دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی عناصر فون نیومن منظم و عناصر وابسته به آن در یک حلقه جابه‌جایی

مریم غلامی

استاد راهنما

آقای دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

آقای دکتر سید رضا حجازی

آبان ۱۳۹۴

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر هاشمی ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر سید رضا حجازی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از پدید آورندگان بسته زی‌پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان‌نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است و نیز از آقای دکتر محمدرضا ربیعی به خاطر پاسخ‌گویی به سوالاتم در مورد LaTeX، کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر و فرزند عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مریم غلامی

آبان ۱۳۹۴

تعهد نامه

اینجانب **مریم غلامی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی عناصر فون نیومن منظم و عناصر وابسته به آن در یک حلقه جابه‌جایی** ، تحت راهنمایی **آقای دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم غلامی

آبان ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی با عضو همانی غیر صفر باشد. در این پایان‌نامه عناصر فون نیومن منظم R، عناصر خودتوان، عناصر π- منظم، عناصر فون نیومن موضعی و عناصر تمیز R را بررسی می‌کنیم و در مورد زیرگراف‌های گراف مقسوم علیه‌های صفر، $\Gamma(R)$، که توسط عناصر بالا القا می‌شوند تحقیق می‌کنیم.

مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی Rرا با $Z(R)$ و گراف حلقه R را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم که $\Gamma(R) = Z(R) - \{0\}$ است. رئوس متمایزی x و y را مجاور می نامیم اگر و فقط اگر $xy = 0$. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم $\Gamma(T(R))$ و $\Gamma(R)$ گراف‌هایی یکریختند که $T(R)$ حلقه‌ی خارج قسمتی تام R است. همچنین نشان می‌دهیم که $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل است اگر و فقط اگر $T(R)$ فون نیومن منظم یا $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره‌ای باشد.

مطالب ارائه شده در این پایان‌نامه برگرفته از مقالات [۶] و [۱۱] است.

کلمات کلیدی: حلقه‌ی فون نیومن منظم، حلقه‌ی فون نیومن موضعی، حلقه‌ی π- منظم، حلقه‌ی تمیز، گراف مقسوم علیه صفر، گراف مکمل.

پیش‌گفتار

افراد زیادی حلقه‌های فون نیومن منظم و عناصر آن را بررسی کرده‌اند از جمله اندرسون [1] [۶] و هنریکسون [2] [۱، ۲] حلقه‌هایی را بررسی کرده‌اند که دارای عناصر فون نیومن منظم هستند و نشان داده‌اند هر عنصر فون نیومن منظم را می توان به صورت حاصلضرب عنصری خودتوان و یکه نوشت. ویندرز [3] [۱۱]در مورد حلقه $R(+)M$ و آنا [4] [۱۲] در مورد حلقه $R \bowtie I$ و نیکلسون [5] [۱۷] در مورد توسیع های حلقه تمیز و اندرسون و لوی [6] [۱۱] گراف حلقه‌های فون نیومن منظم را بررسی کرده‌اند. در سراسر این پایان‌نامه R نمایانگر یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است.

در فصل ۲ نتایجی مقدماتی از عناصر فون نیومن منظم جمع‌آوری شده است. در این فصل نشان می‌دهیم که هر عنصر R، فون نیومن منظم است اگر و فقط اگر R با بعد صفر یا موضعی باشد و یک حلقه مانند R با بعد غیر صفر فون نیومن منظم (بولی) است اگر و فقط اگر تمام مقسوم علیه‌های صفر آن فون نیومن منظم (خودتوان) باشند .

نشان می‌دهیم شرط لازم و کافی برای آنکه $vnr(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد اینست که $۲ \in U(R)$.

سپس $vnr(T)$ را برای توسیع‌های مختلف T از R بررسی می‌کنیم. به‌خصوص $vnr(R[x])$، $vnr(R[[x]])$، $vnr(R(+)M)$ و $vnr(R \bowtie I)$ را مشخص می‌کنیم.

در پایان فصل دوم عناصر π-منظم را مطالعه می‌کنیم و نتایج مختلفی برای عناصر π-منظم که قابل قیاس با عناصر فون نیومن منظم هستند ارائه می‌کنیم و به طور خاص نشان می‌دهیم که:

$\pi - r(R) = vnr(R) \cup nil(R)$ و $\pi - r(R) = \ vnr(R) + \ nil(R)$ اگر و فقط اگر $vnr(R) = U(R) \cup \{۰\}$ یا $nil(R) = \{۰\}$. همچنین اگر $nil(R) \subsetneq Z(R)$ آنگاه R یک حلقه‌ی π-منظم است اگر و فقط اگر تمام مقسوم علیه‌های صفر آن π-منظم باشند و نیز π-منظم بودن توسیع‌های مختلف T از R را بررسی می‌کنیم.

در فصل ۳ عناصر فون نیومن موضعی و عناصر تمیز را بررسی می‌کنیم و نتایجی برای عناصر فون نیومن موضعی و عناصر تمیز ارائه می‌دهیم که قابل قیاس با عناصر فون نیومن منظم و π-منظم می‌باشند. همچنین $vnl(T)$ و $cnl(T)$ را برای توسیع‌های مختلف T از R بررسی می‌کنیم.

در فصل ۴زیر گراف‌های القا شده $\Gamma(Idem(R))$، $\Gamma(vnr(R))$، $\Gamma(\pi - r(R))$، $\Gamma(vnl(R))$ و $\Gamma(cln(R))$ از گراف مقسوم علیه صفر $\Gamma(R)$ از R را ارائه می‌دهیم که به‌وسیله خودتوان‌ها، عناصر فون نیومن منظم، π-منظم و عناصر فون نیومن موضعی و عناصر تمیز $Z(R)^*$ تولید می‌شوند.

در حالت خاص نشان می‌دهیم $\Gamma(Idem(R))$، $\Gamma(vnr(R))$ و $\Gamma(\pi - r(R))$ با قطر بیشتر از ۳ همبند

---

[1] Anderson

[2] Henrikson

[3] Winders

[4] Anna

[5] Nicholson

[6] Levy

هستند و اگر هر کدام از گرافهای فوق شامل یک دور باشد آنگاه کمر بیشتر از ۴ دارند و $\Gamma(Idem(R))$ و $\Gamma(vnr(R))$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل می‌باشند.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در سراسر پایان‌نامه R حلقه‌ای جابه‌جایی با عنصر همانی غیر صفر و $T(R)$ حلقه خارج‌قسمتی تام است. اگر A زیر مجموعه‌ای از R باشد آنگاه $A^* = A \setminus \{۰\}$. مشخصه حلقه R را با $char(R)$ نشان می‌دهیم. برای یک همومورفیسم $f : R \to S$ از حلقه‌های جابه‌جایی R و S فرض می‌کنیم $f(۱) = ۱$. $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_n$ به ترتیب برای نمایش اعداد صحیح، اعداد گویا و حلقه اعداد صحیح به پیمانه عدد طبیعی n به کار می‌روند. همچنین از نمادهای زیر نیز استفاده می‌کنیم:

- $U(R)$: مجموعه‌ی یکه‌های حلقه‌ی R.
- $Z(R)$: مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی R.
- $Spec(R)$: مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول R.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. عنصر a را مقسوم علیه صفر می‌نامیم هرگاه عنصر ناصفر b وجود داشته باشد که $ab = ۰$.

تعریف ۲.۲.۱. حلقه‌ی R را تقلیل یافته می‌نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان غیربدیهی نداشته باشد.

تعریف ۳.۲.۱. رادیکال جیکبسون حلقه‌ی R را با $J(R)$ نشان می‌دهیم که برابر اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R است.

تعریف ۴.۲.۱. رادیکال اول حلقه‌ی R را با $rad(R)$ نشان می‌دهیم که برابر اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه R است.

تعریف ۵.۲.۱. اگر R یک حلقه باشد و R' زیرمجموعه‌ای ناتهی از R باشد به طوری که:

۱. برای هر $a, b \in R'$، $a + b \in R'$ و $ab \in R'$،

۲. $۱_R \in R'$،

در این صورت گوییم R' زیرحلقه‌ی از R است.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $(M, +)$ یک گروه آبلی و R یک حلقه‌ی یکدار باشد و برای هر $m \in M$ و $r \in R$، $rm \in R$ و

۱.

$$\forall r \in R, \forall m_۱, m_۲ \in M; \quad r(m_۱ + m_۲) = rm_۱ + rm_۲,$$

.۲

$$\forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M; \quad (r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m,$$

.۳

$$\forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M; \quad r_1(r_2 m) = (r_1 r_2)m,$$

.۴

$$\forall m \in M; \quad 1_R m = m,$$

در این صورت گوییم M یک R- مدول است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت:

$$R(+)M = \{(r, m) \ s.t \ \ r \in R, \ m \in M\}$$

همراه با دو عمل زیر یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است.

$$\forall (r, m), \ (s, t) \in R(+)M$$
$$(r, m) + (s, t) = (r + s, m + t)$$
$$(r, m)(s, t) = (rs, rt + sm)$$

که آن را توسیع حلقه‌ی R توسط M می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم R و R' دو حلقه‌ی یکدار باشند. تابع $f : R \to R'$ یک همریختی از حلقه‌ها است هرگاه:

.۱

$$\forall x, y \in R; \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

.۲

$$\forall x, y \in R; \quad f(xy) = f(x)f(y),$$

.۳

$$f(1_R) = 1_{R'}.$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. گوییم R دارای مشخصه n است هرگاه n کوچکترین عدد مثبتی باشد که برای هر $a \in R$، $na = 0$.
اگر چنین nای وجود نداشته باشد گوییم R دارای مشخصه صفر است. مشخصه حلقه R را با $char(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم I یک مجموعه‌ی ناتهی و $\leq$ یک رابطه بر I باشد. گوییم $\leq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی بر I است هرگاه:

۱. انعکاسی باشد یعنی
$$\forall x \in I; \quad x \leq x,$$

۲. پادمتقارن باشد یعنی
$$x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y,$$

۳. متعدی باشد یعنی
$$x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

تعریف ۱.۲.۱۱. حلقه‌ی R را حوزه‌ی صحیح می‌نامیم هرگاه به جز صفر مقسوم علیه صفر دیگری نداشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۲. بعد حلقه‌ی جابه‌جایی R را sup طول دنباله‌ی ایده‌آل‌های اول در R می‌نامیم و با $dim(R)$ نشان می‌دهیم. اگر همه‌ی ایده‌آل های اول حلقه R ماکسیمال باشند آنگاه $dim(R) = 0$.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $x \in R$ را منظم راست می‌نامیم اگر برای $r \in R$ که $xr = 0$، آنگاه $r = 0$. عنصر منظم چپ را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. عنصر $x \in R$ را منظم می‌نامیم هرگاه x، منظم راست و منظم چپ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۴. ایده‌آل سره‌ی $\underline{m}$ از حلقه‌ی R را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه هیچ ایده‌آلی بین $\underline{m}$ و R قرار نداشته باشد یعنی اگر $m_1 \trianglelefteq R$ و $m \subseteq m_1 \subseteq R$، آنگاه $m = m_1$ یا $m_1 = R$.

قضیه ۱.۲.۱۵. *اگر $\underline{m}$ یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد آن‌گاه $\underline{m}$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{\underline{m}}$ میدان باشد.*

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنیم $x \in R$. عنصر x را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $x^n = 0$.

گزاره ۱.۲.۱۷. *هر عنصر پوچ‌توان یک مقسوم علیه صفر است.*

برهان. فرض کنیم $x \in R$ پوچ‌توان باشد، لذا n ای وجود دارد که $x^n = 0$.
فرض کنیم $n = 1$. لذا $x = 0$ و نتیجه حاصل است.
حال فرض کنیم $n > 1$. می‌توان فرض کرد n کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که $x^n = 0$. بنابراین $x \cdot x^{n-1} = x^n = 0$. لذا x مقسوم علیه صفر است. □

تعریف ۱.۲.۱۸. حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار R را که فقط یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $\underline{m}$ داشته باشد، حلقه‌ی موضعی می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنیم M یک R- مدول چپ باشد. پوچ‌ساز M را به صورت:
$$ann(M) = \{r \in R | rM = 0\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیر مجموعه ناتهی S از R را ضربی بسته می‌نامیم هرگاه:

۱. $1 \in S$،

۲. برای هر $a, b \in S$، $ab \in S$.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیر مجموعه ضربی بسته از آن باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S; \quad u(at - bs) = 0,$$

به وضوح رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم ارزی است.

کلاس هم ارزی شامل (a, s) را با $\frac{a}{s}$ نمایش می‌دهیم که :

$$\frac{a}{s} = [(a, s)] = \{(b, t) | (b, t) \sim (a, s)\}.$$

مجموعه‌ی همه‌ی کلاس‌های هم ارزی $R \times S$ را با $S^{-1}R$ یا R_S نشان می‌دهیم بنابراین:

$$S^{-1}R = \{\frac{a}{s} | a \in R, s \in S\}$$

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و S زیرمجموعه ضربی بسته از آن باشد. $T(R) = R_S$ را حلقه‌ی خارج قسمتی تام R می‌نامیم که $S = R - Z(R)$ می‌باشد.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. $a \in R$ را یک عنصر فون نیومن منظم R می‌نامیم هرگاه $x \in R$ وجود داشته باشد که $a^2x = a$.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی با همانی غیر صفر باشد. حلقه R را **فون نیومن منظم** می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$، $x \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a^2x = a$.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. عنصر $a \in R$ را π-منظم می‌نامیم هرگاه $x \in R$ و عدد صحیح $n \geq 1$ موجود باشند به طوری که $a^{2n}x = a^n$.

تعریف ۲۶.۲.۱. حلقه R را ، π-منظم می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$، $x \in R$ و عدد صحیح $n \geq 1$ موجود باشند به طوری که $a^{2n}x = a^n$.

تعریف ۲۷.۲.۱. حلقه R را بولی می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$، $a^2 = a$.

تذکر ۲۸.۲.۱. *هر حلقه بولی، فون نیومن منظم و هر حلقه فون نیومن منظم، π-منظم است.*

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد.مجموعه عناصر خودتوان R را با نماد:

$$Idem(R) = \{a \in R \mid a^2 = a\}$$

و مجموعه عناصر فون نیومن منظم R را با نماد:

$$vnr(R) = \{a \in R \mid \text{فون نیومن منظم باشد } a\}$$

و مجموعه عناصر πـمنظم R با نماد:

$$\pi - r(R) = \{a \in R \mid \text{منظم است}-\pi \text{ ،} a\}$$

نشان می‌دهیم. بنابراین،

$$Idem(R) \subseteq vnr(R) \subseteq \pi - r(R)$$

تذکر ۳۰.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. R حلقه بولی (فون نیومن منظم، π-منظم) است هرگاه $Idem(R) = R$ ($vnr(R) = R$ ، $\pi - r(R) = R$).*

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد و $a \in R$. عنصر a را فون نیومن موضعی می‌نامیم هرگاه $a \in vnr(R)$ یا $1 - a \in vnr(R)$.

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. R را یک حلقه فون نیومن موضعی می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ ، $a \in vnr(R)$ یا $1 - a \in vnr(R)$.

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد و $a \in R$. عنصر a را تمیز می‌نامیم هرگاه a به صورت مجموع یک عنصر یکه و یک عنصر خودتوان از R باشد.

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. R را یک حلقه تمیز می‌نامیم هرگاه هر عنصر حلقه R به صورت مجموع یک عنصر یکه و یک عنصر خودتوان از R نوشته شود.

مجموعه عناصر تمیزR را با نماد:

$$cln(R) = \{a \in R \mid \text{تمیز باشد } a\}$$

و مجموعه عناصر فون نیومن موضعی R را با نماد:

$$vnl(R) = \{a \in R \mid \text{فون نیومن موضعی باشد } a\}$$

نشان می‌دهیم.

تذکر ۳۵.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. حلقه R فون نیومن موضعی (تمیز) است هرگاه $vnl(R) = R$ ($cln(R) = R$).*

در ادامه اثبات چند قضیه که در این پایان‌نامه استفاده شده است را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۳۶.۲.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و $x \in R$ باشد، در این صورت $x \in J(R)$ اگر و فقط اگر برای هر $r \in R$، عنصر $1 - rx$ یکه باشد.*

برهان. فرض کنیم $x \in J(R)$. نشان می‌دهیم برای هر $r \in R$، $1 - rx$ یکه است.
فرض کنیم $r \in R$ وجود داشته باشد که $1 - rx$ یکه نیست. لذا ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m_0}$ وجود دارد که $1 - rx \in \underline{m_0}$.

$$x \in J(R) = \bigcap_{\underline{m} \in \max(R)} \underline{m} \Rightarrow x \in \underline{m_0},\ 1 - rx \in \underline{m_0}.$$

لذا $1 \in \underline{m_0}$ و $\underline{m_0} = R$ که تناقض است.
حال فرض کنیم برای هر $r \in R$، عنصر $1 - rx$ یکه باشد نشان می‌دهیم $x \in J(R)$.
فرض کنیم $x \notin J(R)$. لذا ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ وجود دارد که $x \notin \underline{m}$.

بنابراین $\underline{m} \subsetneq \underline{m} + \langle x \rangle$. با توجه به ماکسیمال بودن $\underline{m}$، $\underline{m} + \langle x \rangle = R$ و لذا $1 \in \underline{m} + \langle x \rangle$.
پس $m \in \underline{m}$ و $r \in R$ وجود دارد به طوری که $1 = m + rx$.
با توجه به آن‌که $1 - rx$ یکه است لذا $\underline{m} = R$. که تناقض است. پس $x \in J(R)$. □

قضیه ۳۷.۲.۱. *در هر حلقه‌ی جابه‌جایی R، مجموع یک عنصر یکه و یک عنصر پوچ‌توان، عنصری یکه است.*

برهان. فرض کنیم x عنصر پوچ‌توانی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $1 - x$ عنصری یکه با وارون $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ است. پس اگر u عنصری یکه و x عنصری پوچ‌توان باشد آن‌گاه $v = 1 - (-u^{-1}x)$ یکه است زیرا $-u^{-1}x$ پوچ‌توان است. بنابراین :

$$uv = u + x$$

عنصری یکه است. □

قضیه ۳۸.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت:*
$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ پوچ‌توان است اگر و فقط اگر a_0، ...، a_n عناصری پوچ‌توان باشند.

برهان. $\Rightarrow$ فرض کنیم a_0، ...، a_n عناصری پوچ‌توان باشند. بنابراین $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ نیز پوچ‌توان است.
$\Leftarrow$ فرض کنیم f پوچ‌توان باشد . پس $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $f^m = 0$. لذا $(a_nx^n)^m = 0$، که نشان می‌دهد a_n پوچ‌توان است.
بنابراین $f - a_nx^n$ پوچ‌توان است. با استقراء a_kx^k $(0 \leq k < n)$پوچ‌توان است و لذا a_0 ، ... ، a_nعناصری پوچ‌توان می‌باشند. □

قضیه ۳۹.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R یک حلقه منظم است.*

۲. *هر ایده‌آل چپ اصلی توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.*

۳. *هر ایده‌آل چپ اصلی یک جمعوند مستقیم* $_RR$ *است.*

۴. *هر ایده‌آل چپ با تولید متناهی توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.*

۵. *هر ایده‌آل چپ با تولید متناهی یک جمعوند مستقیم* $_RR$ *است.*

برهان. ۲ $\to$ ۱ ایده آل چپ اصلی Ra را در نظر می‌گیریم. $x \in R$ وجود دارد به طوریکه $a = a^{۲}x$.
فرض کنیم $e = xa$ داریم:

$$e = xa = xaxa = e^{۲}$$

پس $e \in Ra$ و بنابراین:

$$Re \subseteq Ra$$

همچنین $a = axa = ae$ ، و لذا $a \in Re$ و $Ra \subseteq Re$. بنابراین $Ra = Re$.

