-p})^{2/p}\Theta_{\circ,p}^2y^2}{\tilde{\theta}_{l,2}^2} \\
&\geq \tau_l^{1-2/p}y^2 \\
&\geq l^{1-2/p}y^2
\end{aligned}$$

و $\sum_{l=1}^{\infty}4\exp(-c_pl^{1-2/p}y^2)$ یک کران برای جمله دوم در سمت راست نابرابری (۱۷.۴) است، بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n^* \geq 5x) &\leq \frac{C_1\Theta_{\circ,p}^p n}{x^p} + \sum_{l=1}^{\infty}4\exp(-c_pl^{1-2/p}y^2) \\
&= \frac{C_1\Theta_{\circ,p}^p n}{x^p} + 4G_{1-2/p}\left(\frac{C_2x}{\sqrt{n}\Theta_{\circ,p}}\right)
\end{aligned}$$

در نتیجه نابرابری (۸.۴) حاصل می‌شود.

(iii) اثبات این قسمت همانند قسمت (ii) است. اگر $A > B$، فرض کنید $r = (A/B)^{1/(A-B)}$، $\tau_l = \lfloor n/r^{L-l} \rfloor$ و $L = 1 + \lfloor (\log n - 1)/(log r) \rfloor$ باشند، آن‌گاه $\tilde{\nu}_L = O(n^{A-B})$ می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\lambda}_l x)^2}{n\tilde{\theta}_{l,2}^2} = \frac{\tilde{\mu}_l^2 \Theta_{0,p}^2 y^2}{\tilde{\theta}_{l,2}^2} &= \frac{(\tau_l^{p/2-1}\tilde{\theta}_{l,p}^p \Theta_{0,p}^{-p})^{2/(p+1)} \Theta_{0,p}^2 y^2}{\tilde{\theta}_{l,2}^2} \\ &= \frac{(\tilde{\theta}_{l,p}/\Theta_{0,p})^{2p/(p+1)} \tau_l^{(p-2)/(p+1)} y^2}{(\tilde{\theta}_{l,2}/\Theta_{0,p})^2} \\ &\geq \tau_l^{(p-2)/(p+1)} y^2 \\ &\geq l^{(p-2)/(p+1)} y^2 \end{aligned}$$

فرض کنید $x = \sqrt{n}\Theta_{0,p}\tilde{\nu}_L y$، آن‌گاه (۱۷.۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n^* \geq 5x) &\leq \frac{C_1 \Theta_{0,p}^p n^{p(1/2-\alpha)}}{x^p} + \sum_{l=1}^{\infty} 4\exp(-c_p l^{(p-2)/(p+1)} y^2) \\ &= \frac{C_1 \Theta_{0,p}^p n^{p(1/2-\alpha)}}{x^p} + 4G_{(p-2)/(p+1)}\left(\frac{C_2 x}{n^{(2p-1-2\alpha p)/(2+2p)}\Theta_{0,p}}\right) \end{aligned}$$

□

گزاره ۲.۲.۴. اگر X_iها مستقل باشند، آن‌گاه به‌ازای $j \geq 1$، $\theta_{j,2} = \theta_{j,p} = 0$ می‌شود. بنابراین نابرابری (۷.۴) به نابرابری (۴.۴) تبدیل می‌شود.

گزاره ۳.۲.۴. نابرابری‌های (۷.۴)، (۸.۴) و (۹.۴) غیرمجانبی هستند و برای هر n و x برقرارند.

گزاره ۴.۲.۴. جمله نمایی در (۷.۴) وقتی $j \to \infty$ خیلی سریع به صفر میل می‌کند. اگر به‌ازای $y > 0$ قرار داده شود $x = \sqrt{n}\nu^{1+1/p} y$، آن‌گاه $\mu_j x^2/(n\nu^2\theta_{j,2}^2) \geq j^{1-2/p} y^2$ می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{c_p \mu_j^2 x^2}{n\nu^2\theta_{j,2}^2} &= \frac{c_p \mu_j^2 n \nu^{2+2/p} y^2}{n\nu^2\theta_{j,2}^2} \\ &= \frac{c_p \mu_j^2 \nu^{2/p} y^2}{\theta_{j,2}^2} \\ &\geq \frac{c_p \mu_j^{2+2/p} y^2}{\theta_{j,2}^2} \\ &= \frac{c_p \left((j^{p/2-1}\theta_{j,p}^p)^{1/(p+1)}\right)^{2+2/p} y^2}{\theta_{j,2}^2} \\ &= \frac{c_p \left(j^{1-2/p}\theta_{j,p}^2\right) y^2}{\theta_{j,2}^2} \\ &\geq c_p j^{1-2/p} y^2 \end{aligned}$$

