



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

کاربرد روش تبدیل مشتق کاهشی اصلاح شده برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزیی با اندیس‌های بالا

سمیه احمدزاده
♦♦

استادان راهنما

دکتر مهدی قوتمند و دکتر علیرضا ناظمی

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

آبان ۱۳۹۴

تقدیم به خدایی که هر چه دارم از اوست

خدایی که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و
کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

و تقدیم به پدر و مادر مهربانم

برای همه روز هایی که در کنارم بودند، برای بهترین بودنشان.

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که نام هایش پاک، نعمت هایش سرشار و احسانش وافر است؛
سپاس از پدر و مادر عزیزم که برایم همه بودند و هیچ نبودم برایشان،
سپاس از برادر مهربانم که همیشه همراه و تکیه گاه من در زندگی بوده،
سپاس از استادان فریخته جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی و جناب
آقای دکتر علی مس فروش به پاس زحماتشان،
سپاس از جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی و جناب آقای دکتر محمدادی نوری اسکندری که
داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند،
از دوستان و هم اتاقی های مهربانم که همواره مرا یاری کردند سپاس گزارم.

تعمدنامه

اینجانب سپیده احمدزاده دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان کاربرد روش تبدیل مشتق کاهشی اصلاح شده برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزیی با اندیس های بالا متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیده احمدزاده
آبان ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به بررسی معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پرداخته شده و روش تبدیل ديفرانسیل را برای توابع خطی و غیرخطی یک بعدی و دو بعدی بیان نموده و کارایی روش را با چند مثال عددی نشان می‌دهیم. سپس با اصلاح روش تبدیل کاهشی ديفرانسیل به حل معادلات ديفرانسیل جبری-جزئی پرداخته و در انتها با اصلاح روش تبدیل ديفرانسیل و روش تجزیه آدومیان به حل معادلات ديفرانسیل تأخیری می‌پردازیم.

کلمات کلیدی : روش تبدیل کاهشی ديفرانسیل، تبدیل لاپلاس، تقریب پاده، معادلات ديفرانسیل جبری-جزئی، روش تجزیه آدومیان، معادلات ديفرانسیل تأخیری

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- Ahmadzadeh. S & Nazemi. A & Ghovatmand. M, (2015), *A modified reduced differential transform method to delay differential equations using Padé approximation*, 46th Annual Iranian Mathematics Conference, 490–493, Yazd.
- Ahmadzadeh. S & Nazemi. A & Ghovatmand. M, (2015), *A modification of Adomian decomposition method to delay differential equations using Padé approximation*, 46th Annual Iranian Mathematics Conference, 486–489, Yazd.

فهرست مطالب

۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱	۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۱
۳	۳.۱ انواع معادلات با مشتقات جزئی	۳
۳	۱.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول	۳
۴	۲.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم	۴
۵	۴.۱ معادلات دیفرانسیل جبری	۵
۶	۵.۱ معادلات دیفرانسیل تأخیری	۶
۶	۶.۱ معادلات تأخیری پانتوگراف	۶
۷	۷.۱ سری تیلور و سری مک لورن	۷
۸	۸.۱ تقریب پاده	۸
۱۰	۹.۱ تبدیلات لاپلاس	۱۰
۱۱	۲ کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۱۱
۱۱	۱.۲ مقدمه	۱۱
۱۲	۲.۲ روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی	۱۲
۱۳	۳.۲ مثال‌های عددی	۱۳
۱۵	۴.۲ روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی	۱۵
۲۰	۵.۲ مثال‌های عددی	۲۰
۲۲	۶.۲ روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی	۲۲
۲۶	۷.۲ مثال عددی	۲۶
۲۸	۸.۲ محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی یک بعدی	۲۸
۲۸	۱.۸.۲ مقدمه	۲۸
۲۸	۲.۸.۲ توابع نمایی	۲۸
۲۹	۳.۸.۲ توابع لگاریتمی	۲۹
۳۰	۴.۸.۲ توابع مثلثاتی	۳۰
۳۱	۵.۸.۲ توابع هذلولی	۳۱

۳۱		۶.۸.۲	توابع نمایی
۳۲		۹.۲	مثال‌های عددی
۳۴		۱۰.۲	محاسبه تبدیل ديفرانسيل توابع غيرخطی دو بعدی
۳۴		۱.۱۰.۲	مقدمه
۳۴		۲.۱۰.۲	تابع نمایی
۳۵		۳.۱۰.۲	تابع لگاریتمی
۳۶		۴.۱۰.۲	توابع مثلثاتی
۳۷		۵.۱۰.۲	توابع هذلولی
۳۸		۶.۱۰.۲	توابع نمایی
۳۸		۱۱.۲	مثال‌های عددی

۳ حل معادلات ديفرانسيل جبری-جزئی با استفاده از روش اصلاح شده تبدیل کاهشی

۴۳	ديفرانسیل
۴۳	۱.۳ مقدمه
۴۵	۲.۳ روش کاهش تبدیل دیفرانسیل
۴۷	۳.۳ روش جمع‌بندی دوباره لاپلاس-پاده
۴۷	۴.۳ مثال‌های عددی
۴۸	۱.۴.۳ معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی مرتبه دوم غیرخطی اندیس-۲
۵۰	۲.۴.۳ معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی مرتبه دوم غیرخطی اندیس-۳

۴ حل معادلات ديفرانسيل تأخیری با استفاده از روش ترکیبی تبدیل ديفرانسيل و تقریب

۵۵	پاده
۵۵	۱.۴ مقدمه
۵۶	۲.۴ روش حل مسأله
۵۷	۳.۴ مثال‌های عددی

۵ اصلاح روش تجزیه آدومیان با استفاده از تقریب پاده برای حل معادلات ديفرانسيل

۶۳	تأخیری
۶۳	۱.۵ مقدمه
۶۳	۲.۵ استفاده از آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری
۶۴	۳.۵ مثال‌های عددی

۷۱ مراجع

۷۵ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در مکانیک سیالات، الکتریسیته، کوانتوم و با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی^۱ توصیف می‌شوند. در واقع بیش‌تر مطالب ریاضی فیزیک توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل‌بندی می‌شوند. در این فصل ابتدا خلاصه‌ای از تعاریف و کاربردهای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و روش‌های حل آن‌ها را بیان می‌کنیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، رابطه‌ای بین یک تابع چند متغیره و مشتقات آن نسبت به این متغیرها می‌باشد. تفاوت آن با معادله دیفرانسیل معمولی^۲ در این است که در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تابع مجهول به چند متغیر وابسته است ولی در معادلات دیفرانسیل معمولی تابع مجهول فقط به یک متغیر وابسته است.

برای تسهیل در نمادگذاری فرض می‌شود:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حال چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معروف را بیان می‌کنیم.

$$u_t = u_{xx}$$

معادله انتقال حرارت

$$u_{tt} = u_{xx}$$

معادله موج

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

معادله لاپلاس

^۱Partial Differential Equation

^۲Ordinary Differential Equation

بیشتر معادلات فیزیک، نظیر معادلات ماکسول^۳، معادلات ناویر-استوکس^۴ و معادله شرودینگر^۵ در مکانیک کوانتوم بر حسب معادلات با مشتقات جزئی بیان شده‌اند؛ این قوانین، پدیده‌های فیزیکی را به وسیله ارتباط فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می‌دهند. وجود مشتق‌ها در این معادلات به این دلیل است که مشتقات، مقادیر فیزیکی مانند سرعت، شتاب، نیرو، شار و شدت جریان را نمایش می‌دهند.

هدف ما حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه با شرایط اولیه و مرزی است. روش‌های زیادی برای این کار وجود دارند، مهم‌ترین آن‌ها روش‌هایی هستند که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کنند [۱۹]. برخی از این روش‌ها عبارتند از:

۱. جداسازی متغیرها: این روش یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با n متغیر را به دستگاه n معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند.

۲. تبدیل‌های انتگرال: این روند یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با n متغیر مستقل را به یک معادله با مشتقات جزئی شامل $n - 1$ متغیر تبدیل می‌کند.

۳. تغییر مختصات: این روش با تغییر مختصات مسأله (دوران محور یا مشابه آن) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی یا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ساده‌تر تغییر می‌دهد.

۴. تبدیل متغیر وابسته: این روش، تابع مجهول یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک تابع مجهول جدید که آسان‌تر به دست می‌آید تبدیل می‌کند.

۵. روش‌های عددی و نیمه تحلیلی: تاکنون روش‌های متفاوتی برای حل معادلات با مشتقات جزئی ارائه شده است. برخی از روش‌های عددی عبارتند از: روش عناصر متناهی^۶، مقدار متناهی^۷، عناصر مرزی^۸، تفاضلات متناهی^۹ و روش‌های طیفی^{۱۰} و روش‌های نیمه تحلیلی عبارتند از: روش تجزیه آدومیان^{۱۱}، اختلال هموتوپی^{۱۲} و تکرار وردشی^{۱۳}.

۶. روش اختلال: این روش یک مسأله غیرخطی را به یک رشته مسائل خطی که مسأله غیرخطی را تقریب می‌زنند تغییر می‌دهد.

^۳Maxwell

^۴Navier-Stokes

^۵Schrodinger

^۶Finite Element Method

^۷Finite Volume Method

^۸Boundary Element Method

^۹Finite Difference Method

^{۱۰}Spectral Methods

^{۱۱}Adomian Decomposition Method

^{۱۲}Homotopy Perturbation Method

^{۱۳}Variational Iteration Method

۷. روش پاسخ - ضربه‌ای: این روند ناحیه حل را به ضربه‌های ساده تجزیه کرده و پاسخ مربوط به هر ضربه را پیدا می‌کند. سپس پاسخ کل با افزودن این پاسخ‌های ساده به دست می‌آید.
۸. معادلات انتگرال: این روش یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادله انتگرال تغییر می‌دهد و سپس معادله انتگرال با روش‌های مختلف حل می‌شود.
۹. روش‌های حساب تغییرات: این روش‌ها جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با تنظیم مجدد معادله، به صورت یک مسأله مینیم سازی در می‌آورند.
۱۰. بسط تابع ویژه: این روش جواب یک معادله با مشتقات جزئی را به صورت یک مجموع نامتناهی از توابع ویژه می‌یابد. این توابع ویژه با حل یک مسأله مقدار ویژه نظیر مسأله اصلی به دست می‌آیند.

۳.۱ انواع معادلات با مشتقات جزئی

فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است:

$$G(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_x^{(n)}, u_t, u_{tt}, \dots, u_t^{(m)}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر است با بالاترین مرتبه مشتقی که در معادله ظاهر می‌شود.

۱.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول

فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و t باشد. هر معادله مرتبه اول به صورت کلی زیر است:

$$P(x, t, u)u_x + Q(x, t, u)u_t = R(x, t, u), \quad (2.1)$$

وقتی توابع P ، Q و R در حالت کلی به x ، t و u بستگی دارند شبه خطی^{۱۴} گوئیم. توجه داشته باشید رابطه (۲.۱) نسبت به مشتقات u_x و u_t خطی^{۱۵} است.

هر معادله به صورت زیر را یک معادله مرتبه اول خطی می‌نامیم:

$$P(x, t)u_x + Q(x, t)u_t + C(x, t)u = D(x, t), \quad (3.1)$$

که طرف چپ نسبت به متغیرهای u_x ، u_t و u یک عبارت خطی است. هر معادله مرتبه اول که به صورت‌های بالا نباشد، غیرخطی^{۱۶} نامیده می‌شود.

معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول می‌باشند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

^{۱۴}Quasi-linear

^{۱۵}Linear

^{۱۶}Non-Linear

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

۲.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم

فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و t باشد. یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم رابطه‌ای است بین متغیرهای x ، t و u و مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه دوم u نسبت به x و t یعنی

$$G(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0. \quad (4.1)$$

درحالت خاص یک معادله مرتبه دوم به صورت

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{tt} = F, \quad (5.1)$$

را که در آن ضرایب A ، B ، C و F هر یک تابعی از پنج متغیر x ، t ، u ، u_x و u_t هستند نیمه خطی می‌گویند زیرا این معادله نسبت به مشتقات مرتبه دوم خطی است. اگر در رابطه (۵.۱) ضرایب A ، B و C تابعی از x و t باشد و همچنین F نیز تابعی خطی از u ، u_x و u_t باشد یعنی

$$F = a(x, t)u + b(x, t)u_x + c(x, t)u_t,$$

آنگاه (۵.۱) را خطی می‌نامیم. صورت کلی یک معادله مرتبه دوم خطی به صورت زیر است:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Hu = F(x, t) \quad (6.1)$$

که در آن ضرایب A ، B ، C ، D ، E و H هر یک تابعی از x و t هستند.

معادلات خطی را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

الف) اگر به ازای مقادیری از x و t ، $B^2 - AC > 0$ آنگاه معادله را هذلولی^{۱۷} می‌نامیم.

ب) اگر به ازای مقادیری از x و t ، $B^2 - AC = 0$ آنگاه معادله را سهموی^{۱۸} می‌نامیم.

ج) اگر به ازای مقادیری از x و t ، $B^2 - AC < 0$ آنگاه معادله را بیضوی^{۱۹} می‌نامیم.

معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی هستند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3u = 0$$

^{۱۷}Hyperbolic

^{۱۸}Parabolic

^{۱۹}Elliptic

۴.۱ معادلات دیفرانسیل جبری

معادلات دیفرانسیل جبری^{۲۰} در حالت کلی، تابع برداری به فرم

$$F(t, x, x') = 0 \quad (۷.۱)$$

می‌باشند که در آن ماتریس $\frac{\partial F}{\partial x'}$ منفرد و x برداری n بعدی است. برای معادلات دیفرانسیل جبری (۷.۱) اندیس، کمترین تعداد دفعاتی است که باید از سیستم مشتق گرفته شود تا x' به صورت منحصر به فردی بر حسب x و t به دست آید. به عبارت دیگر به یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی برسیم. هرگاه اندیس سیستم بزرگ‌تر از دو باشد سیستم را با اندیس مرتبه بالا می‌گویند. بسیاری از معادلات دیفرانسیل جبری به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند که با یک سری قیود جبری همراه می‌باشند. مثال زیر یک معادله دیفرانسیل جبری است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x'(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) = 0$$

که در آن

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با $x_2(t) = g(t)$ و $x_1(t) = -\int_{t_0}^t g(s)ds$ داده شده، یک جواب برای معادله دیفرانسیل جبری بالا است. ($g \in \mathbb{R}$)

دو مثال از معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی با اندیس‌های بالا را در نظر بگیرید [۷]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + (1 + x^2)u_3 = 0, \quad (۸.۱)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + (1 + x^2)u_3 = 0, \quad (۹.۱)$$

$$5u_1 + -3u_2 - 2e^{-t} \cos x = 0, \quad (۱۰.۱)$$

معادله دیفرانسیل جبری-جزئی بالا از اندیس-۲ می‌باشد. همچنین

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_3 \sin \pi x = 0, \quad (۱۱.۱)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_3 \cos \pi x = 0, \quad (۱۲.۱)$$

$$u_1 \sin \pi x + u_2 \cos \pi x - e^{-t} = 0. \quad (۱۳.۱)$$

که یک معادله دیفرانسیل جبری-جزئی از اندیس-۳ می‌باشد.

^{۲۰}Differential Algebraic Equation

۵.۱ معادلات دیفرانسیل تأخیری

در ریاضیات، معادلات دیفرانسیل تأخیری^{۲۱} رده خاصی از معادلات دیفرانسیل هستند که شامل مشتق یک تابع مجهول و عباراتی از توابعی که در زمان‌های قبل رخ می‌دهد، می‌باشند. معادلات دیفرانسیل تأخیری، سیستم‌های تأخیری-زمانی^{۲۲} نیز نامیده می‌شوند. این معادلات انواع مختلفی دارند که ما در این پایان‌نامه با نوع پانتوگراف^{۲۳} آن سر و کار خواهیم داشت. در زیر اشکال کلی این نوع از معادلات دیفرانسیل بیان شده است:

• معادلات تأخیری پیوسته^{۲۴}

$$\frac{d}{dt}x(t) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)d\mu(\tau)\right)$$

• معادلات تأخیری گسسته^{۲۵}

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m)) \quad \tau_1 > \dots > \tau_m \geq 0$$

• معادلات خطی با تأخیر گسسته^{۲۶}

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0x(t) + A_1x(t-\tau_1) + \dots + A_mx(t-\tau_m) \quad A_0, \dots, A_m \in R^{n \times n}$$

• معادلات پانتوگراف

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + bx(\lambda t)$$

که در آن a, b و λ ثابتند و $0 < \lambda < 1$ است. این معادله و برخی از انواع کلی‌تر آن معادلات پانتوگراف نامیده می‌شوند.

۶.۱ معادلات تأخیری پانتوگراف

معادلات انتگرال-دیفرانسیل^{۲۷} و دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} F(t, u(p_0t), u'(p_1t), \dots, u^{(n)}(p_nt)) &= 0, \quad t \geq 0, \\ G\left(t, u(p_0t), u'(p_1t), \dots, u^{(n)}(p_nt), \int_0^{rt} K(t, s, u(q_0s), u'(q_1s), \dots, u^m(q_ms))ds\right) & \\ &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (14.1)$$

^{۲۱}Delay Differential Equation

^{۲۲}Time-Delay Systems

^{۲۳}Pantograph

^{۲۴}Continuous Delay

^{۲۵}Discrete Delay

^{۲۶}Linear With Discrete Delays

^{۲۷}Integro-Differential Equations

که F, G, K توابعی داده شده با دامنه مشخص می‌باشند و

$$p_i, q_i, r \in (0, 1), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad m < n. \quad (15.1)$$

دیفرانسیل تابعی و معادلات انتگرال-دیفرانسیل با تأخیرهای نسبی^{۲۸} معمولاً به معادلات پانتوگراف یا معادلات تعمیم‌یافته منسوب هستند و اغلب در مدل‌بندی مسائل مکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند.^[۳۸]

۷.۱ سری تیلور و سری مک‌لورن

اگر f در همسایگی x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x - x_0)f'(x)}{1!} + \frac{(x - x_0)^2 f''(x)}{2!} + \frac{(x - x_0)^3 f'''(x)}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - x_0)^n, \end{aligned} \quad (16.1)$$

که در اینجا $f^{(n)}(x)$ مشتق n ام تابع f است. سری مذکور را سری تیلور تابع $f(t)$ حول x_0 می‌گوییم.

حالت خاص سری تیلور که حول نقطه $x_0 = 0$ می‌باشد را سری مک‌لورن می‌نامند.

سری تیلور توابع خاص

سری تیلور چند تابع خاص به صورت زیر است:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

^{۲۸}Proportional Delays

قضیه ۱.۷.۱. (قضیه تیلور): فرض کنید $f \in C^n[a, b]$ و $f^{(n+1)}$ بر $[a, b]$ موجود باشد و همچنین فرض کنید $x_0 \in [a, b]$ ، در این صورت به ازای هر $x \in [a, b]$ نقطه‌ای مانند $\xi(x) \in (a, b)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

که در آن

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

در این جا P_n چندجمله‌ای تیلور درجه n ام f حول x_0 و R_n جمله باقی‌مانده یا خطای برشی وابسته به $P_n(x)$ نامیده می‌شود.

۸.۱ تقریب پاده

فرض کنید $u(t)$ یک تابع تحلیلی با سری مک‌لورن زیر باشد:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n, \quad 0 \leq t \leq T \quad (17.1)$$

آنگاه تقریب پاده برای $u(t)$ از مرتبه $[L, M]$ که با $[L, M]_u(t)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر می‌باشد [۲۰].

$$[L, M]_u(t) = \frac{p_0 + p_1 t + \cdots + p_L t^L}{1 + q_1 t + \cdots + q_M t^M} \quad (18.1)$$

که در آن $q_0 = 1$ در نظر می‌گیریم، به‌علاوه صورت و مخرج هیچ عامل مشترکی ندارند.

$$u(t) - [L, M]_u(t) = O(t^{L+M+1}) \quad (19.1)$$

از (۱۹.۱) داریم:

$$u(t) \sum_{n=0}^M q_n t^n - \sum_{n=0}^L p_n t^n = O(t^{L+M+1}) \quad (20.1)$$

از (۲۰.۱) سیستم‌های جبری خطی زیر را داریم:

$$\begin{cases} u_L q_1 + \cdots + u_{L-M+1} q_M = -u_{L+1} \\ u_{L+1} q_1 + \cdots + u_{L-M+2} q_M = -u_{L+2} \\ \vdots \\ u_{L+M-1} q_1 + \cdots + u_L q_M = -u_{L+M} \end{cases} \quad (21.1)$$

و

$$\begin{cases} p_0 = u_0 \\ p_1 = u_1 + u_0 q_1 \\ \vdots \\ p_L = u_L + u_{L-1} q_1 + \dots + u_0 q_L \end{cases} \quad (22.1)$$

از (۲۱.۱)، ابتدا همه ضرایب q_n ، $1 \leq n \leq L$ را محاسبه می‌کنیم. سپس ضرایب p_n ، $0 \leq n \leq L$ را از (۲۲.۱) به دست می‌آوریم. در نظر داشته باشید که برای مقدار ثابت $L + M + 1$ ، هنگامی که صورت و مخرج (۱۸.۱) هم درجه یا صورت یک درجه از مخرج بیش‌تر باشد خطا در (۱۹.۱)، کوچکترین مقدار را خواهد داشت [۷].

