دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده‌ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

موضعاً همبندی مجموعه جولیا چندجمله‌ای‌ها

ابوطالب خان‌احمدی

اساتید راهنما:

دکتر احمد زیره

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور:

دکتر میرحیدر جعفری

شهریور ماه ۱۳۸۸

بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

موضعاً همبندی مجموعه جولیا چندجمله‌ای‌ها

دانشجو: **ابوطالب خان‌احمدی**

اساتید راهنما:
دکتر احمد زیره
دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور:
دکتر میرحیدر جعفری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم خالصانه به پدر و مادرم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

قدردانی و تشکر

خداوند متعال را شاکرم که به من توفیق داد تا نگارش این رساله را به پایان برسانم. در به فرجام رسانیدن این مهم، از گنجینه علم و حکمت و سرچشمه بذل و معرفت بزرگانی بهره برده‌ام که بر خود واجب می‌دانم از تمامی آن بزرگواران کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. لذا بر خود می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای **دکتر احمد زیره** به خاطر زحمات فراوان و راهنمائی‌های ایشان و جناب آقای **دکتر ابراهیم هاشمی و جناب آقای دکتر میرحیدر جعفری** که در انجام این مهم مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم و برایشان سلامتی و موفقیت را از خداوند منان خواستارم. همچنین از آقایان **دکترمرتضی ابطهی** و **دکتر کامران شریفی** که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را به عهده گرفته‌اند تشکر می‌نمایم. در پایان از خانوادهٔ عزیزم به خصوص پدر و مادرم که همیشه و در تمامی مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده‌اند و تمامی موفقیّت‌های من مرهون زحمات و فداکاری ایشان می‌باشد، سپاسگزارم. امیدوارم این پایان نامه برای اهل فن و دوستداران دانش مفید واقع شود.

چکیده

فرض کنید $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$نمایش دهنده ی کره‌ی ریمان و $P : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $d \geq ۲$ باشد. کُره‌ی ریمان می‌تواند به دو مجموعه‌ی کاملاً ناوردا نسبت به P تقسیم شود. یک مجموعه‌ی پایدار که دینامیک P روی آن قابل پیش‌بینی است و یک مجموعه‌ی ناپایدار که دینامیک P روی آن آشفته و بی‌نظم است. در زبان آنالیز مختلط یک مجموعه‌ی پایدار برای P مجموعه تمام نقاطی از $\mathbb{C}$ است که خانواده‌ی تکرارهای P در یک همسایگی از آنها نرمال است. مجموعه‌ی پایدار چندجمله‌ای P،مجموعه ی فاتو نامیده می‌شود. مجموعه‌ی آشفته‌ی P که همان متمم مجموعه‌ی فاتو در کُره‌ی ریمان است، مجموعه‌ی جولیای چندجمله‌ای P نامیده می‌شود. مجموعه‌ی جولیا چندین مشخصه دارد؛ مجموعه‌ای است که در آن نرمالی اتفاق نمی‌افتد، بستار مجموعه‌ی مدارهای متناوب است و سرانجام مرز توپولوژیکی مؤلفه‌ی غیر کراندار مجموعه‌ی فاتو می‌باشد. در سال ۱۹۸۴ دودی و هوبارد دینامیک گونه‌ای از چندجمله‌ای ها که مجموعه‌ی جولیایشان موضعاً همبند بود را توصیف کردند. در سال ۱۹۹۰ یوکوز نشان داد که رده‌ی بزرگی از چندجمله‌ای هایی که فقط تعداد متناهی بار نرمال‌پذیر هستند دارای مجموعه‌ی جولیای موضعاً همبند هستند. در این متن روش یوکوز را برای اثبات موضعا همبندی مجموعه‌های جولیای چندجمله‌ای‌ها گسترش می‌دهیم.

کلید واژه: مجموعه‌ی جولیا؛ موضعاً همبند؛ تکه جدول یوکوز؛ بازگشتی؛ حوزه‌ی جاذب؛ نرمال‌پذیر

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

مقاله‌ی زیر در چهلمین کنفرانس ریاضی ایران که در دانشگاه صنعتی شریف برگزار گردید، ارائه شده است.

[1] On The Local Connectivity of Julia Set of Symmetric Polynomials

فهرست مندرجات

۱ **تعاریف و مقدمات** ۱

۱—۱ مقدمه ۲

۱—۱—۱ تاریخچه ۲

۱—۱—۲ نگاه کلی به متن ۲

۱—۲ نقاط ثابت و متناوب چندجمله‌ای $P : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ ۴

۱—۲—۱ تعریف ۴

۱—۲—۲ نمادگزاری ۵

۱—۲—۳ تعریف ۵

۱—۲—۴ تذکر ۵

۱—۲—۵ تعریف ۶

۱—۲—۶ تعریف ۷

۱—۲—۷ تعریف ۷

۱—۲—۸ قضیه ۷

۱—۲—۹ قضیه‌بوچر ۸

۱—۳ خانواده‌های نرمال، مجموعه‌های فاتو و جولیا ۸
۱—۳—۱ تعریف ۸
۱—۳—۲ تعریف ۸
۱—۳—۳ تعریف ۹
۱—۳—۴ قضیه مانتل ۹
۱—۳—۵ تعریف ۹
۱—۳—٦ قضیه ۱۰
۱—۳—۷ تعریف ۱۰
۱—۳—۸ تعریف ۱۰
۱—۳—۹ تذکر ۱۰
۱—۳—۱۰تذکر ۱۱
۱—۳—۱۱مثال ۱۱
۱—۳—۱۲مثال ۱۱
۱—۳—۱۳تعریف ۱۲
۱—۳—۱۴مثال ۱۲
۱—۳—۱۵تعریف ۱۳
۱—۳—۱٦قضیه ۱۳

۱—۴ نقاط بحرانی و نگاشت‌های متناهی درجه ۱۵
۱—۴—۱ تعریف ۱۵
۱—۴—۲ قضیه ۱۵
۱—۴—۳ گزاره ۱۵

۱–۴–۴ تعریف ۱۶
۱–۴–۵ تعریف ۱۶
۱–۴–٦ تعریف ۱۶
۱–۴–۷ تذکر ۱۶
۱–۴–۸ تعریف ۱۷

۱–۵ تابع گرین و پرتوهای خارجی ۱۷
۱–۵–۱ نمادگزاری ۱۷
۱–۵–۲ تعریف ۱۸
۱–۵–۳ مثال ۱۸
۱–۵–۴ تعریف ۱۹
۱–۵–۵ تذکر ۱۹
۱–۵–٦ تذکر ۲۰
۱–۵–۷ تعریف ۲۰
۱–۵–۸ تعریف ۲۰
۱–۵–۹ قضیه ۲۰
۱–۵–۱۰تعریف ۲۱
۱–۵–۱۱تعریف ۲۲
۱–۵–۱۲تعریف ۲۲
۱–۵–۱۳تعریف ۲۲
۱–۵–۱۴لم ۲۳
۱–۵–۱۵قضیه ۲۳
۱–۵–۱٦ادعا ۲۴

۱–۵–۱۷ادعا ۲۴
۱–۵–۱۸تذکر ۲۵

۱–۶ طوق‌ها و نابرابری گروتز ۲۵
۱–۶–۱ تعریف ۲۵
۱–۶–۲ تعریف ۲۶
۱–۶–۳ تذکر ۲۶
۱–۶–۴ گزاره ۲۶
۱–۶–۵ قضیه برانر و هوبارد ۲۶
۱–۶–۶ گزاره ۲۷

۱–۷ نگاشت‌های شبه–چندجمله‌ای تعمیم یافته و سازی ۲۷
۱–۷–۱ تعریف ۲۸
۱–۷–۲ تعریف ۲۸
۱–۷–۳ تعریف ۲۸
۱–۷–۴ تعریف ۲۸
۱–۷–۵ قضیه یکنواخت سازی ۲۹
۱–۷–۶ تعریف ۲۹
۱–۷–۷ تعریف ۲۹
۱–۷–۸ مثال ۳۰
۱–۷–۹ مثال ۳۰
۱–۷–۱۰تذکر ۳۰
۱–۷–۱۱تعریف ۳۱

۱—۷—۱۲تعریف ۳۱
۱—۷—۱۳مثال ۳۱
۱—۷—۱۴تعریف ۳۱
۱—۷—۱۵تعریف ۳۲

۲ موضعاً همبندی مجموعه‌های جولیای درجهٔدوم ۳۴

۲—۱ مقدمه ۳۵
۲—۱—۱ قضیه ۳۵
۲—۱—۲ تعریف ۳۵
۲—۱—۳ تعریف ۳۶

۲—۲ جدول یوکوز ۳۷
۲—۲—۱ مثال ۳۸
۲—۲—۲ نمادگذاری ۳۸
۲—۲—۳ مسئله‌ی اصلی ۳۹
۲—۲—۴ طوق‌های مرتبط با جدول یوکوز ۳۹
۲—۲—۵ مثال ۴۰
۲—۲—۶ مسئله‌ی اصلی اصلاح شده ۴۰
۲—۲—۷ تعریف ۴۱
۲—۲—۸ مثال ۴۱
۲—۲—۹ تذکر ۴۴
۲—۲—۱۰مثال ۴۴

۲–۲–۱۱تعریف ۴۴
۲–۲–۱۲تذکر ۴۵
۲–۲–۱۳تعریف ۴۷
۲–۲–۱۴مثال ۴۷
۲–۲–۱۵تعریف ۴۷
۲–۲–۱٦تعریف ۴۸
۲–۲–۱۷لم ۴۹

۲–۳ نرمال‌پذیری و اثبات قضیۀاصلی ۵۱
۲–۳–۱ لم ۵۲
۲–۳–۲ لم ۵۲
۲–۳–۳ مثال ۵۳
۲–۳–۴ تذکر ۵۳
۲–۳–۵ تذکر ۵۴
۲–۳–٦ گزاره ۵٦
۲–۳–۷ لم ۵۷
۲–۳–۸ تعریف ۵۸
۲–۳–۹ قضیه ۵۸

۳ موضعاً همبندی مجموعه‌های جولیای درجۀسوم در نقاطی که مصرانه بازگشتی نیستند ٦۴

۳–۱ مقدمه ٦۵
۳–۱–۱ تعریف ٦۵

۳—۱—۲ تعریف ٦۵
۳—۱—۳ قضیه ٦٦

۳—۲ اثبات نتیجه‌ی اصلی ٦٦
۳—۲—۱ لم ٦۷
۳—۲—۲ لم ٦۸
۳—۲—۳ لم ۷۰
۳—۲—۴ لم ۷۰
۳—۲—۵ قضیه ۷۲

۴ موضعاً همبندی مجموعه‌های جولیای درجهٔ سوم در نقاطی که مصرانه بازگشتی‌اند ۷۵

۴—۱ مقدمه ۷٦
۴—۱—۱ قضیه ۷۷
۴—۱—۲ قضیه ۷۷

۴—۲ جدول یوکوز ۷۷

۴—۳ قدرمطلق نامتقارن و خانواده‌های مجزا ۸۰
۴—۳—۱ تعریف ۸۱
۴—۳—۲ تعریف ۸۲
۴—۳—۳ تعریف ۸۳
۴—۳—۴ لم ۸۳

۴—۳—۵ لم ۸۴

۴—۴ خانواده‌های مجاز ۸۴

۴—۴—۱ لم ۸۵

۴—۵ برهان قضیّه اصلی این فصل ۸۵

۵ چندجمله‌ای‌های بینهایت‌بار نرمال‌پذیرو موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیای آنها ۸۹

۵—۱ مقدمه ۹۰

۵—۱—۱ قضیه ۹۲

۵—۲ ساختار جدول‌های یوکوز ۹۳

۵—۲—۱ قضیه ۹۳

۵—۲—۲ قضیه ۹۴

۵—۲—۳ تذکر ۹۶

۵—۳ ساختار جدول‌های یوکوز سه بُعدی ۹۶

۵—۳—۱ تذکر ۹۸

۵—۳—۲ تعریف ۹۸

۵—۳—۳ تعریف ۹۹

۵—۴ جدول‌های سه بُعدی و همبندی موضعی ۹۹

۵–۴–۱ قضیه ۹۹
۵–۴–۲ تعریف ۱۰۰
۵–۴–۳ لم ۱۰۱
۵–۴–۴ لم ۱۰۱
۵–۴–۵ لم ۱۰۷
۵–۴–٦ گزاره ۱۰۸
۵–۴–۷ لم ۱۰۸

A مراجع ۱۱۳

B واژه نامه ۱۱٦

لیست اشکال

۱—۱ مجموعه‌ی جولیای نگاشتi۰٫۱۲۱۱۹۸ + ۰٫۷۴۴۳۳۶ − $f : z \longmapsto z^{۲}$ . . ۱۳

۱—۲ مجموعه‌ی جولیای نگاشت ۱٫۷۵۴۸۸۰۰۰ − $f : z \longmapsto z^{۲}$ ۱۳

۱—۳ مجموعه‌ی جولیای نگاشتi۰٫۲۰۷۵۳۰ + ۰٫۴۲۴۵۱۳ + $f : z \longmapsto z^{۲}$ . . ۱۴

۱—۴ یک درخت‌واره برای مجموعه‌ی جولیای $f : z \longmapsto z^{۲} + i$ ۱۴

۱—۵ نرمال‌سازی نگاشت۱٫۷۵ − $f(z) = z^{۲}$ ۳۲

۱—۶ مجموعه‌ی جولیای نگاشت + ۰٫۴۱۹۶۶۴۳۳۸ + $f(z) = z^{۲}$
i۰٫۶۰۶۲۹۰۷۳ (چپ) و نرمال‌سازی آن (راست) ۳۲

۱—۷ مجموعه‌ی جولیای نگاشتi(۰٫۲۴۰۳۳) + ۱٫۱۳۰۰۰ − $f(z) = z^{۲}$به
همراه دامنه و برد یک ۲— نرمال‌سازی از آن ۳۳

۲−۱ مجموعه‌ی مندلبرات ۳۶

۲−۲ تکه‌های جدول یوکوز در عمق‌های صفر و یک برای نگاشت $f(z) = z^{۲} + i$. ۳۸

۲−۳ تابلوی بحرانی برای مثال ۳.۲ . . . . ۴۲

۲−۴ نمونه‌هایی از طوق‌های بحرانی، غیربحرانی و نیم‌بحرانی ۴۴

۲−۵ ضخیم‌سازی یک تکه‌ی جدول ۴۶

۲−۶ مثال برای قاعده‌ی دوم تابلو ۴۸

۲−۷ پیدا کردن فرزند : توضیحات برای قسمت‌هایa, b, d در لم ۱.۲ . . . . ۵۰

۲−۸ مثال برای قاعده‌ی دوم تابلو ۵۳

۲−۹ ناحیه رنگ شده در شکل همان طوق$A_{۰}(c_d) = A_{۰}(-c_i)$ ۵۷

۳−۱ ناحیه‌ی رنگ شده، تکه‌ی $Y^{۱}(۰)$ شامل نقطه‌ی بحرانی از عمق یک است . . . ۶۸

۳−۲ نمایش شکل برای روشنتر شدن اثبات لم (۴.۳) ۷۱

۱–۴ جدول‌های یوکوز در عمق‌های صفر و یک برای $q = ۳$ ۷۸

۲–۴ دامنه‌ی $V_{\circ}^{n-۱}$ به همراه دامنه‌های درون آن ۸۲

۱–۵ نمایشی از تکه‌های شامل نقطه‌ی x که به نقطه‌ی ثابت αختم می‌شود. ۱۰۵

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱—۱ مقدمه

۱—۱—۱ تاریخچه

در سال ۱۹۶۵ هانس برولین[۱]، مقاله‌ای چاپ کرد که در آن توابع گرین مرتبط با چندجمله‌ای‌های مختلط را معرفی کرده بود. تابع گرین می‌تواند بطور دینامیکی برای معرفی یک فولیشن ناوردا از مؤلفه‌ی غیر کراندار مجموعه‌ی فاتو تعریف شود[۹].

برانر و هوبارد[۲] در سال ۱۹۸۸ تابع گرین را برای افراز مجموعه‌ی جولیای یک چندجمله‌ای درجهٔسوم به تکه‌های جدولی، بکار بردند. تکه‌های جدول مؤلفه‌های کراندار از متمم یک منحنی هم‌پتانسیل بودند[۴]. یک سال بعد یوکوز[۳] تعریف تکه‌های جدولی را با ترکیب کردن منحنی‌های هم‌پتانسیل با یک فولیشن ناوردای دیگر به نام پرتوهای خارجی، گسترش داد. یوکوز با استفاده از این تکه‌های جدولی نشان داد که هر چندجمله‌ای درجهٔدوم که اولاً نقاط متناوب «بطور اصم بی‌اثر» ندارد، ثانیاً مجموعه‌ی جولیایش همبند است و ثالثاً فقط تعداد متناهی بار نرمال‌پذیراست، لزوماً دارای مجموعه‌ی جولیای موضعاً همبند است. چون هر تکه‌ی جدولی مجموعه‌ی جولیا را در مجموعه‌ای همبند قطع می‌کند روش یوکوز نشان داد که برای هر نقطه از مجموعه‌ی جولیا یک دنباله‌ی تودرتو از تکه‌های جدول وجود دارد که تنها به یک نقطه تقلیل پیدا می‌کند. در سال ۱۹۹۴ لیوبیچ[۴] در [۱۳] نرخ‌هایی را معرفی کرد که در آن‌ها تکه‌های جدول برای چندجمله‌ای‌های درجهٔدوم تقلیل پیدا می‌کردند

۱—۱—۲ نگاه کلی به متن

در سراسر این متن فقط چندجمله‌ای‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که تنها مدارهای متناوب دافع دارند. برای یک چنین چندجمله‌ای‌هایی مجموعه‌ی فاتو مؤلفه‌ی کراندار ندارد و از این رو مجموعه‌ی

[۱] Hans Brolin
[۲] Branner and Hubbard
[۳] Yoccoz
[۴] Lyuobich

جولیا$Dendrite$(به شکل رشته‌های عصبی) است. علاوه بر این فقط به چندجمله‌ای‌هایی علاقه‌مند هستیم که تنها یک نقطه‌ی بحرانی دارند. پس از فراهم کردن ابزار لازم در فصل ۱ ، در ادامه و در فصل ۲ شرط‌های یک و سه موجود در نتیجه‌ای که یوکوز آن‌را اثبات کرده‌بود و در بخش (۱—۱—۱) معرفی شد را بوسیله شرط‌های الف و ج، جایگزین کرده و موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیا را نتیجه می‌گیریم.

الف) چندجمله‌ای P فقط دارای مدارهای متناوب دافع است.

ج) P نرمال‌پذیر ساده نیست.

در فصل‌های ۳ و ۴ مدار نقطه‌ی بحرانی را بصورت زیر رده‌بندی می‌کنیم: مدار تک نقطه‌ی بحرانی «غیر بازگشتی» است، یا «با بی‌میلی بازگشتی» است و یا اینکه «مصرانه بازگشتی» است. برای چندجمله‌ای‌های درجهٔسوم مختلط به فرم $P : z \longmapsto z^3 + c$ که فقط مدارهای متناوب دافع دارند، مجموعه‌ی جولیای آنها همبند است، در تک نقطه‌ی بحرانی نرمال‌پذیرنیستند و در آنها پرتوهای ثابت به نقاط ثابت مجزائی ختم می‌شوند؛ ابتدا در فصل سه در حالتی که مدار بحرانی «غیر بازگشتی» یا «با بی‌میلی بازگشتی» است، موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیا را بدست می‌آوریم و سپس در فصل ۴ در حالتی که مدار بحرانی «مصرانه بازگشتی» است، به چندجمله‌ای P یک نگاشت g را طوری مرتبط می‌کنیم که همان ترکیبات P را منعکس می‌کند. این نگاشت جدید نگاشت شبه چندجمله‌ای تعمیم‌یافته نام دارد و بی‌نهایت بار نرمال‌پذیر است.

شرایطی را روی ترکیبات نرمال‌سازی‌های این نگاشت جدید معین می‌کنیم تا اینکه ابتدا کلاً ناهمبندی مجموعه‌ی جولیای $K(g)$ و سپس با استفاده از آن موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ نتیجه شود. و سرانجام در فصل پنج رده‌ای از چندجمله‌ای‌های درجهٔدوم به فرم $P : z \longmapsto z^2 + c$ که دارای مجموعه‌ی جولیای همبند هستند، تمام مدارهای متناوب آنها دافع است و بی‌نهایت بار نرمال‌پذیرهستند را در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم که یک چنین چندجمله‌ای‌هایی دارای مجموعه‌ی جولیای موضعاً همبند هستند.

۱—۲ نقاط ثابت و متناوب چندجمله‌ای $P : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$

فرض کنید $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ نمایش‌دهنده کُره‌ی ریمان باشد و $f : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ یک نگاشت هولومورفیک از کُره‌ی ریمان بروی خودش باشد. فرض کنید $z_0 \in \mathbb{C}$ و $z_1 = f(z_0)$ تصویر z_0 تحت f، $z_2 = f(z_1)$ تصویر z_1 تحت f و به همین ترتیب $z_n = f(z_{n-1})$ تصویر z_{n-1} تحت f باشد. دنباله‌ی $\{z_0, z_1, z_2, \cdots\}$ را «مدار پیشرو z_0 تحت f» می‌نامیم. ترکیب fof را با f^2 و در حالت کلی برای هر $k \geq 2$ ترکیب $fo\cdots of$ را با f^k نمایش می‌دهیم. هر یک از f^kها را یک تکرار نگاشت f می‌نامیم. اجتماع $\cup_{n\geq 0} f^{-n}\{z_0\}$ «مدار پسرو z_0 تحت f» نامیده می‌شود.

۱—۲—۱ تعریف

نقطه‌ی $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ یک نقطه‌ی ثابت تابع هولومورفیک f نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم $f(\zeta) = \zeta$.
فرض کنید $\zeta \in \mathbb{C}$ یک نقطه‌ی ثابت تابع هولومورفیک f باشد، در این صورت گوئیم ζ ؛

۱) یک نقطه‌ی ثابت «جاذب» f است، هرگاه $0 < |f'(\zeta)| < 1$.

۲) یک نقطه‌ی ثابت «جاذب قویِ» f است، هرگاه $f'(\zeta) = 0$.

۳) یک نقطه‌ی ثابت «دافعِ» f است، هرگاه $|f'(\zeta)| > 1$.

۴) یک نقطه‌ی ثابت «بی‌اثر» از f است، هرگاه $|f'(\zeta)| = 1$.

با توجه به تعریف ۱.۱.۱

در حالتی که $\zeta \in \mathbb{C}$ یک نقطه‌ی ثابت «بی‌اثر» f باشد، گوئیم ζ یک نقطه‌ی ثابت «بطور گویا بی‌اثر» از f است، اگر $f'(\zeta)$ یک ریشه‌ی واحد باشد، یعنی به ازای یک عدد گویای $\theta = p/q$ داشته باشیم، $f'(\zeta) = e^{2\pi i\theta}$. اگر $|f'(\zeta)| = 1$ باشد اما $f'(\zeta)$ یک ریشه‌ی واحد نباشد، آنگاه گوئیم ζ یک نقطه‌ی ثابت «بطور اصم بی‌اثر» از f است.

۱—۲—۲ نمادگزاری

برای یک نقطه‌ی ثابت $\zeta \in \mathbb{C}$ از نگاشت f، عدد مختلط $f'(\zeta)$ را «مضرب f در ζ» نامیده و آن را با نماد $m(f,\zeta) = f'(\zeta)$ نمایش می‌دهیم.یک تبدیل موبیوس $g : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$، نگاشت گویایی به فرم $g(z) = (az+b)/(cz+d)$ است که در آن ضرایب a,b,c,d اعداد مختلط هستندو $ad - bc \neq \circ$ است.اگر $c \neq \circ$ باشد آنگاه $g(\infty) = a/c$ و $g(-d/c) = \infty$ و اگر $c = \circ$ آنگاه $g(\infty) = \infty$.

حال فرض کنید که نقطه در بینهایت یک نقطه‌ی ثابت نگاشت هولومورفیک $f : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ باشد. برای تعریف مضرب f در نقطه‌ی بینهایت یک تبدیل موبیوس $g : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ را طوری در نظر می‌گیریم که $g(\infty) \in \mathbb{C}$ و در این صورت تعریف می‌کنیم: $m(f,\infty) := m\left(gfg^{-۱}, g(\infty)\right)$. این تعریف مستقل از انتخاب $g : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ است و از این رو در حالت کلی مضرب f در نقطه‌ی ثابت $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ خوش‌تعریف است.

۱—۲—۳ تعریف

گوئیم نقطه‌ی $\zeta \in \mathbb{C}$ یک نقطه‌ی متناوب نگاشت f است، اگر ζ یک نقطه‌ی ثابت تکراری از f باشد. یعنی برای یک $m \geq ۱$ داشته باشیم $f^m(\zeta) = \zeta$ باشد.

فرض کنید ζ یک نقطه‌ی متناوب تابع f باشد. در این صورت عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد بقسمی که $\{\zeta, f(\zeta), \cdots, f^{n-۱}(\zeta)\}$ دوبدو مجزا هستند ولی $f^n(\zeta) = \zeta$ باشد. n را دوره‌ی تناوب نقطه‌ی متناوب ζ از f می‌نامیم. یا بطور معادل n را دوره‌ی تناوب دور $\underline{\zeta} = \{\zeta, f(\zeta), \cdots, f^{n-۱}(\zeta)\}$ می‌نامیم.

۱—۲—۴ تذکر

$\zeta \in \mathbb{C}$ یک نقطه‌ی متناوب $f : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ از دوره‌ی تناوب n است اگر و تنها اگر یک نقطه‌ی ثابت f^n باشد ولی نقطه‌ی ثابت هیچ تکراری از f قبل از f^n نباشد. یعنی برای هر $m \leq n$ داشته باشیم

$f^m(\zeta) \neq \zeta$.

حال همانند نقاط ثابت، برای نقاط متناوب نیز مفاهیم جاذب، دافع و بی‌اثر بودن را تعریف می‌کنیم.فرض کنیم دور $\underline{\zeta} = \{\zeta, f(\zeta), \cdots, f^{n-1}(\zeta)\}$ شامل نقطه در بینهایت نباشد. در این صورت برای هر $m = 0, 1, 2 \cdots$ با نوشتن $\zeta_m = f^m(\zeta)$، داریم: $\zeta_{m+n} = \zeta_m$. لذا با n بار بکار بردن قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$(f^n)'(\zeta_m) = f'(\zeta_m).f'(f(\zeta_m)).\cdots.f'(f^{n-1}(\zeta_m)) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(\zeta_m))$$

بوضوح مشتق $(f^n)'(\zeta_m)$ مستقل از m است. یعنی برای هر $m = 0, 1, 2 \cdots$ مقدار یکسانی برای $(f^n)'(\zeta_m)$ بدست می‌آید. این مقدار مشترک را به عنوان «مضرب f در نقطه‌ی متناوب ζ» تعریف می‌کنیم. یعنی

$$m(f, \zeta) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(\zeta)).$$

١–٢–٥ تعریف

فرض کنید ζ یک نقطه متناوب نگاشت f از دوره‌ی تناوب n باشد. در این صورت گوئیم؛ ζ یک نقطه‌ی متناوب جاذب (دور $\underline{\zeta}$ یک دور متناوب جاذب) است، در صورتی که داشته باشیم $|m(f, \zeta)| < 1$، ζ (دور $\underline{\zeta}$) متناوب دافع است اگر $|m(f, \zeta)| > 1$ باشد. و در نهایت گوئیم ζ (دور $\underline{\zeta}$) متناوب بی‌اثر است اگر $|m(f, \zeta)| = 1$.

باز هم در حالتی که $\underline{\zeta}$ یک دور متناوب بی‌اثر است، گوئیم که دور $\underline{\zeta}$ «بطور گویا بی‌اثر» است اگر $(f^n)'(\zeta)$ یک ریشه‌ی واحد باشد؛ اگر $|(f^n)'(\zeta)| = 1$ ولی $(f^n)'(\zeta)$ یک ریشه‌ی واحد نباشد، گوئیم دور $\underline{\zeta}$ «بطور اصم بی‌اثر» است.

۱-۲-۶ تعریف

دور $\underline{\zeta} = \{\zeta, f(\zeta), \cdots, f^{n-1}(\zeta)\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی تمام نقاطی که در دور $\underline{\zeta}$ انباشته می‌شوند را حوزه‌ی جاذب $\underline{\zeta}$ گوئیم.

۱-۲-۷ تعریف

گوئیم نقطه‌ی $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ تحت f «باتکرار متناوب» است، هرگاه ζ خودش متناوب نباشد ولی برای یک عدد صحیح $m \geq 1$، $f^m(\zeta)$ یک نقطه‌ی متناوب از f باشد.

اگر ζ یک نقطه‌ی «با تکرار متناوب» از f باشد آنگاه اعداد صحیح و مثبت m و n موجودند به قسمی که $\{\zeta, f(\zeta), \cdots, f^m(\zeta), f^{m+1}(\zeta), \cdots, f^{m+n-1}(\zeta)\}$ دوبه‌دو مجزا باشند ولی داشته باشیم $f^m(\zeta) = f^{m+n}(\zeta)$. در پایان این بخش دو نتیجه‌ی بسیار مهم که برهان آنها در [۵، ۱۰] بطور آمده است را یادآوری می‌کنیم که ابزار بسیار مهمی برای معرفی جدول یوکوز بدست می‌دهند. تابع $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ را که در یک همسایگی از مبدأ معین و هولومورفیک است، در نظر می‌گیریم. بوضوح مبدأ یک نقطه‌ی ثابت f است که مضرب f در آن برابر است با a_1.

۱-۲-۸ قضیه

اگر مضرب a_1 در رابطه‌ی $|a_1| \neq \{0, 1\}$ صدق کند، (اگر مبدأ یک نقطه‌ی ثابت جاذب قوی از f و همچنین یک نقطه‌ی ثابت بی‌اثر از f نباشد) آنگاه یک تغییر مختصات هولومورفیک موضعی $w = \varphi(z)$ با $\varphi(0) = 0$ وجود دارد به قسمی که برای تمام wها در یک همسایگی از مبدأ، نگاشت $\varphi f \varphi^{-1}$ نگاشت خطی $w \longmapsto a_1 w$ است. یعنی $\varphi f \varphi^{-1}(w) = a_1 w$. بعلاوه φ نسبت به ضرب بوسیله‌ی یک ثابت ناصفر، یکتا است.

۱ـ۲ـ۹ قضیه‌بوچر

فرض کنید $f(z)=a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$ که در آن $n \geq ۲$ و $a_n \neq ۰$. در این صورت یک تغییر مختصات هولومورفیک موضعی $w=\varphi(z)$ وجود دارد که f را در سراسر یک همسایگی از مبدأ با نگاشت توان nام $w \longmapsto w^n$ مزدوج می‌کند. یعنی در سراسر یک همسایگی از مبدأ داریم $\varphi f \varphi^{-1}(w)=w^n$. بعلاوه φ نسبت به ضرب بوسیله‌ی یک ریشه‌ی $(n-۱)$ـام واحد یکتاست.

۱ـ۳ خانواده‌های نرمال، مجموعه‌های فاتو و جولیا

۱ـ۳ـ۱ تعریف

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از نگاشت‌ها باشد که فضای متریک $(X_۱, d_۱)$ را به توی فضای متریک $(X_۲, d_۲)$ می‌نگارند. گوئیم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ در $x_۰ \in X_۱$ هم‌پیوسته است اگر برای هر $\epsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in X_۱$ و برای هر $f \in \mathcal{F}$ اگر $d_۱(x, x_۰) < \delta$ باشد آنگاه داشته باشیم $d_۲(f(x), f(x_۰)) < \epsilon$.

گوئیم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ در $X_۱$ هم‌پیوسته است، هرگاه در تمام نقاط $X_۱$ هم‌پیوسته باشد.

۱ـ۳ـ۲ تعریف

گوئیم دنباله $\{f_n\}_{n\geq ۱}$ از نگاشت‌ها،از فضای متریک $(X_۱, d_۱)$ به فضای متریک $(X_۲, d_۲)$ « موضعاً همگرای یکنواخت به f روی $X_۱$» است، اگر هر نقطه‌ی $x \in X_۱$ دارای یک همسایگی باشد که روی این همسایگی دنباله $\{f_n\}_{n\geq ۱}$ بطور یکنواخت به نگاشت f همگرا باشد.

نکته: اگر دنباله‌ی $\{f_n\}_{n\geq ۱}$ روی $X_۱$ موضعاً همگرای یکنواخت به نگاشت f باشد، آنگاه این دنباله روی هر زیرمجموعه‌ی فشرده $X_۱$ بطور یکنواخت به f همگرا است و برعکس.

۱—۳—۳ تعریف

فرض کنید (X_1, d_1) و (X_2, d_2) دو فضای متریک باشند.

خانواده‌ی $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X_1, d_1) \longmapsto (X_2, d_2) | \alpha \in I\}$ از نگاشت‌ها در X_1 نرمال نامیده می‌شود، اگر هر دنباله‌ی نامتناهی از توابع در $\mathcal{F}$، زیردنباله‌ای داشته باشد که‌روی X_1 موضعاً همگرای یکنواخت باشد. یا بطور معادل، اگر هر دنباله‌ی نامتناهی از توابع در $\mathcal{F}$ یک زیردنباله‌ای داشته باشد که روی هر زیرمجموعه‌ی فشرده از X_1 بطور یکنواخت همگرا باشد.

۱—۳—۴ قضیه مانتل

فرض کنید S یک دامنه در کره‌ی ریمان باشد. z_1 و z_2 وz_3 نقاط متمایز دلخو اهی در کره ریمان باشند. اگر خانواده‌ی $\mathcal{F}$ از نگاشت‌های هولومورفیک روی S مقادیر z_1 و z_2 وz_3 اختیارنکند، آنگاه خانواده‌ی $\mathcal{F}$ در S نرمال است.

اکنون مجموعه‌های فاتو وجولیا را یک بار بر اساس «نرمال» بودن و بار دیگر بر اساس «هم‌پیوسته» بودن تعریف می‌کنیم. نگاشت هولومورفیک $f : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ و خانواده‌ی تکرارهای آن $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n \geq 1}$ را در نظر بگیرید.

۱—۳—۵ تعریف

مجموعه‌ی فاتوی نگاشت هولومورفیک f که آن را با $F(f)$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است متشکل از تمام $z \in \hat{\mathbb{C}}$هائی که خانواده‌ی $\mathcal{F}$ در یک همسایگی از آنها نرمال است .

فضاهای متریک (X, d) و (X_1, d_1) و خانواده‌ی $\mathcal{F}$ از نگاشت‌هائی که فضای (X, d) را بتوی (X_1, d_1) می‌نگارند، را درنظر می‌گیریم. از تعریف (۱—۳—۱) نتیجه می‌شود که اگر خانواده‌ی $\mathcal{F}$ روی هر زیرمجموعه‌ی D_α از X، هم‌پیوسته باشد آنگاه خود به خود روی اجتماع $\cup_\alpha D_\alpha$ نیز هم‌پیوسته خواهد بود. حال فرض کنید $\{D_\alpha\}_\alpha$ خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌های باز فضای متریک X باشد که

خانواده‌ی $\mathcal{F}$ روی آنها هم‌پیوسته است. با بکار بردن لم زورن قضیه‌ی بسیار اساسی زیر بدست می‌آید.

۱–۳–۶ قضیه

خانواده‌ی $\mathcal{F}$ با توصیفات بالا را درنظر بگیرید. در این صورت یک زیرمجموعه‌ی باز ماکسیمال از X وجود دارد که خانواده‌ی $\mathcal{F}$ روی آن هم‌پیوسته است. بویژه اگر f فضای متریک (X,d) را بتوی خودش بنگارد، آنگاه یک زیرمجموعه‌ی باز ماکسیمال از X وجود دارد که روی آن خانواده‌ی تکراری $\{f^n\}_{n\geq ۱}$ هم‌پیوسته است.

اکنون در شرایطی هستیم که می‌توانیم با استفاده از مفهوم هم‌پیوستگی مجموعه‌ی فاتو را تعریف کنیم.

۱–۳–۷ تعریف

فرض کنید $f:\hat{\mathbb{C}}\longmapsto\hat{\mathbb{C}}$ یک تابع هولومورفیک غیر ثابت باشد. مجموعه‌ی فاتوی نگاشت f که آن را با $F(f)$ نشان می‌دهیم، زیر مجموعه‌ی باز ماکسیمالی از $\hat{\mathbb{C}}$ است که خانواده‌ی $\{f^n\}$ روی آن هم‌پیوسته است.

۱–۳–۸ تعریف

متمم مجموعه‌ی فاتوی $F(f)$ را مجموعه‌ی «جولیای» نگاشت هولومورفیک f نامیده و آن را با $J(f)$ نمایش می‌دهیم.

۱–۳–۹ تذکر

همانطور که از تعریف روشن است، مجموعه‌ی فاتو مجموعه‌ای بازاست و مجموعه‌ی جولیا مجمموعه‌ای فشرده است. علاوه بر این مجموعه‌ی جولیا، مجموعه‌ای کامل است.

۱ـ۳ـ۱۰ تذکر

فرض کنید $f:\hat{\mathbb{C}}\longmapsto\hat{\mathbb{C}}$ یک نگاشت هولومورفیک غیر ثابت، و $g:\hat{\mathbb{C}}\longmapsto\hat{\mathbb{C}}$ یک تبدیل موبیوس دلخواه باشد. در این صورت اگر $S=gfg^{-1}$ آنگاه $F(S)=g(F(f))$ و $J(S)=g(J(f))$. همچنین اگر P عدد صحیح دلخواهی باشد آنگاه داریم: $F(f^p)=F(f)$ و $J(f^p)=J(f)$. یعنی مجموعه‌ی جولیای (فاتوی) هر تکراری از f با مجموعه‌ی جولیای (فاتوی) f یکی است.

۱ـ۳ـ۱۱ مثال

تابع $P:z\longmapsto z^{۲}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $|z|>۱$ آنگاه یک همسایگی باز از z مانند U وجود دارد که روی آن خانواده‌ی تکرارهای $\{P^n\}$ بطور یکنواخت به بینهایت میل می‌کند. اگر $|z|<۱$ باز هم یک همسایگی باز از z وجود دارد به قسمی که روی این همسایگی خانواده‌ی تکرارهای $\{P^n\}=(z,z^{۲},z^{۴},\cdots,z^{۲^n},\cdots)$، بطور یکنواخت به صفر میل می‌کند. از طرفی اگر $|z|=۱$ آنگاه در حالت کلی در مورد آن نظری نمی‌توان داد.

همانطور که دیده می‌شود، اگر $|z|=۱$ آنگاه در هر همسایگی از z هم نقاطی وجود دارند که مدارهای پیشروِ آنهاتحت P به بی‌نهایت میل می‌کند، و هم نقاطی وجود دارند که مدار پیشروِ آنها تحت P به صفر میل می‌کند هم نقاطی وجود دارند که در مورد همگرایی یا واگرایی مدار پیشروِ آنها نمی‌توان نظری داد. بنابراین خانواده تکرارهای $\{P^n\}$ در هیچ همسایگی از چنین نقطه‌ای (نقطه‌ی z با $|z|=۱$) نمی تواند نرمال باشد. بنابراین در این مثال مجموعه‌ی جولیا عبارت است از دایره‌ی یکه و مجموعه‌ی فاتو عبارت است از متمم آن. □

۱ـ۳ـ۱۲ مثال

فرض کنید $g(z)=(az+b)/(cz+d)$ که $ad-bc\neq ۰$ تبدیل موبیوسی باشد که فقط یک نقطه‌ی ثابت دارد. ابتدا فرض می‌کنیم که نقطه در بینهایت تنها نقطه‌ی ثابت g باشد، در این صورت باید

داشته باشیم $g(z) = z + \beta$ که در آن $\beta \neq 0$. لذا برای هر n داریم $g^n(z) = z + n\beta$ و بوضوح دیده می‌شود که وقتی n به بینهایت میل کند،$g^n(z)$ به بینهایت میل می‌کند. یعنی این که هر نقطه‌ی $z \in \hat{\mathbb{C}}$ یک همسایگی دارد که در آن همسایگی خانواده‌ی تکرارهای $\{g^n(z)\}_{n\geq 1}$ است. از این رو مجموعه‌ی فاتوی $F(g)$ عبارت است از تمام کُره‌ی ریمان $\hat{\mathbb{C}}$ و مجموعه‌ی جولیای $J(g)$ تهی است.