از طرفی

$$-\frac{c_p\mu_j^{۲}x^{۲}}{n\nu^{۲}\theta_{j,۲}^{۲}} \leq -c_p j^{۱-۲/p}y^{۲}$$

بنابراین

$$\sum_{j=۱}^{\infty}\exp\left(-\frac{c_p\mu_j x^{۲}}{n\nu^{۲}\theta_{j,۲}^{۲}}\right) \leq \sum_{j=۱}^{\infty}\exp(-c_p j^{۱-۲/p}y^{۲})$$

گزاره ۵.۲.۴. اگر بخواهیم وابستگی در حالت‌های (i) و (ii) مقایسه کنیم و حالت خاص $\theta_{j,p} = j^{-\beta}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه (۶.۴) نیاز دارد $\beta > ۳/۲$ و (ii) فقط نیاز دارد $\beta > ۳/۲ - ۱/p$ باشد.

گزاره ۶.۲.۴. (۶.۴) اشاره دارد به این‌که $\Theta_{m,p} = o(m^{۱/p-۱/۲})$ چون $\sum_{j=m}^{۲m-۱}\theta_{j,p} \leq (\sum_{j=m}^{۲m-۱}\theta_{j,p}^{۱/q})^q$ که $q = ۱ + ۱/p$ و $m^{(p/۲-۱)/(۱+p)}\sum_{j=m}^{۲m-۱}\theta_{j,p}^{۱/q} \leq \sum_{j=m}^{۲m-۱}\mu_j = o(۱)$ است.

گزاره ۷.۲.۴. در حالت (iii) وابستگی قوی‌تر است، صورت کسر $n^{p(۱/۲-\alpha)}$ بزرگ‌تر از n و جمله $n^{(۲p-۱-۲\alpha p)/(۲+۲p)}$ در (۹.۴) بزرگ‌تر از $\sqrt{n}$ است.

۳.۴ کاربرد نابرابری ناگایف

برآورد چگالی حاشیه‌ای فرآیندهای خطی $Y_i = \sum_{j=۰}^{\infty} a_j\epsilon_{i-j}$ که $\{(a_j)_{j=۰}^{\infty}\}$ ضرایبی حقیقی هستند و ϵ_jها مستقل و هم‌توزیع با چگالی f_ϵ و $f_* := \sup_u[f_\epsilon(u) + |f'_\epsilon(u)|] < \infty$ در نظر بگیرید. بر اساس داده‌های $Y_۱$، $Y_۲$، $\ldots$، Y_n، چگالی حاشیه‌ای f، Y_i با

$$\hat{f}_n(u) = \frac{۱}{nb_n}\sum_{i=۱}^{n}K(\frac{u-Y_i}{b_n})$$

برآورد می‌شود. b_n دنباله پهنای باند با $b_n \to ۰$ و $nb_n \to \infty$ است، K تابع کرنل کران‌دار با دامنه $[-۱,۱]$ است. یک کران بالا برای احتمال دمی

$$\mathbb{P}(|\hat{f}_n(u) - \mathbb{E}\hat{f}_n(u)| \geq x)$$

به‌دست آورده می‌شود. این احتمال را برای حالتی که متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند، لوینی (۱۹۹۸)، جیو (۲۰۰۳) و جواترد (۲۰۰۶) مطالعاتی انجام داده‌اند. حال متغیرها را در حالت وابسته در نظر بگیرید. فرض کنید $a_۰ = ۱$، $W_{i-۱} = \sum_{j=۱}^{\infty} a_j\epsilon_{i-j} = Y_i - \epsilon_i$ و $\mathcal{F}_{i-۱} = (\ldots, \epsilon_{i-۲}, \epsilon_{i-۱})$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n^{\diamond}(u) &= \frac{۱}{nb_n}\sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}\left[K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right] \\
&= \frac{۱}{nb_n}\sum_{i=۱}^{n}\int K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)f(y_i|\mathcal{F}_{i-۱})dY_i \\
&= \frac{۱}{nb_n}\sum_{i=۱}^{n}\int K(\nu)f(u-W_{i-۱}-\nu b_n)b_n d\nu
\end{aligned}$$

اگر $X_i = \int_{-۱}^{۱} K(\nu) f_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n) d\nu$،

$$\hat{f}_n^\diamond(u) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} X_i$$