۱ $\to$ ۲ فرض کنیم $a \in R$.طبق فرض Ra توسط یک عنصر خود توان مانند e تولید می‌شود. پس $Ra = Re$. داریم:

$$e \in Ra \Longrightarrow \exists x \in R, e = xa$$

$$a \in Re \Longrightarrow \exists y \in R, a = ye$$

پس:

$$axa = yee = ye^{۲} = ye = a$$

۳ $\to$ ۲ فرض کنیم I ایده آل چپ اصلی R باشد. بنابرگزاره ۲ عنصر خودتوان $e \in R$ وجود دارد که $I = Re$. نشان می دهیم $R = Re \bigoplus R(۱ - e)$.
فرض کنیم $x \in Re \cap R(۱ - e)$ پس $x \in Re$. لذا $\alpha \in R$ وجود دارد که $x = \alpha e$، و همچنین $x \in R(۱ - e)$. پس $\beta \in R$ وجود دازد که $x = \beta(۱ - e)$.
داریم:
$xe = \alpha e^{۲} = \alpha e$ ولذا $x = \alpha$ همچنین $xe = \beta(۱ - e)e = \beta(e - e^{۲}) = ۰$ و $x = ۰$.
اگر $x \in R$ آنگاه $x = xe + x(۱ - e)$. پس $R = Re \bigoplus R(۱ - e)$ است.

۲ $\to$ ۳ فرض کنیم I ایده آل چپ اصلی از R باشد و $I = Ra$. طبق گزاره ۳ ایده آل S از R وجود دارد که $R = S \bigoplus I$.
$۱ \in R$ و بنابراین $x \in I$ و $y \in S$ وجود دارند که $۱ = x + y$. پس $x = x^{۲} + xy$ و $x - x^{۲} = xy$.

از طرفی $x-x^{۲}\in I$ و $xy \in IS$. پس$x-x^{۲}\in I\cap S=\circ$ و $x=x^{۲}$ است.
فرض می کنیم $x=e$. لذا $Re\subseteq I$.
حال فرض کنیم $\alpha \in I$. عناصر $e\in I$ و $y\in S$ وجود دارد که $e+y=۱$ باشد در نتیجه $\alpha=\alpha(e+y)=\alpha e+\alpha y$ ولذا $\alpha-\alpha e=\alpha y$ و $\alpha-\alpha e\in I\cap S=\circ$. پس $\alpha=\alpha e$ و $I\subseteq Re$ و $I=Re$ است.

$۲\to ۴$ با استقرا ثابت می کنیم . فرض کنیم $I=Ra+Rb$. پس عناصر خودتوان e و f وجود دارند که $Ra=Re$ و $Rb=Rf$. نشان می دهیم I توسط یک عنصر خودتوان تولید می شود.
حال $e+(۱-e)=۱$ و$f=fe+f(۱-e)$ می‌باشد و برای هر $x\in I$ رابطه زیر برقرار است:

$$xf=xfe+xf(۱-e)$$

پس $Rf\subseteq Re+Rf(۱-e)$.
اما $I=Re+Rf$ و لذا $I\subseteq Re+Rf(۱-e)$.
اگر $r\in R$ آنگاه :

$$rf(۱-e)=rf-rfe\in I$$

بنابراین $Re+Rf(۱-e)\subseteq I$ و لذا تساوی $I=Rf(۱-e)+Re$ برقرار است و چون $Rf(۱-e)$ ایده آل چپ اصلی است با توجه به ۲ عنصر خودتوان e' وجود دارد که $Re'=Rf(۱-e)$. پس $e'\in Re'=Rf(۱-e)$ و $e'e\in Rf(۱-e)e=\circ$ می باشد.
همچنین $e'(e'+e)=e'^{۲}+e'e=e'$ و لذا :

$$I=Re+Rf(۱-e)=Re+Re'$$

می باشد. همچنین $Re+Re'=R(e+e')$ است زیرا :
$e'=e'(e+e')\in R(e+e')$ و $e=(e'+e)-e'$ و $Re\subseteq R(e+e')$ است.
بنابراین $R(e+e')\subseteq Re+Re'$می باشد و در نتیجه تساوی $Re+Re'\subseteq R(e+e')$ است. همچنین برقرار است.
حال بافرض $e''=e+e'-ee'$ نشان می دهیم $I=Re''$ و $e''^{۲}=e''$.

$$e''^{۲}=(e+e'-ee')(e+e'-ee')=e''$$

و

$$e''=e+e'-ee'=e+(۱-e)e'$$

پس $Re'' \subseteq Re + Re' = I$.
از طرفی $ee'' = e$ و $e \in Re''$ می باشد و لذا $Re \subseteq Re''$ است . همچنین $e'e'' = e'$ و $e' \in Re''$ است و لذا $Re' \subseteq Re''$ می باشد.
با توجه به اینکه $Re + Re' \subseteq Re''$ و $I \subseteq Re''$ نتیجه می‌گیریم که $I = Re''$.

□

قضیه ۴۰.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی تقلیل یافته باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R حلقه فون نیومن منظم است.*

۲. *R بعد صفر دارد.*

۳. *هر ایده‌آل متناهی R، ایده‌آل اصلی است و توسط یک عنصر خودتوان R تولید می‌شود.*

برهان. به مرجع [۱۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۴۱.۲.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $x, y \in R$.*

۱. *اگر $xy \in nil(R)$ و $n \geq ۱$ عدد صحیحی باشد، آن‌گاه $x + y$ عنصر منظمی از R است اگر و فقط اگر $x^n + y^n$ عنصر منظمی از R باشد.*

۲. *اگر $xy = ۰$ و $ax + by$ عنصر منظمی از R باشد $(a, b \in R)$ آن‌گاه $x + y$ نیز عنصر منظمی از R است.*

برهان. ۱) فرض کنیم $xy \in nil(R)$ و $(x + y)^n = x^n + y^n + z$، که $z \in nil(R)$.
در نتیجه $(x + y)^n$ یکه‌ای در R است اگر و فقط اگر $x^n + y^n$ یکه‌ای در R باشد. لذا $x + y$ عنصر منظمی از R است اگر و فقط اگر $x^n + y^n$ عنصر منظمی از R باشد.
۲) فرض کنیم $xy = ۰$ و $ax + by$ عنصر منظمی از R باشد و $(x + y)d = ۰$.
اگر $d \neq ۰$ و $yd = ۰$ آن‌گاه $xd = ۰$ و لذا $(ax + by)d = ۰$، که تناقض است.
حال فرض می‌کنیم $yd \neq ۰$، لذا $(x+y)yd = ۰$. چون $xy = ۰$، پس $y^۲d = ۰$. پس $(ax+by)yd = ۰$ که تناقض است. بنابراین $d = ۰$ و $x + y$ عنصر منظمی از R است. □

قضیه ۴۲.۲.۱. *در حلقه‌ی جابه‌جایی R گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *$T(R)$ دارای بعد صفر است.*

۲. *برای هر $x \in R$، $y \in R$ و عدد صحیح $n \geq ۱$ وجود دارد که $x^n y = ۰$ و $x^n + y$ عنصر منظمی از R است.*

۳. *برای هر $x \in R$، $y \in R$ وجود دارد که $xy \in nil(R)$ و $x + y$ عنصر منظمی از R است.*

برهان. ۱ $\Leftarrow$ ۲. فرض کنیم $T(R)$ با بعد صفر باشد و $x \in R$. چون $T(R)$، π- منظم است ، پس $\frac{z}{s} \in T(R)$ و عدد صحیح $n \geq 1$ وجود دارد که $x^{2n}(\frac{z}{s}) = x^n$ و $x^n(s - x^n z) = 0$.
فرض کنیم $y = s - x^n z$، پس $x^n y = 0$ و $zx^n + y = s$ عنصر منظمی از R است. بنابراین با توجه به قضیه‌ی بالا $x^n + y$ عنصر منظمی از R است .
۲ $\Leftarrow$ ۳.فرض کنیم برای هر $x \in R$، $y \in R$ و $n \geq 1$ وجود دارد که $x^n y = 0$ و $x^n + y$ عنصر منظمی از R است. پس $xy \in nil(R)$، زیرا $x^n y = 0$ و $(x^n)^n + y^n = (x^{n^2-n})x^n + y^n$ عنصر منظمی از R است .
با توجه به قضیه‌ی بالا $x^n + y^n$ عنصر منظمی از R است، پس $x + y$ نیز عنصر منظمی از R می‌باشد.
۳ $\Leftarrow$ ۱. برای آن که نشان دهیم بعد $T(R)$ صفر است کافی است نشان دهیم هر ایده‌آل اول غیر مینیمال Q از R شامل عنصر منظمی از R است.
فرض کنیم $P \subset Q$ ایده‌آل های اول متمایزی از R باشند و $x \in Q - P$. با توجه به فرض $y \in R$ وجود دارد که $xy \in nil(R)$ و $x + y$ عنصر منظمی از R است.
بنابراین $y \in P \subset Q$ و لذا $x + y \in Q$ و Q شامل عنصر منظمی از R است. □

قضیه ۴۳.۲.۱. *در هر حلقه‌ی جابه‌جایی گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. $T(R)$ *فون نیومن منظم است.*

۲. *برای هر* $x \in R$، $y \in R$ *وجود دارد که* $xy = 0$ *و* $x + y$ *عنصر منظمی از* R *است.*

برهان. ۱ $\Leftarrow$ ۲. فرض کنیم $T(R)$ فون نیومن منظم باشد لذا $T(R)$ و R تقلیل یافته‌اند و با توجه به قضیه‌ی بالا نتیجه حاصل می‌شود. زیرا حلقه‌ی تقلیل یافته بعد صفر دارد.
۲ $\Leftarrow$ ۱. نشان می‌دهیم R تقلیل یافته است. فرض کنیم $x \in nil(R)$ و $x^n = 0$ ($n \geq 1$). با توجه به فرض $y \in R$ وجود دارد که $xy = 0$ و $x + y$ عنصر منظمی از R است.
همچنین $y^n = x^n + y^n$ عنصر منظمی از R است بنابراین y نیز عنصر منظمی از R است، پس $x = 0$.
لذا R و $T(R)$ تقلیل یافته‌اند و با توجه به قضیه‌ی بالا ، $T(R)$ بعد صفر دارد و بنابراین فون نیومن منظم می‌باشد. □

قضیه ۴۴.۲.۱. *فرض کنیم* R *حلقه‌ای جابه‌جایی و* M *یک* R- *مدول باشد. در این صورت،*

$$Z(R(+)M) = \{(r, m) |\ r \in Z(R) \cup Z(M), m \in M\}.$$

برهان. فرض کنیم $r \in Z(R) \cup Z(M)$. اگر $r \in Z(R)$ آنگاه $0 \neq s \in R$ وجود دارد به طوری که $rs = 0$. لذا $(r, 0)(s, 0) = (0, 0)$ و در نتیجه $(r, 0) \in Z(R(+)M)$.
اگر $r \in Z(M)$ آنگاه $0 \neq n \in M$ وجود دارد که $rn = 0$. لذا $(r, 0)(0, n) = (0, 0)$ در نتیجه و $(r, 0) \in Z(R(+)M)$.
همچنین برای هر $m \in M$، $(0, m) \in nil(R)$. بنابراین،

$$(r, m) = (r, 0) + (0, m) \in Z(R(+)M)$$

حال اگر $(r,m) \in Z(R(+)M)$ آن‌گاه عنصر ناصفر (s,n) در $R(+)M$ وجود دارد که:
$$(\circ,\circ) = (r,m)(s,n) = (rs, rn+sm).$$
اگر $s \neq \circ$ آن‌گاه $rs = \circ$ و در نتیجه $r \in Z(R)$. اگر $s = \circ$ آن‌گاه $n \neq \circ$ و $rn = \circ$ و لذا $r \in Z(M)$. پس $r \in Z(R) \cup Z(M)$. □

قضیه ۴۵.۲.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت:*

a) $U(R(+)M) = U(R)(+)M$.

b) $Idem(R(+)M) = Idem(R)(+)\{\circ\}$.

برهان. a)فرض کنیم (r,m) عنصری یکه از $R(+)M$ باشد.پس $(s,n) \in R(+)M$ وجود دارد که$(r,m)(s,n) = (۱,\circ)$.

پس $rs = ۱$، یعنی $r \in U(R)$. بنابراین $(r,m) \in U(R)(+)M$.

حال اگر $r \in U(R)$ آنگاه $s \in R$ وجود دارد که $rs = ۱$. پس $(r,\circ)(s,\circ) = (۱,\circ)$. بنابراین $(r,\circ)$ عنصری یکه از $R(+)M$ است.

فرض کنیم $m \in M$. به وضوح $(\circ,m) \in nil(R(+)M)$. همچنین،

$$(r,m) = (r,\circ) + (\circ,m)$$

یعنی (r,m) عنصر یکه $R(+)M$ است. لذا نتیجه حاصل است.

b) فرض کنیم e عنصر خودتوانی از R باشد. پس به وضوح $(e,\circ)$ عنصر خود توان از $R(+)M$ است.

حال اگر (r,m) عنصر خودتوانی از $R(+)M$ باشد آنگاه :

$$(r,m)^۲ = (r,m) = (r^۲, ۲rm)$$

بنابراین $r = r^۲$ و $m = ۲rm = \circ$ است و لذا:

$$(r,m) = (r,\circ) \in Idem(R)(+)\{\circ\}$$

□

قضیه ۴۶.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد و $u(x) = \sum_{i=\circ}^{\infty} u_i x^i \in R[[x]]$.در این صورت:*

$u(x)$ در $R[[x]]$ یکه است اگر و فقط اگر $u_\circ$ در R یکه باشد.

برهان. به مرجع [۲۰] رجوع کنید. □

فصل ۲

حلقه‌های‌فون نیومن منظم وحلقه‌های π- منظم

۱.۲ مقدمه

در این فصل گزاره هایی از حلقه‌های فون نیومن منظم را ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم اگر $2 \in U(R)$، آنگاه هر عنصر آن به صورت جمع دو یکه از R می‌باشد و در این صورت $vnr(R)$ زیر حلقه‌ای از R است. ثابت می‌کنیم که اگر تمام مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی R، π- منظم باشند، آنگاه حلقه‌ی R، π- منظم است.

۲.۲ عناصر فون نیومن منظم

در این بخش نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه فون نیومن منظم باشد آن‌گاه برای هر $a \in R$، $x \in U(R)$ وجود دارد به طوری که $a^2x = a$. به علاوه $a = ue$ برای $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنیم R و S حلقه‌های جابه‌جایی و $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ خانواده‌ای از حلقه‌های جابه‌جایی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

۱. *فرض کنیم $a \in R$ باشد. اگر برای $x \in R$، $a^2x = a$ آن‌گاه $ax \in Idem(R)$.*

۲. *$vnr(R)$ ضربی بسته است.*

۳. *$vnr(R) \cap nil(R) = \{0\}$.*

۴. *$U(R) \cup Idem(R) \subseteq vnr(R) \subseteq U(R) \cup Z(R)$.*

۵. *$vnr(R) = U(R) \cup \{0\}$ اگر و فقط اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$. در حالت خاص، اگر R یک حوزه صحیح یا موضعی باشد آن‌گاه $vnr(R) = U(R) \cup \{0\}$.*

۶. *$vnr(R)$ شامل یک عنصر غیر یکه ناصفر است اگر و فقط اگر $\{0, 1\} \subsetneq Idem(R)$.*

۷. *$vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha)$. به‌خصوص، $\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha$ فون نیومن منظم است اگر و فقط اگر هر R_α فون نیومن منظم باشد.*

۸. *اگر $f : R \to S$ یک همریختی از حلقه‌ها باشد آن‌گاه $f(vnr(R)) \subseteq vnr(S)$. به‌خصوص، $vnr(R) \subseteq vnr(S)$ وقتی R زیرحلقه‌ای از S باشد و تصویر همریخت یک حلقه فون نیومن منظم، فون نیومن منظم است.*

.

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برای هر $a \in R$ معادلند:*

۱. *$a \in vnr(R)$.*

۲. عنصر یکه u در R وجود دارد به طوریکه $a^2u = a$.

۳. عنصر یکه u در R و عنصر خودتوان e در R وجود دارند به طوریکه، $a = ue$.

۴. عنصر $b \in vnr(R) \setminus \{a\}$ وجود دارد به طوریکه، $a + b \in U(R)$ و $ab = 0$.

۵. عنصر $b \in R$ وجود دارد به طوریکه، $a + b \in U(R)$ و $ab = 0$.

برهان. ۱ $\Leftarrow$ ۲: فرض کنیم $a \in vnr(R)$. پس $a^2x = a$ برای $x \in R$.
همچنین $e = ax \in Idem(R)$. بنابراین $1 - e \in Idem(R)$ است زیرا:

$$(1-e)^2 = 1^2 + e^2 - 2e = 1 - e$$

و

$$a(1-e) = a(1-ax) = a - a^2x = 0.$$

قرار می‌دهیم $u = ex + 1 - e$ پس $u \in U(R)$ زیرا:

$$\begin{aligned} u(a+1-e) &= (ex+1-e)(a+1-e) \\ &= aex + a(1-e) + (1-e)ex + (1-e)^2 \\ &= e^2 + 0 + ex - e^2x + 1 - e = 1. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} a^2u &= a^2(ex+1-e) \\ &= a^2ex + a^2(1-e) \\ &= aax = a^2x = a. \end{aligned}$$

لذا نتیجه حاصل است.
۲ $\Leftarrow$ ۳: فرض کنیم $v \in U(R)$ و $a^2v = a$. اگر $e = av \in Idem(R)$ و $u = v^{-1} \in U(R)$ آن‌گاه $ue = v^{-1}(av) = a$.
۳ $\Leftarrow$ ۴: فرض کنیم $a = ue$، $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$. قرار می‌دهیم $b = u(1-e)$. پس $b \neq a$ و $b^2u^{-1} = u^2(1-e)^2u^{-1} = u(1-e) = b$.
بنابراین $b \in vnr(R)$ است. پس

$$ab = (ue)(u(1-e)) = u^2e(1-e) = 0$$

و

$$a + b = ue + u(1-e) = u \in U(R).$$

۴ $\Leftarrow$ ۵: واضح است.
۵ $\Leftarrow$ ۱: فرض کنیم $b \in R$ وجود دارد که $ab = 0$ و $a + b = u \in U(R)$. پس

$$au = a(a + b) = a^2 + ab = a^2$$

لذا،

$$a^2u^{-1} = (au)u^{-1} = a \in vnr(R).$$

□

توجه ۳.۲.۲. *فرض کنیم $a \in vnr(R)$. پس $x \in R$ وجود دارد که $a^2x = a$. لزوما x منحصربه‌فرد نیست.، زیرا x را با $y \in x + ann(a^2)$ می‌توانیم جایگزین کنیم.*

تذکر ۴.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد و $x \in vnr(R)$. در این صورت $y \in R$ منحصربه‌فرد وجود دارد که $y^2x = y$ و $x^2y = x$.*

برهان. فرض کنیم R یک حلقه و $x \in R$ عنصر منظمی از R باشد. لذا $z \in R$ وجود دارد که $x = x^2z$. فرض کنیم $y = z^2x$. در این صورت:

$$y^2x = y \text{ و } x^2y = x$$

است. لذا چنین yای وجود دارد. نشان می‌دهیم yمنحصر بفرد است.
فرض کنیم $y_1 \in R$ وجود داشته باشد که:

$$x = x^2y_1, \quad y_1 = y_1^2x$$

است. داریم:

$$y_1 = y_1^2x = y_1x^2yy_1 = y_1yxy_1x = y_1yx = y_1yxyx = (xy_1x)yy = xy^2 = y.$$

بنابراین $y = y_1$ و لذا y منحصر بفرد است. □

قضیه ۵.۲.۲. *فرض‌کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱. *$R = vnr(R) \cup nil(R)$ اگر و فقط اگر R فون نیومن منظم یا موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $nil(R)$ باشد. به خصوص اگر $R = vnr(R) \cup nil(R)$، آنگاه R، حلقه π-منظم، موضعی، فون نیومن و تمیز است.*

۲. *$R = vnr(R) \cup Z(R)$ اگر و فقط اگر $T(R) = R$.*

برهان. (۱) فرض کنیم $R = vnr(R) \cup nil(R)$. اگر $vnr(R) = U(R) \cup \{0\}$ آنگاه $nil(R)$ مجموعه‌ی غیر یکه از R است. در این مورد $nil(R)$ ایده‌آل ماکسیمال R است.
حال فرض کنیم $vnr(R)$ شامل غیر یکه ناصفر باشد . بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۲ قسمت (۶)، $e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$ وجود دارد. نشان می‌دهیم $nil(R) = \{0\}$.
فرض کنیم $x \in nil(R)$. پس $e + x \in vnr(R)$. بنابراین،

$$x - ex = (1 - e)x = (1 - e)(e + x) \in vnr(R),$$

همچنین $x - ex = (1 - e)x \in nil(R)$. پس طبق قضیه ۱.۲.۲ قسمت ۳، $x - ex = 0$. با جایگزین کردن e با $1 - e$ و عمل مشابه $ex = 0$. پس $x = 0$. بنابراین

$$R = vnr(R) \cup nil(R) = vnr(R)$$

و لذا Rفون نیومن منظم است.

