دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی‌کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رهیافت بیزی قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی در مدل‌های فشار-مقاومت

محسن مهدی‌زاده

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضا زاده

استاد مشاور

دکتر حسین باغیشنی

شهریور ۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادر عزیزم.

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و درود بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که جودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم،اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامتی امانت هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب ''من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّو جّل'':از پدر و مادرم، این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من،قلم عفو کشیده وکریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده‌اند؛ از استاد با کمالات وشایسته؛ جناب آقای دکتر نزاکتی که در کمال سعه صدر،با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛از استاد صبور و با تقوا، جناب آقای دکتر باغیشنی، که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید؛کمال تشکر و قدردانی دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

محسن مهدی زاده
شهریور ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **محسن مهدی‌زاده** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **رهیافت بیزی قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی در مدل‌های فشار-مقاومت** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد نزاکتی رضا زاده** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا "University of Shahrood " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محسن مهدی‌زاده
شهریور ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

امروزه قابلیت‌اطمینان و میزان کارایی سیستم‌ها مهم‌ترین اصل در میزان به‌کارگیری و استفاده از سیستم‌ها می‌باشد.هدف ما برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها در دو نوع سری و موازی در مدل‌های فشار- مقاومت است. لذا در راستای دستیابی به برآوردی بهتر و حصول نتایجی مفید برای بالا بردن راندمان کاری سیستم‌ها، قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها، با فرض مستقل بودن مولفه‌ها(مقاومت‌ها)، تحت توزیع‌های مختلف آماری(نمایی،وایبل،گاما،پاراتوو...)، به دو روش ماکزیمم درسنمایی و بیزی، برآورد، و در بعضی موارد باهم مقایسه شده‌اند. علاوه بر برآورد قابلیت‌اطمینان توزیع برآوردگرحاصله را نیز به‌دست می‌آوریم. در ادامه روند دستیابی به برآوردگر بهینه بخشی از برآوردگرها را شبیه سازی می‌کنیم. تحت بعضی از توزیع‌ها، برآورد قابلیت‌اطمینان دارای فرم بسته و پیچیده‌ای می‌باشد، در این‌گونه موارد، برای شبیه‌سازی، استفاده از روش‌های نمونه‌گیری زنجیر مارکوفی مونت کارکو(MCMC) پیشنهاد می‌شود.

کلمات کلیدی

قابلیت‌اطمینان،سیستم‌های سری و موازی،مدل‌های فشار-مقاومت، روش‌های نمونه گیری زنجیرمارکوفی مونت کارلویی.

پیش گفتار

امروزه در بخش صنعت و دیگر بخش‌ها با سیستم‌هایی سروکار داریم که متشکل از تعدادی مولفه(مقاومت) است، که برای انجام یک هدف به یکدیگر متصل شده‌اند. هر مولفه به‌طور مستقل یا وابسته به مولفه‌های دیگر وظیفه‌ای را انجام می‌دهد و بسته به نوع اتصال آن‌ها در سیستم، سیستم‌ها دارای دو نوع سری(متوالی)و موازی هستند، که در ادامه بطور کامل تعریف می‌شوند. درکنار تجهیز سیستم‌ها، قابلیت‌اطمینان آن‌ها به‌طور جدی مطرح بوده و جزء لاینفک عملکرد آن‌ها به‌شمار می‌رود. بنابراین می‌توان گفت برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم اگر چه به‌ظاهر کم اهمیت است ولی چون در ابعاد وسیع اعمال می‌گردد، صرفه‌جویی زیادی در هزینه دارد. تاکنون برای برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها روش‌های زیادی ارائه شده است. ما نیز در ادامه روند پیدا نمودن روشی مناسب برای برآورد قابلیت اطمینان سیستم‌ها، از چند روش آماری استفاده کرده، و کاربرد علم آمار را در علوم صنعتی بیان و روش‌های برآوردی که تلفیقی از علم آمار و علوم مهندسی است ارائه می‌دهیم. هدف یافتن برآورد بیزی مناسب قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی، در مدل های فشارـ مقاومت است. در این مدل‌ها فرض می‌کنیم مولفه‌ها از هم مستقل و تحت فشار یکسان هستند. لذا قابلیت‌اطمینان سیستم ها را به دو روش ماکزیمم درستنمایی و بیزی، به‌طوری که مولفه‌ها دارای طول عمری، تحت توزیع‌های از قبیل نمایی تک پارامتری،دو پارامتری، وایبل، گاما،پاراتو باشند را به دست می‌آوریم. مطالب پایان‌نامه، به اختصار، شامل موارد زیر می‌باشد:

- در فصل اول، مفاهیم و تعاریف اولیه را معرفی می‌کنیم که شامل سیستم‌ها، قابلیت‌اطمینان، الگوریتم‌های نمونه‌گیری مونت کارلو و روش‌های برآوردیابی ماکزیمم درستنمایی و بیزی می‌باشد.
- در فصل دوم، با فرض اینکه سیستم‌ها سری و مولفه‌های سیستم دارای طول عمری با توابع توزیع نمایی دو پارامتری، گاما، وایبل و پاراتو هستند، برآورد ماکزیمم درستنمایی و بیزی قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها را به‌دست آورده و همچنین توزیع برآوردگر را نیز مشخص می‌کنیم.
- در فصل سوم، قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی را با شرط مستقل بودن مولفه‌ها و اینکه تحت فشار یکسان قرار دارند، به دو روش ماکزیمم درستنمایی و بیزی، به‌گونه‌ای که مولفه‌ها دارای طول عمری با توزیع نمایی تک پارامتری و وایبل هستند، به‌دست آورده، همچنین با استفاده روش‌های نمونه‌گیری مونت کارلویی زنجیر مارکوفی MCMC نتایج را شبیه‌سازی می‌کنیم.
- در فصل چهارم، همانند فصل سوم برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی درمدل‌های فشارـمقاومت را به دو روش ماکزیمم درستنمایی و بیزی محاسبه می‌کنیم، بااین تفاوت که در این فصل فرض می‌کنیم مولفه‌ها دارای طول عمری با توزیع نمایی دو پارامتری هستند.همچنین با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری بیان شده نتایج حاصله را شبیه‌سازی می‌کنیم.
- پیوست آ شامل تعاریف لازم و پیوست ب شامل کدهای نوشته‌شده در محیط نرم‌افزارR، است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

X متغیر تصادفی
k تعداد مولفه‌های سیستم
t متغیر شکست
θ پارامتر نمونه
Θ فضای پارامتری
$\boldsymbol{X}$ بردار تصادفی
$F(t)$ تابع طول عمر
$R(t)$ تابع قابلیت‌اطمینان
$f(t)$ تابع چگالی طول عمر
$\frac{f(t)}{R(t)}$ تابع نرخ خطر
$\triangle t$ فاصله زمانی
$\pi(\theta|y)$ توزیع پسین
$\pi(\theta)$ توزیع پیشین
$MCMC$ روش‌های نمونه‌گیری زنجیر مارکوفی مونت‌کارلویی
$K(.|.)$ هسته زنجیر مارکوف
$L(\theta)$ تابع درستنمایی
$\hat{R}$ برآورد ماگزیمم درستنمایی
$\hat{R}_b$ برآوردگر بیزی
$R(\theta, \delta)$ تابع ریسک
$L(\theta, d)$ تابع زیان
$\delta(X)$ آماره آزمون
μ^* ماکزیممμ_iها
$G(y)$ تابع بقای سیستم‌های موازی
$H(z)$ تابع بقای سیستم‌های سری
Λ ماتریس قطری
I_{ij} ماتریس اطلاع فیشر
$\xrightarrow{D}$ همگرایی در توزیع
$\xrightarrow{P}$ همگرایی در احتمال

$\approx$ تقریبا مساوی

AN توزیع نرمال مجانبی

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تاریخچه

در قرون وسطی به دلیل سادگی فرآیند تولید، هر کارگر می‌توانست تمام قسمت‌های یک کالا را به تنهایی بسازد. از این رو لذت حاصل از تولید کل کالا به جایی جزئی از آن کافی بود تا کارگر وقت بیشتری را برای رسیدن به کیفیت بالای کالا صرف نماید. انقلاب صنعتی باعث کاهش این انگیزه شد. چرا که دیگر کارگر برخلاف گذشته، سازنده یک کالا نبود بلکه تنها جزء کوچکی از فرآیند ساخت آن را بر عهده داشت. در انقلاب صنعتی، روسای کارخانجات بزرگ نمی‌توانستند شخصا بر تمام وقایع نظارت داشته باشند. بنابراین ناچار بودند به طریق دیگری مشکلات را حل نمایند . این امر به منظور حفظ منافع اقتصادی و ایمنی مصرف کننده و نیز افزایش میزان تولید و به وجود آمدن رقابت مورد توجه جدی قرار گرفت و به این منظور به کارگیری روش‌های بازرسی برای جلوگیری از عرضه محصولات نامرغوب یا معیوب به بازار به سرعت گسترش یافت. حتی بسیاری از واحد های تولیدی به منظور اطمینان خاطر مصرف کنندگان و گاه به عنوان ابزارهای تبلیغاتی اعلام می‌کردند که در تولید خود از روش‌های بازرسی صد در صد بهره می‌برند. بنابراین اولین مرحله کنترل کیفیت پدیدار شد که هدف از آن فقط جداسازی محصولات معیوب از سالم بود و به منظور کاهش تعداد محصولات معیوب، ابداع روش‌های علمی جدیدتر ضرورت یافت. در سال ۱۹۹۴ دکتر والتر شوهارت[۱] آمریکایی اولین نمودارهای آماری را به منظور کنترل فرآیند تولید ابداع و معرفی نمود.بنابراین وی را پایه گذار کنترل کیفیت آماری می‌شناسند. ولی استفاده از علم آمار در صنعت از این زمان آغاز نشد. علت این امر اعتقاد نداشتن مدیران تولید به روش‌های آماری و همچنین کمبود متخصص علم آمار در مراکز تولیدی بود. در سال ۱۹۹۴ در طی جنگ جهانی دوم خرید میلیون‌ها تن مواد غذایی، مهمات، پوشاک، دارو و ... توسط ارتش آمریکا بدون آنکه روش علمی برای کنترل و بازرسی آن وجود داشته باشد سران ارتش آمریکا را وادار نمود که به سراغ کنترل کیفیت آماری بروند. این اقدام ارتش آمریکا از یک طرف منجر به پیروزی آن در جنگ جهانی دوم و از طرف دیگر سبب پایه گذاری علم کنترل کیفیت آماری در دنیا گردید. در کنترل کیفیت آماری که امروزه به طور گسترده ای

[۱] Walter.Shewhar

در صنایع پیشرفته دنیا به کار می رود. سعی بر این است که ضایعات تولید تا حد امکان کاهش یابد. چنانچه مدیری بخواهد کنترل کیفیت را اجرا کند باید آمار بگیرد.
به عنوان مثال تعیین نماید که آیا ضایعات کارخانه یا کارگاه نسبت به دیروز افزایش یافته است یا کاهش؟ آیا ضایعات این کامیون مواد خام نسبت به کامیون قبلی فرق دارد یا خیر؟ سپس لازم است این آمارها را به صورت نمودار در آورده و بعد از تجزیه و تحلیل نمودارها ریشه نقایص را بیابد . به این ترتیب می توان با استفاده از کنترل کیفیت آماری کنترل موثری بر تولید داشت . در سال ۱۹۹۴ اولین حلقه‌های کنترل کیفیت برای بهبود روش‌های کنترل کیفیت در ژاپن تشکیل شد. این حلقه‌ها عبارتست از تقسیم مجموعه عوامل موثر بر کیفیت به حلقه‌های مختلف و تقسیم حلقه‌های بزرگ به حلقه های کوچک؛ هدف اصلی از تشکیل این حلقه‌ها آن بود که شرایط مناسب برای بهبود کیفیت محصول تولیدی فراهم شود . کار حلقه‌های کنترل کیفیت از همان آغاز با موفقیت‌های چشمگیری رو به رو شد و به همین دلیل واحدهای تولیدی در بسیاری از کشورها این حلقه ها را در صنعت خود تشکیل دادند. در سالهای اخیر در اکثر واحدهای تولیدی، سیستمهای مختلف کنترل کیفیت تضمین کننده سلامت، بهداشت، رفاه و ... افراد جامعه موجود است. اولین دیدگاههای تئوریک برای تحلیل بقا[۲] (طول عمر) که سریعا توسعه یافت و ویژگیهای کاربردی خویش را نشان داد مبتنی بر روش‌های کلاسیک مرسوم به «جدول طول عمر» که توسط کاپلان و مایر[۳] در سال ۱۹۸۵ ارائه شد. آن‌ها در بررسی خویش با توجه به داده‌های ناتمام موجود در مطالعات بقا روش ناپارامتری را برای برآورد احتمالات بقا ارائه نمودند. این روش‌ها سریعا مورد توجه سایر آمار شناسان قرار گرفت. از جمله این افراد اسورداپ [۴] بود که در سال ۱۹۶۵، نه‌تنها از این روش‌ها استفاده نمود بلکه برای اولین بار ضعف‌های این روش را نیز مطرح نموده و استفاده از مدل‌های مبنی برفرآیندهای تصادفی را پیشنهاد نمود.به دنبال اسوردراپ، هوم[۵] نیز در سال ۱۹۶۵ طی مقاله معروف خود ایده‌هایی را در مورد استفاده از فرآیندهای تصادفی در مدل‌های تحلیل بقا مطرح نمود، او برای اولین بار امکان استفاده از فرآیندهای زنجیر مارکف را اعلام نمود.

۲.۱ مقدمه

در راستای برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها و به‌دست آوردن توزیع مناسب برآوردگرها، مقالات و کتب بسیاری توسط محققان و نویسندگان علوم مختلف به چاپ رسیده، و چون قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها جزء لاینفک و وابسته به کارایی و میزان رضایت بخشی یک سیستم است، لذا تحلیل و بررسی این امر و دستیابی به قابلیت‌اطمینان بالاتر همچنان یکی از موضوعات مهم روز است. بنابر مستندات در راستای برآورد یابی، دریک تحقیق، چرچ و هریس[۶](۱۹۷۰) یک راه حل پارامتری برای مسئله برآورد

[۲] Survival
[۳] Kaplan and Meier
[۴] Sverdrup
[۵] Hoem
[۶] Chur and Harris

قابلیت‌اطمینان تحت فرضیه‌ای که توزیع Y مشخص باشد و $F_X(x)$ و $G_Y(y)$ هر دو نرمال باشندارائه دادند. همچنین ثابت کردند که قابلیت‌اطمینان دارای توزیع مجانبی است و توزیع مجانبی $\hat{R}$را می‌توان از جداول توزیع مجانبی استاندارد بدست آورد. باتاچاریا و جانسون (۱۹۷۴)[۷] برآورد نااریب با کمترین واریانس[۸] $(MVUE)$ را برای قابلیت‌اطمینان سیستم، هنگامیکه مولفه‌های فشار و مقاومت هر دو تحت توزیع نمایی با پارامترهای نامعلوم باشند، را بررسی کردند. نظریه نمونه بزرگ در بخش سوم این پایان‌نامه نشان می‌دهد که برآوردگرهای بیزی و درستنمایی قابلیت‌اطمینان برای بطور مجانبی هم ارز هستند. آنها رابطه بین آن دو را به ازای nهای مختلف و با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی مونت کارلو، شبیه‌سازی کردند. .در ادامه این روند دراپر و گاتمن (۱۹۷۸)[۹] یک رهیافت بیزی برای استنباط درباره قابلیت‌اطمینان سیستم‌های چند عضوی s عضو خارج از k عضو ارائه دادند. آن‌ها فرضیات خود را اینگونه بیان کردنند که مقاومت‌ها و فشار وارده مستقل بوده و دارای توزیع نمایی باشند. نهایتا نتایج بدست آمده را با یک مثال عددی توضیح دادند. همچنین ویر (۱۹۸۱)[۱۰] برآورد ماکزیمم درستنمایی و برآورد بیزی قابلیت‌اطمینان را در حالتی که سیستم تنها دارای دو متغیر باشد، برای هر دو توزیع پیشین دقیق و توام مورد بحث و بررسی قرار داد.