حال تابع اندازه وابستگی برای X_i باید به دست آورده شود. فرض کنید

$$W'_{i-۱} = W_{i-۱} - a_i \epsilon_\circ + a_i \epsilon'_\circ$$

که $\epsilon'_\circ, \epsilon_l, l \in \mathbb{Z}$ مستقل و هم‌توزیع هستند، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
|X_i - X'_i| &= |\int K(\nu)[f_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n) - f_\epsilon(u - W'_{i-۱} - \nu b_n)] d\nu| \\
&\leq \int |K(\nu)||f_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n) - f_\epsilon(u - W'_{i-۱} - \nu b_n)| d\nu \\
&= \int |K(\nu)||f'_\epsilon(u - W'_{i-۱} - \nu b_n)||W_{i-۱} - W'_{i-۱}| d\nu \\
&\leq \int |K(\nu)||W_{i-۱} - W'_{i-۱}| \sup_u [f_\epsilon(u - W'_{i-۱} - \nu b_n) + |f'_\epsilon(u - W'_{i-۱} - \nu b_n)|] d\nu \\
&= \int |K(\nu)||a_i||\epsilon_\circ - \epsilon'_\circ| f_* d\nu \\
&= |a_i||\epsilon_\circ - \epsilon'_\circ| f_* \int |K(\nu)| d\nu \\
&= |a_i||\epsilon_\circ - \epsilon'_\circ| k
\end{aligned}$$

که $k = f_* \int_{-۱}^{۱} |K(\nu)| d\nu$. فرض کنید $q > \circ$ وجود دارد که $\mathbb{E}(|\epsilon_\circ|^q) < \infty$. چون $|X_i| \leq k$ و $|X'_i| \leq k$ است

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_i - X'_i|^p) &\leq \mathbb{E}[\min(۲k, |a_i||\epsilon_\circ - \epsilon'_\circ| k)^p] \\
&\leq (۲k)^p \mathbb{E}[(۱, |a_i||\epsilon_\circ - \epsilon'_\circ|)^{\min(p,q)}] \\
&\leq (۲k)^p (|a_i|^{\min(p,q)}) \mathbb{E}[|\epsilon_\circ - \epsilon'_\circ|^{\min(p,q)}]
\end{aligned}$$

بنابراین تابع اندازه وابستگی X_i، به‌صورت $\theta_{i,p} = O(|a_i|^{\min(۱, q/p)})$ است. فرض کنید

$$\sum_{i=۱}^{\infty} (i^{p/۲-۱} |a_i|^{\min(q,p)})^{۱/(p+۱)} < \infty$$

حال اگر قسمت دوم قضیه ۱.۲.۴، اعمال شود، ثابت‌های $C_۱, C_۲, C_۳ > \circ$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $y > \circ$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|\hat{f}_n^\diamond(u) - \mathbb{E}\hat{f}_n^\diamond(u)| \geq y] &= \mathbb{P}(|X_۱ + ... + X_n - n\mathbb{E}X_۱| \geq ny) \\
&\leq \frac{c_۱ \Theta_{\circ,p}^p n}{(ny)^p} + ۴G_{۱-۲/p}\left(\frac{c_۲(ny)}{\sqrt{n}\Theta_{\circ,p}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c_۱\Theta_{\circ,p}^{p} n}{(ny)^p} + ۴\sum_{i=۱}^{\infty} \exp\{-i^{(۱-۲/p)}\}\exp\{۱\}\exp\left[-\left(\frac{c_۲(ny)}{\sqrt{n}\Theta_{\circ,p}}\right)^۲\right] \\ &\leq \frac{c_۱ Mn}{(ny)^p} + ۴\sum_{i=۱}^{\infty} \exp\{-i^{(۱-۲/p)}\}\exp\{۱\}\exp\left[-\left(\frac{c_۲(ny)}{\sqrt{n}M}\right)^۲\right] \\ &\leq \frac{C_۱ n}{(ny)^p} + C_۳\exp\left(-\frac{C_۲(ny)^۲}{n}\right) \end{aligned} \quad (۱۸.۴)$$

اگر به‌ازای $i = ۱, ..., n$

$$D_i := K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right) - \mathbb{E}[K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}]$$

تعریف شود، چون

$$\mathbb{E}\{D_i|\mathcal{F}_{i-۱}\} = E\left[K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right) - \mathbb{E}\left[K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right]|\mathcal{F}_{i-۱}\right] = \circ$$

و کران D_i به‌صورت زیر در اختیار داریم

$$D_i = K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right) - \mathbb{E}\left[K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right] \leq ۲\sup_u |K(u)| = K_۲$$