اگر $\zeta \in \mathbb{C}$ تنها نقطه‌ی ثابت g باشد، آنگاه تبدیل موبیوس $h(z) = 1/(z-\zeta)$ را در نظر گرفته و تعریف می کنیم $S(z) := hgh^{-1}(z)$. در این صورت بینهایت تنها نقطه‌ی ثابت S خواهد بود. از این رو همانند حالت قبل S یک انتقال بوده و در نتیجه $S^n(z) \longmapsto \infty$ هنگامی که $n \longmapsto \infty$. یعنی $F(S) = \hat{\mathbb{C}}$ و $J(S) = \emptyset$. حال با توجه به رابطه‌ی $S^n(z) = hg^nh^{-1}(z)$ اگر z را با $h(z)$ جایگزین کرده و سپس h^{-1} را از چپ اثر دهیم بدست می‌آوریم $g^n(z) = h^{-1}s^nh(z)$. اکنون از تذکر (؟؟) نتیجه می‌شود که $F(g) = \hat{\mathbb{C}}$ و $J(g) = \emptyset$. □

در شکل‌های (۱—۱)، (۱—۲)، (۱—۳) مجموعه‌های جولیای چند نگاشت نشان داده شده است.

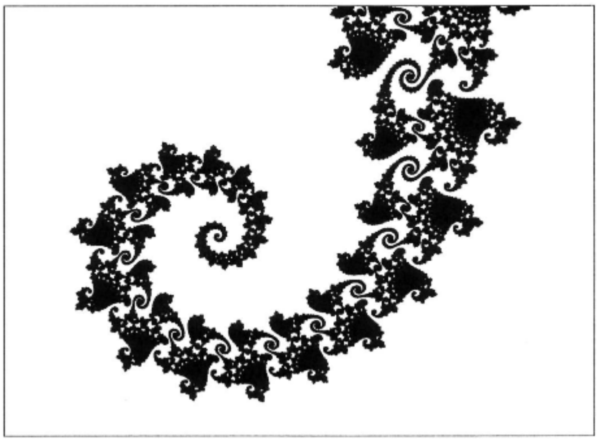
۱—۳—۱۳ تعریف

گوئیم مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ از چندجمله‌ای P، $Dendrite$ است، درصورتی که مجموعه‌ی فاتوی $F(P)$ همبند ساده و مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ همبند باشد.

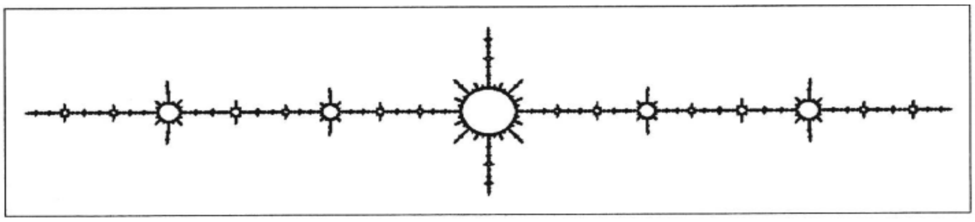
۱—۳—۱۴ مثال

همانطور که در شکل (۱—۴) نشان داده شده است مجموعه‌ی جولیای چندجمله‌ای $z \longmapsto z^2 + i$ یک مجموعه‌ی جولیای $Dendrite$ است.

این بخش را با قضیه بسیار مهمی در رابطه با مجموعه‌های جولیا به پایان می‌بریم که اثبات آن در [۵] بطور کامل آمده است.



شکل ۱—۱: مجموعه‌ی جولیای نگاشت $f : z \longmapsto z^{2} - 0/744336 + 0/121198i$



شکل ۱—۲: مجموعه‌ی جولیای نگاشت $f : z \longmapsto z^{2} - 1/75488\cdots$

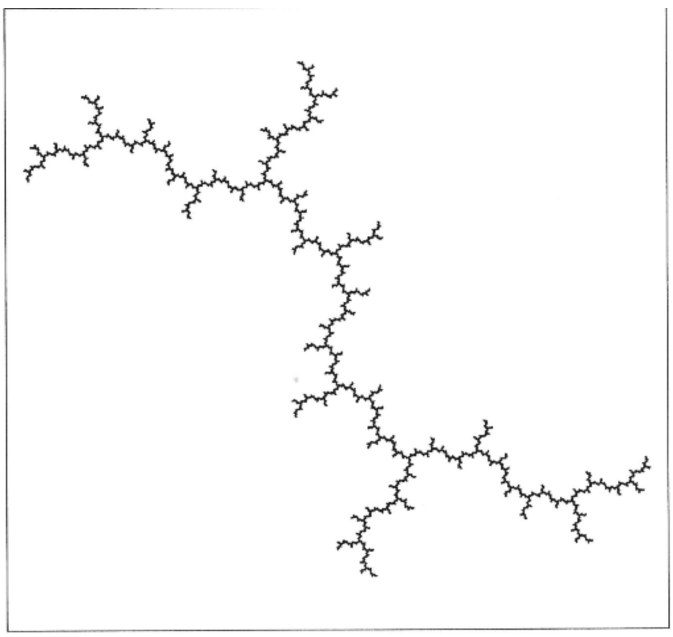
۱—۳—۱۵ تعریف

به هر نگاشت $R : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ به فرم $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن P, Q چندجمله‌ای‌هایی دلخواه از کره‌ی ریمان به روی خودش هستند، یک نگاشت گویا گفته می‌شود و درجهٔ آن بصورت $\deg R(z) = \max\{\deg P, \deg Q\}$ تعریف می‌شود.

۱—۳—۱۶ قضیه

فرض کنید R یک نگاشت گویا از درجهٔ $\deg R \geq 2$ باشد. در این صورت اگر $z \in J(R)$ آنگاه داریم $J(R) = \overline{\cap_{n=0}^{\infty} R^{-n}\{z\}}$. بویژه اگر P یک چندجمله‌ای از درجهٔ $d \geq 2$ باشد آنگاه برای هر نقطه‌ی $z \in J(p)$، مجموعه‌ی جولیای $J(p)$ برابر است با بستار «مدار پسرو» z تحت تکرارهای P.

شکل ۱—۳: مجموعه‌ی جولیای نگاشت $f : z \longmapsto z^{۲} + ۰/۴۲۴۵۱۳ + ۰/۲۰۷۵۳۰i$



شکل ۱—۴: یک درخت‌واره برای مجموعه‌ی جولیای $f : z \longmapsto z^{۲} + i$

۱—۴ نقاط بحرانی و نگاشت‌های متناهی درجه

۱—۴—۱ تعریف

گوئیم نقطه‌ی $c \in \mathbb{C}$ یک نقطه‌ی بحرانی از نگاشت $f : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ است، اگر f در هیچ همسایگی از c یک به یک نباشد.

قضیه زیر که اثبات آن بطور کامل در [۵] آمده است، کران بالائی برای تعداد نقاط بحرانی نگاشت‌های گویا و بویژه چندجمله‌ای‌هابدست می‌دهد.

۱—۴—۲ قضیه

یک نگاشت گویای $R : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ از درجه d حداکثر $۲d - ۲$ نقطه‌ی بحرانی در $\mathbb{C}$ دارد. بویژه یک چندجمله‌ای از درجهٔd حداکثر $d - ۱$ نقطه‌ی بحرانی در صفحه‌ی مختلط دارد.

۱—۴—۳ گزاره

چندجمله‌ای $P : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ از درجهٔ $d \geq ۲$ دارای d نقطه‌ی ثابت مجزا در $\mathbb{C}$ است اگر و تنها اگر برای هر نقطه‌ی ثابت w از P داشته باشیم $P'(w) \neq ۱$ [۵]. **اثبات.** w یک نقطه‌ی ثابت چندجمله‌ای P است اگر و تنها اگر یک صفر $P(z) - z$ باشد، اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$P(z) - z = (z - w)^k . Q(z) \qquad (۱—۱)$$

که $\circ < k \leq d$ و $Q(z)$ یک چندجمله‌ای است که $Q(w) \neq \circ$. در این صورت داریم $d = \deg P = \deg Q + k$. اگر از طرفین رابطه‌ی (۱—۱) مشتق بگیریم داریم:

$$P'(z) - ۱ = k(z - w)^{k-۱} . Q(z) + (z - w)^k . Q'(z) \qquad (۲—۱)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱—۲) می‌بینیم که $P'(w) = ۱$ اگر و تنها اگر $k > ۱$. بنابراین $P'(w) = ۱$ اگر وتنها اگر $\deg Q(z) \leq d - ۲$ و $\deg Q(z) \leq d - ۲$ اگر و تنها اگر P حداکثر $d - ۱$ نقطه‌ی ثابت مجزا

داشته باشد. □

فرض کنیم $P : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $d \geq ۲$ باشد. در این صورت P یک نگاشت d–لایه است. یعنی برای هر $w \in \hat{\mathbb{C}}$، معادله‌ی $P(z) = w$ دقیقاً d جواب (باشمردن چندگانگی) در z دارد.

۱–۴–۴ تعریف

نگاشت پوشای هولومورفیک $f : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ از درجهٔ‌متناهی N نامیده می‌شود، اگر یک نگاشت N–لایه باشد.

فرض کنیم S و S' دامنه‌هایی در کره‌ی ریمان باشند.

۱–۴–۵ تعریف

نگاشت هولومورفیک پوشای $P : S' \longmapsto S$ یک نگاشت پوششی نامیده می‌شود، اگر هر نقطه‌ی P از S یک همسایگی همبند مانند U داشته باشد به قسمی که هر یک از مؤلفه‌های $P^{-۱}(U) \subset S'$ (تحت P) بوسیله‌ی یک ایزومورفیسم همدیس بروی U نگاشته شوند.

۱–۴–۶ تعریف

یک نگاشت $P : S' \longmapsto S$، «$Proper$» است اگر برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subset S$، تصویر وارون $P^{-۱}(K)$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده از S' باشد.

۱–۴–۷ تذکر

هر نگاشت «$Proper$» متناهی درجه است. و گاهی اوقات نگاشت‌های «$Proper$» از درجهٔ‌متناهی d را نگاشت‌های پوششی شاخه‌ای d–لایه می‌نامیم.

به هر حال چون ممکن است یک نگاشت پوششی در حالت کلی متناهی درجه نباشد، تعریف کلی زیر را ارائه می‌دهیم.

۱—۴—۸ تعریف

یک نگاشت (پوشای) هولومورفیک $P : S' \longmapsto S$، یک نگاشت پوششی شاخه‌ای نامیده می‌شود، در صورتی که هر نقطه‌ی P از S دارای یک همسایگی همبند U باشد طوریکه هر مؤلفه‌ی $P^{-1}(U)$ توسط یک نگاشت $Proper$ تحت P بروی U نگاشته می‌شود.

۱—۵ تابع گرین و پرتوهای خارجی

از تعریف چندجمله‌ای می‌دانیم که بینهایت یک نقطه‌ی ثابت جاذب قوی از هر چندجمله‌ای است. بطور دقیق اگر P یک چندجمله‌ای دلخواه باشد آنگاه داریم: $P^{-1}\{\infty\} = \{\infty\}$.

۱—۵—۱ نمادگزاری

همانند تعریف (۱—۲—۷) حوزه‌ی جاذب بینهایت از تمام نقاط $z \in \hat{\mathbb{C}}$ تشکیل شده‌است که مدار پیشروِ آنها تحت P، $\{P^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$، هنگامی که n به بینهایت میل می‌کند به بینهایت میل کند. حوزه‌ی جاذب بینهایت را با A_∞ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$A_\infty = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{دنباله‌ی } \{P^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ غیر کراندار است} \right\}$$

۱—۵—۲ تعریف

متمم حوزه‌ی جاذب بینهایت در کُره‌ی ریمان، $\hat{\mathbb{C}} \setminus A_\infty$، را مجموعه‌ی جولیای کامل چندجمله‌ای P نامیده و آنرا با نماد $K(P)$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$K(P) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \text{دنباله‌ی } \{P^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ کراندار است}\right\}$$

۱—۵—۳ مثال

در شکل (۱—۷) سمت چپ مجموعه‌ی جولیای کامل نگاشت $f(c) = z^2 + c$ که $c \approx -1{,}130000 + (0{,}24033)i$، رسم شده است. دوره‌ی تناوب نقطه‌ی بحرانی f برابر با ٦ است.

چون بینهایت یک نقطه‌ی ثابت جاذب قوی از هر چندجمله‌ای P است، لذا مطابق قضیهٔ (۱—۲—۹)، یک تابع φ وجود دارد به قسمی که وقتی z به بینهایت میل می‌کند، $\varphi(z)$ نیز به بینهایت میل می‌کند و در یک همسایگی از بینهایت هولومورفیک بوده و در رابطه‌ی زیر صادق است

$$\varphi p \varphi^{-1}(z) = z^d \qquad (۱—۳)$$

که در آن d درجهٔ چندجمله‌ای P است. بطور صریح می‌توانیم یک همسایگی D از بینهایت طوری بیابیم که شرایط زیر برقرار باشند.

۱) بستار $P(D)$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده از D باشد.

۲) φ نزدیک بینهایت هولومورفیک بوده و به فرم زیر باشد.

$$\varphi(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_n}{z^n} + \cdots \qquad (۱—۴)$$

۳) φ، D را بروی یک مجموعه‌ای مانند $\{z; |z| > r\}$ که $r > 1$، تصویر می‌کند.

۴) روی D داریم:

$$\varphi(P(z)) = (\varphi(z))^d \qquad (۱—۵)$$

حال فرض کنیم P یک چندجمله‌ای از درجهٔ $d \geq ۲$ با مجموعه‌ی جولیای کامل $K(P)$ باشد.

۱—۵—۴ تعریف

تابع G که با ضابطه‌ی $G(z) = \log|\varphi(z)|$ روی D تعریف می‌شود، تابع پتانسیل متعارف یا تابع گرین از $K(P)$ نامیده می‌شود.

بوضوح تابع گرین در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$G(z) = \frac{G(P(z))}{d}. \qquad (۱—۶)$$

هرچند که تابع گرین را در یک همسایگی از بینهایت تعریف کردیم، اما یک و تنها یک توسیع از تابع گرین به تمام $\mathbb{C}$ وجود دارد به قسمی که پیوسته است و در رابطه‌ی (۱—۶) صدق می‌کند. در حقیقت برای هر $z \in K(P)$ تعریف می‌کنیم $G(z) = ۰$. و اگر $z \notin K(P)$ آنگاه n را آنقدر بزرگ اختیار می‌کنیم که $P^n(z)$ همسایگی D را قطع کند $(P^n(z) \in D)$ و سپس تعریف می کنیم

$$G(z) = \frac{G(P^n(z))}{d^n} = \begin{cases} ۰ & z \in K(f) \\ \frac{G(P^n(z))}{d^n} & P^n(z) \in D \end{cases} \qquad (۱—۷)$$

البته تابع گرین را بصورت زیر نیز می‌توانیم تعریف کنیم

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log^+|P^n(z)|}{d^n} \qquad (۱—۸)$$

که در آن

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & ۱ \leq x \\ ۰ & ۰ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

۱—۵—۵ تذکر

باید توجه کرد که تابع گرین در خارج از مجموعه‌ی جولیای $J(P)$، یک تابع تحلیلی، حقیقی مقدار و هموار است ولی در نقاط $J(P)$،تنها پیوسته است.

۱—۵—۶ تذکر

یک نقطه‌ی $z \in \mathbb{C} \setminus K$ یک نقطه‌ی بحرانی G است اگر و تنها اگر یک نقطه‌ی بحرانی تکراری از P باشد.

چندجمله‌ای $P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ که در آن $a_d \neq 0$ و $d \geq 2$ را درنظر می‌گیریم. عدد a_d را ضریب پیشروِ چندجمله‌ای P می‌نامیم. اگر ضریب پیشروِ چندجمله‌ای P برابر $+1$ باشد آنگاه گوئیم P یک چندجمله‌ای «تکین» است.

۱—۵—۷ تعریف

یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای از درجهٔ d عبارت است از سه تائی g, U, V که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱) U و V زیرمجموعه‌هائی از $\mathbb{C}$ هستند که با دیسک‌هایی ایزومورف هستند و $\bar{U} \subset V$

۲) $g : U \longmapsto V$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای هولومورفیک و $Proper$ و از درجهٔ d است.

مجموعه‌ی جولیای کامل g از تمام نقاطی تشکیل می‌شود که مدار پیشروِ آنها (دنباله‌ی تکرارهای آنها تحت g) هرگز U را ترک نمی‌کند. یعنی $K(g) = \cup_{n \geq 0} g^{-n}(U)$.

۱—۵—۸ تعریف

اگر نگاشت شبه—چندجمله‌ای $g : U \longmapsto V$ تنها یک نقطه‌ی بحرانی داشته باشد و از درجه دو (سه) باشد، آنگاه گوئیم g یک نگاشت شبه—درجهٔدوم (شبه—درجهٔسوم) است.

۱—۵—۹ قضیه

برای یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای P از درجه‌ی $d \geq 2$، دو حالت متقابل وجود دارد؛

۱) اگر مجموعه‌ی جولیای کامل $K(P)$ شامل تمام (تعدادمتناهی) نقاط بحرانی P باشد. آنگاه $K(P)$ و $J(P)=\partial(K(P))$ همبند هستند و $K(P)$ یک مجموعه‌ی «$Cellular$» است، بعلاوه نگاشت بوچر نزدیک بینهایت به یک نگاشت ایزومورفیسم همدیس $\varphi:\mathbb{C}\setminus K\longmapsto\mathbb{C}\setminus\bar{D}$ توسیع می‌یابد.

۲) اگر حداقل یکی از نقاط بحرانی P، $\mathbb{C}\setminus K(P)$ را قطع کندُ آنگاه هم $J(P)$ و هم $K(P)$ دارای تعداد ناشمارا مؤلفه‌های همبند هستند.

طبق قضیهٔ (۱—۵—۹)، $\mathbb{C}\setminus K$ با $\mathbb{C}\setminus\bar{D}$ تحت ایزومورفیسم همدیس $\varphi:\mathbb{C}\setminus K\longmapsto\mathbb{C}\setminus\bar{D}$، ایزومورف است که این نگاشت همدیس مطابق قضیه بوچر در رابطه‌ی (۵.۱) نیز صدق می‌کند و نسبت به ضرب بوسیله‌ی یک ریشه‌ی $(d-۱)$—ام واحد یکتا است. اگر P یک چندجمله‌ای تکین باشد آنگاه در رابطه‌ی (۱—۴) خواهیم داشت $b_۰=۰$ و از این رو هنگامی که $|z|\to\infty$، $\varphi(z)/z$ به یک میل خواهد کرد. لذا در صورت لزوم با استفاده از تغییر مختصات خطی، P را به یک چندجمله‌ای تکین تبدیل می‌کنیم و سپس نگاشت ایزومورفیسم همدیس در قسمت یک قضیه (۱—۵—۹) را درنظر می‌گیریم و معکوس این نگاشت را بصورت زیر نشان می‌دهیم

$$\psi:\mathbb{C}\setminus\bar{D}\longmapsto\mathbb{C}\setminus K. \qquad (۹—۱)$$

۱—۵—۱۰ تعریف

نگاره‌ی خط شعاعی $r_t=\left\{re^{۲\pi it}|r>۱\right\}$ تحت نگاشت همدیس ψ را پرتو خارجی از زاویه‌ی t در $\mathbb{C}\setminus K$ نامیده و آن را با R_t نمایش می‌دهیم و داریم:

$$R_t=\left\{\psi(re^{۲\pi it})|r>۱\right\}. \qquad (۱۰—۱)$$

فقط با عضوگیری نتیجه می‌شود که $P(R_t)=R_{dt(mod\ ۱)}$.

۱–۵–۱۱ تعریف

فرض کنید $1 < r < \infty$ و دایره‌ی $s_r = \left\{re^{2\pi it}|0 \leq t \leq 1\right\}$ به شعاع r را درنظر بگیرید. نگاره‌ی s_r تحت ψ را یک منحنی هم‌پتانسیل از P نامیده و آن را با نماد S_r بصورت زیر نمایش می‌دهیم

$$S_r = \left\{\psi(re^{2\pi it})|0 \leq t \leq 1\right\}. \qquad (۱–۱۱)$$

بوضوح و تنها با استفاده از عضوگیری نتیجه می‌شود که $P(S_r) = S_{r^d}$.

۱–۵–۱۲ تعریف

گوئیم پرتو خارجی R_t به نقطه‌ی z_t (که لزوماً به مجموعه‌ی $J(P)$ تعلق دارد) ختم می‌شود هرگاه داشته باشیم؛ $\lim\limits_{r\to 1} \psi(re^{2\pi it}) = z_t$

۱–۵–۱۳ تعریف

پرتو خارجی R_t را متناوب گوئیم هرگاه به ازای عدد صحیحی مانند k داشته باشیم $P^k(R_t) = R_t$. عدد صحیح k را که به ازای آن پرتوهای $R_t, P(R_t), \cdots, P^{k-1}(R_t)$ دوبدو مجزا هستند ولی $P^k(R_t) = R_t$ است، را دوره‌ی تناوب R_t می‌نامیم.

فرض کنیم w نقطه‌ی دلخواهی از S_r باشد. در این صورت برای یک $0 \leq t \leq 1$ داریم $w = \psi(re^{2\pi it})$. بنابراین داریم: $G(w) = \log|\varphi(w)| = \log|re^{2\pi it}| = \log r$. از این رو داریم:

$$G(S_r) = \log r. \qquad (۱–۱۲)$$

منحنی هم‌پتانسیل S_r را درنظرگرفته و فرض کنید که $V(r)$ ناحیه‌ی محدود به آن باشد. یعنی

$$V(r) = \{z|G(z) \leq \log r\} \quad , \quad \partial V(r) = S_r. \qquad (۱–۱۳)$$

۱—۵—۱۴ لم

فرض کنید هیچ یک از نقاط بحرانی G روی $\partial V(r)$ واقع نباشد. در این صورت اگر $m \geq ۰$ تعداد نقاط بحرانی G باشد که در $\mathbb{C} \setminus V(r)$ واقع هستند، آنگاه $V(r)$ اجتماع $m + ۱$ دیسک توپولوژیکی بسته است که هر یک مجموعه‌ی جولیا را قطع می‌کنند.

نتیجه‌ی بسیار مهم زیر که برای ساختن تکه‌های جدول یوکوز ضروری است، منصوب به یوکوز و دودی[۵] می‌باشد[۱۰].

۱—۵—۱۵ قضیه

اگر مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ همبند باشد، آنگاه هر نقطه‌ی متناوب دافع، نقطه‌ی مختوم حداقل یک پرتو خارجی است که لزوماً متناوب است.

فرض کنید چندجمله‌ای P از درجه‌ی $d \geq ۲$، هیچ نقطه‌ی ثابت w که در رابطه‌ی $P'(w) = ۱$ صدق کند، نداشته باشد. در این صورت از گزاره‌ی (۱—۴—۳) نتیجه می‌شود که P دقیقاً d نقطه‌ی ثابت مجزا در $\mathbb{C}$ دارد. همانطور که می‌دانیم نگاشت همدیس $\varphi : \mathbb{C} \setminus K \longmapsto \mathbb{C} \setminus \bar{D}$، چندجمله‌ای P را با نگاشت توان dام $z \longmapsto z^d$، مزدوج می‌کند. با توجه به اینکه نگاشت $z \longmapsto z^d$ دقیقاً $d - ۱$ نقطه‌ی ثابت روی دایره‌ی واحد بصورت زیر دارد (صفر نقطه‌ی ثابتی از آن است که روی دایره‌ی واحد قرار ندارد).

$$z_k = e^{\frac{۲k\pi i}{d-۱}} \quad , \quad k = ۰, ۱, ۲, \cdots, d - ۲$$

لذا ما پرتوهای خارجی $R_{\frac{k}{d-۱}} = \left\{\psi(re^{(۲k\pi i)/(d-۱)}) | r > ۱\right\}$ که $۰ \leq k \leq d - ۲$، را درنظر می‌گیریم.

---

[۵] Douady

۱—۵—۱۶ ادعا

ادعا می‌کنیم که چندجمله‌ای P هر یک از این پرتوهای خارجی را ثابت نگه می‌دارد. از این رو به آنها پرتوهای ثابت می‌گوئیم.

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم $P(R_{\frac{k}{d-1}}) = R_{\frac{k}{d-1}}$ که $0 \leq k \leq d-2$. فرض کنیم $0 \leq k \leq d-2$ و $w \in R_{\frac{k}{d-1}}$ دلخواه باشد. در این صورت برای $r > 1$ داریم؛ $w = \psi\left(re^{(2k\pi i)/(d-1)}\right)$. لذا داریم:

$$\begin{aligned} P(w) &= P\left(\psi\left(re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)\right) = Po\varphi^{-1}\left(re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) = \varphi^{-1}\left(\left(re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)^{d}\right) \\ &= \psi\left(r^{d}.\left(e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)^{d}\right) \end{aligned}$$

حال چون $e^{(2k\pi i)/(d-1)}$ یک نقطه‌ی ثابت نگاشت $z \longmapsto z^d$ است، لذا با قرار دادن $r' = r^d > 1$ بدست می‌آوریم؛ $P(w) = \psi\left(r'.e^{(2k\pi i)/(d-1)}\right) \in R_{\frac{k}{d-1}}$ از این رو داریم:

$$P\left(R_{\frac{k}{d-1}}\right) \subseteq R_{\frac{k}{d-1}}. \qquad (۱—۱۴)$$

دوباره فرض می‌کنیم که $\psi\left(re^{(2k\pi i)/(d-1)}\right)$ عضو دلخواهی از $R_{\frac{k}{d-1}}$ باشد، داریم؛

$$\begin{aligned} w &= \psi\left(re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) = \psi\left(\left(\sqrt[d]{r}.e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)^{d}\right) \overset{(1-3)}{=} Po\psi\left(\left(\sqrt[d]{r}.e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)^{d}\right) \\ &= Po\psi\left(\sqrt[d]{r}.e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) = P\left(\psi\left(\sqrt[d]{r}.e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)\right) \end{aligned}$$

حال چون $\psi\left(\sqrt[d]{r}.e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) \in R_{\frac{k}{d-1}}$ لذا داریم $w \in P(R_{\frac{k}{d-1}})$ از این رو بدست می‌آوریم:

$$R_{\frac{k}{d-1}} \subseteq P\left(R_{\frac{k}{d-1}}\right). \qquad (۱—۱۵)$$

حال از روابط (۱—۱۴) و (۱—۱۵) حکم $R_{\frac{k}{d-1}} = P\left(R_{\frac{k}{d-1}}\right)$ نتیجه می‌شود. □

۱—۵—۱۷ ادعا

ادعا می‌کنیم هر یک از پرتوهای ثابت $R_{\frac{k}{d-1}}$، $1 \leq k \leq 0$، به یک نقطه‌ی ثابت مجزای P ختم می‌شود.

اثبات. فرض کنیم پرتو ثابت $R_{\frac{k}{d-1}}$ به نقطه‌ی w ختم شود. پس داریم؛ $w = \left(\psi\left(re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)\right) \lim\limits_{r\to 1}$.
حال داریم:

$$\begin{aligned} P(w) &= P\left(\lim_{r\to\infty}\psi\left(re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)\right) \xlongequal{\text{نگاشت } \psi \text{ پیوسته است}} Po\psi\left(\lim_{r\to 1} e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) = Po\psi\left(e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) \\ &\xlongequal{\text{از رابطه‌ی } (1-3)} \psi\left(\left(e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right)^d\right) = \psi\left(e^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) = \psi\left(\lim_{r\to 1} re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) \xlongequal{\psi \text{ پیوسته است}} \lim_{r\to\infty}\psi\left(re^{\frac{2k\pi i}{d-1}}\right) \\ &= w \end{aligned}$$

لذا w یک نقطه‌ی ثابت P است. بوضوح پرتوهای ثابت مجزا به نقاط ثابت مجزا ختم می‌شوند. □

اکنون فرض کنید P یک چندجمله‌ای از درجهٔ $d \geq 2$ است که مجموعه‌ی جولیای آن همبند است، تمام مدارهای متناوب آن دافع هستند و هر پرتو ثابت آن به یک نقطه‌ی ثابت مجزایش ختم شود.

۱—۵—۱۸ تذکر

با توجه به لم (۱—۵—۱۵) یک نقطه‌ی ثابت از P باقی می‌ماند که نقطه‌ی مختوم هیچ پرتو ثابتی نیست. اما چون با توجه به مفروضات بالا این نقطه، یک نقطه‌ی ثابت دافع است لذا از قضیه (۱—۵—۱۵) نتیجه می‌شود که یک پرتو خارجی متناوب وجود دارد که به این نقطه‌ی ثابت ختم می‌شود. این نقطه‌ی ثابت را با «α» نمایش می‌دهیم. و در تمام این متن منظور از نقطه‌ی ثابت α همین نقطه‌ای است که آن را توصیف کردیم. نقطه‌ی «α» واجد این خاصیت است که $J(P) \setminus \{\alpha\}$ ناهمبند است.

۱—۶ طوق‌ها و نابرابری گروتز

۱—۶—۱ تعریف

هر دامنه‌ی همبند دوگانه را یک طوق می‌نامیم.

۱—۶—۲ تعریف

اگر طوق A با طوق $A_r = D_r \setminus \overline{D}_۱$ (که D_r دیسک توپولوژیکی بسته به مرکز مبدأ و به شعاع r است) بطور همدیس ایزومورفیسم باشد آنگاه قدرمطلق طوق A که آن را با $\operatorname{mod} A$ نمایش می‌دهیم را برابر با $\log r$ تعریف می‌کنیم.

۱—۶—۳ تذکر

اگر مجموعه‌ی باز U بطور فشرده مشمول در مجموعه‌ی بازوهمبند ساده V باشد آنگاه تفاضل $V \setminus \overline{U}$ یک طوق است. همچنین اگر U زیرمجموعه‌ی بازی از مجموعه‌ی باز V باشد ولی V مرز U را قطع کند، آنگاه به قدر مطلق طوق $A = V \setminus U$ عدد صفر را نسبت می‌دهیم. و در این حالت گوئیم طوق A رو به زوال است.

فرض کنید U, V, W زیر مجموعه‌های بازی از صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$ باشند بطوریکه داشته باشیم $\overline{U} \subseteq V$ و $\overline{V} \subseteq W$. همچنین فرض کنید $A_۱ = V \setminus \overline{U}$، $A_۲ = W \setminus \overline{V}$ و $A = W \setminus \overline{U}$.

۱—۶—۴ گزاره

فرض کنید $A, A_۱, A_۲$ همان طوق‌های معرفی شده در بالا باشند. در این صورت داریم

$$\operatorname{mod}(A_۱) + \operatorname{mod}(A_۲) \leq \operatorname{mod} A$$

۱—۶—۵ قضیه برانر و هوبارد

فرض کنید $k_۱ \subset k_۲ \subset k_۳ \subset \cdots$ زیر مجموعه‌های فشرده‌ای از $\mathbb{C}$ باشند به قسمی که هر $k_{n+۱}$ مشمول در درون k_n است. همچنین فرض کنید هر k_n° (درون k_n) همبند ساده بوده و $A_n = k_n^\circ \setminus k_{n+۱}$ یک

طوق باشد. در این صورت اگر مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \text{mod }(A_n)$ نامتناهی باشد آنگاه مقطع $\cap_{n=1}^{\infty} k_n$ به تنها یک نقطه تقلیل پیدا می‌کند.

۱—۶—۶ گزاره

فرض کنید $f : V \longmapsto V'$ یک نگاشت پوششی هولومورفیک و از درجهٔ d باشد که طوق توپولوژیکی $A = V \setminus \overline{U}$ را بروی طوق توپولوژیکی $A' = V' \setminus \overline{U'}$ می‌نگارد. در این صورت داریم:

$$\text{mod }(A) \geq \frac{1}{d} \text{ mod }(A')$$

نابرابری گروتز و قضیهٔ (۱—۶—۵) ابزار بسیار کارامدی در بحث موضعاً همبندی به شمار می‌روند.

۱—۷ نگاشت‌های شبه—چندجمله‌ای تعمیم یافته و سازی

فرض کنید $V^\circ \subseteq \mathbb{C}$ (علامت صفر در بالای V° یک اندیس است و منظورمان درون V نیست) یک دیسک توپولوژیکی باز باشد و $\cup_i V_i$ یک خانواده‌ی شمارا از دیسک‌های توپولوژیکی باز دوبدو مجزا باشد که هر یک از V_iها بطور فشرده مشمول در V° هستند. یعنی برای هر i, j که $i \neq j$، داریم $V_i \cap V_j = \emptyset$ و $\cup_i \overline{V}_i \subseteq V^\circ$. برای هر i فرض کنید $g_i : V_i \longmapsto V^\circ$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای هولومورفیک و متناهی‌درجه باشد . نگاشت زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} g :\ & \cup_i V_i \longmapsto V^\circ \\ & g|_{V_i} := g_i \end{aligned} \qquad (۱—۱۶)$$

۱—۷—۱ تعریف

گوئیم نگاشت g معرفی شده در بالا یک نگاشت شبه‌چندجمله‌ای تعمیم یافته است، اگر g فقط تعداد متناهی نقطه‌ی بحرانی داشته باشد.

۱—۷—۲ تعریف

اگر نگاشت شبه‌چندجمله‌ای تعمیم یافته g تنها یک نقطه‌ی بحرانی c داشته باشد و $g_\circ : V_\circ \longmapsto V^\circ$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای هولومورفیک از درجهٔ‌دو (سه) باشد، آنگاه g را یک نگاشت شبه—درجهٔ دوم (سوم) تعمیم یافته می‌نامیم.

بوضوح اگر g یک نگاشت شبه—درجهٔ دوم (سوم)تعمیم یافته باشد، آنگاه از مجزا بودن V_iها نتیجه می‌شود که هرنگاشت $g_i : V_i \longmapsto V^\circ$ که $i \neq \circ$، یک نگاشت یک به یک است (در حقیقت یک نگاشت ایزومورفیسم همدیس است).

۱—۷—۳ تعریف

فرض کنید U و V زیرمجموعه‌های بازی از $\mathbb{C}$ باشند و نگاشت هوموموفیسم $f : U \mapsto V$ را در نظر بگیرید. گوئیم f یک نگاشت k—شبه همدیس است، در صورتی که برای هر طوق $A \subset U$ داشته باشیم:

$$\frac{۱}{k} \pmod A \leq \operatorname{mod} f(A) \leq k \pmod A \qquad (۱۷—۱)$$

بوضوح نگاشت‌های ۱—شبه همدیس همان ایزومورفیسم‌های همدیس هستند.

۱—۷—۴ تعریف

دو نگاشت شبه—چندجمله‌ای $g_۱ : U_۱ \longmapsto V_۱$ و $g_۲ : U_۲ \longmapsto V_۲$ «معادل هیبرید» نامیده می‌شوند، اگر همسایگی‌های باز $W_۱$ و $W_۲$ به ترتیب حول $K(g_۱)$ و $K(g_۲)$ و یک نگاشت شبه—همدیس

$h : W_1 \longmapsto W_2$ موجود باشند به قسمی که h روی $K(g_1)$ هولومورفیک باشد و در رابطه‌ی زیر صدق کند.

$$hog_1oh^{-1}|_{W_2} = g_2 \qquad (۱۸-۱)$$

رده‌ی تمام نگاشت‌های شبه‌چندجمله‌ای که با نگاشت شبه‌چندجمله‌ای مفروض g معادل هیبرید هستند را «رده‌ی درونی g» نامیده و با $c(g)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۷-۵ قضیه یکنواخت سازی

هر نگاشت شبه‌چندجمله‌ای $g : U \longmapsto V$ از درجهٔ d با یک چندجمله‌ای P از درجهٔ d معادل هیبرید است. بعلاوه اگر $K(g)$ همبند باشد، آنگاه P نسبت به مزدوجی آفین، یکتا است[۳].

فرض کنید P یک چندجمله‌ای از درجهٔ $d \geq ۲$ بوده و c یک نقطه‌ی بحرانی از P باشد.

۱-۷-۶ تعریف

گوئیم چندجمله‌ای P در نقطه‌ی بحرانی c پذیراست، هرگاه یک همسایگی باز U از c و یک عدد صحیح $n \geq ۲$ وجود داشته باشند به قسمی که نگاشت $P^n|_U : U \longmapsto P^n(U)$ یک نگاشت شبه‌چندجمله‌ای باشد و مدار نقطه‌ی بحرانی تحت P^n هرگز U را ترک نکند. یعنی برای هر $k \in N$ داشته‌باشیم $P^{kn}(c) \in U$. عدد صحیح $n \geq ۲$ را دوره‌ی سازی می‌نامیم.

۱-۷-۷ تعریف

فرض کنید P یک چندجمله‌ای درجهٔدو (سه) باشد که تنها یک نقطه‌ی بحرانی c دارد. گوئیم P در نقطه‌ی بحرانی پذیراست، اگر یک همسایگی باز U از c وجود داشته باشد به قسمی که رابطه‌ی (۱-۱۹) یک نگاشت شبه-درجهٔدوم (سوم) باشد و برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $P^{kn}(z) \in U$.

$$P^n|_U : U \longmapsto P^n(U) \qquad (۱۹-۱)$$

۱—۷—۸ مثال

در شکل (۱—۵) نرمال‌سازی نگاشت $f : z \longmapsto z^{۲} - ۱/۷۵$ نمایش داده شده است

۱—۷—۹ مثال

در سمت راست دامنه، برد و مجموعه‌ی جولیای کامل نرمال‌سازی $f^{۲} : U_{۲} \longmapsto V_{۲}$ نشان داده شده است. نگاشت نرمال‌سازی با «خرگوش دودی» با «رده‌ی درونی» $c \approx -۰/۲۲۵۶۱ + (۰/۷۴۴۸۶۲)i$ معادل هیبرید است.

۱—۷—۱۰ تذکر

فرض کنید P یک چندجمله‌ای درجهٔدو (سه) باشد که در تک نقطه‌ی بحرانی c نرمال‌پذیراست و زنجیر زیر را در نظربگیرید.

$$U \longmapsto P(U) \longmapsto P^{۲}(U) \longmapsto \cdots \longmapsto P^{n-۱}(U) \longmapsto P^{n}(U) \qquad (۱—۲۰)$$

ابتدا چون $P(U)$ دارای مقدار بحرانی است لذا $P|_U : U \longmapsto P(U)$ یک نگاشت پوششی درجهٔدوم (سوم) است. حال چون نگاشت (۱—۱۹) یک نگاشت پوششی درجهٔدوم (سوم) است لذا لازم است که در زنجیر (۱—۲۰) تمام نگاشت‌های $P_{|_{P^k(U)}} : P^k(U) \longmapsto P^{k+۱}(U)$ که $۱ \leq k \leq n-۱$، ایزومورفیسم‌های همدیس باشند. و این به این معنا است که مجموعه‌های $P(U), P^{۲}(U), \cdots, P^{n-۱}(U)$ از نقطه‌ی بحرانی c مجزا هستند. یعنی $c \notin \bigcup_{k=۱}^{n-۱} P^k(U)$.

۱–۷–۱۱ تعریف

اگر $F: U' \longmapsto V'$ یک نرمال‌سازی از نگاشت P باشد آنگاه مجموعه‌ی جولیای کامل $K(F)$ را یک مجموعه‌ی جولیای کامل کوچک نامیم.

۱–۷–۱۲ تعریف

فرض کنید P یک چندجمله‌ای درجهٔدوم باشد که تنها یک نقطه‌ی بحرانی c دارد.گوئیم P نرمال‌پذیر ساده است درصورتی که یک نرمال‌سازی $F = P^n|_U : U \longmapsto P^n(U)$ از P موجود باشد که در شرط زیر صدق کند؛ برای هر $0 \leq i < j < n$، مقطع $P^i(K(F)) \bigcap P^j(K(F))$ یا تهی باشد و یا تنها از نقطه‌ای تشکیل شده باشد که حذف آن هیچ یک از این دو مجموعه را ناهمبند نمی‌کند.