برعکس: فرض کنیم R فون نیومن منظم یا موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $nil(R)$ باشد. اگر R فون نیومن منظم باشد آنگاه $R = vnr(R)$. بنابراین $R = vnr(R) \cup nil(R)$.

اگر R موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $nil(R)$ باشد آنگاه:

با توجه به قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۵)، $vnr(R) = U(R) \cup \{0\} = (R \setminus nil(R)) \cup \{0\}$ و لذا $R = vnr(R) \cup nil(R).$

برای قسمت "به خصوص" فرض کنیم $R = vnr(R) \cup nil(R)$.

واضح است که $vnr(R) \cup nil(R) \subseteq \pi - r(R)$ (طبق قضیه ۲.۴.۲ قسمت (۴)). بنابراین R یک حلقه π-منظم است.

توجه کنید، اگر $a \in nil(R)$ آنگاه $1 - a \in U(R) \subseteq vnr(R)$. طبق قضیه ۱.۳.۳ قسمت‌های (۱) و (۲) یک حلقه فون نیومن موضعی (یا حلقه π-منظم) یک حلقه تمیز نیز است.

(۲) با توجه به ۱.۲.۲ $R = vnr(R) \cup Z(R)$ اگر و فقط اگر $R = U(R) \cup Z(R)$. زیرا:

$$U(R) \subseteq vnr(R) \subseteq U(R) \cup Z(R).$$

لذا $R = vnr(R) \cup Z(R)$ اگر و فقط اگر $T(R) = R$. □

قضیه ۶.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و $Z(R) \subsetneq \{0\}$ باشد. در این صورت: $Z(R) \subseteq vnr(R)$ اگر و فقط اگر R فون نیومن منظم باشد.*

برهان. فرض کنیم $\{0\} \subsetneq Z(R) \subseteq vnr(R)$ باشد، بنابراین $vnr(R)$ شامل یک عنصر یکه ناصفر است. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۲ قسمت (۶)، $e \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$ وجود دارد. فرض کنیم $x \in R \setminus Z(R)$ باشد، پس

$$ex \in Z(R) \subseteq vnr(R)$$

زیرا $(1 - e)ex = 0$. بنابراین $s \in R$ وجود دارد که $(ex)^2 s = ex$.

چون e پوچ‌توان و x مقسوم علیه صفر نیست پس $exs = e$. به طور مشابه، برای $t \in R$، $1 - e = (1 - e)xt$. لذا،

$$(es + (1 - e)t)x = exs + (1 - e)xt = e + (1 - e) = 1$$

بنابراین $x \in U(R) \subseteq vnr(R)$. پس $R = vnr(R)$ و R فون نیومن منظم است.
برعکس: اگر R فون نیومن منظم باشد آنگاه $R = vnr(R)$. لذا هر عنصر R فون نیومن منظم است. پس $Z(R) \subseteq vnr(R)$. □

نتیجه ۷.۲.۲. *هر حلقه بولی فون نیومن منظم است و یک حلقه فون نیومن منظم یک حلقه بولی است اگر و فقط اگر $U(R) = \{1\}$*

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۲.۲.۲ بدست می‌آید. □

توجه ۸.۲.۲. *$Idem(R)$ ضربی بسته است. زیرا اگر a, b عناصری خودتوان از R باشند، آنگاه:*
$$a, b \in Idem(R) \Longrightarrow (ab)^2 = a^2b^2 = ab \Longrightarrow ab \in Idem(R).$$

همچنین $Idem(R) \cap nil(R) = \{0\}$، $Idem(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Omega} IdemR_\alpha$ و برای هر هومومورفیسم $f : R \to S$ از حلقه‌های جابه‌جایی داریم ،
$$f(Idem(R)) \subseteq Idem(S)$$

قضیه ۹.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت $R = Idem(R) \cup nil(R)$ اگر و فقط اگر R بولی باشد.*

برهان. فرض کنیم $R = Idem(R) \cup nil(R)$. بنابراین $U(R) = \{1\}$، زیرا $U(R) \subseteq Idem(R)$ است. $nil(R) = \{0\}$ است، زیرا $U(R) + nil(R) = U(R)$.
بنابراین $R = Idem(R)$ و R حلقه بولی است.
برعکس: اگر R بولی باشد آنگاه $R = Idem(R)$، و لذا $nil(R) \subseteq Idem(R)$.
پس $R = Idem(R) \cup nil(R) = Idem(R)$. □

قضیه ۱۰.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و $\{0\} \subsetneq Z(R)$ باشد، در این صورت، $Z(R) \subseteq Idem(R)$ اگر و فقط اگر R بولی باشد.*

برهان. فرض کنیم $\{0\} \subsetneq Z(R) \subseteq Idem(R)$ و $s \in Z(R)^*$. چون $s \in Z(R)^* \subseteq Idem(R)$ داریم:
$$s, 1 - s \in Idem(R)$$

و بنابراین $1 - s \in Z(R)^*$.
فرض کنیم $x \in R \setminus Z(R)$ باشد. لذا $sx, (1 - s)x \in Z(R)^* \subseteq Idem(R)$. چون s خودتوان و x مقسوم علیه غیر صفر است.
پس $sx = (sx)^2$ و $sx = s$. به طور مشابه $(1 - s)x = 1 - s$. بنابراین
$$x = sx + (1 - s)x = s + (1 - s) = 1$$

پس $x \in Idem(R)$ و $R = Idem(R)$. پس R بولی است.
برعکس: اگر R بولی باشد آنگاه $R = Idem(R)$ و $Z(R) \subseteq Idem(R)$. □

قضیه ۱۱.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد.در این صورت:*

۱. *اگر $R = Idem(R) \cup Z(R)$ آن‌گاه $U(R) = \{1\}$، $nil(R) = \{0\}$، $char(R) = 2$، $J(R) = \{0\}$ و $T(R) = R$.*

۲. *$dim(R) = 0$ و $R = Idem(R) \cup Z(R)$ اگر و فقط اگر R حلقه بولی باشد.*

برهان. (۱). فرض کنیم $R = Idem(R) \cup Z(R)$ در این صورت $U(R) \subseteq Idem(R)$ بنابراین $U(R) = \{1\}$. چون $U(R) = \{1\}$ داریم $1 = -1$. بنابراین $char(R) = 2$.
چون $U(R) + nil(R) = U(R)$ و $U(R) = \{1\}$، پس $nil(R) = \{0\}$. به طور مشابه،

$$U(R) + J(R) = U(R)$$

و لذا $J(R) = \{0\}$.
در آخر $T(R) = R$ چون $R = U(R) \cup Z(R)$.
(۲). فرض کنیم $dim(R) = 0$ و $R = Idem(R) \cup Z(R)$ باشد، در این صورت با توجه به (۱)، $nil(R) = \{0\}$ و R تقلیل یافته است. بنابراین R فون نیومن منظم و $U(R) = \{1\}$ است. لذا R با توجه به قضیه ۲.۲.۲ حلقه بولی است.
برعکس: اگر R یک حلقه بولی باشد آنگاه $R = Idem(R)$، $Z(R) \subseteq Idem(R)$. پس $R = Idem(R) \cup Z(R)$.

□

نتیجه ۱۲.۲.۲. *$R = Idem(R) \cup Z(R)$ اگر و فقط اگر R یک حلقه بولی باشد.*

قضیه ۱۳.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر $vnr(R)$ زیر حلقه‌ای از R باشد، آن‌گاه R تقلیل یافته است.*

برهان. فرض کنیم $x \in nil(R)$ باشد. لذا عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد که $x^n = 0$. پس $1 + x \in U(R) \subseteq vnr(R)$. زیرا :

$$1 = 1 + x^n = (1 + x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

و

$$x = -1 + (1 + x) \in vnr(R)$$

چون $vnr(R)$ تحت جمع بسته است. بنابراین $x \in nil(R) \cap vnr(R) = \{0\}$ و لذا $x = 0$ (با توجه به قضیه ۱.۲.۲، قسمت (۳)). پس R تقلیل یافته است. □

قضیه ۱۴.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $2 \in U(R)$. در این صورت هر $a \in vnr(R)$ به صورت جمع دو عضو یکه از R است.*

برهان. فرض کنیم $a \in vnr(R)$ باشد. پس $a = ue$، $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$ (با توجه به قضیه ۲.۲.۲). توجه داریم که،

$$(۲e - ۱)^۲ = ۴e^۲ - ۴e + ۱ = ۱$$

بنابراین $v = ۲e - ۱ \in U(R)$ و $v^۲ = ۱$ است. در نتیجه $e = ۲^{-۱}v + ۲^{-۱}$ و

$$a = ue = u(۲^{-۱}v + ۲^{-۱}) = ۲^{-۱}uv + ۲^{-۱}u$$

پس a به صورت جمع دو یکه از R است. $\square$

قضیه ۱۵.۲.۲. *فرض کنیم R حلقه ای جابه‌جایی باشد و $۲ \in U(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *$vnr(R)$ زیر حلقه‌ای از R است.*

۲. *مجموع هر ۴ یکه از R یک عنصر فون نیومن منظم است.*

۳. *فرض کنیم که $u, v, k, m \in U(R)$ و $k^۲ = m^۲ = ۱$. پس $u(۱+k)+v(۱+m) \in vnr(R)$.*

برهان. ۱ $\Leftarrow$ ۲ واضح است، زیرا $U(R) \subseteq vnr(R)$ (با توجه به قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۴)).
۲ $\Leftarrow$ ۳ فرض کنیم $u, v, k, m \in U(R)$ و $k^۲ = m^۲ = ۱$. لذا

$$u(۱ + k) + v(۱ + m) = u + uk + v + vm$$

جمع ۴ یکه از R است، بنابراین

$$u(۱ + k) + v(۱ + m) \in vnr(R).$$

۳ $\Leftarrow$ ۱ کافی است نشان دهیم اگر $x, y \in vnr(R)$ باشد، آن‌گاه $x + y \in vnr(R)$ است. پس $x = ue$ و $y = vf$، $u, v \in U(R)$ و $e, f \in Idem(R)$ است .
با توجه به اثبات قضیه ۱۴.۲.۲، $k, m \in U(R)$ وجود دارند که $k^۲ = m^۲ = ۱$، بنابراین $۲e = k + ۱$ و $۲f = m + ۱$، پس

$$۲(x + y) = ۲ue + ۲vf = u(۱ + k) + v(۱ + m) \in vnr(R),$$

چون $۲ \in U(R)$، داریم $x + y \in vnr(R)$. $\square$

تذکر ۱۶.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد و $S(R) = \{x \in R \mid x^۲ = ۱\} \subseteq U(R)$. اثبات قضیه ۱۴.۲.۲ نشان می‌دهد که یک نگاشت $\varphi\colon Idem(R) \to S(R)$ با ضابطه $\varphi(e) = ۲e-۱$ وجود دارد، زیرا:*

$$(۲e - ۱)^۲ = ۴e^۲ - ۴e + ۱ = ۱$$

۳.۲ محاسبه عناصر منظم توسیع‌های مختلف حلقه R

در این بخش $vnr(T)$ را برای توسیع‌های مختلف T از حلقه R مشخص می‌کنیم. ابتدا $vnr(R[x])$ و $vnr(R[[x]])$ را تعیین می‌کنیم.
اگر $U(R) \subsetneq U(R[x])$ آنگاه $vnr(R) \subsetneq vnr(R[x])$ است و همواره $vnr(R[x]) \subsetneq vnr(R[[x]])$، زیرا $U(R[x]) \subsetneq U(R[[x]])$.

لم ۱.۳.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد،در این صورت:*

۱. $U(R[x]) = \{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 \in U(R), a_n \in nil(R); n \geq 1\}$.

۲. $U(R[[x]]) = \{\sum a_n x^n \in R[[x]] \mid a_0 \in U(R)\}$.

۳. $Idem(R[[x]]) = Idem(R[x]) = Idem(R)$.

برهان. (۱) و (۲) واضح است.
(۳). به وضوح $Idem(R) \subseteq Idem(R[x]) \subseteq Idem(R[[x]])$، بنابراین کافی است نشان دهیم $f(x) = \sum a_n x^n \in Idem(R[[x]])$ در $Idem(R)$ قرار دارد.
به وسیله مقایسه ضرایب در $f(x)^2 = f(x)$ داریم: $a_0^2 = a_0$، پس $a_0 \in Idem(R)$.
و برای $n = 1$، $2a_0a_1 = a_1$ است. با ضرب دو طرف رابطه در a_0 و $a_0^2 = a_0$، $2a_0a_1 = a_0a_1$.
بنابراین $a_0a_1 = 0$ و لذا $a_1 = 2a_0a_1 = 0$.
به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $a_0^2 = a_0$ و $a_1 = \cdots a_{n-1} = 0$ آنگاه $a_n = 0$ ($n \geq 1$). بنابراین $f(x) \in Idem(R)$. □

قضیه ۲.۳.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد، در این صورت:*

۱.

$$vnr(R[x]) = \{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 = ue, a_n \in e(nil(R)); n \geq 1, u \in U(R),$$
$$e \in Idem(R)\}.$$

۲.

$$vnr(R[[x]]) = \{\sum a_n x^n \in R[[x]] \mid a_0 = ue, a_n \in eR; n \geq 1, u \in U(R),$$
$$e \in Idem(R)\}.$$

برهان. (۱) و (۲) با استفاده از قضیه ۲.۲.۲ و لم ۱.۳.۲ به دست می‌آیند.

□

با توجه به قضیه قبل:

$$vnr(R[x]) = \{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 \in vnr(R), a_n \in nil(R); n \geq 1\}$$

در مثال بعد نشان می‌دهیم در هر حلقه‌ای این مورد اتفاق نمی‌افتد.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ و $f(x) = (1, 0) + (0, 2)x$.
به وضوح $a_0 = (1, 0) \in vnr(R)$ و $a_1 = (0, 2) \in nil(R)$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که $e \in Idem(R)$ و $u \in U(R[x])$ وجود ندارد که $f(x) = ue$. بنابراین $f(x) \notin vnr(R[x])$.

لم ۴.۳.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و M یک R- مدول باشد. در این صورت:*

۱. $U(R(+)M) = U(R)(+)M$.

۲. $nil(R(+)M) = nil(R)(+)M$.

۳. $Z(R(+)M) = \{(r, m) \mid r \in Z(R) \cup Z(M), m \in M\}$.

۴. $Idem(R(+)M) = Idem(R)(+)\{0\}$.

۵. $R(+)M/\{0\}(+)M \cong R$.

برهان. اثبات ۱ و ۴ را در قضیه ۴۵.۲.۱ و اثبات ۳ در قضیه ۴۴.۲.۱ بیان کرده‌ایم.
۲) فرض کنیم $(r, m) \in nil(R(+)M)$. لذا nای وجود دارد که:

$$(r, m)^n = (0, 0)$$

بنابراین $(r^n, m') = (0, 0)$. پس $r^n = 0$ و لذا $r \in nil(R)$. پس $(r, m) \in nil(R)(+)M$.
حال فرض کنیم $r \in nil(R)$. لذا nای وجود دارد که:

$$r^n = 0$$

بنابراین $(r, 0) \in nil(R(+)M)$. برای هر $m \in M$، $(0, m) \in nil(R(+)M)$. پس

$$(r, m) = (r, 0) + (0, m) \in nil(R(+)M).$$

۵) نگاشت $\mathfrak{E} : R(+)M \to R$ با ضابطه‌ی $\mathfrak{E}(r, m) = r$ را در نظر می‌گیریم،

$$ker(\mathfrak{E}) = \{(r, m) \in R(+)M \mid \mathfrak{E}(r, m) = 0\} = \{(r, m) \in R(+)M \mid r = 0\} = \{0\}(+)M,$$

نگاشت $\mathfrak{E}$ هومومورفیسم است و با توجه به قضیه‌ی اول یکریختی،

$$R(+)M/\{0\}(+)M \cong R.$$

□

قضیه ۵.۳.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و M یک R- مدول باشد. در این صورت:*

۱. $vnr(R(+)M) = \{(r, rm) \mid r \in vnr(R), m \in M\}$.

۲. $R(+)M$ *فون نیومن منظم است اگر و فقط اگر* R *فون نیومن منظم باشد و* $M = \{0\}$.

برهان. (۱). فرض کنیم که $(r, n) \in vnr(R(+)M)$. بنابراین $(s, b) \in R(+)M$ وجود دارد که، $(r, n)^2(s, b) = (r, n)$. پس

$$(r, n) = (r^2, 2rn)(s, b) = (r^2s, r^2b + 2rsn).$$

و لذا $r = r^2s$ و $n = r^2b + 2rsn$. با ضرب rs درطرفین رابطه داریم:

$$rsn = r^3sb + r^2s^2n = r^2b + rsn,$$

پس $r^2b = 0$ و $rsn = n$. بنابراین $(r, n) = (r, rm)$ $m = sn \in M, r \in vnr(R),$. لذا

$$vnr(R(+)M) \subseteq (r, rm) \mid r \in vnr(R), m \in M\}$$

حال برای عکس رابطه شمول فرض کنیم $r \in vnr(R)$. لذا $s \in R$ وجود دارد که $r^2s = r$، و $(r, rm) \in R(+)M$، همچنین

$$\begin{aligned}(r, rm)^2(s, -sm) &= (r^2, 2r^2m)(s, -sm) = (r^2s, -r^2sm + 2r^2ms)\\ &= (r, -rm + 2rm) = (r, rm).\end{aligned}$$

بنابراین $(r, rm) \in vnr(R(+)M)$.