مزیت تقریب پاده نسبت این است که غالباً تقریب بهتری نسبت به توابع بریده شده از سری تیلور می‌دهد. این مطلب به این دلیل است که گاهی اوقات ممکن است سری تیلور همگرا نباشد، تقریب پاده این ویژگی را دارد که ناحیه همگرایی را وسیع‌تر کند [۲۵]. یکی دیگر از مزیت‌های آن این است که به سادگی قابل محاسبه می‌باشد، همچنین به راحتی می‌توان محاسبات آن را در برنامه‌هایی مانند میپل و متلب انجام داد.

مثال زیر را با استفاده از تقریب پاده حل می‌کنیم.

مثال ۱.۸.۱. برای $\log(1+t)$ سری مک‌لورن زیر را داریم:

$$\log(1+t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} t^j}{j} \quad (23.1)$$

برای تقریب پاده مرتبه $[2, 2]$ داریم:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 \\ p_0 &= u_0 q_0 \\ p_1 &= u_1 q_0 + u_0 q_1 \\ p_2 &= u_2 q_0 + u_1 q_1 + u_0 q_2 \end{aligned} \quad (24.1)$$

و

$$\begin{aligned} u_2 q_0 + u_1 q_1 + u_0 q_2 &= 0 \\ u_4 q_0 + u_3 q_1 + u_2 q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (25.1)$$

با حل دو سیستم بالا تقریب پاده مرتبه $[2, 2]$ مثال بالا به صورت زیر به دست می‌آید

$$\log(1+t) \cong \frac{t + (1/2)t^2}{1 + t + (1/6)t^2}. \quad (26.1)$$

جدول ۱.۱: تبدیلات لاپلاس

تابع $f(t)$	تبدیلات لاپلاس $F(s)$	شرط
a	$\frac{a}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, s > 0$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$s > 0$

۹.۱ تبدیلات لاپلاس

اساسی‌ترین کاربرد تبدیل لاپلاس حل معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی است، اما از آن در محاسبه برخی انتگرال‌های خاص نیز استفاده می‌شود.

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t > 0$ تعریف می‌گردد را با نماد $L(f(t))$ یا $F(s)$ نمایش می‌دهیم و داریم

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (27.1)$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌نامیم و داریم

$$L^{-1}(F(s)) = f(t). \quad (28.1)$$

تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس تبدیلاتی خطی هستند، یعنی هرگاه a و b دو عدد ثابت باشند، داریم

$$L(af(t) + bg(t)) = aL(f(t)) + bL(g(t)), \quad (29.1)$$

$$L^{-1}(aF(t) + bG(t)) = aL^{-1}(F(s)) + bL^{-1}(G(s)). \quad (30.1)$$

در جدول (۱.۱) تعدادی از توابع و تبدیلات آن‌ها را آورده‌ایم.

فصل ۲

کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱.۲ مقدمه

روش تبدیل دیفرانسیل^۱ روشی تحلیلی-عددی برای حل معادلات با مشتقات جزئی است. این روش اولین بار توسط ژو^۲ در سال ۱۹۸۶ برای کاربردهای مهندسی معرفی گردید و از آن برای حل مسائل مقدار اولیه خطی و غیرخطی در تحلیل مدارهای الکتریکی استفاده شد[۴۵].

در روش تبدیل دیفرانسیل برای به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل از سری تیلور استفاده می‌شود. در روش سری تیلور برای محاسبه ضرایب سری، باید مشتقات مراتب بالاتر تابع را در یک نقطه‌ی معین به دست آورد که این محاسبات در مراتب بالا بسیار پرهزینه است. روش تبدیل دیفرانسیل یک فرآیند تکراری، برای به دست آوردن جواب سری تیلور معادله دیفرانسیل مفروض است، اما در این روش مشتقات مستقیماً محاسبه نمی‌شوند بلکه برای محاسبه مشتقات از یک فرآیند تکراری استفاده می‌شود. به همین دلیل در این روش حجم محاسبات بسیار کاهش می‌یابد و بدون نیاز به خطی‌سازی، گسسته‌سازی و ایجاد آشفتگی در مسأله، به جوابی قابل قبول با دقت بالا می‌رسیم.

پیشرفت‌های مهمی در کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای حل مسائل مقدار اولیه خطی و غیرخطی صورت گرفته است. چن^۳ و هو^۴ در سال ۱۹۹۶ این روش را برای مسائل مقدار ویژه به کار بردند. سپس در سال ۱۹۹۹ روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی را معرفی کرده و برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی به کار بردند[۱۵].

در طول سال‌های اخیر بسیاری از پژوهشگران در این زمینه تحقیقات گسترده‌ای انجام داده‌اند. از

^۱Differential transform method(DTM)

^۲Zhou

^۳Chen

^۴Hou

آن جمله می‌توان به مومانی^۵، ادیبات^۶، ایاز^۷ و erturk^۸ اشاره کرد که در این زمینه به نتایج قابل توجهی دست یافته‌اند.

۲.۲ روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی

در این بخش، روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی^۹ را معرفی کرده و آن را برای معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می‌بریم. فرض کنید $w(x)$ در دامنه‌ی k تحلیلی باشد و عدد معین x_0 در این دامنه قرار داشته باشد. در این حالت $w(x)$ به صورت یک سری به مرکز x_0 نمایش داده می‌شود. تبدیل دیفرانسیل تابع $w(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k w(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_0}, \quad k \geq 0, \quad (1.2)$$

که $w(x)$ تابع اصلی و $W(k)$ تابع تبدیل دیفرانسیل $w(x)$ است. به صورت دنباله‌ای از اعداد حقیقی است.

تبدیل دیفرانسیل معکوس دنباله $\{W(k)\}_{k=0}^{\infty}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)(x - x_0)^k. \quad (2.2)$$

وقتی که $x_0 = 0$ باشد، رابطه (۲.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)x^k. \quad (3.2)$$

در کاربردهای حقیقی $w(x)$ به صورت تقریب $n + 1$ جمله‌ای به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x) \cong \sum_{k=0}^n W(k)x^k. \quad (4.2)$$

قضایای اساسی تبدیل دیفرانسیل یک بعدی به صورت زیر بیان شده‌اند که با استفاده از تعاریف بالا اثبات می‌شوند [۲۲]-[۴].

در تمام قضایای زیر فرض می‌کنیم که $F(k)$ ، $G(k)$ و $H(k)$ تبدیل دیفرانسیل توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ هستند.

قضیه ۱.۲.۲. اگر $f(x) = g(x) \mp h(x)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = G(k) \mp H(k)$.

قضیه ۲.۲.۲. اگر $f(x) = ag(x)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = aG(k)$.

قضیه ۳.۲.۲. اگر $f(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = \frac{(k+m)!}{k!} G(k+m)$.

^۵Momani

^۶Adibat

^۷Ayaz

^۸Erturk

^۹One-dimensional differential transform method

جدول ۱.۲: تبدیل دیفرانسیل یک بعدی

تابع تبدیل	تابع اصلی
$Y(k) = U(k) \pm V(k)$	$y(x) = u(x) \pm v(x)$
$Y(k) = cW(k)$	$y(x) = cw(x)$
$Y(k) = (k+1)W(k+1)$	$y(x) = \frac{dy}{dx}w(x)$
$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$	$y(x) = u(x)v(x)$
$Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$	$y(x) = \exp(\lambda x)$
$Y(k) = \delta(k-n)$	$y(x) = x^n$

قضیه ۴.۲.۲. اگر $w(x) = x^m$ آنگاه برای $k \geq 0$ داریم:

$$W(k) = \delta(k-m)$$

که در آن

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k=m, \\ 0 & k \neq m. \end{cases}$$

جدول مربوط به قضایای روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی را به طور اختصار در جدول (۱.۲) آوردیم.

۳.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱.۳.۲. با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی، معادله دیفرانسیل ریکاتی درجه دوم^{۱۰} زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد [۱۰]:

$$\frac{dy}{dt} = -y^2(t) + 1, \quad (5.2)$$

با شرط اولیه زیر

$$y(0) = 0, \quad (6.2)$$

که جواب دقیق این معادله برابر است با $\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$. تبدیل دیفرانسیل معادله (۵.۲) با استفاده از قضایای ذکر شده به صورت زیر است:

$$(k+1)Y(k+1) = -\sum_{r=0}^k Y(r)Y(k-r) + \delta(k). \quad (7.2)$$

^{۱۰} Quadratic Riccati Differential Equation

از شرط اولیه داده شده در رابطه (۶.۲) داریم:

$$Y(0) = 0, \quad (8.2)$$

با جایگذاری معادله (۸.۲) در رابطه بازگشتی (۷.۲) نتایج به صورت زیر به دست می آیند.

$$Y(1) = 1, \quad Y(2) = 0, \quad Y(3) = -\frac{1}{3}, \quad Y(4) = 0, \quad Y(5) = \frac{2}{15}, \dots$$

بنابراین با جایگذاری مقادیر $Y(k)$ در رابطه (۳.۲) داریم:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \dots = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

که این جواب دقیق مسأله است [۱۷].

مثال ۲.۳.۲. معادله دیفرانسیل لن-امدن^{۱۱} را که در زیر آمده در نظر بگیرید [۱۶]:

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) = 2(2x^2 + 3)u(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.2)$$

با شرایط اولیه زیر

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \quad (10.2)$$

جواب دقیق مسأله برابر است با $u(x) = e^{x^2}$.

با ضرب طرفین معادله (۹.۲) در x داریم:

$$xu''(x) + 2u'(x) = 4x^3u(x) + 6xu(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (11.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۱۱.۲) با استفاده از قضایای ذکر شده به صورت رابطه بازگشتی زیر است:

$$\sum_{l=0}^k \delta(l-1)(k-l+1)(k-l+2)U(k-l+2) + 2(k+1)U(k+1) =$$

$$4 \sum_{l=0}^k \delta(l-3)U(k-l) + 6 \sum_{l=0}^k \delta(l-1)U(k-l) \quad (12.2)$$

تبدیل دیفرانسیل شرایط اولیه عبارتست از

$$U(0) = u(0) = 1, \quad U(1) = u'(0) = 0. \quad (13.2)$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۲.۲) و تبدیل دیفرانسیل شرایط اولیه (۱۳.۲) تمام مقادیر $U(k)$ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$U(2) = 1, \quad U(3) = 0, \quad U(4) = \frac{1}{4}, \quad U(5) = 0,$$

$$U(6) = \frac{1}{6}, \quad U(7) = 0, \quad U(8) = \frac{1}{24}, \quad U(9) = 0, \dots$$

^{۱۱}Lane- Emden equation

بنابراین با جایگذاری مقادیر $U(k)$ در رابطه (۳.۲) داریم

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}$$

که این جواب دقیق مسأله است [۳۶].

۴.۲ روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی

روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی^{۱۲}، اولین بار توسط چن و هو در سال ۱۹۹۹ معرفی شد و برای حل معادلات با مشتقات جزئی خطی و غیرخطی به کار گرفته شد [۱۵]. در این بخش روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید $w(x, y)$ در دامنه‌ی k تحلیلی باشد و (x_0, y_0) در این دامنه قرار داشته باشد، در این حالت $w(x, y)$ به صورت یک سری به مرکز (x_0, y_0) نمایش داده می‌شود. تبدیل دیفرانسیل تابع $w(x, y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad h \geq 0, k \geq 0, \quad (14.2)$$

که $w(x, y)$ تابع اصلی و $W(k, h)$ تابع تبدیل دیفرانسیل $w(x, y)$ است. تبدیل دیفرانسیل معکوس دنباله $\{W(k, h)\}_{k, h=0}^{\infty}$ برابر است با:

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h)(x - x_0)^k (y - y_0)^h. \quad (15.2)$$

از ترکیب دو رابطه‌ی (۱۴.۲) و (۱۵.۲) وقتی $(x_0, y_0) = (0, 0)$ باشد، رابطه (۱۵.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} x^k y^h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h. \quad (16.2)$$

در کاربردهای حقیقی $w(x, y)$ با بسط زیر تقریب زده می‌شود:

$$w(x, y) \cong \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m W(k, h) x^k y^h. \quad (17.2)$$

قضایای اساسی تبدیل دیفرانسیل دو بعدی به صورت زیر بیان و با استفاده از تعاریف اولیه (۱۴.۲) - (۱۷.۲) اثبات می‌شوند [۱۲] - [۲۴].

در ادامه فرض می‌کنیم $U(k, h)$ ، $V(k, h)$ و $H(k, h)$ تبدیل دیفرانسیل توابع $u(x, y)$ ، $v(x, y)$ و $h(x, y)$ باشند.

قضیه ۱.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y) \mp v(x, y)$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = U(k, h) \mp V(k, h).$$

^{۱۲}Two-dimensional differential transform method

قضیه ۲.۴.۲. اگر $w(x, y) = au(x, y)$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ (a عددی ثابت است)،

$$W(k, h) = aU(k, h).$$

قضیه ۳.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = (k + 1)U(k + 1, h)$$

برهان. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x, y)}{\partial x^{k+1} \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \\ &= \frac{(k+1)}{(k+1)!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x, y)}{\partial x^{k+1} \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = (k+1)U(k+1, h). \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = (h + 1)U(k, h + 1).$$

برهان. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^{h+1}} \right]_{(x_0, y_0)} = \\ &= \frac{(h+1)}{(h+1)!k!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^{h+1}} \right]_{(x_0, y_0)} = (h+1)U(k, h+1). \end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s).$$

برهان. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s} u(x, y)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{(x_0, y_0)} = \\ &= \frac{(k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)}{(k+r)!(h+s)!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s} u(x, y)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{(x_0, y_0)} = \\ &= (k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)U(k+r, h+s). \end{aligned}$$

□

لم ۶.۴.۲. برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ رابطه زیر برقرار است [۴۳].

$$\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} (s(x, y)t(x, y)) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \binom{k}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}}.$$

قضیه ۷.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h U(r, h-s)V(k-r, s).$$

قضیه ۸.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)h(x, y)$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)H(k-r-t, p).$$

برهان. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$W(\circ, \circ) = [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} = U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(\beth, \circ) = \frac{\beth}{\circ! \beth!} \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} = U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\beth, \circ)$$

$$+ U(\circ, \circ)V(\beth, \circ)H(\circ, \circ) + U(\beth, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(\beth, \circ) = \frac{\beth}{\circ! \beth!} \frac{\partial}{\partial x^2} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} =$$

$$U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\beth, \circ) + U(\circ, \circ)V(\beth, \circ)H(\circ, \circ) + U(\beth, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ)$$

$$+ U(\circ, \circ)V(\beth, \circ)H(\beth, \circ) + U(\beth, \circ)V(\circ, \circ)H(\beth, \circ) + U(\beth, \circ)V(\beth, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(\circ, \beth) = \frac{\beth}{\circ! \beth!} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} =$$

$$U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \beth) + U(\circ, \circ)V(\circ, \beth)H(\circ, \circ) + U(\circ, \beth)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(\circ, \beth) = \frac{\beth}{\circ! \beth!} \frac{\partial}{\partial y^2} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} =$$

$$U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \beth) + U(\circ, \circ)V(\circ, \beth)H(\circ, \circ) + U(\circ, \beth)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ)$$

$$+ U(\circ, \circ)V(\circ, \beth)H(\circ, \beth) + U(\circ, \beth)V(\circ, \circ)H(\circ, \beth) + U(\circ, \beth)V(\circ, \beth)H(\circ, \circ),$$

در حالت کلی داریم:

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)H(k-r-t, p).$$

□

قضیه ۹.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m y^n$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$ ،

$$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n),$$

که

$$\delta(k-m, h-n) = \begin{cases} \beth & k=m, h=n, \\ \circ & k \neq m, h \neq n. \end{cases}$$

برهان. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}(x^m y^n)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(\circ, \circ)} = \begin{cases} 1 & k = m, h = n, \\ \circ & k > m, h > n, \\ \frac{1}{k!} m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k} = \circ & k < m, h = n, \\ \frac{1}{k!h!} m\dots(m-k+1)n\dots(n-h+1)x^{m-k}y^{n-h} = \circ & k < m, h < n, \\ \frac{1}{h!} n(n-1)\dots(n-h+1)y^{n-h} = \circ & k = m, h < n. \end{cases}$$

□

قضیه ۱۰.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s).$$

برهان. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W(\circ, \circ) &= \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = U(1, \circ)V(1, \circ), \\ W(1, \circ) &= \frac{1}{1!\circ!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = \\ &= \frac{1}{1!\circ!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \right]_{(\circ, \circ)} = 2U(2, \circ)V(1, \circ) + 2U(1, \circ)V(2, \circ), \\ W(2, \circ) &= \frac{1}{2!\circ!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = \\ &= 3U(3, \circ)V(1, \circ) + 4U(2, \circ)V(2, \circ) + 3U(1, \circ)V(3, \circ) \\ W(\circ, 1) &= U(1, 1)V(1, \circ) + U(1, \circ)V(1, 1), \\ W(1, 1) &= 2U(2, 1)V(1, \circ) + 2U(2, \circ)V(1, 1) + 2U(1, 1)V(2, \circ) + 2U(1, \circ)V(2, 1), \\ W(2, 2) &= 3U(3, 2)V(1, \circ) + 3U(3, 1)V(1, 1) + 3U(3, \circ)V(1, 2) \\ &+ 4U(2, 2)V(2, \circ) + 4U(2, 1)V(2, 1) + 4U(2, \circ)V(2, 2) \\ &+ 3U(1, 2)V(3, \circ) + 3U(1, 1)V(3, 1) + 3U(1, \circ)V(3, 2), \end{aligned}$$

در حالت کلی سیستم بازگشتی زیر را داریم:

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s).$$

□

قضیه ۱۱.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1).$$

قضیه ۱۲.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1).$$

برهان. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$W(0, 0) = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]_{(0,0)} = U(1, 0)V(0, 1),$$

$$W(1, 0) = \frac{1}{1!0!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]_{(0,0)} = \frac{1}{1!0!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{(0,0)} = 2U(2, 0)V(0, 1) + U(1, 0)V(1, 1),$$

$$W(2, 0) = \frac{1}{2!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]_{(0,0)} = 3U(3, 0)V(1, 0) + 2U(2, 0)V(1, 1) + U(1, 0)V(2, 1)$$

$$W(0, 1) = 2U(1, 0)V(0, 2) + U(1, 1)V(0, 1),$$

$$W(1, 1) = 4U(2, 0)V(0, 2) + 2U(2, 1)V(0, 1) + 2U(1, 0)V(1, 2) + U(1, 1)V(1, 1)$$

$$W(2, 2) = 9U(3, 0)V(0, 3) + 6U(3, 1)V(0, 2) + 3U(3, 2)V(0, 1)$$

$$+ 6U(2, 0)V(1, 3) + 4U(2, 1)V(1, 2) + 2U(2, 2)V(1, 1)$$

$$+ 3U(1, 0)V(2, 3) + 2U(1, 1)V(2, 2) + U(1, 2)V(2, 1),$$

در حالت کلی سیستم بازگشتی زیر را داریم:

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1).$$

□

قضیه ۱۳.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+2)(k-r+1)U(r, h-s)V(k-r+2, p).$$

قضیه ۱۴.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t+1, s)Z(k-r-t+1, p).$$

جدول ۲.۲: تبدیل دیفرانسیل دو بعدی

تابع تبدیل	تابع اصلی
$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$	$w(x, t) = u(x, t) \pm v(x, t)$
$W(k, h) = cU(k, h)$	$w(x, t) = cu(x, t)$
$W(k, h) = (k + 1)U(k + 1, h)$	$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, t)$
$W(k, h) = \frac{(k+r)!(h+s)!}{k!h!}U(k+r, h+s)$	$w(x, t) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial t^s}u(x, t)$
$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$	$w(x, t) = u(x, t)v(x, t)$
$W(h, k) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$	$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, t)\frac{\partial}{\partial t}v(x, t)$

قضیه ۱۵.۴.۲. اگر $W(x, y) = u(x, y)v(x, y)\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r+t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t, s)Z(k-r-t+2, p).$$

قضیه ۱۶.۴.۲. اگر $w(x, y) = e^{ax+by}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = \frac{a^k b^h}{k! h!}.$$

قضیه ۱۷.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m \sin(at + b)$ آنگاه $W(k, h) = \frac{a^h}{h!} \delta(k-m) \sin(\frac{h\Pi}{2} + b)$.