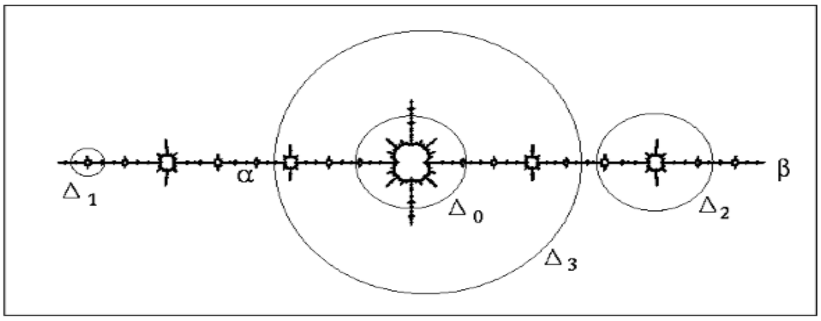
۱–۷–۱۳ مثال

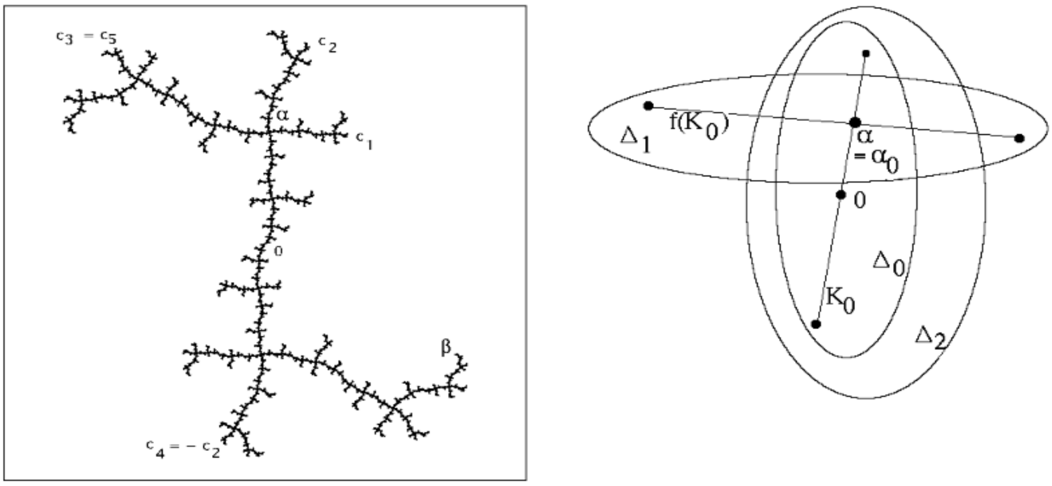
در شکل (۱–٦) یک مثال از نرمال‌سازی ساده‌ی نگاشت $f(z) = z^2 + 0/41966438 + (0/60629073)i$ در سمت چپ و نرمال‌سازی آن در سمت راست نشان داده شده است.

۱–۷–۱۴ تعریف

یک نگاشت شبه–درجهٔدوم با یک نقطه‌ی بحرانی $F : U \longmapsto V$ «دو بار نرمال‌پذیر» گفته می‌شود در صورتی که F یک نرمال‌سازی به صورت $F_1 = F^{m_1} : U_1 \longmapsto V_1$ داشته باشد که یکبار نرمال‌پذیر است. یعنی نگاشت شبه–درجهٔدومی مانند $F_2 = F_1^{m_2} : U_2 \longmapsto V_2$ وجود دارد که یک نرمال‌سازی از F_1 است.

بطور مشابه یک نگاشت شبه–درجهٔدوم k بار نرمال‌پذیرتعریف می‌شود. در این صورت خانواده‌ی نرمال‌سازی‌های $F : U \longmapsto V$ به صورت $\{F_i = F^{m_i} : U_i \longmapsto V_i\}_{i=1}^{k}$ بدست می‌آید که در آن $m_1 < m_2 < \cdots < m_h$.

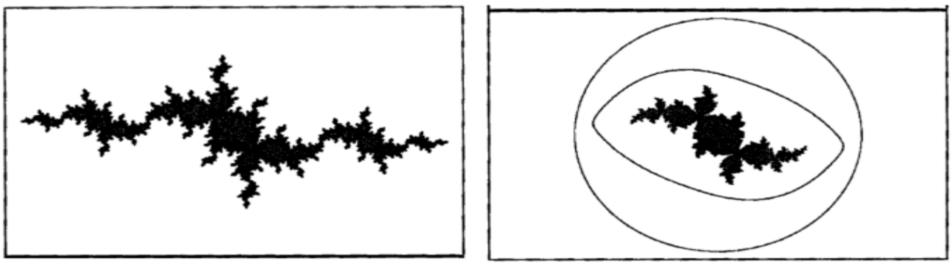




شکل ۱—۶: مجموعه‌ی جولیای نگاشت $f(z) = z^{2} + 0{,}419664338 + 0{,}60629073i$ (چپ) و نرمال‌سازی آن (راست)

۱—۷—۱۵ تعریف

گوئیم نگاشت شبه—درجه‌ٔدوم $F : U \longmapsto V$ که فقط دارای یک نقطه‌ی بحرانی است بینهایت بار نرمال‌پذیر است، در صورتی که برای هر $k \in \mathbb{N}$ ،$F;k$ بار نرمال‌پذیرباشد.



(ب) (الف)

شکل ۱–۷: مجموعه‌ی جولیای نگاشت $f(z) = z^{2} - 1{,}13000 + (0{,}24033)i$ به همراه دامنه و برد یک ۲– نرمال‌سازی از آن

فصل ۲

موضعاً همبندی مجموعه‌های جولیای درجهٔ‌دوم

۲—۱ مقدمه

در این بخش قضیه زیر راثابت می کنیم که منسوب به یوکوز می‌باشد.

۲—۱—۱ قضیه

فرض کنید چند جمله‌ای درجهٔ‌دوم تک—بحرانی (چند جمله‌ای که فقط دارای یک نقطه بحرانی می‌باشد) $f : z \longmapsto z^{۲} + c$ در شرایط زیر صدق کند؛

۱) مجموعه جولیای $J(f)$ همبند باشد.

۲) هر دو نقطه ثابت f دافع باشند.

۳) f نرمال‌پذیر ساده نباشد.

در این صورت مجموعه جولیای $J(f)$ موضعاً همبند است.

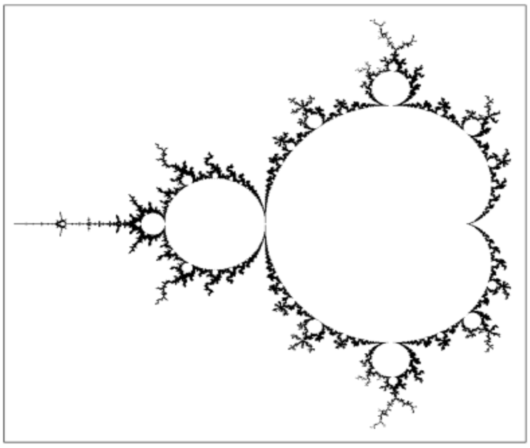
یک نقطه‌ی ثابت به طور اصم بی‌اثر ζ از چندجمله‌ای f،Gremer است در صورتی که به مجموعه‌ی جولیای $J(f)$ تعلق داشته باشد. و اگر $\zeta \notin J(f)$ آنگاه ζ یک نقطه‌ی ثابت به طور اصم بی‌اثرSiegle است. البته شرط های (۲) و (۳) را می‌توان با شروط (′۲) و (′۳) در زیر عوض کرد؛

′۲) f هیچ نقطه‌ی ثابت «به طور اصم بی‌اثر» Gremer یاSiegle نداشته باشد.

′۳) f بینهایت بارنرمال پذیر نباشد.

۲—۱—۲ تعریف

مجموعه مندلبرات مجموعه‌ای است متشکل از تمام پارامترهای $c \in \mathbb{C}$ به قسمی که چندجمله‌ای تک—بحرانی $f : z \longmapsto z^{۲} + c$ دارای مجموعه جولیای همبند باشد. مجموعه‌ی مندلبرات را با نماد M نمایش می‌دهیم.



شکل ۲—۱: مجموعه‌ی مندلبرات

۲—۱—۳ تعریف

زیر مجموعه $E \subseteq \mathbb{C}$ را یک مجموعه کانتور گوییم اگر E یک مجموعه‌ی ناتهی، بسته، کامل و کلاً ناهمبند باشد.

اگر $c \notin M$ آنگاه مجموعه‌ی جولیای چندجمله‌ای $f : z \longmapsto z^{۲} + c$ یک مجموعه‌ی کانتور بوده لذاموضعاً همبند نیست. از این رو در بحث موضعاً همبندی همواره $J(f)$ همبند می‌باشد. سولیوان[۱] [۷] و دودی [۱] ثابت کردند که مجموعه‌ی جولیای چندجمله‌ای‌هایی که نقطه ثابت Gremer دارند،هرگز موضعاً همبند نیست. همچنین می‌توانید به[۱۱] رجوع کنید.

در مرجع [۱۱] دسته‌ای از چندجمله‌ای‌هایی که بینهایت بارنرمال پذیر هستند و مجموعه‌ی جولیای آنها موضعاً همبند نیست، توصیف شده‌اند. یوکوز نشان داده است که برای هر پارامتر c که به مجموعه‌ی مندلبرات تعلق دارد، اگر $f : z \longmapsto z^{۲} + c$ بینهایت بار نرمال پذیر نباشد، آنگاه M در c موضعاً همبند است. برهانی از این نتیجه را می‌توانید در [۸] بیابید. ابتدا در بخش (۲—۲) جدول یوکوز را به استقراً بدست می‌آوریم و سپس زیرمجموعه‌ی ویژه $J_{۰}$ از $J(f)$ را معرفی می‌کنیم. سپس برای هر مدار $z_{۰} \mapsto z_{۱} \mapsto z_{۲} \mapsto \cdots$ یک تابلوی مرتبط معرفی می‌کنیم. تابلوی مرتبط با مدار بحرانی (۲—۱) که

---
[۱] Sullivan

آن را تابلوی بحرانی می‌نامیم نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند.

$$0 = c_0 \mapsto c_1 \mapsto c_2 \mapsto \cdots \mapsto c_n \mapsto \cdots \qquad (۱-۲)$$

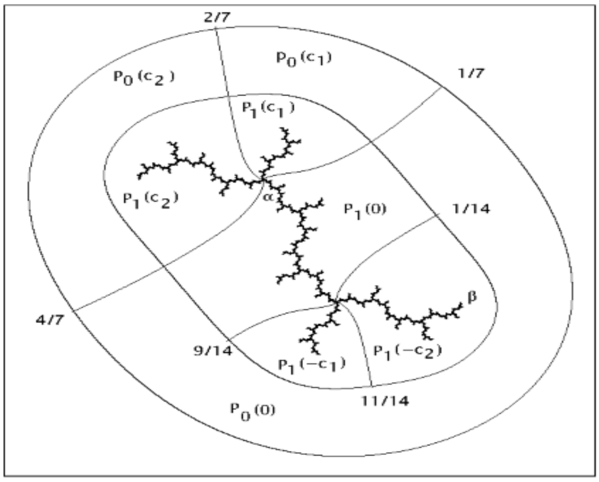
پس از آن در بخش (۲-۳) طی اثبات لم‌هایی شرایط را برای اثبات قضیهٔ‌اصلی فراهم کرده و قضیهٔ‌اصلی را به اثبات می‌رسانیم.

۲-۲ جدول یوکوز

فرض کنید نقطه ثابت α از f همانی باشد که در (۱-۱۳) معرفی شد. یعنی α نقطه ثابت جدانشدنی f باشد ($J(f) \setminus \{\alpha\}$ ناهمبند است). در این صورت چون طبق فرض قضیه، α یک نقطه‌ی ثابت دافع f است لذا بنا بر قضیهٔ (۱-۵-۱۵) یک دور از $q \geq 2$ پرتو خارجی وجود دارد که به نقطه α ختم می‌شوند و تحت f به طور متوالی به روی هم نگاشته می‌شوند. فرض کنید $0 = c_0 \mapsto c_1 \mapsto c_2 \mapsto \cdots$ مدار بحرانی باشد. ناحیه‌ی $G \leq 1$، ناحیه‌ی محدود به منحنی هم پتانسیل (۲-۲) را توسط این q پرتو خارجی برش می‌زنیم که از آن q دیسک توپولوژیکی بسته‌ی غیر متداخل $Y^0(0), Y^0(c_1), \cdots, Y^0(c_{q-1})$ بدست می‌آید که آنها را تکه‌های جدول یوکوز از عمق صفر می‌نامیم.

$$S_{10} = \left\{ \psi\left(10 e^{2\pi i t}\right) | 0 \leq t \leq 1 \right\} \qquad (۲-۲)$$

مجموعه‌ی این تکه‌ها را جدول یوکوز از عمق صفر می‌نامیم. برای هر $0 \leq i \leq q-1$ تکه‌ی جدول $Y^0(c_i)$ تکه‌ای در عمق صفر است که شامل نقطه‌ی $c_i = f^i(c_0)$ است. اگر $Y^d_{(1)}, Y^d_{(2)}, \cdots, Y^d_{(m)}$ تکه‌های جدول در عمق d باشند، آنگاه مؤلفه‌های مجموعه‌های $f^{-1}(Y^d_{(i)})$، $0 \leq i \leq q-1$، تکه‌های جدول یوکوز در عمق $d+1$ را تشکیل می‌دهند. به عنوان مثال تنها $2q-1$ تکه‌ی جدول در عمق 1 وجود دارد. تکه‌های $Y^1(c_0), Y^1(c_1), \cdots, Y^1(c_{q-1})$ که از برش زدن ناحیه‌ی هم‌پتانسیل $f^{-1}\{G \leq 1\}$ توسط q پرتو خارجی مختوم به نقطه‌ی ثابت α بدست آمده‌اند؛ به همراه تکه‌های



شکل ۲—۲: تکه‌های جدول یوکوز در عمق‌های صفر و یک برای نگاشت $f(z)=z^{2}+i$

$Y^{1}(-c_{1}),\cdots,Y^{1}(-c_{q-1})$ که از برش زدن ناحیه‌ی $f^{-1}\{G\leq 1\}$ توسط q پرتو خارجی که به نقطه‌ی $-\alpha\in f^{-1}\{\alpha\}$ ختم می‌شوند، بدست آمده‌اند. در حالت کلی برای بدست آوردن تکه‌های در عمق d،ناحیه‌ی $f^{-d}\{G\leq 1\}$ را توسط پرتوهای خارجی مختوم به نقاط مجموعه‌ی $f^{-d}\{\alpha\}$ برش می‌زنیم.

۲—۲—۱ مثال

در شکل (۲—۲) تکه‌های جدول یوکوز از عمق‌های صفر و یک برای نگاشت $f:z\longmapsto z^{2}+i$ نشان داده شده‌اند. در این مثال داریم $q=3$ همچنین $R_{\frac{1}{7}}$، $R_{\frac{2}{7}}$ و $R_{\frac{4}{7}}$ سه پرتو خارجی مختوم به نقطه‌ی ثابت α هستند.

۲—۲—۲ نمادگذاری

مدار پسروِنقطه‌ی ثابت α را با نماد J_{0} نمایش می‌دهیم. یعنی

$$J_{0}=\bigcup_{n\geq 0}f^{-n}\{\alpha\} \tag{۲—۳}$$

بوضوح برای هر نقطه‌ی $z_\circ \notin J_\circ$، مدار پیشروِ $z_\circ$ هرگز به α نمی‌رسد. از این رو یک دنباله‌ی یکتا از تکه‌های جدول تودرتو بصورت زیر وجود دارد که شامل نقطه‌ی $z_\circ$ هستند.

$$Y^\circ(z_\circ) \supseteq Y^۱(z_\circ) \supseteq Y^۲(z_\circ), \supseteq Y^۳(z_\circ), \supseteq \cdots \qquad (۲-۴)$$

۲-۲-۳ مسئله‌ی اصلی

فرض کنید $z \in J \setminus J_\circ$. همچنین فرض کنید $Y^d(z)$ یکتا تکه جدول در عمق d باشد که شامل z است. در این صورت آیا مقطع $\bigcap_{d\geq \circ} Y^d(z)$ از تنها یک نقطه تشکیل شده است. که درصورت مثبت بودن جواب هر همسایگی از نقطه‌ی z شامل یک تکه جدول $Y^d(z)$ خواهد بود. از طرفی طبق لم (۳-۲-۱) که در فصل ۳ ثابت خواهیم کرد برای هر $d \geq \circ$، مقطع زیر همبند است.

$$Y^d(z) \bigcap J(f) \qquad (۲-۵)$$

لذا درصورت لزوم با انجام اصلاحاتی روی دنباله‌ی $\{Y^d(z)\}_{d=\circ}^{\infty}$ به یک پایه‌ی موضعی برای $J(f)$ در نقطه‌ی $z \in J \setminus J_\circ$ می‌رسیم.

۲-۲-۴ طوق‌های مرتبط با جدول یوکوز

همانند برانر و هوبارد تکه‌های جدولی $Y^d(z) \supseteq Y^{d+۱}(z)$ از دو عمق متوالی‌ا که شامل نقطه‌ی $z \in J \setminus J_\circ$ هستند، را درنظر می‌گیریم. با خوش‌شانسی می‌بینیم که تکه‌ی کوچکتر $Y^{d+۱}(z)$ مشمول در درون تکه‌ی بزرگتر $Y^d(z)$ است. یعنی

$$\overline{Y^{d+۱}}(z) \subseteq Y^d(z) \qquad (۲-۶)$$

در این حالت طوق (۲-۷)، یک طوق از قدرمطلق مثبت خوش‌تعریف است.

$$A_d(z) = \left(int\ Y^d(z)\right) \setminus Y^{d+۱}(z) \qquad (۲-۷)$$

یک چنین طوقی، طوق غیر رو به زوال نامیده می‌شود. در حالتی که تکه جدول $Y^d(z)$ مرز $Y^{d+1}(z)$ را قطع می‌کند، طوق $A_d(z)$ رو به زوال نامیده می‌شود و قدرمطلق آن را برابر صفر تعریف می‌شود. قدرمطلق طوق $A_d(z)$ را با نماد $\mathrm{mod}\ A_d(z)$ نمایش می‌دهیم.

۲—۲—۵ مثال

در شکل (۲—۲) طوق $A_\circ(-c_1)$ غیر رو به زوال است ولی طوق $A_\circ(\circ)$ رو به زوال است. که منظور از $P_\circ(c_i)$ همان $Y^\circ(c_i)$ و منظور از $P_1(c_i)$ همان $Y^1(c_i)$ است.

۲—۲—۶ مسئله‌ی اصلی اصلاح شده

برای نقطه‌ی مفروض $z \in J \setminus J_\circ$ آیا مجموع $\sum_{d\geq\circ} \mathrm{mod}\ A_d(z)$ نامتناهی است. اگر این مجموع نامتناهی باشد آنگاه طبق قضیّه‌ی (۱—۶—۵) مقطع $\bigcap_{d\geq\circ} Y^d(z)$ به تنها یک نقطه تقلیل می‌یابد.

فرض خیلی مهم: در تمام این فصل فرض می‌کنیم $\circ \notin J_\circ$. یعنی مدار نقطه‌ی بحرانی هرگز به نقطه‌ی ثابت α ختم نمی شود. در حالتی که $\circ \in J_\circ$، موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیا در [۱۱ ،۳] به اثبات رسیده است.

فرض کنید $z \in J \setminus J_\circ$. دنباله‌ی $\left\{Y^d(z)\right\}_{d=\circ}^{\infty}$ را با دنباله‌ی $\left\{Y^d(\circ)\right\}_{d=\circ}^{\infty}$ به صورت زیر مقایسه می‌کنیم. عمق نیمه بحرانی $S(z)$ را به عنوان بزرگترین عدد صحیح $d \geq \circ$ تعریف می‌کنیم که برای آن داشته باشیم $Y^d(z) = Y^d(\circ)$. اگر برای هر $d \geq \circ$ داشته باشیم $Y^d(z) = Y^d(\circ)$ آنگاه $S(z)$ را برابر بینهایت تعریف می‌کنیم. اگر برای هر $d \geq \circ$ داشته باشیم $Y^d(z) \neq Y^d(\circ)$ آنگاه تعریف می‌کنیم $S(z) = -1$. از این رو هر چه نقطه‌ی z به نقطه‌ی بحرانی نزدیک‌تر باشد، $S(z)$ نیز بزرگ‌تر خواهد بود. برای هر نقطه $z \in J \setminus J_\circ$ می‌توانیم مدار(۲—۸) و دنباله‌ی (۲—۱۰) را به هم مرتبط کنیم.

$$z_\circ \longmapsto z_1 \longmapsto z_2 \longmapsto \cdots \qquad (۸—۲)$$

$$c_\circ \longmapsto c_1 \longmapsto c_2 \longmapsto \cdots \qquad (۹—۲)$$

$$\{s(z_i)\}_{i=0}^{\infty} = s(z_0), s(z_1), s(z_2), \cdots \qquad (۱۰-۲)$$

$$\{s(c_i)\}_{i=0}^{\infty} = s(c_0), s(c_1), s(c_2), \cdots \qquad (۱۱-۲)$$

به ویژه ارتباط بین مدار بحرانی (۲—۹) و دنباله (۲—۱۱) از اهمیّت بسیار ویژه‌ای برخوردار است.

۲—۲—۷ تعریف

(تابلو) تابلوی مرتبط با مدار $\cdots \longmapsto z_2 \longmapsto z_1 \longmapsto z_0$ در J، آرایه‌ای است که وابسته به هر z_i یک ستون و وابسته به هر عمق d در جدول یوکوز یک سطر دارد. در ستون دلخواه jام متناظر با هر عمق $d < s(z_j)$ یک پاره خط عمودی دوبل رسم و متناظر با عمق $d = s(z_j)$ یک پاره خط عمودی تنها می‌کنیم. این پاره‌خط‌های عمودی تنها یا دوبل متناظر با تکه‌های جدولی $Y^d(z_i)$ هستند که برای آنها داشته باشیم $Y^d(z_i) = Y^d(0)$. یک زنجیر طولانی از چنین پاره‌خط‌های عمود در ستون iام بیانگر آن است که نقطه‌ی z_i خیلی به نقطه‌ی بحرانی صفر نزدیک است.

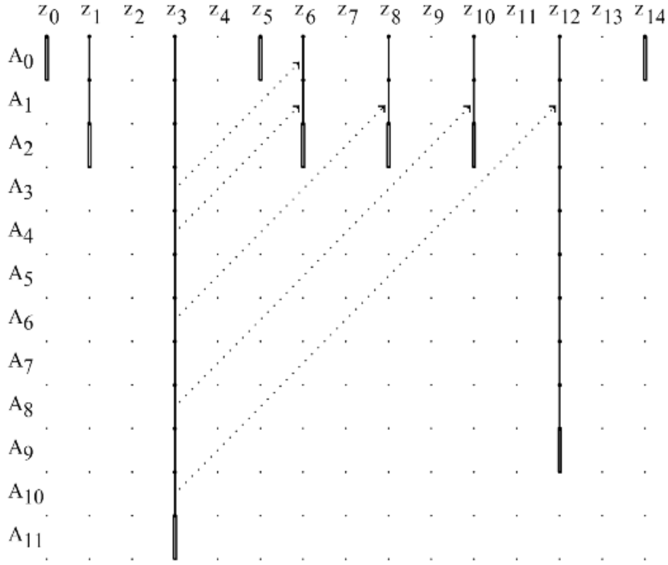
خطوط نقطه‌چین از ارتفاع m، بیانگر تکرار f^m است که تکه‌ای مانند $Y^d(z_i)$ را توسط یک نگاشت پوششی شاخه‌ای به روی تکه‌ی $Y^{d-m}(z_{i+m})$ می‌نگارد. یعنی نگاشت زیر یک نگاشت پوششی شاخه‌ای است.

$$f^m|_{Y^d(z_i)} : Y^d(z_i) \longmapsto Y^{d-m}(z_{i+m}) \qquad (۱۲-۲)$$

۲—۲—۸ مثال

در شکل (۲—۳) تابلوی بحرانی مربوط به مدار نقطه‌ی $z_0 = 1$ تحت نگاشت زیر رسم شده است.

$$f : z \longmapsto z^2 - 1/6$$



شکل ۲—۳: تابلوی بحرانی برای مثال ۳.۲

برای هر مدار مفروض $z_0 \longmapsto z_1 \longmapsto z_2 \longmapsto \cdots$ در J، f تکه دلخواه $Y^d(z_i)$ از عمق $d > 0$ را بر روی تکه‌ی $Y^{d-1}(z_{i+1})$ تصویر می‌کند. اگر $0 \in Y^d(z_i)$ آنگاه نگاشت (۲—۱۳) یک نگاشت پوششی دولایه‌ای است. در غیر این صورت نگاشت (۲—۱۳) یک نگاشت ایزومورفیسم همدیس است. اکنون تحدید نگاشت (۲—۱۳) به طوق(۲—۱۴) را درنظر می‌گیریم.

$$f|_{Y^d(z_i)} : Y^d(z_i) \longmapsto Y^{d-1}(z_{i+1}) \qquad (۲—۱۳)$$

$$A_d(z_i) = int\ Y^d(z_i) \setminus Y^{d+1}(z_i) \qquad (۲—۱۴)$$

سه حالت به صورت زیر داریم.

حالت بحرانی

اگر $d < s(z_i)$ و $0 \in Y^{d+1}(z_i)$ آنگاه طوق $A_d(z_i) = A_d(0)$ یک طوق بحرانی نامیده می‌شود. اگر $A_d(z_i)$ غیر رو به زوال باشد آنگاه نقطه بحرانی صفر را احاطه می کند و f طوق $A_d(z_i)$ را توسط یک نگاشت پوششی دو لایه بر روی طوق $A_{d-1}(z_{i+1})$ می‌نگارد. در این حالت داریم

$$mod\ A_d(z_i) = \frac{1}{2} mod\ A_{d-1}(z_{i+1}) \qquad (۲—۱۵)$$

حالت غیر بحرانی

اگر $d > s(z_i)$ آنگاه $\circ \notin Y^{d+1}(z_i)$ و f، $A_d(z_i)$ را بطور بای هولومورفیک (بطور دوطرفه هولومورفیک) بر روی طوق $A_{d-1}(z_{i+1})$ می‌نگارد. در این حالت داریم

$$mod\ A_d(z_i) = mod\ A_{d-1}(z_{i+1}). \qquad (۱٦-۲)$$

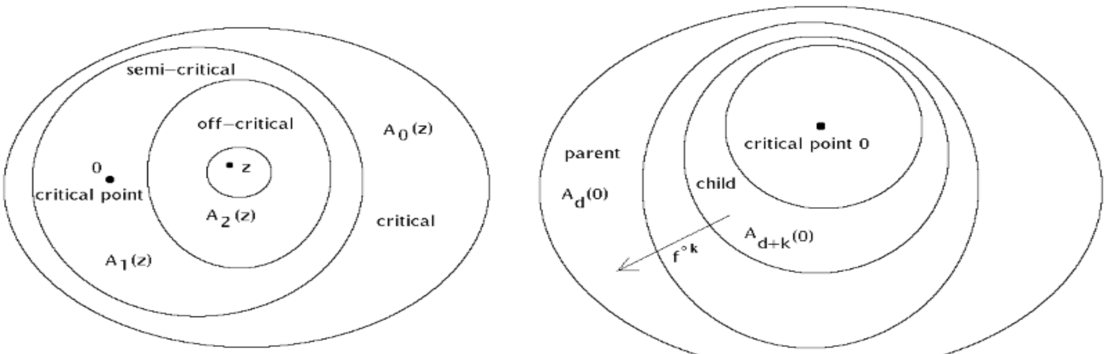
و گوییم طوق $A_d(z_i)$ یک طوق غیربحرانی است.

حالت نیم‌بحرانی

اگر $d = s(z_i)$ آنگاه $\circ \in A_d(z_i)$ و گوییم که طوق $A_d(z_i)$ یک طوق نیم‌بحرانی است. در این حالت f طوق $A_d(z_i)$ را بر روی تمام تکه جدول $Y^{d-1}(z_{i+1})$می نگارد و $\mathrm{mod}(A_d(z_i)) > \frac{1}{2}\ \mathrm{mod}\ (A_{d-1}(z_{i+1}))$. نگاشت زیر را درنظر می‌گیریم.

$$F = f|_{Y^d(z_i)} : Y^d(z_i) \longmapsto Y^{d-1}(z_{i+1}) \qquad (۱۷-۲)$$

تکه جدول $Y^d(z_{i+1})$ یک زیرمجموعه‌ی (همبند ساده) از تکه جدول $Y^{d-1}(z_{i+1})$ است که شامل مقدار بحرانی نیست. لذا $F^{-1}\left(Y^d(z_{i+1})\right)$ دقیقاً دو مؤلفه دارد که از هم متمایزند. این مؤلفه‌ها را با $Y^{d+1}(z_i)$ و $Y^{d+1}(z')$ (که $f(z') = z_{i+1}$) نمایش می‌دهیم. چون F نگاشت پوششی و دولایه است هر دوی این مؤلفه‌ها مشمول در $Y^d(z_i)$ هستند. لذا اگر تکه جدول $Y^d(z_{i+1})$ را از دامنه‌ی F حذف کنیم، هنوز تکه‌ی $Y^{d+1}(z')$ در دامنه باقی است و توسط F به $Y^d(z_{i+1})$ نگاشته می‌شود. لذا با حذف $Y^{d+1}(z_i)$ از دامنه‌ی F، $Y^d(z_{i+1})$ از برد حذف نمی‌شود و در نتیجه طوق $A_d(z_i)$ بر روی تمام تکه‌ی $Y^{d-1}(z_{i+1})$ نگاشته می‌شود.



شکل ۲–۴: نمونه‌هایی از طوق‌های بحرانی، غیربحرانی و نیم‌بحرانی

۲–۲–۹ تذکر

به هر حال براحتی دیده می‌شود که طوق نیم‌بحرانی $A_d(z_i)$ غیر رو به زوال است اگر و تنها اگر طوق $A_{d-1}(z_{i+1})$ غیر رو به زوال باشد. همچنین طوق $A_0(z)$ غیر رو به زوال است اگر و تنها اگر نیمه بحرانی باشد. بنابراین طوق $A_d(z_m)$ غیر رو به زوال است اگر و تنها طوق $A_0(z_{m+d})$ غیر رو به زوال باشد.

۲–۲–۱۰ مثال

در شکل (۲–۴) سمت چپ نمونه‌هایی از طوق‌های بحرانی، غیر بحرانی و نیمه‌بحرانی رسم شده‌اند. طوق $A_0(z)$ بحرانی، طوق $A_1(z)$ نیمه‌بحرانی و طوق $A_2(z)$ غیربحرانی هستند.

۲–۲–۱۱ تعریف

گوییم طوق بحرانی $A_{d+k}(0)$ در جدول یوکوز یک فرزند طوق بحرانی $A_d(0)$ است اگر و تنها اگر نگاشت $f^k|_{A_{d+k}(0)} : A_{d+k}(0) \longmapsto A_d(0)$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای باشد.

همانطور که در شکل (۲–۴) سمت راست نشان داده شده‌است، طوق بحرانی $A_{d+k}(0)$ یک فرزند طوق بحرانی $A_d(0)$ است.

۲—۲—۱۲ تذکر

اگر طوق بحرانی $A_{d+k}(\circ)$ یک فرزند طوق $A_d(\circ)$ باشد آنگاه داریم؛

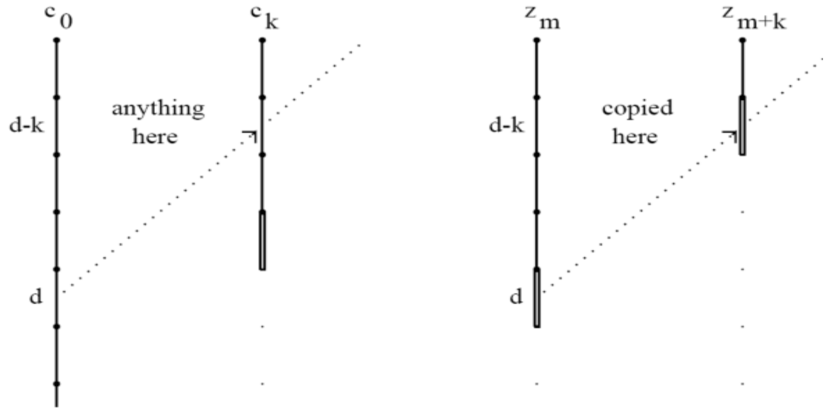
$$mod\ A_{d+k}(\circ) = \frac{۱}{۲}\ mod\ A_d(\circ) \qquad (۲—۱۸)$$

استراتژی ما برای حل مسئله‌ی اصلاح شده (۲—۲—٦) به طور خلاصه به شرح زیر است: یک طوق بحرانی غیر رو به زوال می‌یابیم و ثابت می‌کنیم که این طوق تعداد زیادی فرزند و نسل دارد که مجموع قدر مطلق‌های آنها نامتناهی است. هر فرزند یک طوق را یک اولین نسل آن و هر فرزند یک اولین نسل یک طوق را یک دومین نسل آن و به همین ترتیب هر فرزند یک k—امین نسل یک طوق بحرانی را یک $(k+۱)$—امین نسل آن می‌نامیم. برانر و هوبارد ویژگی‌های تابلو را در سه قاعده به شرح زیر خلاصه کردند:

قاعده‌ی اول تابلو: هر ستون از تابلو یا تماماً بحرانی است، یا تماماً غیربحرانی است و یا این که دقیقاً یک عمق نیمه—بحرانی دارد که بالای آن همگی بحرانی و زیر آن همگی غیربحرانی است. قاعده‌ی اول با توجه به تعریف $s(z_i)$ بوضوح برقرار است.

حال تابلوی مدار بحرانی $\circ = c_\circ \mapsto c_۱ \mapsto \cdots$ را با تابلوی مدار $z_\circ \mapsto z_۱ \mapsto \cdots$ در J به صورت زیر مقایسه می‌کنیم (البته تابلوی مدار بحرانی را می‌توان با خودش مقایسه کرد). اگر تابلوی $\{z_i\}_{i=\circ}^{\infty}$ در عمق d و ستون m بحرانی یا نیمه—بحرانی باشد آنگاه از این طوق بحرانی یا نیمه‌بحرانی یک خط راست در جهت شمال شرقی رسم می‌کنیم. متناظراً در عمق d و ستون صفر از تابلوی بحرانی نیز یک خط در جهت شمال شرقی رسم می‌کنیم.

قاعده‌ی دوم تابلو: هر چیزی که اکیداً بالای خط قطری در تابلوی بحرانی واقع باشد باید بالای خط قطری (همان خط راست در جهت شمال شرقی) در تابلوی مدار z_i کپی شود (شکل (۲—۵) را ببینید).



شکل ۲—۵: ضخیم‌سازی یک تکه‌ی جدول

اثبات قاعده‌ی دوم تابلو: طبق تعریف، طوق بحرانی $A_{d+k}(0)$ فرزند طوق بحرانی $A_d(0)$ است اگر و تنها اگر $A_d(c_k)$ بحرانی باشد و طوق‌های $A_{d+k-1}(c_1), \cdots, A_{d+1}(c_{k-1})$ همگی غیربحرانی باشند. حال طوق بحرانی $A_d(z_m) = A_d(0)$ را در تابلوی مدار در نظر می‌گیریم. همانگونه که طوق بحرانی $A_d(z_m)$ را در امتداد $z_m \mapsto z_{m+1} \mapsto \cdots$ به جلو حرکت می‌دهیم، طوق بحرانی $A_d(0)$ را نیز در امتداد مدار بحرانی $0 = c_0 \mapsto c_1 \mapsto \cdots$ به سمت جلو حرکت می‌دهیم. طوق $A_{d-k}(c_k)$ را درنظر بگیرید. در این صورت اگر f^k را بر طرفین رابطه‌ی $A_d(z_m) = A_d(0)$ اثر دهیم، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$A_{d-k}(z_{m+k}) = A_{d-k}(c_k).$$

بنابراین اگر طوق $A_{d-k}(c_k)$ بحرانی، نیمه‌بحرانی و یا اینکه غیربحرانی باشد آنگاه طوق $A_{d-k}(z_{m+k})$ نیز به ترتیب بحرانی، نیمه‌بحرانی و یا غیربحرانی خواهد بود. □

حال فرض کنید طوق در عمق d یک فرزند طوق بحرانی در عمق $d-k$ باشد و فرض کنید که تابلوی مدار $\{z_i\}_i$ در عمق d از ستون mاُم نیمه‌بحرانی باشد.

قاعده‌ی سوم تابلو: فرض کنید طوق $A_d(z_m)$ نیمه‌بحرانی باشد و طوق $A_d(0)$ یک فرزند طوق بحرانی $A_{d-k}(0)$ باشد. در این صورت اگر در تابلوی مدار $\{z_i\}_i$ از طوق $A_d(z_m)$ در جهت شمال شرقی حرکت کنیم، باید در عمق $d-k$ به یک طوق نیمه‌بحرانی $A_{d-k}(z_{m+k})$، برسیم.

اثبات قاعده‌ی سوم تابلو: با توجه به روابط $A_d(z_m) = A_d(\circ)$ و $f^k(A_d(\circ)) = A_{d-k}(\circ)$ داریم:

$$z_{m+k} = f^k(z_m) \in f^k(A_d(z_m)) = A_{d-k}(\circ) \qquad (۲-۱۹)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} z_{m+k} \in A_{d-k}(\circ) &\implies \begin{cases} z_{m+k} \in Y^{d-k}(\circ) \\ z_{m+k} \notin Y^{d-k+1}(\circ) \end{cases} \implies \begin{cases} Y^{d-k}(\circ) = Y^{d-k}(z_{m+k}) \\ Y^{d-k+1}(\circ) \neq Y^{d-k+1}(z_{m+k}) \end{cases} \implies \cdots \\ \cdots &\implies \begin{cases} \circ \in Y^{d-k}(z_{m+k}) \\ \circ \notin Y^{d-k+1}(z_{m+k}) \end{cases} \implies \circ \in A_{d-k}(z_{m+k}) \end{aligned} \qquad (۲-۲۰)$$

و رابطه‌ی (۲−۲۰) به این معنی است که طوق $A_{d-k}(z_{m+k})$ نیم‌بحرانی است. □

۲−۲−۱۳ تعریف

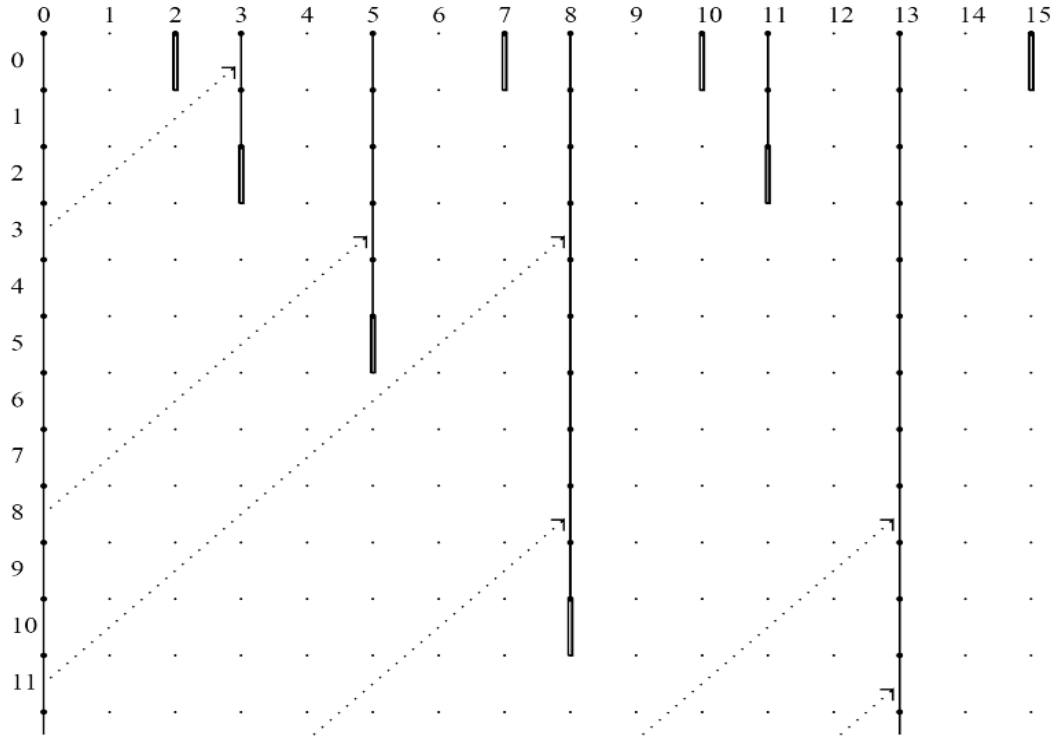
گوییم طوق بحرانی $A_d(\circ)$ یک طوق «عالی» است، اگر شامل هیچ یک از مقادیر بحرانی نباشد. یعنی از مدار $\{P^n(\circ)\}_{n=1}^{\infty}$ مجزا باشد. یا به طور معادل گوییم طوق بحرانی $A_d(\circ)$ یک طوق عالی است اگر سطر d−ام از تابلوی بحرانی هیچ طوق نیم‌بحرانی نداشته باشد.