مسئله برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم دو عضوی، هنگامیکه $(X_۱, X_۲)$مولفه‌های مقاومت بوده و تحت فشار $X_۳$ دارای توزیع نمایی باشد توسط هنگال (۱۹۹۶)[۱۱] بررسی شد.

یک مرور کلی و جامع از مدل‌های فشار-مقاومت توسط کاتز و همکاران(۲۰۰۳)[۱۲] جمع‌آوری شد.

۳.۱ استنباط‌آماری

استنباط آماری، یک فرآیند استنتاجی در مورد ویژگی‌های یک جامعه، شامل آزمون فرضیه و برآوردیابی است. جامعه شامل همه داده‌های مشاهده شده است. از آن‌جایی که دسترسی یا تحلیل همه مشاهدات جامعه، به دلیل حجم بالای آن، مشکل است، استنباط آماری براساس یک نمونه معقول از جامعه انجام و نتایج حاصل از آن به جامعه مورد نظر تعمیم داده می‌شود. بنابراین، هدف استنباط آماری تعمیم نتایج حاصل از مشاهدات نمونه‌ای به جامعه مورد نظر است، برای این‌که بتوانیم نتیجه‌ای درست از استنباط آماری داشته باشیم، رعایت یک نکته ضروری است، و آن انتخاب مدل واقعی یا مدل نزدیک به فرآیند تولید داده‌ها است. چرا که عمده مشکلات در استنباط آماری به انتخاب مدل نادرست مربوط می‌شود در استنباط آماری مکاتب فلسفی متفاوتی وجود دارند. این مکاتب یا الگوها، منحصر به‌فرد نیستند و روشی که تحت یک الگو روی مشاهدات به خوبی اجرا می‌گردد غالبا تفسیر متفاوتی نسبت به سایر

[۷] Bhattacharya and Johnson

[۸] Minimum-Variance unbiased Estimator

[۹] Draper and Guttman

[۱۰] Weier

[۱۱] Hanagel

[۱۲] Kotz,Lumelskii and Pensky

الگوها روی نمونه مورد نظر دارد. بندی‌اپاتای و فورستر[۱۳] (۲۰۱۱) چهار الگو رابرای استنباط آماری معرفی می‌کنند:

•آمار کلاسیک یاآمار بسامدی

•آمار بیزی

• آمار مبتنی بر درستنمایی

• آمار مبتنی بر معیار آکاییک

ما در تحلیل و نگارش این پایان‌نامه بیشتر با دو روش بیزی و درستنمایی سروکار داریم. در استنباط آماری براساس پارامتر مورد نظر دو دیدگاه وجود دارد:دیدگاه بسامدی، دیدگاه بیزی.در زیر مختصر شرحی از آن‌ها بیان می‌کنیم.

۱.۳.۱ دیدگاه بسامدی

در مبحث بسامدی استنباط آماری، پارامتر مطلوب و مورد بررسی ثابت اما نامعلوم است و احتمال به عنوان فراوانی نسبی رخداد پیشامد مورد نظر به ازای تکرار زیاد آزمایش تصادفی، روی مقادیر فضای نمونه و با توجه به پارامتر نامعلوم، تفسیر می‌شود. در این مکتب، معمولا عملکرد هر فرآیند آماری با میانگین‌گیری روی کل فضای نمونه تعیین می‌شود. این میانگین‌گیری می‌تواند قبل از اجرای آزمایش انجام شود و به داده‌ها بستگی ندارد که باعث شده است به این دیدگاه، از این منظر،نقدهای وارد شود.به طور کلی، دو دیدگاه در استنباط بسامدی وجود دارد:

⋆ فیشر(۱۹۲۶)، استنباط آماری را مبتنی درستنمایی می‌دانست. تابع درستنمایی ضابطه مشابهی همچون چگالی توام نمونه دارد، با این تفاوت که، مشاهدات ثابت در نظر گرفته می‌شوند و پارامترها مجاز به تغییر روی همه مقادیر ممکن هستند. او پیچیدگی داده‌ها را با کمک آماره‌های بسنده، کاهش داد به طوری که این آماره‌ها همه اطلاعات موجود در داده‌ها، در مورد پارامتر مورد بررسی را دارند(کسلاو برگر۲۰۰۲,). فیشر همچنین نظریه برآوردیابی ماکزیمم درستنمایی[۱۴](MLE)را ایجاد و توزیع مجانبی برآوردگرهای حاصل از این روش برآوردیابی را معرفی کرد(فیشر۱۹۲۶).او کارایی یک برآوردگر را با استفاده از معیاری به نام اطلاع فیشر که در ادامه به طور کامل بیان شده، اندازه‌گیری کرد.

⋆نیمن و پیرسون(۱۹۳۳). پایه‌های نظریه‌تصمیم را ایجاد کردند و سپس استنباط آماری را در آن نهادند. نظریه آن‌ها بر خلاف فیشر اساسا قیاسی بود. آن‌ها نواحی اطمینان را معرفی و سعی کردند تا راه‌حل‌های بهینه‌ای در رده‌های مجاز بیابند(موری و همکاران،۲۰۰۶)[۱۵] و اگر نیاز بود رده‌ها را محدود می‌کردند تا بتوانند راه‌حلی بیابند.

[۱۳] Bandyopadhyay,S.P. and Forster

[۱۴] Maximum Likelihood Estimation

[۱۵] Murray and Associates

۲.۳.۱ دیدگاه بیزی در استنباط آماری

دیدگاه بیزی استنباط آماری، برای اولین بار توسط یک کشیش به نام توماس بیز [۱۶] در سال ۱۷۶۳ مطرح و پس از مرگ او توسط دوستش، ریچارد پرایس، در مجله‌ای علمی در انجمن سلطنتی انگلستان به چاپ رسید(کسلاو برگر،۲۰۰۴). استنباط بیز یکی از روش‌های حل مسائل آنالیز بقا است، و بسیاری از مسئله‌های واقعی به‌طور طبیعی ببه‌وسیله انتگرال‌ها با نسبت توزیع پسین فرمول بندی می‌شود. قضیه بیز که بدون شک یکی از کاربردی‌ترین مسائل در دیدگاه بیزی است، بنابر احتمالی شرطی بیان می‌شود و روشی را برای به‌روزکردن احتمال رخدادهای مشاهده نشده که در ارتباط با رویداد دیگری رخ داده‌اند، ارائه می‌دهد. یعنی با توجه به وقوع رخداد مرتبط، یک احتمال پیشین برای رخداد مشاهده نشده داریم، سپس با جمع‌آوری اطلاعات جدید احتمال پسین را به روز می‌کنیم. درآمار بیزی، قضیه بیز به عنوان اساس استنباط بیزی درباره پارامتر نامعلوم توزیع آماری استفاده می‌شود. لزومات قضیه بیز را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

-از آنجایی که مقدار واقعی پارامتر نامعلوم است، در آمار بیزی فرض می‌شود این مقدار واقعی تحققی از یک توزیع احتمالی است. به عبارتی، پارامتر،یک متغیر تصادفی محسوب می‌شود. و این همان تضادی است که دیدگاه بیزی با دیدگاه بسامدی دارد، چرا که در دیدگاه بسامدی پارامتر نامعلوم ثابت فرض می‌شود. استفاده از استنباط بیزی مستلزم سه نوع توزیع است. این توزیع‌ها عبارتند از توزیع پیشین، توزیع پسین و توزیع توام متغیرها. قضیه بیز وظیفه به روزکردن استنباط درباره پارامتر واقعی، با توجه به اطلاعات مشاهده‌شده را بر عهده دارد. بنابراین توزیع احتمال پیشنی داریم که توسط آن شانس مشاهده هر مقدار ممکن پارامتر قبل از مشاهده داده‌ها، به گونه‌ای که قابل توجیه باشد، محاسبه می‌شود. توزیع احتمال پیشین اختیاری است، زیرا هر کس دیگری می‌تواند اعتقاد پیشینی در مورد پارامتر نامعلوم داشته باشد.

-هرگزاره احتمالی درباره پارامتر باید به عنوان «درجه باور» فرد درباره آن پارامتر تفسیر گردد. از قاعده احتمالی به طور مستقیم استفاده می‌کنیم تا استنباط درباره پارامتر را با توجه به داده‌های مشاهده شده انجام دهیم.

-قضیه بیز دو منبع اطلاعاتی درباره مقدار پارامتر نامعلوم را ترکیب می‌کند: اطلاعات پیشین و داده‌های مشاهده شده. اطلاعات پیشین، در قالب یک توزیع پیشین، به عنوان وزن و باور نسبی از مقدار واقعی پارامتر قبل از مشاهده داده‌ها تعیین می‌شود. اطلاعات موجود در داده‌های مشاهده شده نیز توسط تابع درستنمایی(تابع توزیع توام) خلاصه می‌شود. قضیه بیز این دو منبع را ترکیب می‌کند و توزیع پسین را که وزن نسبی باورمان از مقدار پارامتر بعد از مشاهده داده‌ها می‌باشد را ارائه می‌دهد.

با توجه به داده‌هایی که داریم، قضیه بیز تنها روش سازگار با تغییر باورمان در مورد پارامتر است. استنباط بیزی فقط وابسته به داده‌های است که مشاهده شده‌اند، نه آن‌هایی که می‌توانند رخ بدهند اما رخ نداده‌اند. بنابراین استنباط بیزی با اصل درستنمایی سازگار است(برگر و ولپرت ۱۹۹۸). خاصیت اصلی استنباط بیزی این است که پسین همیشه بایک روش واحد و خودکار مشخص می‌شود: اطلاعات اولیه درباره پارامتر را از چگالی پیشین و اطلاعات موجود در داده‌های مشاهده شده را توسط تابع درستنمایی باهم

[۱۶] Bayes,Thomas

ترکیب می‌کند و چگالی پسین را می‌سازد.
توزیع پیشین: توزیع پیشین تبلور کاربر آماراز خلاصه اطلاعات و دانسته‌های او در این باره است که احتمال قرار داشتن پارامتر در چه بخش‌های از فضای پارامتری بیش از همه است. به بیان دیگر قبل از مشاهده و جمع‌آوری هرگونه داده‌ای، اطلاعات قبلی کاربر وی را متقاعد می‌کند که شانس قرارگرفتن پارامتر مورد نظر در فضای پارامتری چگونه است و کاربر می‌تواند اطلاعات خود راذر قالب یک تابع توزیع بیان کند.
توزیع پسین: به توزیع احتمال پارامترها بعد از احتساب اثر مشاهدات توزیع پسین گفته می شود. توزیع پسین با استفاده از قاعده بیز و توزیع توام متغیرها به صورت زیر تعیین می شود. فرض می‌کنیم θ مقدار مشاهد شده یک متغیر تصادفی، مثلا wبا تابع چگالی $g(\theta)$است، که از آن با نام توزیع پیشین w یاد می‌کنیم در این حالت،$f_\theta(.)$ را می‌توان به عنوان چگالی شرطی متغیرX به شرط $W=\theta$تلقی کرده و چگالی توام آن‌ها را از رابطه زیر به‌دست آورد.

$$f_{X,W}(x,\theta) = f_{X|w=\theta}(x)\pi(\theta|x)$$

توزیع شرطیW به شرط X=x قابل محاسبه است، توزیع پسین می‌نامیم.توزیع پسین Wدارای چگالی پسین است که با استفاده از رابطه فوق و قاعده بیز به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\pi_{W|X=x}(\theta) = \frac{f_{X,W}(x,\theta)}{f_x(x)}$$

بنابراین تابع چگالی پسین را می‌توان بصورت زیر باز نویسی کرد.

$$\pi_{W|X=x}(\theta) = \pi(\theta|x) = \frac{f_\theta(x)\pi(\theta)}{\int_\Theta f_\theta(x)\partial G(\theta)}$$

بنابراین، یکی مهم‌ترین چالش‌ها در استنباط بیزی محاسبه تابع چگالی پسین است. به ویژه آن‌که معمولا نمی‌توان فرض کرد که مشاهدات مصداقی از یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال باشند. برای برخورد با این چالش، روش‌های عددی و نمونه‌گیری مختلفی معرفی شده‌اند(گلماند و اسمیت.۱۹۹۰؛رابرت و کسلا، ۲۰۰۲؛تیرنی و همکاران،۱۹۸۶). در ادامه چند نوع از توابع پیشین به‌کاربرده شده در این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم

۳.۳.۱ معرفی برخی از توزیع‌های پیشین

تعریف ۱.۳.۱. توزیع پیشین مزدوج :درمبحث توابع توزیع، خانواده‌های وجود دارند که توزیع پیشین و پسین پارامترها هر دو متعلق به یک خانواده مشترک می‌باشند. به این نوع توزیع‌ها، توزیع پیشین مزدوج می‌گویند. یک روش برای انتخاب توزیع پیشین مزدوج،بر پایه ساختار توزیع توام $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ بر حسب تابعی از آماره بسنده است.

قضیه ۲.۳.۱. :اگر بردار $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ یک نمونه تصادفی از خانواده نمایی با تابع

درستنمایی به شکل زیر باشد.

$$L(x_i;\theta)=\prod_{i=۱}^{n}h(x_i)c(\theta)Exp(\sum_{i=۱}^{k}w_i(\theta)t_i(x))$$

آنگاه خانواده توزیع های مزدوج برای فضای پارامتر Θ به صورت زیر است.

$$L(\theta;\tau)=\frac{۱}{k(\tau)}c(\theta)^{\tau_۰}Exp(\sum_{i=۱}^{k}w_i(\theta)t_i(x))$$

که در آن τ در رابطه زیر صدق می کند.

$$k(\tau)=\int_{\theta}c(\theta)^{\tau_۰}Exp(\sum_{i=۱}^{k}w_i(\theta)t_i(x)$$

تعریف ۳.۳.۱. توزیع‌پیشین کم‌آگاهی بخش : در مسائلی که پژوهشگر اطلاعات قابل اتکایی در اختیار ندارد و یا حجم اطلاعات ناچیز باشد(مانند فضای پارامتر اعداد حقیقی مثبت است) می‌توان از توزیع پیشین کم‌آگاهی بخش استفاده نمود. ساده ترین و قدیمی‌ترین روش تعیین توزیع پیشین کم‌آگاهی بخش، اصل عدم تفاوت است. براساس این روش برای تمام برآمدهای ممکن، پارامتر احتملات مساوی در نظر گرفته می‌شود. نتایج حاصل از استنباط بیزی برپایه اصل عدم تفاوت، تفاوت چندانی با روش های معمول(برای مثال روش ماکزیمم درستنمایی) استنباط آماری ندارند.