بنابراین D_iها مارتینگل‌های تفاضلی کران‌دار می‌باشند. از طرفی

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}\} &= \mathbb{E}\left[\left(K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right) - \mathbb{E}\left[K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right]\right)^۲|\mathcal{F}_{i-۱}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[K^۲\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}^۲\left(K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right] \\ &\quad -۲\mathbb{E}\left[K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)\mathbb{E}\left(K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[K^۲\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right] - \mathbb{E}^۲\left(K\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left[K^۲\left(\frac{u-Y_i}{b_n}\right)|\mathcal{F}_{i-۱}\right] \\ &= \int_{-۱}^{۱} K^۲(\frac{u-Y_i}{b_n}) f_\epsilon(Y_i)dY_i \\ &= \int_{-۱}^{۱} K^۲(\nu) f_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n) b_n d\nu \\ &\leq b_n \int_{-۱}^{۱} K^۲(\nu)[f_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n) + |f'_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n)|]d\nu \\ &\leq b_n \int_{-۱}^{۱} \sup_u [f_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n) + |f'_\epsilon(u - W_{i-۱} - \nu b_n)|]K^۲(\nu)d\nu \\ &= b_n f_* \int_{-۱}^{۱} K^۲(\nu)d\nu \end{aligned}$$

اگر $K_۳ = f_* \int_{-۱}^{۱} K^۲(\nu)d\nu$، آن‌گاه $\mathbb{E}\{D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}\} \le b_n K_۳$ است. با استفاده از نابرابری نمایی مارتینگل طبق لم ۱۳.۵.۱

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|\hat{f}_n(u) - \hat{f}_n^\diamond(u)| \ge y] &= \mathbb{P}\left\{|\frac{۱}{nb_n}\sum_{i=۱}^{n} D_i| \ge y\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{|\frac{۱}{nb_n}\sum_{i=۱}^{n} D_i| \ge y \quad and \quad \sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \le nb_nK_۳\right\} \\
&\quad +\mathbb{P}\left\{|\frac{۱}{nb_n}\sum_{i=۱}^{n} D_i| \ge y \quad and \right. \\
&\qquad \left. \sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \ge nb_nK_۳\right\} \qquad (۱۹.۴)
\end{aligned}$$

جمله دوم سمت راست نابرابری (۱۹.۴)، با توجه به $\sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \ge nb_nK_۳$، صفر می‌شود. از طرفی

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{|\sum_{i=۱}^{n} D_i| \ge nb_ny \quad and \quad \sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \le nb_nK_۳\right\} \\
= \; &\mathbb{P}\left\{\sum_{i=۱}^{n} D_i \ge nb_ny \quad and \quad \sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \le nb_nK_۳\right\} \\
&+\mathbb{P}\left\{\sum_{i=۱}^{n} -D_i \ge nb_ny \quad and \quad \sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \le nb_nK_۳\right\}
\end{aligned}$$

از آن‌جایی‌که $|D_i| < K_۲$ است و $|-D_i| < K_۲$ نیز برقرار است، با اعمال نابرابری مارتینگل نمایی

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{|\sum_{i=۱}^{n} D_i| \ge nb_ny \quad and \quad \sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \le nb_nK_۳\right\} \\
= \; &۲\mathbb{P}\left\{\sum_{i=۱}^{n} D_i \ge nb_ny \quad and \quad \sum_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(D_i^۲|\mathcal{F}_{i-۱}) \le nb_nK_۳\right\} \\
\le \; &۲\exp\left[\frac{(nb_ny)^۲}{۲\,[K_۲nb_ny + nb_nK_۳]}\right] \qquad (۲۰.۴)
\end{aligned}$$

برای سمت راست نابرابری (۱۸.۴)، چون $b_n \to ۰$، وقتی $n \to \infty$، پس برای n به اندازه کافی بزرگ

$b_n \le K_۳$، از طرفی می‌توان $C_۲$ را طوری در نظر گرفت که

$$\frac{b_n}{۲yK_۲ + ۲K_۳} < C_۲$$

بنابراین

$$\frac{nb_ny^۲}{۲yK_۲ + ۲K_۳} < \frac{(ny)^۲C_۲}{n},$$

در نتیجه

$$\exp\left\{-\frac{(ny)^2 C_2}{n}\right\} \le \exp\left\{-\frac{nb_n y^2}{2yK_2 + 2K_3}\right\}$$

بنابراین با (۱۸.۴) و (۲۰.۴) نتیجه به‌دست می‌آید.

$$\mathbb{P}[|\hat{f}_n(u) - \mathbb{E}\hat{f}_n(u)| \ge 2y] \le 3\exp\left[-\frac{nb_n y^2}{2yK_2 + 2K_3}\right] + \frac{C_1 n}{(ny)^p} \qquad (۲۱.۴)$$

اگر $y \ge (\log n)/\sqrt{nb_n}$، آن‌گاه

$$y^2 \ge (\log n)^2/nb_n \Rightarrow -nb_n y^2 \le -(\log n)^2$$

از طرفی

$$\exp\left[-\frac{nb_n y^2}{2yK_2 + 2K_3}\right] + \frac{C_1 n}{(ny)^p} \le \exp\left[-\frac{(\log n)^2}{2yK_2 + 2K_3}\right] + \frac{C_1 n}{(ny)^p}$$

به‌طور معادل

$$\left(e^{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{2yK_2+2K_3}} = n^{-\frac{\log n}{2yK_2+2K_3}} \le 1$$

بنابراین احتمال در نابرابری (۲۱.۴) کرانی با مرتبه $n/(ny)^p$ دارد.