۲−۲−۱۴ مثال

در شکل (۲−٦) طوق‌های بحرانی در عمق‌های $۱, ۳, ۴, ٦, ۷, ۸, ۹, \cdots$، همگی طوق‌های عالی هستند. هر یک دقیقاً دو فرزند دارند که آنها هم عالی هستند. طوق‌های در عمق‌های ۱۸، ۱۰، ۵، ۲، ۰، عالی نیستند و هر یک تنها یک فرزند دارند.

۲−۲−۱۵ تعریف

گوییم تابلوی بحرانی «بازگشتی» است اگر اعداد صحیح $s(c_k)$ که $k > \circ$، غیر کراندار باشند طوری که در تابلوی بحرانی ستون‌هایی وجود داشته باشند که به دلخواه پایین بروند.



شکل ۲—۶: مثال برای قاعده‌ی دوم تابلو

در حقیقت این تعریف معادل با این مطلب است که مدار نقطه بحرانی به نقطه صفر انباشته شود یعنی هر همسایگی از نقطه بحرانی، شامل یک مقدار بحرانی $P^i(\circ)$، $i \geq ۱$ باشد. اگرمدار بحرانی به نقطه‌ی بحرانی انباشته شود آنگاه داریم:

$$\big(\forall d,\ \exists n_d \in \mathbb{N};\ P^{n_d}(\circ) \in Y^d(\circ)\big) \Longrightarrow \big(\forall d,\ \exists n_d \in \mathbb{N};\ Y^d(\circ) = Y^d(P^{n_d}(\circ))\big) \Longrightarrow \cdots$$
(۲—۲۱)
$$\cdots \xRightarrow{P^{n_d}(\circ)=c_{n_d}} (\forall d,\ \exists n_d \in \mathbb{N}; S(c_{n_d}) \geq d)$$

و رابطه‌ی (۲—۲۱) دقیقاً بیانگر آن است که مجموعه‌ی $\{S_{c_k}|k > \circ\}$ غیر کراندار است.

۲—۲—۱۶ تعریف

گوییم تابلوی بحرانی «متناوب» است اگر یک عددصحیح مثبت مانند $k > \circ$ چنان موجود باشد که $S_{c_k} = \infty$. یعنی برای هر عمق d داشته باشیم $Y^d(c_k) = Y^d(\circ)$.

۲–۲–۱۷ لم

اگر تابلوی بحرانی «بازگشتی» باشد ولی «متناوب» نباشد، آنگاه

(a) هر طوق بحرانی حداقل یک فرزند دارد.

(b) هر طوق بحرانی عالی حداقل دو فرزند دارد

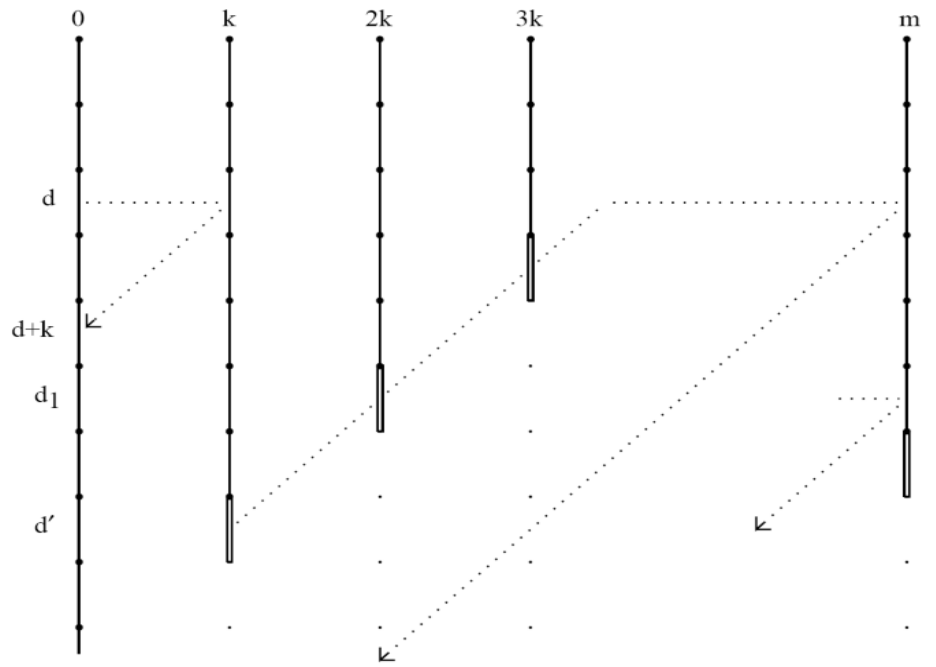
(c) هر فرزند یک طوق عالی، خود نیز عالی است

(d) هر تک فرزندی «عالی» است

اثبات.

(a) : از عمق d در ستون صفر در تابلوی بحرانی شروع به حرکت مستقیم در جهت راست کنید تا به اولین طوق بحرانی دیگر (یک پاره‌خط تنها) در ستون kام برسید، حال به طور قطری در جهت جنوب غربی حرکت کنید. در این صورت به اولین فرزند طوق $A_d(\circ)$ در عمق $d+k$ می‌رسیم. به شکل (۲–۷) مراجعه کنید. در حقیقت این مطلب را می‌توان به طور نظری به صورت زیر بیان کرد: تابلوی بحرانی بازگشتی است و $Y^d(\circ)$ یک همسایگی از نقطه‌ی بحرانی صفر است. فرض کنیم c_k اولین نقطه‌ای از مدار $\{f^n(\circ)\}_{n=۱}^{\infty} = \{c_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد که $Y^d(\circ)$ را قطع می‌کند. در این صورت اگر تکه‌ی جدول $Y^d(\circ)$ را در امتداد مدار $\circ \mapsto c_۱ \mapsto \cdots \mapsto c_{k-۱} \mapsto c_k$ به عقب بکشیم، برای اولین بار در عمق $d+k$ به تکه‌ی بحرانی $Y^{d+k}(\circ)$ می‌رسیم. لذا اگر طوق $A_d(\circ)$ را در امتداد مدار فوق به عقب بکشیم اولین طوق بحرانی که به آن می‌رسیم عبارت خواهد بود از $A_{d+k}(\circ)$. این به نوبه‌ی خود ایجاب می‌کند که طوق بحرانی $A_{d+k}(\circ)$ یک فرزند طوق بحرانی $A_d(\circ)$ باشد.

(b) : فرض کنید $A_d(\circ)$ یک طوق عالی باشد. اولین فرزند آن یعنی $A_{d+k}(\circ)$ را همانند قسمت (a) پیدا می‌کنیم. چون تابلوی بحرانی «متناوب» نیست لذا داریم $S(c_k) \neq \infty$. از این رو



شکل ۲—۷: پیدا کردن فرزند : توضیحات برای قسمت‌های a, b, d در لم ۱.۲

عدد صحیح $d' > d$ چنان موجود است که $A_{d'}(c_k)$ یک طوق نیمه‌بحرانی است. با شروع از ستون k—ام در عمق d' در تابلوی بحرانی، به طور قطری در جهت شمال شرقی حرکت می‌کنیم. بوسیله قاعده‌ی سوم تابلو طوق $A_{d'-k}(c_{۲k})$ باید نیم‌بحرانی باشد. بطور مشابه طوق $A_{d'-۲k}(c_{۳k})$ نیز باید نیم‌بحرانی باشد و به همین منوال، تا زمانی که دوباره به عمق d برسیم. علاوه بر این در این حرکت قطری به هیچ طوق بحرانی یا نیم‌بحرانی دیگری برخورد نخواهیم کرد. چون $A_d(\circ)$ یک طوق عالی است، بویژه وقتی در انتهای این حرکت قطری به عمق d می‌رسیم، در این عمق با طوق بحرانی یا نیم‌بحرانی برخورد نمی‌کنیم (به شکل(۲—۷) مراجعه کنید). اکنون از این عمق d در ستون جدید، به سمت راست حرکت کنید تا در ستون m—ام به اولین طوق بحرانی برخورد کنید. حال در جهت جنوب غربی حرکت کنید. در این صورت بدون برخورد به هیچ طوق بحرانی یا نیم‌بحرانی، سرانجام در ستون صفر و عمق $d+m$ به طوق بحرانی $A_{d+m}(\circ)$ می‌رسیم که فرزند دوم طوق بحرانی $A_d(\circ)$ است.

$(\mathbf{c})$: فرض کنید $A_{d+k}(\circ)$ یک فرزند طوق عالی $A_d(\circ)$ باشد. اگر $A_{d+k}(\circ)$ یک طوق عالی نباشد آنگاه یک $r > \circ$ چنان موجود است که $c_r \in A_{d+k}(\circ)$. اما در این صورت خواهیم داشت $c_{r+k} \in A_d(c_k) = A_d(\circ)$ که متناقض با عالی بودن طوق $A_d(\circ)$ است. لذا $A_{d+k}(\circ)$ نیز عالی است.

$(\mathbf{d})$: فرض کنید طوق فرزند $A'_d(\circ)$، عالی نباشد. ثابت می‌کنیم که $A_{d'}(\circ)$ تک فرزند نیست. فرض کنیم $A_{d'}(\circ)$ فرزند طوق $A_{d'-k}(\circ)$ باشد. قرار می‌دهیم $d_\text{۱} = d' - k$ و یک فرزند دیگر برای طوق $A_{d_\text{۱}}(\circ)$ بدست می‌آوریم. یک عددصحیح $k' \geq k$ چنان موجود است که طوق $A_{d'}(c_{k'})$ عالی باشد. طبق قاعده‌ی سوم تابلو اگر از عمق d' و ستون k' در جهت شمال شرقی شروع به حرکت کنیم، باید در عمق $d_\text{۱}$ به یک طوق نیمه‌بحرانی برسیم. حال از این طوق در عمق $d_\text{۱}$ به سمت راست حرکت می‌کنیم تا در ستون m—ام به طوق بحرانی برسیم. در این صورت $A_{d_\text{۱}+m}(\circ)$ یک فرزند دیگر برای طوق $A_{d_\text{۱}}(\circ)$ است. □

۳—۲ نرمال‌پذیری و اثبات قضیهٔ‌اصلی

یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای درجهٔ‌دوم تک بحرانی $f : z \mapsto z^\text{۲} + c$ نرمال‌پذیر ساده است، اگر یک همسایگی U از نقطه‌ی بحرانی صفر و یک عدد صحیح $n \geq \text{۲}$ وجود داشته باشند به قسمی که نگاشت $f^n|_U : U \longmapsto f^n(U)$ یک نگاشت شبه—درجهٔ‌دوم باشد که برای هر $k \geq \text{۱}$ داشته باشیم $f^{kn}(\circ) \in U$ و همچنین برای هر i, j، که $\circ \leq i < j < n$ مقطع $f^i\left(K\left(f^n|_U\right)\right) \bigcap f^j\left(K\left(f^n|_U\right)\right)$ یا تهی باشد و یا تنها از یک نقطه تشکیل شده باشد که این نقطه‌ی اشتراک، هیچ یک از دو مجموعه‌ی فوق را ناهمبند نمی‌کند. یعنی با حذف این نقطه‌ی اشتراک از هر یک از این مجموعه‌ها، مجموعه‌های باقی مانده هنوز همبند هستند. در حقیقت نقطه‌ی مورد نظر همان نقطه‌ی β است که در فصل یک معرفی شد.

۲—۳—۱ لم

اگر تابلوی بحرانی مرتبط با f «متناوب» باشد، آنگاه f نرمال‌پذیر ساده است. به طور دقیق‌تر اگر برای تمام عمق‌های d، $P_d(c_p) = P_d(\circ)$ را داشته باشیم که p مینیمال است (که از این رو بوسیله قاعده‌ی دوم تابلو برای تمام iها و dهاخواهیم داشت $(Y^d(c_{i+p}) = Y^d(c_i)$ آنگاه f دارای یک نرمال‌سازی ساده از دوره‌ی p خواهد بود.

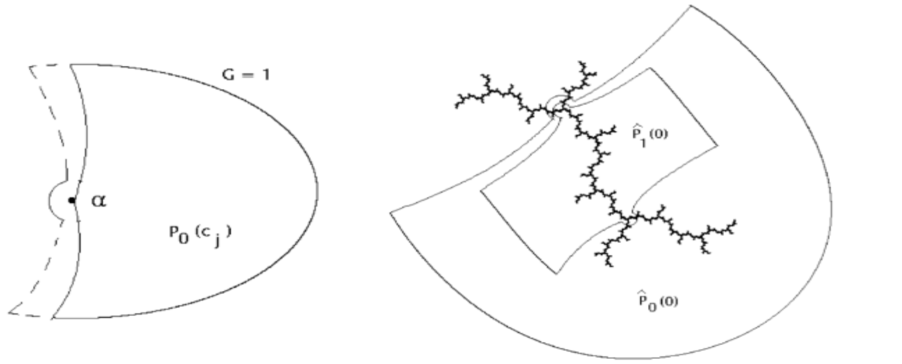
۲—۳—۲ لم

اگر مدار بحرانی کاملاً در اجتماع $Y^{\backslash}(\circ) \bigcup Y^{\backslash}(c_{\backslash}) \bigcup \cdots Y^{\backslash}(c_{q-\backslash})$ واقع باشد، آنگاه f دارای یک نرمال‌سازی ساده از دوره‌ی q است.

می‌دانیم که هر تکه‌ی جدول در عمق صفر از نقاطی در یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی مجموعه‌ی جولیای کامل $K(f)$ همراه با نقاطی خارج از $K(f)$ که دارای پتانسیل G و زاویه‌ی خارجی صادق در نابرابری‌های $t_i \leq t \leq t'_i$، $\circ < G \leq \backslash$ و $\circ \leq i < q$ هستند، تشکیل شده است. در واقع اگر فرض کنیم $\circ \leq t_i \leq \backslash$ چنان باشد که $f(R_{t_i}) = R_{t'_i}$، آنگاه ناحیه همبند ساده‌ی $\psi\left(\left\{re^{\text{۲}\pi it} | \backslash < r \leq \backslash\circ, t_i \leq t \leq t'_i\right\}\right)$ (که در آن ψ همان نگاشت ریمان معرفی شده در تعریف (۱—۵—۱۰) است) یک تکه‌ی جدولی در عمق صفر مانند Y°_i است. تکه جدول $Y^\circ(c_i)$ در عمق صفر را در نظر گرفته و تکه‌ی ضخیم شده‌ی $\widehat{Y}^\circ(c_i)$ را به طریق زیر بدست می آوریم: ابتدا یک دیسک کوچک $D_\epsilon(\alpha)$ حول نقطه‌ی ثابت α بدست می‌آوریم، سپس عدد مثبت $\eta \geq \circ$ را آنقدر کوچک اختیار می‌کنیم که هر پرتو خارجی R_t که زاویه‌ی آن در یکی از نامساوی‌های $|t - t_i| < \eta$ یا $|t - t'_i| < \eta$ صدق کند، این دیسک $D_\epsilon(\alpha)$ راقطع کند. اکنون فرض کنیم که $\widehat{Y}^\circ(c_i)$ از دیسک $D_\epsilon(\alpha)$ و ناحیه محدود شده توسط قطعات (a)، (b) و (c) در زیر تشکیل شده باشد؛

(a) قطعه‌ی $t_i - \eta < t < t'_i + \eta$ از منحنی هم‌پتانسیل $G = \backslash$.

(b) قطعاتی از پرتوهای خارجی $R_{t_i-\eta}$ و $R_{t'_i+\eta}$ که از منحنی هم‌پتانسیل $G = \backslash$ تا مقطع این پرتوها



شکل ۲—۸: مثال برای قاعده‌ی دوم تابلو

با $D_\epsilon(\alpha)$ کشیده شده‌اند.

(c) یک قوس از مرز $D_\epsilon(\alpha)$،

این تکه‌ی ضخیم شده، $\widehat{Y}^\circ(c_i)$، شامل تکه‌ی اصلی $Y^\circ(c_i)$ در درون خودش است. اکنون به استقراً تکه‌های ضخیم‌شده از عمق‌های بالاتر را می‌سازیم. اگر $\widehat{Y}^d_{(j)}$ یک تکه‌ی ضخیم‌شده در عمق d باشد، آنگاه هر یک از مؤلفه‌های $f^{-1}(\widehat{Y}^d_{(j)})$ تکه‌های ضخیم‌شده در عمق $d+1$ هستند.

۲—۳—۳ مثال

در شکل (۲—۸ الف) یک تکه‌ی ضخیم‌شده در عمق صفر نشان داده شده است. و در شکل(۲—۸ ب) تکه‌های ضخیم‌شده از عمق‌های صفر و یک برای نگاشت $f : z \longmapsto z^2 + 1$ نشان داده شده‌اند.

۲—۳—۴ تذکر

مزیّت عمده‌ی تکه جدول‌های ضخیم‌شده نسبت به تکه‌های اصلی در این است که اگر یک تکه‌ی $Y^d_{(j)}$ شامل تکه‌ی $Y^{d+1}_{(k)}$باشد آنگاه تکه‌ی ضخیم‌شده‌ی $\widehat{Y}^d_{(j)}$ شامل تکه‌ی ضخیم‌شده‌ی $\widehat{Y}^{d+1}_{(k)}$ در درون خودش است. یا تکه‌ی ضخیم‌شده‌ی $\widehat{Y}^{d+1}_{(k)}$ به طور فشرده مشمول در تکه‌ی ضخیم‌شده‌ی $\widehat{Y}^d_{(j)}$ است.

از این رو این ساختار جدید طوق‌های قدیم را با طوق‌های غیر رو به زوال جایگزین می‌کند.

۲–۳–۵ تذکر

البته در این فصل از تکه‌های ضخیم‌شده‌ای استفاده خواهیم کرد که به اندازه کافی کوچک باشند تا در شرط زیر نیز صادق باشند؛ اگر $\widehat{Y}^d_{(z)}$ شامل نقطه‌ی بحرانی باشد، آنگاه باید نقطه‌ی بحرانی به درون $Y^d(z)$ تعلق داشته باشد. یعنی هنگام ضخیم کردن یک تکه جدول که مجاور با یک تکه‌ی بحرانی است، این کار را طوری انجام می‌دهیم که تکه‌ی ضخیم‌شده، نقطه‌ی بحرانی را قطع نکند. هنگامی که مدار بحرانی به نقطه‌ی α ختم شود این کار غیر ممکن است. اما طبق فرض داریم $\circ \notin J_\circ$.

اکنون به اثبات لم های (۲–۳–۱) و (۲–۳–۲) می‌پردازیم.

اثبات لم (۲–۳–۱):

d را آنقدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که طوق بحرانی $A_d(\circ)$ یک فرزند طوق بحرانی $A_{d-p}(\circ)$ باشد و قرار می‌دهیم $\Delta_\circ = \widehat{Y}^d(\circ)$. در این صورت $\Delta_P = f^p(\Delta_\circ)$ برابر است با $\widehat{Y}^{d-p}(c_p) = \widehat{Y}^{d-p}(\circ)$ که در درونش شامل $\Delta_\circ$ است. فرض می‌کنیم d و i دلخواه باشند. می‌دانیم $Y^{d+i}(c_p) = Y^{d+i}(\circ)$ و $f^i\left(Y^{d+i}(c_p)\right) = Y^d(c_{i+p})$ لذا داریم:

$$Y^d(c_{i+p}) = f^i\left(Y^{d+i}(c_p)\right) = f^i\left(Y^{d+i}(\circ)\right) = Y^d(c_i) \qquad (۲–۲۲)$$

حال فرض کنیم k عدد دلخواهی باشد و داریم:

$$\begin{aligned} Y^d(c_{kp}) &= Y^d(c_{(k-1)p+p}) = Y^d(c_{(k-1)p}) = Y^d(c_{(k-2)p+p}) = \\ & Y^d(c_{(k-2)p}) = \cdots = Y^d(c_{k-(k-1)p+p}) = Y^d(c_{p+p}) = Y^d(c_p) \end{aligned} \qquad (۲–۲۳)$$

حال با توجه به (۲–۲۳) داریم:

$$c_{kp} \in Y^d(c_{kp}) = Y^d(c_p) = Y^d(\circ) \subset \widehat{Y}^d(\circ) = \Delta_\circ \qquad (۲–۲۴)$$

و این ایجاب می‌کند که $\{C_{kp}\}_{k=1}^{\infty} \subset \Delta_\circ$. و چون $A_d(\circ)$ یک فرزند طوق بحرانی $A_{d-p}(\circ)$ بود، لذا تکه‌های $Y^{d-1}(c_1), Y^{d-2}(c_2), \cdots, Y^{d-(p-1)}(c_{p-1})$ در نتیجه تکه‌های ضخیم‌شده‌ی $\widehat{Y}^{d-i}(c_i)$، $1 \leq i \leq p-1$ شامل نقطه‌ی بحرانی نخواهند بود. چون P مینیمال است لذا تکه‌های $Y^{d-i}(c_i)$،

$f^i\left(K\left(f^p|_{\Delta_\circ}\right)\right) \bigcap f^j\left(K\left(f^p|_{\Delta_\circ}\right)\right)$ متداخل نیستند. بنابراین نقطه‌ی اشتراک مقطع‌های $\circ \leq i < p$ (در صورت ناتهی بودن) باید به مرز تکه‌های $Y^{d-i}(c_i)$ تعلق داشته باشد. و بنابراین نمی‌تواند مجموعه‌های جولیای کامل کوچک $f^i\left(K\left(f^p|_{\Delta_\circ}\right)\right)$ را ناهمبند کند. لذا نگاشت $f^p|_{\Delta_\circ} : \Delta_\circ \longmapsto \Delta_p$ یک نرمال‌سازی ساده از f خواهد بود. $\square$

اثبات لم (۲−۳−۲):

فرض کنید $\Delta_\circ = \widehat{Y}^{۱}(\circ)$. در این صورت داریم:

$$\begin{array}{lcl}
\Delta_۱ & = & f(\Delta_\circ) = f\left(\widehat{Y}^{۱}(\circ)\right) = \widehat{Y}^\circ(c_۱) \\
\Delta_۲ & = & f(\Delta_۱) = f\left(\widehat{Y}^\circ(c_۱)\right) = \widehat{Y}^\circ(c_۲) \\
 & \vdots & \\
\Delta_{q-۱} & = & f(\Delta_{q-۲}) = \widehat{Y}^\circ(c_{q-۱}) \\
\Delta_q & = & \widehat{Y}^\circ(c_q) = \widehat{Y}^\circ(\circ)
\end{array} \tag{۲−۲۵}$$

می‌دانیم تکه‌های $Y^\circ(\circ), Y^\circ(c_۱), \cdots, Y^\circ(c_{q-۱})$ متمایز هستند. اگر برای یک $\circ < i < q$ داشته باشیم $\circ \in \Delta_i = \widehat{Y}^\circ(c_i)$ آنگاه خواهیم داشت $\circ \in \operatorname{int} Y^\circ(c_i)$. بنابراین داریم $Y^\circ(c_i) = Y^\circ(\circ)$ که یک تناقض است. لذا هیچ یک از Δ_iها، $\circ < i < q$ شامل نقطه‌ی بحرانی نیستند. چون q پرتو خارجی که در نقطه‌ی ثابت α به هم می‌رسند، در یک دور قرار دارند(قضیّه ۱−۵−۱۵)، لذا تکه‌های متمایز $Y^\circ(\circ), Y^\circ(c_۱), \cdots, Y^\circ(c_{q-۱})$ تحت f به طور متوالی بر روی هم تصویر می‌شوند. از این رو زنجیر زیر بدست می آید:

$$\begin{array}{l}
Y^\circ(\circ) \longmapsto Y^\circ(c_۱) \longmapsto \cdots \longmapsto Y^\circ(c_{q-۱}) \longmapsto Y^\circ(c_q) = Y^\circ(c_\circ) \longmapsto \\
Y^\circ(c_{q+۱}) = Y^\circ(c_۱) \longmapsto \cdots
\end{array} \tag{۲−۲۶}$$

بنابراین برای هر $i \geq \circ$ داریم $Y^\circ(c_{q+i}) = Y^\circ(c_i)$. لذا روابط زیر را داریم:

$$\begin{array}{lcl}
c_q & \in & Y^\circ(c_{q+\circ}) = Y^\circ(\circ) \\
c_{۲q} & \in & Y^\circ(c_{۲q}) = Y^\circ(c_{q+q}) = Y^\circ(c_q) = Y^\circ(\circ) \\
 \vdots & & \\
c_{kq} & \in & Y^\circ(c_{kq}) = Y^\circ(c_{q+(k-۱)q}) = Y^\circ(c_{(k-۱)q}) = \cdots = Y^\circ(c_q) = Y^\circ(\circ) \\
 \vdots & &
\end{array} \tag{۲−۲۷}$$

روابط (۲—۲۷) ایجاب می‌کنند که $\{c_{kq}\}_{k\geq \circ} \subset Y^\circ(\circ)$. اکنون طبق فرض مدار نقطه‌ی بحرانی کاملاً مشمول در اجتماع $\bigcup_{i=\circ}^{q-1} Y^1(c_i)$ است لذا مدار $\{c_{kq}\}_{k=1}^{\infty}$ نیز مشمول در $\bigcup_{i=\circ}^{q-1} Y^1(c_i)$ است. لذا از رابطه‌ی $\{c_{kq}\}_{k\geq \circ} \subset Y^\circ(\circ)$ نتیجه می‌شود که $\{c_{kq}\}_{k=1}^{\infty} \subset Y^1(\circ)$. چون $Y^\circ(c_q) = Y^\circ(\circ)$ لذا خواهیم داشت $\Delta_q = \widehat{Y}^\circ(\circ)$. حال با توجه به ساختار تکه‌های ضخیم‌شده داریم:

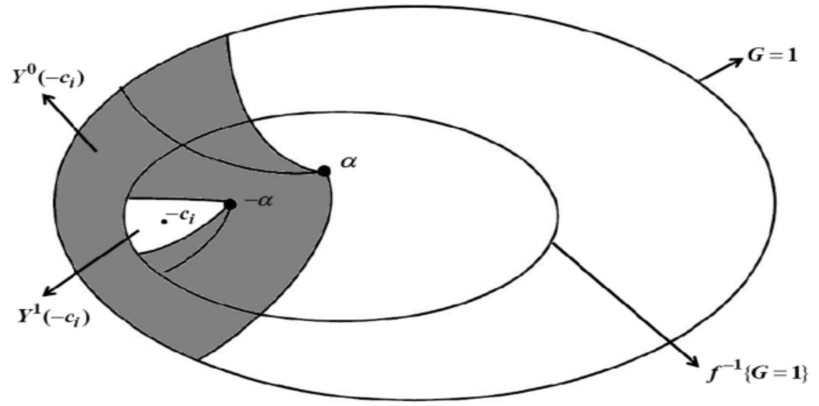
$$\overline{\Delta_\circ} \subset \overline{\widehat{Y}^1(\circ)} \subset \widehat{Y}^\circ(\circ) = \Delta_q \qquad (۲—۲۸)$$

بنابراین نگاشت $f^q|_{\Delta_\circ} : \Delta_\circ \longmapsto \Delta_q$ یک نرمال‌سازی ساده از f می‌باشد. □

۲—۳—۶ گزاره

اگر f نرمال‌پذیر ساده نباشد آنگاه یک طوق بحرانی غیر رو به زوال وجود دارد.

اثبات. اگر f نرمال‌پذیر ساده نباشد آنگاه طبق لم (۲—۳—۲) مدار بحرانی باید اجتماع $\bigcup_{i=1}^{q-1} Y^1(-c_i)$ را قطع کند. برای مثال فرض کنیم $c_d \in Y^1(-c_i)$، در این صورت $Y^1(c_d) = Y^1(-c_i)$ را داریم. که از آن نتیجه می‌شود $A_\circ(c_d) = A_\circ(-c_i)$ نشان می‌دهیم که طوق $A_\circ(c_d) = A_\circ(-c_i)$ غیر رو به زوال است که در این صورت اگر آنرا در امتداد مدار $\circ = c_\circ \mapsto c_1 \mapsto \cdots \mapsto c_d$ به عقب بکشیم، طوق غیر رو به زوال $A_d(\circ)$ بدست خواهد آمد. چون پرتوهای خارجی که تکه‌ی $Y^1(-c_i)$ را برش می زنند درنقطه‌ی $\alpha-$ ختم می‌شوند و پرتوهای خارجی که $Y^\circ(c_d)$ را برش می‌زنند در نقطه‌ی ثابت α ختم می‌شوند و همچنین $Y^1(-c_i)$ مشمول در $Y_\circ(c_d) = Y_\circ(-c_i)$ است، لذا نقطه‌ی $\alpha-$ که یک نقطه‌ی مرزی $Y^1(-c_i)$ است باید به $Y^\circ(c_d)$ تعلق داشته باشد. اگر$\alpha-$ به مرز $Y^\circ(c_d)$ تعلق داشته باشد آنگاه باید داشته باشیم $\alpha = -\alpha$، که یک تناقض است. لذا $\alpha-$ یک نقطه درونی $Y^\circ(-c_i)$است. و این با توجه به شکل (۲—۹) ایجاب می‌کند که$\overline{Y^1(-c_i)} \subset Y^\circ(-c_i)$. از این رو طوق $A_\circ(c_d) = A_\circ(-c_i)$ یک طوق غیر رو به زوال است یعنی $\operatorname{mod}(A_\circ(c_d)) > \circ$. □



شکل ۲—۹: ناحیه رنگ شده در شکل همان طوق $A_\circ(-c_i) = A_\circ(c_d)$

۲—۳—۷ لم

فرض کنید $\cdots \longmapsto z_1 \longmapsto z_\circ$ مداری در $J \setminus J_\circ$ باشد که از تکه جدول بحرانی $Y^N(\circ)$ مجزا باشد. در این صورت مقطع $\bigcap_{d\geq \circ} Y^d(\circ)$ به تنها یک نقطه تقلیل می‌یابد.

اثبات. فرض کنید $U_i = \operatorname{int}\left(\widehat{Y}_{(i)}^{N-1}\right)$ که $\widehat{Y}_{(i)}^{N-1}$ها تکه‌های جدول ضخیم‌شده در عمق $N-1$ هستند. همچنین فرض کنید که مقدار بحرانی c_1 به تکه‌ی $Y^{N-1}(\circ)$ تعلق داشته باشد. هر تکه‌ی جدول در عمق بزرگتر یا مساوی N مشمول در یک تکه جدول یکتای $Y_{(i)}^{N-1}$ است. روی هر U_i یک متریک پوانکره[۲] $\operatorname{dist}_i(x,y)$ درنظر می‌گیریم. برای هر $i > \circ$ دقیقاً دو شاخه از f^{-1} روی U_i وجود دارد که آنها را g_1 و g_2 می‌نامیم. توجه کنید که هر g_k روی U_i یک به یک است و U_i را به یک زیر مجموعه‌ی سره از یک U_j تصویر می‌کند. از این رو هر g_k نگاشتی هولومورفیک بین دامنه‌های همبند ساده (U_iها) است که به متریک پوانکره مجهز هستند. لذا هر g_k طول کم کن است. هر تکه دلخواه در عمق N مشمول در درون یک تکه‌ی U_i در عمق $N-1$ است. لذا برای هر چنین تکه‌ای به شرط آنکه $i > \circ$، داریم $\operatorname{dist}_j(g_k(x), g_k(y)) < \lambda \operatorname{dist}_i(x,y)$. که $\lambda > \circ$ یک ثابت یکنواخت است. فرض کنید δ برابر ماکزیمم قطرهای پوانکره‌ی تکه‌های در عمق N باشد. برای h دلخواه زنجیر $Y^{N+h}(z_\circ) \mapsto Y^{N+h-1}(z_1) \mapsto \cdots \mapsto Y^N(z_h)$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $1 \leq i \leq h$ دلخواه باشد. در این صورت اگر $f(z_{i-1}) = z_i \in Y_{(\circ)}^{N-1}$ آنگاه خواهیم داشت $Y^{N+h-i}(z_i) \subset Y^{N-1}(\circ)$. از

---
[۲] Poincare metric

این رو خواهیم داشت $z_{i-1} \in f^{-1}\left(Y^{N-1}_{(\circ)}\right) = Y^N(\circ)$. که متناقض با فرض قضیه است. لذا هیچ یک از تکه‌های $Y^{N+h-i}(z_i)$، $1 \leq i \leq h$ مشمول در تکه‌ی $Y^{N-1}_{(\circ)}$ نیستند. از این رو نتیجه می‌گیریم که قطر پوانکره‌ی $Y^{N+h}(z_\circ)$ حداکثر برابر $\lambda^h \delta$ است. لذا قطر پوانکره‌ی تکه‌های $Y^{N+h}(z_\circ)$ هنگامی که h به ∞ میل می‌کند، به صفر میل خواهد کرد. و این یعنی اینکه مقطع $\bigcup_h Y^{N+h}(z_\circ)$ و در نتیجه مقطع $\bigcap_d Y^d(z_\circ)$ به تنها یک نقطه تقلیل پیدا می‌کند. بنابراین مجموعه‌ی $J(f)$ در $z_\circ$ موضعاً همبند است. $\square$

اگر $z_\circ \in J_\circ$ آنگاه برای یک عمق d خواهیم داشت $f^d(z_\circ) = \alpha$. از این رو تکه‌ی جدول در عمق d که شامل $z_\circ$ است، به طور یکتا تعریف نمی‌شود.

۲—۳—۸ تعریف

برای هر نقطه‌ی $z \in J(f)$ فرض کنید $\overset{\star}{Y^d}(z)$ برابر اجتماع تمام تکه‌های جدول در عمق d باشد که شامل z هستند (تعداد این تکه‌ها متناهی است). در اکثر اوقات $\overset{\star}{Y^d}(z)$ برابر است با تکه‌ی یکتای $Y^d(z)$. در هر صورت اگر $f^d(z) = \alpha$ آنگاه $\overset{\star}{Y^d}(z)$ اجتماع q تکه‌ی مجزا است.

اکنون در شرایطی هستیم که نتیجه‌ی اصلی این فصل را ثابت کنیم.

۲—۳—۹ قضیه

فرض کنید f یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم تک—بحرانی باشد که مجموعه‌ی جولیایش همبند است، هر دو نقطه‌ی ثابتش دافع هستند و در نقطه بحرانی نرمال‌پذیر ساده نیست. بعلاوه فرض کنید که مدار بحرانی از نقطه‌ی ثابت α مجزا است در این صورت برای هر $z \in J(f)$ داریم $\bigcap_d \overset{\star}{Y^d}(z) = \{z\}$.

اثبات. چون f نرمال‌پذیر ساده نیست لذا طبق گزاره‌ی (۲—۳—٦) یک طوق بحرانی غیر رو به زوال مانند $A_m(\circ)$ وجود دارد. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\bigcap_d Y^d(\circ) = \{\circ\}$. و این یعنی اینکه مجموعه‌ی جولیا در نقطه بحرانی موضعاً همبند است. سپس برای هر $z \in J(f)$ $z \neq \circ$ که تصویر وارونی از α

نیست ثابت می‌کنیم $\bigcap_d Y^d(z) = \{z\}$. و سرانجام برای نقاطی از $J(f)$ که مدارشان تحت تکرارهای f به نقطه‌ی ثابت α ختم می‌شود، حکم را ثابت می‌کنیم.