تعریف ۴.۳.۱. توزیع پیشین آگاهی بخش : توزیع پیشین آگاهی بخش به طور معین و کاملی یک اطلاع خاص در ارتباط با یک پارامتر بیان می کند. اساس اطلاع اضافی توزیع پیشین تجربیات قبلی پژوهشگر است. لازم بذکر است که این مسئله با در نظر گرفتن یک فرض تفاوت اساسی دارد بنابراین می توان به اطلاع اضافی، شهود موجود برای مسئله گفت. بنابراین اگر تعیین توزیع پیشین بر اساس شهود موجود در پژوهش صورت پذیرد به طوری که توزیع پیشنهادی در برگیرنده اطلاعات قبلی باشد آنگاه از یک توزیع پیشین آگاهی بخش استفاده شده است.

۴.۱ دیدگاه بیزی و روش‌های مونت‌کارلو

اغلب در مسائل بیز سلسه مراتبی، فرم بسته‌ای برای توزیع پیسین وجود ندارد. در این حالت برای استفاده از دیدگاه بیز در استنباط آماری لازم است تا از مدل بیز تجربی استفاده شود که بر مبنای نمونه ای از توزیع پسین شکل میگیرد. برای تولید نمونه از یک توزیع بدون فرم بسته الگوریتم هایی وجود دارد که مبنای اصلی آنها توزیع های شرطی است به این دسته از الگوریتم‌ها روش‌های مونت کارلو گفته می‌شود که به اختصار با نماد $(MCMC)$نمایش داده می‌شود.

۱.۴.۱ روش‌های مونت‌کارلو

روش‌های نمونه‌گیری مونت‌کارلوی زنجیر مارکوفی ($MCMC$)[۱۷] اولین بار توسط متروپولیس و همکاران (۱۹۵۳) به عنوان روشی برای شبیه‌سازی کارا از سطوح انرژی اتم‌ها در ساختارهای بلوری مطرح شد. به دنبال آن در استنباط آماری، به ویژه استنباط بیزی، هستینگز (۱۹۷۰) این ایده را پرورش داد و براساس نظریه زنجیرهای مارکوف، ویژگی روش‌های نمونه‌گیری $MCMC$را به طورگسترده تحت مطالعه قرار داد. در بخش‌های قبلی اشاره شد که توزیع پسین در بیشتر مواقع دارای شکل بسته نیست. لذا برای انجام محاسبات نیاز به تقریب دارد. گاهی توزیع پسین آنقدر پیچیده است که تولید مستقیم نمونه ار آن مشکل است. به همین دلیل ازروش‌های تولید نمونه به‌طور غیر مستقیم استفاده می‌کنیم. یک روش غیر مستقیم برای نمونه‌گیری از $\pi(\theta|y)$ ساخت زنجیر مارکوف بازگشتی [۱۸] و تحویل‌ناپذیری [۱۹] با توزیع مانای $\pi(\theta|y)$ است. فرض کنید چنین زنجیری وجود دارد. بنابراین اگر، در اجرا، زنجیر به اندازه کافی بزرگ باشد، آن‌گاه مقادیر شبیه‌سازی شده از زنجیر را می‌توان به عنوان نمونه‌ای از توزیع پسین در نظر گرفت. در اجرای روش‌های نمونه‌گیری $MCMC$، مطالب مهمی از جمله مکانیسم تولید تحقق برای زنجیر، تعداد زنجیرها و طول زنجیرها و انتخاب نقطه شروع زنجیر مطرح هستند. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این مطالب به اسمیت (۱۹۸۴)،گرین(۱۹۹۵)،آسموسن (۲۰۰۷) و ریکی (۲۰۱۰) مراجعه کنید. نظریه اصلی و زیربنایی روش‌های $MCMC$ این است که هر زنجیر بازگشتی و تحویل‌ناپذیر، هسته انتقال واحدی خواهد داشت، و هسته انتقالt مرحله‌ای، وقتی $t \longrightarrow \infty$، به توزیع مانای خود همگرا می گردد. بنابراین برای تولید زنجیر با هسته انتقال K و توزیع مانای π باید شرط $\pi k = \pi$ برقرار باشد. فرض کنید $\theta \sim \pi$، اگر $\theta' \sim K(\theta'|\theta)$آن‌گاه π.چنین زنجیرهایی در شرط زیر، معروف به شرط تعادل دقیق [۲۰]، صدق می‌کنند:

$$\pi(\theta|y)k(\theta'|\theta) = \pi(\theta'|y)k(\theta|\theta') \qquad (۱.۱)$$

براساس هسته انتقال، الگوریتم‌های برای روش‌های نمونه‌گیری $MCMC$، وجود دارند که می‌توان به الگوریتم‌های نمونه‌گیری متروپولیس-هستینگز(متروپولیس و همکاران،۱۹۵۳؛هستینگز،۱۹۷۰) و الگوریتم نمونه‌گیری گیبز (گمان،۱۹۸۴؛گلفاند و اسمیت، ۱۹۹۰) اشاره کرد. به‌طور کلی الگوریتم $MCMC$را می‌توان به صورت جدول زیر ارائه کرد.

با توجه به جدول ۱.۱، احتمال پذیرش الگوریتم $MCMC$ را با P مشخص می‌کنیم. در این صورت با احتمال p،θ به‌عنوان نمونه‌ای از توزیع $\pi(\theta|y)$ پذیرفته می‌شود. سپس می‌توانیم با توجه به خروجی الگوریتم که مجموعه‌ای از θ^iهارا تشکیل می‌دهد، انتگرال مونت‌کارلویی یا توزیع پسین را تقریب بزنیم. برای هر الگوریتم $MCMC$مقدار P تغیر می‌کند. مثلا برای الگوریتم مترو پولیس - هستینگز مقدار احتمال پذیرش برابر است با

$$P(\theta, \theta^{(i-1)}) = min\left[1.\frac{\pi(\theta|y)}{\pi(\theta^{i-1}|y)}\frac{K(\theta^{i-1}|\theta)}{K(\theta|\theta^{i-1})}\right] \qquad (۲.۱)$$

[۱۷] Markov Chain Monte Carlo

[۱۸] Recurrent

[۱۹] Irreducible

[۲۰] Detailed balance conditon

الگوریتم نمونه‌گیری MCMC
برای $i = ۱$ تا T تکرار کن
۱-هسته مارکوف $k(\cdot\|\cdot)$ با توزیع مانای $\pi(\cdot)$ را ایجاد کن
۲- زنجیر مارکوف $\theta^{(i)} \to \theta \sim \pi$ را تولید کن
۳- θ را از هسته مارکوف $k(\theta\|\theta^{(i-۱)})$ تولید کن
۴-قرار بده $\theta = \begin{cases} \theta^{(i)} & \text{با احتمال } p \\ \theta^{(i-۱)} & \text{با احتمال } ۱-p \end{cases}$

جدول ۱.۱: الگوریتم نمونه‌گیری MCMC

۲.۴.۱ انتگرال‌گیری مونت کارلو

روش مونت‌کارلو در اصل یک روش بسط داده شده توسط فیزیکدانان می‌باشد که از تولید اعداد تصادفی برای محاسبه انتگرال‌های پیچیده استفاده می‌کند. فرض کنید هدف محاسبه انتگرال $\int_a^b h(X)d(X)$ است. اگر بتوانیم $h(X)$ را به‌صورت حاصلرب یک تابع $P(X)$ و یک تابع چگالی احتمال $f(X)$ روی فاصله (a, b) در نظر بگیریم آنگاه:

$$\int_a^b h(x)d(x) = \int_a^b f(x)P(x)d(x) = E_{f(x)}[P(X)]$$

به عبارت دیگر این انتگرال می‌تواند به عنوان امید ریاضی تابع$P(X)$ روی چگالی $f(X)$ تعبیر می‌شود. اگر نمونه تصادفی $(x_۱, x_۲, ۰, x_n)$ از چگالی $f(X)$ استخراج شود آنگاه:

$$\int_a^b h(X)d(x) = E_{f(X)}[P(X)] \approx \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} P(X)$$

روش اخیر انتگرال‌گیری مونت کارلو نام دارد و برای تقریب توزیع‌های پسین مورد نیاز در تحلیل بیز به کار گرفته می‌شود.مثلا اگر هدف محاسبه امید توزیع پسین

$$E(\theta) = \int \theta p(\theta|y)d\theta$$

باشد و بتوان پارامترهای$\theta_۱, \theta_۲, ۰, \theta_n$ را از توزیع پسین شبیه‌سازی کرد. آنگاه می‌توان امید ریاضی توزیع پسین را با متوسط این نمونه تقریب زد یعنی

$$E(\theta) \approx \frac{۱}{n}\sum \theta_i$$

که به آن برآورد مونت‌کارلو θ گویند. لازم به ذکر است طبق قانون ضعیف اعداد بزرگ اگر $n \to \infty$،آنگاه:

$$\frac{۱}{n}\sum \theta_i \xrightarrow{p} E(\theta)$$

۵.۱ تحلیل بقا

آنالیز یا تحلیل بقا، یکی از مباحث مهم علم آمار است که در رشته‌های مختلفی از جمله علوم کامپوتری، کشاورزی، مهندسی و غیره کابرد دارد. تحلیل بقا به مجموعه‌ای از روش‌های آماری تحلیل داده گفته می‌شود که در آن‌ها متغیر مطلوب، زمان وقوع یک پدیده است. این موضوع در علوم مهندسی نظریه قابلیت‌اطمینان نامیده می‌شود. تحلیل بقا به عنوان یک روش آماری که اساسا برای تحقیقات زیستی و مهندسی توسعه یافته، می‌تواند در آنالیز داده‌های طول عمر مورد استفاده قرار گیرد. آنالیز و تحلیل بقا براساس استفاده از توزیع و توابع خاص می‌باشد.

تابع بقا

تابع بقا یا طول عمر. بیانگر این است که یک مولفه حداقل تا زمان T ماندگاری داشته باشد. براین اساس تابع تجمعی طول عمر به‌صورت زیر است

$$F(t) = P(T \leq t)$$

۶.۱ تابع قابلیت‌اطمینان

احتمال موفقیت، یا احتمال اینکه سیستم بدون وقوع خرابی به وظایف تعیین شده در طراحی عمل می‌کند را قابلیت‌اطمینان [۲۱] نامند. تعریف قابلیت اطمینان بر تعریف وقوع خرابی بنا شده است. برای اندازه‌گیری قابلیت‌اطمینان یک سیستم ابتدا سیستم به اجزایی شکسته می‌شود و قابلیت‌اطمینان سیستم بر حسب قابلیت‌اطمینان اجزای آن بیان می‌گردد. هر متغیر تصادفی نامنفی را یک متغیر تصادفی طول عمر [۲۲]می نامند. فرض کنیدX یک متغیر طول عمر(مقاومت) باشد. تابع قابلیت اطمینان متغیر X درنقطه t به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R(t) = P(X > t) = ۱ - F(t) \qquad \forall t > ۰$$

در واقع تابع $R(t)$ احتمال این‌که فرد یا قطعه دارای طول عمر بیشتر از t باشد، را محاسبه می‌کند. به عنوان مثال هرگاه $R(۱) = ۰/۷$ باشد، بدین معنی است که با احتمال ۰/۷ فری یا قطعه طول عمری بیشتر از یک واحد زمانی خواهد داشت.
هرگاه $F(x)$ تابع توزیع تجمعی احتمال X باشد داریم:

$$R(t) = P(X > t) = ۱ - P(x < t) = ۱ - F(t). \qquad (۳.۱)$$

همچنین اگر $f(x)$ تابع چگالی احتمال X باشد داریم:

$$R(t) = P(X > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx \qquad (۴.۱)$$

[۲۱] Reliability

[۲۲] ifetime random variabl

با مشتق‌گیری نسبت به t از رابطه (۱.۴) داریم:

$$f(t) = -R'(t)$$

بنابراین با مشخص شدن یکی از توابع $R(t)$، $F(t)$، و $f(t)$ سایر توابع نیز به‌دست می‌آید.

۱.۶.۱ خواص تابع قابلیت‌اطمینان

هرتابع قابلیت‌اطمینان در سه شرط زیر صدق می‌کند:

۱) $R(۰) = ۱$

۲) $R(\infty) = ۰$

۳) $R(t)$نسبت به t به‌طور یکنواخت نزولی است.

زیرا:

$$R(۰) = P(X > ۰) = \int_{۰}^{+\infty} f(x)d(x) = \int_{-\infty}^{۰} ۰d(x) + \int_{۰}^{+\infty} f(x)d(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = ۱ \quad (۵.۱)$$

از طرفی داریم

$$R(\infty) = \lim_{t\to\infty} R(t) = \lim_{x\to\infty}(۱ - F(t)), \qquad \lim_{x\to\infty} F(t) = ۱, \qquad R(\infty) = ۱ - ۱ = ۰$$

فرض کنید $t_۱ < t_۲$ باشد در این‌صورت:

$$R(t_۲) - R(t_۱) = (۱ - F(t_۱)) - (۱ - F(t_۲)) = F(t_۱) - F(t_۲) \leq ۰$$

لذا تابع $R(t)$ تابعی به‌طور یکنواخت نزولی است.

۲.۶.۱ مقاسیه توابع قابلیت‌اطمینان

بدیهی است که در انتخاب بین دو کالا یا قطعه، قطعه‌ای انتخاب می‌شود که دارای قابلیت‌اطمینان بیشتری باشد. در نمودار فوق همواره تابع قابلیت‌اطمینان قطعه (۲) از قطعه (۱) بیشتر است به عبارت دیگر

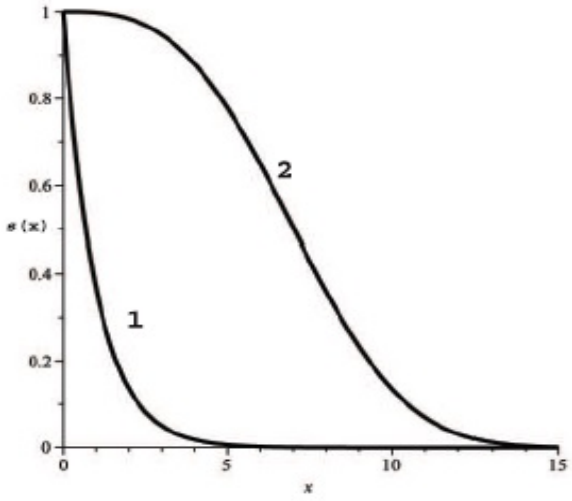
$$R_۱(t) < R_۲(t) \qquad \forall t > ۰$$

گاهی اوقات$R_۱(t)$و $R_۲(t)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. در این حالت نمی‌توان به صراحت مشخص کرد که کدام قطعه بهتر است. یکی از روش‌های معقول برای مقایسه، استفاده از امید ریاضی طول عمر قطعات است به عبارت دیگر هر مولفه‌ای(مقاومت) که دارای بیشترین مقدار میانگین طول عمر [۲۳] $MTTF$ باشد بهتر است. در مباحث قابلیت‌اطمینان ، امید ریاضی طول عمر را $MTTF$ می‌نامند.

$$MTTF = E(X) = \int_{۰}^{\infty} f(x)dx$$

به‌دلیل عدم نیاز به این مبحث در این پایان نامه از ذکر جزییات چشم پوشی کرده وبه تعریف آن بسنده می کنیم.