۴.۴ پیشنهادات و آینده تحقیق

۱.۴.۴ تعمیم به فرآیندهای غیر ایستا

نابرابری‌ها برای موارد ایستا را می‌توان به فرآیندهای غیر ایستا در نظر گرفت. فرآیند غیر ایستا

$$X_i = g_i(..., \epsilon_{i-1}, \epsilon_i) \qquad (۲۲.۴)$$

که برای $\epsilon_i, i \in \mathbb{Z}$ها مستقل و هم‌توزیع و g_iها توابع اندازه‌پذیر هستند، در نظر بگیرید. اگر g_i به i وابسته نباشد، آن‌گاه (۲۲.۴) به فرآیند ایستا

$$X_i = g(..., \epsilon_{i-1}, \epsilon_i)$$

کاهش می‌یابد. برای هر بردار تصادفی $(X_1, ..., X_n)$، می‌توان g_1، g_2، ...، g_n و متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت توزیع شده در $[0, 1]$ به‌طوری‌که $\{X_i\}_{i=1}^n$ و $\{g_i(\epsilon_1, ..., \epsilon_i)\}_{i=1}^n$ دارای توزیع یکسان هستند، پیدا کرد. یک تابع اندازه وابستگی به این صورت با فرض $\epsilon_i, \epsilon'_j, i, j \in \mathbb{Z}$ مستقل و هم‌توزیع باشند و نیز $P > 2$ و برای همه iها $\mathbb{E}(|X_i|^p) < \infty$، $\mathbb{E}(X_i) = 0$ باشد، تعریف می‌شود. برای $m \ge 0$ در نظر بگیرید

$$\theta^*_{m,p} = \sup_i \| X_i - g_i(..., \epsilon_{i-m-1}, \epsilon'_{i-m}, \epsilon_{i-m+1}, ..., \epsilon_i) \|_p$$

و مجموع دمی به‌صورت $\Theta^*_{m,p} = \sum_{j=m}^{\infty} \theta^*_{j,p}$ تعریف شود. اگر در قضیه ۱.۲.۳ و قضیه ۱.۲.۴ از تابع اندازه وابستگی یکنواخت استفاده شود، قضایا معتبر باقی می‌مانند.

۲.۴.۴ کاربرد نابرابری ناگایف در داده‌های سری زمانی

داده‌های سری زمانی وابسته هستند که به زمان وابسته یا اصطلاحا زمان‌مند می‌باشند. در تجزیه و تحلیل این داده‌ها نمی‌شود از حالت عادی استقلال استفاده نمود. اکثر این داده‌ها همان‌طور که در بخش ۲.۴ بیان شده است در بیمه و مدیریت ریسک کاربرد و بیشتر جنبه تخمین برای آینده دارند. نابرابری ناگایف در حالت j–وابسته یک کران بالا به ما می‌دهد، که بر همین اساس می‌توان محدوده موفقیت یا شکست در انجام کاری را دست یافت. برای مثال از نابرابری ناگایف بیان شده در این فصل، لام و سوزا (۲۰۱۴)، استفاده کردند و قضیه جدیدی را بیان داشتند. آن‌ها برای برآورد تحت ساختار وابستگی مقطعی پانل بزرگی از سری زمانی مدلی پیشنهاد دادند. با استفاده از لاسو تطبیقی که توسط زو (۲۰۰۹)، بیان شده است و نابرابری‌های (۸.۴) و (۹.۴) را برای سری زمانی $\{X_t\}$ در نظر گرفتند و مدلی را ارایه کردند.

مراجع

[1] Antonini, R. G. , Kozachenko, Y. and Volodin, A. (2008) Convergence of Series of Dependent φ - Subgaussian Random Variables,*J. Math. Anal. Appl.*, **338**, 1188–1203.

[2] Borovkov, A. A. (1972) Notes on Inequalities for Sums of Independent variables, *Theory Probab. Appl*, **17**, 556-557.

[3] Casella, G. B. and Roger, L. (2002) Statistical Inference, **2**, *Pacific Grove, CA: Duxbury.*

[4] Cesaro, E. (1980) Cesaro Summation Methods , *Bull. Sci. Math.*, **14**, 114-120.

[5] Christofides, T. C. and Vaggelatou, E. (2004) A Connection Between Supermodular Ordering and Positive/Negative Association, *Journal of Multivariate Analysis*, **88**, 138-151.