قضیه ۱۸.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m \cos(at + b)$ آنگاه $W(k, h) = \frac{a^h}{h!} \delta(k-m) \cos(\frac{h\Pi}{2} + b)$.

قضیه ۱۹.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m e^{at}$ آنگاه $W(k, h) = \frac{a^h}{h!} \delta(k-m)$.

در جدول (۲.۲) به طور اختصار به تبدیلات دیفرانسیل دو بعدی اشاره کرده‌ایم.

۵.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱.۵.۲. با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی، معادله دیفرانسیل هلم هولتز^{۱۳} را که به صورت زیر است مورد بررسی قرار می‌دهیم [۱۱]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xu = 2 + x^3 + xy, \quad (18.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(0, y) = y,$$

$$u_x(0, y) = 0. \quad (19.2)$$

^{۱۳}Helmholtz

با استفاده از قضایای تبدیل دیفرانسیل دو بعدی، تبدیل دیفرانسیل معادله (۱۸.۲) برابر است با:

$$(k+1)(k+2)U(k+2, h) + (h+1)(h+2)U(k, h+2) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \delta(r-1)\delta(h-s)U(k-r, s) \\ = 2\delta(k)\delta(h) + \delta(k-2)\delta(h) + \delta(k-1)\delta(h-1). \quad (20.2)$$

از شرایط اولیه داده شده در (۱۹.۲) داریم:

$$U(0, h) = \begin{cases} 1 & h = 1, \\ 0 & h = 0, 2, 3, \dots \end{cases}, \quad U(1, h) = 0, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (21.2)$$

با جایگزین کردن معادلات (۲۱.۲) در معادله (۲۰.۲) همه $U(k, h)$ ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$U(k, h) = \begin{cases} 1 & k = 2, h = 0, \\ 1 & k = 0, h = 1, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

با قراردادن همه $U(k, h)$ ها در رابطه (۱۶.۲) فرم بسته از جواب سری به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h)x^k y^h = y + x^2.$$

که جواب دقیق مسأله است.

مثال ۲.۵.۲. معادله تلگراف^{۱۴} زیر را در نظر بگیرید [۹]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{F} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{F} u, \quad (22.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, 0) = 1 + e^{2x}, \\ u_t(x, 0) = -2. \quad (23.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۲۲.۲) برابر است با:

$$(k+1)(k+2)U(k+2, h) = (h+1)(h+2)U(k, h+2) + \mathcal{F}(h+1)U(k, h+1) + \mathcal{F}U(k, h) \quad (24.2)$$

از شرایط اولیه داده شده در (۲۳.۲) داریم:

$$U(k, 0) = \delta(k) + \frac{2^k}{k!}, \\ U(k, 1) = -2\delta(k). \quad (25.2)$$

^{۱۴}Telegraph equation

با جایگزین کردن معادلات (۲۵.۲) در معادله (۲۴.۲) مقادیر $U(k, h)$ به صورت زیر به دست می آیند.

$$U(k, h) = \begin{cases} \frac{2^k}{k!} & k = 0, 1, \dots, \quad h = 0, \\ \frac{(-2)^h}{h!} & h = 0, 1, \dots, \quad k = 0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با قراردادن همه $U(k, h)$ ها در رابطه (۱۶.۲) فرم بسته از جواب سری^{۱۵} به صورت زیر حاصل می شود.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-2)^h t^h}{h!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!} = e^{-2t} + e^{2x}$$

که این جواب دقیق مسأله است.

۶.۲ روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی

در این بخش روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی^{۱۶} را معرفی کرده و برای حل معادلات با مشتقات جزئی به کار می بریم [۵].

فرض کنید $w(x, y, t)$ در دامنه k تحلیلی باشد و (x_0, y_0, t_0) در این دامنه قرار داشته باشد در این حالت $w(x, y, t)$ به صورت یک سری به مرکز (x_0, y_0, t_0) نمایش داده می شود.

تبدیل دیفرانسیل تابع $w(x, y, t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \Big|_{(x_0, y_0, t_0)}, \quad h \geq 0, k \geq 0, t \geq 0 \quad (26.2)$$

که $w(x, y, t)$ تابع اصلی و $W(k, h, m)$ تابع تبدیل دیفرانسیل $w(x, y, t)$ است.

تبدیل دیفرانسیل معکوس دنباله $\{W(k, h, m)\}_{k,h,m=0}^{\infty}$ برابر است با:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} W(k, h, m) (x - x_0)^k (y - y_0)^h (t - t_0)^m \quad (27.2)$$

از ترکیب دو رابطه فوق وقتی $(x_0, y_0, t_0) = (0, 0, 0)$ رابطه (۲۷.۲) به صورت زیر حاصل می شود.

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!m!} \frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} x^k y^h t^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (28.2)$$

در کاربردهای حقیقی $w(x, y, t)$ با بسط زیر تقریب زده می شود:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^s \sum_{p=0}^r W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (29.2)$$

قضایای اساسی تبدیل دیفرانسیل سه بعدی به صورت زیر بیان و با استفاده از تعاریف اولیه اثبات می شوند [۵].

^{۱۵}Closed Form Series Solution

^{۱۶}Three-dimensional differential transform method

فرض می‌کنیم $U(k, h, m)$ ، $V(k, h, m)$ و $H(k, h, m)$ به ترتیب تبدیل دیفرانسیل توابع $u(x, y, t)$ ، $v(x, y, t)$ و $h(x, y, t)$ باشند.

قضیه ۱.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = u(x, y, t) \mp v(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$
 $W(k, h, m) = U(k, h, m) \mp V(k, h, m)$.

قضیه ۲.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = au(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$
 $W(k, h, m) = aU(k, h, m)$.

قضیه ۳.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$
 $W(k, h, m) = (k+1)U(k+1, h, m)$.

برهان. با استفاده از رابطه (۲۶.۲) داریم:

$$U(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right] \right]_{(0,0,0)},$$

$$W(k, h, m) = \frac{k+1}{(k+1)!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+1+h+m} u(x, y, t)}{\partial x^{k+1} \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)},$$

بنابراین

$$W(k, h, m) = (k+1)U(k+1, h, m).$$

□

قضیه ۴.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$
 $W(k, h, m) = (h+1)U(k, h+1, m)$.

قضیه ۵.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$
 $W(k, h, m) = (m+1)U(k, h, m+1)$.

قضیه ۶.۶.۲. اگر $W(x, y, t) = \frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$
 $W(k, h, m) = (k+1) \dots (k+r)(h+1) \dots (h+s)(m+1) \dots (m+p)U(k+r, h+s, m+p)$.

برهان. با استفاده از رابطه (۲۶.۲) داریم:

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \left[\frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p} \right] \right]_{(0,0,0)}$$

$$= \frac{(k+1) \dots (k+r)(h+1) \dots (h+s)(m+1) \dots (m+p)}{(k+r)!(h+s)!(m+p)!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s+m+p} u(x, y, t)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s} \partial t^{m+p}} \right]_{(0,0,0)}$$

$$= (k+1)(k+2) \dots (k+r)(h+1)(h+2) \dots (h+s)(m+1)(m+2) \dots (m+p)U(k+r, h+s, m+p).$$

□

قضیه ۷.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p) V(k-r, s, p).$$

برهان. با استفاده از رابطه (۲۶.۲) داریم:

$$W(0, 0, 0) = [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} = U(0, 0, 0)V(0, 0, 0),$$

$$W(1, 0, 0) = \frac{1}{1!0!0!} \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} = \frac{1}{1!0!0!} \left[\frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u \right]_{(0,0,0)}$$

$$= U(1, 0, 0)V(0, 0, 0) + V(1, 0, 0)U(0, 0, 0)$$

$$W(1, 1, 0) = \frac{1}{1!1!0!} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} =$$

$$U(1, 1, 0)V(0, 0, 0) + U(1, 0, 0)V(0, 1, 0) + U(0, 0, 0)V(1, 1, 0) + U(0, 1, 0)V(1, 0, 0)$$

$$W(1, 1, 1) = \frac{1}{1!1!1!} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial t} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} =$$

$$U(1, 1, 1)V(0, 0, 0) + U(1, 1, 0)V(0, 0, 1) + U(1, 0, 1)V(0, 1, 0) + U(1, 0, 0)V(0, 1, 1)$$

$$+ U(1, 1, 1)V(0, 0, 0) + U(0, 0, 1)V(1, 1, 0) + U(1, 0, 1)V(0, 1, 0) + U(1, 0, 0)V(0, 1, 1)$$

$$W(2, 0, 0) = \frac{1}{2!0!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} =$$

$$U(2, 0, 0)V(0, 0, 0) + U(1, 0, 0)V(1, 0, 0) + U(0, 0, 0)V(2, 0, 0)$$

$$W(2, 1, 0) = U(2, 1, 0)V(0, 0, 0) + U(2, 0, 0)V(0, 1, 0) + U(1, 1, 0)V(1, 0, 0) +$$

$$U(1, 0, 0)V(1, 1, 0) + U(0, 1, 0)V(2, 0, 0) + U(0, 0, 0)V(2, 1, 0)$$

$$W(1, 0, 2) = U(1, 0, 2)V(0, 0, 0) + U(0, 0, 2)V(1, 0, 0) + U(1, 0, 1)V(0, 0, 1) +$$

$$U(0, 0, 1)V(1, 0, 1) + U(0, 0, 0)V(1, 0, 2) + U(1, 0, 0)V(0, 0, 2)$$

و در حالت کلی سیستم بازگشتی زیر را داریم:

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p) V(k-r, s, p).$$

□

قضیه ۸.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1) U(k-r+1, s, p) V(r, h-s+1, m-p).$$

برهان. با استفاده از رابطه (۲۶.۲) داریم:

$$W(\circ, \circ, \circ) = \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} = U(\mathbb{I}, \circ, \circ) V(\circ, \mathbb{I}, \circ),$$

$$W(\mathbb{I}, \circ, \circ) = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}! \circ! \circ!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} =$$

$$U(\mathfrak{I}, \circ, \circ) V(\circ, \mathbb{I}, \circ) + V(\mathbb{I}, \circ, \circ) U(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ)$$

$$W(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ) = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}! \mathbb{I}! \circ!} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} =$$

$$\mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \mathbb{I}, \circ) V(\circ, \mathbb{I}, \circ) + \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \circ) V(\circ, \mathfrak{I}, \circ) + U(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ) + U(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ) V(\mathbb{I}, \mathfrak{I}, \circ)$$

$$W(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}) = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}! \mathbb{I}! \mathbb{I}!} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial t} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} =$$

$$\mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \circ) V(\circ, \mathfrak{I}, \mathbb{I}) + \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \mathbb{I}) V(\circ, \mathfrak{I}, \circ) + \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \mathbb{I}, \circ) V(\circ, \mathbb{I}, \mathbb{I})$$

$$+ \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}) V(\circ, \mathbb{I}, \circ) + \mathfrak{I} U(\mathbb{I}, \circ, \circ) V(\mathbb{I}, \mathfrak{I}, \mathbb{I}) + \mathfrak{I} U(\mathbb{I}, \circ, \mathbb{I}) V(\mathbb{I}, \mathfrak{I}, \circ)$$

$$+ U(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}) + U(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ)$$

$$W(\mathfrak{I}, \circ, \mathbb{I}) = \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \circ) V(\circ, \mathbb{I}, \mathbb{I}) + \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \mathbb{I}) V(\circ, \mathbb{I}, \circ) + \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \circ) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I})$$

$$+ \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \mathbb{I}) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ) + U(\mathbb{I}, \circ, \circ) V(\mathfrak{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}) + U(\mathbb{I}, \circ, \mathbb{I}) V(\mathfrak{I}, \mathbb{I}, \circ)$$

$$W(\mathbb{I}, \circ, \mathfrak{I}) = \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \circ) V(\circ, \mathbb{I}, \mathfrak{I}) + \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \mathbb{I}) V(\circ, \mathbb{I}, \mathbb{I}) + \mathfrak{I} U(\mathfrak{I}, \circ, \mathfrak{I}) V(\circ, \mathbb{I}, \circ)$$

$$+ U(\mathbb{I}, \circ, \circ) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathfrak{I}) + U(\mathbb{I}, \circ, \mathbb{I}) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \mathbb{I}) + U(\mathbb{I}, \circ, \mathfrak{I}) V(\mathbb{I}, \mathbb{I}, \circ).$$

از تعمیم روابط بالا در حالت کلی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$W(k, h, m) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+\mathbb{I})(h-s+\mathbb{I}) U(k-r+\mathbb{I}, s, p) V(r, h-s+\mathbb{I}, m-p).$$

□

قضیه ۹.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t)z(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq \circ$ ، $h \geq \circ$ و $m \geq \circ$

$$W(k, h, m) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} U(r, h-s-p, m-q-n) V(t, s, q) Z(k-r-t, p, n).$$

۷.۲ مثال عددی

مثال ۱.۷.۲. معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۵]:

$$u_t + v_x w_y - v_y w_x = -u, \quad (30.2)$$

$$v_t + w_x u_y + w_y u_x = v, \quad (31.2)$$

$$w_t + u_x v_y + u_y v_x = w. \quad (32.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, y, 0) = e^{x+y}, \quad (33.2)$$

$$v(x, y, 0) = e^{x-y}, \quad (34.2)$$

$$w(x, y, 0) = e^{-x+y} \quad (35.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادلات (30.2) - (32.2) برابر است با:

$$\begin{aligned} (m+1)U(k, h, m+1) &= - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)V(k-r+1, s, p) \\ &\quad W(r, h-s+1, m-p) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)V(r, h-s+1, m-p) \\ &\quad W(k-r+1, s, p) - U(k, h, m) \end{aligned} \quad (36.2)$$

$$\begin{aligned} (m+1)V(k, h, m+1) &= - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)W(k-r+1, s, p) \\ &\quad U(r, h-s+1, m-p) - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)W(r, h-s+1, m-p) \\ &\quad U(k-r+1, s, p) - V(k, h, m) \end{aligned} \quad (37.2)$$

$$\begin{aligned} (m+1)w(k, h, m+1) &= - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s, p) \\ &\quad V(r, h-s+1, m-p) - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1) \\ &\quad V(r, h-s+1, m-p)U(k-r+1, s, p) - W(k, h, m) \end{aligned} \quad (38.2)$$

با به کار بردن تبدیل دیفرانسیل روی شرایط اولیه، معادلات (۳۳.۲) - (۳۵.۲) و جایگذاری در معادله (۲۸.۲) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} U(k, h, \circ) x^r y^h = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots), \quad (39.2)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} V(k, h, \circ) x^r y^h = (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 - \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots), \quad (40.2)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} W(k, h, \circ) x^r y^h = (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots). \quad (41.2)$$

بنابراین از معادلات (۳۹.۲) تا (۴۱.۲) مقادیر زیر به دست می‌آیند.

$$U(\circ, \circ, \circ) = 1, \quad U(1, \circ, \circ) = 1, \quad U(2, \circ, \circ) = \frac{1}{2!}, \quad U(3, \circ, \circ) = \frac{1}{3!}, \dots$$

$$V(\circ, \circ, \circ) = 1, \quad V(1, \circ, \circ) = -1, \quad V(2, \circ, \circ) = \frac{1}{2!}, \quad V(3, \circ, \circ) = \frac{1}{3!}, \dots$$

$$W(\circ, \circ, \circ) = 1, \quad W(1, \circ, \circ) = -1, \quad W(2, \circ, \circ) = \frac{1}{2!}, \quad W(3, \circ, \circ) = -\frac{1}{3!}, \dots$$

در حالت کلی داریم:

$$U(k, h, \circ) = \frac{1}{k!h!}, \quad k, h = \circ, 1, 2, \dots \quad (42.2)$$

$$V(k, h, \circ) = \frac{(-1)^h}{k!h!}, \quad k, h = \circ, 1, 2, \dots \quad (43.2)$$

$$W(k, h, \circ) = \frac{(-1)^k}{k!h!}, \quad k, h = \circ, 1, 2, \dots \quad (44.2)$$

با جایگزینی معادلات (۴۲.۲) تا (۴۴.۲) در روابط بازگشتی (۳۶.۲) تا (۳۸.۲) داریم:

$$U(1, \circ, 1) = -1, \quad U(1, 1, 1) = -1, \quad U(1, \circ, 2) = \frac{1}{1! \circ! 2!}, \quad U(2, 2, 2) = \frac{1}{2! 2! 2!}, \dots$$

$$V(1, \circ, 1) = 1, \quad V(1, 1, 1) = -1, \quad V(1, \circ, 2) = \frac{1}{1! \circ! 2!}, \quad V(2, 2, 2) = \frac{1}{2! 2! 2!}, \dots$$

$$W(1, \circ, 1) = -1, \quad W(1, 1, 1) = -1, \quad W(1, \circ, 2) = -\frac{1}{1! \circ! 2!}, \quad W(2, 2, 2) = \frac{1}{2! 2! 2!}, \dots$$

و بنابراین حالت کلی این ضرایب به صورت زیر است.

$$U(k, h, m) = \frac{(-1)^m}{k!h!m!}, \quad k, h, m = \circ, 1, 2, \dots \quad (45.2)$$

$$V(k, h, m) = \frac{(-1)^h}{k!h!m!}, \quad k, h, m = \circ, 1, 2, \dots \quad (46.2)$$

$$W(k, h, \circ) = \frac{(-1)^k}{k!h!m!}, \quad k, h, m = \circ, 1, 2, \dots \quad (47.2)$$

با جایگزینی همه مقادیر $U(k, h, m)$ ، $V(k, h, m)$ و $W(k, h, m)$ در معادله (۲۸.۲) داریم:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \sum_{h=\circ}^{\infty} \sum_{m=\circ}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k!h!m!} x^k y^h t^m = \left(\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=\circ}^{\infty} \frac{1}{h!} y^h \right) \left(\sum_{m=\circ}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^m \right) = e^{x+y-t},$$

$$v(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{k!h!m!} x^k y^h t^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} y^h \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m \right) = e^{x-y+t},$$

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!h!m!} x^k y^h t^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} y^h \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m \right) = e^{-x+y+t}.$$

در نتیجه جواب دقیق (u, v, w) به صورت زیر است [۴۲].

$$(u, v, w) = (e^{x+y-t}, e^{x-y+t}, e^{-x+y+t}).$$

۸.۲ محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی یک بعدی

۱.۸.۲ مقدمه

در این بخش یک روش موثر و کارا برای محاسبه تبدیل دیفرانسیل برخی از توابع غیرخطی معرفی شده است. این الگوریتم توسط چانگ^{۱۷} و همکارانش در سال ۲۰۰۸ ارائه شد و بر خاصیت مشتق‌گیری و قضایای اساسی بیان شده در این فصل پایه‌گذاری شده است [۱۳]. در اینجا تابع تبدیل دیفرانسیل به آسانی از طریق روابط بازگشتی تعیین می‌شود. در این بخش الگوریتم روی توابع یک بعدی اعمال می‌شود و تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی یک بعدی محاسبه خواهد شد. در تمام موارد که در ادامه خواهد آمد a و b ثابت فرض شده‌اند.