(a) **حالت اول** فرض کنید نقطه‌ی بحرانی بازگشتی باشد. ابتدا تکه‌ی $Y^d(0)$ حول نقطه‌ی بحرانی را درنظر می‌گیریم. فرض کنید $A_m(0)$ حداقل دو فرزند داشته باشد و هر فرزندش نیز حداقل دو فرزند داشته باشد و به همین ترتیب الی آخر. در این صورت فرض کنید A^1_1 و A^1_2 فرزندان $A_m(0)$ باشند. A^2_{11} و A^2_{12} فرزندان A^1_1 وهمچنین A^2_{21} و A^2_{22} فرزندان A^1_2 باشند لذا داریم.

$$\operatorname{mod} A^1_1 = \operatorname{mod} A^1_2 = \frac{1}{2} \operatorname{mod} A^m_0 \tag{2-29}$$

$$\operatorname{mod} A^2_{11} = \operatorname{mod} A^2_{12} = \operatorname{mod} A^2_{21} = \operatorname{mod} A^2_{22} = \frac{1}{2^2} \operatorname{mod} A^m_0 \tag{2-30}$$

لذا داریم:

$$\operatorname{mod} A^1_1 + \operatorname{mod} A^1_2 = \operatorname{mod} A^m_0 \tag{2-31}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \operatorname{mod} A^i_j = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2^2} \operatorname{mod}\ A_m(0) = \operatorname{mod} A_m(0) \tag{2-32}$$

اکنون اگر هر فرزند $A_m(0)$ را اولین نسل‌های $A_m(0)$ و فرزندهای A^1_j، $1 \leq j \leq 2$ را دومین نسل‌های $A_m(0)$ و به همین ترتیب الی آخر، درنظر بگیریم، آنگاه با توجه به روابط (۲—۳۱) و (۲—۳۲) برای هر k، نسل‌های k—ام یک واحد $\operatorname{mod} A_m(0)$ در مجموع $\sum_d \operatorname{mod} A_d(0)$ پدید می‌آورند. لذا مجموع $\sum_d \operatorname{mod} A_d(0)$ نامتناهی خواهد بود. حال فرض کنیم که در بین طوق‌های یک نسل، طوقی وجود داشته باشد که تنها یک فرزند داشته باشد. بدون آنکه از کلیّت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که در همان نسل اول طوق A^1_1 تنها یک فرزند دارد. در این صورت این تک فرزند طبق لم (۲—۲—۱۷) یک طوق عالی است و حداقل دوفرزند دارد. که هر یک از آنها نیز عالی هستند و به همین ترتیب الی آخر. فرض کنید B نمایش دهنده‌ی تنها فرزند A^1_1 باشد و B_1 و B_2 دو تا از فرزندان B باشند. در این صورت داریم:

$$\operatorname{mod} B = \frac{1}{2} \operatorname{mod} A^1_1 = \frac{1}{2^2} \operatorname{mod} A_m(0) \tag{2-33}$$

$$\text{mod } B_{۱} = \text{mod} B_{۲} = \frac{۱}{۲} \text{mod } B = \frac{۱}{۲^{۳}} \text{mod } A_m(۰) \qquad (۲\text{—}۳۴)$$

بنابراین داریم:

$$\text{mod } B_{۱} + \text{mod} B_{۲} = \frac{۱}{۲} \text{mod } A_m(۰) \qquad (۲\text{—}۳۵)$$

حال داریم:

$$\text{mod } A_{۱}^{۱} + \text{mod} B + \text{mod} B_{۱} + \text{mod} B_{۲} = \text{mod} A_m(۰) \qquad (۲\text{—}۳۶)$$

اکنون فرض کنید C یک فرزند $B_{۱}$ باشد. در این صورت داریم $\text{mod} C = \frac{۱}{۲^{۴}} \text{ mod } A_m(۰)$ لذا نسل‌های C را تا آن مرحله‌ای درنظر می‌گیریم که حاصل‌جمع قدرمطلق‌های آنها به اضافه‌ی قدرمطلق خود طوق C برابر با $\text{mod} A_m(۰)$ شود. و این کار را تا آخر ادامه می‌دهیم. بدین ترتیب تعداد نامتناهی واحد $\text{mod} A_m(۰)$ در مجموع $\sum_d \text{mod} A_d(۰)$ ظاهر می‌شود. لذا مجموع $\sum_d \text{mod} A_d(۰)$ نامتناهی خواهد شد. حال از قضیّه (۱—۶—۵) نتیجه می‌گیریم که $\bigcap_d Y^d(۰) = \{۰\}$. اکنون نقطه‌ی $J(f) \ni z_۰ \neq ۰$ را درنظر بگیرید. فرض کنید که مدار نقطه‌ی $z_۰$ از نقطه‌ی ثابت α مجزا است. در این صورت یک دنباله‌ی یکتای $\cdots \supset Y^{۲}(z_۰) \supset Y^{۱}(z_۰) \supset Y^{۰}(z_۰)$ از تکه‌های جدولی حاوی $z_۰$ داریم. اگر مدار $z_۰$ به نقطه‌ی بحرانی انباشته نشود، آنگاه از لم (۲—۳—۷) نتیجه می‌شود که $\bigcap_d Y^d(z_۰) = \{z_۰\}$. و بنابراین $J(f)$ در $z_۰$ موضعاً همبند خواهد بود. ولی اگر مدار نقطه‌ی $z_۰$ به نقطه‌ی بحرانی انباشته شود، آنگاه برای هر عمق d یک عدد صحیح $n \geq ۰$ چنان موجود است که داشته باشیم $Y^d(z_۰) = Y^d(۰)$. فرض کنید عمق d دلخواه باشد از عمق d و ستون صفر در تابلوی مدار $z_۰$ شروع به حرکت به سمت راست می‌کنیم. طبق فرض یک ستون n وجود دارد که برای اولین بار در این ستون به یک طوق بحرانی برخورد می‌کنیم. حال از این موقعیّت بطور قطری در جهت جنوب غربی شروع به حرکت می‌کنیم تا در عمق $n + d$ به ستون صفر برسیم. بنابراین اگر از طوق $A_{n+d}(۰)$ در جهت شمال شرقی شروع به حرکت کنیم، برای اولین بار در عمق d به یک طوق بحرانی که همانا طوق $A_d(z_n) = A_d(۰)$ است برخورد می‌کنیم. حال اگر طوق $A_d(z_۰)$ بحرانی بود آنگاه n

برابر صفر می‌شود و طوق $A_d(z_\circ)$ بر طوق $A_d(\circ)$ منطبق می‌شد. ولی اگر طوق $A_d(z_\circ)$ بحرانی نباشد آنگاه $n > \circ$ خواهد بود و در زنجیر زیر طوق‌های $A_{d+n-i}(z_i)$، $\circ \le i \le n-۱$ غیر بحرانی خواهد بود.

$$A_{d+n}(z_\circ) \mapsto A_{d+n-۱}(z_۱) \mapsto \cdots \mapsto A_d(z_n) = A_d(\circ)$$

لذا طوق $A_{d+n}(z_\circ)$ بطور همدیس با طوق بحرانی $A_d(\circ)$ ایزومورفیسم خواهد بود، که در نتیجه‌ی آن خواهیم داشت $\operatorname{mod} A_{d+n}(z_\circ) = \operatorname{mod} A_d(\circ)$. البته برای dهای متفاوت nهای متفاوتی بدست می‌آید. بطور دقیق‌تر اگر $d_۱ < d_۲$ آنگاه $n_۱$ (ستون متناظر با $d_۱$) از $n_۲$ (ستون متناظر با $d_۲$) کوچکتر خواهد شد. بدون آنکه از کلیّت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که $n_۱$ اکیداً از $n_۲$ کوچکتر است. لذا $\{A_{i+n_i}(z_\circ)\}_{i=\circ}^{\infty}$ که یک زیردنباله از $\{A_d(z_\circ)\}_{i=\circ}^{\infty}$ است بدست می‌آید که در تساوی زیر صدق می‌کند.

$$\operatorname{mod} A_{i+n_i}(z_\circ) = \operatorname{mod} A_i(\circ) \quad i = \circ, ۱, ۲ \cdots$$

به این ترتیب مشاهده می‌کنیم که مجموع $\sum_d \operatorname{mod} A_d(z_\circ)$ نامتناهی است. لذا از قضیّه (۱—٦—۵) نتیجه می‌شود که $\bigcap_d Y^d(z_\circ) = \{z_\circ\}$.

(b) **حالت دوم** اکنون فرض کنید که مدار بحرانی غیربازگشتی باشد. اگر لم (۲—۳—۷) را برای مدار مقدار بحرانی $f(\circ)$ بکار ببریم آنگاه $\bigcap_d Y^d(f(\circ)) = \{f(\circ)\}$ و بنابراین داریم $\bigcap_d Y^d(\circ) = \{\circ\}$. در حقیقت داریم

$$f(\circ) \in Y^d\left(f(\circ)\right) = f\left(Y^{d-۱}(\circ)\right) \iff \circ \in Y^{d-۱}(\circ). \qquad (۳۷—۲)$$

اکنون نقطه‌ی $\circ \neq z_\circ \in J(f)$ را درنظر می‌گیریم. اگر مدار $z_\circ$ به نقطه‌ی بحرانی انباشته نشود آنگاه از لم (۲—۳—۷) حکم بدست می‌آید. لذا فرض کنید که مدار نقطه‌ی $z_\circ$ به نقطه‌ی بحرانی انباشته شود. چون f نرمال‌پذیر ساده نیست لذا از گزاره‌ی (۲—۳—٦) نتیجه می‌شود که یک عمق

m وجود دارد به قسمی که طوق بحرانی $A_m(0)$ غیر رو به زوال است. یعنی $\mathrm{mod} A_m(0) > 0$.
چون مدار نقطه‌ی z_0 به نقطه‌ی بحرانی انباشته می‌شود لذا در هر عمق d حداقل یک طوق بحرانی وجود دارد. فرض می‌کنیم طوق‌های $A_m(z_{k_1}), A_m(z_{k_2}), \cdots$ بحرانی باشند طوریکه k_1 اولین ستون، k_2 دومین ستون و به همین ترتیب k_j، j—امین ستون در عمق m باشند که بحرانی‌اند. در این صورت طبق حالت قبل $A_{m+k_1}(z_0)$ با طوق بحرانی $A_m(z_{k_1}) = A_m(0)$ بطور همدیس ایزومورف است. وقتی که از طوق $A_m(z_{k_2})$ در جهت جنوب غربی شروع به حرکت کنیم، تا رسیدن به طوق $A_{m+k_2}(z_0)$، حداکثر یک بار (احتمالاً در ستون k_1—ام) به طوق بحرانی برخورد می‌کنیم. لذا داریم $\mathrm{mod} A_{m+k_2}(z_0) \geq \frac{1}{2} \bmod A_m(z_{k_2})$. چون طوق $A_m(z_{k_2})$ یک طوق بحرانی بود لذا نتیجه می‌شود که $\mathrm{mod} A_{m+k_2}(z_0) \geq \frac{1}{2} \bmod A_m(0)$. به همین ترتیب اگر از موقعیت $A_m(z_{k_3})$ در جهت جنوب غربی شروع به حرکت کنیم تا رسیدن به طوق $A_{m+k_3}(z_0)$ حداکثر دو بار (احتمالاً در ستون k_1—ام و k_2—ام) با طوق‌های بحرانی برخورد خواهیم کرد. لذا بدست می آوریم $\mathrm{mod} A_{m+k_3}(z_0) \geq \frac{1}{2^2} \bmod A_m(z_{k_3}) = \frac{1}{4} \bmod A_m(0)$. چون تابلوی بحرانی متناوب نیست، لذا عدد صحیحی مانند N وجود دارد که برای هر j داشته باشیم

$$\mathrm{mod} A_{m+k_j}(z_0) \geq \frac{1}{2^N} \bmod A_m(0).$$

دوباره چون مجموع $\sum_d \mathrm{mod} A_d(0)$ نامتناهی است، لذا مجموع $\sum_d \mathrm{mod} A_d(z_0)$ نیز نامتناهی خواهد شد و قضیّه (۱—۶—۵) ایجاب می‌کند که $\bigcap_d Y^d(z_0) = \{z_0\}$.

(c) **حالت سوم** اکنون فرض می‌کنیم که‌یک تکراری از z_0 برابر α باشد. برای مثال می‌توان فرض کرد $f^n(z_0) = \alpha$. در این حالت q تکه جدول متمایز $Y^n_{(i)}$ در عمق d وجود دارند که شامل z_0 هستند (چون q پرتو خارجی به α ختم می‌شوند). در حقیقت z_0 یک نقطه‌ی مرزی مشترک آنهااست. هر یک از این‌هامشمول در یک دنباله‌ی تودرتو از تکه‌های جدولی شامل z_0 مانند $Y^n_{(i)} \supset Y^{n+1}_{(i)} \supset \cdots$ هستند که z_0 نقطه‌ی مرزی مشترک هر عنصر در این دنباله است.ادعا می‌کنیم که برای هر یک از این

q دنباله مقطع $\bigcap_d Y^d_{(i)}$ به تنها نقطه‌ی $z_{\circ}$ تقلیل پیدا می‌کند، که در این صورت فوراً نتیجه خواهد شد که $\bigcap_d \overset{\star}{Y}^d\ (z_{\circ}) = \{z_{\circ}\}$. چون مدار $z_{\circ}$ به نقطه‌ی ثابت α ختم می‌شود لذا به نقطه‌ی بحرانی صفر انباشته نخواهد شد. لذا برای دنباله‌ی $\cdots \supset Y^{n+۱}_{(i)} \supset Y^n_{(i)}$ شرایط لم (۲—۳—۷) فراهم است و از این رو برای هر $۱ \leq i \leq q$ نتیجه می‌گیریم که $\bigcap_n Y^n_{(i)} = \{z_{\circ}\}$. حال داریم

$$\bigcap_d \overset{\star}{Y}^d\ (z_{\circ}) = \left(\bigcap_d Y^d_{(۱)}\right) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_d Y^d_{(q)}\right) = \{z_{\circ}\} \cup \cdots \cup \{z_{\circ}\} = \{z_{\circ}\}.$$

به این ترتیب در این حالت نیز حکم به اثبات می‌رسد. بنابراین برهان قضیّه (۲—۳—۹) در این جا کامل می‌شود. $\square$

فصل ۳

موضعاً همبندی مجموعه‌های جولیای درجهٔسوم در نقاطی که مصرانه بازگشتی نیستند

۳ــ۱ مقدمه

درحقیقت فصل‌های سه و چهار به همراه هم یک قضیّه واحد را ثابت می‌کنند.ابتدا این قضیّه را در فصل سه و در حالتی که مدار نقطه‌ی بحرانی «مصرانه بازگشتی» نیست ثابت می‌کنیم و سپس در فصل چهار با فراهم کردن ابزار لازم، در حالتی که مدار بحرانی «مصرانه بازگشتی» است، به اثبات حکم می‌پردازیم. در این فصل چندجمله‌ای P از درجهٔ $d \geq 0$ که دارای یک نقطه‌ی بحرانی است (چندجمله‌ای‌های تک بحرانی) و در شرایط زیر صادق است را درنظر می‌گیریم.

۱) مجموعه جولیای $J(P)$ همبنداست.

۲) تمام مدارهای متناوب P دافع هستند.

۳) P در نقطه‌ی بحرانی c نرمال‌پذیر نیست.

۴) هر پرتو ثابت P در یک نقطه‌ی ثابت مجزا از P ختم می‌شود.

۳ــ۱ــ۱ تعریف

گوییم نقطه‌ی بحرانی c «با بی‌میلی بازگشتی» است، هرگاه یک دنباله‌ی اکیداً صعودی مانند $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ و اعداد صحیح $K, N \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشند که برای هر $i \geq 0$، نگاشت زیر یک نگاشت پوششی از درجهٔکمتر یا مساوی با N باشد.

$$P^{n_i-K}|_{Y^{n_i}(c)} : Y^{n_i}(c) \longmapsto Y^k\left(P^{(n_i-K)}(c)\right)$$

۳ــ۱ــ۲ تعریف

گوییم نقطه‌ی بحرانی c «مصرانه بازگشتی» است، اگر c بازگشتی باشد ولی «با بی‌میلی بازگشتی» نباشد.

۳ــ۱ــ۳ قضیه

فرض کنید P یک چندجمله‌ای تک بحرانی از درجهٔ $d \geq ۰$ باشد به قسمی که $J(P)$ همبنداست، تمام مدارهای متناوب P دافع هستند، P تنها در نقطه‌ی بحرانی c نرمال‌پذیر نیست و هر پرتو ثابت P دریک نقطه‌ی ثابت مجزای P ختم می‌شود. در این صورت اگر نقطه بحرانی c «مصرانه بازگشتی» نباشد، آنگاه $J(P)$ موضعاً همبند است.

همان‌طورکه در لم (۲ــ۳ــ۷) مشاهده کردیم، اگر مدار $z_۰ \mapsto z_۱ \mapsto z_۱ \mapsto \cdots$ در مجموعه‌ی جولیا هرگز تکه‌ی $P_N(c)$ را قطع نکند، آنگاه مقطع $\bigcap_{n\geq ۰} Y^n(z_۰)$ به تنها نقطه $z_۰$ تقلیل می‌یابد و لذا از قضیّه (۱ــ٦ــ۵) نتیجه می‌شود که $J(P)$ در $z_۰$ موضعاً همبند است. از این رو کافی است فقط برای نقاطی از $J(P)$ که به نقطه‌ی بحرانی انباشته می‌شوند، حکم را ثابت کنیم.

۳ــ۲ اثبات نتیجه‌ی اصلی

برای هر نقطه $z \in \mathbb{C}$، مجموعه‌ی تمام حدود زیردنباله‌ای مدار پیشرو z، $\{P^n(z)\}_۰^\infty$، را با نماد $w(z)$ نمایش می‌دهیم. اعضای $w(z)$ دقیقاً نقاطی هستند که مدار z به آنها انباشته می‌شود.

$$w(z) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \{n_i\}_{i=۱}^{\infty} \quad s.t \;\; P^{n_i}(z) \overset{z\to\infty}{\longrightarrow} z \right\} \qquad (۱ــ۳)$$

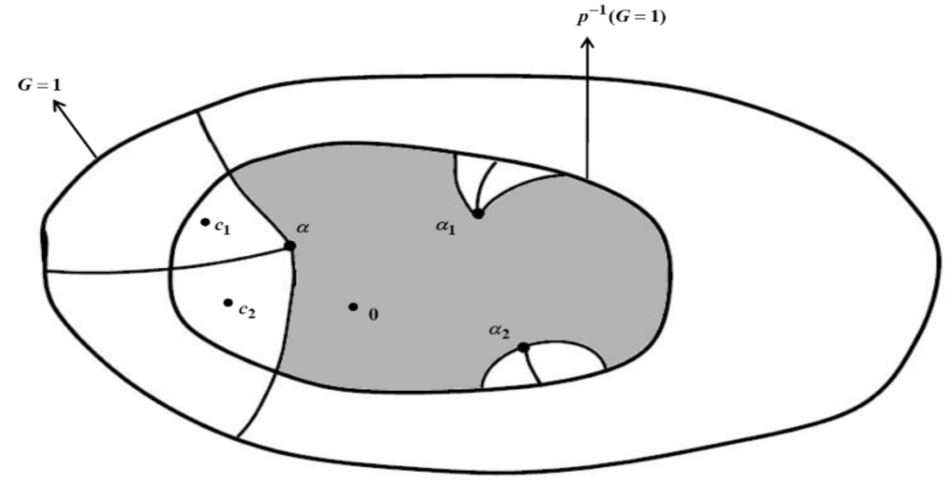
اگر $\zeta \in w(c)$ باشد، گاهی اوقات بجای اینکه بگوییم مدار z در ζ انباشته می‌شود،خواهیم گفت که مدار z حول ζ بازگشتی است. به عنوان مثال می‌دانیم که اگر نقطه‌ی z به مجموعه‌ی جولیای کامل $K(P)$ تعلق نداشته باشد آنگاه $P^n(z) \to \infty$ هنگامی که $n \to \infty$، و بنابراین داریم $w(z) = \{\infty\}$. چون تمام مدارهای متناوب، دافع هستند لذا نقاط ثابت نیز دافع هستند و از این رو مطابق آنچه قبلاً در فصل یک ذکر شد تمام نقاط ثابت متمایزند و نقطه‌ی ثابت α که قبلاً معرفی شده است، وجود داردبه قسمی که دافع است و هیچ پرتو ثابتی به آن ختم نمی‌شوند. لذا طبق قضیّه (۱ــ۵ــ۱۵) یک دور از $q \geq ۲$ پرتو خارجی هست به α ختم می‌شوند.

منحنی هم‌پتانسیل $\{z \in \mathbb{C} \mid G(z) = ۱\}$را درنظر بگیرید. فرض کنید $\Gamma_۰$ اجتماع پرتوهای خارجی‌ای باشد که به نقطه‌ی ثابت α ختم می‌شوند و در $\{z \in \mathbb{C} \mid G(z) = ۱\}$ ناقص می‌شوند. این مجموعه‌ی فشرده را «پیکربندی یوکوز از عمق صفر» نامیده و آنرا با $\mathcal{Y}^۰$ نمایش می‌دهیم. مؤلفه‌های کراندار متمم $\mathcal{Y}^۰$، $\mathbb{C} - \mathcal{Y}^۰$، را تکه‌های جدول یوکوز از عمق صفر نامیده و با $Y_i^۰$ نمایش می‌دهیم. برای هر نقطه‌ی $z \in J(P)$ که مدار آن به α ختم نمی‌شود، یک تکه‌ی جدول یکتای $Y^۰(z)$ در عمق صفر شامل z وجود دارد. تکه جدول $Y^n(z)$ در عمق n را به عنوان یکتا مجموعه‌ی باز و همبند شامل z تعریف می‌کنیم که برای یک تکه‌ی $Y_i^۰$ در عمق صفر داشته باشیم؛ $P^n(Y^n(z)) = Y_i^۰$. اگر $m < n$ باشد آنگاه $Y^n(z) \subset Y^m(z)$ را داریم.

۳—۲—۱ لم

چندجمله‌ای P را که در نقطه‌ی بحرانی نرمال‌پذیر نیست، مجموعه‌ی جولیایش همبند است و هیچ نقطه‌ی ثابت ζ که مضرب P در آن ۱+ باشد $(P'(\zeta) = ۱)$، ندارد را درنظر بگیرید. اگر Y_i^n تکه جدول یوکوز دلخواهی در عمق n و $J(P) = J$ مجموعه‌ی جولیای P باشد، آنگاه مقطع $Y_i^n \bigcap J$ همبند است.

اثبات. می‌دانیم که هر تکه‌ی جدول دلخواه Y_i^n توسط تعدادی متناهی پرتو خارجی $\Pi = \{R_{t_j}\}_{j=۱}^{m}$ و یک منحنی هم‌پتانسیل محدود شده است. لذا مقطع $\partial Y_i^n \bigcap J$ از تعدادی متناهی نقاط $\{P_j\}_{j=۱}^{m'}$ تشکیل شده است. هر نقطه‌ی p_j نقطه‌ی مختوم دو پرتو خارجی در Π است به شکل (۳—۱) رجوع کنید. در شکل (۳—۱) فرض کرده‌ایم که $q = ۳$ پرتو خارجی در نقطه‌ی ثابت α از یک چندجمله‌ای درجهٔسوم $P_c(z) = z^۳ + c$ ختم شده‌اند. در این شکل ناحیه‌ی رنگ شده تکه‌ی $Y^۱(۰)$ شامل نقطه‌ی بحرانی از عمق یک است. به برهان خلف، فرض می‌کنیم Y_i^n یک تکه‌ی جدول در عمق n باشد که برای آن مقطع $Y_i^n \bigcap J$ ناهمبند است. در این صورت مجموعه‌های باز و مجزای Y, X موجود هستند به قسمی که $Y_i^n \cap J = (Y_i^n \cap J \cap X) \cup (Y_i^n \cap J \cap Y)$ را داریم. در



شکل ۳–۱: ناحیه‌ی رنگ شده، تکه‌ی $Y^{1}(0)$ شامل نقطه‌ی بحرانی از عمق یک است .

این صورت هر p_j یا به X تعلق دارد و یا به Y. فرض کنید $p_1, \cdots, p_{m''}$ به X و $p_{m''+1}, \cdots, p_{m'}$ به Y تعلق داشته باشند. دو پرتو خارجی در Π که به نقطه‌ی p_j ختم می‌شوند، صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$ را به دو دامنه برش می‌زنند. یکی از آنها که از Y_i^n مجزا است را با Z_j نمایش می‌دهیم. در این صورت $U' = X \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{m''} Z_j\right)$ و $V' = Y \bigcup \left(\bigcup_{j=m''+1}^{m'} Z_j\right)$ دو مجموعه‌ی باز مجزا هستند که برای آنهاداریم $J = (U' \cap J) \cup (V' \cap J)$. که متناقص با همبند بودن مجموعه‌ی جولیا است. لذا فرض خلف باطل بوده و حکم به اثبات می‌رسد. □

یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای P در نقطه‌ی بحرانی c نرمال‌پذیر است، اگر یک همسایگی باز U از c و یک عدد صحیح $n \geq 2$ وجود داشته باشمد به قسمی که $P^n|_U : U \longmapsto P^n(U)$ یک نگاشت شبه–چندجمله‌ای باشند که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $P^{kn}(c) \in U$.

۳–۲–۲ لم

فرض کنید چندجمله‌ای P در نقطه‌ی بحرانی c نرمال‌پذیر نباشد. در این صورت برای هر $N \in \mathbb{N}$ یک عدد صحیح $n > N$ وجود دارد بطوریکه $\operatorname{mod}\left(Y^n(c) \setminus \overline{Y^{n+1}}(c)\right) > 0$.

اثبات. فرض کنید $p \geq 2$ تعداد پرتوهای خارجی مختوم به نقطه‌ی ثابت α باشد. ادعا می‌کنیم که یک عدد صحیح مثبت $t > 0$ و یک تکه‌ی جدول Y_i^1، که تکه‌ای در عمق یک است و توسط پرتوهای

خارجی مختوم به یک نقطه‌ی α' ، که $\alpha' \neq \alpha$ و $P(\alpha') = \alpha$؛ و ناحیه‌ی هم‌پتانسیل $P^{-1}\{G = 1\}$ محدود شده است، وجود دارند طوریکه $P^{tp}(c) \in Y_i^1$. به برهان خلف فرض کنید چنین نباشد. فرض کنید $\widetilde{Y}$ یک ضخیم‌سازی از $Y^1(c)$ باشد. یعنی $\widetilde{Y}$ برابر اجتماع $\overline{Y^1}(c)$ و یک همسایگی باز کوچک از $\overline{Y^1}(c)$ باشد. اگر این همسایگی بقدر کافی کوچک انتخاب شود آنگاه $P^p(\widetilde{Y})$ شامل بستار $\widetilde{Y}$ خواهد شد. زیرا با درنظر گرفتن $Y^1(c)$ داریم $P^p\left(Y^1(c)\right) = Y^0\left(P^p(c)\right) = Y^0\left(c_p\right) = Y^0(c)$. حال اگر تکه‌های $Y^0(c), Y^1(c)$ را به نرمی ضخیم کنیم و تکه‌های ضخیم شده را به ترتیب با $\widetilde{Y^0}, \widetilde{Y}$ نمایش دهیم، آنگاه $\overline{\widetilde{Y}} \subset \widetilde{Y^0}$ را خواهیم داشت . بنابراین $P^p(\widetilde{Y}) = \widetilde{Y^0} \supset \overline{\widetilde{Y}}$. از طرفی برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $P^{kp}(c) \in Y^1(c) \subset \widetilde{Y}$. چون مدار $\{P^{kp}(c)\}$ کاملاً مشمول در تکه‌ی بحرانی $Y^0(c)$ است، لذا از فرض خلف نتیجه می‌شود که $\{P^{kp}(c)\} \subset Y^1(c)$. اکنون نگاشت $P^p|_{\widetilde{Y}} : \widetilde{Y} \longmapsto P^p(\widetilde{Y})$ یک نگاشت شبه‌ــچندجمله‌ای است که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $P^{kp}(c) \in \widetilde{Y}$. و این به این معنا است که P در نقطه‌ی بحرانی c نرمال‌پذیر است که این یک تناقض است. لذا فرض خلف باطل بوده و عدد صحیح مثبتی مانند $t > 0$ و یک تکه جدول در عمق یک مانند Y_i^1 از نوع تکه‌هایی که در ابتدای اثبات توصیف شد، وجود دارند بطوریکه $P^{kp}(c) \in Y_i^1$. حال چون پرتوهای خارجی که مرز Y_i^1 را تشکیل داده‌اند به نقطه‌ی ثابت α ختم نمی‌شوند لذا Y_i^1 بطور فشرده مشمول در یک تکه در عمق صفر مانند Y_j^0 است. $\overline{Y_i^1} \subset Y_j^0$. به شکل (۳ــ۱) مراجعه کنید.

اکنون طوق $A_0(c_{tp}) = Y_j^0 \setminus Y_i^1$ یک طوق حول $P^{tp}(c) = c_{tp}$ است که غیر رو به زوال است. یعنی $\mathrm{mod} A_0(c_{tp} > 0$. حال اگر این طوق را در امتداد مدار $c \mapsto P(c) \mapsto \cdots \mapsto P^{tp}(c) = c_{tp}$ به عقب بکشیم به طوق غیر رو به زوال $A_{tp}(c)$ حول c می‌رسیم. لذا عددصحیح $t > 0$ وجود دارد بطوریکه $\mathrm{mod} A_{tp}(c) > 0$. حال چون نقطه‌ی بحرانی حول خودش بازگشتی است لذا طوق‌های بحرانی غیر رو به زوال از هر عمق دلخواه بدست می‌آیند. $\square$

۳ـ۲ـ۳ لم

فرض کنید $\{z_{\circ} \mapsto z_{۱} \mapsto z_{۲} \mapsto \cdots\}$ یک مدار دلخواه تحت چندجمله‌ای P باشد. اگر z_k اولین نقطه از مدار $z_{\circ}$ باشد که $Y^n(z_k)$ را قطع می‌کند، آنگاه برای هر i, j که $\circ \leq i < j \leq h$ داریم.

$$Y^{n+i}(z_{k-i}) \bigcap Y^{n+j}(z_{k-j}) = \emptyset$$

اثبات. تکه‌ی Y_i^n در عمق n را درنظر می‌گیریم. فرض کنید z_k اولین عنصر از مدار $z_{\circ}$ باشد که به Y_i^n تعلق دارد. قرار می‌دهیم $Y_i^n = Y^n(z_k)$. به برهان خلف فرض کنیم i, j، $\circ \leq i < j \leq k$، موجود باشند به قسمی که برای آنها داشته باشیم $Y^{n+i}(z_{k-i}) \cap Y^{n+j}(z_{k-j}) \neq \emptyset$. در این صورت چون $i < j$ داریم $Y^{n+j}(z_{k-j}) \subset Y^{n+i}(z_{k-i})$. از این رو داریم:

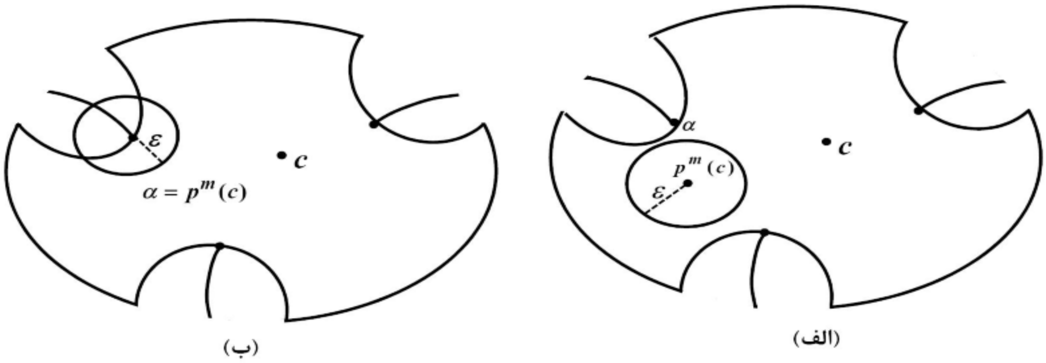
$$z_{k-(j-i)} \in Y^{n+j-i}(z_{k-j+i}) = P^i \left(Y^{n+j}(z_{k-j})\right) \subset Y^n(z_k)$$

چون $j - i > \circ$ است لذا $z_{k-(j-i)}$ نقطه‌ای از مدار $z_{\circ}$ است که زودتر از z_k، $Y^n(z_k)$ را قطع می‌کند که متناقض با فرض است. لذا حکم بدست می‌آید. □

۳ـ۲ـ۴ لم

اگر مدار نقطه‌ی بحرانی c «با بی میلی بازگشتی» باشد آنگاه یک $\epsilon > \circ$ وجود دارد به قسمی که برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک دنباله‌ی $w(\epsilon)$ در $\{z_{\circ}, z_{-۱}, \cdots, z_{-n}\}$ وجود دارد که اگر گوی $B(z_{\circ}, \epsilon)$ را در امتداد آن به عقب بکشیم یک زنجیر از نگاشت‌های یک به یک (در حقیقت ایزومورفیسم‌های همدیس) بدست می‌آید.

اثبات. طبق فرض یک دنباله‌ی اکیداً صعودی $\{n_i\}_{i=۱}^{\infty}$ و اعداد صحیح $k, N \in \mathbb{N}$ وجود دارند به قسمی که برای هر i، نگاشت $P^{n_i-K} : Y^{n_i}(c) \longmapsto Y^k(P^{n_i-k}(c))$ یک نگاشت پوششی از درجهٔ‌کمتر یا مساوی $\mathbb{N}$ است. چون c تنها نقطه‌ی بحرانی چندجمله‌ای P است لذا برای هر i، یک عدد صحیح $m \in \mathbb{N}$، $۱ \leq m \leq n_i - k$ طوری وجود دارد که تکه‌ی $Y^{n_i-m}(P^m(c)) = Y^{n_i-m}(c)$ تنها تکه در



شکل ۳—۲: نمایش شکل برای روشنتر شدن اثبات لم (۴.۳)

زنجیر زیر است که شامل نقطه‌ی بحرانی است.

$$Y^{n_i}(c) \longmapsto Y^{n_i-۱}\left(P(c)\right) \longmapsto \cdots \longmapsto Y^{n_i-m}\left(P^m(c)\right) \longmapsto \cdots \longmapsto Y^K\left(P^{n_i-K}(c)\right) \qquad (۲—۳)$$

بنابراین زنجیر(۳—۳) از ایزومورفیسم‌های همدیس (بویژه نگاشت‌های یک به یک) القا می‌شود.

$$Y^{n_i-۱}\left(P(c)\right) \xmapsto{P} \cdots \xmapsto{P} Y^{n_i-m}\left(P^m(c)\right) = Y^{n_i-m}(c) \qquad (۳—۳)$$

چون در تعریف «با بی میلی بازگشتی » بودن نقطه‌ی بحرانی c، عدد صحیح N برای تمام iها یکنواخت بود، لذا n_i را آنقدر بزرگ اختیار می‌کنیم که زنجیر (۳—۳) به دلخواه طولانی شود. اگر $\alpha \notin w(c)$ آنگاه بویژه داریم $P^m(c) \neq \alpha$. حال باتوجه به اینکه تکه‌ی بحرانی $Y^{n_i-m}(c)$ تکه‌ای مشابه شکل (۳—۲ الف) است و $P^m(c)$ نقطه‌ی مختوم هیچ دوری از پرتوهای خارجی نیست، لذا از $P^m(c) \in Y^{n_i-m}(c)$ نتیجه می‌شود که $P^m(c)$ یک نقطه‌ی درونی تکه جدول بحرانی $Y^{n_i-m}(c)$ است. لذا یک گوی $B(\epsilon, P^m(c))$ وجود دارد که وقتی در طول زنجیر $c \mapsto P(c) \mapsto \cdots \mapsto P^m(c)$ به عقب کشیده شود، یک زنجیر به دلخواه طولانی از نگاشت‌های یک به یک بدست می‌آید. ولی اگر $\alpha \in w(c)$ باشد آنگاه یک گوی به شعاع ϵ حول α وجود خواهد داشت که بطور یکنواخت به α تقلیل پیدا می‌کند. شکل (۳—۲ ب) را ببینید. □

۳ــ۲ــ۵ قضیه

فرض کنید چندجمله‌ای درجهٔسوم $P(z) = z^{3} + c$ در شرایط قضیّه (۳ــ۱ــ۳)صدق کند. همچنین فرض کنید که تنها نقطه‌ی بحرانی c «با بی‌میلی بازگشتی» باشد، در این صورت اگر نقطه‌ی $z \in J$ به نقطه‌ی بحرانی c انباشته شود آنگاه مجموعه‌ی جولیای P در z موضعاً همبند است.

اثبات. چون نقطه‌ی بحرانی c «با بی‌میلی بازگشتی» است لذا اعداد صحیح و مثبت $k, N \in \mathbb{N}$ و دنباله‌ی $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ وجود دارند که برای هر i، نگاشت $P^{n_i-k} : Y^{n_i}(c) \longmapsto Y^{k}(P^{n_i-k}(c))$ از درجهٔ $N \leq \deg$ است. چون P در c نرمال‌پذیر نیست لذا طبق لم (۳ــ۲ــ۲) عدد صحیح $K' > k - 1$ وجود دارد بطوریکه $\operatorname{mod}\left(Y^{k'}(c) \setminus \overline{Y^{k'+1}}(c)\right) > 0$. فرض کنید $l = k' - k + 1$. در این صورت داریم

$$\operatorname{mod} A_{k+l}(c) = \operatorname{mod}\left(Y^{k+l-1}(c) \setminus \overline{Y^{k+l}}(c)\right) > 0 \ .$$

همچنین فرض کنید $\operatorname{mod} A_{k+r}(c) = M$ و $n_i > k + l$ را در نظر بگیرید. چون مدار نقطه‌ی $P^{n_i-k}(c)$ حول نقطه‌ی بحرانی c بازگشتی است و $Y^{k+l}(c)$ یک همسایگی از نقطه‌ی بحرانی است لذا $Y^{k+l}(c)$ مدار نقطه‌ی $P^{n_i-k}(c)$ را قطع می‌کند. فرض کنید $P^{n_i-k+s_i}(c)$ اولین نقطه از این مدار باشد که $Y^{k+l}(c)$ را قطع می‌کند. اگر A, A' طوق‌هایی باشند که $P(A) = A'$ آنگاه از گزاره‌ی (۱ــ٦ــ٦) نتیجه می‌شود که $\operatorname{mod} A \geq \frac{1}{3} \operatorname{mod} A'$ و اگر $P^{m}(A) = A'$ باشد آنگاه خواهیم داشت $\operatorname{mod} A \geq \frac{1}{3^{m}} \operatorname{mod} A'$. اکنون طوق غیر رو به زوال $A_{k+l}(c) = A_{k+l}\left(P^{n_i-k+s_i}(c)\right)$ را در امتداد مدار زیر به عقب می‌کشیم.

$$\begin{aligned} &c \longmapsto P(c) \longmapsto \cdots \longmapsto P^{(n_i-k+s_i)-l}(c) \longmapsto \cdots \\ &\cdots \longmapsto P^{n_i-k}(c) \longmapsto P^{n_i-k+1}(c) \longmapsto \cdots \longmapsto P^{n_i-k+s_i}(c) \end{aligned} \qquad (۳ــ۴)$$

در ابتدا به طوق غیر رو به زوال $A_{k+2l}\left(P^{n_i-k+s_i-l}(c)\right)$ می‌رسیم. طبق فرض $n_i - k > l$ را داریم، بنابراین رابطه‌ی $P^{l}\left(A_{k+2l}\left(P^{n_i-k+s_i-l}(c)\right)\right) = A_{k+l}(c)$ داریم. از این رو از گزاره‌ی (۲ــ۳ــ٦)

داریم

$$\mathrm{mod}\ A_{k+2l}\left(P^{n_i-k+s_i-l}(c)\right) \geq \frac{1}{3^l}\,\mathrm{mod}\ A_{k+l}(c) = \frac{M}{3^l}. \qquad (۳—۵)$$

از طرفی طبق فرض نگاشت $P^{n_i-k}: Y^{n_i}(c) \longmapsto Y^k(P^{n_i-k}(c))$ از درجهٔ‌کمتر از N بود لذا اگر در ادامه طوق $A_{k+2l}\left(P^{n_i-k+s_i-l}(c)\right)$ را به عقب بکشیم به طوقی مانند $A_i(c)$ حول نقطه‌ی بحرانی c می‌رسیم که برای آن داریم

$$\mathrm{mod}\ A_i(c) \geq \frac{1}{N}\,\mathrm{mod}\ A_{k+2l}\left(P^{(n_i-k+s_i)-l}(c)\right). \qquad (۳—۶)$$

اکنون با تلفیق روابط (۳—۵) و (۳—۶) به نابرابری زیر می‌رسیم

$$\mathrm{mod}\ A_i(c) \geq \frac{M}{3^l N}\,. \qquad (۳—۷)$$

با همین روند بالا برای هر $n_i > k+l$ یک طوق $A_i(c)$ وابسته به n_i با شرایط فوق بدست می‌آید. لذا با فرض $I = \{i \in \mathbb{N} | n_i > k+l\}$ داریم

$$\sum_{d=1}^{\infty} \mathrm{mod} A_d(c) \geq \sum_{i\in I} \mathrm{mod} A_i(c) \geq \sum_{i\in I} \frac{M}{3^l N}\quad . \qquad (۳—۸)$$

از این رو طبق قضیّه (۱—۶—۵)مقطع $\bigcap_{d=1}^{\infty} Y_d(c)$ به تنها نقطه‌ی c تقلیل می‌یابد. از این رو مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ در نقطه‌ی c موضعاً همبند است. اکنون فرض کنیم d عمق دلخواهی باشد. چون مدار z_0 به نقطه‌ی بحرانی انباشته می‌شود، لذا نقطه‌ای در مدار پیشروِ z_0 هست که به همسایگی $Y^d(c)$ از نقطه‌ی بحرانی تعلق داشته باشد. فرض کنیم z_n اولین عنصر در مدار پیشرو z_0 باشد که $Y^d(c)$ را قطع می‌کند. در این صورت داریم $z_n \in Y^d(0) = Y^d(z_n)$ و از این رو z_n اولین نقطه از مدار z_0 است که $Y^d(z_n)$ را قطع می‌کند لذا طبق لم (۳—۲—۳) اگر تکه‌های جدول $Y^d(0)$ را در امتداد مدار زیر به عقب بکشیم تمام تکه‌های حاصل متمایز خواهند بود.

$$z_0 \longmapsto z_1 \longmapsto z_2 \longmapsto \cdots \longmapsto z_n \qquad (۳—۹)$$

بویژه هیچ یک از تکه‌های $Y^{d+i}(z_{n-i})$، $1 \leq i \leq n$ شامل نقطه‌ی بحرانی نخواهد بود. بنابراین اگر طوق بحرانی $A_d(c)$ را در امتداد مدار (۳—۹) به عقب بکشیم به طوق $A_{n+d}(z_\circ)$ می‌رسیم که بطور همدیس با $A_d(c)$ همدیس است. یعنی $\operatorname{mod} A_{n+d}(z_\circ) = \operatorname{mod} A_d(c) > \circ$. چون d دلخواه بود، در مجموع $\sum \operatorname{mod} A_d(z_\circ)$ تعداد نامتناهی از طوق‌های فوق وجود دارد که این ایجاب می‌کند $\sum \operatorname{mod} A_d(z_\circ) = \infty$. که از نابرابری گروتز (۱—٦—۴) نتیجه می‌شود که مقطع $\bigcap_{d \geq \circ} Y^d(z_\circ)$ به تنها نقطه‌ی $z_\circ$ تقلیل می‌یابد که باز هم قضیّه‌ی (۱—٦—۵)، ایجاب می‌کند که مجموعه‌ی جولیای چندجمله‌ای P در نقطه‌ی $z_\circ \in J$ موضعاً همبند است. □

اکنون قضیه (۳—۱—۳)از لم (۲—۳—۷)وقضیه (۳—۲—۵)نتیجه می شود.