[6] Diaconis, P. and Freedman, D. (1999) Iterated Random Functions, *SIAM Rev*, **41**, 45-76.

[7] Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and Its Applications, **2**, *Second ed., John Wiley and Sons, New York.*

[8] Freedman, D. (1975) On Tail Probabilities for Martingales, *Ann. Probab*, **3**, 100-118.

[9] Gao, F. (2003) Moderate Deviations and Large Deviations for Kernel Density Estimators, *J. Theoret. Probab*, **16**, 401-418.

[10] Goldie, C. (1991) Implicit Renewal Theory and Tails of Solutions of Random Equations, *Ann. Appl. Probab*, **1**, 126-166.

[11] Gut, A., (2006) Probability: A Graduate Course, *Springer Science and Business Media.*

[12] Heathcote, C. R. and Pitman, J. W. (1972) An inequality for characteristic functions, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **16**, 1–9.

[13] Hitczenko, P. (1990) Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality, *Ann. Probab*, **18**, 1656-1668.

[14] Hu, T. (2000) Negatively Superadditive Dependence of Random Variables with Applications, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, **16**, 133-144.

[15] Ibragimov, R. and Sharakhmetov, S. (2002) The Exact Constant in the Rosenthal Inequality for Random Variables with Mean Zero, *Theory Probab. Appl.*, **46**, 127-131.

[16] Joag-Dev, K. and Proschan, F. (1983) Negative Association of Random Variables with Applications, *The Annals of Statistics*, **11**, 286-295.

[17] Johnson, W. B. , Schechtman, G. and Zinn, J. (1985) Best Constants in Moment Inequalities for Linear Combinations of Independent and Exchangeable Random Variables, *Ann. Probab*, **13**, 234-253.

[18] Jones, D. R. , Perttunen, C. D. and Stuckman, B. E. (1993) Lipschitzian Optimization without the Lipschitz Constant, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **79**, 157-181.

[19] Joutard, C. (2006) Sharp Large Deviations in Nonparametric Estimation, *J. Nonparametr. Stat*, **18**, 293-306.

[20] Kemperman, J. H. B. (1977) On the FKG-Inequalities for Measures on a Partially Ordered Space, *Indagationes Mathematicae*, **39**, 313-331.

[21] Kolmogorov, A. N. and Rozanov, Y. A. (1960) On Strong Mixing Conditions for Stationary Gaussian Processes, *Theory Probab. Appl*, **44**, 204-208.

[22] Lam, C. and Souza, P. C. (2013) Regularization for Spatial Panel Time Series Using the Adaptive LASSO, *Mimeo*.

[23] Lin, Z. and Bai, Z. D. (2010) Probability Inequalities, *Science Press Beijing, Beijing.*

[24] Liu, W., Xiao, H. , and Wu, W. B. (2013) Probability and Moment Inequalities under Dependence, *Statist. Sinica*, **23**, 1257-1272.

[25] Louani, D. (1998) Large Deviations Limit Theorems for the Kernel Density Estimator, *Scand. J. Statist*, **25**, 243-253.

[26] Mandelbrot, B. (1960) The Pareto-Levy Law and the Distribution of Income, *International Economic Review*, **1**, 79-106.

[27] Merlevede, F. and Peligrad, M. (2011) Rosenthal-Type Inequalities for the Maximum of Partial Sums of Stationary Processes and Examples, *Ann. Probab. To Appear.*

[28] Nagaev, S. V. (1979) Large Deviations of Sums of Independent Random Variables, *Ann. Probab*, **7**, 745-789.

[29] Nagaev, S. V. (2007) On Probability and Moment Inequalities for Supermartingales and Martingales, *Theory Probab. Appl*, **51**, 367-377.

[30] Peligrad, M. , Utev, S. and Wu, W. B. (2007) A Maximal L_p- Inequality for Stationary Sequences and its Applications, *Proc. Amer. Math. Soc*, **135**, 541-550.

[31] Pinelis, I. F. and Utev, S. A. (1984) Estimates of Moments of Sums of Independent Random Variables, *Teor. Veroyatnost. I Primenen*, **29**, 554-557.

[32] Rio, E. (2009) Moment Inequalities for Sums of Dependent Random Variables Under Projective Conditions, *J. Theoret. Probab*, **22**, 146-163.

[33] Rosenthal, H. P. (1970) On the Subspaces of L_p ($p >$ ۲) Spanned by Sequences of Independent Random Variables, *Israel J. Math*, **8**, 273-303.

[34] Schonfeld, P. (1971) A useful central limit theorem for m-dependent variables, *Metrika*, **17**, 116-128.

[35] Shao, Q. M. (1995) Maximal Inequalities for Partial Sums of -mixing Sequences, *Ann. Probab*, **23**, 948-965.