[۲۳] Mean Time To Failure



شکل ۱.۱: نمودار مقایسه توابع قابلیت‌اطمینان

۷.۱ تابع نرخ خطر

تابع نرخ خطر یا همان تابع طول عمر اساس و پایه اصلی در برآورد قابلیت‌اطمینان یک سیستم است. فرض کنید X متغیر تصادفی طول عمر باشد، که تا زمان t عمر کرده باشد یعنی پیشامد $X > t$ رخ داده است. $\triangle t$ را فاصله کوتاه در نظر بگیرید بنابراین $P(t < X < X + \triangle t | X > t)$ احتمال اینکه فرد یا قطعه در فاصله زمانی $\triangle t$ بعد از t از کار بیفتد را محاسبه می‌کند.کمیت

$$\frac{P(t < X < t + \triangle t | X > t)}{\triangle t}$$

نرخ از کار افتادگی یا از بین رفتن را بر حسب واحد زمانی محاسبه می‌کند. فرض کنید $\triangle t \to ۰$ در این صورت داریم:

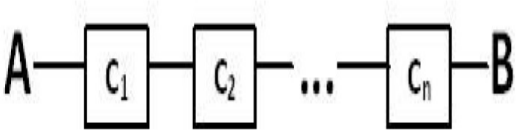
$$\begin{aligned}
\lim_{\triangle t \to o} \frac{P(t < X < t + \triangle t | X > t)}{\triangle t} &= \lim_{\triangle t \to ۰} \frac{P(t < X < t + \triangle t)}{\triangle t P(X > t)} \\
&= \frac{۱}{P(X > t)} \lim_{\triangle t \to o} \frac{P(t < X < t + \triangle t)}{\triangle t} \\
&= \frac{۱}{R(t)} \lim_{\triangle t \to o} \frac{P(X > t) - P(X > t + \triangle t)}{\triangle t} \\
&= \frac{۱}{R(t)} \lim_{\triangle t \to o} \frac{R(t) - R(t + \triangle t)}{\triangle t} \\
&= \frac{۱}{R(t)} \lim_{\triangle t \to o} \frac{R(t + \triangle t) - R(t)}{\triangle t} \\
&= -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}
\end{aligned}$$

تعریف فوق، تعریف کلی و از دید مهندسی، تابع نرخ خطر است. در این پایان‌نامه تابع نرخ خطر به‌صورت دیگر، که در ادامه خواهیم دید، بیان می‌شود. به عبارتی می‌توان گفت تعریف آماری نرخ خطر

مورد نظر است.

۸.۱ سیستم‌های سری و موازی

سیستم‌ها براساس نحوه اتصال مولفه‌ها(مقاومت‌ها) به چند نوع تقسیم می‌شوند، ولی هدف ما دو نوع سری [۲۴] و موازی [۲۵] است، و ما با این دو نوع سروکار داریم. زمانی که موفقیت یک سیستم وابسته به موفقیت تمام مولفه‌ها باشد سیستم را سری می‌نامند،که نحوه اتصال مولفه‌ها به صورت شکل زیر می‌باشد و با ازکار افتادن اولین مولفه سیستم متوقف می‌شود.در ادامه نحوی اتصال مولفه‌ها(مقاومت‌ها) را در یک سیستم سری مشاهد می‌کنیم. درسیستم‌های سری قابلیت‌اطمینان سیستم برابر است با حاصل‌ضرب



شکل ۲.۱: نحوی اتصال مولفه‌ها در سیستم‌های سری

قابلیت‌اطمینان‌های همه مولفه‌ها. باتوجه به تعریف قابلیت‌اطمینان داریم:

$$\varphi(X_۱, X_۲, \cdots, X_n) = ۱ \iff X_۱ = ۱, \cdots, X_n = ۱ \iff \prod_{i=۱}^{n} = ۱$$

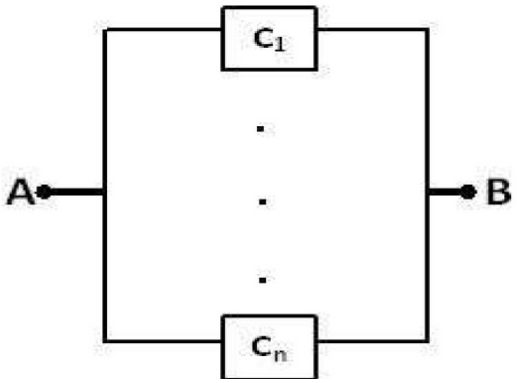
$$\varphi(X_۱, X_۲, \cdots, X_n) = ۰ \iff \exists X_k = ۰ \iff \prod_{i=۱}^{n} X_i = ۰$$

$$\implies R_{series}(X_۱, \cdots, X_n) = E(\varphi(X_۱, X_۲, \cdots, X_n)) = E(\prod_{i=۱}^{n} X_i) = \prod_{i=۱}^{n} E(X_i) = \prod_{i=۱}^{n} R_i$$

اگر موفقیت یک سیستم با موفقیت حداقل یک مولفه همراه باشد، گوییم مولفه‌ها به طور موازی به هم متصل شده انده، و سیستم را موازی نامیم. در سیستم‌ها موازی سیستم با یک مولفه درست، کارایی دارد و نیاز به درست بودن همه مولفه‌ها نیست. نحوه اتصال مولفه‌ها در سیستم‌های موازی به‌صورت شکل زیر است.
دراینصورت:

$$\varphi(X_۱, X_۲, \cdots, X_n) = ۰ \iff X_۱ = ۰, \cdots, X_n = ۰ \iff ۱ - X_۱ = ۱, \cdots, ۱ - X_n = ۱$$

[۲۴] Series
[۲۵] Parallel



شکل ۳.۱: نجوی اتصال مولفه‌ها در سیستم‌های موازی

$$\Longleftrightarrow \prod_{i=۱}^{n}(۱-X_i)=۱ \Longleftrightarrow ۱-\prod_{i=۱}^{n}(۱-X_i)=۰$$

$$\varphi(X_!,X_۲,\cdots,X_n)=۱ \Longleftrightarrow \prod_{i=۱}^{n}(۱-X_i)=۱$$

$$\Longrightarrow R_{Parallel}(X_۱,\cdots,X_n)=E(\varphi(X_!,X_۲,\cdots,X_n))=۱-\prod_{i=۱}^{n}(۱-E(X_i))=۱-\prod_{i=۱}^{n}(۱-R_i)$$

در حالت کلی می‌توان اثبات کرد

$$R_{series}(X_۱,\cdots,X_n)=min(X_۱,\cdots,X_n)$$
$$R_{Parallel}(X_۱,\cdots,X_n)=max(X_۱,X_۲,\cdots,X_n)$$

۹.۱ برآورد قابلیت‌اطمینان

فرض کنید نمونه‌ای تصادفی به حجم n از جامعه $X_!,X_۲,\cdots,X_n$ از متغیر تصادفی طول عمر X با تابع اطمینان $R(t)$ در اختیار باشد. هدف برآورد $R(t)$ می‌باشد که در آن t زمان مشخص و معلوم است. معمولا برآورد به دو شکل کلی تقسیم می‌شود:
الف) پارامتری:فرض می‌شود که $R(t)$ دارای شکل خاصی است مانند نمایی،وایبل،گاما و....در این حالت کافیست پارامترهای جامعه برآورد شوند.
ب)ناپارامتری:هیچ گونه ساختار خاصی برای $R(t)$ در نظر گرفته نمی‌شود.

۱.۹.۱ برآورد پارامتری

روش‌های متفاوتی برای برآورد پارامتری تابع قابلیت‌اطمینان وجود دارد مانند روش گشتاوری، روش ماکزیمم درستنمایی، روش بیزی و$\cdots$ در این پایان نامه دو روش ماکزیمم درستنمای و روش بیزی را

اسفاده می‌کنیم. بدلیل کارراییی واستفاده زیاد از روش ماکزیمم درستنمایی در ادامه مختصر توضیح از این روش ارائه می‌کنیم.

۱۰۱۰ مدل فشار-مقاومت

در مدل‌های فشار- مقاومت[۲۶] سیستم‌هایی هستند که در اثر مقاومتی که دارند(هر عضو سیستم دارای یک مقاومت ذاتی است) عمر بیشتری می‌کنند، این سیستم‌ها فقط یک سطح معینی از فشار را تحمل می کنند، یعنی اگر فشار روی سیستم از این حد معین و مجاز فراتر رود سیستم قادر به تحمل این فشار نخواهد بود و از کار می‌افتد.
فشار: متغیر وادار کردن به شکست است. چیزی که باعث شکست یک عضو، یک وسیله و یا یک کالا می شود، که به شکل‌های بار مکانیکی، محیط زیست، درجه حرارت و بار الکتریکی و غیره می‌تواند ظاهر شود.
مقاومت: توانایی یک عضو، یک وسیله و یا یک کالا را برای به انجام رساندن وظیفه خود به صورت رضایت بخش و بدون شکست در مقابل بار خارجی و محیط زیست مقاومت نامیده می‌شود. بنابراین مقاومت متغیر پایداری در مقابل شکست است.
تغییرات در «فشار» و «مقاومت» سیستم‌ها و میزان مقاومت مولفه‌های یک سیستم در برابر فشار وارد شده به آن‌ها باعث ایجاد توزیع آماری و پراکندگی طبیعی می‌شود، بنابراین یک سیستم دارای دو توزیع است، اگر مولفه‌ها دارای توابع چگالی احتمال معلوم باشند، قابلیت اطمینان یک عضو و قابلیت‌اطمینان کل سیستم به راحتی قابل دسترسی و محاسبه است. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند بطوریکه X «مقاومت»و Y متعیر«فشار» را نشان دهد، در این صورت اگر X و Y دارای چگالی احتمال توام $f(x,y)$ باشند، آنگاه قابلیت اطمینان سیستم به‌صورت زیر است

$$R = P[Y < X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x,y)dydx$$

که در آن $P(Y < X)$، احتمال اینکه مقاومت بیشتر از فشار باشد را نشان می دهد و $f(x,y)$ تابع چگالی احتمال توام X و Y است.

۱۰۱۰۱ قابلیت‌اطمینان در مدل‌های فشار-مقاومت

همان‌گونه که از اسم مدل‌ها پیداست، اساس اصلی این مدل‌ها فشار وارده برمولفه‌های سیستم می‌باشد. هدف اصلی ما در این پایان نامه نیز برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها(سری و موازی)در این مدل‌ها می‌باشد، زمانی که مولفه‌ها همگی تحت فشار یکسان قرار گیرند. دراین مدل‌ها مولفه‌ها مستقل از هم هستندو فشار متغیر است. فرض کنید در یک سیستم موازی دارای k مولفه مستقل، $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_k$ همگی تحت فشاریکسان X باشند. همان‌طور که قبلا بیان کردیم در سیستم‌های موازی تا زمانی که

[۲۶] Stress-Strength

تمامی مولفه‌ها از کار نیفتد سیستم کار می‌کند، بنابراین قابلیت‌اطمینان سیستم را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$R = P[X < \max(Y_۱, Y_۲, Y_۳, ..., Y_k)]$$

یعنی احتمال اینکه فشار وارده کمتر از بیشترین مقاومت باشد.
در سیستم‌های سری چون با از کار افتادن اولین مقاومت سیستم از کار می‌افتد بنابراین در رابطه فوق بجای max از min استفاده می‌کنیم.

$$R = P[X < \min(Y_۱, Y_۲, Y_۳, ..., Y_k)]$$

۲.۱۰.۱ روش ماکزیمم درستنمایی (روش MLE)

روش ماکزیمم درستنمایی یکی از قدیمیترین و بااهمیت‌ترین روش‌ها در نظریه برآوردهاست، این روش اولین بارتوسط گوس در سال ۱۸۲۱ به کار گرفته شد و پس از آن به صورت گسترده‌تری در سال ۱۹۲۶ توسط فیشر در انتقاد از روش برآورد گشتاوری مورد استفاده قرار گرفت.

تابع درستنمایی

فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_۱, X_۲, X_۳, ..., X_n)$ ،برداری از متغیرهای تصادفی با تابع چگالی جرم احتمال $f_\theta(X)$ باشند به‌طوری که $\theta \in \Theta$. برای هر مقدار داده شده $X = x$،تابع درستنمایی $\boldsymbol{X}$را تابع چگالی احتمال توام $\boldsymbol{X}$، یعنی $f_\theta(\boldsymbol{X})$ ، تعریف می‌کنیم که به‌صورت تابعی از θ در نظر گرفته می‌شود و آن را با نماد $L(\theta)$ نمایش می‌دهیم :

$$L(\theta) = f_\theta(\boldsymbol{X})$$

برای هر نمونه از مشاهده $x_۱, x_۲, x_۳, ..., x_n$ ، تابع درستنمایی $L(\theta)$ تابعی حقیقی مقدار که بر روی فضای پارامتر Θ ، تعریف می‌شود. توجه کنید که در اینجا فرض هم توزیع بودن و مسقل بودن متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, X_۳, ..., X_n$ الزامی نمی‌باشد.

برآورد ماکزیمم درستنمایی

فرض کنید که برای یک نمونه $x_۱, x_۲, x_۳, ..., x_n$ ، تابع $L(\theta; \boldsymbol{X})$ بیشترین مقدار خود را بر اساس تابعی از θ روی فضای پارامتر Θ در $\theta = S(x)$ می گیرد، یعنی:

$$\underset{\theta \in \Theta}{Sup} L(\theta) = L[S(x)]; S(x) \in \Theta$$

سپس آماره $\hat{\theta} = S(x)$ ، برآورد ماکزیمم درستنمایی برای پارامتر θ نامیده می شود.
توجه: اغلب در ماکزیمم کردن تابع $L(\theta)$ راحت‌تر است که Ln آن ماکزیمم شود زیرا مقداری که تابع

$L(\theta)$ را ماکزیمم کند آنگاه تابع $Ln(L)$ ، را نیز ماکزیمم می‌کند. از آنجایی که تابع $L(\theta)$ اغلب به‌صورت حاصلضرب می‌باشد و در نتیجه تابع $Ln(L)$ حاصلضرب را به مجموع تبدیل می‌کند و انتگرال‌گیری مجموع، نسبت به انتگرال‌گیری حاصلضرب آسان‌تر است. و تابع $Ln(L)$ را لگاریتم تابع درستنمایی می‌نامندکه به‌صورت زیر است.

$$Ln(L) = l(\boldsymbol{X}|\theta) = \sum_{i=۱}^{n} Ln[f(x_i|\theta)]$$

برای بدست آوردن برآورد ماکزیمم درستنمایی دو روش مجزا وجود دارد.

۱. ماکزیمم کردن مستقیم: امتحان کردن $L(\theta)$ ، بطور مستقیم، بطوریکه مقداری از θ را بیابیم که تابع $L(\theta)$ را برای نمونه مفروض $x_۱, x_۲, x_۳, ..., x_n$ ماکزیمم کند. این روش برای مواقعی که دامنه داده‌ها به پارامتر وابسته است مفید می باشد.