فصل ۴

موضعاً همبندی مجموعه‌های جولیای درجهٔ سوم در نقاطی که مصرانه بازگشتی‌اند

۴ــ۱ مقدمه

در این فصل چندجمله‌ای‌های درجهٔ سوم به فرم $P : z \longmapsto z^{3} + c$ که بوضوح فقط دارای یک نقطه‌ی بحرانی $c = 0$ هستند را درنظر می‌گیریم که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

- مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ همبند است.
- چندحمله‌ای P فقط نقاط متناوب دافع دارد.
- P در نقاط بحرانی نرمال‌پذیر نیست.

چندجمله‌ای P «با بی میلی بازگشتی » نامیده می شود، اگر یک همسایگی U از c وجود داشته باشد بطوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک c_k در مدار c وجود داشته باشد بطوریکه $c_k \in U$ باشد. و برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $P^{i}(c_k) \notin U$. اگر مدار نقطه‌ی بحرانی c «بازگشتی » باشد ولی «با بی‌میلی بازگشتی » نباشد آنگاه گوییم P «مصرانه بازگشتی» است.

در فصل سه دیدیم که هر چندجمله‌ای از نوع چندجمله‌ای‌های معرفی شده در ابتدای این فصل که «با بی‌میلی بازگشتی» باشد یا «بازگشتی» نباشد، دارای مجموعه‌ی جولیای موضعاًهمبند است . یادآوری می‌کنیم که یک نگاشت شبه—درجهٔ سوم تعمیم یافته، گردایه‌ای از دیسک‌های باز و مجزای V_i که بطور فشرده مشمول در یک دیسک باز V° هستند، همراه با یک خانواده از توابع تحلیلی مانند $g_i : V_i \longmapsto V^{\circ}$ است، به قسمی که برای هر $i \neq 0$، g_i یک به یک است و $g_{\circ} : V_{\circ} \longmapsto V^{\circ}$ یک نگاشت پوششی درجه سوم هولومورفیک با تنها یک نقطه‌ی بحرانی است و مدار نقطه‌ی بحرانی هرگز $\bigcup_i V_i$ را ترک نمی کند. علاوه بر این در این فصل، فرض خواهیم کرد که مدار نقطه‌ی بحرانی هر V_i را قطع کند. به هر چندجمله‌ای درجهٔ سوم مختلط $P : z \longmapsto z^{3} + c$ که در نقطه‌ی بحرانی c نرمال‌پذیر نیست و «مصرانه بازگشتی » است، یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای تعمیم‌یافته مرتبط می‌کنیم که بینهایت بار نرمال‌پذیر است. سپس خانواده‌های مجاز را معرفی کرده و پس از فراهم کردن ابزار لازم ابتدا قضیّه (۴—۱—۱) را اثبات کرده و بعد از آن قضیّه‌ی (۴—۱—۲) را که همانا موضعاً همبندی

مجموعه‌ی جولیای چندجمله‌ای P را دربر دارد، را بیان و اثبات می‌کنیم.

۴—۱—۱ قضیه

فرض کنید $g : \bigcup_i V_i^1 \longmapsto V^0$ یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای تعمیم یافته باشد که فقط یک نقطه‌ی بحرانی دارد. اگر یک نرمال‌سازی در تراز n موجود باشد بطوریکه $g_n : \bigcup_i V_i^n \longmapsto V_0^{n-1}$، در هر تراز نرمال‌سازی بعد از n خانواده‌های مجاز داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی جولیای کامل $K(g)$ کلاً ناهمبند است.

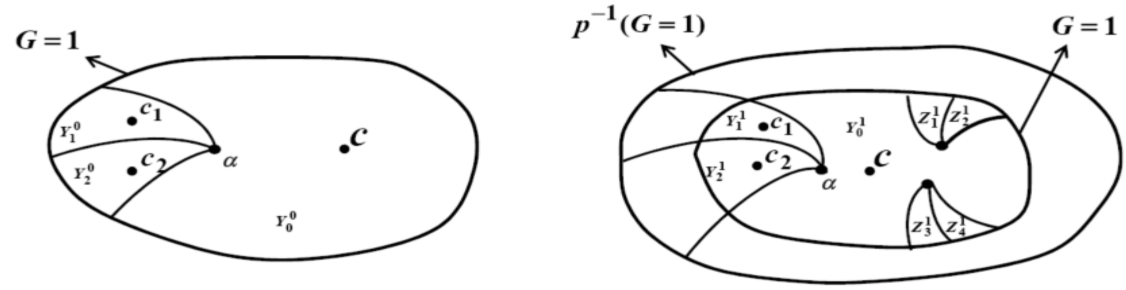
۴—۱—۲ قضیه

فرض کنید چندجمله‌ای درجهٔ سوم $P : z \longmapsto z^3 + c$ چنان باشد که دارای مجموعه‌ی جولیای همبند است، در نقطه‌ی بحرانی نرمال‌پذیر نیست و «مصرانه بازگشتی» است در این صورت اگر نگاشت شبه—چندجمله‌ای مرتبط با P در شرایط قضیّه (۴—۱—۱)صدق کند آنگاه مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ موضعاً همبند است.

۴—۲ جدول یوکوز

در این بخش به هر چندجمله‌ای درجهٔ سوم $P : z \longmapsto z^3 + c$ که دارای مجموعه‌ی جولیای همبند است، نرمال‌پذیر نیست، فقط مدارهای متناوب دافع دارد و نقطه‌ی بحرانی آن بازگشتی است، یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای مرتبط می‌کنیم که در هر ترازی دارای نرمال‌سازی است. نتایج این بخش اساساً از [۱۳] هستند.

جندجمله ای $P : z \longmapsto z^3 + c$ که در شرایط این فصل صدق می‌کند را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $Y_0^1, \cdots, Y_{q-1}^1$ تکه‌های جدول در عمق یک باشد که توسط منحنی هم‌پتانسل $P^{-1}\{G = 1\}$ و q پرتو خارجی مختوم به نقطه‌ی ثابت α محدود شده‌اند. همچنین فرض کنید که $Z_1^1, \cdots, Z_{2q-2}^1$ دیگر



شکل ۴—۱: جدول‌های یوکوز در عمق‌های صفر و یک برای $q = 3$

تکه‌های جدول در عمق یک باشد. در شکل (۲—۸ الف) جدول یوکوز از عمق صفر برای $q = 3$ رسم شده است. همچنین جدول یوکوز در عمق یک (همچنین عمق صفر) می‌تواند بصورتی که در شکل (۴—۱ ب) رسم شده‌است باشد. همانطور که در (۴—۱ ب) دیده می‌شود برای هر $1 \leq j \leq 4$ طوق‌های $Y_0^0 \setminus Z_j^1$ غیر رو به زوال هستند. یعنی $\mathrm{mod}(Y_0^0 \setminus Z_j^1) > 0$. طبق فرض چندجمله‌ای P در نقطه‌ی بحرانی $c = 0$ نرمال‌پذیر نسیت. ادعا می‌کنیم که مدار نقطه‌ی بحرانی سرانجام باید $\cup_j Z_j^1$ را قطع کند. **اثبات ادعا:** به برهان خلف فرض کنید چنین نباشد. بنابراین چون مدار نقطه‌ی بحرانی تحت P^q کاملاً مشمول در تکه‌ی بحرانی Y_0^0 در عمق صفر است، لذا باید داشته باشیم $\left\{P^{kq}(0)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset Y_0^1$. فرض کنید $\widetilde{Y}$ مجموعه بازی باشد که شامل بستار Y_0^1 است و شامل هیچ یک از نقاط $P(0), \cdots, P^{q-1}(0)$ نیست. در این صورت بوضوح دیده می‌شود که $P^q|_{\widetilde{Y}} : \widetilde{Y} \longmapsto P^q(\widetilde{Y})$ یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای است که یک نرمال‌سازی از P است که متناقض با فرض است. از این رو درستی ادعا به اثبات می‌رسد.

حال فرض کنید مدار بحرانی برای اولین بار تکه‌ی Z_i^1 را قطع کند. بنابراین طوق غیر رو به زوال $Y_0^0 \setminus Z_i^1$ را در امتداد مدار بحرانی به عقب می‌کشیم تا اینکه طوق غیر رو به زوال $A^{k-1}(0) = Y_0^{k-1} \setminus Y_0^k$ را بدست آوریم. سپس قرار می‌دهیم $V^0 = Y_0^k$. چون نقطه‌ی بحرانی بازگشتی است و V^0 یک همسایگی از نقطه‌ی بحرانی است، لذا مدار بحرانی تعداد نامتناهی دفعه به تکه‌ی V^0 بازگشت می‌کند. فرض کنیم $c_k \in V^0$ و c_{j+k} اولین نقطه‌ای از مدار c_k باشد که V^0 را قطع می‌کند. فرض کنیم $c_k \neq c$. در این صورت اگر تکه‌ی V^0 را در امتداد مدار

$c_{k+j} \longmapsto \cdots \longmapsto c_{k+1} \longmapsto c_k$ به عقب بکشیم به تکه‌ای شامل c_k می‌رسیم که آن را تکه‌ی درتراز یک و شامل c_k نامیده و با $V^1(c_k)$ نمایش می‌دهیم. طبق لم (۳—۲—۳) این تکه با تکه‌ی V° به طور همدیس ایزومورف است. یعنی نگاشت زیر یک ایزومورفیسم همدیس است.

$$P^j|_{V^1(c_k)} : V^1(c_k) \longmapsto V^\circ \qquad (۴—۱)$$

اگر $c_k = c$ باشد آنگاه نگاشت (۴—۱) یک نگاشت پوششی درجه سوم است. می‌دانیم مدار بحرانی بینهایت بار به V° بازگشت می کند. لذا اگر کارهای بالا را برای هر c_k که V° راقطع می‌کند انجام دهیم، تکه‌های V_i^1 از تراز یک بدست می‌آیند. یکتا تکه‌ی در تراز یک که شامل نقطه‌ی بحرانی است را با $V_\circ^1$ نمایش می‌دهیم. ادعامی کنیم که تکه‌های V_i^1 به طور فشرده مشمول در V° هستند. یعنی بستار V_i^1 مجموعه‌ی فشرده‌ای است که زیرمجموعه‌ی V° است.

اثبات ادعا: فرض کنیم چنین نباشد و برای یک i داشته باشیم $\overline{V_i^1} \not\subset V^\circ$. بنابراین $\partial V_i^1 \bigcap \partial V^\circ \neq \emptyset$. فرض کنیم عمق V_i^1 برابر l باشد. در این صورت $P^j(V_i^1) = V^\circ = Y_\circ^k$ که $j = l - k$ و داریم

$$\emptyset \neq P^j\left(\partial V_i^1 \cap \partial V^\circ\right) \subset \left(\partial V^\circ \cap \partial P^j(V^\circ)\right).$$

که این ایجاب می‌کند که $\partial Y_\circ^{k-1} \cap \partial Y_\circ^k \neq \emptyset$. که این هم متناقض با غیر روبه زوال بودن طوق $Y_\circ^{h-1} \setminus Y_\circ^k$ است. لذا درستی ادعا ثابت می‌شود.

فرض کنیم V_i^1 یک تکه‌ی دلخواه در تراز یک باشد. در این صورت برای یک c_k در مدار نقطه‌ی بحرانی داریم $V_i^1 = V^1(c_k)$. مرتبط با V_i^1 نگاشت (۴—۱) یک نگاشت پوششی درجهٔ سوم یا یک ایزومورفیسم همدیس است. با تعریف $g_1|_{V_i} := P^j|_{V_i}$ (که $P^j|_{V_i}$ یک نگاشت پوششی درجهٔ سوم یا یک ایزومورفیسم همدیس است)، نگاشت شبه—چندجمله‌ای $g_1 : \cup_i V_i^1 \longmapsto V^\circ$ که مرتبط باچندجمله‌ای P است، بدست می‌آید. چون مدار بحرانی به تعداد نامتناهی دفعه $V_\circ^1$ را قطع می‌کند می‌توانیم همان روند بالا را برای بدست آوردن یک نرمال‌سازی از نگاشت شبه—چندجمله‌ای g_1 تکرار کنیم. فرض کنیم $c_k \in V_\circ^1$ و c_{k+l} اولین عنصر از مدار c_k باشد که $V_\circ^1$ را قطع می‌کند. $V_\circ^1$ را در امتداد مدار $c_{k+l} \mapsto \cdots \mapsto c_{k+1} \mapsto c_k$ به عقب کشیده و تکه جدول در تراز دو که شامل c_k است را بدست

می‌آوریم. این تکه را با $V^{۲}(c_k)$ نمایش می‌دهیم . یکتا تکه‌ی جدول در تراز دو که شامل نقطه‌ی بحرانی است را با $V_{\circ}^{۲}$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب نگاشت شبه–چندجمله‌ای $g_{۲}: \cup_i V_i^{۲} \longmapsto V_{\circ}^{۱}$ که ضابطه‌اش همانند ضابطه‌ی نگاشت $g_{۱}$ بدست می‌آید، را بدست می‌آوریم که یک نرمال‌سازی از $g_{۱}$ نامیده می‌شود. باتکرار روند بالا نرمال‌سازی‌های $g_{۱}$ در هر ترازی بدست می‌آیند.

۴–۳ قدرمطلق نامتقارن و خانواده‌های مجزا

دراین بخش در هر تراز نرمال‌سازی خانواده‌های «مجاز» را تعریف کرده و سپس یک قدرمطلق نامتقارن معرفی می‌کنیم. یک نگاشت شبه–درجهٔ سوم تعمیم یافته‌ی دلخواه g را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $g_n: \cup_i V_i^n \longmapsto V_{\circ}^{n-۱}$ یک نرمال‌سازی در تراز n از g باشد. همچنین فرض می‌کنیم $V_{\circ}^n$ نمایش دهنده‌ی یکتا تکه در تراز n باشد که شامل نقطه‌ی بحرانی است. حال فرض کنید Γ^n نمایش دهنده‌ی نیم‌گروه آزاد تولیدشده توسط V_i^nها به عنوان نمادهای صوری، از تکه‌های غیربحرانی در تراز n باشد. یعنی

$$\Gamma^n = \{\gamma = \{\gamma_{۱}, \cdots, \gamma_k\} \mid \gamma_i = V_i^n,\ i \neq \circ\}.$$

فرض کنید I عنصر همانی Γ^n باشد و $|\gamma|$ برابر با طول کلمه‌ی γ باشد تعریف کنید $|I| = \circ$. به هر کلمه‌ی $\gamma \in \Gamma^n$ یک زیرمجموعه‌ی باز از $V_{\circ}^{n-۱}$ به صورت زیرمربوط می‌کنیم:

اگر $|\gamma| = \circ$ آنگاه $\gamma = I$ و قرار دهید $U(I) = V_{\circ}^n$. اگر $|\gamma| = ۱$ آنگاه برای یک $j \neq \circ$ داریم $\gamma = V_j^n$. در این حالت قرار دهید $U(\gamma) = V_j^n$. اکنون فرض کنید که برای هر $\gamma' \in \Gamma^n$ با $|\gamma'| \leq k - ۱$ یک زیرمجموعه‌ی باز از $V_{\circ}^{n-۱}$ مربوط کرده باشیم و کلمه‌ی $\gamma \in \Gamma^n$ با $|\gamma| = k$ را درنظر بگیرید. فرض کنید $\gamma = \{\gamma_{۱}, \cdots, \gamma_k\}$ و $\gamma_{۱} = V_j^n$ که $j \neq \circ$. چون طبق تعریف، تحدید g_n به V_j^n یک نگاشت همدیس است و $U(\{\gamma_{۲}, \cdots, \gamma_k\})$ زیرمجموعه‌ی بازی از $V_{\circ}^{n-۱}$ است لذا زیرمجموعه‌ی بازی از V_j^n وجود دارد به قسمی که توسط g_n بطور همدیس بر روی $U(\{\gamma_{۲}, \cdots, \gamma_k\})$ نگاشته می شود. $U(\gamma)$ را برابر این مجموعه‌ی باز تعریف می‌کنیم. یعنی $g_n(U(\gamma)) = U(\{\gamma_{۲}, \cdots, \gamma_k\})$. ادعا

می‌کنیم که برای هر $\gamma \in \Gamma^n$، $U(\gamma)$ توسط $g_n^{|\gamma|}$ بطور همدیس بر روی $V_\circ^{n-1}$ نگاشته می‌شود.

اثبات ادعا: برای $\gamma = 1$ حکم از تعریف g_n بدست می‌آید. حال فرض کنید برای هر $\gamma' \in \Gamma^n$ با$|\gamma'| < k$ حکم برقرار باشد و $\gamma \in \Gamma^n$ با $|\gamma| = k$ را درنظر بگیرید. فرض کنید $\gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ و قرار دهید $\gamma' = \{\gamma_2, \cdots, \gamma_k\}$. در این صورت طبق فرض استقراً $U(\gamma')$ تحت نگاشت $g_n^{|\gamma|-1}$ بطور همدیس بر روی $V_\circ^{n-1}$ نگاشته می‌شود. حال داریم:

$$g_n^{|\gamma|}(U(\gamma)) = g_n^{|\gamma|-1}(g_n(U(\gamma))) = g_n^{|\gamma|-1}(U(\{\gamma_2, \cdots, \gamma_k\})) = g_n^{|\gamma|-1}(U(\gamma')) = V_\circ^{n-1}$$

لذا درستی ادعا به اثبات می‌رسد.

فرض کنید $\{\gamma^j\}_{j\in J} \subset \Gamma^n$ خانواده‌ای از کلمات درΓ^n باشد که برای هر $i, j \in J$ داشته باشیم؛ $i = j \iff U(\gamma^j) \cap U(\gamma^i) \neq \emptyset$. و برای هر $j \in J$ یک طوق توپولوژیکی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$R_J(U(\gamma^j))$ یک طوق توپولوژیکی از قدرمطلق ماکزیمال است که درسه شرط زیر صدق کند:

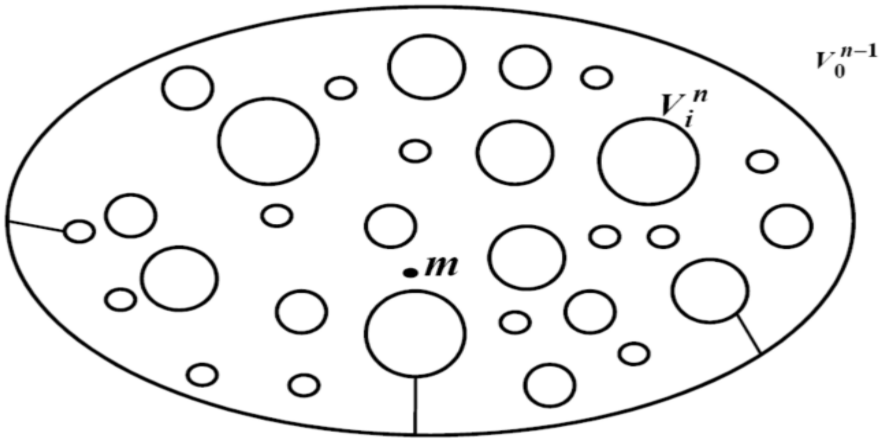
- $R_J(U(\gamma^j)) \subset V_\circ^{n-1} \setminus \overline{V_\circ^n}$.
- برای هر $i \neq j$، V_i^n مشمول در مؤلفه‌ی غیرکراندار از متمم طوق $R_J(U(\gamma^j))$است.
- V_j^n مشمول در مؤلفه‌ی کراندار از متمم طوق $R_J(U(\gamma^j))$ است.

طبق قضیهٔمانتل یک چنین طوق وجود دارد. شکل (۴−۲) را ببینید. همان‌طور که می‌بینم تعریف طوق $R_J(U(\gamma^j))$ به مجموعه‌ی اندیس گذار J وابسته است. حال فرض کنید $\{\gamma^j\}_{j\in J} \subset \Gamma^n$ خانواده‌ای از کلمات در Γ^n باشد که در آن $\gamma^j = \{\gamma_\circ^j, \cdots, \gamma_{k(j)}^j\}$.

۴−۳−۱ تعریف

گوییم خانواده‌ی J «مجزا» است هرگاه برای هر i, j که $i \neq j$ داشته باشیم

$$U(\gamma_\circ^j) \neq U(\gamma_\circ^i).$$



شکل ۴—۲: دامنه‌ی $V_\circ^{n-۱}$ به همراه دامنه‌های درون آن

فرض کنید $\{\gamma^j\}_{j\in J}\subset\Gamma^n$ یک خانواده‌ی مجزا در Γ^n باشد که در آن $\gamma^j=\{\gamma^j_\circ,\cdots,\gamma^j_{k(j)}\}$. اگر $\gamma^j=I$ آنگاه قرار می‌دهیم $U_\circ(I)=U(I)=V_\circ^n$. اگر $\gamma^j\neq I$ آنگاه $g_n^{k(j)+۱}$، $U(\gamma^j)$ را به طور همدیس بر روی $V_\circ^{n-۱}$ می‌نگارد. چون $V_\circ^n$ زیرمجموعه‌ی بازی از $V_\circ^{n-۱}$ و تحدید $g_n^{k(j)+۱}$ به $U(\gamma^j)$ یک نگاشت همدیس است، لذا زیرمجموعه‌ی بازی از $U(\gamma^j)$ وجود دارد که به طور همدیس بر روی $V_\circ^n$ نگاشته می‌شود. این مجموعه‌ی باز را با $U_\circ(\gamma^j)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$g_n^{k(j)+۱}(U(\gamma^j))=V_\circ^{n-۱}\quad,\quad g_n^{k(j)+۱}(U_\circ(\gamma^j))=V_\circ^n$$

اکنون فرض کنید که $\{V_i^n\}_{i\in I}$ یک خانواده از تکه‌های جدول در تراز نرمال‌سازی n باشد که $V_\circ^n$ یکی از اعضایش باشد که شامل نقطه ی بحرانی است، برای I تعریف زیر را داریم.

۴—۳—۲ تعریف

«قدرمطلق نامتقارن» خانواده‌ی I به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_n(I)=\operatorname{mod}R_I(V_\circ^n)+\frac{۱}{۳}\sum_{i\neq\circ}\operatorname{mod}R_I(V_i^n)$$

فرض کنید $\{V_i^n\}_{i\in I}$ یک خانواده از تکه‌های جدول و $\{\gamma^j\}_{j\in J}\subset\Gamma^n$ یک خانواده‌ی «مجزا» در Γ^n همانند بالا باشند.

۴—۳—۳ تعریف

گوییم خانواده‌ی J بر خانواده‌ی I «مسلط» است اگر برای هر $i \in I$ یکی از شرایط زیر برقرار باشد؛

۱) یک $j \in J$ و یک عددصحیح $1 \leq m \leq k(j)$ وجود داشته باشد طوریکه $U(\gamma_m^j) = V_i^n$.

۲) یک $j \in J$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(\gamma_\circ^j) = V_i^n$ و $\bigcup_{j\in J}(U(\gamma_\circ^j)) \subset \bigcup_{i\in I} V_i^n$.

۴—۳—۴ لم

اگر خانواده‌ی مجزای $\{\gamma^j\}_{j\in J}$ حداقل سه عنصر داشته باشد و بر خانواده‌ی $\{V_i^n\}_{i\in I}$ مسلط باشد، آنگاه داریم:$\sigma_n(I) \leq \frac{1}{3}\sum_j \operatorname{mod} R_J(U_\circ(\gamma^j))$

اثبات. از تعریف قدرمطلق نامتقارن داریم $\sigma_n(I) = \operatorname{mod}(R_I(V_\circ^n)) + \frac{1}{3}\sum_{i\neq\circ} \operatorname{mod}(R(V_i^n))$.

ابتدا فرض کنید که برای هر $i \in I \neq \circ$ یک $j \in J$ و یک عدد صحیح $1 \leq m \leq k(j)$ چنان موجوداند که $U(\gamma_m^j) = V_i^n$. در این صورت داریم:

$$\operatorname{mod}\left(U(\gamma_{m-1}^j \setminus \overline{\gamma_m^j})\right) \geq \operatorname{mod}\left(V^{n-1} \setminus \overline{V_\circ^n}\right) \geq \operatorname{mod}\left(R_I(V_i^n)\right) \qquad (۴—۲)$$

همچنین اگر $\gamma_j \neq I$ باشد آنگاه $\operatorname{mod}\left(U(\gamma^j) \setminus \overline{U_\circ(\gamma^j)}\right) \geq \operatorname{mod}\left(V_\circ^{n-1} \setminus \overline{V_\circ^n}\right)$. اکنون فرض کنید $i \in I$ چنان موجود باشد که برای یک $j \in J$ و $\circ \leq m \leq k(j)$ رابطه‌ی $V_i^n = U(\gamma_m^j)$ فقط برای $m = \circ$ برقرار باشد. یعنی $V_i^n = U(\gamma_\circ^j)$. در این صورت با توجه به تعریف مسلط بودن، داریم

$$U_{j\in J}\left(U(\gamma_\circ^j)\right) \subset U_{i\in I} V_i^n\ . \qquad (۴—۳)$$

بنابراین داریم $\operatorname{mod}\left(R_J(U(\gamma_\circ^j))\right) \geq \operatorname{mod}(R_I(V_i^n))$. و این برهان را کامل می‌کند. □

۴–۳–۵ لم

فرض کنید خانواده‌ی مجزای J تنها دو عنصر داشته باشد و آنها را با $\gamma^{۱},\gamma^{۲}$ نمایش دهید. در این صورت اگر خانواده‌ی J بر خانواده‌ی I مسلط باشد، آنگاه داریم:

$$\sigma_n(I) \leq \frac{۲}{۳} \bmod R_J(U_{\circ}(\gamma^{۱})) + \frac{۱}{۳} \bmod R_J(U_{\circ}(\gamma^{۲}))$$

اثبات. فرض کنید $\gamma^{۱} = \{\gamma^{۱}_{\circ},\cdots,\gamma^{۱}_k\}$ و $\gamma^{۲} = \{\gamma^{۲}_{\circ},\cdots,\gamma^{۲}_k\}$. برای V_i^n که $i \neq \circ$ عدد صحیح $\circ \leq m \leq k$ وجود دارد بطوریکه $V_i^n = U(\gamma_m)$. اگر $m = \circ$ آنگاه داریم

$$\bmod\,(R_J(U(\gamma_m))) \geq \bmod(R_I(V_i^n))\ . \qquad (۴–۴)$$

و اگر $m \neq \circ$ آنگاه $\bmod\,(R_I(V_i^n)) \geq \bmod\left(V^{n-۱} \setminus \overline{V_{\circ}^n}\right) \geq \bmod\left(U(\gamma^j_{m-۱} \setminus \overline{\gamma^j_m})\right)$. و دوباره برای $\gamma \neq ۱$ داریم $\bmod(V_{\circ}^{n-۱} \setminus \overline{V_{\circ}^n}) \geq \bmod(U(\gamma) \setminus \overline{U_{\circ}(\gamma)})$. □

۴–۴ خانواده‌های مجاز

در این قسمت به استقراً خانواده‌های «مجاز» از تکه‌های جدولی را معرفی می‌کنیم. نگاشت شبه–درجهٔ سوم $g_۱ : \bigcup_i V_i^{۱} \longmapsto V^{\circ}$ را که حداقل سه تکه‌ی جدول در تراز $\underline{1}$ دارد را درنظر بگیرید. فرض کنید $g_۲ : \bigcup_i V_i^{۲} \longmapsto V_{\circ}^{۱}$ یک نرمال‌سازی از $g_۱$ باشد. یک خانواده‌ی $I^{۲}$ از تکه‌های جدول در تراز نرمال‌سازی $\underline{2}$، «مجاز» نامیده می‌شود، اگر دارای دو شرط زیر باشد:

- $I^{۲}$ دقیقاً از سه تکه جدول که یکی بحرانی و دو تای دیگر غیر بحرانی است تشکیل شده باشد.
- یک عدد صحیح $k \geq \circ$ طوری موجود باشد که برای هر $\circ \leq l \leq k$، $g_۱^l(I^{۲})$ها زیرمجموعه‌ای از یک تکه جدول یکسان در تراز $\underline{1}$ باشند و $g_۱^{k+۱}(I^{۲})$ یک خانواده‌ی «مجزا» باشد.

اکنون فرض کنید که برای $n \geq ۳$، در ترازهای ۲ تا $n-۱$ خانواده‌های «مجاز» داریم. یک خانواده‌ی I^n از تکه‌های جدولی در تراز n، مجاز نامیده می‌شود، در صورتی که داشته باشیم:

۱) I^n دقیقاً از سه تکه‌ی جدولی تشکیل شده باشد که یکی بحرانی و دو تای دیگر غیر بحرانی باشند.

۲) عدد صحیحی مانند $k \geq ۰$ طوری موجود باشد که برای هر $۰ \leq l \leq k$، $g_۱^l(I^۲)$ها مشمول در یک تکه‌ی جدولی یکسان در تراز $\underline{1}$ باشند و خانواده‌ی $g_۱^{k+۱}(I^n)$ خانواده‌ای مجاز باشد.

۳) اگر خانواده‌ی $\{\gamma^i\}_{i\in I}$ از کلمات طوری باشد که $U_۰(\gamma_i) = g_{n-۱}^{k+۱}(V_i^n)$، آنگاه این خانواده بر یک خانواده‌ی «مجاز» از تراز $n - ۱$، «مسلط» باشد.

در صورتی که یک تراز نرمال‌سازی وجود داشته باشد که هیچ خانواده‌ی مجازی نداشته باشد، آنگاه تعریف خانواده‌های مجاز را از این تراز به بعد ارائه می‌کنیم. فرض کنید در تراز های ۲ تا n که $n \geq ۲$، خانواده‌های مجاز وجود داشته باشند در این صورت «قدرمطلق نامتقارن در تراز n» را بصورت $\sigma_n = \min \sigma(I)$ تعریف می‌کنیم که I روی خانواده‌های مجاز تغییر می‌کند.

۴–۴–۱ لم

فرض کنید $g_۱ : \bigcup_i V_i^۱ \longmapsto V^۰$ یک نگاشت شبه—درجهٔ سوم تعمیم یافته باشد که در ترازهای ۲ تا $n - ۱$ برای $n \geq ۳$، خانواده‌های مجاز دارد. اگر در تراز n یک خانواده‌ی مجاز وجود داشته باشد، آنگاه خواهیم داشت؛ $\sigma_n \geq \sigma_{n-۱}$.

۴–۵ برهان قضیّه اصلی این فصل

چون مرز تکه‌های جدولی مجموعه‌ی جولیای کامل $K(g)$ را قطع نمی‌کنند، لذا اگر نقاط $z_۱, z_۲ \in K(g)$ در تکه‌های جدولی متمایز واقع باشند آنگاه باید در مؤلفه‌های همبند متمایزی از $K(g)$ نیز واقع باشند. از این رو اگر نشان دهیم که برای هر $z \in K(g)$ مقطع تکه‌های جدولی $V^n(z)$، یعنی $\bigcap_n V^n(z)$ فقط به نقطه‌ی z تقلیل می‌یابد آنگاه نتیجه خواهیم گرفت که مجموعه‌ی جولیای کامل $K(g)$ کلاً ناهمبند است. ابتدا در مرحله‌ی اول نشان می‌دهیم که مقطع $\bigcap_n V_۰^n$ از تکه جدول‌های

بحرانی به تنها نقطه‌ی بحرانی تقلیل می‌یابد. و در نهایت در مرحله‌ی دوم برای هر $z \in K(g)$ نشان خواهیم داد که مجموع $\sum \operatorname{mod}(V^n(z) \setminus \overline{V^{n+1}}(z))$ نامتناهی است.

مرحله‌ی ۱: با توجه به فرض قضیه یک تراز نرمال‌سازی n وجود دارد به قسمی که $g_n : \bigcup_i V_i^n \longmapsto V_\circ^{n-1}$ در هر تراز نرمال‌سازی بعد از خود خانواده‌های مجاز دارد. از لم (۴–۴–۱) نتیجه می‌شود که برای هر تراز نرمال‌سازی $m \geq n$ یک خانواده‌ی مجاز I از تکه جدول‌های $V_\circ^m, V_1^m, V_2^m$ وجود دارد بطوریکه داشته باشیم

$$\operatorname{mod}\,(R_I(V_\circ^m)) + \frac{1}{3}\operatorname{mod}\,(R_I(V_1^{m+1})) + \frac{1}{3}\operatorname{mod}\,(R_I(V_2^m)) \geq \sigma_n > \circ \qquad (۵–۴)$$

چون $\sigma_n > \circ$ لذا از خاصیت ارشمیدسی اعداد، عدد مثبت $b > \circ$ چنان موجود است که $\sigma_n \geq b + b + b > \circ$. از رابطه (۴–۸) یکی از روابط زیر نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{3}\operatorname{mod}\,(R_I(V_i^n)) \geq b \quad or \quad \operatorname{mod}\,(R_I(V_\circ^m)) \geq b.$$

اگر برای یک $1 \leq i \leq 2$ داشته باشیم $\operatorname{mod} R_I(V_\circ^m) \geq b$ آنگاه به تراز $m+1$ می‌رویم. ولی اگر برای یک $1 \leq i \leq 2$ داشته باشیم $\frac{1}{3}\operatorname{mod}\, R_I(V_i^n) \geq b$، آنگاه چون مدار نقطه‌ی بحرانی تحت g_m، V_i^n را قطع می‌کند می‌توانیم به طریق زیر عمل کنیم. فرض کنیم $g_m^k(\circ)$ اولین نقطه از مدار بحرانی تحت g_m باشد که V_i^n را قطع می‌کند، در این صورت اگر طوق $R_I(V_i^n)$ را در امتداد $g_m^k(\circ) \longmapsto \cdots \longmapsto g_m(\circ) \longmapsto \circ$ به عقب بکشیم به طوق بحرانی $A^m(\circ)$ می‌رسیم که یک پوشش سه لایه از طوق $R_I(V_i^n)$ است. یعنی داریم: $\operatorname{mod} A^m(\circ) \geq \frac{1}{3}\operatorname{mod}\, R_I(V_i^n) \geq b > \circ$. اکنون فرض کنیم J خانواده‌ای مجاز از تکه‌های جدولی $V_\circ^{m+1}, V_1^{m+1}, V_2^{m+1}$ در تراز $m+1$ باشد. بنابراین از لم (۴–۴–۱) داریم:

$$\operatorname{mod}\,(R_J(V_\circ^{m+1})) + \frac{1}{3}\operatorname{mod}\,(R_J(V_1^{m+1})) + \frac{1}{3}\operatorname{mod}\,(R_J(V_2^{m+1})) \geq \sigma_n \geq b + b + b > \circ \; (۶–۴)$$

با توجه به رابطه‌ی (۴–۸) یا $\operatorname{mod}(R_J(V_\circ^{m+1})) \geq b$ و یا حداقل برای یک $1 \leq j \leq 2$ باید داشته باشیم $\operatorname{mod}(R_J(V_j^{m+1})) \geq b$. اگر $\operatorname{mod}(R_J(V_\circ^{m+1})) \geq b$ آنگاه به تراز $m+2$ می‌رویم در غیر این

صورت اگر $\operatorname{mod}(R_J(V_j^{m+1})) \geq b$ آنگاه $g_{m+1}^r(0)$ را اولین نقطه‌ای از مدار نقطه‌ی بحرانی تحت g_{m+1} در نظر می‌گیریم که V_j^{m+1} را قطع می‌کند. سپس طوق غیر رو به زوال $R_J(V_j^{m+1})$ را در امتداد $g_{m+1}^r(0) \longmapsto \cdots \longmapsto g_{m+1}(0) \longmapsto 0$ به عقب می‌کشیم تا به طوق بحرانی $A^{m+1}(0)$ برسیم که توسط یک نگاشت پوششی درجهٔ سوم بروی $R_J(V_j^{m+1})$ نگاشته می‌شود. در این صورت داریم:

$$\operatorname{mod} A^{m+1}(0) \geq \frac{1}{3} \operatorname{mod} (R_J(V_j^{m+1})) \geq b \qquad (۷-۴)$$

با توجه به اینکه در هر تراز نرمال‌سازی $m \geq n$ یک طوق بحرانی با قدرمطلق بزرگتر یا مساوی با b بدست می‌آید نتیجه می‌گیریم که مجموع $\sum_n V_0^n \setminus \overline{V_0^{n+1}}$ نامتناهی است. لذا با استفاده از قضیهٔ (۱-۶-۵) نتیجه می‌گیریم که مقطع $\bigcap_n V_0^n$ از تکه‌های جدول به تنها نقطه‌ی بحرانی تقلیل می‌یابد.

مرحله‌ی ۲: در این مرحله برای هر $z \in K(g)$ ثابت می‌کنیم که مجموع $\sum \operatorname{mod} (V^n(z) \setminus \overline{V^{n+1}}(z))$ نامتناهی است. فرض کنیم $z \in K(g)$ دلخواه باشد. اگر $0 \notin w(z)$ آنگاه یک تراز نرمال‌سازی n وجود دارد به قسمی که مدار نقطه‌ی z تکه‌ی V_0^n را قطع نمی‌کند ولی تکه‌ی V_0^{n-1} را قطع می‌کند. تنها تعداد متناهی تکه‌ی غیر بحرانی در تراز n وجود دارد که بستارهایشان دو به دو مجزا هستند. از این رو اگر $\{V_i^n\}_{i \in I}$ خانواده‌ی تکه جدول‌های غیر بحرانی در تراز n باشد آنگاه عدد مثبتی مانند $B > 0$ وجود دارد بطوریکه برای هر $i \in I$ داشته باشیم؛ $\operatorname{mod}(R_I(V_i^n)) \geq B$. چون مدار z یک تکه‌ای مانند V_i^n را بینهایت بار قطع می‌کند، به طریق زیر عمل می‌کنیم. در هر مرحله که مدار z تکه‌ی V_i^n را قطع می‌کند، طوق غیر رو به زوال $R_I(V_i^n)$ را در امتداد مدار z (از آن مرحله) به عقب می‌کشیم تا به طوقی حول z که بطور همدیس با طوق $R_I(V_i^n)$ همدیس است، برسیم. چون به تعداد نامتناهی از این مراحل وجود دارد لذا خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mod}(V^n(z) \setminus \overline{V^{n+1}}(z)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} B = \infty.$$

بنابراین طبق قضیهٔ (۱-۶-۵) مقطع $\bigcap_n V^n(z)$ به تنها نقطه‌ی z تقلیل می‌یابد. حال فرض کنید $0 \in w(z)$. همانطور که در مرحله‌ی اول دیدیم تعداد نامتناهی تراز نرمال‌سازی l وجود دارد که برای آنها قدر مطلق طوق $V^l(0) \setminus \overline{V^{l+1}}(0)$ دور از صفر کراندار است. یعنی مجموع

$\sum_l \operatorname{mod}(V^l(\circ) \setminus \overline{V^{l+1}}(\circ))$ نامتناهی است. حال برای هر l، $V_\circ^l$ یک همسایگی از نقطه‌ی بحرانی است، لذا مدار z آن را قطع می‌کند. فرض کنیم $g^k(z)$ اولین عنصری باشد که $V_\circ^l$ را قطع می‌کند. در این صورت برای یک i داریم $g^k(z) \in V_i^{l+1}$. اگر $i = \circ$ آنگاه با عقب کشیدن طوق غیر رو به زوال $(V^l(\circ) \setminus \overline{V^{l+1}}(\circ))$ در امتداد مدار $z \longmapsto g(z) \longmapsto \cdots \longmapsto g^k(z)$ به طوق غیر رو به زوال $A^{k+l+1}(z)$ حول نقطه‌ی z می‌رسیم که بطور همدیس با طوق $(V^l(\circ) \setminus \overline{V^{l+1}}(\circ))$ همدیس است. ولی اگر $i \neq \circ$ آنگاه برای یک $\gamma \in \Gamma^{l+1}$ خواهیم داشت $g^k(z) \in U_\circ(\gamma)$. اکنون طوق $U(\gamma) \setminus \overline{U_\circ}(\gamma)$ را در امتداد مدار $z \longmapsto g(z) \longmapsto \cdots \longmapsto g^k(z)$ به عقب می‌کشیم تا به طوقی مانند $A(z)$ حول نقطه‌ی z برسیم که بطور همدیس با طوق $U(\gamma) \setminus \overline{U_\circ}(\gamma)$ ایزومورف است. از طرفی با توجه به تعریف می‌دانیم نگاشت‌های (۴—۸) و (۴—۹) ایزومورفیسم‌های همدیس هستند. لذا رابطه‌ی (۴—۱۰) را داریم.

$$g_{l+1}^{|\gamma|}|_{U(\gamma)} : U(\gamma) \longmapsto V_\circ^l \qquad (۸—۴)$$

$$g_{l+1}^{|\gamma|}|_{U_\circ(\gamma)} : U_\circ(\gamma) \longmapsto V_\circ^{l+1} \qquad (۹—۴)$$

$$\operatorname{mod}(U(\gamma) \setminus \overline{U_\circ}(\gamma)) = \operatorname{mod}(V_\circ^l \setminus \overline{V_\circ^{l+1}}) \qquad (۱۰—۴)$$

بنابراین طوق $A(z)$ دور از صفر کراندار است. حال اگر تراز l تغییر کند، تعداد نامتناهی طوق غیر رو به زوال حول نقطه‌ی z بدست می‌آوریم که دور از صفر کراندار هستند. و این یعنی اینکه مجموع $\sum V^n(z) \setminus \overline{V^{n+1}}(z)$ نامتناهی است. اکنون از قضیه (۱—٦—۵) نتیجه می‌شود که مقطع $\bigcap_n V^n(z)$ به تنها نقطه‌ی z تقلیل می‌یابد. بنابراین مجموعه‌ی جولیای کامل $K(g)$ کلاً ناهمبند است. $\square$

حال موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیای چندجمله‌ای $P : z \longmapsto z^3 + c$ که در شرایط ابتدای فصل صدق می‌کند، از قضیه (۴—۱—۱)نتیجه می‌شود. بدین ترتیب برهان نتیجه‌ی اصلی این بخش کامل می‌شود.