[36] Shao, Q. M. (2000) A Comparison Theorem on Moment Inequalities Between Negatively Associated and Independent Random Variables, *J. Theoret. Probab*, **13**, 343-356.

[37] Sung, S. H., Srisuradetchai, P. and Volodin, A. (2011) A Note on the Exponential Inequality for a Class of Dependent Random Variables, *J. Korean Statist. Soc.*, **40**(1), 109-114.

[38] Ushakov, N. G. (2011) Some Inequalities for Absolute Moments, *Statistics and Probability Letters*, **81**.

[39] Ville, J. (1939) *Etude Critique de la Notion de Collectif*, Monographie des Probabilites. Gauthier-Villars, Paris.

[40] Von Bahr, D. and Esseen, C. G. (1965) Inequalities for the rth Absolute Moment of a Sum of Random Variables, *Ann. Math. Stat*, **36**, 299–303.

[41] Von Bahr, B. (1965) On the Convergence of Moments in the Central Limit Theorem, *Ann. Math. Stat.*, **36**, 808–818.

[42] Wu, W. B. (2005) Nonlinear System Theory: Another Look at Dependence, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **102**, 14150-14154.

[43] Wu, W. B. and Shao, X. (2004) Limit Theorems for Iterated Random Functions, *J. Appl. Probab*, **41**, 425-436.

[44] Zhou, S., Van De Geer, S. and Buhlmann, P. (2009) Adaptive Lasso for high dimensional regression and Gaussian graphical modeling, *arXiv preprint arXiv:0903.2515*.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اندازه	Measure
پارامتر پایداری	Stability parameter
پارامتر شکل	Shape parameter
پارامتر مقیاس	Scale parameter
پارامتر مکان	Location parameter
پانل	Pannel
پیوندی منفی	Negatively associated
تابع اندازه‌پذیر	Measurable function
تابع اندازه وابستگی	Functional dependence measure
تابع اندازه وابستگی یکنواخت	Uniform functional dependence measure
تابع چگالی	Density function
تابع دم گوسی مانند	Gaussian-like tail function
تابع زبرجمعی	Superadditive function
تابع زبرجمعی تعمیم یافته	Generalized superadditive function
تابع مشخصه	Charecteristic function
توزیع برنولی متقارن	Symmetric bernoulli distribution
توزیع پایدار	Stability distribution
توزیع پایدار متقارن	Symmetric stable distribution
چگالی حاشیه‌ای	Marginal density
چولگی	Skewness
حقیقی	Real
دنباله زبرمارتینگل تفاضلی	Supermartingale difference sequence
دنباله زیرمارتینگل تفاضلی	Submartingale difference sequence
دنباله مارتینگل تفاضلی	Martingale difference sequence
روش جمع‌پذیری سیسارو	Cesaro summation methods

زبرمارتینگل .... Supermartingale
زیرمارتینگل .... Submartingale
زیرمارتینگل نامنفی .... Non-negative submartingale
سری زمانی .... Time series
سری زمانی غیر خطی .... Non-linear time series
سیگما میدان .... σ-field
سیگما میدان بورل .... Borel σ-field
ثابت لیپشیتس .... Lipschitz constant
ضریب همبستگی .... Correlation coefficient
غیرمجانبی .... Non-asymptotic
کران بالا .... Upper bound
کران پایین .... Lower bound
گشتاور .... Moment
گشتاور مرکزی .... Centeral moment
گشتاور مرکزی نرمال شده .... Normalized centeral moment
گشتاور مطلق .... Absolute moment
گشتاور نمونه‌ای .... Sample moment
فرآیند ایستا .... Stationary process
فرآیند خطی .... Linear process
فرآیند غیر ایستا .... Non-stationary process
مارتینگل .... Martingale
موهومی .... Image
ماکسیمم قدر مطلق مجموع‌های جزیی .... Maximum of absolute partial sums
متغیر پذیرفتنی .... Acceptable variable
متغیر پذیرفتنی تعمیم یافته .... Generalized acceptable variable
متغیر تصادفی .... Random variable
متغیر تصادفی متقارن .... Random variable symmetric
متغیرهای تصادفی بریده شده .... Truncated random variables
متغیرهای تصادفی هم‌توزیع .... Identically distributed random variables
وابستگی مقطعی .... Cross-sectional dependence
لاسو تطبیقی .... Adaptive lasso
متغیرهای مستقل .... Independent variables