۲. معادلات درستنایی: اگر دامنه داده‌ها به پارامتر وابسته نباشد، آنگاه فضای پارامتر Θ ، یک فضای باز نامیده می‌شود، و آنگاه تابع درستنمایی نسبت به پارامترها، روی فضای پارامتر Θ مشتق پذیر می باشد و برآوردگر ماکزیمم درستنمایی $\hat{\theta}$ در معادلات زیر صدق می کند.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} Ln(L(\theta)) = ۰; k = ۱, ۲, ..., p$$

این معادلات، معادلات درستنمایی نامیده می شوند.

برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی دارای خواص مجانبی خاص می‌باشند. ازاین خواص می توانیم برای مشخص نمودن توزیع برآوردگرها استفاده کرد. فرض کنید $\hat{\beta}$ براوردگر ماکزیمم درستنمایی پارامتر β باشد، می توان نشان داد که تحت شرایط خاصی

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{۱}{I(\beta)})$$

نکته:در حالت کلی می توان گفت هر تابعی از $\hat{\beta}$ در توزیع به $N(\beta, \frac{۱}{I(\beta)})$ میل می‌کند. که در آن

$$I(\beta) = E(\frac{d}{d\beta} logL(\beta))^۲ = E(\frac{d}{d\beta} l(\beta))^۲$$

تابع $I(\beta)$ به اطلاع فیشر معروف است، که درقسمت پیوست همین پایان به‌طور کامل بیان شده است.

اصل درستنمایی

فرض کنید $L(\theta)$ ، تابع درستنمایی برای θ براساس بردار $\boldsymbol{X}$ و $L^*(\theta)$ تابع درستنمایی برای θ بر اساس بردار $\boldsymbol{X}^*$ باشند. در صورتی که $L(\theta) = kL^*(\theta)$ (برای k هایی که به θ وابسته نباشند)، آنگاه باید استنباط یکسانی برای پارامتر θ بر اساس دو بردار مشاهده شده، داشته باشیم.

در برآورد نقطه‌ای اصل درستنمایی ایجاب می‌کند که اگر $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{X}^*$ دو بردار از متتغیرها با توابع درستنمایی $L(\theta)$ و $L^*(\theta)$ ،و $L(\theta) = kL^*(\theta^*)$ (برای همه k ها)باشند. آنگاه دو برآورد نقطه‌ای درستنمایی ماکزیمم $\hat{\theta}$ و $\hat{\theta^*}$ باید با هم مساوی باشند.

قضیه ۱.۱۰.۱. قضیه سازگاری برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی: فرض کنید $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ، یک نمونه تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)$ باشند، و $L(\theta; \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$ تابع درستنمایی، $\hat{\theta}$ برآوردگر ماکزیمم درستنمایی برای θ باشند،اگر $\tau(\theta)$ تابعی پیوسته از θ باشد،در این صورت، برای هر $\epsilon > 0$ و هر $\theta \in \Theta$ داریم :

$$\lim_{n\mapsto\infty} P_\theta(\Big|\tau(\hat{\theta}) - \tau(\theta)\Big| \geq \epsilon) = 0$$

یعنی، $\tau(\hat{\theta})$ یک برآوردگر سازگار برای $\tau(\theta)$ است.

برهان. به پارسیان (۱۳۸۵) رجوع شود. □

اگر $\hat{\theta}$ برآورد کننده به روش ماکزیمم درستنمایی براي θ باشد و $n \mapsto \infty$ ، آنگاه واریانس $\hat{\theta}$ برابر حد پایین نامساوي کرامر – رائو خواهد شد.
نامساوی کرامر- رائو در فصل دوم به طور کامل بیان خواهد شد.

خاصیت پایایی برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی

بدون شک یک از مفیدترین خواص برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی، خاصیت پایایی می‌باشد. از این رو خاصیت پایایی یکی از پرکاربردترین مسائل در نگارش این پایان نامه است. خاصیت پایایی برآوردگرهای درسنمایی در حالت کلی در سال ۱۹۶۶ توسط زهنا اثبات شد.

فرض کنید توزیع مورد نظر ما دارای پارامتر θ باشد، و ما به برآورد ماکزیمم درستنمایی تابعی از θ مانند $\tau(\theta)$ ، نیاز داشته باشیم. خاصیت پایایی برآوردگر ماکزیمم درستنمایی بیان می کند که اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر ماکزیمم درستنمایی برای پارامتر θ باشد، آنگاه $\tau(\hat{\theta})$ برآوردگر ماکزیمم درستنمایی برای $\tau(\theta)$ است.

اگر نگاشت $\theta \mapsto \tau(\theta)$ یک به یک باشد (یعنی، برای هر مقدار θ فقط یک مقدار یکتای $\tau(\theta)$ وجود داشته باشد و برعکس) هیچ مشکلی در استفاده از این قضیه وجود ندارد. در این نمونه، به آسانی می‌توان نشان داد که هیچ اختلافی بین اینکه ما تابع درستنمایی را بر حسب تابعی از θ ماکزیمم کنیم یا بر حسب تابعی از $\tau(\theta)$ ماکزیمم کنیم وجود ندارد و در هر دو روش ما پاسخ یکسانی را بدست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که $\eta = \tau(\theta)$ ، سپس معکوس تابع $\tau^{-1}(\eta) = \theta$ بنابراین تابع درستنمایی بر حسب تابعی از η به شکل زیر است.

$$L^*(\eta : \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(\tau^{-1}(\eta)) = L(\tau^{-1}(\eta); \boldsymbol{X})$$

و

$$\sup_{\eta} L^*(\eta; \boldsymbol{X}) = \sup_{\eta} L(\tau^{-1}(\eta); \boldsymbol{X}) = \sup_{\theta} L(\theta; \boldsymbol{X})$$

بنابراین،تابع $L^*(\eta; \boldsymbol{X})$ به ازای $\eta = \tau(\theta) = \tau(\hat{\theta})$ ماکزیمم می‌شود. پس برآورد ماکزیمم درستنمایی برای $\tau(\theta)$ برابر $\tau(\hat{\theta})$ خواهد بود.

استفاده از خاصیت پایایی همیشه امکان پذیر نیست، گاهی اوقات ممکن است بسیاری از توابعی که مورد نیاز ما هستند یک به یک نباشند. مثلا برای برآورد $\theta^۲$ (مربع میانگین توزیع نرمال) نگاشت $\theta \mapsto \theta^۲$ یک به یک نیست،

اگر تابع $\tau(\theta)$ یک به یک نباشد، آنگاه به ازی یک مقدار معلوم η ممکن است که بیش از یک مقدار برای θ وجود داشته باشد بطوریکه $\tau(\theta) = \eta$ است .تابع درستنمایی L^* را به‌صورت زیر تعریف می کنیم.

$$L^*(\eta; \boldsymbol{X}) = \underset{[\theta:\tau(\theta)=\eta]}{Sup} L(\theta; \boldsymbol{X}) \qquad (۶.۱)$$

مقدار $\hat{\eta}$ که $L^*(\eta; x)$ را ماکزیمم می کند، برآوردگر ماکزیمم درستنمایی $\eta = \tau(\theta)$ میباشد، و از رابطه (۱) مشخص است که ماکزیمم L و L^* بر هم منطبق هستند.

۱۱.۱ برآورد بیزی

در حالت کلی استنباط بیزی دادای دو نوع برآورد است:۱- برآورد نقطه‌ای ۲ـبرآورد فاصله‌ای.

۱.۱۱.۱ برآورد نقطه‌ای

در برآورد بیزی می‌خواهیم بر مبنای مشاهداتمان از یک متغیر تصادفی، متغیر تصادفی دیگری را تخمین بزنیم. هدف از برآورد نقطه‌ای، یافتن مقداری برای مقدار نامعلوم تابعی، مانند g، تعریف شده بر روی فضای پارامتر در نقطه θ است. در تمام شاخه‌های مرتبط با برآورد نتقطه‌ای، یافتن یک برآوردگر مناسب منجر به معیاری برای برآورد نقطه‌ای شده است. اما می‌توان به عنوان دسته بندی روش ها و معیارهایی که منجر به یک براوردگر مناسب می‌شوند یک یا چند ملاک را به طور کلی در نظر گرفت. در این بخش مختصری از نحوه بدست آوردن یک براوردگر نقطه ای مناسب با شرح داده می‌شود. برای ورود به مسئله یافتن یک برآوردگر مناسب ابتدا لازم است تعریف دقیقی از برآوردگر ارائه شود.

تعریف ۱.۱۱.۱. فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از متغیرها با خانواده توابع چگالی احتمال $\{f(\theta; x), \theta \in \Theta\}$باشد، در برآورد نقطه‌ای، هدف پیدا کردن آماره $\sigma(X_۱, X_۲, ..., X_n)$ به گونه‌ای است که اگر $x_۱, x_۲, ..., x_n$ مقادیر مشاهده شده، نمونه $X_۱, X_۲, ..., X_n$ باشد. آنگاه مقدار آماره $\sigma(x_۱, x_۲, ..., x_n)$یک برآورد نقطه‌ای خوب باشد. بنابراین برآوردگر پارامتر θ،برپایه نمونه تصادفی $X_۱, X_۲, ..., X_n$عبارت از آماره $\sigma(X_۱, X_۲, ..., X_n)$ است که مقدار برآورد شده θ را براساس مقادیر ممکن $X_۱, X_۲, ..., X_n$ مشخص می‌کند. چون پارامتر θ متعلق به مجومه Θ است، انتظار داریم که مقادیر برآوردگر یعنی $\sigma(x)$ نیز متعلق به Θ باشد.یعنی

$$\forall \theta \in \Theta \quad P_\theta(\sigma(X_۱, X_۲, ..., X_n) \in \Theta) = ۱$$

در حالت کلی‌تر، تابع حقیقی مقدار $\delta(X)$، را برآوردگر تابعی از پارامترها مانند $g(\theta)$،می‌نامند. هرچند همواره انتظار می‌رود مقدار $\delta(X)$ به مقدار نامعلوم $g(\theta)$ نزدیک باشد. اما نیاز به چنین شرطی

در تعریف برآوردگر نیست. بدین ترتیب می توان انتظار داشت مقدار $\delta(X)$ در محدوده مقادیر ممکن $g(\theta)$ قرار اشته باشد.

اصولا می‌توان میزان نزدیکی$\delta(X)$ به مقدار $g(\theta)$ ، در مقدار d را، با تابع زیان $L(\theta,d)$ در نظر گرفت. به طوری که برای هر θ و d داریم: $L(\theta,g(\theta))=0$ و $L(\theta,d)\geq 0$.
بنابراین نزدیکی یا دوری برآوردگر $delta(X)$ با تابع زیان اندازه گیری می شود. برای غلبه بر تصادفی بودن Δ از متوسط زیان می توان استفاده نمود که تابع ریسک R نامیده می شود.

$$R(\theta,\delta)=E_\theta(L[\theta,\delta(X)])$$

حال می توان برآوردگری را جستجو نمود که تابع ریسک را به ازای هر θ مینیمم کند. واضح است که بهترین برآوردگر به طور یکنواخت با کمترین ریسک وجود ندارد. برای ساده‌تر کردن مسئله می‌توان یک کلاس از بروآردگرها با شرط نارایبی یا پایایی در نظر گرفت.

فارغ از در نظرگرفتن چنین محدودیت هایی همواره بدنبال برآوردگری هستیم که تابع ریسک $R(\theta,\delta)$ را مینیمم کند. بنابراین مسئله به صورت یافتن براوردگر δ که منجر به کمترین مقدار تابع زیان وزن دار شده می‌شود.

$$r(\theta,\delta)=\int R(\theta,\delta)d\Lambda(\theta);\qquad \int d\Lambda(\theta)=1$$

برآوردگری که دارای چنین شرطی باشد برآوردگر بیز نامیده می‌شود. یافتن برآوردگر بیز را می‌توان به عنوان یک ابزار ریاضی که منجر به کمترین متوسط ریسک می‌شود یا یک روش برای بکارگیری تجربیات گذشته و اعمال یک گرایش خاص ذهنی خاص در حالتی که هیچ گونه اطلاعاتی وجود ندارد در نظر گرفت. یافتن برآوردگر بیز به سادگی امکان پذیر است. بداین منظور ابتدا فرض کنید قبل از جمع آوری هرگونه مشاهده‌ای پارامتر نامعلوم θ دارای توزیع احتمالی به شکل Λ است و برآورگر بیز $g(\theta)$ مقدار d است به طوری که منجر به مینیمم شدن مقدار $E(L(\Theta,d))$ می‌شود. پس از جمع آوری مشاهدات توزیع احتمال Λ با توزیع پسین جایگزین می شود. براوردگر بیز هر تابع به صورت $\delta(X)$ است به طوریکه منجر به مینیمم شدن $E(L(\Theta,\delta(x))|x)$ می شود. نهایتا تعریف برآوردگربیز را در قالب قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱۱.۱. فرض کنید پارامتر θ به عنوان یک متغیر تصادفی دارای تابع توزیع Λ است و $\Theta=$ و X دارای توزیع احتمال $f_\theta(X)$ باشد. همچنین فرض کنید حداقل یک براوردگر با ریسک متناهی وجود دارد اگر به ازای تمام مقادیر X برآوردگر $\delta_\Lambda(X)$ وجود داشته باشد که دارای کمترین ریسک $E(L(\theta,\delta(x))|x)$ است در این صورت $\delta_\Lambda(X)$ یک برآوردگر بیز است.

برهان. رجوع شود به کتاب آمار ریاضی پارسیان. □

لم ۳.۱۱.۱. فرض کنید فرضیات قضیه ۲.۱۱.۱ برقرار است آنگاه
اگر $L(\theta,d)=(d-g(\theta))^2$ آنگاه $\delta_\Lambda(X)=E(g(\theta)|x)$
اگر $L(\theta,d)=w(\theta)(d-g(\theta))^2$ آنگاه $\delta_\Lambda(X)=\frac{\int w(\theta)g(\theta)d\Lambda(\theta|x)}{\int w(\theta)d\Lambda(\theta|x)}$
اگر $L(\theta,d)=|d-g(\theta)|$ آنگاه $\delta_\Lambda(X)$ برابر است با میانه توزیع پسین

اگر $L(\theta,d)=\begin{cases}۰; & |d-g(\theta)|<c\\ ۱; & |d-g(\theta)|\geq c\end{cases}$ آنگاه $\delta_\Lambda(X)$ نقطه وسط بازه I به طول $۲c$ است به طوری که منجر به مینیمم شدن مقدار $P(\theta\in I|x)$ می شود.