۲.۸.۲ توابع نمایی

تابع نمایی $f(y) = e^{ay}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$F(\circ) = [e^{ay(x)}]_{x=\circ} = e^{ay(\circ)} = e^{aY(\circ)} \quad (۴۸.۲)$$

حال با مشتق‌گیری از تابع $f(y) = e^{ay}$ نسبت به x داریم:

$$\frac{df(y)}{dx} = a e^{ay} \frac{dy(x)}{dx} = a f(y) \frac{dy(x)}{dx} \quad (۴۹.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۴۹.۲) به صورت زیر است.

$$(k+1)F(k+1) = a \sum_{m=0}^k (m+1)Y(m+1)F(k-m) \quad (۵۰.۲)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در رابطه فوق داریم:

$$F(k) = a \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} Y(m+1)F(k-1-m), \quad k \geq 1. \quad (۵۱.۲)$$

^{۱۷}Shih-Hsiang Chang

از ترکیب معادلات (۴۸.۲) و (۵۱.۲) یک رابطه بازگشتی به صورت زیر برای محاسبه تبدیل دیفرانسیل $f(y) = e^{ay}$ به دست می آید.

$$F(k) = \begin{cases} e^{aY(\circ)} & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} Y(m+1) F(k-1-m) & k \geq 1 \end{cases} \quad (52.2)$$

۳.۸.۲ توابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی $f(y) = \ln(a+by)$ را در نظر بگیرید. با توجه به دامنه توابع لگاریتمی $\{y \mid a+by > \circ\}$ و با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$F(\circ) = [\ln(a+by(x))]_{x=\circ} = \ln(a+by(\circ)) = \ln(a+bY(\circ)), \quad (53.2)$$

با مشتق گیری از تابع $f(y) = \ln(a+by)$ نسبت به x ، خواهیم داشت:

$$\frac{df(y(x))}{dx} = \frac{b}{a+by} \frac{dy(x)}{dx}, \quad (54.2)$$

یا معادل با آن

$$a \frac{df(y)}{dx} = b \left(\frac{dy(x)}{dx} - y \frac{df(y)}{dx} \right). \quad (55.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۵۵.۲) به صورت زیر است:

$$aF(k+1) = b[Y(k+1) - \sum_{m=\circ}^k \frac{(m+1)}{k+1} F(m+1)Y(k-m)], \quad (56.2)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در رابطه فوق داریم:

$$aF(k) = b[Y(k) - \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} F(m+1)Y(k-1-m)], \quad k \geq 1. \quad (57.2)$$

با قرار دادن $k=1$ در معادله (۵۷.۲) داریم:

$$F(1) = \frac{b}{a+bY(\circ)} Y(1), \quad (58.2)$$

معادله (۵۷.۲) به ازای $k \geq 2$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$F(k) = \frac{b}{a+bY(\circ)} [Y(k) - \sum_{m=\circ}^{k-2} \frac{(m+1)}{k} F(m+1)Y(k-1-m)], \quad k \geq 2. \quad (59.2)$$

بنابراین از ترکیب معادلات (۵۳.۲)، (۵۸.۲) و (۵۹.۲) رابطه بازگشتی برای محاسبه تبدیل دیفرانسیل تابع $f(y) = \ln(a+by)$ ، به ازای $a+by > \circ$ به صورت زیر حاصل می شود.

$$F(k) = \begin{cases} \ln(a+bY(\circ)) & k = \circ, \\ \frac{b}{a+bY(\circ)} Y(1) & k = 1, \\ \frac{b}{a+bY(\circ)} [Y(k) - \sum_{m=\circ}^{k-2} \frac{(m+1)}{k} F(m+1)Y(k-1-m)] & k \geq 2. \end{cases} \quad (60.2)$$

۴.۸.۲ توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی $f(y) = \sin(ay)$ و $g(y) = \cos(ay)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$\begin{cases} F(\circ) = [\sin(ay(x))]_{x=\circ} = \sin(ay(\circ)) = \sin(aY(\circ)), \\ G(\circ) = [\cos(ay(x))]_{x=\circ} = \cos(ay(\circ)) = \cos(aY(\circ)), \end{cases} \quad (۶۱.۲)$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین توابع $f(y) = \sin(ay)$ و $g(y) = \cos(ay)$ نسبت به x داریم:

$$\begin{cases} \frac{df(y)}{dx} = a \cos(ay) \frac{dy(x)}{dx} = ag(y) \frac{dy(x)}{dx}, \\ \frac{dg(y)}{dx} = -a \sin(ay) \frac{dy(x)}{dx} = -af(y) \frac{dy(x)}{dx}, \end{cases} \quad (۶۲.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۶۲.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1) = a \sum_{m=\circ}^k (k+1-m)G(m)Y(k+1-m), \\ (k+1)G(k+1) = -a \sum_{m=\circ}^k (k+1-m)F(m)Y(k+1-m), \end{cases} \quad (۶۳.۲)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در (۶۳.۲)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} F(k) = a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m)Y(k-m), \quad k \geq 1, \\ G(k) = -a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m)Y(k-m), \quad k \geq 1, \end{cases} \quad (۶۴.۲)$$

بنابراین از ترکیب معادلات (۶۱.۲) و (۶۴.۲) روابط بازگشتی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F(k) = \begin{cases} \sin(aY(\circ)), & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m)Y(k-m), & k \geq 1, \end{cases} \quad (۶۵.۲)$$

و

$$G(k) = \begin{cases} \cos(aY(\circ)), & k = \circ, \\ -a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m)Y(k-m), & k \geq 1. \end{cases} \quad (۶۶.۲)$$

۵.۸.۲ توابع هذلولی

توابع مثلثاتی $f(y) = \sinh(ay)$ و $g(y) = \cosh(ay)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$\begin{cases} F(\circ) = [\sinh(ay(x))]_{x=\circ} = \sinh(ay(\circ)) = \sinh(aY(\circ)), \\ G(\circ) = [\cosh(ay(x))]_{x=\circ} = \cosh(ay(\circ)) = \cosh(aY(\circ)), \end{cases} \quad (۶۷.۲)$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین توابع $f(y) = \sinh(ay)$ و $g(y) = \cosh(ay)$ نسبت به x داریم:

$$\begin{cases} \frac{df(y)}{dx} = a \cosh(ay) \frac{dy(x)}{dx} = ag(y) \frac{dy(x)}{dx}, \\ \frac{dg(y)}{dx} = a \sinh(ay) \frac{dy(x)}{dx} = af(y) \frac{dy(x)}{dx}, \end{cases} \quad (۶۸.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۶۸.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1) = a \sum_{m=\circ}^k (k+1-m)G(m)Y(k+1-m), \\ (k+1)G(k+1) = a \sum_{m=\circ}^k (k+1-m)F(m)Y(k+1-m) \end{cases} \quad (۶۹.۲)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در (۶۹.۲)، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} F(k) = a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m)Y(k-m), \quad k \geq 1, \\ G(k) = a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m)Y(k-m), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (۷۰.۲)$$

بنابراین از ترکیب معادلات (۶۷.۲) و (۷۰.۲) روابط بازگشتی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F(k) = \begin{cases} \sinh(aY(\circ)), & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m)Y(k-m), & k \geq 1. \end{cases} \quad (۷۱.۲)$$

و

$$G(k) = \begin{cases} \cosh(aY(\circ)), & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m)Y(k-m), & k \geq 1. \end{cases} \quad (۷۲.۲)$$

۶.۸.۲ توابع نمایی

می‌توان تابع نمایی $f(y) = e^{ay^b}$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$z(x) = y^b(x), \quad f(z) = e^{az}$$

تبدیل دیفرانسیل تابع $f(y) = e^{ay^b}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$F(k) = \begin{cases} e^{aZ(\circ)}, & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} Z(m+1) F(k-1-m), & k \neq 1 \end{cases} \quad (۷۳.۲)$$

که در آن

$$Y(\circ)Z(k) = \begin{cases} [Y(\circ)]^{1+b}, & k = \circ, \\ \sum_{m=1}^k \frac{(1+b)m-k}{k} Y(m)Z(k-m), & k \neq 1 \end{cases} \quad (۷۴.۲)$$

۹.۲ مثال های عددی

مثال ۱.۹.۲. مسأله مقدار اولیه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$y''(x) = 2y(x) + 4y(x)\ln(y(x)), \quad y(x) > \circ, \quad (۷۵.۲)$$

با شرایط اولیه

$$y(\circ) = 1, \quad y'(\circ) = \circ. \quad (۷۶.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۷۵.۲) به صورت زیر است:

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = 2Y(k) + 4 \sum_{m=\circ}^k Y(m)F(k-m), \quad (۷۷.۲)$$

از شرط اولیه (۷۶.۲) داریم:

$$Y(\circ) = 1, \quad Y(1) = \circ. \quad (۷۸.۲)$$

$F(k)$ تبدیل دیفرانسیل $\ln(y(x))$ است و با استفاده از رابطه (۶۰.۲) داریم:

$$F(k) = \begin{cases} \ln(Y(\circ)), & k = \circ, \\ \frac{Y(1)}{Y(\circ)}, & k = 1, \\ \frac{Y(k)}{Y(\circ)} - \sum_{m=\circ}^{k-2} \frac{m+1}{kY(\circ)} F(m+1)Y(k-1-m), & k \geq 2. \end{cases} \quad (۷۹.۲)$$

حال با جایگزین کردن رابطه (۷۸.۲) و $k = \circ$ در روابط (۷۷.۲) و (۷۹.۲) داریم:

$$F(\circ) = \circ, \quad Y(2) = 1, \quad (۸۰.۲)$$

همچنین با جایگزین کردن رابطه (۷۸.۲) و (۸۰.۲) و $k = 1$ در معادلات (۷۷.۲) و (۷۹.۲) داریم:

$$F(1) = \circ, \quad Y(3) = \circ,$$

و با استفاده از رابطه بازگشتی بقیه مقادیر $Y(k)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Y(4) = \frac{1}{4!}, \quad Y(5) = 0, \quad Y(6) = \frac{1}{3!}, \quad Y(7) = 0, \quad Y(8) = \frac{1}{4!}, \quad Y(9) = 0, \dots$$

و در حالت کلی داریم:

$$Y(2k) = \frac{1}{k!}, \quad Y(2k+1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

با جایگزین کردن همه مقادیر $Y(k)$ در (۳.۲) جواب معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x^2)^k = e^{x^2} \quad (۸۱.۲)$$

مثال ۲.۹.۲. مسأله مقدار اولیه از نوع براتو^{۱۸} را در نظر بگیرید [۱۳].

$$y''(x) - 2e^{y(x)} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (۸۲.۲)$$

با شرایط اولیه

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad (۸۳.۲)$$

با تبدیل دیفرانسیل گرفتن از معادله (۸۲.۲) و شرایط اولیه به دست می‌آوریم:

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = 2F(k), \quad (۸۴.۲)$$

$$Y(0) = Y(1) = 0. \quad (۸۵.۲)$$

که $F(k)$ تبدیل دیفرانسیل e^y است و با استفاده از رابطه (۵۲.۲) داریم:

$$F(k) = \begin{cases} e^{Y(0)}, & k = 0, \\ \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m+1}{k} Y(m+1)F(k-m-1), & k \geq 1. \end{cases} \quad (۸۶.۲)$$

حال با جایگزین کردن معادله (۸۵.۲) و $k=0$ در روابط (۸۴.۲) و (۸۶.۲) داریم:

$$F(0) = 1, \quad Y(2) = 1,$$

حال با استفاده از رابطه بازگشتی مقادیر $Y(k)$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$Y(3) = 0, \quad Y(4) = \frac{1}{6}, \quad Y(5) = 0, \quad Y(6) = \frac{1}{45}, \quad Y(7) = 0,$$

$$Y(8) = \frac{17}{1260}, \quad Y(9) = 0, \quad Y(10) = \frac{62}{14175}, \quad Y(11) = 0, \quad Y(12) = \frac{691}{467775} \dots$$

با جایگزین کردن همه مقادیر $Y(k)$ در (۳.۲) جواب سری به صورت زیر به دست می‌آید.

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \frac{17}{1260}x^8 + \frac{62}{14175}x^{10} + \frac{691}{467775}x^{12} + \dots \quad (۸۷.۲)$$

که فرم بسته جواب توسط وازواز^{۱۹} به دست آمده است [۴۱].

$$y(x) = -2 \operatorname{Ln}(\cos x) \quad (۸۸.۲)$$

^{۱۸}Bratu-type

^{۱۹}Wazwaz

۱۰.۲ محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی دو بعدی

۱.۱۰.۲ مقدمه

در این بخش یک روش موثر و کارا برای محاسبه تبدیل دیفرانسیل برخی از توابع غیرخطی دو بعدی معرفی می‌کنیم [۱۳] و الگوریتم را روی توابع دو بعدی اعمال می‌کنیم و تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی دو بعدی را محاسبه می‌کنیم. در تمام موارد که در ادامه خواهد آمد a و b ثابت فرض شده‌اند.

۲.۱۰.۲ تابع نمایی

تابع نمایی $f(u) = e^{au}$ را در نظر بگیرید. از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$F(\circ, \circ) = [e^{au(x,y)}]_{(x=\circ, y=\circ)} = e^{aU(\circ, \circ)} = e^{aU(\circ, \circ)}, \quad (۸۹.۲)$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین تابع $f(u) = e^{au}$ نسبت به x و y داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(u)}{\partial x} = af(u) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial f(u)}{\partial y} = af(u) \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \end{cases} \quad (۹۰.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۹۰.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1, h) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+1)U(k-r+1, s)F(r, h-s), \\ (h+1)F(k, h+1) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (h-s+1)U(r, h-s+1)F(k-r, s). \end{cases} \quad (۹۱.۲)$$

در رابطه فوق در اولی به جای k ، $(k-1)$ و در دومی به جای h ، $(h-1)$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\begin{cases} F(k, h) = a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} U(k-r, s)F(r, h-s), & k \geq 1, \\ F(k, h) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^{h-1} \frac{h-s}{h} U(r, h-s)F(k-r, s), & h \geq 1, \end{cases} \quad (۹۲.۲)$$

حال از ترکیب روابط (۸۹.۲) و (۹۲.۲)، تبدیل دیفرانسیل تابع غیرخطی نمایی $f(u) = e^{au}$ به صورت رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$F(k, h) = \begin{cases} e^{aU(\circ, \circ)}, & k = \circ, h = \circ, \\ a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} U(k-r, s)F(r, h-s), & k \geq 1, \\ a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^{h-1} \frac{h-s}{h} U(r, h-s)F(k-r, s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (۹۳.۲)$$

۳.۱۰.۲ تابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی $f(u) = \ln(a + bu)$ را در نظر بگیرید.

با توجه به دامنه تابع لگاریتمی f ، $\{u \mid a + bu > 0\}$ و از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$F(\circ, \circ) = [\ln(a + bu(x, y))]_{(x=\circ, y=\circ)} = \ln(a + bu(\circ, \circ)) = \ln(a + bU(\circ, \circ)). \quad (۹۴.۲)$$

حال از طرفین تابع $f(u) = \ln(a + bu)$ نسبت به x و y مشتق می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{b}{a + bu} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b}{a + bu} \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (۹۵.۲)$$

یا به طور معادل

$$\begin{cases} a \frac{\partial f}{\partial x} = b \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ a \frac{\partial f}{\partial y} = b \left(\frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (۹۶.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادلات (۹۶.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} aF(k + 1, h) = b \left[U(k + 1, h) - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \frac{r+1}{k+1} U(k-r, s) F(r+1, h-s) \right], \\ aF(k, h+1) = b \left[U(k, h+1) - \sum_{s=0}^h \sum_{r=0}^k \frac{s+1}{h+1} U(r, h-s) F(k-r, s+1) \right]. \end{cases} \quad (۹۷.۲)$$

در رابطه فوق در اولی به جای k ، $(k-1)$ و در دومی به جای h ، $(h-1)$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\begin{cases} aF(k, h) = b \left[U(k, h) - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{r+1}{k} U(k-1-r, s) F(r+1, h-s) \right], & k \geq 1, \\ aF(k, h) = b \left[U(k, h) - \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{s+1}{h} U(r, h-1-s) F(k-r, s+1) \right], & h \geq 1. \end{cases} \quad (۹۸.۲)$$

حال از ترکیب روابط (۹۴.۲) و (۹۸.۲)، رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید.

$$aF(k, h) = \begin{cases} a \ln(a + bU(\circ, \circ)), & k = \circ, h = \circ, \\ b \left[U(k, h) - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{r+1}{k} U(k-1-r, s) F(r+1, h-s) \right], & k \geq 1, \\ b \left[U(k, h) - \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{s+1}{h} U(r, h-1-s) F(k-r, s+1) \right], & h \geq 1 \end{cases} \quad (۹۹.۲)$$

۴.۱۰.۲ توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ را در نظر بگیرید. از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{cases} F(\circ, \circ) = [\sin(au(x, y))]_{(x=\circ, y=\circ)} = \sin(au(\circ, \circ)) = \sin(aU(\circ, \circ)), \\ G(\circ, \circ) = [\cos(au(x, y))]_{(x=\circ, y=\circ)} = \cos(au(\circ, \circ)) = \cos(aU(\circ, \circ)) \end{cases} \quad (۱۰۰.۲)$$

حال برای یافتن توابع تبدیل، از طرفین توابع $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ نسبت به x مشتق گرفته و داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a \cos(au) \frac{\partial u}{\partial x} = ag(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial g}{\partial x} = -a \sin(au) \frac{\partial u}{\partial x} = -af(u) \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (۱۰۱.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل دستگاه (۱۰۱.۲) به صورت زیر است.

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1, h) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+1)G(r, h-s)U(k-r+1, s), \\ (k+1)G(k+1, h) = -a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+1)F(r, h-s)U(k-r+1, s). \end{cases} \quad (۱۰۲.۲)$$

با جایگزین کردن $(k-1)$ به جای k در (۱۰۲.۲) داریم:

$$\begin{cases} F(k, h) = a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} G(r, h-s)U(k-r, s), \quad k \geq 1 \\ G(k, h) = -a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} F(r, h-s)U(k-r, s), \quad k \geq 1 \end{cases} \quad (۱۰۳.۲)$$

حال از طرفین توابع $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ نسبت به y مشتق گرفته و داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = a \cos(au) \frac{\partial u}{\partial y} = ag(u) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -a \sin(au) \frac{\partial u}{\partial y} = -af(u) \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (۱۰۴.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل (۱۰۴.۲) برابر است با:

$$\begin{cases} (h+1)F(k, h+1) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (h-s+1)G(k-r, s)U(r, h-s+1), \\ (h+1)G(k, h+1) = -a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (h-s+1)F(k-r, s)U(r, h-s+1). \end{cases} \quad (۱۰۵.۲)$$

با جایگزین کردن $(h - 1)$ به جای h در (۱۰۵.۲) داریم:

$$\begin{cases} F(k, h) = a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} G(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq 1, \\ G(k, h) = -a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} F(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (106.2)$$

بنابراین از ترکیب روابط (۱۰۰.۲)، (۱۰۳.۲) و (۱۰۶.۲) روابط بازگشتی زیر به دست می آیند که تبدیل ديفرانسيل توابع مثلثاتی $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ هستند.

$$F(k, h) = \begin{cases} \sin(aU(0, 0)), & k = 0, h = 0, \\ a \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{k-r}{k} G(r, h-s) U(k-r, s), & k \geq 1, \\ a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} G(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (107.2)$$

و

$$G(k, h) = \begin{cases} \cos(aU(0, 0)), & k = 0, h = 0, \\ -a \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{k-r}{k} F(r, h-s) U(k-r, s), & k \geq 1, \\ -a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} F(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (108.2)$$

۵.۱۰.۲ توابع هذلولی

روند به دست آوردن تبدیل ديفرانسيل توابع هذلولوی $f(u) = \sinh(au)$ و $g(u) = \cosh(au)$ دقیقاً مشابه تبدیل ديفرانسيل توابع مثلثاتی است و می توان به طور مشابه تبدیل ديفرانسيل توابع هذلولوی را به صورت به دست آورد:

$$F(k, h) = \begin{cases} \sinh(aU(0, 0)), & k = 0, h = 0, \\ a \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{k-r}{k} G(r, h-s) U(k-r, s), & k \geq 1, \\ a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} G(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (109.2)$$

و

$$G(k, h) = \begin{cases} \cosh(aU(\circ, \circ)), & k = \circ, h = \circ, \\ a \sum_{r=\circ}^{k-\backslash} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} F(r, h-s) U(k-r, s), & k \geq \backslash, \\ a \sum_{s=\circ}^{h-\backslash} \sum_{r=\circ}^k \frac{h-s}{h} F(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq \backslash. \end{cases} \quad (110.2)$$

۶.۱۰.۲ توابع نمایی

تابع نمایی $f(u) = e^{au^b}$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$z(u) = u^b(x, y), \quad f(z) = e^{az}$$

واضح است که این همان تابع نمایی e^{au} است بنابراین تبدیل دیفرانسیل این تابع از معادله (۹۳.۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F(k, h) = \begin{cases} e^{aZ(\circ, \circ)}, & k = \circ, h = \circ, \\ a \sum_{r=\circ}^{k-\backslash} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} Z(k-r, s) F(r, h-s), & k \geq \backslash \\ a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^{h-\backslash} \frac{h-s}{h} Z(r, h-s) F(k-r, s), & h \geq \backslash. \end{cases} \quad (111.2)$$

که در آن

$$\begin{cases} Z(\circ, \circ) = U^b(\circ, \circ), \\ \sum_{s=\circ}^h U(\circ, h-s) Z(k, s) = \sum_{r=\backslash}^k \sum_{s=\circ}^h \frac{(b+\backslash)r-k}{k} U(r, h-s) Z(k-r, s), & k \geq \backslash, \quad (112.2) \\ \sum_{r=\circ}^k U(k-r, \circ) Z(r, h) = \sum_{s=\backslash}^h \sum_{r=\circ}^k \frac{(b+\backslash)s-h}{h} U(k-r, s) Z(r, h-s), & h \geq \backslash. \end{cases}$$

۱۱.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱۰.۱۱.۲. مسأله مقدار اولیه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u_x(x, y) + u_y(x, y) = \mathfrak{V}(x+y) u^{\mathfrak{V}}(x, y), \quad (113.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, \circ) = \backslash, \quad u(\circ, y) = \backslash. \quad (114.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۱۱۳.۲) با استفاده از قضایای تبدیل دیفرانسیل دو بعدی به صورت زیر است.