متغیرهای وابسته .... Dependent variables
مجانبی .... Asymptotic
میدان .... Field
نابرابری احتمالی .... Probability inequality
نابرابری جنسن .... Jensen inequality
نابرابری دوب .... Doob inequality
نابرابری روزنتال .... Rosenthal inequality
نابرابری کوشی–شوارتز .... Cauchy-Schwarz inequality
نابرابری گشتاوری .... Moment inequality
نابرابری لیاپانوف .... Lyapunov inequality
نابرابری ناگایف .... Nagaev inequality
نابرابری نمایی مارتینگل .... Martingale exponential inequality
نابرابری C_r .... C_r inequality
وابسته زبر جمعی منفی .... Negatively superadditive dependent
هسته .... Kernel
j–وابسته .... j-dependent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute moment	گشتاور مطلق
Acceptable variable	متغیر پذیرفتنی
Adaptive lasso	لاسو تطبیقی
Asymptotic	مجانبی
Cauchy-Schwartz inequality	نابرابری کوشی-شوارتز
Centeral moment	گشتاور مرکزی
Cesaro summation methods	روش جمع‌پذیری سیسارو
Charecteristic function	تابع مشخصه
Correlation coefficient	ضریب همبستگی
C_r inequality	نابرابری C_r
Cross-sectional dependence	وابستگی مقطعی
Density function	تابع چگالی
Dependent variables	متغیرهای وابسته
Difference supermartingale sequence	دنباله زیرمارتینگل تفاضلی
Difference supermartingale sequence	دنباله زبرمارتینگل تفاضلی
Difference martingale sequence	دنباله مارتینگل تفاضلی
Doob inequality	نابرابری دوب
Field	میدان
Functional dependence measure	تابع اندازه وابستگی
Gaussian-like tail function	تابع دم گاوسی مانند
Generalized acceptable variable	متغیر پذیرفتنی تعمیم یافته
Generalized superadditive function	تابع زبرجمعی تعمیم یافته
Independent variables	متغیرهای مستقل
Identically distributed random variables	متغیرهای تصادفی هم‌توزیع
Image	موهومی

j-dependent .... j–واسته
Jensen inequality .... نابرابری جنسن
Kernal .... هسته
Linear process .... فرآیند خطی
Lipschitz constant .... ثابت لیپ‌شیتس
Location parameter .... پارامتر مکان
Lower bound .... کران پایین
Lyapunov inequality .... نابرابری لیاپانوف
Marginal density .... چگالی حاشیه‌ای
Martingale .... مارتینگل
Martingale exponential inequality .... نابرابری نمایی مارتینگل
Maximum of absolute partial sums .... ماکسیمم قدر مطلق مجموع‌های جریی
Measure .... اندازه
Measurable function .... تابع اندازه‌پذیر
Moment .... گشتاور
Moment Inequality .... نابرابری گشتاوری
Nagaev inequality .... نابرابری ناگایف
Negatively associated .... پیوندی منفی
Negatively superadditive dependent .... وابسته زبرجمعی منفی
Non-asymptotic .... غیرمجانبی
Non-stationary process .... فرآیند غیر ایستا
Non-linear time series .... سری زمانی غیرخطی
Non-negative submartingale .... زیرمارتینگل نامنفی
Normalized centeral moment .... گشتاور مرکزی نرمال شده
Pannel .... پانل
Probability inequality .... نابرابری احتمالی
Random variable .... متغیر تصادفی
Random variable symmetric .... متغیر تصادفی متقارن
Real .... حقیقی
Rosenthal inequality .... نابرابری رورنتال
Sample moment .... گشتاور نمونه‌ای
Scale parameter .... پارامتر مقیاس

Skewness .... چولگی
Shape parameter .... پارامتر شکل
Stability parameter .... پارامتر پایداری
Stationary process .... فرآیند ایستا
Superadditive function .... تابع زبرجمعی
Submartingale .... زیرمارتینگل
Supermartingale .... زبرمارتینگل
Stability distribution .... توزیع پایدار
Symmetric bernoulli distribution .... توزیع برنولی متقارن
Symmetric stability distribution .... توزیع پایدار متقارن
Time series .... سری زمانی
Truncated random variables .... متغیرهای تصادفی بریده شده
Upper bound .... کران بالا
σ-field .... سیگما میدان

نمایه

Abstract

Probability and moment inequalities plays a key role in studying limiting behavior of partial sums of random variables. When the value of probability of tail or moment of sum of random variables is not calculable, various inequalities are presented. In most of them, the independence condition may not hold, then, the generalization of probability and moment inequalities must be used to verify limiting properties of sum of random variables. Specially, acceptable variables, negatively superadditive dependent, j-dependent as an applications may be used.

Keywords: Acceptable variables; Negatively superadditive dependent; Rosenthal inequality; Nagaev inequality

Shahrood University

Faculty Of Mathematical Sciences

Probability and moment inequalities for sums of random variables in some dependence classes

Ameneh Norouzi Firouz

Supervisor

Dr. Negar Eghbal

October 2015