برهان. رجوع شود به کتاب آمار ریاضی پارسیان. □

۲.۱۱.۱ برآورد فاصله‌ای

برآوردفاصله‌ای یا فاصله‌اطمینان برای یک پارامتر، حدودی است که با استفاده از آماره مورد نظر و با سطح اطمینان بالایی پارامتر جامعه را در بر می‌گیرد. ایجاد یک فاصله اطمینان یا برآورد فاصله‌ای برای یک پارامتر به عوامل زیر وابسته است:
۱-سطح اطمینانی که محقق را مجاب کند که فاصله ایجاد شده، پارامتر را دربر می‌گیرد.
۲-توزیع نمونه‌ای آماره که به کمک آن ضریب اعتماد تعیین می‌شود.
۳-واراینس آماره یا همان خطای معیار نمونه‌گیری(SE)
۴-حجم نمونه‌ای که برای برآورد انتخاب می‌شود.(n)

۱۲.۱ قابلیت‌اطمینان ودیدگاه بیزی

مدت زمانی که یک قطعه از یک سیستم کار می‌کند و یا پاسخ به این سوال که آیا قطعه کمتر از طول عمر استاندارد یا بیشتر از طول عمر استاندارد کار می‌کند، در قابلیت‌اطمینان مورد بحث قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر در این مبحث، قابل اطمینان بودن قطعه مورد بررسی قرار می‌گیرد. با این تعریف از قابلیت‌اطمینان، کاملا واضح است که پیشامدهای مورد بحث دربرآورد قابلیت‌اطمینان طول عمر یا زمان شکست و پیشامدهای شکست و پیروزی است. تحلیل طول عمر یا زمان شکست شامل بررسی مدل‌های مربوط به متغییرهای تصادفی با فضای نمونه‌ای مثبت می‌شود. تحلیل طول عمر به دلیل ارتباط با پدیده‌های تصادفی نیاز به انتخاب یک دیدگاه استنباطی (درستنمایی، بیزی) برای تعیین دقیق زمان شکست دارد. تاکنون دیدگاه بیزی به شکل بسیار وسیعی در قابلیت‌اطمینان مورد استفاده قرار گرفته است. علت اصلی که محققان برای استفاده از دیدگاه بیز ارائه نموده اند، آن است که اغلب در مسائل قابلیت‌اطمینان اطلاعات اضافی و مرتبطی وجود دارند که می توان از آن ها در استنباط آماری استفاده نمود. دیدگاه درستنمایی بر پایه این اصل شکل گرفته است که تمام اطلاعات مجموعه داده ها در تابع چگالی داده های مشاهده شده قرار دارد، اما دیدگاه بیز امکان اضافه شدن اطلاعاتی خارج از مجموعه داده ها را می دهد و در مسائل قابلیت‌اطمینان اغلب تجربیات قبلی(بنا به وسعت داده‌های مربوط به کیفیت) و یا علوم فیزیک و شیمی اطلاعات اضافی را در اختیار پژوهشگر قرار می‌دهد. به طور کلی، این قابلیت دیدگاه بیز و کلیت مسائل قابل اعتماد منجر به استفاده روز افزون از استنباط بیزی در مسائل قابلیت‌اطمینان شده است.

فصل ۲

برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری در مدل‌های فشار-مقاومت

۱.۲ مقدمه

در این فصل، قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری را در صورتی که مولفه‌های فشار-مقاومت دارای طول عمری، تحت توزیع های مختلف آماری (نمایی دو پارامتری، گاما،پاراتو،وایبل)باشند، به دو روش ماکزیمم درستنمایی و بیزی برآورد می‌کنیم. نهایتا پس از حصول برآوردگر قابلیت‌اطمینان(به روش درستنمایی ماکزیمم)، توزیع برآوردگرها را به‌دست می‌آوریم.خواهیم دید که تحت بعضی از توزیع‌ها، برآوردگر قابلیت‌اطمینان دارای توزیع مشخصی است، و در مواردی به دلیل پیچیدگی برآوردگر و نداشتن توزیع معین نشان می‌دهیم برآوردگر دارای توزیع مجانبی است. توزیع مجانبی به‌طور کامل در بخش پیوست پایان نامه به‌طور کامل بیان شده است.

۲.۲ مدل فشار- مقاومت نمایی دو پارامتری

در این بخش، برآورد قابلیت‌اطمینان یک سیستم سری k مولفه‌ای، $X_1, X_2, ..., X_k$ که با فشار مشترک تصادفی X_{k+1} روبرو است ارائه می‌شود. فرض کنید $X_i; (i = 1, 2, \cdots, k+1)$ها دارای توزیع مستقل نمایی دو پارامتری باپارمترهای μ و λ هستند. بدین ترتیب تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی مدل به صورت زیر بیان می‌شود

$$f_i(x_i) = \frac{1}{\lambda_i} e^{-\frac{x_i - \mu_i}{\lambda_i}}, \qquad x_i > \mu_i > 0, \lambda_i > 0$$

۱.۲.۲ قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری

اولین گام در محاسبه قابلیت‌اطمینان، حصول تابع توزیع بقا یا تابع طول عمر مولفه‌ها است. با توجه به فرضیات قسمت قبل، و بنا به تعریف قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری در فصل اول، فرض می‌کنیم

$Z = \min(X_۱, ..., X_k)$، آن‌گاه تابع بقای سیستم به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \bar{H}(z) &= \prod_{j=۱}^{r} P[X_{i_j} > z] \qquad \mu_{i_r<z<\mu_{i_{r+۱}}}, \qquad r = ۱, ۲, ۳, ..., k \\ &= e^{-\sum_{j=۱}^{r} \frac{(z-\mu_{i_j})}{\lambda_{i_j}}} \end{aligned}$$

به طوری که $\mu_{i_{k+۱}=\infty}$ و $i_۱ \neq .... \neq i_k = ۱, ۲, \cdots, k$.
برای درک بهتر موضوع اکنون تابع بقا را در صورتی که سیستم تنهاشامل دو مولفه باشد، محاسبه می‌کنیم. بنابر فرضیات فوق $Z > Min(\mu_۱, \mu_۲)$، لذا داریم:

$$\bar{H}(z) = \begin{cases} e^{-\frac{(z-\mu_۱)}{\lambda_۱}} & \mu_۱ < z < \mu_۲ \\ e^{-\frac{(z-\mu_۱)}{\lambda_۱} - \frac{z-\mu_۲)}{\lambda_۲}} & \mu_۲ < z < \infty \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال تابع بقا برابر است با

$$\bar{h}(z) = \begin{cases} \frac{۱}{\lambda_۱} e^{-\frac{(z-\mu_۱)}{\lambda_۱}} & \mu_۱ < z < \mu_۲ \\ (\frac{۱}{\lambda_۱} + \frac{۱}{\lambda_۲}) e^{-\frac{(z-\mu_۱)}{\lambda_۱} - \frac{z-\mu_۲)}{\lambda_۲}} & \mu_۲ < z < \infty \end{cases}$$

تابع چگالی فوق تحت شرط $\mu_۱ < \mu_۲$ به‌دست آمده، اگر فرض کنیم که $\mu_۲ < \mu_۱$ باشد، آن‌گاه تابع چگالی تابع بقا با تابع چگالی فوق متفاوت خواهد بود. بنابراین نتیجه می‌گیریم به ازای k مولفه سیستم،تعداد$k!$، تابع چگالی احتمال برای تابع بقا وجود دارد. درنتیجه قابلیت‌اطمینان سیستم بنابر ارتباط بین پارامترها متفاوت خواهد شد. با توجه به تابع بقای به‌دست آمده از رابطه۱.۲ قابلیت‌اطمینان سیستم، به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} R &= P[X_{k+۱} < Z] = \int_{\mu_{k+۱}}^{\infty} \bar{H}(x) dF_{k+۱}(x) \qquad min\{\mu_۱, \cdots, \mu_k\} \\ &= \int_{\mu_{k+۱}}^{\infty} e^{-\sum_{j=۱}^{r} \frac{(x-\mu_{i_j})}{\lambda_{i_j}}} \frac{۱}{\lambda_{k+۱}} e^{-(\frac{x-\mu_{k+۱}}{\lambda_{k+۱}})} dx \\ &= \int_{\mu_{k+۱}}^{\infty} e^{-\sum_{j=۱}^{r} \frac{(x-\mu_{k+۱}+\mu_{k+۱}-\mu_{i_j})}{\lambda_{i_j}}} \frac{۱}{\lambda_{k+۱}} e^{-(\frac{x-\mu_{k+۱}}{\lambda_{k+۱}})} dx \\ &= e^{-\sum_{j=۱}^{r} \frac{(\mu_{k+۱}-\mu_{i_j})}{\lambda_{i_j}}} \frac{۱}{\lambda_{k+۱}} \int_{\mu_{k+۱}}^{\infty} e^{-\sum_{j=۱}^{r} \frac{(x-\mu_{k+۱})}{\lambda_{i_j}}} e^{-(\frac{x-\mu_{k+۱}}{\lambda_{k+۱}})} dx \\ &= e^{-\sum_{j=۱}^{r} \frac{(\mu_{k+۱}-\mu_{i_j})}{\lambda_{i_j}}} \frac{۱}{\lambda_{k+۱}} \int_{\mu_{k+۱}}^{\infty} e^{-(x-\mu_{k+۱})\sum_{j=۱}^{r} \frac{۱}{\lambda_{i_j}}} e^{-(x-\mu_{k+۱})\frac{۱}{\lambda_{k+۱}}} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{۱}{\lambda_{k+۱}} e^{-\sum_{j=۱}^{r} \frac{(\mu_{k+۱}-\mu_{i_j})}{\lambda_{i_j}}} \left(\frac{۱}{\sum_{j=۱}^{r} \frac{۱}{\lambda_{i_j}} + \frac{۱}{\lambda_{k+۱}}}\right), \qquad \mu_{i_r} \leq \mu_{k+۱} \leq \mu_{i_{r+۱}}. \quad (۱.۲)$$

۲.۲.۲ برآورد ماکزیمم درستنمایی

فرض کنید سیستم دارای k مولفه است. به‌طوریکه $X_{۱_j}, \cdots, X_{k_j}$ مولفه‌های سیستم و $X_{(k+۱)_j}$, فشار وارده در jامین $(j = ۱, \cdots, n)$ نمونه است. همچنین فرض کنید $(\lambda_۱, \cdots, \lambda_{k+۱}, \mu_۱, \cdots, \mu_{k+۱})$ بردار پارامترها $\boldsymbol{X} = (x_{۱۱}, \cdots, x_{۱n}, \cdots, x_{(k+۱)۱}, \cdots, x_{(k+۱)n})$ بردار نمونه باشد، به‌طوریکه دارای $(k+۱)n$ بعد می‌باشد. حالت اول:فرض می‌کنیم$\mu_{=} \neq \mu_{k+۱}, \cdots, \mu_{/}$، بنابراین تابع درستنمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L(\lambda_۱, \cdots, \lambda_{k+۱}, \mu_۱, \cdots, \mu_{k+۱}; \boldsymbol{X}) = \prod_{i=۱}^{k+۱} \prod_{j=۱}^{n} \frac{۱}{\lambda_i} e^{-\frac{(x_{i_j}-\mu_i)}{\lambda_i}} I(x_{i_{(۱)}} > \mu_i)$$

$$= e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱} \sum_{j=۱}^{n} \frac{x_{i_j}-\mu_i}{\lambda_i}} \left(\prod_{i=۱}^{k+۱} \frac{۱}{(\lambda_i)^n}\right) \prod_{i=۱}^{k+۱} I(x_{i_{(۱)}} > \mu_i)$$

با لگاریتم گرفتن از طرفین تساوی داریم

$$l(\lambda_۱, \cdots, \lambda_{k+۱}, \mu_۱, \cdots, \mu_{k+۱}) = \sum_{i=۱}^{k+۱} \sum_{j=۱}^{n} \frac{X_{i_j} - \mu_i}{\lambda_i} - \sum_{i=۱}^{k+۱} nln(\lambda_i) I(x_{i_{(۱)}} > \mu_i)$$

در روابط فوق منظور از$x_{i_{(۱)}}$مینیمم مولفه‌ها است.
در نهایت با مشتق‌گیری نسبت به پارامترها، معادلات درستنمایی به صورت زیر است

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} l(\lambda_۱, \cdots, \lambda_{k+۱}, \mu_۱, \cdots, \mu_{k+۱}) = -\sum_{j=۱}^{n} \frac{x_{i_j} - \mu_i}{\lambda_i^۲} + n\frac{۱}{\lambda_i} = ۰,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} l(\lambda_۱, \cdots \lambda_{k+۱}, \mu_۱, \cdots, \mu_{k+۱}) = -nI(x_{i_{(۱)}} > \mu_i),$$

بنابراین با حل معادلات درستنمایی، برآوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترها عبارتند از:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\sum_{j=۱}^{n} (X_{i_j} - X_{i_{(۱)}})}{n},$$

$$\hat{\mu}_i = X_{i_{(۱)}}; i = ۱, ۲, ۳, \cdots, k+۱.$$

حال با استفاده از خاصیت پایایی برآورد ماکزیمم درستنمایی،که در فصل اول بیان شد. می‌توان با قرار دادن برآوردهای فوق در۱.۲، برآورد ماکزیمم درستنمایی قابلیت‌اطمینان را به‌دست می‌آوریم.

۳.۲.۲ برآورد بیزی

بدلیل نیاز به برآوردگر بیزی برای شبیه‌سازی در فصل چهارم، از بیان آن در این قسمت خود داری کرده، و برآوردگر بیزی را در فصل چهارم کامل بیان می‌کنیم.