$$(k+1)U(k+1, h) + (h+1)U(k, h+1) = 3 \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r-1, h-s)F(k-r, s) + 3 \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r, h-s-1)F(k-r, s) \quad (115.2)$$

که رابطه (۱۱۵.۲) با استفاده از شرایط اولیه معادل است با:

$$(k+1)U(k+1, h) + (h+1)U(k, h+1) = 3 \left[\sum_{r=\circ}^k F(k-r, h) \delta(r-1) + \sum_{s=\circ}^h F(k, h-s) \delta(s-1) \right] \quad (116.2)$$

با استفاده از رابطه (۱۱۵.۲) و از شرایط اولیه (۱۱۴.۲) داریم:

$$U(k, \circ) = \delta(k), \quad U(\circ, h) = \delta(h) \quad (117.2)$$

که $F(k, h)$ تبدیل دیفرانسیل تابع $u^{\frac{1}{3}}$ است. بنابراین داریم:

$$F(k, h) = \begin{cases} F(\circ, \circ) = U^{\frac{1}{3}}(\circ, \circ), \\ \sum_{s=\circ}^h U(\circ, h-s)F(k, s) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=\circ}^h \frac{\omega r - 3k}{3k} U(r, h-s)F(k-r, s), \quad k \geq 1, \\ \sum_{r=\circ}^k U(k-r, \circ)F(r, h) = \sum_{s=1}^h \sum_{r=\circ}^k \frac{\omega s - 3h}{3h} U(k-r, s)F(r, h-s), \quad h \geq 1, \end{cases} \quad (118.2)$$

با قرار دادن مقادیر (۱۱۷.۲) در رابطه بازگشتی (۱۱۸.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{s=\circ}^h U(\circ, h-s)F(k, s) &= \sum_{s=\circ}^h \delta(h-s)F(k, s) = F(k, h), \\ \sum_{r=\circ}^k U(k-r, \circ)F(r, h) &= \sum_{r=\circ}^k \delta(k-r)F(r, h) = F(k, h). \end{aligned} \quad (119.2)$$

همچنین رابطه (۱۱۸.۲) می‌تواند به صورت زیر ساده شود:

$$F(\circ, \circ) = 1,$$

$$F(k, h) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=\circ}^h \frac{\omega r - 3k}{3k} U(r, h-s)F(k-r, s), \quad k \geq 1, \quad (120.2)$$

$$F(k, h) = \sum_{s=1}^h \sum_{r=\circ}^k \frac{\omega s - 3h}{3h} U(k-r, s)F(r, h-s), \quad h \geq 1,$$

با جایگزین کردن مقادیر $U(k, \circ) = \delta(k)$ و $h = \circ$ در رابطه دوم (۱۲۰.۲):

$$F(k, \circ) = \sum_{r=1}^k \frac{\omega r - 3k}{3k} U(r, \circ)F(k-r, \circ) = \circ, \quad k \geq 1. \quad (121.2)$$

از $F(k, \circ) = \delta(k)$ داریم: $F(k, \circ) = \delta(k)$ ، $U(k, \circ) = \delta(k)$ و $h = \circ$ را در رابطه (۱۱۶.۲) قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم:

$$U(k, ۱) = ۳ \sum_{r=\circ}^k \delta(k-r)\delta(r-۱) = ۳\delta(k-۱). \quad (۱۲۲.۲)$$

با جایگزین کردن مقادیر $U(k, \circ) = \delta(k)$ ، $F(k, \circ) = \delta(k)$ ، $U(k, ۱) = ۳\delta(k-۱)$ و $h = ۱$ در روابط (۱۱۶.۲) و رابطه سوم (۱۲۰.۲) داریم:

$$F(k, ۱) = ۲\delta(k-۱), \quad U(k, ۲) = ۳\delta(k-۲). \quad (۱۲۳.۲)$$

و به‌طور مشابه با استفاده از روابط بازگشتی داریم:

$$F(k, ۲) = \delta(k-۲), \quad U(k, ۳) = \delta(k-۳),$$

$$F(k, ۳) = \circ, \quad U(k, ۴) = \circ$$

$$F(k, ۴) = \circ, \quad U(k, ۵) = \circ$$

$$F(k, ۵) = \circ, \quad U(k, ۶) = \circ, \dots$$

و در حالت کلی

$$U(k, h) = \begin{cases} ۱, & k = \circ, h = \circ, \\ ۳, & k = ۱, h = ۱, \\ ۳, & k = ۲, h = ۲, \\ ۱, & k = ۳, h = ۳, \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۲۴.۲)$$

با قرار دادن مقادیر (۱۲۴.۲) در رابطه (۱۵.۲) خواهیم داشت:

$$u(x, y) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \sum_{h=\circ}^{\infty} U(k, h) x^k y^h = ۱ + ۳xy + ۳x^۲y^۲ + x^۳y^۳ = (۱ + xy)^۳$$

که این جواب دقیق معادله است.

مثال ۲.۱۱.۲. مسأله مقدار اولیه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱۳]:

$$u_{xy}(x, y) = u(x, y)(۱ + \ln(u(x, y))) \quad (۱۲۵.۲)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, \circ) = ۱, \quad u(\circ, y) = ۱. \quad (۱۲۶.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل روابط (۱۲۵.۲) و (۱۲۶.۲) به‌صورت زیر است:

$$(k+۱)(h+۱)U(k+۱, h+۱) = U(k, h) + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h U(r, h-s)F(k-r, s) \quad (۱۲۷.۲)$$

$$U(k, \circ) = \delta(k), \quad U(\circ, h) = \delta(h) \quad (۱۲۸.۲)$$

که $F(k, h)$ تبدیل دیفرانسیل تابع $\ln(u)$ است. با استفاده از روابط (۱۲۶.۲)، (۱۲۸.۲) و با کمک رابطه (۹۹.۲)، $F(k, h)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F(\circ, \circ) = \ln(U(\circ, \circ)) \quad (۱۲۹.۲)$$

$$U(k, h) = \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{r+1}{k} U(k-1-r, s) F(r+1, h-s), \quad k \geq 1, \quad (۱۳۰.۲)$$

$$U(k, h) = \sum_{s=\circ}^{h-1} \sum_{r=\circ}^k \frac{s+1}{h} U(r, h-1-s) F(k-r, s+1), \quad h \geq 1. \quad (۱۳۱.۲)$$

با جایگزین کردن مقادیر $U(k, \circ) = \delta(k)$ و $h = \circ$ در معادلات (۱۲۸.۲)، (۱۲۶.۲) و (۱۲۹.۲) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$F(k, \circ) = \circ, \quad U(k, 1) = \delta(k-1), \quad (۱۳۲.۲)$$

با جایگزین کردن $U(k, \circ) = \delta(k)$ در معادله (۱۳۲.۲) و $h = 1$ در روابط (۱۳۱.۲) و (۱۲۶.۲) خواهیم داشت:

$$F(k, 1) = \delta(k-1), \quad U(k, 2) = \frac{1}{2!} \delta(k-2), \quad (۱۳۳.۲)$$

و به طور مشابه با استفاده از روابط بازگشتی داریم:

$$F(k, 2) = \circ, \quad U(k, 3) = \frac{1}{3!} \delta(k-3),$$

$$F(k, 3) = \circ, \quad U(k, 4) = \frac{1}{4!} \delta(k-4),$$

$$F(k, 4) = \circ, \quad U(k, 5) = \frac{1}{5!} \delta(k-5),$$

$$F(k, 5) = \circ, \quad U(k, 6) = \frac{1}{6!} \delta(k-6), \dots$$

و در حالت کلی

$$U(k, h) = \frac{1}{h!} \delta(k-h). \quad (۱۳۴.۲)$$

با قرار دادن همه مقادیر $U(k, h)$ در رابطه (۱۵.۲) داریم:

$$u(x, y) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \sum_{h=\circ}^{\infty} \frac{1}{h!} \delta(k-h) x^k y^h = \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{1}{k!} (xy)^k = e^{xy}.$$

که این جواب دقیق معادله است [۱۳].

فصل ۳

حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی با استفاده از روش اصلاح شده تبدیل کاهشی دیفرانسیل

۱.۳ مقدمه

اهمیت تحقیق و بررسی روی معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی در این است که پدیده‌های عملی یا نظری را می‌توان معمولاً توسط این نوع معادلات مدل‌بندی کرد. این معادلات در زمینه‌هایی مانند نانو الکترونیک، شبکه‌های برقی، سیستم‌های مکانیکی و غیره کاربرد دارند.

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده است. روش‌های عددی معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی خطی با ضرایب ثابت و مطالعه اندیس‌های آن در [۳۳، ۳۴] بیان شده است. جواب‌های معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی با اندیس‌های بالا (اندیس‌های مشتق‌گیری بیش از یک) را به سختی می‌توان از لحاظ عددی بهبود بخشید. اغلب این معادلات قبل از اعمال روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل ابتدا به سیستم‌های اندیس یک تبدیل می‌شوند. این فرایند را کاهش اندیس می‌نامند، که می‌تواند بسیار پرهزینه باشد و ممکن است ویژگی‌های جواب را تغییر دهد. از آن جایی که کاربرد معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی برای دانشمندان و مهندسان اغلب با اندیس‌های بالا است، لذا روش‌های جدیدی برای حل این نوع مسائل مورد نیاز است.

روش‌هایی مانند روش تبدیل دیفرانسیل^۱، روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل^۲، روش اختلال هموتوپی^۳،

^۱Differential Transform Method(DTM)

^۲Reduced Differential Transform Method(RDTM)

^۳Homotopy Perturbation Method (HPM)

روش تجزیه و تحلیل هموتوپي^۴، روش تکرار وردشی^۵، روش هموتوپي تعمیم یافته^۶ و غیره، ابزارهای سودمندی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی خطی و غیرخطی می باشند. اخیراً اصلاحاتی از روش اختلال هموتوپي برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی استفاده شده است. همچنین سری های پاده چندمتغیره برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی اعمال شده است. جواب های تحلیلی به محققان کمک می کند تا روی تأثیرات متغیرها و پارامترهای مختلف توابع مورد نظر، مطالعه بیش تری داشته باشند [۳۰].

در میان روش های ذکر شده در بالا، روش تبدیل دیفرانسیل به دلیل سادگی و کارایی بالاتر نسبت به روش های دیگر، برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی مناسب تر است. این روش به پارامترهای آشفته یا یک تابع آزمایشی مانند روش های تقریبی متداول دیگر وابسته نیست. در [۲۵] روش تبدیل دیفرانسیل برای زمینه های مهندسی به عنوان یک ابزار برای یافتن جواب های تقریبی مدارهای الکتریکی معرفی می شود. روش تبدیل دیفرانسیل تقریب هایی را براساس یک فرآیند تکراری مشتق گیری از بسط سری های تیلور ایجاد می کند. این روش، برای حل انواع معادلات دیفرانسیل مانند مدل های واکنش بیوشیمی غیرخطی، مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای، معادلات دیفرانسیل جبری، معادلات شرودینگر، معادلات دیفرانسیل کسری^۷ و معادلات دیفرانسیل ریکاتی^۸ و غیره بسیار موثر است. در ادامه ما روش کاهش تبدیل دیفرانسیل [۲۹] را که به عبارتی حالت ساده تر شده ی (اما نه با قدرت کم تر) روش تبدیل دیفرانسیل است برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی پیشنهاد می کنیم. روش کاهش تبدیل دیفرانسیل نسبت به روش تبدیل دیفرانسیل محاسبات کم تری نیاز دارد. به علاوه با استفاده از روش تبدیل کاهش دیفرانسیل جواب مسائل مقدار اولیه می تواند به صورت سری های توانی بیان شود. در ادامه با استفاده از قابلیت روش جمع بندی دوباره [۲۵، ۴۰]، در بسیاری از موارد دامنه همگرایی سری های توانی را گسترش می دهیم که این کار منجر به یافتن جواب دقیق می شود. روش کاهش تبدیل دیفرانسیل روی مسائلی مانند معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات تعمیم یافته KDV ، معادلات فرنبرگ-وایتهم^۹، معادلات نول-وایتد-سگل^{۱۰}، معادلات تلگرافی کسری-زمان^{۱۱}، معادلات انتشار شعاع^{۱۲} و غیره قابل اعمال است.

در این فصل کاربردهایی از روش ترکیبی تبدیل کاهشی دیفرانسیل، تبدیلات لاپلاس و تقریب پاده [۲۰] را برای پیدا کردن جواب های تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی ارائه می دهیم. جواب های معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی ابتدا با استفاده از روش کاهش تبدیل دیفرانسیل به صورت سری های توانی به دست می آیند. برای بهبود جواب ها با بریدن سری های حاصل از روش کاهش تبدیل دیفرانسیل،

^۴Homotopy Analysis Method (HAM)

^۵Variational Iteration Method (VIM)

^۶Generalized Homotopy Method

^۷Fractional Differential Equations

^۸Riccati Differential Equation

^۹Fornberg-Whitham Equations

^{۱۰}Newell-Whitehead-Segel Equation

^{۱۱}Time-Fractional Telegraphic Equation

^{۱۲}Radial Diffusivity Equation

تبدیلات لاپلاس را روی آن اعمال می‌کنیم. سپس سری‌های تبدیل شده را با استفاده از تقریب پاده به دست آورده و در نهایت برای به دست آوردن جواب تحلیلی، معکوس تبدیل لاپلاس را روی تقریب پاده اعمال می‌کنیم. این روش ترکیبی که به اختصار به صورت $LPRDTM$ نشان می‌دهیم، ترکیبی از روش کاهش تبدیل دیفرانسیل و لاپلاس-پاده است که تا حد زیادی سرعت همگرایی جواب‌های سری بریده شده‌ی روش کاهش تبدیل دیفرانسیل را بهبود می‌بخشد. در حقیقت روش جمع‌بندی دوباره لاپلاس-پاده دامنه همگرایی سری‌های توانی بریده شده را گسترش می‌دهد و اغلب منجر به جواب دقیق می‌شود.

متذکر می‌شویم که روش ترکیبی کاهش تبدیل دیفرانسیل و لاپلاس-پاده می‌تواند بدون نیاز به کاهش اندیس برای معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی به جواب دقیق برسد. روش پیشنهادی $LPRDTM$ نیاز به پارامتر آشفته مانند روش‌های دیگر ندارد و محاسبات آن می‌تواند به راحتی با استفاده از برنامه‌هایی مانند میپل و متلب انجام شود.

۲.۳ روش کاهش تبدیل دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۳. اگر تابع $u(t, x)$ در دامنه دلخواه Ω تحلیلی و نسبت به زمان t و مکان x به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$U_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(t, x) \right]_{t=0}, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

تابع تبدیل از $u(t, x)$ است.

تعریف ۲.۲.۳. تبدیل معکوس دیفرانسیل از $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k, \quad x \in \Omega. \quad (2.3)$$

با جایگذاری (۱.۳) در (۲.۳) داریم:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(t, x) \right]_{t=0} t^k \quad (3.3)$$

از (۳.۳)، به آسانی می‌توان مشاهده کرد که مفهوم روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل از سری‌های توانی به دست می‌آید. برای نشان دادن کاربرد روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل پیشنهاد شده برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی، سیستم معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + B \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + N(u(t, x)) = g(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.3)$$

که در آن A و B ماتریس‌های مربعی $n \times n$ هستند که A ماتریس منفرد، $N(u(t, x))$ عملگر دیفرانسیل غیرخطی و g تابع تحلیلی معلوم است.

معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی (۴.۳) با برخی شرایط اولیه ثابت به صورت زیر مطرح شده است:

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.3)$$

روش کاهش تبدیل دیفرانسیل نشان می‌دهد که جواب معادله دیفرانسیل می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k. \quad (6.3)$$

که $U_0(x), U_1(x), \dots$ توابع مجهولی هستند که توسط روش کاهش تبدیل دیفرانسیل به دست می‌آیند. با اعمال روش کاهش تبدیل دیفرانسیل به ترتیب در شرایط اولیه (۵.۳) و معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی (۴.۳)، شرط اولیه تبدیل شده را به دست می‌آوریم:

$$U_0(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (7.3)$$

و دستگاه بازگشتی به صورت

$$(1+k)AU_{k+1}(x) + B\frac{d^{\gamma}}{dx^{\gamma}}U_k(x) + N(U_0(x), \dots, U_k(x)) = G(x), x \in \Omega \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3)$$

که $\frac{d^{\gamma}}{dx^{\gamma}}U_k(x)$ ، $N(U_0(x), \dots, U_k(x))$ و $G(x)$ به ترتیب تبدیل کاهشی دیفرانسیل از $N(u(t, x))$ ، $\frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}u(t, x)$ و $g(t, x)$ هستند.

با جایگذاری (۷.۳) در (۸.۳) و حل سیستم به دست آمده، توابع مجهول $U_k(x), k = 0, 1, 2, \dots$ را به دست می‌آوریم. سپس جواب تقریبی را با استفاده از تبدیل معکوس دیفرانسیل توابع مجهول $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\bar{u}(t, x) = \sum_{k=0}^n U_k(x) t^k, \quad (9.3)$$

که n مرتبه تقریب جواب است. جواب دقیق مسأله (۴.۳)-(۵.۳) به صورت زیر به دست می‌آید

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k. \quad (10.3)$$

در جدول (۱۰.۳)، $U_k(x)$ و $V_k(x)$ به ترتیب تبدیلات کاهشی دیفرانسیل $u(t, x)$ و $v(t, x)$ است، همچنین توابع تبدیل برخی از توابع در جدول نشان داده شده‌اند.

فرآیند روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱. روش کاهش تبدیل دیفرانسیل را روی شرایط اولیه اعمال می‌کنیم.
۲. برای به دست آوردن سیستم بازگشتی توابع مجهول $U_0(x), U_1(x), \dots$ ، روش کاهش تبدیل دیفرانسیل را روی معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی اعمال می‌کنیم.
۳. از تبدیلات شرایط اولیه استفاده کرده و سیستم بازگشتی توابع مجهول $U_0(x), U_1(x), \dots$ را حل می‌کنیم.

۴. از فرمول تبدیل معکوس دیفرانسیل (۹.۳)، برای به دست آوردن جواب تقریبی یا جواب دقیق معادله دیفرانسیل جبری-جزئی استفاده می‌کنیم.

حتی اگر تعداد عباراتی که در نظر می‌گیریم زیاد باشد دنباله جواب‌هایی که از روش کاهش تبدیل دیفرانسیل به دست می‌آیند، ممکن است در ناحیه‌ی محدودی همگرا باشند، بنابراین پیشنهاد می‌کنیم که

جدول ۱.۳: کاهش تبدیل دیفرانسیل

تابع تبدیل	تابع اصلی
$W_k(x) = U_k(x) \mp V_k(x)$	$w(x, t) = u(x, t) \mp v(x, t)$
$W_k(x) = \alpha U_k(x)$	$w(x, t) = \alpha u(x, t)$
$W_k(x) = x^m \delta(k - n)$	$w(x, y) = x^m t^n$
$W_k(x) = x^m U_{k-n}(x)$	$w(x, y) = x^m t^n u(x, t)$
$W_k(x) = \sum_{r=0}^k V_r(x) U_{k-r}(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) V_{k-r}(x)$	$w(x, t) = u(x, t) v(x, t)$
$W_k(x) = (k+1) \dots (k+r) U_{k+r}(x) = \frac{(k+r)!}{k!} U_{k+r}(x)$	$w(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial t^r} u(x, t)$
$W_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} U_k(x)$	$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$

روش جمع‌بندی دوباره لاپلاس-پاده را برای سری‌های بریده‌ای که از روش‌های کاهش تبدیل دیفرانسیل به‌دست می‌آید، اعمال کنیم تا محدوده همگرایی را گسترش دهیم که ما این روش را در ادامه توضیح خواهیم داد.

۳.۳ روش جمع‌بندی دوباره لاپلاس-پاده

چندین روش تقریب باعث تشکیل جواب‌های سری توانی می‌شود. با این وجود، گاهی اوقات این نوع از جواب‌ها فاقد دامنه بزرگی از همگرایی می‌باشند. روش جمع‌بندی دوباره لاپلاس-پاده [۲۵، ۴۰] برای بزرگ کردن دامنه همگرایی جواب‌ها به منظور یافتن جواب‌های دقیق به‌کار می‌رود.

روش لاپلاس-پاده را می‌توان به اختصار به‌صورت زیر بیان کرد.

۱. ابتدا روش لاپلاس را روی سری‌های توانی (۹.۳) اعمال می‌کنیم.

۲. سپس در معادله به دست آمده s را جایگزین $1/t$ می‌کنیم.

۳. حال سری‌های تبدیل شده را با استفاده از تقریب پاده از مرتبه $[N, M]$ به‌دست می‌آوریم. N و M به‌طور دلخواه انتخاب می‌شوند، اما باید مقدار آن‌ها کوچکتر از مرتبه سری‌های توانی باشند.