(۲). با توجه به قسمت (۱) ثابت می‌شود. □

نتیجه ۶.۳.۲. *فرض کنیم* R *یک حلقه جابه‌جایی فون نیومن منظم و* M *یک* R*- مدول باشد. در این صورت:*

$$vnr(R(+)M) = \{(r, rm) \mid r \in R, m \in M\}.$$

نتیجه ۷.۳.۲. *فرض کنیم* R *یک حوزه صحیح یا حلقه جابه‌جایی موضعی و* M *یک* R*- مدول باشد. در این صورت:*

$$vnr(R(+)M) = U(R)(+)M \cup \{(0, 0)\} = U(R(+)M) \cup \{(0, 0)\}.$$

نتیجه ۸.۳.۲. *فرض کنیم* R *یک حلقه جابه‌جایی و* M *یک* R*- مدول ناصفر باشد. در این صورت:*

$$R(+)M = vnr(R(+)M) \cup nil(R(+)M)$$

اگر و فقط اگر R *موضعی با ایده‌آل ماکسیمال* $nil(R)$ *باشد.*

برهان. با استفاده از قضیه‌های ۵.۳.۲ و ۵.۲.۲ ثابت می‌شود. □

تعریف ۹.۳.۲. فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه جابه‌جایی R باشد. تضعیف آمیخته حلقه R در امتداد ایده‌آل I زیرحلقه‌ای از $R \times R$ به صورت زیر است :

$$R \bowtie I = \{(r, r + i) \mid r \in R, i \in I\}.$$

ویژگیهایی از حلقه $R \bowtie I$ را در [۱۲] و [۱۳] می‌توان یافت.

گزاره ۱۰.۳.۲. *فرض کنیم I ایده‌آل ناصفری از R باشد،در این صورت:*

۱. *اگر R حوزه‌ي صحیح باشد آن‌گاه $R \bowtie I$ تقلیل یافته است.*

۲. *R تقلیل یافته است اگر و فقط اگر $R \bowtie I$ تقلیل یافته باشد.*

۳. $dim(R \bowtie I) = dim(R)$.

۴. *R نوتری است اگر و فقط اگر $R \bowtie I$ نوتری باشد.*

قضیه ۱۱.۳.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و I ایده‌آلی از آن باشد. در این صورت $R \bowtie I$ حلقه فون نیومن منظم (بولی) است اگر و فقط اگر R حلقه فون نیومن منظم (بولی) باشد.*

برهان. با توجه به گزاره بالا، $R \bowtie I$ تقلیل یافته است اگر و فقط اگر R تقلیل یافته باشد. همچنین $dim(R \bowtie I) = dim(R)$. بنابراین $R \bowtie I$ فون نیومن منظم است اگر و فقط اگر R فون نیومن منظم باشد.
قسمت دوم گزاره واضح است زیرا :

$$Idem(R \bowtie I) = (R \bowtie I) \cap (Idem(R) \times Idem(R)).$$

پس $R \bowtie I$ حلقه بولی است اگر و فقط اگر R حلقه بولی باشد. □

۴.۲ عناصر π- منظم

تعریف ۱.۴.۲. حلقه جابه‌جایی R را π- منظم می‌نامیم هرگاه $R = \pi - r(R)$.

قضیه ۲.۴.۲. *فرض کنیم $R, R_1, \cdots, R_n$ و S حلقه‌هایی جابه‌جایی باشند. در این صورت:*

۱. $vnr(R) \subseteq \pi - r(R)$. *بخصوص یک حلقه فون نیومن منظم، حلقه π- منظم است.*

۲. *فرض کنیم $a \in R$. اگر $a^{2n}x = a^n$، $x \in R$ و $n \geq 1$، آن‌گاه $a^n x \in Idem(R)$.*

۳. *$\pi - r(R)$ ضربی بسته است.*

۴. $vnr(R) \cup nil(R) \subseteq \pi - r(R) \subseteq U(R) \cup Z(R)$.

۵. *$\pi - r(R) = U(R) \cup nil(R)$، اگر و فقط اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$.*
بخصوص $\pi - r(R) = U(R) \cup nil(R)$ اگر R حوزه صحیح یا موضعی باشد.

۶. *$\pi - r(R)$ شامل یک عنصر غیر یکه غیر پوچ‌توان است اگر و فقط اگر $\{0, 1\} \subsetneq Idem(R)$.*

۷. *$\pi - r(R_1 \times \cdots \times R_n) = \pi - r(R_1) \times \cdots \times \pi - r(R_n)$، بخصوص $R_1 \times \cdots \times R_n$، π- منظم است اگر و فقط اگر هر R_i، π- منظم باشد.*

۸. *فرض کنیم $f: R \to S$ همریختی از حلقه‌های جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

$$f(\pi - r(R)) \subseteq \pi - r(S).$$

بخصوص $\pi - r(R) \subseteq \pi - r(S)$ هنگامی‌که R زیرحلقه‌ای از S است و تصویر همریخت از یک حلقه π- منظم، π- منظم است.

قضیه ۳.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برای $a \in R$ معادلند:*

۱. $a \in \pi - r(R)$.

۲. *برای* $n \geq ۱$; $a^n \in vnr(R)$.

۳. *عناصر خودتوان e و یکه u و $n \geq ۱$، وجود دارند که،* $a^n = ue$.

۴. *عناصر پوچ توان w و فون نیومن منظم b از R وجود دارند که،* $a = b + w$.

۵. *عناصر خودتوان e و یکه u و پوچ توان w از R وجود دارند که،* $a = ue + w$.

۶. $a + nil(R) \in vnr(R/nil(R))$.

۷. *عضوی از R مانند b و $n \geq ۱$ وجود دارند که،* $a^n b = ۰$ *و* $a^n + b \in U(R)$.

۸. *عضوی از R مانند b وجود دارد که،* $ab \in nil(R)$ *و* $a + b \in U(R)$.

برهان. (۱) $\Leftrightarrow$ (۲) واضح است.
(۲) $\Leftrightarrow$ (۳) و (۴) $\Leftrightarrow$ (۵) با استفاده از قضیه ۲.۲.۲ نشان داده می‌شود.
(۴) $\Leftarrow$ (۶) با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۸) نشان داده می‌شود.
(۶) $\Leftarrow$ (۳) چون $a + nil(R) \in vnr(R/nil(R))$، داریم

$$a + nil(R) = uf + nil(R)$$

که $u \in U(R)$ و $f + nil(R) \in Idem(R/nil(R))$.
از طرفی $e = f + h \in Idem(R)$ که $h \in nil(R)$ (نتیجه ص ۷۳، [۲۱]). در این صورت $a = ue + w$ که $e \in Idem(R)$، $u \in U(R)$ و $w \in nil(R)$.
w عنصر پوچ توان R است. لذا nای وجود دارد که، $w^n = ۰$. پس:

$$\begin{aligned} a^n = (ue + w)^n &= u^n e + nu^{n-1} ew + \cdots + nuew^{n-1} \\ &= (u^n + u^{n-1} w + \cdots + nuw^{n-1})e \end{aligned}$$

داریم:

$$u^n + nu^{n-1}w + \cdots + nuw^{n-1} \in U(R) + nil(R) \subseteq U(R)$$

قرار می‌دهیم $v = u^n + nu^{n-1}w + \cdots + nuw^{n-1}$. بنابراین $a^n = ve$ که $e \in Idem(R)$ و $v \in U(R)$.

(۳) $\Leftarrow$ (۷) فرض کنیم $a^n = ue$ که $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$ و $n \geq 1$. اگر $b = u(1-e)$، آن‌گاه

$$a^n b = (ue)(u(1-e)) = 0$$

و

$$a^n + b = ue + u(1-e) = u \in U(R).$$

(۷) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم $n \geq 1$ و عنصر b از R وجود دارد که، $a^n b = 0$ و $a^n + b \in U(R)$. پس $a^{2n}u^{-1} = a^n$. زیرا با در نظر گرفتن $u = a^n + b$ داریم:

$$a^n u = a^n(a^n + b) = a^{2n} + a^n b = a^{2n},$$
$$a^{2n}u^{-1} = (a^n u)u^{-1} = a^n$$

بنابراین $a \in \pi - r(R)$.

(۵) $\Leftarrow$ (۸) فرض کنیم $a = ue + w$ که $u \in U(R)$، $e \in Idem(R)$ و $w \in nil(R)$. فرض کنیم $b = u(1-e)$. در این صورت:

$$ab = u(1-e)w \in nil(R)$$

و

$$a + b = (ue + w) + u(1-e) = (ue + u(1-e)) + w = u + w \in U(R) + nil(R) \subseteq U(R).$$

(۸) $\Leftarrow$ (۷) فرض کنیم عنصر $c \in R$ وجود دارد که $ac \in nil(R)$ و $a + c \in U(R)$. در نتیجه $n \geq 1$ وجود دارد که $(ac)^n = 0$ و

$$a^n + c^n = (a+c)^n + d(ac) \in U(R) + nil(R) \subseteq U(R), \quad d \in R.$$

فرض کنیم $b = c^n$ در این صورت $a^n b = a^n c^n = (ac)^n = 0$ و

$$a^n + b = a^n + c^n \in U(R).$$

$\square$

نتیجه ۲.۴.۴. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱. $\pi - r(R) = vnr(R) + nil(R)$.

۲. $\pi - r(R)/nil(R) = vnr(R/nil(R))$.

۳. *$\pi - r(R) = vnr(R)$ اگر و فقط اگر R تقلیل یافته باشد.*

۴. اگر $2 \in U(R)$ آن‌گاه $a \in \pi - r(R)$ به صورت جمع دو یکه از R می‌باشد.

برهان. (۱). با توجه به معادل بودن (۱) و (۴) در قضیه ۳.۴.۲ نشان داده می‌شود.
(۲). با توجه به معادل بودن (۱) و (۶) در قضیه ۳.۴.۲ نشان داده می‌شود.
(۳). با توجه به (۱) نشان داده می‌شود، چون با توجه به قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۳) خواهیم داشت، $vnr(R) \cap nil(R) = \{0\}$ و در حلقه تقلیل یافته $nil(R) = \{0\}$.
(۴). با توجه به (۱)، $a = x + w$ که $w \in nil(R)$، $x \in vnr(R)$. از طرفی $x = u + v$ و $u, v \in U(R)$ (با توجه به قضیه ۱۴.۲.۲). پس

$$a = u + (v + w)$$

که $u, v + w \in U(R)$. پس a به صورت جمع دو یکه از R می‌باشد. □

نتیجه ۵.۴.۲. *با توجه به قضیه ۲.۴.۲ قسمت (۴) و نتیجه ۴.۴.۲ قسمت (۱) داریم:*

$$vnr(R) \cup nil(R) \subseteq \pi - r(R) = vnr(R) + nil(R).$$

قضیه ۶.۴.۲. *فرض‌کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱. $\pi - r(R) = vnr(R) \cup nil(R)$ *اگر و فقط اگر* $Idem(R) = \{0, 1\}$ *یا* $nil(R) = \{0\}$.

۲. $R = \pi - r(R) \cup Z(R)$ *اگر و فقط اگر* $T(R) = R$.

برهان. فرض کنیم $\pi - r(R) = vnr(R) \cup nil(R)$ و $e \in Idem(R) \backslash \{0, 1\}$.
نشان می‌دهیم که $nil(R) = \{0\}$. فرض کنیم $x \in nil(R)$. پس با توجه به نتیجه ۴.۴.۲ قسمت (۱) و فرض داریم:

$$e + x \in vnr(R) + nil(R) = \pi - r(R) = vnr(R) \cup nil(R).$$

بنابراین لزوما $e + x \in vnr(R)$. لذا با توجه به قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۲)،

$$x - ex = (1 - e)x = (1 - e)(e + x) \in vnr(R),$$

از طرفی $x - ex = (1 - e)x \in nil(R)$ و $vnr(R) \cap nil(R) = \{0\}$. پس $x - ex = 0$.
با جایگزین کردن e با $(1 - e)$ داریم $ex = 0$ و لذا $x = 0$. بنابراین $nil(R) = \{0\}$.
برعکس: فرض کنیم $Idem(R) = \{0, 1\}$ یا $nil(R) = \{0\}$. با توجه به نتیجه ۴.۴.۲ قسمت (۱) $\pi - r(R) = vnr(R) + nil(R)$ و $U(R) + nil(R) = U(R)$.
هریک از دو شرط فوق نتیجه می‌دهد، $\pi - r(R) = vnr(R) \cup nil(R)$.
(۲). توجه کنیم که $R = \pi - r(R) \cup Z(R)$ اگر و فقط اگر $R = U(R) \cup Z(R)$، زیرا با توجه به قضیه ۲.۴.۲ قسمت ۴ داریم:

$$U(R) \subseteq \pi - r(R) \subseteq U(R) \cup Z(R)$$

بنابراین $R = \pi - r(R) \cup Z(R)$ اگر و فقط اگر $T(R) = R$. □

قضیه ۷.۴.۲. *فرض‌کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد و $nil(R) \subsetneq Z(R)$. در این صورت* $Z(R) \subseteq \pi - r(R)$ *اگر و فقط اگر R، π- منظم باشد.*

برهان. فرض کنیم $Z(R) \subseteq \pi - r(R)$. با توجه به اینکه $nil(R) \subsetneq Z(R) \subseteq \pi - r(R)$ و با توجه به قضیه ۲.۴.۲ قسمت (۶)، $e \in Idem(R) \backslash \{0, 1\}$ وجود دارد. همچنین،

$$vnr(R/nil(R)) = \{a + nil(R) \mid a \in \pi - r(R)\},$$

پس $e + nil(R) \in vnr(R/nil(R))$ و لذا $\emptyset \neq Z(R/nil(R))^* \subseteq vnr(R/nil(R))$.
طبق قضیه ۶.۲.۲ $R/nil(R)$ فون نیومن منظم است. بنابراین با توجه به قضیه ۳.۴.۲، حلقه R، π- منظم است .

برعکس: اگر R، π- منظم باشد، آنگاه $R = \pi - r(R)$. بنابراین $Z(R) \subseteq \pi - r(R)$. □

قضیه ۸.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱. $\pi - r(R[x]) = \{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 \in \pi - r(R), a_n \in nil(R), n \geq 1\}$.

۲. $$\pi - r(R[[x]] = \Big\{ \sum a_n x^n \in R[[x]] \mid a_0 = ue + w, u \in U(R), e \in Idem(R), w \in nil(R), \sum_{n\geq 1} a_n x^n \in eR[[x]] + nil(R[[x]])\Big\}.$$

برهان. (۱). با توجه به نتیجه ۴.۴.۲ قسمت (۱) و قضیه ۲.۳.۲ قسمت (۱) داریم:

$$\begin{aligned}\pi - r(R[x]) &= vnr(R[x]) + nil(R[x]) = \Big\{ \sum b_n x^n + \sum w_m x^m \in R[x] \mid b_0 = ue, \\ &\quad b_n \in e(nil(R)), n \geq 1, w_m \in nil(R), m \geq 0, u \in U(R), e \in Idem(R)\Big\} \\ &= \Big\{ \sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 = ue + w, u \in U(R), e \in Idem(R), w \in nil(R); \\ &\quad a_n \in nil(R), n \geq 1\Big\} \\ &= \Big\{ \sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 \in \pi - r(R), a_n \in nil(R), n \geq 1\Big\}.\end{aligned}$$

(۲). از نتیجه ۴.۴.۲ قسمت (۱) و قضیه ۲.۳.۲ قسمت (۲) بدست می‌آید.

□

قضیه ۹.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و M یک R- مدول باشد. در این صورت:*

۱. $\pi - r(R(+)M) = \{(r, m) \mid r \in \pi - r(R), m \in M\} = \pi - r(R)(+)M$.

۲. *$R(+)M$ حلقه π- منظم است اگر و فقط اگر R حلقه π- منظم باشد.*

برهان. (۱). با توجه به نتیجه ۴.۴.۲ قسمت (۱) و قضیه ۵.۳.۲ قسمت (۱) و لم ۴.۳.۲ قسمت (۲) داریم:

$$\begin{aligned}\pi - r(R(+)M) &= vnr(R(+)M) + nil(R(+)M) \\ &= \{(r, rm) + (w, n) \mid r \in vnr(R), w \in nil(R), m, n \in M\} \\ &= \{(r, m) \mid r \in \pi - r(R), m \in M\} = \pi - r(R)(+)M.\end{aligned}$$

(۲). از قسمت (۱) بدست می‌آید. □

تعریف ۱۰.۴.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. n را شاخص کراندار $nil(R)$ می‌نامیم، اگر برای هر $w \in nil(R)$، n کمترین مقدار مثبت باشد که $w^n = 0$.

تعریف ۱۱.۴.۲. حلقه جابه‌جایی R را با شاخص کراندار n گوییم اگر کمترین مقدار مثبت n وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in \pi - r(R)$، $a^n \in vnr(R)$. توجه کنیم که هر حلقه فون نیومن منظم دارای شاخص ۱ است.

قضیه ۱۲.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و n مقداری مثبت باشد. R با شاخص کراندار n است اگر و فقط اگر $nil(R)$ با شاخص کراندار n باشد.*

برهان. فرض کنیم R با شاخص کراندار n باشد و $w \in nil(R) \subseteq \pi - r(R)$. لذا $w^n \in vnr(R)$. با توجه به قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۳)،
$$w^n \in vnr(R) \cap nil(R) = \{0\}$$
بنابراین $nil(R)$ با شاخص کراندار n است.
برعکس: فرض کنیم $nil(R)$ با شاخص کراندار n باشد. اگر $a \in \pi - r(R)$، آن‌گاه با توجه به قضیه ۳.۴.۲، $a = ue + w$ که $u \in U(R)$، $e \in Idem(R)$ و $w \in nil(R)$.
در اثبات (۶) $\Leftarrow$ (۳) از قضیه ۳.۴.۲، $a^n = ve$ که $v \in U(R)$. بنابراین با توجه به قضیه ۲.۲.۲، $a^n \in vnr(R)$. بنابراین R با شاخص کراندار n است. □

نتیجه ۱۳.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی π- منظم با شاخص کراندار n و M یک R- مدول باشد. در این صورت $R(+)M$ یک حلقه جابه‌جایی π- منظم با شاخص کراندار بیشتر از $n+1$ است. بخصوص اگر R یک حلقه فون نیومن منظم باشد، آن‌گاه $R(+)M$ یک حلقه π- منظم با شاخص کراندار بیشتر از ۲ است.*

برهان. قرار می‌دهیم $T = R(+)M$. با توجه به قضیه ۹.۴.۲ قسمت (۲) ، T، π- منظم است اگر و فقط اگر R، π- منظم باشد، در لم ۴.۳.۲ قسمت (۲) نشان داده شد که $nil(T) = nil(R)(+)M$.
با توجه به قضیه ۱۲.۴.۲ کافیست نشان دهیم $nil(T)$ با شاخص کراندار بیشتر از $n+1$ است. فرض کنیم $x = (w, m) \in nil(T)$ که $w \in nil(R)$ و $m \in M$.
چون $nil(R)$ با شاخص کراندار n است، پس
$$x^{n+1} = (w, m)^{n+1} = (w^{n+1}, (n+1)w^n m) = (0, 0)$$
بنابراین T یک حلقه جابه‌جایی (π- منظم) با شاخص کراندار بیشتر از $n+1$ است. قسمت" بخصوص" واضح است. □

قضیه ۱۴.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و I یک ایده‌ال از آن باشد. در این صورت $R \bowtie I$ یک حلقه π- منظم است اگر و فقط اگر R، حلقه π- منظم باشد.*

برهان. یک حلقه جابه‌جایی π- منظم است اگر و فقط اگر بعد آن صفر باشد (قضیه ۱.۳، ص ۱۰، [۱۸]). حال با توجه به رابطه $dim(R \bowtie I) = dim(R)$ نتیجه حاصل است. □

فصل ۳

حلقه‌های فون نیومن موضعی

۱.۳ مقدمه

در این فصل عناصر فون نیومن موضعی و عناصر تمیز را بررسی می‌کنیم و نتایج مختلفی را برای عناصر فون نیومن موضعی و عناصر تمیز ارائه می‌دهیم که قابل قیاس برای عناصر فون نیومن منظم و π- منظم می‌باشند.