۴.۲.۲ توزیع برآوردگر

قبلا از اینکه وارد مبحث توزیع برآوردگرها شویم، ابتدا قضیه زیر که مهمترین و کاربردی‌ترین قضیه در این فصل می‌باشد را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. فرض می‌کنیم $\{T_n\}$ دنباله‌ای از برآوردگرها با پارامتر θ باشد، که با توجه به تعریف توزیع مجانبی دارای توزیع زیر است

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \longrightarrow X \sim N[۰, \sigma^۲(\theta)]^۲$$

آنگاه برای هر تابع مشتق پذیردر θ مانند g داریم:

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\theta)) \longrightarrow X \sim N(۰, (g'(\theta)\sigma(\theta))^۲) \quad n = ۱, ۲, ۳, \cdots ; \qquad g'(\theta) \neq ۰$$

برهان. کتاب رائو(۱۹۷۳) صفحه ۴۲۶ را ببینید. □

پس از به دست آوردن برآوردگر درستنمایی قابلیت‌اطمینان، اکنون می‌خواهیم توزیع برآوردگر را مشخص کنیم.
جالت اول: فرض می‌کنیم $\mu_۱ \neq \mu_۲ \neq ... \neq \mu_{k+۱}$ از طرفی بنابر خاصیت پایایی داریم:

$$\hat{R} = R(\hat{\theta})$$

به‌طوریکه

$$\hat{\theta} = (\hat{\lambda}_۱, ..., \hat{\lambda}_{k+۱}, \hat{\mu}_۱, ..., \hat{\mu}_{k+۱})$$

قبلا نشان دادیم:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\sum_{j=۱}^{n}(X_{i_j} - X_{i_{(۱)}})}{n} \qquad \hat{\mu}_i = X_{i_{(۱)}}; i = ۱, ۲, ۳, \cdots, k+۱.$$

برای به‌دست آوردن توزیع برآوردگر قابلیت‌اطمینان گام اول مشخص نمودن توزیع برآورگرهای پارامترها است.لذا ابتدا باید تابع توزیع $\hat{\lambda}_i$،$\hat{\mu}_i$ را مشخص کنیم. بنابر آماره‌های ترتیبی $X_{i(۱)}$ اولین آماره است، اگر $U_i = X_{i(۱)}$در نظر بگیریم، با توجه به تابع چگالی احتمال آماره‌های ترتیبی داریم

$$f_{U_i}(u_i) = \frac{n}{\lambda_i} e^{-\frac{n(u_i - \mu_i)}{\lambda_i}} \quad , \quad i = ۱, ۲, ..., k+۱.$$

با توجه به تابع چگالی احتمال حاصله نتیجه می‌گیریم که $X_{i(۱)}$ دارای توزیع نمایی دو پارامتری با پارامترهای μ و $\frac{\lambda}{n}$ است، از طرفی بنابر روابط بین توزیع‌ها، می‌دانیم $\hat{\lambda_i} \sim \frac{\lambda_i}{۲n}\chi^۲_{۲n-۲}$، بنابراین

واریانس آن‌ها برابر است با

$$V(\hat{\mu}_i) = \frac{\lambda_i^۲}{n^۲}, \qquad V(\hat{\lambda}_i) = \frac{(n-۱)\lambda_i^۲}{n^۲}, \qquad i = ۱, \cdots, k+۱$$

با توجه به تعریف سازگاری و توزیع مجانبی برآوردگرها، که در قسمت پیوست همین پایان‌نامه بیان شده، $\hat{\lambda}_i$و $\hat{\mu}_i$ها به ترتیب دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین‌های λ_i،μ_i،و واریانس‌های به دست آمده در بالا می‌باشند. لذا بنابر قضیه۱.۲.۲ قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها دارای توابع توزیع مجانبی نرمال سازگار [۱] به‌صورت زیر می‌باشد

$$\hat{R} \sim AN(R, B'\Lambda B)$$

$$B' = (\frac{\partial R}{\partial \lambda_۱}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial \lambda_{k+۱}}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial \mu_۱}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial \mu_{k+۱}})$$

$$\Lambda = \frac{۱}{n^۲}\text{diag}((n-۱)\lambda_۱^۲, \cdots (n-۱)\lambda_{k+۱}^۲, \lambda_۱^۲, \cdots, \lambda_{k+۱}^۲)$$

حالت دوم. فرض کنید$\mu_۱ = \cdots = \mu_{k+۱} = \mu$، در این صورت:

$$\hat{R} = R(\hat{\lambda}_۱, \cdots, \hat{\lambda}_{k+۱})$$

بنابر قسمت قبل

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\sum_{j=۱}^{n}(X_{ij} - \hat{\mu})}{n}, \qquad i = ۱, ۲, \cdots, k+۱$$

ازآن‌جایی که $\hat{\mu} = \min X_{ij}$، داریم:

$$V(\hat{\lambda}_i) = \frac{\lambda_i^۲}{n} \qquad i = ۱, ۲, \cdots, k+۱$$

اکنون با توجه به این‌که $\hat{\mu}$ برآوردگری سازگار است و $\hat{\lambda}_i$ ها دارای توزیع مجانبی با میانگین λ_i و واریانس مشخص هستند، بنابر قضیه ۱.۲.۲ توزیع برآوردگر قابلیت‌اطمینان به‌صورت زیر است.

$$\hat{R} \sim AN(R, B'\Lambda^* B)$$

$$B' = (\frac{\partial R}{\partial \lambda_۱}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial \lambda_{k+۱}})$$

$$\Lambda^* = \frac{۱}{n} diag(\lambda_۱^۲, \cdots, \lambda_{k+۱}^۲)$$

۳.۲ مدل فشار- مقاومت توزیع گاما

همانند بخش قبل فرض‌کنید در یک سیستم سری، k مولفه‌ای، $X_۱, X_۲, ..., X_k$، مولفه‌ها همگی تحت فشار یکسان تصادفی $X_{k+۱}$ هستند. با توجه به تابع توزیع طول عمر مولفه‌ها، قابلیت‌اطمینان را برآورد می‌کنیم.

[۱] Consistent Asymptotically Normal

۱.۳.۲ قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری

لم ۱.۳.۲. فرض کنید $X_i; (i = ۱, ۲, \cdots, k+۱)$ها دارای توزیع مستقل گاما باپارمترهای α و μ هستند. بدین ترتیب تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_i(x_i) = \mu_i^{\alpha_i} x_i^{\alpha_i - ۱} e^{(-\mu_i x_i)} / \Gamma(\alpha_i) \qquad , x_i > ۰, \qquad \mu_i > ۰, i = ۱, ۲, \cdots, k+۱.$$

که در آن α_iثابت‌های صحیح مثبت و معلومی هستند، و اگر $\alpha_i = ۱$ باشد، آن‌گاه توزیع طول عمر مولفه‌های فشار و مقاومت، به توزیع نمایی تبدیل خواهد شد. بنابراین، قابلیت‌اطمینان سیستم به صورت زیربه‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R &= P[X_{k+۱} < \min(X_۱, X_۲, \cdots, X_k)] \\ &= \sum_{i_۱=۰}^{\alpha_۱ - ۱} \cdots \sum_{i_k=۰}^{\alpha_k - ۱} \int_۰^\infty \frac{(\mu_۱^{i_۱} \cdots \mu_k^{i_k}) \exp(\sum_{j=۱}^{k+۱} -\mu_j x_{k+۱}) \mu_i^{\alpha_i}}{\Gamma(i_۱ + ۱) \cdots \pi(i_k + ۱) \Gamma(\alpha_i)} dx_{k+۱}. \end{aligned}$$

برهان. از آنجایی که فرض شد α_i ها مقادیر ثابت صحیح مثبتی هستند، بنابراین توزیع گاما به توزیع ارلانگ تبدیل می‌شود و می‌توان، تابع بقای آن را به فرمی که در ادامه می‌آید نوشت

$$P[X_j > z] = \sum_{i_j=۰}^{\alpha_j - ۱} \mu_j^{i_j} e^{(-\mu_j z) z^{i_j}} / \Gamma(i_j + ۱), \qquad j = ۱, ۲, \cdots, k+۱ \qquad (۲.۲)$$

بنابراین اگر فرض کنیم $Z = \min(X_۱, \cdots, X_k)$، تابع بقای Z به صورت

$$\begin{aligned} \bar{H}(z) &= P[Z > z] \\ &= P[X_۱ > z, X_۲ > z, \cdots, X_k > z] \\ &= (\sum_{i_۱=۰}^{\alpha_۱ - ۱} \frac{\mu_۱^{i_۱} \exp(-\mu_۱ z) z^{i_۱}}{\Gamma(i_۱ + ۱)}) \cdots (\sum_{i_k=۰}^{\alpha_k - ۱} \frac{\mu_k^{i_k} \exp(-\mu_k z) z^{i_k}}{\Gamma(i_k + ۱)}), \end{aligned}$$

خواهد بود. حال قابلیت‌اطمینان سیستم سری k مولفه‌ای عبارتست از

$$\begin{aligned} R &= P[X_{k+۱} < \min(X_۱, X_۲, \cdots, X_k)] \\ &= \int_۰^\infty \bar{H}(x_{k+۱}) dF_{k+۱}(x_{k+۱}) \\ &= \int_۰^\infty (\sum_{i_۱=۰}^{\alpha_۱ - ۱} \frac{\mu_۱^{i_۱} \exp(-\mu_۱ z) z^{i_۱}}{\Gamma(i_۱ + ۱)}) \\ &\quad \cdots (\sum_{i_k=۰}^{\alpha_k - ۱} \frac{\mu_k^{i_k} \exp(-\mu_k z) z^{i_k}}{\Gamma(i_k + ۱)}) \mu_i^{\alpha_i} x_{k+۱}^{\alpha_i - ۱} \exp(-\mu_i x_{k+۱}) / \Gamma(\alpha_i) dx_{k+۱}. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه حدود انتگرال و حدود مجموع به هم وابسته نیستند، می‌توانیم جای مجموع و انتگرال

را عوض کنیم

$$R = \sum_{i_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{\alpha_k-1} \int_0^{\infty} \frac{(\mu_1^{i_1} \cdots \mu_k^{i_k}) \exp(\sum_{j=1}^{k+1} -\mu_j x_{k+1}) \mu_i^{\alpha_i}}{\Gamma(i_1+1)\cdots\Gamma(i_k+1)\Gamma(\alpha_i)} dx_{k+1} \quad (۳.۲)$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{\alpha_k-1} \left[\frac{\mu_1^{i_1} \cdots \mu_k^{i_k} \mu_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}{(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k+\mu_{k+1})^{i_1+i_2+\cdots+i_k+\alpha_{k+1}}} \right] \quad (۴.۲)$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(i_1+i_2+\cdots+i_k+\alpha_{k+1})}{\Gamma(i_1+1)\cdots\Gamma(i_k+1)\Gamma(\alpha_{k+1})} \right]. \quad (۵.۲)$$

□

۲.۳.۲ برآورد ماکزیمم درستنمایی

همانند قسمت قبل با توجه به فرضیات بخش ۱.۳.۲ ابتدا برآورد درستنمایی پارامترهای توزیع را، به‌دست می‌آوریم

$$L = \left[\prod_{i=1}^{k+1} {\mu_i}^{n\alpha_i} \left(\prod_{i=1}^{n} {x_{ij}}^{\alpha_i-1} \right) \right] exp\{-\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\} / \left[\prod_{i=1}^{k+1} (\Gamma(\alpha_i))^n \right]$$

با لگاریتم گرفتن از تابع درستنمایی فوق، و مشتق گرفتم از تابع لگاریتمی داریم:

$$n\alpha_i/\mu_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, ., k+1$$

سپس با حل معادله درستنمایی فوق برآورگر درستنمایی μ_iها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\hat{\mu}_i = \frac{n\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n} x_{i_j}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, k+1.$$

اکنون بنابر خاصیت پایایی، با قرار دادن برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی $\hat{\mu}_i$ در رابطه (۳.۲)، برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم به‌دست می آید.

۳.۳.۲ برآورد بیزی

با در نظر گرفتن فرضیات بخش ۱.۳.۲، پارامتر α_i معلوم و پارامترهای μ_iدارای توزیع پیشین زیر

$$\pi(\mu_i) = \theta exp(-\mu_i\theta);\ i = 1, 2, \cdots, k+1,$$

می‌باشند. به‌طوری که θ معلوم باشد. ابتدا توزیع پسین را به دست می‌آوریم

$$\pi(\mu_i|\mathbf{X}) \propto \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} x_j^{\alpha_i-1} \exp(-\mu_i \sum_{j=1}^{n} x_j) \theta \exp(-\mu_i\theta)$$

$$\propto \mu_i^{n\alpha_i} \exp(-\mu_i(\sum_{j=1}^{n} x_j + \theta)).$$

بنابراین

$$\mu_i|\mathbf{X} \sim \Gamma(n\alpha_i + ۱, \sum_{j=۱}^{n} x_j + \theta),\ i = ۱, ۲, \cdots, k+۱.$$

پس از مشخص کردن توزیع پسین پارامتر اکنون برآورد بیز قابلیت اطمینان را، به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$E(R|\mathbf{X}) = \int_{۰}^{\infty} \cdots \int_{۰}^{\infty} \sum_{i_۱=۰}^{\alpha_۱-۱} \cdots \sum_{i_k=۰}^{\alpha_k-۱}$$
$$\left[\frac{(n\alpha_۱/\sum_{j=۱}^{n} x_{۱_j})^{i_۱} \cdots (n\alpha_k/\sum_{j=۱}^{n} x_{k_j})^{i_k} (n\alpha_{k+۱}/\sum_{j=۱}^{n} x_{k+۱_j})^{\alpha_{k+۱}}}{((n\alpha_۱/\sum_{j=۱}^{n} x_{۱_j}) + (n\alpha_۲/\sum_{j=۱}^{n} x_{۲_j}) + \cdots + (n\alpha_{k+۱}/\sum_{j=۱}^{n} x_{k+۱_j}))^{i_۱+i_۲+\cdots+i_k+\alpha_{k+۱}}}\right]$$
$$\times \left[\frac{\Gamma(i_۱ + i_۲ + \cdots + i_k + \alpha_{k+۱})}{\Gamma(i_۱+۱)\cdots\Gamma(i_k+۱)\Gamma(\alpha_{k+۱})}\right] \pi(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{X}) d\mu_۱ \cdots d\mu_{k+۱}$$

به دلیل وجود انتگرال‌های چندگانه و پیچیده برای برآورد قابلیت‌اطمینان از روش‌های نمونه‌گیری MCMC استفاده می‌کنیم.از آنجایی که تابع داخل انتگرال مشخص است و می توان به راحتی از آن تولید نمونه کرد،از روش نمونه‌گیری گیبز برای محاسبه انتگرال فوق استفاده می‌کنیم.

۴.۳.۲ توزیع برآوردگر

برای به‌دست آوردن توزیع برآوردگر قابلیت‌اطمینان ابتدا براساس تعریف توزیع مجانبی ثابت می‌کنیم که $\hat{\mu}_i$ها دارای توزیع مجانبی نرمال سازگار (CAN) هستند.
ثابت کردیم:

$$\hat{\mu}_i = \frac{n\alpha_i}{\sum_{j=۱}^{n} x_{i_j}}, \qquad i = ۱, ۲, \cdots, k+۱.$$

از آنجایی که برآوردگرهای پارامترها در این قسمت مانند حالت نمایی دو پارامتری دارای تابع توزیع مشخصی نمی‌باشند، ابتدا با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر که در قسمت پیوست پایان نامه بیان کردیم، واریانس برآوردگرها را مشخص سپس توزیع مجانبی آن‌ها را به‌دست می‌آوریم.لذا با توجه به تعریف ماتریس اطلاع فیشر داریم:

$$nI = n((I_{ij})); \qquad i = ۱, ۲, \cdots, k+۱$$
$$I_{ij} = \frac{\alpha_i}{\mu_i^۲}$$

لذا

$$Var(\hat{\mu}_i) = \frac{\mu_i^۲}{n\alpha_i}\ , \quad i = ۱, ۲, \cdots, k+۱$$
$$Cov(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = ۰$$

اکنون با مشخص شدن واریانس $\hat{\mu}_i$ها، از آنجایی که این برآودگر،برآوردگری سازگار است و براساس تعریف توزیع مجانبی نرمال سازگار می‌توان گفت:

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}-\mu)\sim AN(۰,\Lambda_۱) \qquad \Lambda_۱ = diag\left(\frac{\mu_۱^۲}{\alpha_۱},\cdots,\frac{\mu_{k+۱}^۲}{\alpha_{k+۱}}\right)$$

با توجه به قضیه۱.۲.۲و اینکه $\hat{R}$تابعی از $\hat{\mu}$ ها می‌باشد، داریم

$$\hat{R}=g(\hat{\mu})\sim AN(g(\mu),G_۱'\Lambda_۱G_۱/n) \quad G_۱'=\left(\frac{\partial R}{\partial\mu_۱},\cdots,\frac{\partial R}{\partial\mu_{k+۱}}\right)$$

۴.۲ مدل فشار-مقاومت توزیع وایبل

۱.۴.۲ قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری

فرض کنیدمولفه‌های فشار و مقاومت در یک سیستم سری، از توزیع وایبل پیروی کنند. در این صورت، تابع چگالی آن‌ها به فرم

$$f(x_i)=cx_i^{c-۱}\frac{\exp(-(\frac{x_i}{\theta_i})^c)}{\theta_i^c},$$

خواهد بود که در آن پارامتر شکل برای تمام توزیع‌ها یکسان و برابربا c است. بنابراین با تعریف $Z=Min(X_۱\cdots,X_k)$، تابع بقای Z به صورت

$$\begin{aligned}\bar{H}(z) &= P[Z>z]\\ &= \exp(-z^c(\frac{۱}{\theta_۱^c}+\cdots+\frac{۱}{\theta_k^c})),\end{aligned}$$