۴. t را جایگزین $1/s$ می‌کنیم.

۵. در نهایت با استفاده از تبدیلات لاپلاس معکوس جواب تقریبی یا دقیق را به‌دست می‌آوریم.

۴.۳ مثال‌های عددی

در این بخش تأثیر و دقت روش $LPRDTM$ که در قسمت قبل توضیح دادیم را در دو سیستم معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی اندیس-۲ و اندیس-۳ نشان می‌دهیم.

۱.۴.۳ معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی مرتبه دوم غیرخطی اندیس-۲

معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی غیرخطی اندیس-۲ زیر را در نظر بگیرید [۷]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + (1+x^2)u_3 = 0, \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + (1+x^2)u_3 = 0, \quad (12.3)$$

$$5u_1 - 3u_2 - 2e^{-t} \cos x = 0, \quad (13.3)$$

معادلات (۱۱.۳)-(۱۳.۳) از دو سیستم هذلولی و یک معادله جبری با $-\infty < x < +\infty$ و $t \geq 0$ تشکیل شده است که دارای شرایط اولیه زیر می‌باشد:

$$u_1(0, x) = \cos x, \quad u_2(0, x) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty \quad (14.3)$$

تبدیل کاهشی دیفرانسیل را به ترتیب روی شرایط اولیه (۱۴.۳) و معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی (۱۱.۳)-(۱۳.۳) اعمال می‌کنیم. داریم:

$$U_{1,0}(x) = \cos x, \quad U_{2,0}(x) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty \quad (15.3)$$

و سیستم بازگشتی برای $k = 0, 1, 2, \dots$ به صورت زیر می‌باشد:

$$(k+1)U_{1,k+1}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{1,k}(x) - 2 \sum_{r=0}^k U_{1,r}(x) \frac{d}{dx}U_{1,k-r}(x) + (1+x^2)U_{3,k}(x) = 0,$$

$$(k+1)U_{2,k+1}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{2,k}(x) - 2 \sum_{r=0}^k U_{2,r}(x) \frac{d}{dx}U_{2,k-r}(x) + (1+x^2)U_{3,k}(x) = 0, \quad (16.3)$$

$$5U_{1,k}(x) - 3U_{2,k}(x) - \frac{2(-1)^K}{k!} \cos x = 0$$

سیستم بالا را می‌توان برای $k = 1, 2, 3, \dots$ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(k)U_{1,k}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{1,k-1}(x) - 2 \sum_{r=0}^{k-1} U_{1,r}(x) \frac{d}{dx}U_{1,k-1-r}(x) + (1+x^2)U_{3,k-1}(x) = 0,$$

$$(k)U_{2,k}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{2,k-1}(x) - 2 \sum_{r=0}^{k-1} U_{2,r}(x) \frac{d}{dx}U_{2,k-1-r}(x) + (1+x^2)U_{3,k-1}(x) = 0, \quad (17.3)$$

$$5U_{1,k}(x) - 3U_{2,k}(x) - \frac{2(-1)^K}{k!} \cos x = 0,$$

با استفاده از (۱۵.۳) و حل سیستم جبری-خطی 3×3 (۱۷.۳) برای $U_{1,k}(x)$ ، $U_{2,k}(x)$ و $U_{3,k-1}(x)$ به ازای $k = 1, 2, 3, \dots$ داریم

$$\begin{aligned}
U_{1,1}(x) &= U_{2,1}(x) = \cos x, & U_{3,0}(x) &= -\frac{\sin 2x}{1+x^2}, \\
U_{1,2}(x) &= U_{2,2}(x) = \frac{1}{2} \cos x, & U_{3,1}(x) &= \frac{2 \sin 2x}{1+x^2}, \\
U_{1,3}(x) &= U_{2,3}(x) = \frac{1}{3!} \cos x, & U_{3,2}(x) &= -\frac{2 \sin 2x}{1+x^2}, \\
U_{1,4}(x) &= U_{2,4}(x) = \frac{1}{4!} \cos x, & U_{3,3}(x) &= \frac{4 \sin 2x}{3!(1+x^2)}, \\
U_{1,5}(x) &= U_{2,5}(x) = -\frac{1}{5!} \cos x, & U_{3,4}(x) &= -\frac{4 \sin 2x}{3!(1+x^2)}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

آنگاه با استفاده از (۹.۳) و (۱۸.۳)، جواب تقریبی مرتبه چهارم به صورت زیر می‌باشد:

$$u_1(t, x) = u_2(t, x) \cong \sum_{k=0}^4 U_{1,k}(x) t^k = \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}\right) \cos x, \tag{۱۹.۳}$$

و

$$u_3(t, x) \cong \sum_{k=0}^4 U_{3,k}(x) t^k = - \left(1 - 2t + \frac{2^2 t^2}{2!} - \frac{2^3 t^3}{3!} + \frac{2^4 t^4}{4!}\right) \frac{\sin 2x}{1+x^2}, \tag{۲۰.۳}$$

جواب‌هایی که از روش کاهش تبدیل دیفرانسیل به دست می‌آیند، حتی اگر شامل تعداد زیادی از عبارات باشند، ممکن است در ناحیه‌ی محدودی همگرا باشد. بنابراین اعمال روش تقریب t -لاپلاس را برای افزایش ناحیه همگرایی پیشنهاد می‌کنیم. تبدیلات لاپلاس را روی $u_1(t, x)$ ، $u_2(t, x)$ و $u_3(t, x)$ اعمال می‌کنیم (با فرض این که x ثابت و t متغیر است). داریم

$$\ell[u_1(t, x)] = \ell[u_2(t, x)] = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4}\right) \cos x, \tag{۲۱.۳}$$

و

$$\ell[u_3(t, x)] = - \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{8}{s^4}\right) \frac{\sin 2x}{1+x^2}, \tag{۲۲.۳}$$

برای سادگی فرض کنید $s = 1/t$ باشد، بنابراین

$$\ell[u_1(t, x)] = \ell[u_2(t, x)] = (t - t^2 + t^3 - t^4) \cos x \tag{۲۳.۳}$$

و

$$\ell[u_3(t, x)] = - (t - 2t^2 + 4t^3 - 8t^4) \frac{\sin 2x}{1+x^2}. \tag{۲۴.۳}$$

تقریب‌های t -پاده $[L, M]$ از معادلات (۲۳.۳) و (۲۴.۳) با $L \geq 1$ ، $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[L, M]_{u_1}(t, x) = [L, M]_{u_2}(t, x) = [2, 2]_{u_1=u_2}(t, x) = \left(\frac{t}{1+t}\right) \cos x, \tag{۲۵.۳}$$

$$[L, M]_{u_2}(t, x) = [2, 2]_{u_2}(t, x) = - \left(\frac{t}{1+2t} \right) \frac{\sin 2x}{1+x^2}. \quad (26.3)$$

و
حال چون $t = 1/s$ ، بنابراین عبارات $[L, M]_{u_1}$ ، $[L, M]_{u_2}$ و $[L, M]_{u_3}$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$[L/M]_{u_1}(t, x) = [L, M]_{u_2}(t, x) = \left(\frac{1}{1+s} \right) \cos x, \quad (27.3)$$

$$[L/M]_{u_3}(t, x) = - \left(\frac{1}{1+s} \right) \frac{\sin 2x}{1+x^2}. \quad (28.3)$$

و
در انتها تبدیل لاپلاس معکوس را روی تقریب های پاده (27.3) و (28.3) اعمال می کنیم (با فرض این که x ثابت است). عبارت حاصل جواب تقریبی مورد نظر است که در این مورد جواب دقیق است [7]

$$u_1(t, x) = e^{-t}, \quad u_2(t, x) = e^{-t}, \quad u_3(t, x) = -\frac{e^{-2t} \sin 2x}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (29.3)$$

۲.۴.۳ معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی مرتبه دوم غیر خطی اندیس-۳

معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی اندیس-۳ زیر را در نظر بگیرید [6]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_2 \sin \pi x = 0, \quad (30.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_3 \cos \pi x = 0, \quad (31.3)$$

$$u_1 \sin \pi x + u_2 \cos \pi x - e^{-t} = 0. \quad (32.3)$$

معادلات (30.3)-(32.3) از دو سیستم هذلولی و یک معادله جبری با $-\infty < x < +\infty$ و $t \geq 0$ تشکیل شده است که دارای شرایط اولیه زیر می باشد:

$$u_1(0, x) = \sin \pi x, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = -\sin \pi, \quad (33.3)$$

$$u_2(0, x) = \cos \pi x, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(0, x) = -\cos \pi, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (34.3)$$

تبدیل دیفرانسیل کاهشی را روی شرایط اولیه (33.3)-(34.3) و معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی (30.3)-(32.3) اعمال می کنیم. داریم:

$$U_{1,0}(x) = \sin \pi x, \quad U_{1,1}(x) = -\sin \pi x, \quad (35.3)$$

$$U_{2,0}(x) = \sin \pi x, \quad U_{2,1}(x) = -\cos \pi x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (36.3)$$

و سیستم بازگشتی به صورت زیر است

$$(k+1)(k+2)U_{1,k+2}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{1,k}(x) - U_{2,k}(x) \sin \pi x = 0,$$

$$(k+1)(k+2)U_{2,k+2}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{2,k}(x) - U_{3,k}(x) \cos \pi x = 0, \quad (37.3)$$

$$U_{1,k}(x) \sin \pi x + U_{2,k}(x) \cos \pi x - \frac{(-1)^k}{k!} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

سیستم بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned}(k-1)kU_{1,k}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{1,k-2}(x) - U_{3,k-2}(x)\sin\pi x &= 0, \\ (k-1)kU_{2,k}(x) - \frac{d^2}{dx^2}U_{2,k-2}(x) - U_{3,k-2}(x)\cos\pi x &= 0,\end{aligned}\quad (38.3)$$

$$U_{1,k}(x)\sin\pi x + U_{2,k}(x)\cos\pi x - \frac{(-1)^k}{k!} = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

با استفاده از (35.3)-(36.3) و حل سیستم جبری-خطی 3×3 (38.3)، برای $U_{1,k}$ ، $U_{2,k}$ و $U_{3,k-2}$ برای $k = 2, 3, 4, \dots$ داریم

$$\begin{aligned}U_{1,2}(x) &= \frac{1}{2}\sin\pi x, & U_{2,2}(x) &= \frac{1}{2}\cos\pi x, & U_{3,0}(x) &= 1 + \pi^2, \\ U_{1,3}(x) &= -\frac{1}{6}\sin\pi x, & U_{2,3}(x) &= -\frac{1}{6}\cos\pi x, & U_{3,1}(x) &= -(1 + \pi^2), \\ U_{1,4}(x) &= \frac{1}{24}\sin\pi x, & U_{2,4}(x) &= \frac{1}{24}\cos\pi x, & U_{3,2}(x) &= \frac{1}{2}(1 + \pi^2), \\ &\dots\end{aligned}\quad (39.3)$$

با استفاده از (9.3) و (39.3) جواب تقریبی زیر را داریم

$$u_1(t, x) \cong \sum_{k=0}^4 U_{1,k}(x)t^k = \left(1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4\right)\sin\pi x, \quad (40.3)$$

$$u_2(t, x) \cong \sum_{k=0}^4 U_{2,k}(x)t^k = \left(1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4\right)\cos\pi x, \quad (41.3)$$

$$u_3(t, x) \cong \sum_{k=0}^2 U_{3,k}(x)t^k = (1 + \pi^2) \left(1 - t + \frac{1}{2!}t^2\right). \quad (42.3)$$

به طور مشابه ضرایب $U_{1,k}(x)$ ، $U_{2,k}(x)$ و $U_{3,k-2}$ برای $k \geq 0$ را می‌توان از (38.3) به دست آورد. تبدیلات لاپلاس را روی $u_1(t, x)$ ، $u_2(t, x)$ و $u_3(t, x)$ اعمال می‌کنیم، داریم

$$\ell[u_1(t, x)] = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right)\sin\pi x, \quad (43.3)$$

$$\ell[u_2(t, x)] = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right)\cos\pi x, \quad (44.3)$$

و

$$\ell[u_3(t, x)] = (1 + \pi^2) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right). \quad (45.3)$$

برای سادگی فرض کنید $s = 1/t$ باشد، آنگاه

$$\ell[u_1(t, x)] = (t - t^2 + t^3)\sin\pi x, \quad (46.3)$$

$$\ell[u_2(t, x)] = (t - t^2 + t^3) \cos \pi x, \quad (47.3)$$

و

$$\ell[u_3(t, x)] = (1 + \pi^2)(t - t^2 + t^3) \sin \pi x. \quad (48.3)$$

تقریب‌های t -پاده $[L, M]$ از معادلات (46.3)، (47.3) و (48.3) با $L \geq 1$ ، $M \geq 1$ و $L + M \leq 3$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[L, M]_{u_1}(t, x) = \left(\frac{t}{1+t} \right) \sin \pi x, \quad (49.3)$$

$$[L, M]_{u_2}(t, x) = \left(\frac{t}{1+t} \right) \cos \pi x, \quad (50.3)$$

و

$$[L, M]_{u_3}(t, x) = (1 + \pi^2) \left(\frac{t}{1+t} \right). \quad (51.3)$$

حال چون $t = 1/s$ است، $[L, M]_{u_1}(t, x)$ ، $[L, M]_{u_2}(t, x)$ و $[L, M]_{u_3}(t, x)$ بر حسب عبارتی از s به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[L, M]_{u_1}(t, x) = (1 + s)^{-1} \sin \pi x, \quad (52.3)$$

$$[L, M]_{u_2}(t, x) = (1 + s)^{-1} \cos \pi x, \quad (53.3)$$

و

$$[L, M]_{u_3}(t, x) = (1 + \pi^2)(1 + s)^{-1}. \quad (54.3)$$

در نهایت با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس روی تقریب‌های پاده (52.3)، (53.3) و (54.3) جواب تقریبی را که در این مورد جواب دقیق است به دست می‌آوریم [۷]:

$$u_1(t, x) = e^{-t} \sin \pi x, \quad u_2(t, x) = e^{-t} \cos \pi x, \quad u_3(t, x) = (1 + \pi^2)e^{-t}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (55.3)$$

در این فصل ما روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل را به عنوان یک ابزار آنالیزی مفید برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی معرفی می‌کنیم. ترکیب روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل و لاپلاس-پاده این امکان را به ما داد که بتوانیم جواب دقیقی از دو مسأله معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی اندیس-۲ و اندیس-۳ را بدون نیاز به استفاده از فرآیند کاهش اندیس، به دست آوریم. همچنین حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی با اندیس‌های بالا با استفاده از کاهش اندیس بسیار دشوار است به علاوه استفاده از روش کاهش اندیس می‌تواند هزینه بالایی داشته باشد و ممکن است ویژگی‌های جواب مسأله معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی را حفظ نکند. در هر کدام از این دو مسأله حل شده، تبدیلات روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی را به راحتی به یک سیستم جبری-خطی بازگشتی تبدیل کرده و جواب را به صورت سری‌های توانی به ما می‌دهد. طبق مطالب ذکر شده، برای گسترش دامنه همگرایی سری‌های بریده شده، روش جمع‌بندی دوباره لاپلاس-پاده را روی آن‌ها اعمال می‌کنیم تا جواب دقیق را به دست آوریم.

فرآیند روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل شامل محاسبات غیرضروری که سبب ایجاد عبارت‌های پیچیده و دشوار می‌شوند نمی‌باشد [۳۹]. مسأله ایجاد عبارت‌های پیچیده، مسأله‌ای است که در بیش‌تر روش‌های تقریب عددی مانند روش اختلال هموتوپی یا غیره رایج است.

این ویژگی روش تبدیل کاهشی دیفرانسیل تا حد زیادی حجم محاسبات را کاهش می‌دهد و کارایی این روش را بهبود می‌بخشد. همچنین می‌توان گفت هیچ روش استاندارد آنالیزی یا عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی با اندیس‌های بالا وجود ندارد، بنابراین تبدیل روش $LPRDTM$ به یک ابزار برای حل معادلات راه حل مناسبی است.

روش‌های نیمه تحلیلی مانند روش تحلیل هموتوپی، روش اختلال هموتوپی، روش تکرار وردشی و غیره، نیازمند یک تقریب اولیه برای به‌دست آوردن جواب‌ها و محاسباتی شامل یک یا چند پارامتر می‌باشند. اگر تقریب‌های اولیه به دلخواه انتخاب کنیم، آنگاه نتایج به‌دست آمده می‌توانند دقیق‌تر باشند. با این وجود هیچ روش عمومی برای انتخاب تقریب اولیه وجود ندارد. این موضوع به ما این انگیزه را می‌دهد که از پارامترهای اصلاح شده‌ای استفاده کنیم که توسط مینیم کردن خطای کم‌ترین مربعات با توجه به راه حل‌های عددی به‌دست می‌آیند. به عبارت دیگر روش ترکیبی کاهش تبدیل دیفرانسیل و لاپلاس پاده نیازمند حل هیچ معادله یا فرآیندی برای مینیم کردن خطای کم‌ترین مربعات نیست. روش کاهش تبدیل دیفرانسیل این ضرایب را با استفاده از یک روش ساده به‌راحتی قابل محاسبه کرده است که می‌توان آن‌ها را با برنامه‌هایی مانند متلب و میپل به‌دست آورد.

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل تأخیری با استفاده از روش ترکیبی تبدیل دیفرانسیل و تقریب پاده

۱.۴ مقدمه

در مقایسه با روش‌های موجود برای حل معادلات دیفرانسیل، روش تبدیل دیفرانسیل روش قابل اعتمادی است که محاسبات کم‌تری نیاز دارد. در این فصل ما می‌خواهیم روش تبدیل دیفرانسیل را برای حل مرتبه n ام از معادلات دیفرانسیل تأخیری بیان کنیم.

معادلات دیفرانسیل تأخیری مرتبه n ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۲۷]:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y(\eta_1(x)), y(\eta_2(x)), \dots, y(\eta_m(x))), \quad x \in I = [0, a], \quad (1.4)$$

که در آن $x \in I$ و برای $\eta_i : I \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m)$ ، $f : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\eta_i(x) < x$ معادلات دیفرانسیل تأخیری در بسیاری از زمینه‌های علمی و فن آوری مانند بیوشیمی، مهندسی و فیزیک مشاهده شده‌اند. بسیاری از مدل‌های جمعیت پویا با معادلات دیفرانسیل تأخیری ساخته شده‌اند. برای مثال در [۲۷] معادله دیفرانسیل غیرخطی تأخیری مرتبه اول به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$y'(x) = g(y(x)) - g(y(x - L)). \quad (2.4)$$

لازم به ذکر است که معادله (۲.۴) یک حالت خاص از (۱.۴) است. علاوه بر این، معادله دیفرانسیل تأخیری خطی از نوع معادله (۱.۴) به صورت

$$y'(x) = a(y(\lambda x) + by(x)), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (3.4)$$

یک معادله پانتوگراف مرتب شده است.

۲.۴ روش حل مسأله

تبدیل دیفرانسیل تابع $y(x)$ به صورت زیر را در نظر بگیرید [۲۷]

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=x_0}, \quad (4.4)$$

که در آن $y(x)$ تابع اصلی و $Y(K)$ تابع تبدیل است. معکوس تابع دیفرانسیل $Y(K)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(x - x_0)^k \quad (5.4)$$

قضایای زیر از روش تبدیل دیفرانسیل را می‌توان به سادگی از معادلات (۴.۴) و (۵.۴) به دست آورد [۴۵].

قضیه ۱.۲.۴. اگر $y(x) = f(x)g(x)$ باشد، آنگاه $Y(k) = \sum_{k_1=0}^k F(k_1)G(k - k_1)$.