۲.۳ برخی ویژگی‌های حلقه فون نیومن موضعی

قضیه ۱.۲.۳. *فرض کنیم S, R حلقه‌های جابه‌جایی باشند و $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ خانواده‌ای از حلقه‌های جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱. $vnl(R) = vnr(R) \cup (1 + vnr(R)) = \{0, 1\} + vnr(R)$. بخصوص،
$$\{0, 1\} + U(R) = U(R) \cup (1 + U(R)) \subseteq vnl(R).$$

۲. فرض کنیم $a \in R$. در این صورت $a \in vnl(R)$ اگر و فقط اگر $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$ وجود داشته باشد به طوری که $a = ue$ یا $a = 1 + ue$.

۳. $nil(R) \subseteq J(R) \subseteq vnl(R)$. به ویژه $U(R) \cup J(R) \subseteq vnl(R)$.

۴. $vnl(R) = U(R) \cup (1 + U(R))$ اگر و فقط اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$.
بخصوص اگر R حوزه صحیح یا موضعی باشد آنگاه $vnl(R) = U(R) \cup (1 + U(R))$

۵. اگر $vnl(R) = vnr(R)$، آن‌گاه R تقلیل یافته است و $\pi - r(R) = vnr(R)$. همچنین،
$$\mathbb{Z}1 + vnr(R) = vnr(R).$$

۶. $vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha)$. اگر $vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$ ضربی بسته باشد، آن‌گاه،
$$vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha).$$

۷. $vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha)$ اگر و فقط اگر $vnl(R_\alpha) = vnr(R_\alpha)$ برای هر α مگر بجز یکی از آنها.

۸. فرض کنیم $f : R \to S$ همریختی از حلقه‌های جابه‌جایی باشد. در این صورت:
$$f(vnl(R)) \subseteq vnl(S).$$

بخصوص $vnl(R) \subseteq vnl(S)$ هنگامی‌که R زیرحلقه‌ای از S باشد و هر تصویر همریختی از یک حلقه فون نیومن موضعی یک حلقه فون نیومن موضعی باشد.

۹. اگر $2 \in U(R)$، آن‌گاه $a \in vnl(R)$ به صورت جمع سه یکه از R می‌باشد.

برهان. (۱). فرض کنیم $a \in vnl(R)$. پس $a \in vnr(R)$ یا $1 - a \in vnr(R)$. بنابراین،

$$1 - a \in vnr(R) \Longleftrightarrow a - 1 \in vnr(R) \Longleftrightarrow a \in 1 + vnr(R)$$

پس $vnl(R) = vnr(R) \cup (1 + vnr(R))$.
قسمت "بخصوص" گزاره واضح است زیرا $U(R) \subseteq vnr(R)$.
(۲). با استفاده از (۱) و قضیه ۲.۲.۲ نشان داده می‌شود.
(۳). واضح است که $nil(R) \subseteq J(R)$. فرض کنیم $a \in J(R)$، پس $1 - a \in U(R)$ و لذا $a - 1 \in U(R)$. پس $a \in 1 + U(R)$ و با توجه به قسمت (۱)

$$nil(R) \subseteq J(R) \subseteq 1 + U(R) \subseteq vnl(R).$$

همچنین $U(R) \subseteq vnl(R)$، پس $U(R) \cup J(R) \subseteq vnl(R)$.
(۴). " $\Longleftarrow$ " فرض کنیم $vnl(R) = U(R) \cup (1 + U(R))$ و $e \in Idem(R)$.
اگر $e \in U(R)$، آن‌گاه $e = 1$ و اگر $e \in 1 + U(R)$، آن‌گاه $1 - e \in U(R)$. بنابراین $1 - e = 1$ و لذا $e = 0$. بنابراین:

$$Idem(R) = \{0, 1\}$$

" $\Longrightarrow$ ". فرض کنیم $Idem(R) = \{0, 1\}$. با توجه به قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۵)،

$$vnr(R) = U(R) \cup \{0\}$$

پس با توجه به قسمت (۱)،

$$vnl(R) = vnr(R) \cup (1 + vnr(R)) = U(R) \cup (1 + U(R))$$

از طرفی $Idem(R) = \{0, 1\}$، اگر R حوزه صحیح یا موضعی باشد. لذا قسمت "بخصوص" گزاره نشان داده خواهد شد.
(۵). فرض کنیم $vnl(R) = vnr(R)$. با توجه به قسمت (۳)، $nil(R) \subseteq vnl(R) \subseteq vnr(R)$ و با توجه به قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۳)، $vnr(R) \cap nil(R) = \{0\}$.
بنابراین $nil(R) = \{0\}$، و لذا R تقلیل یافته است. پس با توجه به نتیجه ۴.۴.۲ قسمت (۳)، $vnr(R) = \pi - r(R)$.
حال اگر $vnl(R) = vnr(R)$، آن‌گاه با توجه به قسمت (۱)، $1 + vnr(R) \subseteq vnr(R)$.
بنابراین برای هر $n \geq 0$، $n1 + vnr(R) \subseteq vnr(R)$. چون $-vnr(R) = vnr(R)$ پس، $\mathbb{Z}1 + vnr(R) \subseteq vnr(R)$. بنابراین $vnr(R) = \mathbb{Z}1 + vnr(R)$.

(۶). با توجه به قسمت (۱) و قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۷) داریم:

$$\begin{aligned} vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) &= vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) \cup (۱ + vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)) \\ &= \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) \cup (۱ + \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha)) \\ &= \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) \cup \prod_{\alpha\in\Omega} (۱ + vnr(R_\alpha)) \\ &\subseteq \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha) \cup \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha). \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$ ضربی بسته باشد و $(r_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha)$. قرار می‌دهیم:

$$X = \{\alpha \in \Omega \mid r_\alpha \in vnr(R_\alpha)\},$$

بنابراین اگر $\alpha \in \Omega\backslash X$ باشد آنگاه $r_\alpha = ۱ + s_\alpha \in ۱ + vnr(R_\alpha)$.

عنصر (a_α) را برای $\alpha \in X$ با $a_\alpha = r_\alpha$ و برای $\alpha \in \Omega\backslash X$ با $a_\alpha = ۱$ تعریف می‌کنیم. بنابراین $(a_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) = vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) \subseteq vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$.

عنصر b_α را برای $\alpha \in X$ با $b_\alpha = ۱$ و برای $\alpha \in \Omega\backslash X$ با $b_\alpha = r_\alpha = ۱ + s_\alpha$ تعریف می‌کنیم. در این صورت:

$$(b_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Omega} (۱ + vnr(R_\alpha)) = ۱ + \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) = ۱ + vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) \subseteq vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha).$$

بنابراین،

$$(r_\alpha) = (a_\alpha)(b_\alpha) \in vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) \subseteq vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha),$$

زیرا $vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$ ضربی بسته است. بنابراین $\prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha) \subseteq vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$. و نتیجه حاصل است.

(۷) " $\Longleftarrow$ ". فرض کنیم $vnr(R_\beta) \subsetneq vnl(R_\beta)$ و $vnr(R_\gamma) \subsetneq vnl(R_\gamma)$ که در آن $\beta, \gamma \in \Omega$. لذا $a_\beta \in vnl(R_\beta)\backslash vnr(R_\beta)$ و $b_\gamma \in vnl(R_\gamma)\backslash vnr(R_\gamma)$، وجود دارند. در این صورت:

$$a_\gamma = ۱ - b_\gamma \in vnr(R_\gamma) \subseteq vnl(R_\gamma).$$

فرض کنیم برای هر $\alpha \in \Omega\backslash\{\beta, \gamma\}$، $a_\alpha = ۱$. بنابراین $(a_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha)$. اما

$$(a_\alpha) \notin \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) = vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$$

زیرا $a_\beta \notin vnr(R_\beta)$. به علاوه $(۱ - a_\alpha) \notin \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) = vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$، زیرا $۱ - a_\gamma = b_\gamma \notin vnr(R_\gamma)$.

بنابراین $(a_\alpha) \notin vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$. پس $vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) \subsetneq \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha)$.

" $\Longrightarrow$ ". با توجه به (۶) کافیست نشان دهیم $\prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha) \subseteq vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$.

فرض کنیم $(a_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha)$. اگر برای هر $\alpha \in \Omega$، $vnl(R_\alpha) = vnr(R_\alpha)$، آن‌گاه:

$$(a_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) = vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) \subseteq vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha).$$

حال فرض کنیم که $\beta \in \Omega$ وجود دارد که $vnr(R_\beta) \subsetneq vnl(R_\beta)$. لذا $a_\beta \in vnl(R_\beta) \backslash vnr(R_\beta)$. پس $1 - a_\beta \in vnr(R_\beta)$. برای هر $\alpha \in \Omega \backslash \{\beta\}$ با توجه به قسمت (۵)، $1 - a_\alpha \in vnr(R_\alpha)$، بنابراین،

$$1 - a_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Omega} vnr(R_\alpha) = vnr(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha).$$

لذا $a_\alpha \in vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$ و $\prod_{\alpha\in\Omega} vnl(R_\alpha) \subseteq vnl(\prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha)$.

(۸). با توجه به فرض f همریختی است و با توجه به قسمت (۱) و قضیه ۱.۲.۲ قسمت (۸) داریم:

$$\begin{aligned} f(vnl(R)) = f(vnr(R) \cup (1 + vnr(R))) &\subseteq f(vnr(R)) \cup f(1 + vnr(R)) \\ &\subseteq vnr(S) \cup (1 + vnr(S)) = vnl(S). \end{aligned}$$

قسمت "بخصوص" گزاره واضح است.

(۹). با استفاده از قضیه ۱۴.۲.۲ و قسمت (۱) نشان داده می‌شود. □

قضیه ۲.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱) $vnl(R[x]) = \{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 = ue$ یا $a_0 = 1 - ue, a_n \in e(nil(R)); n \geq 1, u \in U(R), e \in Idem(R)\}$.

۲) $vnl(R[[x]]) = \{\sum a_n x^n \in R[[x]] \mid a_0 = ue$ یا $a_0 = 1 - ue, a_n \in eR; n \geq 1, u \in U(R), e \in Idem(R)\}$.

برهان. (۱). با توجه به قضیه ۲.۳.۲ قسمت (۱) و قضیه ۱.۲.۳ قسمت (۲) نشان داده می‌شود.

(۲). با توجه به قضیه ۲.۳.۲ قسمت (۲) و قضیه ۱.۲.۳ قسمت (۲) نشان داده می‌شود.

□

در ادامه نشان می‌دهیم، اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$، آنگاه $vnl(R) = cln(R)$، (قضیه ۱.۳.۳ قسمت (۴)). بنابراین اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$، آنگاه R یک حلقه فون نیومن موضعی است اگر و فقط اگر R یک حلقه تمیز باشد.

قضیه ۳.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و M یک R-مدول باشد. در این صورت:*

۱) $vnl(R(+)M) = \{(r, rm) \mid r \in vnr(R), m \in M\} \cup \{(1 + r, rm) \mid r \in vnr(R), m \in M\}$

۲) *اگر $R(+)M$ یک حلقه فون نیومن موضعی باشد آنگاه R یک حلقه فون نیومن موضعی است.*

۳) *فرض کنیم $m \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $ann_R(m) = \{0\}$. در این صورت $R(+)M$ حلقه فون نیومن موضعی است اگر و فقط اگر R حلقه فون نیومن موضعی باشد و $Idem(R) = \{0, 1\}$.*

۴) *اگر M یک توسیع حلقه R باشد آن‌گاه $R(+)M$ یک حلقه فون نیومن موضعی است اگر و فقط اگر R یک حلقه فون نیومن موضعی با $Idem(R)=\{0,1\}$ باشد.*

برهان. (۱). چون $(1,0)$ عضو همانی $R(+)M$ است، لذا با توجه به قضیه ۱.۲.۳ قسمت (۱) و قضیه ۵.۳.۲ داریم:

$$vnl(R(+)M)=vnr(R(+)M)\cup((1,0)+vnr(R(+)M))$$
$$=\{(r,rm)\mid r\in vnr(R),m\in M\}\cup\{(1+r,rm)\mid r\in vnr(R),m\in M\}.$$

(۲). با توجه به قضیه ۱.۲.۳ قسمت (۸) و لم ۴.۳.۲ قسمت (۵) نشان داده می‌شود.
(۳). فرض کنیم R یک حلقه فون نیومن موضعی باشد و $Idem(R)=\{0,1\}$. در این صورت با توجه به قضیه ۱.۳.۳ قسمت (۴)، R یک حلقه تمیز است.
بنابراین $R(+)M$ یک حلقه تمیز است. با توجه به قضیه ۱.۳.۳ قسمت (۴) و لم ۴.۳.۲ قسمت (۴)، $Idem(R(+)M)=\{0,1\}$. لذا با توجه به قضیه ۱.۳.۳ قسمت (۴)، $R(+)M$ یک حلقه فون نیومن موضعی است.
حال فرض کنیم $R(+)M$ یک حلقه فون نیومن موضعی باشد و $m\in M$ وجود داشته باشد که $ann_R(m)=\{0\}$. با توجه به قسمت (۲)، R یک حلقه فون نیومن موضعی است.
فرض کنیم $e\in Idem(R)\backslash\{0,1\}$. چون $(e,m)\in vnl(R(+)M)$ لذا و با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳، قسمت (۲) و لم ۴.۳.۲ داریم:

$$(e,m)=(f_1,0)(u,t);\quad f_1\in Idem(R)\backslash\{0,1\},u\in U(R),t\in M,$$

یا

$$(e,m)=(1,0)+(f_2,0)(v,k);\quad f_2\in Idem(R)\backslash\{0,1\},v\in U(R),k\in M.$$

توجه داریم که $f_2\notin\{0,1\}$.
در مورد اول $m=f_1t$ است. با ضرب طرفین در $(1-f_1)$ داریم:

$$(1-f_1)m=(1-f_1)f_1t=0,$$

و در مورد دوم $(1-f_2)m=0$، که متناقض با $ann_R(m)=\{0\}$ است.
بنابراین $Idem(R)=\{0,1\}$.
(۴). فرض کنیم M یک توسیع حلقه R باشد. چون $1\in M$ و $ann_R(1)=\{0\}$ این ادعا با توجه به قسمت (۳) نشان داده می‌شود. □

۳.۳ عناصر تمیز

در این بخش شرایطی را بررسی می‌کنیم که $vnl(R)=cln(R)$.

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنیم R و S دو حلقه‌ی جابه‌جایی و $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ یک خانواده از حلقه‌های جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱. $Idem(R) \subseteq vnr(R) \subseteq vnl(R) \subseteq cln(R)$، به خصوص هر حلقه‌ی بولی، فون نیومن منظم، فون نیومن موضعی و تمیز است.

۲. $vnr(R) \subseteq \pi - r(R) \subseteq cln(R)$، به خصوص هر حلقه π- منظم، تمیز است.

۳. $U(R) \cup J(R) \subseteq U(R) \cup (1 + U(R)) \subseteq cln(R)$.

۴. اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$، آن‌گاه $cln(R) = vnl(R)$، به خصوص $cln(R) = vnl(R)$ هنگامی که R حوزه صحیح یا شبه موضعی باشد.

۵. $\prod_{\alpha \in \Omega} R_\alpha$ یک حلقه تمیز است اگر و فقط اگر هر R_α یک حلقه تمیز باشد.

۶. فرض کنیم $f : R \to S$ یک همریختی از حلقه‌های جابه‌جایی باشد، در این صورت:

$$f(cln(R)) \subseteq cln(S).$$

به خصوص $cln(R) \subseteq cln(S)$ هنگامی‌که R زیرحلقه‌ای از S باشد و هر تصویر همریخت یک حلقه تمیز، یک حلقه تمیز است.

۷. اگر $2 \in U(R)$، آن‌گاه هر $a \in cln(R)$ به صورت مجموع سه یکه از R است.

۸. اگر $vnl(R)$ ضربی بسته باشد، آن‌گاه $cln(R) = vnl(R)$.

برهان. (۱). ابتدا نشان می‌دهیم $vnr(R) \subseteq cln(R)$. فرض کنیم $a \in vnr(R)$، پس با توجه به قضیه‌ی ۲.۲.۲، $a = ue$ که $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$. بنابراین

$$a = (ue + e - 1) + (1 - e)$$

و $ue + e - 1 \in U(R)$. چون

$$(ue + e - 1)(u^{-1}e + e - 1) = 1$$

و $1 - e \in Idem(R)$، بنابراین $a \in cln(R)$.

سپس نشان می‌دهیم $1 + vnr(R) \subseteq cln(R)$. مانند بالا فرض کنیم $a = ue$. لذا،

$$1 + a = 1 + ue = (ue + 1 - e) + e$$

همچنین $ue + 1 - e \in U(R)$. چون،

$$(ue + 1 - e)(u^{-1}e + 1 - e) = 1$$

$e \in Idem(R)$، لذا $1 + a \in cln(R)$. بنابراین $1 + vnr(R) \subseteq cln(R)$. پس،

$$vnl(R) = vnr(R) \cup (1 + vnr(R)) \subseteq cln(R).$$

قسمت "به خصوص" گزاره واضح است.

(۲). فرض کنیم $x \in \pi - r(R)$. با توجه به قضیه‌ی ۳.۴.۲، $x = a + w$ که $a \in vnr(R)$ و $w \in nil(R)$. با توجه به قسمت (۱)، $vnr(R) \subseteq vnl(R) \subseteq cln(R)$.

از طرفی $a = u + e$ که $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$. بنابراین،

$$x = a + w = u + e + w = (u + w) + e \in U(R) + Idem(R) = cln(R).$$

قسمت "به خصوص" گزاره واضح است.

(۳). با توجه به قسمت (۱) و قضیه‌ی ۱.۲.۳ قسمت‌های (۱) و (۳) نتیجه برقرار است.

(۴). فرض کنیم $Idem(R) = \{0, 1\}$، در این صورت:

$$cln(R) = \{0, 1\} + U(R) = U(R) \cup (1 + U(R)) \subseteq vnl(R).$$

بنابراین $cln(R) = vnl(R)$. قسمت " به خصوص" گزاره واضح است، چون $Idem(R) = \{0, 1\}$ وقتی R حوزه صحیح یا موضعی باشد.

(۵). واضح است.

(۶). چون $f(Idem(R)) \subseteq Idem(S)$، $f(U(R)) \subseteq U(S)$ و f همریختی است:

$$f(cln(R)) = f(U(R) + Idem(R)) = f(U(R)) + f(Idem(R))$$
$$\subseteq U(S) + Idem(S) = cln(S).$$

قسمت "به خصوص" گزاره واضح است.

(۷). با توجه به قضیه‌ی ۱۴.۲.۲ و $Idem(R) \subseteq vnr(R)$ نشان داده می‌شود.