فصل ۵

چندجمله‌ای‌های بینهایت‌بار نرمال‌پذیرو موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیای آنها

۵—۱ مقدمه

در این فصل چندجمله‌ای‌های درجهٔدوم تک—بحرانی (چندجمله‌ای هایی که فقط یک نقطه‌ی بحرانی صفر دارند) به فرم $P : z \longmapsto z^{۲} + c$ که بینهایت بار نرمال‌پذیربوده، «غیر شاخه‌ای» و دارای «کران کلی» هستند را درنظر گرفته و ثابت می‌کنیم که مجموعه‌ی جولیای آن‌هاموضعاً همبند است. چند جمله‌ای مختلط تک—بحرانی درجهٔدوم P را در نظر گرفته و مجموعه‌ی جولیای آن را با $J(P)$ نمایش می‌دهیم. برای هر $i \geq ۱$ فرض کنید $c_i = P^i(۰)$، iـامین مقدار بحرانی P باشد. مدار $PCO = \{c_i\}_{i=۱}^{\infty}$ را مدار پس—بحرانی می‌نامیم. در این صورت مدار بحرانی P عبارت است از $CO = PCO \cup \{۰\}$. نقطه‌ی بحرانی صفر بازگشتی خوانده می‌شود، درصورتی که برای هر همسایگی W از صفر یک مقدار بحرانی c_i، $i \geq ۱$ در W وجود داشته باشد.

از این پس فقط چندجمله‌ای‌های تک—بحرانی درجهٔدومی را در نظر خواهیم گرفت که مدار بحرانی آنها «بازگشتی» باشد. همچنین فرض خواهیم کرد که P مدارهای متناوب «جاذب» و «بی‌اثر» (تعریف ۱—۲—۵) مراجعه کنید) نداشته باشد. از این رو تمام مدارهای متناوب P «دافع» هستند و مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ همبند و برابر با مجموعه‌ی جولیای کامل $K(P)$ خواهد بود. این محدودیت‌ها برای نگاشت‌های شبه—درجهٔدوم (تعریف ۱—۵—۸) تک—بحرانی نیز برقرار هستند. فرض کنید V, U دامنه‌هایی از صفحه‌ی مختلط هستند که با دیسک‌هایی ایزومورف هستند و U بطور فشرده مشمول در V است (یعنی $\overline{U} \subset V$) و نگاشت شبه—درجهٔ دوم تک—بحرانی $F : U \longmapsto V$ را درنظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که نگاشت F یک‌بار نرمال‌پذیراست، در صورتی که عددی صحیح مانند $n' > ۱$ و یک همسایگی باز U' از نقطه‌ی بحرانی چنان موجود باشند که $U' \subset U$ و $F_۱ = F^{n'} : U' \longmapsto V' \subset V$ یک نگاشت شبه—درجهٔدوم با مجموعه‌ی جولیای همبند باشد. زوج (U', V') یک n'—نرمال‌سازی از F نامیده می‌شود.

همانطور که از تعریف (۱—۷—۱۵) مشاهده می‌شود یک نگاشت شبه—درجهٔدوم تک—بحرانی بینهایت بار نرمال‌پذیر است، در صورتی که برای هر $k \geq ۱$، kبار نرمال‌پذیرباشد. kبار نرمال‌پذیربودن

نیز در تعریف (۱—۷—۱۴) آمده است. در این فصل نیز همچون فصل‌های قبل نقطه‌ی ثابت α از چندجمله‌ای P همان نقطه‌ی ثابتی است که هیچ پرتو ثابتی به آن ختم نمی‌شود. چون P از درجهٔ دوم است لذا نقطه‌ی ثابت دیگری که آن را با β نمایش می‌دهیم وجود دارد که مجزا از α است (چون P نقاط متناوب بی‌اثر ندارد) و نقطه‌ی مختوم یک پرتو ثابت از P است. به نقاط ثابت α و β به ترتیب نقاط ثابت «جدا نشدنی» و «جدا شدنی» نیز می‌گویند. چون با حذف α از $K(P) = J(P)$، مجموعه‌ی باقی‌مانده $K(P) \setminus \{\alpha\}$ غیرهمبند خواهد شد ولی با حذف β از $K(P)$، مجموعه‌ی $K(P) \setminus \{\alpha\}$ هنوز همبند است. همینطور اگر $F_1 = F^{n'} : U' \longmapsto V'$ یک n'نرمال‌سازی از F باشد که دو نقطه ثابت دافع در مجموعه جولیای کامل $K(F_1)$ دارد، α_{F_1} را نقطه ثابتی از F_1 درنظر می‌گیریم که مجموعه‌ی $K(F_1) \setminus \{\alpha_{F_1}\}$ ناهمبند باشد و β_{F_1} را نقطه ثابت دیگر درنظر می‌گیریم. پیرو [٦] گونه‌های متفاوتی از نرمال‌سازی‌ها را درنظریه نرمال‌سازی نگاشت‌های شبه—درجه دوم درنظر می‌گیریم. فرض کنید $K(i) = F^i(K(F_1))$، $1 \leq i < n'$. n'—نرمال‌سازی (U', V') را α—گونه گوییم، اگر برای یک زوج (i,j) که $i \neq j$ و $0 \leq i,j < n'$، داشته باشیم $K(i) \cap K(j) = \{\alpha\}$؛ β—گونه گوییم اگر برای یک زوج (i,j) که $i \neq j$ و $0 \leq i,j < n'$، داشته باشیم $K(i) \cap K(j) = \{\beta\}$ و مجزاگونه گوییم درصورتیکه برای هر زوج (i,j) که $i \neq j$ و $0 \leq i,j < n'$، داشته باشیم $K(i) \cap K(j) = \emptyset$. همانند تعریف (۱—۷—۱۲) هر n'—نرمال‌سازی (U', V') را که β—گونه یا مجزا—گونه باشد، یک n'—نرمال‌سازی ساده از F گوییم. در بخش (۵—۳) به نگاشت‌های شبه—درجه دوم تک بحرانی $F : U \longmapsto V$ که بی‌نهایت بار نرمال‌پذیرهستند، بطور طبیعی یک دنباله نامتناهی از نرمال‌سازی‌های ساده $\{F_i = F^{m_i} : U_i \longmapsto V_i\}_{i=1}^{\infty}$ که $m_1 < m_2 < \cdots$ مرتبط می‌کنیم و پس از آن همواره این دنباله را مرتبط با F درنظر می‌گیریم. دنباله $\{F_i = F^{m_i} : U_i \longmapsto V_i\}_{i=1}^{\infty}$ را درنظر گرفته و فرض کنید $\{J(F_i)\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ی نامتناهی از مجموعه‌های جولیای متناظر با آن باشد. در بخش (۵—۲) ثابت می‌کنیم که $J(F_i)$ از انتخاب m_i—نرمال‌سازی (U_i, V_i) مستقل است. یعنی اگر $G = F^{m_i} : U' \longmapsto V'$ نیز یک m_i—نرمال‌سازی از F باشد، آنگاه خواهیم داشت $J(G) = J(F_i)$.

بنابراین بجای نماد $J(F_i)$ از نماد J_{m_i} استفاده می‌کنیم. چند جمله‌ای تک—بحرانی درجه دوم P را درنظر گرفته و فرض کنید $U = \{z|G(z) \leq ۱\}$ و قرار دهید $V = P(U)$. (به پاراگراف بعد از قضیه (۱—۵—۱۵) مراجعه نمایید) دراین صورت $P : U \longmapsto V = P(U)$ یک نگاشت شبه—درجه دوم تک—بحرانی است که مجموعه جولیایش با مجموعه جولیای چندجمله‌ای P یکسان است.

اکنون گوییم چندجمله‌ای P بی‌نهایت بار نرمال‌پذیراست اگر نگاشت شبه—درجه دوم $P : U \longmapsto V$ بی‌نهایت بار نرمال‌پذیرباشد. گوییم نگاشت $P : U \longmapsto V$ دارای «کران کلی» است، اگر یک زیردنباله نامتناهی از نرمال‌سازی‌های ساده‌ی $\{F_{i_s} = F^{m_{i_s}} : U_{i_s} \longmapsto V_{i_s}\}_{s=۱}^{\infty}$ و یک عدد ثابت $\lambda > ۰$ چنان موجود باشند که برای هر $s \geq ۱$ داشته باشیم $\mathrm{mod}(V_{i_s} \setminus U_{i_s}) > \lambda$ (به تعریف (۵—۳—۲) مراجعه کنید)، همچنین گوییم نگاشت F «غیر شاخه‌ای» است در صورتی که یک زیر دنباله‌ی نامتناهی از نرمال‌سازی‌های $\{J_{m_{i_l}}\}_{l=۱}^{\infty}$ از مجموعه‌ی جولیای $J(F)$، همسایگی‌های W_l از $J_{m_{i_l}}$ و عدد ثابت $\mu > ۰$ چنان موجود باشند که برای هر l داشته باشیم $\mathrm{mod}(W_l \setminus J_{m_{i_l}}) > \mu$ و طوق $W_l \setminus J_{m_{i_l}}$ از مدار بحرانی $\{F^n(۰)\}_{n=۰}^{\infty}$ مجزا باشد. (تعریف (۵—۳—۳)) را ببینید) حال قضیه‌ای که در این فصل آنرا ثابت می‌کنیم را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۵—۱—۱ قضیه

مجموعه‌ی جولیای یک چندجمله‌ای درجه دوم تک—بحرانی که بی‌نهایت بار نرمال‌پذیر، «غیر شاخه‌ای» و دارای «کران کلی» است، موضعاً همبند است.

همانطور که از قضیه یکنواخت‌سازی (۱—۷—۵) نتیجه می‌شود، هر نگاشت شبه—درجه دوم با مجموعه جولیای همبند با یک چندجمله‌ای درجهٔدوم معادل هیبرید (تعریف (۱—۷—۴)) است. بنابراین قضیهٔ (۵—۱—۱) برای نگاشت شبه—درجهٔدوم نیز بکار گرفته می‌شود.

۵—۲ ساختار جدول‌های یوکوز

فرض کنید $P : z \longmapsto z^{2} + c$ همان چندجمله‌ای باشد که در که در بخش (۵—۱) معرفی شد. همچنین فرض کنید که $U = U_{10}$ ناحیه‌ی هم‌پتانسیل محدود به منحنی هم‌پتانسیل S_{10} باشد. حال نگاشت شبه درجهٔ‌دوم $F = P : U \longmapsto P(U) = V$ را که مجموعه‌ی جولیایش همان مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ است، را درنظر بگیرید.

F دو نقطه‌ی ثابت دارد که هر دو دافع هستند و یکی از آنها که آن را با α نشان می‌دهیم نقطه‌ی مختوم یک پرتو خارجی متناوب است. یعنی یک دور از پرتو های خارجی موجود است که به α ختم می‌شود. فرض کنید Γ_{0}° اجتماع پرتوهای خارجی مختوم به α باشد. $U_{0}^{\circ} = U$ را توسط Γ_{0}° به تعداد متناهی دامنه (این تعداد برابر است با دوره‌ی تناوب پرتو خارجی متناوب مختوم به نقطه‌ی ثابت α) برش می‌زنیم. فرض کنید η_{0} خانواده‌ی بستارهای این دامنه‌ها باشد. برای هر $n > 0$ فرض کنید $\Gamma_{n}^{\circ} = F^{-n}(\Gamma_{0}^{\circ})$. در این صورت Γ_{n}°، $U_{n}^{\circ} = F^{-n}(U_{0}^{\circ})$ را به تعداد متناهی دامنه برش می‌زند. فرض کنید η_{n} خانواده‌ی بستارهای این دامنه باشد. دنباله‌ی $\zeta^{\circ} = \{\eta_{n}\}_{n=0}^{\infty}$ را در جدول یوکوز برای مجموعه‌ی جولیای $J(F)$ می‌نامیم. دامنه‌ی یکتای C_{n} در η_{n} که شامل نقطه‌ی بحرانی صفر است، یک تکه‌ی جدول بحرانی در η_{n} نامیده می‌شود. تحدید P به تمام دامنه‌ها بجز تحدید آن به C_{n}، یک ایزومورفیسم همدیس است؛ و $P|_{C_{n}}$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای دولایه بر روی یک دامنه در η_{n-1} است. فرض کنید $J_{1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_{n}$. در زیر نتیجه‌ای که مستقیماً از قضیهٔ (۲—۱—۱) نتیجه می‌شود را بیان می‌کنیم.

۵—۲—۱ قضیه

فرض کنید $P(z) = z^{2} + c$ دارای مدار بحرانی بازگشتی باشد. در این صورت P نرمال‌پذیر است اگر وتنها اگر J_{1} بیش از یک نقطه داشته باشد

فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از صفحه‌ی مختلط باشد. ϵ—همسایگی X در $\mathbb{C}$ که با نماد

$N(X,\epsilon)$ نمایش داده می‌شود را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(X,\epsilon)=\{x\in\mathbb{C}|d(x,X)<\epsilon\} \qquad (۱-۵)$$

فرض کنید P نرمال‌پذیر باشد در این صورت اعداد صحیح $n_1\geq 0, m_1>1$ موجودند که $F_1=F^{m_1}:C_{m_1+n_1}\longmapsto C_{n_1}$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای درجهٔ‌دوم است و $C_{m_1+n_1}\subset N(J_1,1)$ (به مراجع [۱۴، ۱۱، ۸] مراجعه کنید). علاوه بر این دامنه‌های U_1,V_1 که $C_{m_1+n_1}\subset U_1\subset U$ و $C_{n_1}\subset V_1\subset V$ چنان موجودند که نگاشت $F_1=F^{m_1}:U_1\longmapsto V_1$ یک نگاشت شبه‌—درجهٔ‌دوم است. در این صورت داریم $J(F_1)=J_1$ و F_1 یک نرمال‌سازی ساده از $F:U\longmapsto V$ است. تا به حال برای چندجمله‌ای $P:z\longmapsto z^2+c$ (نگاشت شبه—درجهٔ‌دوم $F=P:U\longmapsto P(U)=V$) یک جدول یوکوز و یک مجموعه‌ی $J_1=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n$ و یک m_1—نرمال‌سازی $F_1=F^{m_1}:U_1\longmapsto V_1$ طوری بدست آورده‌ایم که مجموعه‌ی جولیای این m_1—نرمال‌سازی برابر J_1 است. حال ثابت می‌کنیم که هر m_1—نرمال‌سازی دیگری از F نیز دارای مجموعه‌ی جولیای J_1 است.

۵—۲—۲ قضیه

فرض کنید $G=P^{m_1}:U'\longmapsto V'$ یک m_1—نرمال‌سازی دلخواه از P باشد. در این صورت مجموعه‌ی جولیای کامل G همواره J_1 است

اثبات. می‌دانیم $0\in U'\bigcap U_1$. فرض کنید U'' آن مؤلفه‌ی همبندی از $U'\bigcap U_1$ باشد که شامل نقطه‌ی بحرانی صفر است. در این صورت نگاشت (۵—۲) یک نرمال‌سازی از P است که مجموعه‌ی جولیای آن $J(H)$، همبند است.

$$H=P^{m_1}:U''\longmapsto V''\subset V'\cap V_1 \qquad (۲-۵)$$

بوضوح خانواده‌ی تکرارهای H,G,F_1 یکسان است. فرض کنید $z\in J(H)$ نقطه‌ای دلخواه از مجموعه‌ی جولیای $J(H)$ باشد. در این صورت خانواده‌ی تکرارهای H در هیچ همسایگی از z نرمال

نیست. بنابراین خانواده‌ی تکرارهای G, F_1 نیز در هیچ همسایگی از z نرمال نیست. بنابراین $z \in J(G) \cap J(F_1)$ را داریم. فرض کنید $\alpha_G, \beta_G, \alpha_{F_1}, \beta_{F_1}$ نقاط ثابت G, F_1 باشند. از آنجا که هر یک از نگاشت‌های H, G, F_1 دقیقاً دو نقطه‌ی ثابت در دامنه‌هایشان دارند، لذا اگر α_H, β_H نقاط ثابت (به ترتیب جداشدنی و جدانشدنی از H) H در U'' باشند، آنگاه با توجه به رابطه‌ی $U'' \subset U' \cap U_1$ رابطه‌ی (۵—۳)، و از رابطه‌ی $z \in J(G) \cap J(F_1)$ رابطه‌ی (۵—۴) را خواهیم داشت

$$\{\alpha_G, \beta_G, \alpha_{F_1}, \beta_{F_1}\} \subset \{\alpha_H, \beta_H\} \tag{۵—۳}$$

$$\{\alpha_G, \beta_G, \alpha_{F_1}, \beta_{F_1}\} \subset J(H) \tag{۵—۴}$$

اولاً چون $\beta_{F_1} \in J_{F_1}$، لذا از قضیهٔ (۵—۱—۱) داریم

$$J(F_1) = \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} F_1^{-n}(\beta_{F_1})}. \tag{۵—۵}$$

از طرفی از رابطه‌ی (۵—۴) داریم

$$J(H) = \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} H^{-n}(\beta_{F_1})}. \tag{۵—۶}$$

بنابراین از روابط (۵—۵) و (۵—۶) داریم

$$J(H) = J(F_1). \tag{۵—۷}$$

حال از رابطه‌ی $z \in J(G) \cap J(F_1)$ و (۵—۷) داریم

$$J(H) = J(F_1) = J(F_1) \cap J(G). \tag{۵—۸}$$

از رابطه‌ی (۵—۸) نتیجه می‌شود

$$J(F_1) \subset J(G). \tag{۵—۹}$$

از طرفی چون $\beta_{F_1} \in J(F_1)$ لذا از (۵—۹) نتیجه می‌شود.

$$J(G) = \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} G^{-1}\{\beta_{F_1}\}}. \tag{۵—۱۰}$$

و رابطه‌ی (۵—۱۰) نیز به نوبه‌ی خود رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد

$$J(G) = J(F_1). \qquad (۵—۱۱)$$

اکنون از روابط (۵—۷) و (۵—۱۱) داریم $J(G) = J(H) = J(F_1) = J_1$، و این برهان را کامل می‌کند. $\square$

۵—۲—۳ تذکر

برای هر m_1—نرمال‌سازی (U', V') از $F : U \longmapsto V$، تکه‌ای بحرانی مانند $C_{m_1+n} \subset U'$ وجود دارد به قسمی که $F_1 = F^{m_1} : C_{m_1+n} \longmapsto C_n \subset V'$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای دولایه است.

۵—۳ ساختار جدول‌های یوکوز سه بُعدی

چندجمله‌ای های بینهایت بار نرمال‌پذیر P را در نظر بگیرید.

فرض کنید $\eta_n^\circ = \eta_n, \beta_1 = \beta, \alpha_1 = \alpha, k_1 = m_1, C_n^\circ = C_n$. همچنین فرض کنید $n_1, J_1, \Gamma_n^\circ, U_n^\circ, \zeta^\circ, F : U \longmapsto V$ همانند بخش قبل باشند. حال فرض کنید α_2, β_2 نقاط ثابت F_1 باشند که $J_1 \setminus \{\beta_2\}$ هنوز همبند است ولی $J_1 \setminus \{\alpha_2\}$ ناهمبند است. بوضوح نقاط α_2, β_2 نقاط متناوبی از $F = P$ هستند. لذا یک دور از پرتوهای خارجی وجود دارد که به α_2 ختم می‌شوند. فرض کنید $\Gamma_\circ^1$ اجتماع این پرتوها باشد، در این صورت $\Gamma_\circ^1$، $U_\circ^1 = C_{k_1+n_1}^\circ$ را به تعداد متناهی دامنه برش می‌زند.فرض کنید $\eta_\circ^1$ خانواده‌ی بستارهای این نواحی باشد. حال $\Gamma_n^1 = F_1^{-n}(\Gamma_\circ^1)$، $U_n^1 = F_1^{-n}(U_\circ^1)$ را برای هر $n \geq 1$ به تعداد متناهی دامنه برش می‌زند

فرض کنید η_n^1 گردایه‌ی بستارهای این نواحی باشد. دنباله‌ی $\zeta^1 = \{\eta_n^1\}_{n=\circ}^\infty$ یک جدول دوبعدی برای J_1 است، که آن را اولین جدول می‌نامیم. همچنین ζ° را صفر—امین جدول می‌نامیم.

دامنه‌ی C_n^1 در η_n^1 را که شامل صفر است، تکه‌ی بحرانی در η_n^1 می‌نامیم. واضح است که تحدید F_1

به تمام دامنه‌ها در η_n^1 به استثنای C_n^1، یک دو سویی به روی دامنه‌های در η_{n-1}^1 است و $P|_{C_n^1}$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای دولایه به روی یک دامنه در η_{n-1}^1 (مشخصاً دامنه‌ای که شامل $(C_1 = F(0)$ است.

فرض کنید $J_2 = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^1$. چون F_1 نرمال‌پذیر است اعداد صحیح $k_2 > 1, n_2 \geq 0$ وجود دارند بطوریکه $F_2 = F_1^{k_2} : C_{n_2+k_2}^1 \longmapsto C_{n_2}^1$ یک نگاشت پوششی دولایه است بطوریکه $C_{n_2+k_2}^1 \subset N(J_2, \frac{1}{2})$. دامنه‌های $C_{n_2+k_2}^1 \subseteq U_2 \subset U_1$ و $C_{n_2}^1 \subseteq V_2 \subset V_1$ را طوری درنظر می‌گیریم که $F_2 = F_1^{k_2} : U_2 \longmapsto V_2$ یک نگاشت شبه—درجهٔدوم باشد. در این صورت جولیایش برابر J_2 است.

برای هر $i \geq 2$ فرض کنید ما نگاشت زیر که جولیایش J_i است را ساخته باشیم؛

$$F_i = F_{i-1}^{k_i} : U_i \longmapsto V_i \quad , \quad F_i = F_{i-1}^{k_i} : C_{n_i+k_i}^{i-1} \longmapsto C_{n_i}^{i-1}$$

فرض کنید $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ نقاط ثابت جداشدنی و جدانشدنی از F_i باشند. نقاط $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ نقاط متناوب دافع P نیز می‌باشند. حداقل دو تا، ولی تعداد متناهی پرتو خارجی وجود داردکه در نقطه‌ی α_{i+1} ختم می‌شوند. فرض کنید Γ_0^i اجتماع دورِ این پرتوهای خارجی باشد. در این صورت Γ_0^i، $U_0^i = C_{n_i+k_i}^{i-1} U_0^i$ را به تعداد متناهی ناحیه برش می‌زند. فرض کنید η_0^i خانواده‌ی بستارهای این نواحی باشد. برای هر $n > 0$ فرض کنید $\Gamma_n^i = F_i^{-n}(\Gamma_0^i)$ باشد. در این صورت Γ_n^i، $U_n^i = F_i^{-n}(U_0^i)$ را به تعدادی متناهی دامنه برش می‌زند. فرض کنید η_n^i خانواده‌ی بستارهای این نواحی باشد. دامنه‌ی C_n^i در η_n^i که شامل صفر است، تکه‌ی بحرانی در η_n^i نامیده می‌شود. پر واضح است که تحدید F_i به تمام دامنه‌های در η_n^i به استثنای C_n^i یک نگاشت دو سویی به روی دامنه‌های در η_{n-1}^i است و $P|_{C_n^i}$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای دولایه بر روی یک دامنه در η_{n-1}^i است. فرض کنید $J_{i+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^i$. اعداد صحیح $k_{i+1} > 1, n_{i+1} \geq 0$ موجودند بطوریکه $F_{i+1} = F_i^{k_{i+1}} : C_{n_{i+1}+k_{i+1}}^i \longmapsto C_{n_{i+1}}^i$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای دولایه است و $C_{n_{i+1}+k_{i+1}}^i \subset N(J_{i+1}, \frac{1}{i+1})$.

ما دامنه‌های $C_{n_{i+1}+k_{i+1}}^i \subseteq U_{i+1} \subset U_i$ و $C_{n_{i+1}}^i \subseteq V_{i+1} \subset V_i$ را طوری درنظر می‌گیریم که

$V_{i+1} \longmapsto U_{i+1} : F_i^{k_{i+1}} = F_{i+1}$ یک نگاشت شبه درجهٔ‌دوم باشد. در این صورت مجموعه‌ی جولیای آن برابر J_{i+1} خواهد بود. فرض کنید $\zeta^i = \{\eta_n^i\}_{n=0}^{\infty}$. این یک جدول دو بعدی برای J_i است. ما آن را i–امین افراز می‌نامیم.

۵–۳–۱ تذکر

برای هر k_{i+1}–نرمال‌سازی (U', V') از $F_i : U_i \longmapsto V_i$، ما یک عدد صحیح $n > 0$ داریم بطوریکه $C_{n+k_{i+1}}^i \subset U' \cap N(J_{i+1}, \frac{1}{i+1})$ و $C_n^i \subset V'$ و طوریکه $F_{i+1} = F_i^{k_{i+1}} : C_{n+k_{i+1}}^i \longmapsto C_n^i$ یک نگاشت پوششی شاخه‌ای دولایه باشد. هنوز هم ζ^i را به معنی $\zeta^i \cap C_{n+k_{i+1}}^i$ به کار می‌بریم. بنابراین (U_{i+1}, V_{i+1}) می‌تواند یک k_{i+1}–نرمال‌سازی دلخواه از $F_i : U_i \longmapsto V_i$ باشد.

فرض کنید $m_i = \prod_{i=1}^{i} k_i$ برای $1 \le i < \infty$. در این صورت ما یک دنباله‌ی نامتناهی کاملاً طبیعی از نرمال‌سازی‌های ساده‌ی $F : U \longmapsto V$، یعنی $\{F_i = F^{m_i} : U_i \longmapsto V_i\}_{i=1}^{\infty}$ را ساخته‌ایم؛ و همچنین یک دنباله‌ی تودرتو $\{\zeta^i\}_{i=0}^{\infty}$ از افرازها را برای $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ (که $J_0 = J$) ساخته‌ایم، که ما این دنباله‌ی $\{\zeta^i\}_{i=0}^{\infty}$ از افرازها را یک جدول سه بُعدی می‌نامیم. از این پس ما تمام نمادهای این بخش را فیکس می‌کنیم.

۵–۳–۲ تعریف

گوییم یک چندجمله‌ای درجهٔ‌دوم بینهایت بار نرمال‌پذیر $P(z) = z^2 + c$ کران کلی[1] دارد اگر یک ثابت $\lambda > 0$ و یک دنباله‌ی نامتناهی از نرمال‌سازی‌های ساده مانند $\{F_{i_s} = F^{m_{i_s}} : U_{i_s} \longmapsto V_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $s \ge 1$ داشته باشیم $\operatorname{mod}(V_{i_s} \setminus \overline{U}_{i_s}) > \lambda$.

[1] Complex bounds

۵—۳—۳ تعریف

گوییم یک چندجمله‌ای درجهٔدوم بینهایت بار نرمال‌پذیر $P(z) = z^{2} + c$ غیرشاخه‌ای [۲] است اگر یک زیردنباله‌ی نامتناهی از نرمال‌سازی‌های $\{J_{i_l}\}_{l=1}^{\infty}$ از $J(P) = J$ و همسایگی‌های W_l از J_{i_l}، برای هر l، و ثابت $\mu > 0$ وجود داشته باشند طوریکه $\mathrm{mod}(W_l \setminus J_{i_l}) > \mu$ باشد و $W_l \setminus J_{i_l}$ شامل هیچ نقطه‌ای از مدار بحرانی P، $CO = \{C_i\}_{i=0}^{\infty}$، نباشد.

۵—۴ جدول‌های سه بُعدی و همبندی موضعی

قبل از پرداختن به اثبات قضیهٔ (۵—۱—۱) یک نابرابری قدرمطلق در نرمال‌سازی‌ها اثبات می‌کنیم که در بدست آوردن یک پایه‌ی موضعی برای نقاط مجموعه جولیا بکار می‌آید. سپس به اثبات قضیه اصلی می‌پردازیم.
یادآوری می‌کنیم که یک n'—نرمال‌سازی (U', V') از یک نگاشت شبه—درجه دوم $F : U \longmapsto V$ به معنی یک زوج از دامنه‌های $U' \subset U$ و $V' \subset V$ است، چنانکه $F_1 = F^{n'} : U' \longmapsto V'$ یک نگاشت شبه—درجه دوم با مجموعه جولیای کامل همبند باشد.

۵—۴—۱ قضیه

فرض کنید $F : U \longmapsto V$ یک نگاشت شبه—درجه دوم نرمال پذیر باشد و n'—نرمال‌سازی (U', V') که $n' > 1$ را درنظر بگیرید. در این صورت داریم $\mathrm{mod}(U \setminus \overline{U'}) \geq \frac{1}{2}\ \mathrm{mod}\ (V \setminus \overline{U})$

اثبات. n'—نرمال‌سازی $F_1 = F^{n'}|_{U'} : U' \longmapsto V'$ را درنظر می‌گیریم. از تذکر (۱—۷—۱۰) نتیجه می‌شود که اولین مقدار بحرانی $C_1 = F(0)$ به V' تعلق ندارد. چون V' یک زیر مجموعه‌ی همبند ساده از V بوده و F یک نگاشت پوششی شاخه‌ای دو لایه است، لذا از تعریف (۱—۴—۶) و

---
[۲] Unbranche

(۱ــ۴ــ۸) نتیجه می‌شود که F دارای دو شاخه‌ی وارون تحلیلی به صورت زیر است

$$g_{0} : V' \longmapsto g_{0}(V') \quad , \quad g_{1} : V' \longmapsto g_{1}(V') \subset U. \qquad (۱۲ـ۵)$$

یکی از آنها $F^{n'-1}(U')$ است (باتوجه به زنجیر ذکر شده در تذکر (۱ــ۷ــ۱۰)).

بنابراین $F(U')$ دامنه‌ای در داخل U و شامل c_1 است. طوق‌های $V \setminus \overline{F(U')}$ و $U \setminus \overline{U'}$ را درنظر بگیرید. در این صورت چون نگاشت $F|_{U\setminus U'} : U \setminus \overline{U'} \longmapsto V \setminus \overline{F(U')}$ یک نگاشت پوششی دولایه (درجهٔ‌دوم) است داریم

$$\text{mod } (U \setminus \overline{U'}) = \frac{1}{2} \text{ mod } (V \setminus \overline{F(U')}). \qquad (۱۳ـ۵)$$

چون $F(U')$ زیرمجموعه‌ای از U است لذا طوق $V \setminus \overline{U}$ زیرطوقی از $V \setminus \overline{F(U')}$ است لذا داریم

$$\text{mod } (V \setminus \overline{U}) \leq \text{mod}(V \setminus \overline{F(U')}). \qquad (۱۴ـ۵)$$

حال از روابط (۵ــ۱۳) و(۵ــ۱۴) نتیجه می‌شود $\text{mod}(U \setminus \overline{U'}) \geq \frac{1}{2} \text{ mod } (V \setminus \overline{U})$. □

حال فرض کنید چندجمله‌ای درجهٔ‌دوم تک‌ــبحرانی P بینهایت بار نرمال‌پذیر باشد و $\{\zeta^i = \{\eta_n^i\}_{n=0}^{\infty}\}_{i=0}^{\infty}$ جدول سه بعدی آن باشد. برای هر $x \in J(P)$، مدار پیشروِx تحت تکرارهای Pرا با $o(x)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $\overline{o(x)}$ بستار مدار پیشروِx باشد. در این صورت تعریف زیر را داریم.

۵ــ۴ــ۲ تعریف

گوییم نقطه‌ی $x \in J(P)$ «غیر بازگشتی به صفر» است، اگر برای یک $i \geq 1$ داشته باشیم

$$\overline{o(x)} \cap J_i = \emptyset. \qquad (۱۵ـ۵)$$

در غیر این صورت گوییم نقطه‌ی x در جدول سه بعدی «بازگشتی به صفر» است.

به عنوان مثال برای هر $1 \leq j < \infty$ تمام نقاط ثابت جداشدنی و جدانشدنی $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$ از F_j و تمام تصاویر وارونشان تحت تکرارهای P غیر بازگشتی هستند و مدار بحرانی و تصاویر وارونش تحت تکرارهای P بازگشتی هستند. حال به اثبات قضیهٔ‌اصلی می‌پردازیم. این کار را طی لم‌های زیر انجام می‌دهیم. لم (۵—۴—۳) دقیقاً مشابه لم (۳—۲—۱) اثبات می‌شود لم (۵—۴—۴) موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیا را در تمام نقاط غیر بازگشتی بدست می‌دهد. در ادامه لم (۵—۴—۵) و گزاره‌ی (۵—۴—۶) شرایط و ابزار لازم را برای اثبات لم (۵—۴—۷) که موضعاً همبندی مجموعه‌ی جولیا در تمام نقاط بازگشتی را اثبات می‌کند، فراهم می‌کنند. اکنون به اثبات لم‌های مورد نظر می‌پردازیم.

۵—۴—۳ لم

برای هر دامنه‌ی D در η_n^i که $0 \leq i, n$، $D \cap J(P)$ همبند است.

اثبات. کاملاً مشابه لم (۳—۲—۱) ثابت می‌شود. □

۵—۴—۴ لم

مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ در هر نقطه‌ی غیر بازگشتی موضعاً همبند است.