قضیه ۲.۲.۴. اگر $y(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_{n-1}(x)f_n(x)$ باشد، آنگاه

$$Y(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1)F_2(k_2 - k_1) \cdots F_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) \times F_n(k - k_{n-1}). \quad (6.4)$$

قضیه ۳.۲.۴. اگر $y(x) = f(x + a)$ باشد، آنگاه

$$Y(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} F(h_1), \quad N \rightarrow \infty \quad (7.4)$$

قضیه ۴.۲.۴. تبدیل دیفرانسیل $y(x) = f(x/a)$ با $a \geq 1$ به صورت زیر است:

$$Y(k) = \sum_{h_1=k}^N (-1)^{h_1-k} \frac{(a-1)^{h_1-k}}{a^{h_1}} x_0^{h_1-k} \binom{h_1}{k} F(h_1), \quad N \rightarrow \infty \quad (8.4)$$

قضیه ۵.۲.۴. تبدیل دیفرانسیل $y(x) = f_1(x/a_1)f_2(x/a_2)$ با $a_1 \geq 1$ به صورت زیر است:

$$Y(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1}^N \sum_{h_2=k-k_1}^N (-1)^{h_1+h_2-k} \frac{(a_1-1)^{h_1-k_1}}{a_1^{h_1}} \frac{(a_2-1)^{h_2-k+k_1}}{a_2^{h_2}} \times x_0^{h_1+h_2-k} \binom{h_1}{k_1} \binom{h_2}{k-k_1} F_1(h_1)F_2(h_2) \quad N \rightarrow \infty \quad (9.4)$$

با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل جواب‌های تقریبی که به صورت سری به دست می‌آیند را برای بهبود جواب معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی و غیرخطی قطع می‌کنیم و تبدیلات لاپلاس و تقریب پاده را روی آن اعمال می‌کنیم. در نهایت برای به دست آوردن جواب تحلیلی، از معکوس تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم. این روش که از ترکیب روش تبدیل دیفرانسیل و لاپلاس-پاده تشکیل شده است را به اختصار با $LPDTM$ نشان می‌دهیم.

۳.۴ مثال‌های عددی

مثال ۱۰.۳.۴. معادله دیفرانسیل تأخیری زیر را در نظر بگیرید [۲۷]:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 1 - 2y^2 \left(\frac{t}{2} \right), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (10.4)$$

و شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (11.4)$$

با استفاده از قضایای (۹۹) و (۵.۲.۴) تبدیل دیفرانسیل معادله (۱۰.۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = \delta(k) - 2 \sum_{k_1=0}^k \frac{1}{2^{k_1}} Y(k_1)Y(k-k_1), \quad (12.4)$$

که در آن $\delta(k-n)$ تبدیل دیفرانسیلی از t^n در $t_0 = 0$ است و داریم [۲۷]

$$\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k=n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad n=0, 2, \dots \quad (13.4)$$

تبدیل دیفرانسیل $y(t)$ در t_0 را در نظر بگیرید، شرایط اولیه در معادله (۱۱.۴) به صورت زیر تبدیل

می‌شوند:

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 0. \quad (14.4)$$

از معادله (۱۲.۴) داریم:

$$Y(2) = -\frac{1}{2!}, \quad Y(3) = 0, \quad Y(4) = \frac{1}{4!}, \quad Y(5) = 0, \quad Y(6) = -\frac{1}{6!},$$

$$Y(7) = 0, \quad Y(8) = \frac{1}{8!}, \quad Y(9) = 0, \quad Y(10) = -\frac{1}{10!}, \quad Y(11) = 0, \quad (15.4)$$

$$Y(12) = \frac{1}{12!}, \quad Y(13) = 0, \quad Y(14) = -\frac{1}{14!}, \quad Y(15) = 0,$$

$$Y(16) = \frac{1}{16!}, \quad Y(17) = 0, \quad Y(18) = -\frac{1}{18!}, \quad \dots$$

با جایگذاری مقادیر در معادله (۵.۴)، جواب تحلیلی زیر را به دست می‌آوریم:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \frac{1}{8!}t^8 - \frac{1}{10!}t^{10} + \frac{1}{12!}t^{12} - \frac{1}{14!}t^{14} + \frac{1}{16!}t^{16} + \dots \quad (16.4)$$

حال با استفاده از (۱۶.۴) جواب تقریبی از مرتبه ششم به صورت زیر است:

$$y(t) \cong \sum_{k=0}^6 Y(k)(t-t_0)^k = \left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 \right). \quad (17.4)$$

گاهی اوقات جواب‌های سری که از روش تبدیل دیفرانسیل به دست می‌آیند، با وجود تعداد عبارت‌های زیاد ممکن است فقط در ناحیه‌ی محدودی همگرا باشند. بنابراین ما پیشنهاد می‌کنیم که برای افزایش همگرایی روش لاپلاس-پاده را روی این سری‌ها اعمال کنیم. ابتدا تبدیل لاپلاس را روی معادله (۱۷.۴)

اعمال می‌کنیم سپس s را با $1/t$ جایگزین می‌کنیم و تقریب پاده را روی سری تبدیل شده اعمال می‌کنیم. در نهایت t را جایگزین $1/s$ می‌کنیم و سپس معکوس تبدیل لاپلاس را برای به دست آوردن جواب دقیق یا تقریبی، روی عبارت به دست آمده اعمال می‌کنیم. اکنون تبدیلات لاپلاس را روی (۱۷.۴) اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\ell[y(x)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5} - \frac{1}{s^7}. \quad (18.4)$$

برای سادگی، فرض کنید $s = 1/t$

$$\ell[y(x)] = t - t^3 + t^5 - t^7 \quad (19.4)$$

تقریب پاده از مرتبه $[L, M]$ را روی (۱۹.۴) با $L \geq 1$ ، $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ اعمال می‌کنیم، داریم:

$$[2, 2]_y = \frac{p_0 + p_1 t + p_2 t^2}{1 + q_1 t + q_2 t^2} = \frac{t}{1 + t^2}. \quad (20.4)$$

حال چون $t = 1/s$ ، بنابراین $[L, M]_y$ در عبارتی از s به صورت زیر می‌باشد

$$[2, 2]_y = \frac{s}{s^2 + 1}. \quad (21.4)$$

در نهایت، تبدیل لاپلاس معکوس را روی تقریب‌های پاده به دست آمده اعمال می‌کنیم، جواب تقریبی به دست آمده در این مثال همان جواب دقیق است که به صورت زیر می‌باشد:

$$\ell^{-1}[2, 2]_y = \cos(t). \quad (22.4)$$

مثال ۲.۳.۴. معادله تأخیری پانتوگراف زیر را در نظر بگیرید [۳۸]:

$$u'(t) = \frac{1}{\varphi} \exp \frac{t}{\varphi} u\left(\frac{t}{\varphi}\right) + \frac{1}{\varphi} u(t), \quad u(0) = 1, \quad (23.4)$$

که جواب دقیق این معادله $u(t) = e^t$ می‌باشد.

با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل، تبدیل یافته معادله (۲۳.۴) به صورت زیر است:

$$(k+1)U(k+1) = \frac{1}{\varphi} \sum_{l=0}^k \frac{1}{\varphi^l l!} \frac{1}{\varphi^{k-l}} U(k-l) + \frac{1}{\varphi} U(k), \quad k \geq 0. \quad (24.4)$$

و تبدیل دیفرانسیل شرط اولیه $u(0) = 1$ به صورت $U(0) = 1$ است. از (۲۴.۴)، معادلات بازگشتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U(k+1) = \frac{1}{\varphi k + \varphi} \left[\sum_{l=0}^k \frac{1}{\varphi^k l!} U(k-l) + U(k) \right], \quad k \geq 0. \quad (25.4)$$

از (۲۵.۴)، داریم:

$$U(1) = \frac{1}{2} [U(0) + U(0)] = 1,$$

$$U(2) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} U(1) + \frac{1}{2} U(0) + U(1) \right] = \frac{1}{2},$$

$$U(3) = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} U(2) + \frac{1}{4} U(1) + \frac{1}{4} U(0) + U(2) \right] = \frac{1}{4}, \quad (26.4)$$

$$U(4) = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{8} U(3) + \frac{1}{8} U(2) + \frac{1}{8} U(1) + \frac{1}{8} U(0) + U(3) \right] = \frac{1}{16},$$

⋮

با استفاده از تبدیل معکوس، جواب معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots. \quad (27.4)$$

حال با استفاده از معادله (۲۷.۴) جواب تقریبی مرتبه چهارم به صورت زیر می‌باشد:

$$u(t) \cong 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}. \quad (28.4)$$

ابتدا تبدیلات لاپلاس را روی (۲۸.۴) اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\ell[u(t)] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^5}. \quad (29.4)$$

برای سادگی فرض کنید $s = 1/t$ باشد، بنابراین

$$\ell[u(t)] = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5. \quad (30.4)$$

تقریب‌های پاده از مرتبه $[L, M]$ برای معادله (۳۰.۴) با $L \geq 1$ ، $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[L, M]_u(t) = \frac{t}{1-t}. \quad (31.4)$$

حال چون $t = 1/s$ ، بنابراین عبارت $[L, M]_u$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[L, M]_u(t, x) = \left(\frac{1/s}{1-1/s} \right) = \frac{1}{s-1} \quad (32.4)$$

در انتها تبدیل لاپلاس معکوس را روی تقریب‌های پاده (۳۲.۴) اعمال می‌کنیم. عبارت حاصل همان جواب دقیق است:

$$u(t) = e^t. \quad (33.4)$$

مثال ۳.۳.۴. معادله پانتوگراف غیرخطی زیر از مرتبه دوم [۱]

$$u''\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{1}{4} \left[u'\left(\frac{t}{4}\right) \right]^2 - \frac{1}{8} u(t) = \frac{1}{4}, \quad t \in [0, 1], \quad (34.4)$$

با شرایط اولیه $u(0) = 2$ و $u'(0) = 0$ و جواب دقیق $u(t) = e^{-t} + e^t$ را در نظر بگیرید. روش تبدیل دیفرانسیل را روی معادله (۳۴.۴) برای $k = 0, 1, 2, \dots, N$ اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\frac{(k+2)!}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} U(k+2) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} (l+1)(k-l+1) U(l+1) U(k-l+1) - \frac{1}{8} U(k) = \frac{1}{4} \delta(k). \quad (35.4)$$

با اعمال تبدیل دیفرانسیل روی شرایط اولیه $u(0) = 2$ و $u'(0) = 0$ ، داریم $U(0) = 2$ و $U(1) = 0$ ، که $U(k)$ تبدیل دیفرانسیلی از $u(t)$ است. با استفاده از معادله (۳۵.۴) داریم:

$$2U(2) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$6U(3) = 0,$$

$$12U(4) - \frac{1}{8} U(2)U(2) + \frac{1}{8} U(2) = 0,$$

$$20U(5) - \frac{3}{16} U(3)U(2) - \frac{1}{8} U(3) = 0, \quad (36.4)$$

$$30U(6) - \frac{1}{8} U(4)U(2) - \frac{9}{128} U(3)U(3) - \frac{1}{8} U(4) = 0,$$

$$42U(7) - \frac{5}{64} U(5)U(2) - \frac{3}{32} U(4)U(3) - \frac{1}{8} U(5) = 0,$$

⋮

با استفاده از تبدیل معکوس جواب به صورت سری زیر به دست می‌آید:

$$u(t) = 2 + t^2 + \frac{1}{12} t^4 + \frac{1}{360} t^6 + \dots \quad (37.4)$$

حال جواب تقریبی مرتبه ششم را در نظر بگیرید:

$$u(t) \cong 2 + t^2 + \frac{1}{12} t^4 + \frac{1}{360} t^6. \quad (38.4)$$

تبدیلات لاپلاس را روی (۳۸.۴) اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\ell[u(t)] = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^7}. \quad (39.4)$$

برای سادگی فرض کنید $s = 1/t$ باشد، بنابراین

$$\ell[u(t)] = 2t + 2t^3 + 2t^5 + 2t^7. \quad (40.4)$$

تقریب پاده از مرتبه $[L, M]$ روی معادله (۴۰.۴) با $L \geq 1$ و $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ به صورت زیر به دست می‌آید که در آن $L = 2$ و $M = 2$ در نظر گرفته‌ایم

$$[L, M]_u(t) = \frac{2t}{1-t^2} \quad (41.4)$$

چون $t = 1/s$ ، بنابراین عبارت $[L, M]_u$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$[2, 2]_u(t) = \left(\frac{2/s}{1 - 1/s^2} \right) = \frac{2s}{s^2 - 1} \quad (42.4)$$

که تبدیل لاپلاس معکوس $\frac{2s}{s^2-1}$ برابر است با $u(t) = e^{-t} + e^t$ که همان جواب دقیق است.

مثال ۴.۳.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل^۱ غیرخطی با نسبت تأخیر در هسته زیر را در نظر بگیرید [۱]:

$$u'(t) + \left(\frac{1}{4}t - 2\right)u(t) - 2 \int_0^t u\left(\frac{s}{4}\right)^2 ds = 1 \quad (43.4)$$

برای $t \geq 0$ و با شرایط اولیه $u(0) = 0$ با جایگذاری $t = 0$ ، در معادله (۴۳.۴) داریم $u'(0) = 1$ ،
آنگاه شرایط اولیه به صورت زیر خواهد شد:

$$u(0) = 0, \quad (44.4)$$

$$u'(0) = 1.$$

با مشتق‌گیری از معادله (۴۳.۴)، داریم:

$$u''(t) + \left(\frac{1}{4}t - 2\right)u'(t) + \frac{1}{4}u(t) - 2u\left(\frac{t}{4}\right)^2 = 0 \quad (45.4)$$

آنگاه معادله انتگرال-دیفرانسیل (۴۳.۴)، با شرایط اولیه $u(0) = 0$ ، به معادله پانتوگراف (۴۵.۴) با
شرایط اولیه $u(0) = 0$ و $u'(0) = 1$ تبدیل می‌شود.

با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل روی معادله پانتوگراف غیرخطی (۴۵.۴) برای $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ،
داریم:

$$\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2) + \sum_{l=0}^k \left[\frac{1}{4}\delta(l-1) - 2\delta(l) \right] U(k-l) + \frac{1}{4}U(k) - 2 \sum_{l=0}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k U(k-l) = 0. \quad (46.4)$$

تبدیل دیفرانسیل شرایط اولیه (۴۴.۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$U(0) = 0, \quad (47.4)$$

$$U(1) = 1,$$

که $U(k)$ تبدیل دیفرانسیلی از $u(t)$ است.

^۱Integro-Differential Equation

حال $N = 5$ در نظر می‌گیریم، سیستم زیر از تبدیل دیفرانسیل (۴۶.۴) به‌دست آمده است:

$$2U(2) - 2 = 0,$$

$$6U(3) - 4U(2) + 1 = 0,$$

$$12U(4) - 6U(3) + \frac{3}{2}U(2) - \frac{1}{2} = 0,$$

(۴۸.۴)

$$20U(5) - 8U(4) + 2U(3) - \frac{1}{2}U(2) = 0,$$

$$30U(6) - 10U(5) + \frac{5}{2}U(4) - \frac{1}{2}U(3) - \frac{1}{8}U(2)U(2) = 0,$$

$$42U(7) - 12U(6) + 3U(5) - \frac{1}{8}U(4) - \frac{1}{8}U(2)U(3) = 0.$$

با حل سیستم (۴۸.۴) و با استفاده از تبدیلات معکوس، جواب به‌صورت سری زیر به‌دست می‌آید:

$$u(t) = t + t^2 + \frac{1}{2!}t^3 + \frac{1}{3!}t^4 + \frac{1}{4!}t^5 + \dots + \frac{1}{k!}t^{k+1} + \dots. \quad (49.4)$$

حال جواب تقریبی مرتبه پنجم را در نظر بگیرید:

$$u(t) \cong t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{24}t^5. \quad (50.4)$$

تبدیلات لاپلاس را روی (۵۰.۴) اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\ell[u(t)] = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^4} + \frac{4}{s^5} + \frac{5}{s^6}. \quad (51.4)$$

برای سادگی فرض کنید $s = 1/t$ باشد، بنابراین

$$\ell[u(t)] = t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 4t^5 + 5t^6. \quad (52.4)$$

تقریب‌های پاده از مرتبه $[L, M]$ روی معادله (۵۲.۴) با $L \geq 1$ ، $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ به‌صورت

زیر به‌دست می‌آید که در آن $L = 2$ و $M = 2$ در نظر گرفته‌ایم:

$$[L, M]_u(t) = [2, 2]_u(t) = \frac{t^2}{1 - 2t + t^2}. \quad (53.4)$$

حال چون $t = 1/s$ ، بنابراین عبارت $[L, M]_u$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[2, 2]_u(t) = \left(\frac{1/s^2}{1 - 2/s + 1/s^2} \right) = \frac{1}{s^2 - 2s + 1}, \quad (54.4)$$

که تبدیل لاپلاس معکوس $\frac{1}{s^2 - 2s + 1}$ برابر است با te^t که همان جواب دقیق است.

فصل ۵

اصلاح روش تجزیه آدومیان با استفاده از تقریب پاده برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری

۱.۵ مقدمه

روش تجزیه آدومیان در اوایل دهه ۱۹۸۰ توسط جرج آدومیان برای حل معادلات تابعی پیشنهاد شده است که ما در این فصل از این روش برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری استفاده می‌کنیم. در ادامه روش تجزیه آدومیان را از نقطه نظر تئوریک برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری تجزیه و تحلیل می‌کنیم و سپس با ارائه چند مثال از معادلات دیفرانسیل تأخیری، آن‌ها را با روش تجزیه آدومیان حل می‌کنیم سپس روش اصلاح‌شده‌ای که در فصول قبل بیان کردیم را روی جواب به‌دست آمده از روش تجزیه آدومیان اعمال می‌کنیم، به عبارتی سری‌های حاصل از تجزیه آدومیان را برای بهبود جواب قطع می‌کنیم سپس تبدیلات لاپلاس و تقریب پاده را روی آن اعمال می‌کنیم و در نهایت از تبدیل لاپلاس معکوس برای به‌دست آوردن جواب تحلیلی استفاده می‌کنیم.

۲.۵ استفاده از آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری

دستگاه معادله دیفرانسیل تأخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$Ly_i(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), y_1(\zeta_j(t)), y_2(\zeta_j(t)) \dots, y_n(\zeta_j(t))), \quad (1.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن L عملگر خطی $\frac{d}{dt}$ با معکوس $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ است. با اعمال عملگر معکوس روی (۱.۵) شکل متعارف زیر را به‌دست می‌آوریم که برای اعمال روش تجزیه آدومیان مناسب است.

$$y_i(t) = y_i(\circ) + \int_{\circ}^t f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t), y_1(\zeta_j(t)), \dots, y_n(\zeta_j(t))) dt, \quad (2.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m$$

به طور معمول در روش تجزیه آدومیان، جواب معادله (۲.۵) به صورت مجموعی از یک سری در نظر گرفته می شود

$$y_i(t) = \sum_{j=\circ}^{\infty} f_{i,j} \quad (3.5)$$

و تابع زیر انتگرال در معادله (۲.۵) به صورت سری زیر است:

$$f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t), y_1(\zeta_j(t)), \dots, y_n(\zeta_j(t))) = \sum_{k=\circ}^{\infty} A_{i,k}(f_{i,\circ}, f_{i,1}, \dots, f_{i,k}) \quad (4.5)$$

که $A_{i,k}(f_{i,\circ}, f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$ چند جمله ای آدومیان [۲] نامیده می شوند و

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,k} = y_i(\circ) + \int_{\circ}^t \sum_{k=\circ}^{\infty} A_{i,k}(f_{i,\circ}, f_{i,1}, \dots, f_{i,k}) = y_i(\circ) + \sum_{k=\circ}^{\infty} \int_{\circ}^t A_{i,k}(f_{i,\circ}, f_{i,1}, \dots, f_{i,k}). \quad (5.5)$$

همچنین تکرارهای متوالی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f_{i,\circ} = y_i(\circ), \quad (6.5)$$

$$f_{i,n+1} = \int_{\circ}^t A_{i,n}(f_{i,\circ}, f_{i,2}, \dots, f_{i,n}) dt, \quad n = \circ, 1, 2, \dots$$

در ادامه برای بهبود جواب، سری های به دست آمده از روش آدومیان را قطع می کنیم. سپس تبدیلات لاپلاس و تقریب پاده را روی آن اعمال می کنیم و در نهایت از تبدیل لاپلاس معکوس برای به دست آوردن جواب تحلیلی استفاده می کنیم. این روش که از ترکیب روش آدومیان، تبدیلات لاپلاس و تقریب پاده تشکیل شده است به اختصار با $LPADM$ نشان می دهیم.

۳.۵ مثال های عددی

در این قسمت برای نشان دادن روش، برای معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی و غیرخطی چند مثال ارائه می دهیم.