(۸). با توجه به قسمت (۱)، $vnl(R) \subseteq cln(R)$. فرض کنیم $vnl(R)$ ضربی بسته باشد و

$$x = e + u \in cln(R)$$

که $e \in Idem(R)$ و $u \in U(R)$. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳ قسمت (۳)، $u \in U(R) \subseteq vnl(R)$،

$$x = e + u = u(u^{-1}e + 1)$$

وبا توجه به قضیه‌ی ۲.۲.۲ و قضیه‌ی ۱.۲.۳ قسمت (۱)،

$$u^{-1}e + 1 \in 1 + vnr(R) \subseteq vnl(R),$$

$vnl(R)$ ضربی بسته است. پس $x \in vnl(R)$ و $cln(R) \subseteq vnl(R)$. پس $cln(R) = vnl(R)$. □

قضیه ۲.۳.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت:*

۱. $cln(R[x]) = \{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_0 \in cln(R), a_n \in nil(R); n \geq 1\}$.

۲. $cln(R[[x]]) = \{\sum a_n x^n \in R[[x]] \mid a_0 \in cln(R)\}$.

۳. *$R[[x]]$ حلقه تمیز است اگر و فقط اگر R یک حلقه‌ی تمیز باشد.*

برهان. (۱). داریم

$$\begin{aligned} cln(R[x]) &= U(R[x]) + Idem(R[x]) \\ &= \left\{\sum a_n x^n \in R[x] | a_\circ = u + e; u \in U(R), e \in Idem(R), a_n \in nil(R)\right\} \\ &= \left\{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_\circ \in cln(R), a_n \in nil(R); n \geq ۱\right\}. \end{aligned}$$

زیرا با توجه به قضایای قبل،

$$U(R[x]) = \left\{\sum a_n x^n \in R[x] \mid a_\circ \in U(R), a_n \in nil(R)\right\},$$

و با توجه به لم ۱.۳.۲، $Idem(R[x]) = Idem(R)$.

(۲). با توجه به اینکه $U(R[[x]]) = \{\sum a_n x^n \in R[[x]] \mid a_\circ \in U(R), a_n \in nil(R)\}$ و با توجه به لم ۱.۳.۲، $Idem(R[[x]]) = Idem(R)$، گزاره برقرار است.

(۳). با توجه به قسمت (۲) نشان داده می‌شود. □

قضیه ۳.۳.۳. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و M یک R- مدول باشد، در این صورت:*

۱. $cln(R(+)M) = \{(r, m) \mid r \in cln(R), m \in M\} = cln(R)(+)M$.

۲. *$R(+)M$ حلقه تمیز است اگر و فقط اگر R حلقه تمیز باشد.*

برهان. (۱). با توجه به لم ۴.۳.۲،

$$\begin{aligned} cln(R(+)M) &= U(R(+)M) + Idem(R(+)M) \\ &= \{(u, m) + (e, \circ) | u \in U(R), e \in Idem(R), m \in M\} \\ &= \{(u + e, m) | u \in U(R), e \in Idem(R), m \in M\} \\ &= \{(r, m) | r \in cln(R), m \in M\} = cln(R)(+)M. \end{aligned}$$

(۲). با توجه به قسمت (۱) نشان داده می‌شود. □

توجه: در قضیه ۲.۴.۲ قسمت (۵)، $\pi - (R) = U(R) \cup nil(R)$ اگر و فقط اگر $Idem(R) = \{\circ, ۱\}$ و $\pi - r(R) = vnr(R) \cup nil(R)$ اگر و فقط اگر $Idem(R) = \{\circ, ۱\}$ یا $nil(R) = \{\circ\}$ (با توجه به قضیه ۶.۴.۲ قسمت (۱)).

قضیه ۴.۳.۳. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:*

(a $vnl(R) = U(R) \cup nil(R)$.

(b $cln(R) = U(R) \cup nil(R)$.

(c $vnl(R) = vnr(R) \cup nil(R)$.

(d) $cln(R) = vnr(R) \cup nil(R)$.

در این صورت:

۱. $(b) \Longleftrightarrow (a)$، $(d) \Longleftrightarrow (c)$ و $(c) \Longrightarrow (a)$.

۲. *اگر یکی از چهار گزاره بالا برقرار باشد آن‌گاه،* $cln(R) = vnl(R) = \pi - r(R)$.

۳. *اگر* (a) *یا* (b) *برقرار باشد آن‌گاه* $Idem(R) = \{0, 1\}$.

۴. *اگر* (c) *یا* (d) *برقرار باشد آن‌گاه* $Idem(R) = \{0, 1\}$ *یا* $nil(R) = \{0\}$.

برهان. (۱). $(c) \Longrightarrow (a)$. واضح است زیرا با توجه به قضیه ۱.۳.۳ قسمت (۱)،
$$U(R) \subseteq vnr(R) \subseteq vnl(R).$$

ابتدا $(b) \Longleftrightarrow (a)$ را نشان می‌دهیم.
$(b) \Longrightarrow (a)$. فرض کنیم $vnl(R) = U(R) \cup nil(R)$، پس $vnl(R)$ ضربی بسته است. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۳ قسمت (۸)، $cln(R) = vnl(R)$. لذا (b) برقرار است.
$(a) \Longrightarrow (b)$. فرض کنیم $cln(R) = U(R) \cup nil(R)$. چون با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳ قسمت (۳) و قضیه‌ی ۱.۳.۳ قسمت (۱)،
$$U(R) \cup nil(R) \subseteq vnl(R) \subseteq cln(R)$$

لذا $cln(R) = vnl(R)$. پس (a) برقرار است. اثبات $(c) \Longleftrightarrow (d)$ مشابه است.
(۲). فرض کنیم یکی از چهار گزاره بالا برقرار باشد. با توجه به قسمت (۱)، $vnl(R) = cln(R)$ و با توجه به قضیه‌ی ۲.۴.۲ قسمت (۴) و قضیه‌ی ۱.۳.۳ قسمت (۲)،
$$U(R) \cup nil(R) \subseteq vnr(R) \cup nil(R) \subseteq \pi - r(R) \subseteq cln(R).$$

بنابراین $cln(R) = vnl(R) = \pi - r(R)$.
(۳). فرض کنیم (a) یا (b) برقرار باشد، آن‌گاه با توجه به قسمت (۲)، $\pi - r(R) = U(R) \cup nil(R)$.
بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲.۴.۲ قسمت (۵)، $Idem(R) = \{0, 1\}$ یا $nil(R) = \{0\}$.
(۴) اثبات مشابه قسمت (۳) است. □

فصل ۴

گراف‌های مقسوم علیه صفر و عناصر فون نیومن منظم

۱.۴ مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی با عضو همانی ۱ باشد و فرض کنیم $Z(R)$ مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر آن باشد. گراف مقسوم علیه صفر R را با $\Gamma(R)$ علامت‌گذاری می‌کنیم که گراف غیر جهت‌دار با رئوس $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ است (مجموعه مقسوم علیه صفر غیر صفر R).
اگر $x, y \in Z(R)^*$ متمایز باشند آنگاه رئوس x و y مجاورند اگر و فقط اگر $xy = 0$.

تذکر ۱.۱.۴. *فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. $\Gamma(R)$ را گراف تهی می‌نامیم اگر و فقط اگر R حوزه‌ی صحیح باشد.*

تعریف ۲.۱.۴. گراف G را گراف ستاره‌ای می‌نامیم اگر راسی وجود داشته باشد که به هر راس دیگر گراف مجاور باشد .

مفهوم گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه‌ی جابه‌جایی توسط بک[۱] مطرح شده است. گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه‌ي جابه‌جایی در [۷، ۹، ۱۴، ۲۲، ۲۳] بررسی شده است.
در این فصل گراف مقسوم علیه صفر $\Gamma(R)$ یک حلقه‌ی فون نیومن منظم جابه‌جایی R را ارائه می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R و حلقه‌ی خارج قسمتی تام $T(R)$ گراف‌های مقسوم علیه صفر یکریخت دارند.
همچنین نشان می‌دهیم در یک حلقه‌ی R با عناصر پوچ توان ناصفر، $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل است اگر و فقط اگر $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره‌ای باشد.
فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی با $0 \neq 1$ و $U(R)$ گروه یکه R و $nil(R)$ ایده‌آل عناصر پوچ توان R ، $Z(R)$ مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R و $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر ناصفر R باشند.

۲.۴ گراف‌های مقسوم علیه صفر

گراف مقسوم علیه صفر حلقه جابه‌جایی R را با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم که گراف غیر جهت‌دار با رئوس $Z(R)^*$ است .

در این بخش زیرگراف‌های القا شده $\Gamma(Idem(R))$، $\Gamma(vnr(R))$، $\Gamma(\pi - r(R))$، $\Gamma(vnl(R))$ و $\Gamma(cln(R))$ از $\Gamma(R)$ با رئوس $Idem(R) \cap Z(R)^*$، $vnr(R) \cap Z(R)^*$، $\pi - r(R) \cap Z(R)^*$، $vnl(R) \cap Z(R)^*$ و $cln(R) \cap Z(R)^*$ را بررسی می‌کنیم.
برای $Z(R)^* \neq \emptyset$ نشان می‌دهیم $\Gamma(Idem(R)) = \Gamma(R)$ ($\Gamma(vnr(R)) = \Gamma(R)$) اگر و فقط اگر R یک حلقه بولی (فون نیومن منظم) باشد.

---
[۱] Beck

فرض کنیم $nil(R) \subsetneq Z(R)$. نشان می‌دهیم $\Gamma(\pi - r(R)) = \Gamma(R)$ اگر و فقط اگر R یک حلقه‌ی π- منظم باشد.

در هر حلقه‌ی جابه‌جایی R،

$$\Gamma(Idem(R)) \subseteq \Gamma(vnr(R)) \subseteq \Gamma(\pi - r(R)) \subseteq \Gamma(cln(R)) \subseteq \Gamma(R),$$

و

$$\Gamma(vnr(R)) \subseteq \Gamma(vnl(R)) \subseteq \Gamma(cln(R)).$$

توجه ۱.۲.۴. *یک حلقه با بعد صفر (متناهی)، π- منظم است، پس،*

$$\Gamma(\pi - r(R)) = \Gamma(vnl(R)) = \Gamma(cln(R)) = \Gamma(R).$$

تعریف ۲.۲.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد. G را همبند می‌نامیم اگر یک مسیر بین هر دو راس متمایزی G وجود داشته باشد.

تعریف ۳.۲.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد. برای دو راس متمایزی x و y از G، فاصله‌ی بین x و y را با $d(x, y)$ نمایش می‌دهیم که طول کوتاهترین مسیر بین x و y است. توجه کنیم که، $d(x, x) = 0$ و $d(x, y) = \infty$ اگر مسیری بین x و y نباشد.

تعریف ۴.۲.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد. قطر G را با $diam(G)$ نشان می‌دهیم که:

$$diam(G) = \sup\{d(x, y) | \text{باشند } G \text{ رئوسی از } y \text{ و } x\}$$

تعریف ۵.۲.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد. کمر G را با $gr(G)$ نشان می‌دهیم و طول کوتاهترین دور در G است، اگر G شامل یک دور باشد. در غیر این صورت $gr(G) = \infty$.

لم ۶.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد و $x \in R$. در این صورت:*

۱. *اگر $x \in vnr(R) \cap Z(R)^*$ آن‌گاه، $y \in vnr(R) \cap Z(R)^* \setminus \{x\}$ وجود دارد به طوری که $xy = 0$.*

۲. *اگر $x \in \pi - r(R) \cap Z(R)^*$ آن‌گاه، $y \in \pi - r(R) \cap Z(R)^*$ وجود دارد به طوری که $xy = 0$.*

برهان. (۱). فرض کنیم $z \in R$ وجود دارد که $x^2 z = x$. پس $xz \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$ و $y = 1 - xz \in Idem(R) \setminus \{0, 1\}$.

بنابراین $y \in vnr(R) \cap Z(R)^*$ و $xy = x(1 - xz) = x - x^2 z = 0$.

$x \neq y$، زیرا با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۲ قسمت (۳)، x پوچ توان نیست.

(۲). اگر $x \in nil(R)$ واضح است. لذا فرض کنیم x پوچ توان نباشد، پس با توجه به قضیه‌ی ۳.۴.۲، $n \geq 1$ وجود دارد که، $x^n \in vnr(R) \cap Z(R)^*$. لذا با توجه به قسمت (۱)، $z \in vnr(R) \cap Z(R)^*$ وجود دارد که $x^n z = 0$.

فرض کنیم $x^{n-1} z \neq 0$. پس با توجه به قضیه‌ی ۲.۴.۲ قسمت (۳)، $y = x^{n-1} z \in \pi - r(R) \cap Z(R)^*$ و

$$.xy = x(x^{n-1}z) = x^n z = 0$$

□

قضیه ۷.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد، در این صورت:*

۱. $\Gamma(vnr(R))$ *همبند است و* $diam(\Gamma(vnr(R))) \leq 3$.

۲. $gr(\Gamma(vnr(R))) \leq 4$ *اگر* $\Gamma(vnr(R))$ *شامل یک دور باشد.*

برهان. (۱)فرض کنیم x و y عناصر متمایزی در $vnr(R) \cap Z(R)^*$ باشند و $xy \neq 0$. با توجه به لم ۶.۲.۴، $a, b \in vnr(R) \cap Z(R)^*$ وجود دارند که $xa = yb = 0$.
اگر $ab \neq 0$، آنگاه با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۲ قسمت (۲)، $ab \in vnr(R) \cap Z(R)^*$ و بنابراین $x - ab - y$ یک مسیر با طول ۲ از x به y در $\Gamma(vnr(R))$ است.
اگر $ab = 0$، آنگاه $x - a - b - y$ یک مسیر با طول ۳ از x به y در $\Gamma(vnr(R))$ است. بنابراین $\Gamma(vnr(R))$ همبند است و $diam(\Gamma(vnr(R))) \leq 3$.
(۲). فرض کنیم $a - b - c_1 - \cdots - c_n - a$ یک دور در $\Gamma(vnr(R))$ باشد.
اگر $c_1 c_n = 0$، آنگاه $a - b - c_1 - c_n - a$ یک دور به طول ۴ در $vnr(R)$ است.
فرض کنیم $c_1 c_n \neq 0$. $a(c_1 c_n) = b(c_1 c_n) = 0$ پس $a \neq c_1 c_n$ و $b \neq c_1 c_n$. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۲ قسمت (۳)، $c_1 c_n \in vnr(R) \cap Z(R)^*$ و $a - b - c_1 c_n - a$ یک دور به طول ۳ در $\Gamma(vnr(R))$ است. بنابراین $gr(\Gamma(vnr(R))) \leq 4$. □

قضیه ۸.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد، در این صورت:*

۱. $\Gamma(Idem(R))$ *همبند است و* $diam(\Gamma(Idem(R))) \leq 3$.

۲. *اگر* $\Gamma(Idem(R))$ *شامل یک دور باشد آنگاه* $gr(\Gamma(Idem(R))) \leq 4$.

برهان. (۱). مشابه قضیه‌ی ۷.۲.۴ قسمت (۱) است.
برای $x = e$ و $y = f$، $e, f \in Idem(R) \cap Z(R)^*$، فرض کنیم $a = 1 - e$ و $b = 1 - f$.
(۲). اثبات مشابه قضیه‌ی ۷.۲.۴ قسمت (۲) است، چون $Idem(R) \cap Z(R)$ ضربی بسته است و شامل عناصر پوچ توان ناصفر نیست. □

قضیه ۹.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد و* $2 \notin Z(R)$ *و* $\{0, 1\} \subsetneq Idem(R)$. *در این صورت* $\Gamma(R)$ *شامل یک دور به طول ۴ با رئوسی در* $vnr(R)$ *است.*
به خصوص $\Gamma(vnr(R))$، $\Gamma(\pi - r(R))$، $\Gamma(vnl(R))$ *و* $\Gamma(cln(R))$ *کمر بیشتر از ۴ دارند.*

برهان. فرض کنیم $e \in Idem(R) \backslash \{0, 1\}$، آنگاه $e, 1 - e \in vnr(R) \cap Z(R)^*$. $2 \notin Z(R)$، لذا e، $-e$، $1 - e$ و $e - 1 = -(1 - e)$ عناصر متمایزی در $vnr(R) \cap Z(R)^*$ می‌باشند.

$$e - (1 - e) - (-e) - (e - 1) - e$$

یک دور به طول ۴ است. قسمت ”به خصوص“ گزاره واضح است. □

توجه ۱۰.۲.۴. *فرض کنیم* $x, y \in Z(R)^*$ *متمایز باشند و* $xy = 0$ و $y \notin nil(R)$.
اگر $2 \notin Z(R)$*، آن‌گاه* $x - y - (-x) - (-y) - x$ *یک دور به طول ۴ در* $\Gamma(R)$ *است. قضیه‌ی* ۹.۲.۴ *حالت خاص با* $x = e$ *و* $y = (1 - e)$ *برای* $e \in Idem(R)\backslash\{0, 1\}$ *است.*

قضیه ۱۱.۲.۴. *فرض کنیم* R *یک حلقه جابه‌جایی باشد،* $x \in nil(R)^*$ *و* $y \in Z(R)^*$. *در این صورت در* $\Gamma(R)$*،* $d(x, y) \leq 2$.