اثبات. فرض کنید نقطه‌ی $x \in J(P)$ غیر بازگشتی است. قرار دهید $k_0 = 1, n_0 = 0, \overline{U} = C^{-1}_{n_0+k_0}$. برای تمام $j \geq 1$ها نیز تکه‌های $C^{j-1}_{k_j+n_j}$ را داریم. چون x غیر بازگشتی است لذا $i \geq 0$ را کوچکترین عدد صحیحی انتخاب می‌کنیم بطوریکه

$$o(x) \cap c^{i-1}_{n_i+k_i} \neq \emptyset \quad , \quad \overline{o(x)} \cap J_{i+1} = \emptyset. \tag{۵—۱۶}$$

i—امین جدول $\zeta^i = \{\eta_n^i\}_{n=0}^{\infty}$ در $c^{i-1}_{n_i+k_i}$ را در نظر بگیرید. چون $J_{i+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^i$ و دنباله‌ی $\bigcap_{n=0}^{\infty}(\overline{o(x)} \cap c_n^i)$ تودرتو است نتیجه می‌شود که برای عدد صحیحی مانند $N \geq 0$ داریم $\overline{o(x)} \cap C_N^i = \emptyset$. چون $o(x) \cap C^{i-1}_{n_i+n_i} \neq \emptyset$ لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x \notin C^{i-1}_{n_i+k_i} \quad , \quad x \in C^{i-1}_{n_i+k_i} \tag{۵—۱۷}$$

ابتدا فرض کنید $x \in C^{i-1}_{n_i+k_i}$ و در i—امین جدول ζ^i تکه‌های در عمق N را بصورت زیر درنظر بگیرید

$$\eta^i_N = \{C^i_N, B_{N,1}, \cdots, B_{N,q}\}. \qquad (۵—۱۸)$$

فرض کنید $P(0) \in B_{N,1}$ در این صورت با توجه به اینکه نقطه‌ی بحرانی بازگشتی است (نمی‌تواند یک تصویر وارون نقطه‌ی ثابت α باشد) باید داشته باشیم $P(0) \in \text{int } B_{N,1}$. چون $o(x) \cap C^i_N = \emptyset$ و $C^i_{N+1} \subset C^i_N$ لذا داریم $o(x) \cap C^i_{N+1} = \emptyset$. از این رو $P(o(x)) \cap P(C^i_{N+1}) = \emptyset$ و با توجه به اینکه $P(C^i_{N+1}) = B_{N,1}$ خواهیم داشت $P(o(x)) \cap B_{N,1} = \emptyset$. فرض کنید D دامنه‌ای در η^i_{N+1} باشد که شامل x است در این صورت برای یک زوج (i,j) که $2 \leq i,j \leq q$ خواهیم داشت

$$P(D) = B_{N,i} \quad , \quad D \subseteq B_{N,i} \ . \qquad (۵—۱۹)$$

اولاً از $o(x) \cap C^i_{N+1} = \emptyset$ نتیجه می‌شود که نگاشت $P|_D : D \longmapsto P(D) = B_{N,i}$ یک ایزومورفیسم همدیس است. فرض کنید وارون آن بصورت زیر باشد

$$g_{ij} : B_{N,i} \longmapsto D \subset B_{N,j} \qquad , \qquad 2 \leq i,j \leq q \ . \qquad (۵—۲۰)$$

بوضوح $g_{ij}(B_{N,i}) \subset B_{N,j}$. می‌توانیم تکه‌های $B_{N,i}, B_{N,j}$ را طوری ضخیم کنیم که برای تکه‌های حاصل که آنها را به ترتیب با $\widetilde{B}_{N,i,ij}, \widetilde{B}_{N,j,ij}$ نمایش می‌دهیم، داشته باشیم $B_{N,i} \subset \widetilde{B}_{N,i,ij}$ و $B_{N,j} \subset \widetilde{B}_{N,j,ij}$ و g_{ij} به یک نگاشت «*Schlicht*» از $\widetilde{B}_{N,i,ij}$ به توی $\widetilde{B}_{N,j,ij}$ توسیع یابد. این نگاشت جدید را نیز با g_{ij} نمایش می‌دهیم. حال دامنه‌های $\widetilde{B}_{N,i,ij}, \widetilde{B}_{N,j,ij}$ در کره‌ی ریمان را با فاصله‌ی هیپربولیک $d_{H,i,ij}, d_{H,j,ij}$ در نظر بگیرید. در این صورت نگاشت g_{ij} طول کم کن است. یعنی یک ثابت $0 < \lambda_{ij} < 1$ وجود دارد به قسمی که برای هر x,y واقع در $\widetilde{B}_{N,i,ij}$ داشته باشیم

$$d_{H,j,ij}\left(g_{ij}(x), g_{ij}(y)\right) < \lambda_{ij} d_{H,i,ij}(x,y). \qquad (۵—۲۱)$$

چون مجموعه‌ی η^i_N متناهی است، لذا فقط تعداد متناهی از زوج‌های $(B_{N,i}, B_{N,j})$ و در نتیجه تعداد متناهی از نگاشت‌های طول کم کن g_{ij} بین دامنه‌ها در کره‌ی ریمان داریم. لذا عدد ثابتی مانند

$1 > \lambda > 0$ وجود دارد بطوریکه برای هر نگاشت طول کم کن g_{ij}، $2 \leq i, j \leq q$ نامساوی زیر برقرار است

$$d_{H,j,ij}\left(g_{ij}(x), g_{ij}(y)\right) < \lambda d_{H,i,ij}(x,y). \qquad (۵-۲۲)$$

حال زنجیر $x \in \cdots \subseteq D^i_n(x) \subseteq D^i_{n-1}(x) \subseteq \cdots \subseteq D^i_1(x) \subseteq D^i_0(x)$ در جدول i-ام را درنظر می‌گیریم که برای هر $n \geq 0$ داریم $D^i_n(x) \in \eta^i_n$. دامنه‌ی دلخواه $D^i_n(x), n > N$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم (با توجه به ساختار i-ام) $P^{m_i(n-N)} = F_i^{n-N}(D^i_n(x)) \in \eta^i_N$. لذا برای هر عدد طبیعی $k \leq m_i(n-N)$، P^k، دامنه‌ی $D^i_n(x)$ را به توی دامنه‌ای در η^i_N می‌نگاری. عدد صحیح m را طوری در نظر می‌گیریم که $n - m \geq N$. در این صورت خواهیم داشت $m \leq n - N$ و از این رو $m \leq m_i(n-N)$. بنابراین $P^m(D^i_n(x))$ زیرمجموعه‌ی دامنه‌ای در η^i_N است که مدار x را قطع می‌کند. لذا برای یک $2 \leq j \leq q$ خواهیم داشت $P^m(D^i_n(x)) \subset B_{N,j}$. ادعا می کنیم که یک ثابت مثبت C وجود دارد بطوریکه

$$d(D^i_n(x)) = \max |y - z| \leq C\lambda^{n-N} \quad z, y \in D^i_n(x). \qquad (۵-۲۳)$$

اثبات ادعا: نگاشت $P^{n-N} : D^i_n(x) \longmapsto P^{n-N}(D^i_n(x))$ یک ایزومورفیسم همدیس است. برای راحتی قرار می‌دهیم $m = n - N$ و زنجیر زیر را درنظر می‌گیریم

$$D^i_n(x) \xmapsto{P} P(D^i_n(x)) \xmapsto{P} \cdots \xmapsto{P} P^{m-1}(D^i_n(x)) \xmapsto{P} P^m(D^i_n(x)). \qquad (۵-۲۴)$$

برای هر $1 \leq r \leq m$ داریم $n - r \geq n - m = n - (n - N) = N$ لذا نتیجه می‌گیریم که هر $P^r(D^i_n(x))$، $0 \leq r \leq m$ زیرمجموعه‌ی دامنه‌ای در η^i_N، غیر از $B_{N,1}$ و C^i_N است. اکنون زنجیر زیر از نگاشت‌های وارون را درنظر می‌گیریم

$$P^m(D^i_n(x)) \longmapsto P^{m-1}(D^i_n(x)) \longmapsto \cdots \longmapsto P(D^i_n(x)) \longmapsto D^i_n(x). \qquad (۵-۲۵)$$

همانطور که قبلاً دیدیم هر یک از نگاشت‌های زنجیر ۵-۲۵ به نگاشت‌هایی طول کم کن بین دامنه‌های $\widetilde{B}_{N,i,ij}, \widetilde{B}_{N,j,ij}$، $2 \leq i, j \leq q$ توسیع می‌یابند. حال فرض کنید x, y نقاط دلخواهی واقع در

$D_n^i(x)$ باشند، در این صورت $P^m(x)$ و $P^m(y)$ نقاط دلخواهی در $P^m(D_n^i(x))$ هستند و داریم: (برای راحتی تمام نگاشت‌های وارون را g_{ij} می‌گیریم و تمام فاصله‌های هیپربولیک را با d_H نمایش می‌دهیم)

$$d_H(g_{ij}(P^m(x)), g_{ij}(P^m(y))) \leq \lambda\ d_H(P^m(x), P^m(y)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow d_H(P^{m-1}(x), P^{m-1}(y)) \leq \lambda\ d_H(P^m(x), P^m(y)) \qquad (۵-۲۶)$$

حال نقاط دلخواه $P^{m-1}(x)$ و $P^{m-1}(y)$ در $P^{m-1}(D_n^i(x))$ را درنظر می‌گیریم در این صورت داریم:

$$d_H(g_{ij}(P^{m-1}(x)), g_{ij}(P^{m-1}(y))) \leq \lambda\ d_H(P^{m-1}(x), P^{m-1}(y)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow d_H(P^{m-1}(x), P^{m-1}(y)) \leq \lambda^2\ d_H(P^m(x), P^m(y)). \qquad (۵-۲۷)$$

به همین ترتیب برای هر $1 \leq r \leq m$ داریم $d_H(P^{m-r}(x), P^{m-r}(y)) \leq \lambda^r\ d_H(P^m(x), P^m(y))$ بویژه برای $r = m$ بدست می‌آوریم.

$$d_H(x, y) \leq \lambda^m\ d_H(P^m(x), P^m(y)). \qquad (۵-۲۸)$$

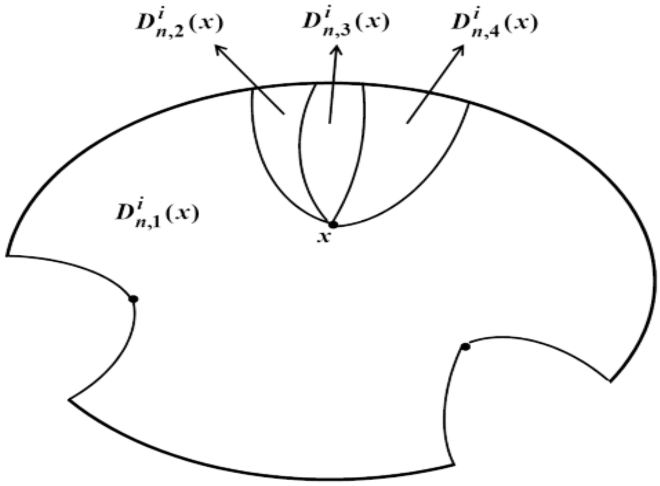
حال قرار می‌دهیم $C = \max \operatorname{diam}(\widetilde{B}_{N,i,ij})$، $2 \leq i, j \leq q$. بنابراین با توجه به اینکه $m = n - N$ و (۵-۲۸) داریم

$$d(D_n^i(x)) \leq C\ \lambda^{n-N}. \qquad (۵-۲۹)$$

چون دامنه‌ی $D_n^i(x)$ دلخواه بود، لذا رابطه‌ی (۵-۳۰) برای تمام $D_n^i(x)$ها برقرار است. بنابراین $d(D_n^i(x))$ هنگامی که n به بینهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. اگر برای هر $n \geq 0$، x نقطه‌ی درونی هر $D_n^i(x)$ باشد آنگاه خانواده‌ی $\{D_n^i(x)\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه‌ی موضعی از همسایگی‌های x است که هر عضو آن مجموعه‌ی جولیای $J(P)$ را در یک مجموعه‌ی همبند قطع می‌کند. و در این حالت موضعاً همبندی در $x \in J(P)$ نتیجه می‌شود.

اگر x یک نقطه‌ی مرزی $D_n^i(x)$ باشد ولی در درون $C_{n_i+k_i}^{i-1}$ واقع باشد، آنگاه زنجیر زیر را درنظر می‌گیریم؛

$$x \in \cdots \subseteq D_{s,n}^i(x) \subseteq D_{s,n-1}^i(x) \subseteq \cdots \subseteq D_{s,1}^i(x) \subseteq D_{s,0}^i(x). \qquad (۵-۳۰)$$



شکل ۵—۱: نمایشی از تکه‌های شامل نقطه‌ی x که به نقطه‌ی ثابت αختم می‌شود.

زنجیر ۵—۳۰ به این ترتیب بدست می‌آید که چون $x \in J(P)$ یک نقطه‌ی مرزی $D^i_n(x)$ است و دامنه‌ی $D^i_n(x)$ توسط پرتوهای خارجی مختوم به تصاویر وارونی از نقطه‌ی ثابت α و یک منحنی هم‌پتانسیل محدود شده است، لذا مرز دامنه $D^i_n(x)$ حداکثر تعداد متناهی نقطه از $J(P)$ را دارد که همانا نقاط مختوم پرتوهای خارجی هستند. لذا $x \in \partial(D^i_n(x))$ یک تصویر وارونی از α است. از این رو تکه‌ی $D^i_n(x)$ شامل x یکتا نیست و تعدادی متناهی (به تعداد پرتوهای خارجی که به نقطه‌ی ثابت α ختم می‌شوند) تکه شامل x که آنها را با $D^i_{n,s}(x)$ نمایش می‌دهیم در η^i_n وجود دارد. لذا یک تعداد متناهی زنجیر مشابه زنجیر ۵—۳۰ در i—امین جدول وجود دارد که شامل x هستند. شکل (۵—۱) را ببینید.

در شکل (۵—۱) اگر تعداد چهار پرتو خارجی به نقطه‌ی ثابت α ختم شود آنگاه در η^i_n چهار دامنه‌ی $D^i_{n,۱}(x)\cdots, D^i_{n,۴}(x)$ را داریم. بوضوح x یک نقطه‌ی درونی $\bigcup_{r=۱}^{۴} D^i_{n,r}(x)$ است.

حال x نقطه‌ی درونی هر $\bigcup_s D^i_{n,s}(x)$ است و بوضوح قطر $\bigcup_s D^i_{n,s}(x)$ وقتی که n به بینهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. ازطرفی چون $\bigcup_s D^i_{n,s}(x)$ توسط پرتوهای خارجی و منحنی‌های هم‌پتانسیل محدود شده است، لذا از لم (۵—۴—۳) نتیجه می‌شود که مقطع $J(P) \cap \bigcup_s D^i_{n,s}(x)$ برای هر $n \geq ۰$ مجموعه‌ای همبند است. از این رو خانواده‌ی $\left\{\bigcup_s D^i_{n,s}(x)\right\}_{n=۰}^{\infty}$ یک پایه‌ی موضعی برای x تشکیل می‌دهد. لذا از قضیهٔ (۱—٦—۵)نتیجه می‌شود که در این حالت هم $J(P)$ در x موضعاً همبند است.

اکنون فرض کنید که x یک نقطه‌ی مرزی $C^{i-1}_{n_i+k_i}$ باشد. چون x یک نقطه‌ی درونی $\overline{U} = C^{-1}_{n_0+k_0}$ لذا باید داشته باشیم $i \geq 1$. از طرفی چون $x \in J(P) \cap \partial C^{i-1}_{n_i+k_i}$ و $C^{i-1}_{n_i+k_i}$ دامنه‌ای در جدول $i-1$–ام است لذا x تصویر وارونی از α_i تحت تکراری از نگاشت $F_{i-1} : U_{i-1} \longmapsto V_{i-1}$ است $(F_0 = F, U_0 = U, V_0 = V)$. فرض کنید $P^q(x) = \alpha_i$، چون $\overline{o(x)} \cap C^i_N = \emptyset$ لذا $x \neq 0$ بوده و از این رو تحدید P^q به یک همسایگی کوچک از x یک هومومورفیسم است. بنابراین زنجیرهایی از دامنه‌های تودرتو به صورت زیر داریم که در آن $N_0 > 0$ عدد صحیح بزرگی است.

$$\alpha_i \in \cdots \subseteq P^q\left(D^i_{s,n}(x)\right) \subseteq P^q\left(D^i_{s,n-1}(x)\right) \subseteq \cdots \subseteq P^q\left(D^i_{s,N_0}(x)\right). \qquad (۵—۳۱)$$

همچنین دامنه‌های $E_n = \bigcup_s P^q\left(D^i_{s,n}(x)\right)$ بوسیله‌ی پرتوهای خارجی و منحنی‌های هم‌پتانسیل P محدود شده‌اند و قطر $\mathrm{diam}\ (E_n)$ وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به صفر میل می‌کند (چون α_i نقطه‌ی مرزی $P^q\left(D^i_{s,n}(x)\right)$ است ولی در درون $C^{i-1}_{n_i+k_i}$ قرار دارد، لذا طبق حالت قبل قطر E_n وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به صفر میل می‌کند). چون α_i نقطه‌ی متناوب دافع P از دوره ی تناوب m_i است لذا تعداد متناهی دامنه‌ی $E_{n,i} = P^{im_i}(E_n)$ وجود دارد که در یک دور حول α قرار دارند و دامنه‌ی $\bigcup_i E_{n,i}$ نقطه‌ی x را در درون خود دارد و توسط پرتوهای خارجی و منحنی‌های هم‌پتانسیل محدود شده‌است. قطر $\mathrm{diam}\ (\bigcup_i E_{n,i})$ وقتی n به بینهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. لذا خانواده‌ی $\{\bigcup_i E_{n,i}\}_n$ یک پایه‌ی موضعی در نقطه‌ی x تشکیل می‌دهد که هر عضو آن $J(F)$ را در یک مجموعه‌ی همبند قطع می‌کند. لذا $J(F)$ در x موضعاً همبند است.

اگر x به $C^{i-1}_{n_i+k_i}$ تعلق نداشته باشد، آنگاه چون $o(x) \cap C^{i-1}_{n_i+k_i} \neq \emptyset$، عدد $r \geq 1$ را کوچکترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که $y = P^r(x)$ به $C^{i-1}_{n_i+k_i}$ تعلق دارد. در این صورت مجموعه‌ی $J(P)$ در y موضعاً همبند است. چون x یک نقطه‌ی بحرانی P^r نیست لذا تحدید P^r به یک همسایگی از x، هومومورفیسم است. از این رو $J(P)$ در x نیز موضعاً همبند است. □

۵—۴—۵ لم

اگر چندجمله‌ای P دارای کران کلی باشد آنگاه $J(P)$ در نقطه‌ی بحرانی موضعاً همبند است.

اثبات. جهت جلوگیری از پیچیدگی در نمادها، در تعریف (۵—۳—۲) دنباله‌ی نامتناهی از نرمال‌سازی‌های ساده را بصورت $\{F_i = F^{m_i} : U_i \longmapsto V_i\}_{i=1}^{\infty}$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید $\lambda > 0$ عدد ثابت در تعریف (۵—۳—۲) باشد در این صورت $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی تودرتو از دامنه‌های شامل نقطه‌ی بحرانی صفر است. از نابرابری قدرمطلق در قضیهٔ (۵—۴—۱) داریم

$$\text{mod }(U_i \setminus \overline{U_{i+1}}) \geq \frac{1}{2} \text{ mod }(V_i \setminus \overline{U_i}) > \frac{\lambda}{2}\ . \qquad (۳۲—۵)$$

فرض کنید $A_i = U_i \setminus \overline{U_{i+1}}$ و قرار دهید $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. از تساوی $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_1 \setminus U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \setminus \overline{U_{i+1}}$ نتیجه می‌شود که $U_1 \setminus X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. لذا داریم

$$\text{mod }(U_1 \setminus X \geq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}(A_i) > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{2} = \infty\ . \qquad (۳۳—۵)$$

بنابراین X تنها به نقطه‌ی بحرانی تقلیل پیدا می‌کند و این نیز به نوبه‌ی خود ایجاب می‌کند که قطر $d(U_i)$ وقتی $i \longmapsto \infty$ به صفر میل کند.

فرض کنید $i \geq 0$ دلخواه باشد و زنجیر زیر ار از دامنه‌های بحرانی در i—امین جدول درنظر بگیرید

$$0 \in\subseteq C_n^i \subseteq C_{n-1}^i \subseteq \cdots \subseteq C_1^i \subseteq C_0^i. \qquad (۳۴—۵)$$

چون $J_{i+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^i$ برابر با مجموعه‌ی جولیای نگاشت $F_{i+1} : U_{i+1} \longmapsto V_{i+1}$ است و دنباله‌ی $\{C_n^i\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله‌ی تودرتو است لذا عدد صحیحی مانند $n(i) \geq 0$ وجود دارد به قسمی که $C_{n(i)}^i \in U_{i+1}$. لذا باید قطر $d(C_{n(i)}^i)$ وقتی i به سمت بینهایت میل می‌کند به صفر میل کند. از طرفی طبق لم (۵—۴—۳)، $C_{n(i)}^i \cap J(P)$ همبند است بنابراین خانواده‌ی $\{C_{n(i)}^i\}_{i=0}^{\infty}$ یک پایه‌ی موضعی برای x تشکیل می‌دهد که هر عضوش مجموعه‌ی جولیا را در یک مجموعه‌ی همبند قطع می‌کند. از این رو $J(P)$ در نقطه‌ی بحرانی صفر موضعاً همبند است. □

۵—۴—۶ گزاره

فرض کنید $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ی نامتناهی از نرمال‌سازی‌های مجموعه‌ی جولیا باشد، در این صورت اگر P دارای کران کلی باشد، آنگاه $\bigcap_{i=0}^{\infty} J_i = \{0\}$.

اثبات. چون $J_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^i$ لذا برای هر $i \geq 1$ داریم $J_{i+1} \subseteq C_{n(i)}^i$ که در آن $\{C_{n(i)}^i\}_{i=1}^{\infty}$ همان خانواده‌ای است که در اثبات لم (۵—۴—۵) بدست آمد. حال چون $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{n_i}^i = \{0\}$، لذا مقطع $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_i$ به تنها نقطه‌ی بحرانی تقلیل می‌یابد. □

۵—۴—۷ لم

اگر $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_i = \{0\}$ و چندجمله‌ای P غیرشاخه‌ای باشد آنگاه $J(P)$ در تمام نقاط «بازگستی» موضعاً همبند است.

اثبات. فرض کنید $i \geq 0$ دلخواه باشد. i—امین جدول $\zeta^i = \{\eta_n^i\}_{n=0}^{\infty}$ را درنظر بگیرید. فرض کنید زنجیر (۵—۳۴) زنجیر بحرانی در جدول i—ام باشد. نگاشت $F_{i+1} = F_i^{k_{i+1}} : C^i_{n_{i+1}+k_{i+1}} \longmapsto C_{n_{i+1}}$ را درنظر گرفته و قرار دهید $k(i) = k_{i+1} + n_{i+1}$. با توجه به ساختار جدول سه بعدی داریم $C_{k(i)}^i \subset N(J_{i+1}, \frac{1}{i+1})$. از طرفی طبق فرض داریم $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_i = \{0\}$. لذا خانواده‌ی $\{C_{k(i)}^i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی موضعی برای α تشکیل می‌دهد که هر عنصر آن مجموعه‌ی جولیا را در یک مجموعه‌ی همبند قطع می‌کند. از تعریف (۵—۳—۳) ثابت $\mu > 0$ و خانواده‌ی $\{W_l\}_{l=1}^{\infty}$ از همسایگی‌های J_{i_l} را داریم. بدون کاسته شدن از کلیّت می‌توانیم فرض کنیم $l = i, i_l = i+1$. چون $\operatorname{mod}(W_i \setminus J_{i+1}) \geq \mu$ و $J_{i+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^i$، لذا می‌توانیم $k(i)$ را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که $\operatorname{mod}(W_i \setminus C_{k(i)}^i) \geq \frac{\mu}{2}$ برای هر $i \geq 1$ برقرار باشد. همچنین می‌توانیم W_iها را طوری درنظر بگیریم که قطر $d(W_i)$ وقتی i به بینهایت میل می‌کند، به صفر میل کند. این کار امکان پذیر است. چون هر W_i یک همسایگی از J_{i+1} است که در رابطه‌ی $\operatorname{mod}(W_i \setminus J_{i+1}) \geq \mu$ صدق می‌کند و مقطع $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_i$ به تنها نقطه‌ی صفر تقلیل پیدا می‌کند. برای اثبات قضیه در این حالت

ابتدا یک دنباله از افرازها برای مجموعه‌ی جولیای $J(P)$، از جدول سه بعدی $\{\zeta^i\}_{i=0}^{\infty}$ می‌سازیم.
ابتدا اولین افراز که آن را با τ_1 نمایش می‌دهیم را بصورت زیر می‌سازیم؛ صفر امین جدول، $\zeta^0 = \{\eta_n^0\}_{n=0}^{\infty}$، را در نظر بگیرید. در این جدول دامنه‌ی $C_{k(0)}^0 \in \eta_{k(0)}^0$ را درنظر بگیرید. تمام دامنه‌های واقع در $\eta_{k(0)+1}^0$ که تصاویر وارون $C_{k(0)}^0$ تحت F هستند را در τ_1 قرار دهید. و فرض کنید $\eta_{k(0)+1}^c$ مجموعه‌های باقیمانده در $\eta_{k(0)+1}^0$ باشند که به τ_1 تعلق ندارند. $\eta_{k(0)+1}^c \cap \eta_{k(0)+2}^0$ را درنظر بگیرید (یعنی تمام دامنه‌هایی در $\eta_{k(0)+2}^0$ که زیردامنه‌هایی از دامنه‌های واقع در $\eta_{k(0)+1}^c$ هستند). اکنون تمام دامنه‌هایی در $\eta_{k(0)+1}^0 \cap \eta_{k(0)+2}^0$ را که تصاویر وارون $C_{k(0)}^0$ تحت F^2 هستند، در τ_1 قرار دهید و فرض کنید $\eta_{k(0)+2}^c$ باقیمانده‌های دامنه‌های در $\eta_{k(0)+2}^0$ باشند که به τ_1 تعلق ندارند. فرض کنید برای $s \geq 2$، مجموعه‌ی $\eta_{k(0)+s}^0$ را داریم و $\eta_{k(0)+s}^c \cap \eta_{k(0)+s+1}^0$ را درنظر بگیرید که ازتمام دامنه‌هایی در $\eta_{k(0)+s+1}^0$ تشکیل شده است که زیردامنه‌هایی از $\eta_{k(0)+s}^c$ هستند. تمام دامنه‌های واقع در $\eta_{k(0)+s}^c \cap \eta_{k(0)+s+1}^0$ که تصاویر وارون $C_{k(0)}^0$ تحت F^{s+1} هستند را در τ_1 قرار دهید. و فرض کنید $\eta_{k(0)+s+1}^c$ باقی دامنه‌ها باشند. به این ترتیب افراز τ_1 به استقراً ساخته می‌شود. این افراز بجز تمام نقاطی از $J(P)$ که درون $C_{k(0)}^0$ را تحت تمام تکرارهای F قطع نمی کنند، بقیه نقاط $J(P)$ را دربر می‌گیرد.

حال اولین جدول، $\zeta^1 = \{\eta_n^1\}_{n=0}^{\infty}$، را درنظر گرفته دامنه‌ی $C_{k(1)}^1 \in \eta_{k(1)}^1$ در این جدول را ثابت نگه دارید. با استفاده از تصاویر وارون $C_{k(1)}^1$ تحت تکرارهای $F_1 : C_{k(0)}^0 \longmapsto C_{k(0)-k_1}^0$، کاملاً مشابه با آرگومان بالا، ابتدا افراز $\tau_{1,1}$ را در $C_{k(0)}^0$ بدست می آوریم. حال افراز $\tau_{1,1}$ را توسط تمام تکرارهای F به عقب می‌کشیم (تحت τ_1) تا افراز τ_2 بدست آید. τ_2 یک زیر افرازی از τ_1 است که تمام مجموعه‌ی جولیای $J(P)$، بجز تمام نقاطی که تحت تمام تکرارهای F، درون $C_{k(1)}^1$ را قطع نمی کنند را می‌پوشاند.

فرض کنید j—امین افراز τ_j را ساخته‌ایم که $j \geq 2$. جدول $\zeta^j = \{\eta_n^j\}_{n=0}^{\infty}$ و دامنه‌ی $C_{k(j)}^j \in \eta_{k(j)}^j$ در این جدول را در نظر بگیرید. با درنظر گرفتن نگاشت $F_j : C_{k(j-1)}^{j-1} \longmapsto C_{k(j-1)-k_j}^{j-1}$، یک افراز $\tau_{j,1}$

در $C^{j-1}_{k(j-1)}$ بدست می‌آوریم. حال توسط تمام تکرارهای F_{j-1} افراز $\tau_{j,1}$ را به عقب می‌کشیم تا به زیرافراز τ_{j-1} بیافتد و افراز حاصل که آن را با $\tau_{j,2}$ نمایش می‌دهیم افرازی در $C^{j-2}_{k(j-2)}$ است. دوباره با تمام تکرارهای F_{j-2} افراز $\tau_{j,2}$ را به عقب می‌کشیم تا به زیر افراز τ_{j-1} بیافتد و افراز حاصل را که افرازی در $C^{j-3}_{k(j-3)}$ است با $\tau_{j,3}$ نمایش می‌دهیم. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم به افراز $\tau_{j,j}$ در $C^{\circ}_{k(\circ)}$ می‌رسیم. حال با استفاده از تکرارهای F، افراز $\tau_{j,j}$ را به عقب می‌کشیم تا به افراز τ_{j+1} در U برسیم. τ_{j+1} یک زیرافرازی از τ_j است و تمام نقاط مجموعه‌ی جولیا، بجز نقاطی که تحت تمام تکرارهای F درون $C^i_{k(i)}$ را قطع نمی‌کنند،را می‌پوشانند. یعنی τ_j بجز تمام نقاط $x \in J(P)$ که $o(x) \cap \text{int } C^j_{k(j)} = \emptyset$، بقیه $J(P)$ را می‌پوشاند. حال به استقرا دنباله‌ی تودرتو $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ از افرازها را بدست می‌آوریم که تمام مجموعه‌ی جولیا بجز نقاط غیربازگستی را می‌پوشاند. دنباله‌ی $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ را در جدول سه بعدی تعمیم یافته می‌نامیم.

فرض کنید $x \in J(P)$ $x \neq \circ$ یک نقطه‌ی بازگشتی باشد. در این صورت مدار$o(x)$ به نقطه‌ی بحرانی انباشته می‌شود. بنابراین مدار $o(x)$ هر دامنه‌ی $C^i_{k(i)}$ را به تعداد نامتناهی دفعه قطع می‌کند.

زنجیر $D_1(x) \subseteq \cdots \subseteq D_{j-1}(x) \subseteq D_j(x) \subseteq \cdots \ni x$ را در جدول تعمیم یافته‌ی $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ درنظر بگیرید که در آن $D_j(x) \in \tau_j$، $j \geq 1$. باتوجه به ساختار τ_{j+1}، عدد صحیح یکتایی مانند $q_j(x) \geq \circ$ چنان موجود است که $F^{q_j(x)} : D_{j+1}(x) \longmapsto C^j_{k(j)}$ یک دیفئومورفیسم هولومورفیک و «Proper» است. فرض کنید $g_{j,x} : C^j_{k(j)} \longmapsto D_{j+1}(x)$ وارون آن باشد. چون $W_j \setminus C^j_{k(j)} \subset W_j \setminus J_{j+1}$ و طبق تعریف غیر شاخه‌ای بودن P، $W_j \setminus J_{j+1}$ از مدار بحرانی مجزا است لذا هیچ یک از مقادیر بحرانی $\{P^r(\circ)\}_{r=1}^{\infty}$، $W_j \setminus C^j_{k(j)}$ را قطع نمی‌کنند. لذا می‌توانیم $g_{j,x}$ را به تمام W_j توسیع بدهیم. نگاشت حاصل را که یک نگاشت دیفئومورفیسم هولومورفیک و «Proper» روی W_j است را نیز با $g_{j,x}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $i \geq 1$ دلخواه باشد. چون هنگامی که $j \longmapsto \infty$، قطر $d(W_j)$ به صفر میل می‌کند، می‌توانیم عدد صحیحی مانند $j = j(i) > i$ طوری بیابیم که $W_j \subset C^i_{K(i)}$. قرار می‌دهیم $x_i = P^{q_i(x)}(x) \in C^i_{K(i)}$ و $x_j = P^{q_j(x)}(x) = P^{q_j(x_i)}(x_i) \in C^i_{K(j)}$.

حال زنجیر

$$x \in \cdots \subset D_l^{(x_i)} \subseteq D_{l-1}^{(x_i)} \subset \cdots \subseteq D_1^{(x_i)}. \qquad (۵-۳۵)$$

را در جدول تعمیم یافته درنظر می‌گیریم که در آن برای هر $l \geq 1$ داریم $D_l(x_i) \in \tau_l$.

در این صورت نگاشت

$$P^{q_{j+1-q_i(x)}(x_i)} : D_{j+1-q_i(x)}(x_i) \longmapsto C_{K(j)}^j. \qquad (۵-۳۶)$$

یک دیفئومورفیسم هولومورفیک و proper است. فرض کنید g_{ij} وارون آن باشد. چون P غیرشاخه‌ای است لذا می‌توانیم g_{ij} را به تمام W_j توسیع دهیم. توسیع آن را نیز با g_{ij} نمایش می‌دهیم. $g_{ij} : W_j \longmapsto g_{ij}(W_j)$ که در آن $C_{k(j)}^j \subset W_j$ و $D_{j+1-q_i(x)}(x_i) \subseteq g_{ij}(W_j)$. فرض کنیم $W_{ij} = g_{ij}(W_j)$. چون W_j همبند است لذا W_{ij} نیز همبند است. از طرفی $C_{k(i)}^i$ نیز همبند است (در حقیقت تمام عناصر η_n^i برای هر i, n همبند هستند). از قبل می‌دانیم $x_i = P^{q_i(x)}(x) \in C_{k(i)}^i$. از طرفی از رابطه‌ی $D_{j+1-q_i(x)}(x_i) \subseteq g_{ij}(W_j)$ داریم $x_i \in W_{ij}$، لذا $W_{ij} \cap C_{k(i)}^i \neq \emptyset$. چون g_{ij} ایزومورفیسم همدیس است لذا $d_{H,ij}(W_{ij}) = d_{H,j}(W_j)$ (که در آن $d_{H,ij}$ و $d_{H,j}$ به ترتیب طول‌های هیپربولیک روی W_j, W_{ij} هستند). از طرفی داشتیم $W_j \subset C_{k(i)}^i$، لذا با درنظر گرفتن فاصله‌ی هیپربولیک روی $C_{k(i)}^i$ قطر W_{ij} از قطر $C_{k(i)}^i$ کمتر خواهد شد. از این رو از $W_{ij} \cap C_{k(i)}^i \neq \emptyset$ نتیجه خواهد شد که $W_{ij} \subset C_{k(i)}^i$. حال چون $W_{ij} \subset C_{k(i)}^i \subset W_i$، لذا از تعریف غیرشاخه‌ای بودن Pداریم؛

$$\mathrm{mod}\ (W_i \setminus W_{ij}) \geq \mathrm{mod}(W_i \setminus C_{k(i)}^i) \geq \frac{\mu}{2}. \qquad (۵-۳۷)$$

قرار دهید $X_i = g_{i,x}(W_i)$ و $X_j = g_{j,x}(W_j) = g_{i,x}(W_{i,j})$.(چون طبق تعریف $g_{i,x}, g_{j,x}$ ایزومورفیسم‌های همدیس هستند از رابطه‌ی $\mathrm{mod}(W_i \setminus C_{k(i)}^i) \geq \frac{\mu}{2}$ نتیجه می‌شود که

$$g_{j,x}^{-1}(X_j) = W_j \quad , \quad g_{i,x}^{-1}(X_i) = W_i. \qquad (۵-۳۸)$$

از طرفی داریم $P^{q_i(x)}(D_{j+1}(x)) = D_{j+1-q_i(x)}(x_i)$. بنابراین رابطه‌ی زیر را داریم

$$P^{q_{j+1}-q_i(x)}\ o\ P^{q_i(x)}(D_{j+1}(x)) = C_{k(j)}^j\ . \qquad (۵-۳۹)$$

که از آن نتیجه می‌شود $g_{i,x}\ o\ g_{ij}(C^j_{k(j)}) = D_{j+1}(x)$. بطور مشابه نتیجه می‌شود $g_{i,x}\ o\ g_{ij}(W_j) = X_j$. یعنی $g_{i,x}(W_{ij}) = X_j$.) حال داریم؛

$$\mathrm{mod}(X_i \setminus X_j) = \mathrm{mod}(g_{i,x}(W_i) \setminus g_{i,x}(W_{ij})) = \tag{۵—۴۰}$$

$$= \mathrm{mod}(g_{i,x}(W_i \setminus W_{ij})) = \mathrm{mod}(W_i \setminus W_{ij}) \geq \frac{\mu}{2}$$

در بدست آوردن رابطه‌ی (۵—۴۰) از اینکه $g_{i,x}$ یک ایزومورفیسم همدیس است استفاده کردیم. چون چنین نگاشت‌هایی قدرمطلق طوق‌ها را حفظ می‌کنند بنابراین برای عدد صحیح دلخواه $i \geq 1$، مجموعه‌های X_i, X_j که $j > i$ را طوری بدست می‌آوریم که $\mathrm{mod}(X_i \setminus X_j) \geq \frac{\mu}{2}$.

بنابراین به استقرا یک دنباله‌ی نامتناهی از دامنه‌های تودرتو $\{X_{i_t}\}_{t=1}^{\infty}$ چنان بدست می‌آوریم که برای هر $t \geq 1$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد؛

$$\mathrm{mod}\ (X_{i_t} \setminus X_{i_{t+1}}) \geq \frac{\mu}{2}\ . \tag{۵—۴۱}$$

لذا مجموع $\sum \mathrm{mod}(X_{i_t} \setminus X_{i_{t+1}})$ نامتناهی است و از قضیهٔ (۱—۶—۵) نتیجه می‌شود که $\bigcap_{t=1}^{\infty} X_{i_t}$ تنها به یک نقطه تقلیل می‌یابد. به عبارت دیگر قطر $d(X_{i_t})$ وقتی t به بینهایت میل می‌کند، به صفر میل می‌کند. می‌دانیم $C^{i_t}_{k(i_t)} \subseteq W_{i_t}$ و $D_{i_t+1} = g_{i_t,x}(C^{i_t}_{k(i_t)})$، لذا داریم

$$D_{i_t+1}(x) = g_{i_t,x}\left(C^{i_t}_{k(i_t)}\right) \subseteq g_{i_t,x}(W_{i_t}) = X_{it}\ . \tag{۵—۴۲}$$

لذا قطر $d(D_{i_t+1}(x))$ وقتی t به بینهایت میل کند به صفر میل می‌کند. یعنی مقطع $\bigcap_{t=1}^{\infty} D_{i_t+1}(x)$ تنها به یک نقطه تقلیل می‌یابد. از این رو خانواده‌ی $\{D_{i_t+1}(x)\}_{t=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی موضعی در x است که هر عضوش مجموعه‌ی جولیا را در یک مجموعه‌ی همبند قطع می‌کند. لذا $J(P)$ در x موضعاً همبند است و این برهان را کامل می‌کند. □

پیوست A

مراجع

کتاب‌نامه

[1] A. Doudy, "Systems dynamiques polomorphes, Seminar Bourbaki", *35 annee 1982-83, n 599: Astensque* 205-206(1983) 39-63.

[2] A. Douady and J. H. Hubbard, "*Etude dynamique des polynomes complex I&II*", Publ. Math. Orsay (1984-1985)

[3] A. Douady and J. H. Hubbard,"on the dynamics of polynomial-like mappings", *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup* 18(1985), 287-344. MR 87f: 58083

[4] B. Branner and J. H. Hibbard. "The Iteration of Cubic Ploynomials, PartII: Pattems and Parapatterns. "*Acta Mathematic* 169(1984),229-325.

[5] Beardon, A, F. "*Iteration of rational Functions*". Springer Verlag.1991.

[6] C. McMullen, "*Complex Dynamics and Renormalzation*", Vol. 135, Ann. of Math. Stud. Priceton Univ. Pres, Princeton, NJ, 1994. MR 96b: 58697.

[7] D. Sullivan, "*Conformal dynaical Systems, PP, 725-752 of Geometric Dynamicsed it.Palis"* lecture Notes Met. 2007, Springer 1993.

[8] J. H. Hubbard. "*Local connectivity of Julia Sets and bifurcation loci: throrems of J-C Yoccoz, PP. 467-511 of Toplogical Methodsin Modern Mathematics.* ed. Clodberg and phililps, Publish or Perish 1993.

[9] H. Brolin "Invariant Sets Under Itteration of Rational functioc". *Ark. Math.* 6(2965), 203-244.

[10] J. Milnor, "Dynamic in one complex vaiable, Introductory lecturs" ,vieweq 1999, to appear.

[11] J. Milnor, "*Local connectivity of Julia Sets: enpository lecturs*", IMS Preprint 1992/12, Stony Brook.

[12] M. Yu. lyubich. "Geometry of Quadratic Polynomials:Moduli,Rigidity,and local connectivity", *Preprint,Institute for Mathematical Sciences at Stany Brook*,1993/9.

[13] M. Yu. lyubich. "On the lebesque Measure of the Julia Sets of a Quadratic Polynomial". *Preprint,Institute for Mathamatical Science at stony Brook*,1991/16.

[14] Y. Jiang, "*Renormalization and Geometry in one-Dimensional and complex Dynamic,Advaced Series in Nonlinear Dynamics*" 10,word Sci.Publ.,1996.MR 98e:58070.

پیوست B

واژه نامه

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی

بازگشتی .... $Recurrent$

بطور اصم بی‌اثر .... $Irrationally\ Indiffrent$

بینهایت‌بار نرمال‌پذیر .... $Infinitly\ renormalizable$

تصویر وارون .... $Pre-image$

تکه جدول یوکوز .... $Yoccoz\ puzzle\ piece$

تکه جدول ضخیم شده .... $Thickened\ puzzle\ piece$

چندجمله‌ای .... $Polynomial$

درجه‌ی دوم .... $Quadratic$

طوق .... $Annulus$

طوق بحرانی .... $Critical\ annulus$

طوق رو به زوال .... $Degenerat\ annulus$

طوق غیر روبه زوال .... $Non-denegerat\ annulus$

عالی، خوب .... $Excellent$

عمق .... $Depth$

عمق نیمه بحرانی .... $Semi-critical\ depth$

غیر بازگشتی .... $Non-recurrent$

غیر بحرانی .... $Of-critical$

غیرشاخه‌ای .... $Unbranched$

فرزند .... $Child$

کران کلی .... $Complex\ bound$

متناوب .... $Periodic$

مجموعه‌ی جولیا	$Julia\ set$
مجموعه‌ی جولیای کامل	$The\ field-in\ Julia\ set$
مجموعه‌ی فاتو	$Fatou\ set$
مدار پسرو	$Backward\ orbit$
مدار پیشرو	$Forward\ orbit$
موضعاً همبند	$Locally\ connected$
نرمال‌پذیر	$Renormalizable$
نرمال‌پذیر ساده	$Simply\ renormalizable$
نقطه‌ی ثابت دافع	$Repelling\ fined\ point$
نقطه‌ی بحرانی	$Critical\ point$
نقطه‌ی ثابت	$Fixed\ point$
نقطه‌ی ثابت بی‌اثر	$Indiffrent\ fixed\ point$
نقطه‌ی ثابت جاذب	$Attracting\ fixed\ point$

Abstract

Let $\hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$ and $P : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ are riemann shere and polynomial of degree $d \geq ٢$ respectively. The riemann shere $\hat{\mathbb{C}}$ can be divided into two totally invariant sets with respect to P : a stable set, on which the dynamics of P is Predictable; and an unstable set, on which the dynamics of P is chaotic.In the language of complex analysis, the stable set for P is the set of point $z \in \hat{\mathbb{C}}$ for which the family of iterates of P is normal in some open neighborhood of z. the stable set of P is called the Fatou set . The chaotic set, or Julia set, of P is the complement in $\hat{\mathbb{C}}$ of the Fatou set. It has several characterizations, including the absence of normality, as well as being the Closure of the set of repelling periodic orbits, or the topological boundary of the unbounded Fatou component.

Keywords: Julia set; Locally connected; Yoccoz puzzle; Recurrent; Basin of attraction; Renormalizable.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematics

Local Connectivity of Polynomial Julia Sets

By : `Abutaleb Khan Ahmadi`

Supervisors:

Dr. Ahmad Zireh

Dr. Ebrahim Hashemi

August 2009