مثال ۱۰.۳.۵. سیستم معادلات دیفرانسیل تأخیری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۳۷]:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= \frac{1}{t} y_1\left(\frac{t}{t}\right) \end{aligned} \quad (۷.۵)$$

با شرایط اولیه $y_1(0) = 1$ و $y_2(0) = 1$ ، که جواب دقیق به صورت زیر می‌باشد:

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{\frac{t}{t}}. \quad (۸.۵)$$

با استفاده از عملگر معکوس $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ داریم:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 + \int_0^t y_2(t) dt, \\ y_2(t) &= 1 + \frac{1}{t} \int_0^t y_1\left(\frac{t}{t}\right) dt. \end{aligned} \quad (۹.۵)$$

فرآیند تجزیه آدومیان به صورت فرمول تکراری زیر به دست می‌آید:

$$y_{1,0}(t) = 1, \quad y_{1,n+1}(t) = \int_0^t \left(\sum_{k=0}^n y_{2,k}(t) y_{2,n-k}(t) \right) dt, \quad (۱۰.۵)$$

$$y_{2,0}(t) = 1, \quad y_{2,n+1}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y_{1,n}\left(\frac{t}{t}\right) dt.$$

تقریب‌هایی از جواب سیستم تکراری بالا با چهار تکرار از روش تکراری آدومیان، به صورت زیر است:

$$y_1(t) \cong 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120}, \quad (۱۱.۵)$$

$$y_2(t) \cong 1 + \frac{t}{t} + \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{384} + \frac{t^5}{3840}.$$

ابتدا روش اصلاح شده را روی y_1 اعمال می‌کنیم. حال با استفاده از معادله (۱۱.۵) جواب تقریبی مرتبه چهارم y_1 به صورت زیر می‌باشد:

$$y_1(t) \cong 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}. \quad (۱۲.۵)$$

ابتدا تبدیلات لاپلاس را روی (۱۲.۵) برای y_1 اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\ell[y_1(t)] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^5}. \quad (۱۳.۵)$$

برای سادگی فرض کنید $s = 1/t$ باشد، بنابراین

$$\ell[y_1(t)] = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5. \quad (۱۴.۵)$$

تقریب پاده از مرتبه $[L, M]$ برای معادله (۱۴.۵) با $L \geq 1$, $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ به صورت زیر به دست می آید:

$$[L, M]_{y_1}(t) = \left(\frac{t}{1-t} \right) \quad (15.5)$$

حال چون $t = 1/s$ ، بنابراین عبارت $[L, M]_{y_1}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$[L, M]_{y_1}(t, x) = \left(\frac{1/s}{1-1/s} \right) = \frac{1}{s-1} \quad (16.5)$$

در انتها تبدیل لاپلاس معکوس را روی تقریب های پاده (۱۶.۵) برای y_1 اعمال می کنیم. عبارت حاصل همان جواب دقیق است:

$$y_1(t) = e^t. \quad (17.5)$$

حال روش اصلاح شده را روی y_2 اعمال می کنیم. با استفاده از معادله (۱۱.۵) جواب تقریبی مرتبه دوم y_2 به صورت زیر می باشد:

$$y_2(t) \cong 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8}. \quad (18.5)$$

ابتدا تبدیلات لاپلاس را روی (۱۸.۵) برای y_2 اعمال می کنیم، داریم:

$$\ell[y_2(t)] = \frac{1}{s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4s^3}. \quad (19.5)$$

برای سادگی فرض کنید $s = 1/t$ باشد، بنابراین

$$\ell[y_2(t)] = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^3. \quad (20.5)$$

تقریب پاده از مرتبه $[L, M]$ برای معادله (۱۴.۵) با $L \geq 1$, $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ به صورت زیر به دست می آید:

$$[L, M]_{y_2}(t) = [1, 1]_{y_2}(t) = \frac{t}{1-\frac{1}{2}t}. \quad (21.5)$$

حال چون $t = 1/s$ ، بنابراین عبارت $[L, M]_{y_2}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$[1, 1]_{y_2}(t, x) = \left(\frac{1/s}{1-1/2s} \right) = \frac{2}{2s-1}. \quad (22.5)$$

در انتها تبدیل لاپلاس معکوس را روی تقریب های پاده (۲۲.۵) برای y_2 اعمال می کنیم. عبارت حاصل همان جواب دقیق است

$$y_2(t) = e^{\frac{t}{2}}. \quad (23.5)$$

مثال ۲.۳.۵. معادله دیفرانسیل تأخیری غیرخطی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید [۱۸]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 - 2y^2\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0 \quad (24.5)$$

رابطه بازگشتی زیر را داریم:

$$y_0(t) = t, \quad y_{n+1}(t) = -2 \int_0^t A_n dt, \quad n \geq 0 \quad (25.5)$$

که در آن A_n برای $n \geq 0$ چندجمله‌ای‌های آدومیان نامیده می‌شود که نشان‌دهنده عبارات غیرخطی است. مجموعه‌ای از چندجمله‌های آدومیان به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\begin{aligned} A_0(t) &= y_0\left(\frac{t}{\tau}\right), & A_1(t) &= 2y_0\left(\frac{t}{\tau}\right)y_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \\ A_2(t) &= y_1^2\left(\frac{t}{\tau}\right) + 4y_0\left(\frac{t}{\tau}\right)y_2\left(\frac{t}{\tau}\right), \\ A_3(t) &= 2y_1\left(\frac{t}{\tau}\right)y_2\left(\frac{t}{\tau}\right) + 2y_0\left(\frac{t}{\tau}\right)y_3\left(\frac{t}{\tau}\right), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (26.5)$$

جواب مسأله به شکل سری زیر به دست می‌آید:

$$y(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + \dots \quad (27.5)$$

حال تقریب مرتبه پنجم معادله (27.5) را در نظر بگیرید:

$$y(t) \cong t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} \quad (28.5)$$

تبدیلات لاپلاس را روی (28.5) اعمال می‌کنیم، داریم:

$$\ell[y(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^6}. \quad (29.5)$$

برای سادگی، فرض کنید $s = 1/t$ ، بنابراین

$$\ell[y(t)] = t^2 - t^4 + t^6. \quad (30.5)$$

تقریب پاده از مرتبه $[L, M]$ روی معادله (30.5) با $L \geq 1$ ، $M \geq 1$ و $L + M \leq 4$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[L, M]_y(t) = [2, 2]_y = \frac{t^2}{1 + t^2}. \quad (31.5)$$

حال چون $t = 1/s$ ، بنابراین عبارت $[L, M]_y$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[2, 2]_y(t) = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (32.5)$$

در انتها تبدیل لاپلاس معکوس را (32.5) اعمال می‌کنیم. عبارت حاصل همان جواب دقیق است:

$$\ell^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \sin(t). \quad (33.5)$$

نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای آتی

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه ما روش‌های $LPRDTM$ ، $LPDTM$ و $LPADM$ که به‌ترتیب از ترکیب روش کاهش تبدیل دیفرانسیل و لاپلاس-پاده، روش تبدیل دیفرانسیل و لاپلاس-پاده، روش تجزیه آدومیان و لاپلاس-پاده را که بر اساس تبدیلات لاپلاس و تقریب پاده بنا شده است، ارائه دادیم. در ابتدا جواب‌های معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی و معادلات دیفرانسیل تأخیری را با استفاده از روش‌های کاهش تبدیل دیفرانسیل، تبدیل دیفرانسیل و تجزیه آدومیان به‌صورت سری‌های همگرا به‌دست آوردیم. سپس برای گسترش دامنه همگرایی، سری‌های توانی بریده شده را با کمک یک روش بهبود یافته که ترکیبی از تبدیلات لاپلاس و تقریب پاده است روی این سری‌ها اعمال کردیم. این تکنیک اعمال شده تا حد زیادی سرعت جواب‌های سری‌های بریده شده را بهبود می‌بخشد و اغلب منجر به جواب دقیق می‌شود. همچنین روش اصلاح‌شده‌ی پیشنهادی بر اساس یک فرآیند سراسر و مستقیم بنا شده و تقریب بسیار دقیقی را ایجاد می‌کند. بنابراین برای مهندسان و افرادی که در زمینه‌های مکانیک و الکترونیک به دنبال حل معادلات دیفرانسیل جبری-جزئی با اندیس‌های بالا و معادلات دیفرانسیل تأخیری با دقت بالا هستند، بسیار مناسب است.

پیشنهادات برای کارهای آتی

- اعمال روش اصلاح‌شده لاپلاس-پاده روی معادلات غیرخطی پیچیده مثل شرودینگر، سین و گوردن.
- اعمال روش اصلاح‌شده لاپلاس-پاده روی معادلاتی که با روش هموتوپی حل می‌شوند.

- [1] Abazari, Nemat, and Reza Abazari. "Solution of nonlinear second-order pantograph equations via differential transformation method." In Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, vol. 58, (2009): 1052-1056.
- [2] Abdelrazec, Ahmed HM. "Adomian Decomposition Method: Convergence Analysis and Numerical Approximations." PhD diss., McMaster University, (2008).
- [3] Arikoglu, Aytac, and Ibrahim Ozkol. "Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method." Applied Mathematics and Computation 168, no. 2 (2005): 1145-1158.
- [4] Arikoglu, Aytac, and Ibrahim Ozkol. "Solution of difference equations by using differential transform method." Applied Mathematics and Computation 174, no. 2 (2006): 1216-1228.
- [5] Ayaz, Fatma. "Solutions of the system of differential equations by differential transform method." Applied Mathematics and Computation 147, no. 2 (2004): 547-567.
- [6] Benhammouda, Brahim, and Hector Vazquez-Leal. "Analytical solutions for systems of partial differential-algebraic equations." SpringerPlus 3, no. 1 (2014): 137.
- [7] Benhammouda, Brahim, Hector Vazquez-Leal, and Arturo Sarmiento-Reyes. "Modified Reduced Differential Transform Method for Partial Differential-Algebraic Equations." Journal of Applied Mathematics (2014).
- [8] Biazar, J., and F. Mohammadi. "Application of Differential Transform Method to the Generalized Burgers–Huxley Equation." (2011): 1726-1740.
- [9] Biazar, J., and M. Eslami. "Analytic solution for Telegraph equation by differential transform method." Physics Letters A 374, no. 29 (2010): 2904-2906.
- [10] Biazar, J., and M. Eslami. "Differential transform method for quadratic Riccati differential equation." International Journal of Nonlinear Science 9, no. 4 (2010): 444-447.

- [11] Biazar, J., and M. Eslami. "Differential Transform Method for Solving Helmholtz Equation." (2010).
- [12] Borhanifar, A., and Reza Abazari. "Exact solutions for non-linear Schrödinger equations by differential transformation method." *Journal of Applied Mathematics and Computing* 35, no. 1-2 (2011): 37-51.
- [13] Chang, Shih-Hsiang, and I-Ling Chang. "A new algorithm for calculating two-dimensional differential transform of nonlinear functions." *Applied Mathematics and Computation* 215, no. 7 (2009): 2486-2494.
- [14] Chen, Chaó-Kuang, and Shing-Huei Ho. "Application of differential transformation to eigenvalue problems." *Applied Mathematics and Computation* 79, no. 2 (1996): 173-188.
- [15] Chen, Chaó-Kuang, and Shing Huei Ho. "Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method." *Applied Mathematics and computation* 106, no. 2 (1999): 171-179.
- [16] Chowdhury, M. S. H., and Ishak Hashim. "Solutions of a class of singular second-order IVPs by homotopy-perturbation method." *Physics Letters A* 365, no. 5 (2007): 439-447.
- [17] El-Tawil, Magdy A., Ahmed A. Bahnasawi, and Ahmed Abdel-Naby. "Solving Riccati differential equation using Adomian's decomposition method." *Applied Mathematics and Computation* 157, no. 2 (2004): 503-514.
- [18] Evans, David J., and K. R. Raslan. "The Adomian decomposition method for solving delay differential equation." *International Journal of Computer Mathematics* 82, no. 1 (2005): 49-54.
- [19] Farlow, Stanley J. "Partial differential equations for scientists and engineers". Courier Corporation, (2012).
- [20] George Jr, A. *Essentials of Padé approximants*. Elsevier, (1975).
- [21] Gupta, Praveen Kumar. "Approximate analytical solutions of fractional Benney–Lin equation by reduced differential transform method and the homotopy perturbation method." *Computers Mathematics with Applications* 61, no. 9 (2011): 2829-2842.
- [22] Hassan, IH Abdel-Halim. "Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems." *Applied Mathematics and Computation* 154, no. 2 (2004): 299-311.
- [23] He, Ji-Huan. "Homotopy perturbation technique." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 178, no. 3 (1999): 257-262.

- [24] Jang, Ming-Jyi, Chieh-Li Chen, and Yung-Chin Liu. "Two-dimensional differential transform for partial differential equations." *Applied Mathematics and Computation* 121, no. 2 (2001): 261-270.
- [25] Jiao, Y. C., Y. Yamamoto, C. Dang, and Y. Hao. "An aftertreatment technique for improving the accuracy of Adomian's decomposition method." *Computers Mathematics with Applications* 43, no. 6 (2002): 783-798.
- [26] Kanth, ASV Ravi, and K. Aruna. "Two-dimensional differential transform method for solving linear and non-linear Schrödinger equations." *Chaos, Solitons Fractals* 41, no. 5 (2009): 2277-2281.
- [27] Karakoç, F., and H. Bereketoglu. "Solutions of delay differential equations by using differential transform method." *International Journal of Computer Mathematics* 86, no. 5 (2009): 914-923.
- [28] Keskin, Yildiray, and Galip Oturanç. "Reduced differential transform method for generalized KdV equations." *Math. Comput. Applic* 15, no. 3 (2010): 382-393.
- [29] Keskin, Yildiray, and Galip Oturanç. "Reduced differential transform method for partial differential equations." *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 10, no. 6 (2009): 741-750.
- [30] Keskin, Y. "Reduced differential transform method for solving linear and nonlinear wave equations." *Iranian Journal of Science and Technology (Sciences)* 34, no. 2 (2010): 113-122.
- [31] Khan, Y., H. Vazquez-Leal, L. Hernandez-Martinez, and N. Faraz. "Variational iteration algorithm-II for solving linear and non-linear ODEs." *International Journal of the Physical Sciences* 7, no. 25 (2012): 3099-4002.
- [32] Kincaid, David Ronald, and Elliott Ward Cheney. *Numerical analysis: mathematics of scientific computing*. Vol. 2. American Mathematical Soc., (2002).
- [33] Lucht, Wenfried, and K. Strehmel. "Discretization based indices for semilinear partial differential algebraic equations." *Applied Numerical Mathematics* 28, no. 2 (1998): 371-386.
- [34] Lucht, Wenfried, and K. Strehmel. "Linear Partial Differential Algebraic Equations- Part I: Indexes, Consistent Boundary/Initial Conditions." In *Part II: Numerical solution*, Report, Martin-Luther-Universitat Halle, Fachbereich Mathematik und Informatik, (1997).

- [35] Martinson, Wade S., and Paul I. Barton. "A differentiation index for partial differential-algebraic equations." *SIAM Journal on Scientific Computing* 21, no. 6 (2000): 2295-2315.
- [36] Ramos, J. I. "Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations." *Applied Mathematics and Computation* 161, no. 2 (2005): 525-542.
- [37] Saeed, Rostam K., and Botan M. Rahman. "Adomian decomposition method for solving system of delay differential equation." *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* 4, no. 8 (2010): 3613-3621.
- [38] Smarda, Zdeněk, Josef Diblík, and Yasir Khan. "Extension of the differential transformation method to nonlinear differential and integro-differential equations with proportional delays." *Advances in Difference Equations* 2013, no. 1 (2013): 1-12.
- [39] Soltanian, F., Mehdi Dehghan, and S. M. Karbassi. "Solution of the differential algebraic equations via homotopy perturbation method and their engineering applications." *International Journal of Computer Mathematics* 87, no. 9 (2010): 1950-1974.
- [40] Sweilam, Nasser Hassan, and Mohamed M. Khader. "Exact solutions of some coupled nonlinear partial differential equations using the homotopy perturbation method." *Computers Mathematics with Applications* 58, no. 11 (2009): 2134-2141.
- [41] Wazwaz, Abdul-Majid. "Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations." *Applied Mathematics and Computation* 166, no. 3 (2005): 652-663.
- [42] Wazwaz, Abdul-Majid. "The decomposition method applied to systems of partial differential equations and to the reaction–diffusion Brusselator model." *Applied mathematics and computation* 110, no. 2 (2000): 251-264.
- [43] Yang, Xiaofan, Yaixin Liu, and Sen Bai. "A numerical solution of second-order linear partial differential equations by differential transform." *Applied Mathematics and Computation* 173, no. 2 (2006): 792-802.
- [44] Yigider, Muhammed, and Ercan Çelik. "The numerical solution of partial differential-algebraic equations." *Advances in Difference Equations* 2013, no. 1 (2013): 1-10.
- [45] Zhou, J. K. "Differential transformation and its applications for electrical circuits." (1986): 1279-1289.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Homotopy Perturbation	آشفتگی هموتویی
Increase	افزایش دادن
Differentiable	مشتق‌پذیر
Index	اندیس
Higher Index	اندیس بالا
Initial	اولیه
Biochemical	بیوشیمی
Continuous	پیوسته
Function	تابع
Delay	تاخیر
Transformation	تبدیل
Adomian Decomposition	تجزیه آدومیان
Laplace Transform	تبدیلات لاپلاس
Analytical	تحلیلی
Variational Iteratison	تکرار وردشی
Singular	منفرد
Approximant	تقریب
Adjustment	تنظیم
Power	توانی
Constant	ثابت
Algebraic	جبری
Resummation	جمع‌بندی دوباره
Solution	جواب
Exact Solution	جواب دقیق
Multivariate	چند متغیره

Polynomial	چند جمله‌ای
Error	خطا
Linear	خطی
Domain	دامنه
Accuracy	دقت
Sequence	دنباله
Partial Differential	دیفرانسیل جزئی
Combined method	روش ترکیبی
Straightforward	سراست
Serie	سری
Parabolic	سه‌می‌وار
Recursion System	سیستم بازگشتی
Radial	شعاع
Numerator	صورت
Coefficient	ضریب
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Nonlinear	غیرخطی
Formula	فرمول
Space	فضا
Application	کاربرد
Decrease	کاهش دادن
Fractional	کسری
Matrice	ماتریس
Set	مجموعه
Computation	محاسبات
Denominator	مخرج
Square	مربع
Order	مرتبه
Boundry	مرزی
Independent	مستقل
Derivative	مشتق‌پذیر

Ordinary Differential Equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
Equation	معادله
Inverse	معکوس
Engineering	مهندسی
Minimum	مینیمم
Region	ناحیه
Limited	نزدیک شدن
Mapping	نگاشت
Semi Analytic	نیمه تحلیلی
Half Linear	نیمه خطی
Reaction	واکنش
Enlarge	وسیع
Hyperbolic	هذلولی
Convergent	همگرا
Convergence	همگرایی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accuracy	دقت
Adjustment	تنظیم
Adomian Decomposition	تجزیه آدومیان
Algebraic	جبری
Analytical	تحلیلی
Application	کاربرد
Approximant	تقریب
Biochemical	بیوشیمی
Boundry	مرزی
Coefficient	ضریب
Combined method	روش ترکیبی
Computation	محاسبات
Constant	ثابت
Continuous	پیوسته
Convergence	همگرایی
Convergent	همگرا
Decrease	کاهش
Delay	تاخیر
Denominator	مخرج
Derivative	مشتق‌پذیر
Differentiable	انتگرال‌پذیر
Differential	دیفرانسیل
Domain	دامنه
Engineering	مهندسی
Enlarge	وسیع

Equation	معادله
Error	خطا
Exact Solution	جواب دقیق
Formula	فرمول
Fractional	کسری
Function	تابع
Half Linear	نیمه خطی
Higher Index	اندیس بالا
Equation	معادله
Homotopy Perturbation	آشفته‌گی هموتوپ
Hyperbolic	هذلولی
Independent	مستقل
Index	اندیس
Increase	افزایشی
Initial	اولیه
Inverse	معکوس
Laplace Transform	تبدیلات لاپلاس
Limited	نزدیک شدن
Linear	خطی
Mapping	نگاشت
Matrice	ماتریس
Minimum	مینیمم
Multivariate	چند متغیره
Nonlinear	غیرخطی
Numerator	صورت
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Order	مرتبه
Ordinary Differential Equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
Parabolic	سه‌می‌وار
Partial	جزیی
Polynomial	چند جمله‌ای

Power	توانی
Radial	شعاع
Reaction	واکنش
Recursion System	سیستم بازگشتی
Reduce	کاهش
Region	ناحیه
Resummation	دوباره جمع‌بندی
Semi Analytic	نیمه تحلیلی
Sequence	دنباله
Serie	سری
Set	مجموعه
Singular	تکین
Solution	جواب
Space	فضا
Square	مربع
Straightforward	سراسر
Transform	تبدیل
Variational Iteratison	تکرار وردشی

Abstract In this thesis, we first introduce the partial differential equations of the first and second orders; then we express differential transform method for linear and nonlinear functions. We show the efficiency of the proposed method by several numerical examples. Also, the delay differential equation are solved by the modified Adomian decomposition method and modified differential transform method. Finally the partial differential-algebraic equations are also solved by the modified reduced differential transform method.

keywords: Adomian decomposition method, Delay differential equations, Differential transform method, Laplace transform, Padé approximant, Partial differential-algebraic equations, Reduced differential transform method



University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

**Application of Modified Reduced Differential
Transform Method for Solving Partial
Differential-Algebraic Equations with
High-Index**

Sepideh Ahmadzadeh

Supervisors

Dr.Ghovatmand and Dr.Nazemi

Advisor

Dr.Mesforoush

November 2015