برهان. فرض کنیم $y \neq x$. از آنجا که $y \in Z(R)^*$ و $xy \neq 0$، $z \in Z(R)^*\backslash\{x\}$ وجود دارد که $yz = 0$. فرض کنیم n کوچکترین مقدار مثبتی باشد که $x^n z = 0$. بنابراین $x - x^{n-1}z - y$ مسیری به طول ۲ از x به y است. □

قضیه ۱۲.۲.۴. *فرض کنیم* R *یک حلقه جابه‌جایی باشد و* $x, y \in nil(R)^*$ *عناصری متمایز باشند و* $xy \neq 0$. *در این صورت مسیری به طول ۲ از* x *به* y *در* $\Gamma(R)$ *وجود دارد.*

برهان. با توجه به فرض $xy \neq 0$ و $x \in nil(R)^*$. لذا فرض کنیم $n \geq 2$ کمترین مقدار مثبتی باشد که $x^n y = 0$. پس $x^{n-1}y \neq 0$ و $y \in nil(R)^*$.
فرض کنیم $m \geq 2$ کمترین مقدار مثبتی باشد که $x^{n-1}y^m = 0$، بنابراین $0 \neq x^{n-1}y^{m-1} \in nil(R)$.
$x - x^{n-1}y^{m-1} - y$ مسیری به طول ۲ از x به y در $\Gamma(R)$ است. □

قضیه ۱۳.۲.۴. *فرض کنیم* R *یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد.* $S \subseteq R$ *طوری باشد که* $nil(R)$ *یک ایده‌آل اول* R *باشد و* $nil(R)^* \subseteq S$. *در این صورت* $\Gamma(S)$ *همبند است و* $diam(\Gamma(S)) \leq 3$ *و* $gr(\Gamma(S)) \leq 4$ *اگر* $\Gamma(S)$ *شامل یک دور باشد.*

برهان. فرض کنیم $a, b \in S \cap Z(R)^*$ و $ab \neq 0$ و $a \in nil(R)^*$. لذا $w \in nil(R)^*$ وجود دارد که $a - w - b$ یک مسیر از a به b در $\Gamma(S)$ است.
حال فرض کنیم $a, b \notin nil(R)$. $nil(R)$ یک ایده‌آل اول R و $a, b \in Z(R)^*$ لذا $c, d \in nil(R)^*$ وجود دارند به طوری که $ac = bd = 0$.
اگر $c = d$ آن‌گاه $a - c - b$ یک مسیر از a به b در $\Gamma(S)$ است.
اگر $cd \neq 0$ آن‌گاه $a - cd - b$ یک مسیر از a به b در $\Gamma(S)$ است. اگر $cd = 0$ و $c \neq d$، آن‌گاه $a - c - d - b$ یک مسیر در $\Gamma(S)$ است. بنابراین $diam(\Gamma(S)) \leq 3$.
حال فرض کنیم که $c_1 - c_2 - \cdots - c_n - c_1$ یک دور در $\Gamma(S)$ و $c_i \in nil(R)^*$. فرض کنیم $c_2, c_n \in nil(R)^*$ در این صورت، $w \in nil(R)^*$ وجود دارد به طوری که $c_2 - w - c_n$ یک مسیر در $\Gamma(S)$ است. بنابراین $c_1 - c_2 - w - c_n - c_1$ یک دور به طول ۴ در $\Gamma(S)$ است.
حال فرض کنیم تعدادی از c_iها پوچ توان نباشند، مثلا $c_1 \notin nil(R)^*$. چون $nil(R)$ یک ایده‌آل اول R است و $c_2, c_n \in nil(R)^*$، لذا $h \in nil(R)^*$ وجود دارد به طوری که $c_2 - h - c_n$ یک مسیر در $\Gamma(S)$ است.
بنابراین $c_1 - c_2 - h - c_n - c_1$ یک دور به طول ۴ در $\Gamma(S)$ است. پس $gr(\Gamma(S)) \leq 4$. □

نتیجه ۱۴.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و $nil(R)$ یک ایده‌آل اول R باشد،در این صورت:*

۱. $\Gamma(vnl(R))$ *همبند است و* $diam(\Gamma(vnl(R))) \leq ۳$*. اگر* $\Gamma(vnl(R))$ *شامل یک دور باشد آنگاه* $gr(\Gamma(vnl(R))) \leq ۴$*.*

۲. $\Gamma(cln(R))$ *همبند است و* $diam(\Gamma(cln(R))) \leq ۳$*. اگر* $\Gamma(cln(R))$ *شامل یک دور باشد آنگاه* $gr(\Gamma(cln(R))) \leq ۴$*.*

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳ قسمت (۳)، قضیه‌ی ۱.۳.۳ قسمت (۱) و

$$nil(R) \subseteq vnl(R) \subseteq cln(R),$$

با قرار دادن $S = vnl(R)$ در ۱ و $S = cln(R)$ در ۲ نشان داده می‌شود. □

۳.۴ $\Gamma(R)$ و $\Gamma(T(R))$ یکریخت می‌باشند.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم G و G' دو گراف باشند. G و G' یکریخت هستند و با $G \cong G'$ نشان می‌دهیم، در صورتی که یک نگاشت دو سویی $\mathcal{E} : G \to G'$ از رئوس وجود داشته باشد به طوری که رئوس x و y در G مجاورند اگر وفقط اگر $\mathcal{E}(x)$ و $\mathcal{E}(y)$ در G' مجاور باشند.

قضیه ۲.۳.۴. *فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ و $\{B_j\}_{j\in J}$ دو خانواده از حوزه‌های صحیح باشند و فرض کنیم* $A = \prod_{i\in I} A_i$ *و* $B = \prod_{j\in J} B_j$*. در این صورت* $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$ *اگر و فقط اگر یک نگاشت دو سویی* $\mathcal{E} : I \to J$ *وجود داشته باشد به طوری که برای هر* $i \in I$*،* $|A_i| = |B_{\mathcal{E}(i)}|$*.*

برهان. به مرجع [۱۱] قضیه ۲.۱ رجوع کنید. □

تعریف ۳.۳.۴. برای هر $x, y \in R$، $x \sim y$ اگر و فقط اگر $ann(x) = ann(y)$. به وضوح $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی R است.

قضیه ۴.۳.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی با حلقه‌ی خارج قسمتی تام $T(R)$ باشد، در این صورت گراف‌های $\Gamma(T(R))$ و $\Gamma(R)$ یکریخت هستند.*

برهان. فرض کنیم $S = R - Z(R)$ و $T = T(R)$. رابطه‌ی هم ارزی روی $Z(R)^*$ و $Z(T)^*$ را با $\sim_R$ و $\sim_T$ و کلاس‌های هم ارزی مربوط را با $[a]_R$ و $[a]_T$ نشان می‌دهیم. توجه کنیم که،

$$ann_T(x/s) = ann_R(x)_S$$

و

$$ann_T(x/s) \cap R = ann_R(x).$$

بنابراین

$$x/s \sim_T x/t, \quad x \sim_R y \Leftrightarrow x/s \sim_T y/s,$$

و برای هر $x, y \in Z(R)^*$ و $s, t \in S$

$$([x]_R)_S = [x/۱]_T,\ [x/s]_T \cap R = [x]_R.$$

و از آنجا که $Z(T) = Z(R)_S$، داریم، $Z(R)^* = \cup_{\alpha \in A}[a_\alpha]_R$ و $Z(T)^* = \cup_{\alpha \in A}[a_\alpha/۱]_T$ و $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset R$.

حال نشان می‌دهیم $|[a]_R| = |[a/۱]|_T$ که $a \in Z(R)^*$. اگر $[a]_R$ متناهی باشد آن‌گاه

$$[a]_R \subset [a/۱]_T,$$

رابطه‌ی "$\subseteq$" واضح است، کافی است نشان دهیم $[a/۱]_T \subseteq [a]_R$.
فرض می‌کنیم $x \in [a/۱]_T$، در این صورت $x = b/s$ و $b \in [a]_R$ و $s \in S$.
چون $\{s^n b | n \geq ۱\} \subset [a]_R$ متناهی است، $b = s^i b$ برای مقدار صحیح $i > ۱$ است. پس،

$$b/s = s^i b/s = s^{i-۱} b \in [a]_R$$

و لذا تساوی برقرار است.

حال فرض کنیم $[a]_R$ نامتناهی باشد. به وضوح $|[a]_R| \leq |[a/۱]_T|$. یک رابطه‌ي هم ارزی $\approx$ روی S تعریف می‌کنیم به طوری که $s \approx t$ اگر و فقط اگر $sa = ta$.
پس $s \approx t$ اگر و فقط اگر $sb = tb$ برای هر $b \in [a]_R$. نگاشت $[a]_R \times S/\approx \to [a/۱]_T$ که $(b, [s]) \to b/s$ خوش‌تعریف و سورژکتیو است لذا $|[a/۱]_T| \leq |[a]_R||S/\approx|$.
همچنین نگاشت $[a]_R \to S/\approx$ که $s \to sa$ خوش‌تعریف و انژکتیو است لذا $|S/\approx| \leq [a]_R$ و بنابراین $|[a]_R| = |[a]_R|^۲ \geq |[a/۱]_T|$، زیرا $|[a]_R|$ نامتناهی است.
لذا $|[a]_R| = |[a/۱]_T|$ و یک نگاشت دو سویی $\mathcal{E}_\alpha : [a_\alpha]_R \to [a_\alpha/۱]_T$ برای هر $\alpha \in A$ وجود دارد.

حال $\mathcal{E} : Z(R)^* \to Z(T)^*$ را با ضابطه $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_\alpha(x)$ تعریف می‌کنیم که $x \in [a_\alpha]_R$.
نگاشت $\mathcal{E}$ دوسویی است. لذا کافی است نشان دهیم که x و y در $\Gamma(R)$ مجاور هستند اگر و فقط اگر $\mathcal{E}(x)$ و $\mathcal{E}(y)$ در $\Gamma(T)$ مجاور باشند یا $xy = ۰$ اگر و فقط اگر $\mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y) = ۰$. فرض کنیم $x \in [a]_R$ و $y \in [b]_R$ و $z \in [b/۱]_T$ و $w \in [a/۱]_T$.
کافی است نشان دهیم $xy = ۰$ اگر و فقط اگر $wz = ۰$. توجه کنیم که،

$$ann_T(x) = ann_T(a) = ann_T(w)$$

و

$$ann_T(y) = ann_T(b) = ann_T(z)$$

لذا

$$\begin{aligned} xy = \circ &\Rightarrow y \in ann_T(x) = ann_T(w) \\ &\Leftrightarrow yw = \circ \\ &\Leftrightarrow w \in ann_T(y) = ann_T(z) \\ &\Leftrightarrow wz = \circ. \end{aligned}$$

پس $\Gamma(R)$ و $\Gamma(T(R))$ گراف‌هایی یکریخت هستند. □

نتیجه ۵.۳.۴. *فرض کنیم A و B حلقه‌هایی جابه‌جایی و با حلقه‌های خارج قسمتی تام یکریخت باشند. در این صورت $\Gamma(A)$ و $\Gamma(B)$ گراف‌هایی یکریخت هستند. به خصوص $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$ اگر دارای حلقه‌های خارج قسمتی تام یکریخت باشند.*

نتیجه ۶.۳.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری جابه‌جایی تقلیل یافته باشد به طوری که،*

$$Minspec(R) = \{P_۱, \cdots, P_n\}$$

در این صورت $\Gamma(R) \cong \Gamma(K_۱ \times \cdots \times K_n)$ که هر $K_i = T(R/P_i)$ میدان است.

برهان. به مرجع [۱۱] قضیه ۲.۵ رجوع کنید. □

نتیجه ۷.۳.۴. *فرض کنیم A و B حلقه‌های نوتری جابه‌جایی تقلیل یافته باشند که حوزه‌ی صحیح نباشند. در این صورت:*

$\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$ اگر و فقط اگر یک نگاشت دو سویی $\mathcal{E} : Minspec(A) \to Minspec(B)$ وجود داشته باشد به طوری که $|A/P| = |B/\mathcal{E}(P)|$ (برای هر $P \in Minspec(A)$).

برهان. فرض کنیم $Minspec(A) = \{P_۱, \cdots, P_m\}$ و $Minspec(B) = \{Q_۱, \cdots, Q_n\}$. قرار می‌دهیم، $T(A/P_i) = K_i$ و $T(B/Q_j) = L_j$.
بنابراین با توجه به نتیجه‌ی ۶.۳.۴، $\Gamma(A) \cong \Gamma(K_۱ \times \cdots \times K_m)$ و $\Gamma(B) \cong \Gamma(L_۱ \times \cdots \times L_n)$.

$\Leftarrow$. فرض کنیم $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$، با توجه به قضیه‌ی ۲.۳.۴، $m = n$ و یک جایگشت P از $\{۱, \cdots, n\}$ وجود دارد به طوری که $|A/P_i| = |K_i| = |L_{P(i)}| = |B/Q_{P(i)}|$ و $۱ \leq i \leq n$. به وضوح P، لزوم دو سویی بودن $\mathcal{E}$ را القا می‌کند.

$\Rightarrow$. فرض کنیم که یک نگاشت دو سویی $\mathcal{E}$ وجود داشته باشد. پس طبق قضیه‌ی ۲.۳.۴،

$$\Gamma(K_۱ \times \cdots \times K_m) \cong \Gamma(L_۱ \times \cdots \times L_m),$$

و بنابراین $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$.

توجه کنیم که اگر A و B هر دو حوزه‌ی صحیح باشند، در این صورت:

$$\Gamma(A) = \emptyset = \Gamma(B).$$

□

۴.۴ گراف‌های مکمل

تعریف ۱.۴.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد، برای دو راس a و b در G، $a \leq b$ اگر a و b مجاور نباشند و هر راس G که به b مجاور است به a نیز مجاور باشد.

تعریف ۲.۴.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد، برای دو راس a و b در G، $a \sim b$ اگر $a \leq b$ و $b \leq a$.

بنابراین در $\Gamma(R)$، $a \sim b$ اگر و فقط اگر $ann(a) - \{a\} = ann(b) - \{b\}$.

تعریف ۳.۴.۴. a و b را متعامد می‌نامیم و با $a \perp b$ نشان می‌دهیم هرگاه a و b مجاور باشند و هیچ راس c از G که به هر دو مجاور باشد وجود نداشته باشد. یعنی یال $a - b$ بخشی از مثلث در G نباشد. لذا برای دو مقدار مجزای $a, b \in Z(R)^*$ در $\Gamma(R)$، $a \perp b$ اگر و فقط اگر $ab = \circ$ و

$$ann(a) \cap ann(b) \subset \{\circ, a, b\}$$

تعریف ۴.۴.۴. گراف G را گراف مکمل می‌گوییم هرگاه برای هر راس a در G، راس b در G وجود داشته باشد که $a \perp b$.

تعریف ۵.۴.۴. گراف G رابه طور منحصر به فرد گراف مکمل می‌گوییم هرگاه G گراف مکمل باشد و اگر $a \perp b$ و $a \perp c$ آن‌گاه $b \sim c$.

لم ۶.۴.۴. *گزاره‌های زیر را برای یک حلقه‌ی جابه‌جایی R و $a, b \in Z(R)^*$، در نظر بگیریم:*

۱. $a \sim b$.

۲. $aR = bR$.

۳. $ann(a) = ann(b)$.

در این صورت:

a) اگر R تقلیل یافته باشد آنگاه گزاره‌های (۱) و (۳) معادلند.

b) اگر R فون نیومن منظم باشد آن‌گاه، سه گزاره‌ی بالا معادلند.

برهان. (a). $a \sim b$ اگر و فقط اگر $ann(a) - \{a\} = ann(b) - \{b\}$. اگر R تقلیل یافته باشد آنگاه (۱) و (۳) معادلند.
(b). فرض کنیم R فون نیومن منظم باشد، چون حلقه‌ی فون نیومن منظم تقلیل یافته است کافی است ثابت کنیم (۳) $\Leftrightarrow$ (۲).
(۳) $\Rightarrow$ (۲). برای هر حلقه‌ی جابه‌جایی واضح است.
(۲) $\Rightarrow$ (۳). فرض کنیم $c \in R$ وجود دارد که $a = a^{۲}c$. از طرفی،

$$1-ac\in ann(a)=ann(b)$$

زیرا:

$$a(1-ac)=a-a^2c=a-a=0$$

چون $b(1-ac)=0$، پس $b=bac$. لذا $b\in aR$. بنابراین $bR\subset aR$ و به طور مشابه $aR\subset bR$. □

توجه ۷.۴.۴. *در هر حلقه‌ی فون نیومن منظم* $a\le b$ *اگر و فقط اگر* $aR\subset bR$ *اگر و فقط اگر* $ann(b)\subset ann(a)$.

لم ۸.۴.۴. *فرض کنیم* R *یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد و* $a,b\in Z(R)^*$. *در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. $a\perp b$ و $a^2\neq 0$ و $b^2\neq 0$.

۲. $ab=0$ و $a+b$ *یک عنصر منظم از* R *است.*

برهان. (۲) $\Rightarrow$ (۱). اگر (۱) برقرار باشد، آن‌گاه $ab=0$ زیرا $a\perp b$ است. فرض کنیم $c\in R$ وجود دارد که $(a+b)c=0$. حال اگر $y=ac=-bc$، آن‌گاه $ya=yb=0$، لذا $y\in\{0,a,b\}$ زیرا $a\perp b$.

اگر $y=a$ آن‌گاه $a^2=ay=0$ و اگر $y=b$، $b^2=0$، که تناقض است. لذا $y=0$. پس $ac=bc=0$ و $c\in\{0,a,b\}$ زیرا $a\perp b$.

اگر $c=a$ آن‌گاه، $a^2=ac=0$ و به طور مشابه $b^2=0$ اگر $c=b$. پس $c=0$ و لذا $a+b$ یک عنصر منظم از R است.

(۱) $\Rightarrow$ (۲). $a\neq b$ را در نظر می‌گیریم. چون $a+b$ یک عنصر منظم از R است، اگر $a^2=0$ آن‌گاه، $a(a+b)=a^2+ab=0$ باشد و $a=0$ که یک تناقض است. بنابراین $a^2\neq 0$ و به طور مشابه $b^2\neq 0$.

فرض کنیم $c\in R$ وجود دارد که $ca=cb=0$. پس $c(a+b)=0$. لذا $c=0$ زیرا $a+b$ عنصر منظم از R است و چون $ab=0$ لذا $a\perp b$. □

لم ۹.۴.۴. *فرض کنیم* R *یک حلقه‌ی جابه‌جایی تقلیل یافته باشد و* $a,b,c\in Z(R)^*$. *اگر* $a\perp b$ *و* $a\perp c$ *آن‌گاه* $b\sim c$ *(بنابراین* $\Gamma(R)$ *منحصر به فرد مکمل است اگر و فقط اگر* $\Gamma(R)$ *مکمل باشد).*

برهان. چون $a\perp b$ و $a\perp c$، لذا $ab=ac=0$. ابتدا نشان می‌دهیم $bc\neq 0$ بنابراین b و c مجاور نیستند. اگر $bc=0$، آن‌گاه $c=a$ یا $b=a$، زیرا $a\perp b$ و $a\perp c$ و متناقض با این است که R تقلیل یافته است. بنابراین $bc\neq 0$.

حال فرض کنیم $d\in Z(R)^*$ وجود دارد که $db=0$ ، در این صورت

$$(dc)b = (db)c = \circ \text{ و } (dc)a = d(ac) = \circ$$

اگر $dc \neq \circ$، آنگاه ایجاب می‌کند که راس dc مجاور به a و b است. (R تقلیل یافته است، لذا aیا$b \neq dc$) و این تناقض دارد با آن‌که $a \perp b$.

لذا $dc = \circ$ و بنابراین $c \leq b$. به طور مشابه $b \leq c$ و لذا $b \sim c$. □

توجه ۱۰.۴.۴. *فرض کنیم R فون نیومن منظم باشد. در این صورت برای هر $a \in Z(R)^*$، $a = ue$ به طوری که $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$. به وضوح $(1-e) \perp ue$. بنابراین یک حلقه‌ی فون نیومن منظم R، $\Gamma(R)$ مکمل دارد.*

از آن‌جا که یک حلقه‌ی فون نیومن منظم R تقلیل یافته است، لذا $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل است. با توجه به قضیه‌ی ۴.۳.۴، $\Gamma(R) \cong \Gamma(T(R))$ و اگر $T(R)$ فون نیومن منظم باشد به طور منحصر به فرد گراف مکمل است.

تعریف ۱۱.۴.۴. $T(R)$ فون نیومن منظم است اگر و فقط اگر برای هر $x \in R$، $y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xy = \circ$ و $x + y$ یک عنصر منظم R باشد.

قضیه ۱۲.۴.۴. *گزاره‌های زیر برای یک حلقه‌ی جابه‌جایی تقلیل یافته‌ی R معادلند:*

۱. *$T(R)$ فون نیومن منظم است.*

۲. *$\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل است.*

۳. *$\Gamma(R)$، گراف مکمل است.*

برهان. $(۲) \Rightarrow (۱)$. فرض کنیم $T(R)$ فون نیومن منظم و $a \in Z(R)^*$ باشد. $b \in T(R)$ وجود دارد (لزوما ناصفر) به طوری که $a \perp b$ در $\Gamma(T(R))$ است.

$s \in R - Z(R)$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $sb \in R$ و در $\Gamma(R)$، $a \perp sb$. بنابراین $\Gamma(R)$ گراف مکمل است و چون حلقه‌ی R تقلیل یافته است به طور منحصر به فرد گراف مکمل است.

$(۳) \Rightarrow (۲)$. برای هر گراف برقرار است.

$(۱) \Rightarrow (۳)$. فرض کنیم $x \in Z(R)^*$، پس $y \in Z(R)^*$ وجود دارد به طوری که $x \perp y$. با توجه به لم ۸.۴.۴، $xy = \circ$ و $x + y$ عنصری منظم از R است، بنابراین $T(R)$ فون نیومن منظم است ([۴]، قضیه‌ی ۲.۳). □

تعریف ۱۳.۴.۴. راس گراف R را پایان می‌نامیم هرگاه فقط یک راس مجاور داشته باشد.

لم ۱۴.۴.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی با $nil(R)$ غیر صفر باشد،در این صورت:*

a) اگر $\Gamma(R)$، گراف مکمل باشد، آن‌گاه $|R| = ۸$ یا $|R| = ۹$ و یا $|R| > ۹$ و $nil(R) = \{\circ, x\}$، $\circ \neq x \in R$.

b) اگر $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل باشد و $|R| > ۹$ آن‌گاه هر مکمل عنصر پوچ توان ناصفر R، یک پایان است.

برهان. (a). فرض کنیم $\Gamma(R)$ گراف مکمل باشد و $a \in nil(R)$ با شاخص پوچ توان $n \geq ۳$ باشد. فرض کنیم $y \in Z(R)^*$ مکمل a باشد.پس $a^{n-۱}a = ۰ = a^n$. لذا $y = a^{n-۱}$، زیرا $y \perp a$ و $ann(a) = \{۰, a^{n-۱}\}$ است.

به طور مشابه $a^i \perp a^{n-۱}$، $۱ \leq i \leq n - ۲$. حال فرض کنیم $n > ۳$، در این صورت $a^{n-۲} + a^{n-۱}$، $a^{n-۲}$ و $a^{n-۱}$ را صفر می‌کند که تناقض دارد، زیرا $a^{n-۲} \perp a^{n-۱}$ و $a^{n-۲}+a^{n-۱} \notin \{۰, a^{n-۲}, a^{n-۱}\}$.

بنابراین اگر یک عنصر پوچ توان با شاخص $n \geq ۳$ داشته باشیم آن‌گاه، $n = ۳$ است.

در این مورد $Ra^۲ = \{۰, a^۲\}$. از طرفی $a \perp a^۲$ و $ann(a^۲) = \{۰, a, a^۲, a + a^۲\}$ ، زیرا اگر $za^۲ = ۰$ انگاه، $za \in ann(a) = \{۰, a^۲\}$. لذا $za = ۰$ یا $za = a^۲$.

اگر $za = ۰$ آن‌گاه $z = ۰$ یا $z = a^۲$ و اگر $za = a^۲$ آن‌گاه، $(z-a)a = ۰$ ولذا $z = a$ یا $z = a+a^۲$.

بنابراین R حلقه موضعی و $|R| = ۸$ و $ann(a^۲) = nil(R) = Z(R)$ ایده‌آل ماکسیمال است و $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره‌ای با مرکز $a^۲$ و دو یال است.

حال فرض کنیم هر عنصر پوچ توان ناصفر R شاخص پوچ ۲ داشته باشد و $۰ \neq y \in nil(R)$ و $z \in Z(R)^*$ مکمل آن باشد. برای هر $r \in R$، $(ry)z = ۰ = (ry)y$.

بنابراین $Ry \subset \{۰, y, z\}$. حال فرض کنید $۲y \neq ۰$. چون $۲y \in Ry$ است لزوما $z = ۲y$ و $ann(y) = \{۰, y, ۲y\}$، زیرا $۲y \perp y$. بنابراین $Ry = \{۰, y, ۲y\}$. لذا $|R| = ۹$ و R حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال

$$Z(R) = nil(R) = ann(y),$$

است و $\Gamma(R)$ گراف ستاره‌ای با یک یال است.

حال فرض کنیم هر عنصر پوچ توان ناصفر R دارای شاخص پوچ ۲ و $|R| \neq ۹$. نشان می‌دهیم $nil(R) = \{۰, y\}$.

فرض کنیم z عنصر پوچ توان ناصفر دیگری از R باشد، بنابراین $z^۲ = ۰$. پس $y + z$ پوچ توان از شاخص ۲ است. با توجه به بالا $Ry \subset \{۰, y, y'\}$ و $Rz \subset \{۰, z, z'\}$ که y' و z' مکمل y و z می‌باشند. $yz = ۰$، زیرا اگر $yz \neq ۰$ آن‌گاه $yz = y' = z'$.

بنابراین $Ry = ann(y) = \{۰, y, yz\}$ و $|R| = ۹$ که تناقض است. پس $y + z$ عنصر پوچ توان با شاخص ۲ است.

حال فرض کنیم w مکمل $y + z$ باشد. بنابراین w، y یا z است. $wy = y$ یا $wy = y'$، زیرا در غیر این صورت y، w و $y + z$ را صفر می‌کند.

اگر y' مضربی از y باشد بنابراین $|R| = ۹$ و تناقض است. بنابراین $wy = y$ و به طور مشابه $wz = z$. اما،

$$w(y + z) = wy + wz = y + z$$

که تناقض دارد با آن که $w \perp (y + z)$. بنابراین R یک عنصر پوچ توان ناصفر منحصر به فرد دارد.

(b). فرض کنیم $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل باشد و $|R| > ۹$ و x عنصر پوچ توان ناصفر یکتا در R باشد. (با توجه به قسمت (a)) فرض کنیم y مکمل x باشد. ابتدا نشان می‌دهیم $x + y$ نیز مکمل x است.

به وضوح $x(x+y)=0$، زیرا $x^2=0$ و $x\perp y$. لذا $x+y\in Z(R)^*$. حال فرض کنیم $w\in Z(R)^*$ ای وجود دارد که، $wx=0=w(x+y)$ پس $wy=0$. لذا $w=y$ یا $w=x$ زیرا $x\perp y$.
اگر $w=y$ آن‌گاه $y^2=0$، تناقض است. لذا $w=x$ و بنابراین $x\perp(x+y)$. با توجه به یکتایی مکمل $x+y\sim y$. حال نشان می‌دهیم y پایان است.

فرض کنیم $zy=0$ و $z\in Z(R)^*-\{x\}$. $z\neq y$ زیرا $y^2\neq 0$ و $z(x+y)=0$ زیرا $x+y\sim y$. بنابراین $zx=0$ زیرا $zy=0$ که با $x\perp y$ تناقض دارد. بنابراین چنین zای وجود ندارد و y پایان است. □

نتیجه ۱۵.۴.۴. *اگر $\Gamma(R)$، گراف مکمل باشد و $|nil(R)|>2$ آن‌گاه $|R|=8$ ($|nil(R)|=4$) یا $|R|=9$ ($|nil(R)|=3$).*

قضیه ۱۶.۴.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی با $nil(R)$ ناصفر باشد. اگر $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل باشد آن‌گاه $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره‌ای با یک یا دو یال است یا $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره‌ای نامتناهی با مرکز x است که $nil(R)=\{0,x\}$.*

برهان. فرض کنیم $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل و $nil(R)$ ناصفر باشد. اگر $|R|\leq 9$ آن‌گاه با توجه به لم ۱۴.۴.۴ قسمت (a)، $|R|=8$ یا $|R|=9$.
در این مورد $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره‌ای با یک یا دو یال است. بنابراین فرض می‌کنیم که $|R|>9$ باشد، بنابراین با توجه به لم ۱۴.۴.۴، $nil(R)=\{0,x\}$ و $0\neq x\in R$.
ابتدا نشان می‌دهیم $\Gamma(R)$ نامتناهی است. فرض کنیم $c\in Z(R)^*$ یک مکمل x باشد، با توجه به لم ۱۴.۴.۴، $ann(c)=\{0,x\}$. c^2 نیز مکمل x است زیرا در غیر این صورت
$y\in Z(R)^*-\{c^2,x\}$ وجود دارد به طوری که $c^2y=0=xy$. بنابراین $(cy)^2=c^2y^2=0$، لذا $cy=0$ یا $cy=x$.
اگر $cy=0$ آن‌گاه $y\in ann(c)=\{0,x\}$ که تناقض است. بنابراین $cy=x$. اما $cy^2=xy=0$، لذا $y^2\in ann(c)=nil(R)$ و $y\in nil(R)=\{0,x\}$ که تناقض است.
پس $c^2\perp x$ و $ann(c^2)=\{0,x\}$. بنابراین برای مقادیر $n\geq 1$، $c^{2^n}\perp x$. لذا $ann(c^n)=\{0,x\}$ برای مقادیر صحیح $n\geq 1$. پس هر c^n یک پایان است.
حال نشان می‌دهیم c^nها متمایز هستند. فرض کنیم $c^i=c^j$ برای $1\leq i<j$. لذا،

$$c^i(c^{j-i}-1)=0.$$

بنابراین $c^{j-i}-1=x$. زیرا $ann(c^i)=ann(c)$. چون $x\in nil(R)$ لذا $c\in U(R)$ که یک تناقض است. بنابراین $\Gamma(R)$ نامتناهی است.
در ادامه نشان می‌دهیم $\Gamma(R)$ گراف ستاره‌ای نامتناهی با مرکز x است. فرض کنیم c مکمل x باشد، لذا $ann(c)=\{0,x\}$ زیرا c پایان است.
فرض کنیم $\Gamma(R)$ گراف ستاره‌ای نباشد، با توجه به لم ۱۴.۴.۴ قسمت (b)، $a\in Z(R)^*-\{c,x\}$

وجود دارد که $ax = ۰$ به طوری که a مکمل x نباشد. بنابراین $\{۰, x\}$ به طور کامل مشمول $ann(a)$ است.

با توجه به فرض، $y \in Z(R)^*$ وجود دارد که $a \perp y$. و توجه کنیم که c، y، x و a متمایز هستند، به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که $cy \in Z(R) - \{۰, a, x, y, c\}$. با توجه به فرض،

$$a(cy) = (ay)c = ۰ \text{ و } x(cy) = (xc)y = ۰.$$

لذا $z \in Z(R)^*$ وجود دارد به طوری که $z \perp cy$ و $z \notin \{۰, a, c, x, y, cy\}$.
اگر $zx = ۰$ آن‌گاه $(cy)x = ۰ = zx$ و لذا z و cy متعامد نیستند و تناقض است.
بنابراین فرض می‌کنیم $zx \neq ۰$ در این صورت $zx = x$، زیرا $zx \in nil(R) = \{۰, x\}$.
همچنین $(zy)c = z(cy) = ۰$ زیرا $z \perp cy$. از طرفی $ann(c) = \{۰, x\}$ پس $zy = ۰$ یا $zy = x$.
اگر $zy = ۰$ آن‌گاه،

$$xy = (zx)y = (zy)x = ۰$$

و با $ax = ۰$ و $y \perp a$ تناقض دارد. به طور مشابه اگر $zy = x$ آنگاه،

$$(zx)y = (zy)x = x^{۲} = ۰$$

و لذا $xy = (zx)y = ۰$ که با $a \perp y$ تناقض دارد. بنابراین $\Gamma(R)$ گراف ستاره‌ای نامتناهی با مرکز x است. $\square$

نتیجه ۱۷.۴.۴. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ به طور منحصر به فرد گراف مکمل است اگر و فقط اگر $T(R)$ فون نیومن منظم باشد یا $\Gamma(R)$ گراف ستاره‌ای باشد.*

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۱۲.۴.۴ برای حلقه‌های تقلیل یافته و قضیه‌ی ۱۶.۴.۴ برای عناصر پوچ توان ناصفر نشان داده می‌شود. $\square$

علائم

بعد حلقه R .... $dim(R)$
پوچساز R- مدول M .... $ann(M)$
تضعیف آمیخته حلقه R و ایده‌آل I .... $R \bowtie I$
توسیع حلقه‌ی R توسط R- مدول M .... $R(+)M$
حلقه چندجمله‌ایها روی R .... $R[X]$
حلقه سریهای توانی روی R .... $R[[X]]$
حلقه R، π-منظم است .... $\pi - r(R)$
حلقه R فون نیومن منظم است. .... $vnr(R)$
حلقه R فون نیومن موضعی است. .... $vnl(R)$
حلقه خارج قسمتی تام .... $T(R)$
رادیکال اول R .... $rad(R)$
رادیکال جیکوبسون R .... $J(R)$
سورژکتیو .... $surjective$
عناصر غیر صفر حلقه R .... R^*
قطر گراف حلقه R .... $diam(R)$
گراف حلقه R .... $\Gamma(R)$
کمر گراف حلقه R .... $gr(R)$
متعامد .... $\perp$
مشخصه حلقه R .... $char(R)$
مجموعه تمام ایده‌آلهای اول حلقه R .... $Spec(R)$
مجموعه تمام عناصر تمیز حلقه R .... $cln(R)$
مجموعه تمام عناصر خودتوان حلقه R .... $Idem(R)$
مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان حلقه R .... $Nil(R)$
مجموعه تمام عناصر یکه حلقه R .... $U(R)$
مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان غیر صفر حلقه R .... $Nil(R)^*$
مجموعه تمام مقسوم علیه‌های صفر حلقه R .... $Z(R)$
مجموعه تمام مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر حلقه R .... $Z(R)^*$

مراجع

[1] E. Abu Osba, M. Henrikson and O. Alkam, Combining local and von Neumann regular rings, Comm. Algebra 32 (2004) 2639–2653.

[2] E. Abu Osba, M. Henrikson O. Alkam and F.A. Smith, The maximal regular ideal of some commutative rings, Comment. Math. Univ. Carolin. 47 (2006) 1–10.

[3] M.S. Ahn and D.D. Anderson, Weakly clean rings and almost clean rings, Rocky Moun- tain J. Math. 30 (2006) 783–798.

[4] D.F. Anderson and A. Badawi, Divisibility conditions in commutative rings with zero-divisors, Comm. Algebra 30 (2002) 4031–4047.

[5] D.F. Anderson and A. Badawi, On the zero-divisor graph of a ring, Comm. Algebra 36 (2008) 3073–3092.

[6] D.F. Anderson and A. Badawi, Von Neumann regular and related elements in commutative rings. Algebra Colloquium. 19. No. spec01. (2012) 1017-1040

[7] D.D. Anderson and M. Naseer, Beck's coloring of a commutative ring, J. Algebra 159 (1993) 500–514.

[8] D.D. Anderson and M. Winders, Idealization of a module, J. Commutative Algebra 1 (2009) 3-56.

[9] D.F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve and P. Livingston, The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring, II, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 220, Marcel Dekker, New York, Basel, 2001, pp. 61–72.

[10] D.F. Anderson, M.C. Axtell and J.A. Stickles, Zero-divisor graphs in commutative rings, in: Recent Developments in Commutative Algebra, Noetherian and Non-Noetherian Perspectives, Springer-Verlag, New York, 2011, pp. 23–45.

[11] D.F. Anderson, Roh Levy and Jay Shapiro, Zero-divisor graphs, Von Neumann regular rings, and Boolean algebras, Journal of Pure and Applied Algebra 180, 221-241.

[12] M. D'Anna and M. Fontana, An amalgamated duplication of a ring along an ideal: the basic properties, J. Algebra Appl. 6 (2007) 443–459.

[13] M. D'Anna and M. Fontana, The amalgamated duplication of a ring along a multiplicative- canonical ideal, Ark. Mat. 45 (2007) 241–252.

[14] F. DeMeyer and K. Schneider, Automorphisms and zero-divisor graphs of commutative rings, Internat. J. Commutative Rings 1 (3) (2002) 93–106.

[15] G. Ehrlich, Unit-regular rings, Portugal. Math. 27 (1968) 209–212.

[16] J.W. Fisher and R.L. Synder, Rings generated by their units, J. Algebra 42 (1976) 363– 368.

[17] J. Han and W.K. Nicholson, Extensions of clean rings, Comm. Algebra 29 (2001) 2589– 2595.

[18] J.A. Huckaba, Commutative Rings with Zero Divisors, Marcel Dekker, New York-Basel, 1988.

[19] T. Y. Lam, A First Course in Non-commutative Rings, Springer- verlag, 1991 (1997), 269–278.

[20] T.Y. Lam, Exercises in Classical Ring Theory, Springer, New York, 2003.

[21] J. Lambek, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company, Waltham- Toronto-London, 1966.

[22] R. Levy and J. Shapiro, The zero-divisor graph of von Neumann regular rings, Comm. Algebra 30 (2) (2002) 745–750.

[23] S.B. Mulay, Cycles and symmetries of zero-divisors, Comm. Algebra 30 (7) (2002) 3533–3558.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پ

پوچ‌توان .... Nilpotent

ت

تضعیف آمیخته .... Amalgmated duplication

تقلیل یافته .... Reduced

توسیع .... Extensians

ح

حلقه بولی .... Boolean ring

حلقه π− منظم .... π-Regular ring

حلقه خارج قسمتی تام .... Total quotient ring

حلقه فون نیومن موضعی .... Von Neumann local ring

حوزه صحیح .... Integral domain

ر

رادیکال جیکبسون .... Jacobson radical

ز

زیرگراف القا شده .... Induced subgraph

ش

شاخص کراندار .... Bounded index

شبه موضعی .... Quasi local

ع

عناصر خودتوان .... Idempotent elements

عنصر تمیز .... Clean element

ف

فون نیومن منظم .... Von Neumann regular

گ

گراف تهی .... Empty graph

گراف مکمل .... Complemented graph

گراف مقسوم علیه صفر .... Zero-divisor graph

م

متعامد .... Orthogonal

مجاور .... adjacent

به طور منحصر به فرد مکمل .... Uniquely complemented

ه

همبند .... Connected

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

adjacent .... مجاور
Amalgmated duplication .... تضعیف آمیخته

B

Boolean ring .... حلقه بولی
Bounded index .... شاخص کراندار

C

Clean element .... عنصر تمیز
Complemented graph .... گراف مکمل
Connected .... همبند

E

Empty graph .... گراف تهی
Extensians .... توسیع

I

Idempotent elements .... عناصر خودتوان
Induced subgraph .... زیر گراف القا شده
Integral domain .... حوزه صحیح

J

Jacobson radical .... رادیکال جیکبسون

O

Orthogonal .... متعامد

P

π-Regular ring .... حلقه π- منظم

Q

Quasi local .... شبه موضعی

R

Reduced .... تقلیل یافته

T

Total quotient ring .... حلقه خارج قسمتی تام

U

Uniquely complemented .... به طور منحصر به فرد مکمل

V

Von Neumann local ring .... حلقه فون نیومن موضعی

Von Neumann regular .... فون نیومن منظم

Z

Zero-divisor graph .... گراف مقسوم علیه صفر

Aabstract

Let R be a commutative ring with nonzero identity. In this thesis, we study the von Neumann regular elements of R. We also study the idempotent elements, π- regular elements, the von Neumann local elements, and the clean elements of R. We investigate the subgraphs of the zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of R induced by the above elements. For a commutative ring R with set of zero-divisors $Z(R)$, the zero-divisor graph of R is $\Gamma(R) = Z(R) - \{0\}$, with distinct vertices x and y adjacent if and only if $xy = 0$. We show that $\Gamma(T(R))$ and $\Gamma(R)$ are isomorphic as graphs, where $T(R)$ is the total quotient ring of R, and that $\Gamma(R)$ is uniquely complemented if and only if either $T(R)$ is von Neumann regular or $\Gamma(R)$ is a star graph.

Keywords: von Neumann regular ring, von Neumann local ring, π- regular ring, clean ring, zero-divisor graph.

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Von Neumann regular and related elements in commutative rings

Maryam Gholami

Supervisor

E. Hashemi

Advisor

R. Hejazi

November 2015