بیان می‌شود. بنابراین قابلیت‌اطمینان سیستمبرابر است با

$$\begin{aligned}R &= P[X_{k+۱}<\min(X_۱,X_۲,X_۳,\cdots,X_k)]\\ &= \int_۰^\infty \bar{H}(x_{k+۱})dF_{k+۱}(x_{k+۱})\\ &= \int_۰^\infty \exp(-x_{k+۱}^c(\frac{۱}{\theta_۱^c}+\cdots+\frac{۱}{\theta_k^c})cx_{k+۱}^{c-۱}\frac{\exp(-(\frac{x_{k+۱}}{\theta_{k+۱}})^c)}{\theta_{k+۱}^c}dx_{k+۱}\\ &= \frac{۱}{۱+(\frac{\theta_{k+۱}}{\theta_۱})^c+\cdots+(\frac{\theta_{k+۱}}{\theta_۱})^c}.\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

۲.۴.۲ برآورد ماکزیمم درستنمایی

با در نظر گرفتن فرضیات موجود در بخش ۲.۳.۲، تابع درستنمایی به صورت زیر است

$$L(\theta,c)=c^{n(k+۱)}\exp(-\sum_{i=۱}^{k+۱}\sum_{j=۱}^{n}(\frac{x_{ij}}{\theta_i})^c)\prod_{i=۱}^{k+۱}\prod_{j=۱}^{n}x_{ij}^c\theta_i^{-c}.$$

با لگاریتم گرفتن از طرفین تساوی داریم

$$l(\theta,c)=n(k+۱)\ln c-\sum_{i=۱}^{k+۱}\sum_{j=۱}^{n}(\frac{x_{ij}}{\theta_i})^c+\sum_{i=۱}^{k+۱}\sum_{j=۱}^{n}(c\ln x_{ij}-c\ln\theta_i)$$

ضمن مشتق‌گیری از تابع درستمایی و حل معادلات درستنمایی، برآورد پارامترهای توزیع با استفاده از روش ماکزیمم درستنمایی عبارتند از

$$\hat{\theta}_i=(\frac{\sum_{j=۱}^{n}x_{ij}^{\hat{c}}}{n})^{\frac{۱}{\hat{c}}},$$

$$\hat{c}=[\frac{۱}{k+۱}(\sum_{i=۱}^{k+۱}\sum_{j=۱}^{n}x_{ij}^{\hat{c}}\ln x_{ij})[\sum_{j=۱}^{n}x_{ij}^{\hat{c}}]^{-۱}-\frac{۱}{n(k+۱)}\sum_{i=۱}^{k+۱}\sum_{j=۱}^{n}\ln x_{ij}]^{-۱}.$$

با قرار دادن برآوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترها در رابطه (۶.۲)، برآورد قابلیت‌اطمینان بدست می‌آید.

$$\hat{R}=\frac{۱}{[۱+(\hat{\theta}_{k+۱}/\hat{\theta}_۱)^{\hat{c}})+\cdots+(\hat{\theta}_{k+۱}/\hat{\theta}_k)^{\hat{c}}]} \qquad (۷.۲)$$

۳.۴.۲ توزیع برآوردگر

همانند قسمت قبل برای مشخص نمودن توزیع $\hat{R}$،ابتدا توزیع پارامترهارا پیدا می‌کنیم.از آنجایی که برآوردگرهای پارامترها دارای توابع توزیع مشخص نیستند از روش ماتریس اطلاع فیشر استفاده می کنیم.بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&I_{ij}=\frac{c^۲}{\theta_i^۲}\quad i=۱,۲,\cdots,k+۱\\
&I_{k+۲,k+۲}=(k+۱)\left[\psi'(۱)+\{\psi(۲)\}^۲\right]/c^۲\\
&I_{ik+۱}=-\psi(۲)/\theta_i,\qquad i-۱,۲,\cdots,k+۱\\
&I_{ij}=۰\quad,\qquad i\neq j=۱,۲,\cdots,k+۱
\end{aligned}$$

طبق تعریف $\psi(\cdot)$ و $\psi'(\cdot)$ به ترتیب توابع دای گاما و تری گاما هستند.که درپیوست تعریف کردیم.

گزاره ۱.۴.۲. براساس قضیه حد مرکزی $\sqrt{n}(\hat{\underline{\lambda}}-\underline{\lambda})$ دارای توزیع مجانبی نرمال چند متغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس-کواریانس $I^{-۱}=((I^{ij}))$ می‌باشد.
I^{ij}ها عناصر ماتریس معکوس ماتریس اطلاع فیشر می‌باشند.

اکنون می‌توان گفت که براساس قضیه(۱.۲.۲) وگزاره ۱.۴.۲ برآوردگر ماکزیمم درستنمایی قابلیت‌اطمینان دارای توزیع زیر است.

$$\hat{R}\sim AN(R,G_۲'\Lambda_۲G_۲/n)\qquad G_۲'=\left(\frac{\partial R}{\partial\theta_۱},\cdots,\frac{\partial R}{\partial\theta_{k+۱}},\frac{\partial R}{\partial c}\right),\qquad \Lambda_۲=\frac{۱}{n}I^{-۱}$$

۴.۴.۲ برآورد بیزی

به دلیل نیاز به برآورد بیزی قابلیت‌اطمینان سیستم، در صورتی که مولفه‌ها دارای طول عمری با توزیع وایبل باشند، در فصل سوم وشبیه‌سازی برآوردگر از بیان آن در این قسمت خودداری کرده، و به طور کامل در فصل سوم بیان می‌کنیم.

۵.۴.۲ مدل نمایی

بنابر خواص توزیع وایبل، اگر $c = ۱$ فرض شود، توزیع وایبل تبدیل به توزیع نمایی می‌شود. لذا توزیع برآوردگر درستنمایی قابلیت‌اطمینان را برای زمانی که سیستم دارای تنها دو مولفه $X_۱, X_۲$ است تحت فرض فوق محاسبه می‌کنیم.

$$R = P[X_۲ < X_۱] = \frac{۱}{[۱ + \theta_۲/\theta_۱]}.$$

فرض می‌کنیم $\hat{\theta_۱} = Z_۱, \hat{\theta_۲} = Z_۲$ ، در این صورت

$$\hat{R} = \frac{۱}{[۱ + Z_۲/Z_۱]}. \tag{۸.۲}$$

با توجه به برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترها، داریم $Z_۱ = \sum_{j=۱}^{n} X_{۱j}$ و $Z_۲ = \sum_{j=۱}^{n} X_{۲j}$،از طرفی چون $(X_{۱j}, X_{۲j})$ متغیرهای تصادفی از توزیع نمایی هستند، بنابر خواص توزیع نمایی داریم:

$$Z_۱ \sim \Gamma(n, \theta_۱) \qquad Z_۲ \sim \Gamma(n, \theta_۲)$$

اکنون می‌توان با استفاده از روش ماتریس ژاکوپین، تابع چگالی احتمال $\hat{R}$ را بدست آورد.

$$R = \frac{۱}{[۱ + Z_۲/Z_۱]} = \frac{Z_۱}{Z_۱ + Z_۲}$$

$$\begin{cases} t = Z_۱ \\ w = \dfrac{Z_۱}{Z_۱ + Z_۲} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Z_۱ = t \\ Z_۲ = \dfrac{t - tw}{w} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
f_w &= \int_{۰}^{\infty} \frac{t}{w^{۲}} \frac{\theta_{۱}^{n}}{\Gamma(n)} t^{n-۱} e^{-\theta_{۱} t} \frac{\theta_{۲}^{n}}{\Gamma(n)} (\frac{t-tw}{w})^{n-۱} e^{-\frac{\theta_{۲} t}{w} + \theta_{۲} t} e^{-\theta_{۲}(\frac{t-tw}{w})} dt \\
&= \frac{۱}{w^{۲}} \frac{\theta_{۱}^{n}\theta_{۲}^{n}}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_{۰}^{\infty} t^{n} (\frac{t-tw}{w})^{n-۱} e^{\{-\theta_{۱} t + \theta_{۲} t - \frac{\theta_{۲} t}{w}\}} dt \\
&= \frac{(۱-w)^{n-۱}}{w^{۲} w^{n-۱}} \frac{\theta_{۱}^{n}\theta_{۲}^{n}}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_{۰}^{\infty} t^{۲n-۱} e^{\{\theta_{۱} - \theta_{۲} + \frac{\theta_{۲}}{w}\} - t} dz \\
&= \frac{(۱-w)^{n-۱}}{w^{n+۱}} \frac{\theta_{۱}^{n}\theta_{۲}^{n}}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \frac{\Gamma(۲n)}{(\theta_{۱} - \theta_{۲} + \frac{\theta_{۲}}{w})^{۲n}}
\end{aligned}
$$

نهایتا:

$$
f(\hat{R}) = \frac{(۱-\hat{R})^{n-۱} \theta_{۱}^{n} \theta_{۲}^{n} \Gamma(۲n)}{\hat{R}^{n+۱} (\theta_{۱} - \theta_{۲} + \frac{\theta_{۲}}{\hat{R}})^{۲n} (\Gamma(n))^{۲}}
$$

* در صورتی که $\theta_{۱} = \theta_{۲}$ باشد، برآوردگر $\hat{R}$ دارای توزیع $Beta(n, n)$ می‌باشد.

۵.۲ مدل فشار-مقاومت توزیع پاراتو

در این بخش، قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری در دو حالت ارائه می شود.

۱.۵.۲ قابلیت‌اطمینان سیستم‌های سری

حالت اول: فرض کنید مولفه‌های فشار و مقاومت از توزیع پارتو با تابع توزیع زیر پیروی کنند

$$
F_i(x_i) = ۱ - (\frac{\mu}{x_i})^{a_i}; \quad x_i \le \mu,
$$

که در آن $\mu > ۰$ پارامتر مشترک و $a_i > ۰$ پارامتر غیر مشترک می‌باشد. همانند قسمت‌های قبل فرض می‌کنیم $Z = \min(X_{۱}, X_{۲}, \cdots, X_k)$ ، آنگاه تابع بقا Z به صورت

$$
\bar{H}(z) = \frac{\mu}{z}^{\sum_{i=۱}^{k} a_i}; \quad z \le ۰,
$$

می‌باشد به طوری که $\sum_{i=۱}^{k} a_i > \mu$. بنابراین با تعریف قابلیت اطمینان سیستم سری به صورت زیر می توان با استفاده از رابطه فوق رابطه صریحی برای آن یافت. بدین ترتیب خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
R &= P[X_{k+۱} < \min(X_{۱}, X_{۲}, \cdots, X_k)] \\
&= \int_{\mu}^{\infty} \bar{H}(x_{k+۱}) dF_{k+۱}(x_{k+۱}) \\
&= \int_{\mu}^{\infty} (\frac{\mu}{x_{k+۱}})^{\sum_{i=۱}^{k} a_i} a_{k+۱} \frac{\mu^{a_{k+۱}}}{x_i^{a_{k+۱}+۱}} dx_{k+۱} a_{k+۱} \\
&= \frac{a_{k+۱}}{\sum_{i=۱}^{k} a_i}.
\end{aligned} \tag{۹.۲}
$$

۲.۵.۲ برآورد ماکزیمم درستنمایی

با در نظر گرفتن مفروضات بخش ۱.۵.۲، تابع درستنمایی برای این توزیع به صورت زیر بیان می‌شود

$$L=\prod_{i=۱}^{k+۱} a_i^n \mu^{n(\sum_{i=۱}^{k+۱} a_i)} \prod_{i=۱}^{k+۱}\prod_{j=۱}^{n} \frac{I(\mu<X_{ij})X_{ij}}{X_{ij}^{a_i+۱}}.$$

از آنجایی که تابع درستنمایی نسبت به پارامتر μ است، بر این اساس برآورد درستنمایی μ برابر است با $\min_{i>۰,j>۰}(X_{ij})$و برآورد سایر پارامترها با استفاده از معادلات درستنمایی

$$\frac{n}{a_i}+n\log\hat{\mu}-\log x_{ij}=۰, \qquad i=۱,۲,\cdots,k+۱$$

به دست می‌آیند به طوری که

$$\hat{a_i}=\frac{۱}{\log(\frac{(\prod_{j=۱}^{n} x_{ij})^n}{\hat{\mu}})}, \qquad \hat{\mu}=min_{ij}(x_{ij}), \qquad j=۱,۲,\cdots,n$$

بنابر خاصیت پایایی با قرادن برآورد پارامترها در رابطه (۹.۲) برآورد قابلیت‌اطمینان به‌دست می‌آید.

$$\hat{R}=\frac{\hat{a}_{k+۱}}{\sum_{i=۱}^{k}\hat{a}_i}.$$

۳.۵.۲ برآورد بیزی

همانند بخش‌های قبل، بنابر مفروضات بخش۱.۵.۲، اگر μ ثابت در نظر گرفته شود، و توزیع پسین پارامترهای α_i،به‌صورت زیر

$$\pi(\alpha_i)=\lambda\exp(-\alpha_i\lambda);\ i=۱,۲,\cdots,k+۱,$$

فرض شود که λ مقداری معلوم است، توزیع پسین را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha_i|\mathbf{X}) &\propto \prod_{j=۱}^{n}\alpha_i\frac{\mu^{\alpha_i}}{x_j^{\alpha_i+۱}}\lambda\exp(-\alpha_i\lambda)\\
&\propto \alpha_i^n\left(\frac{\mu^n}{\prod_{j=۱}^{n}x_j}\right)^{\alpha_i}\exp(-\alpha_i\lambda)\\
&\propto \alpha_i^n\exp(-\alpha_i(-\ln\frac{\mu^n}{\prod_{j=۱}^{n}x_j}))\exp(-\alpha_i\lambda)\\
&\propto \alpha_i^n\exp(-\alpha_i(\lambda-\ln\frac{\mu^n}{\prod_{j=۱}^{n}x_j})). \qquad (۱۰.۲)
\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان گفت

$$\alpha_i|\mathbf{X}\sim\Gamma(n+۱,\lambda-\ln\frac{\mu^n}{\prod_{j=۱}^{n}x_j});\ i=۱,۲,\cdots,k+۱.$$

برای بدست آوردن برآورد بیز قابلیت اطمینان با استفاده از رابطه ۹.۲ داریم

$$\begin{aligned} E(R|\mathbf{X}) &= E\left(\frac{a_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k} a_i}|\mathbf{X}\right) \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{a_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\pi(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{X})d\alpha_1 \cdots d\alpha_{k+1}, \end{aligned} \qquad (۱۱.۲)$$

برای حل انتگرال فوق و برآورد قابلیت‌اطمینان، از روش‌های $MCMC$استفاده می‌کنیم.

۴.۵.۲ توزیع برآوردگر

در اینجا نیز برای بدست آوردن توزیع برآوردگر قابلیت‌اطمینان، ابتدا با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر، واریانس پارامترها را بدست آورده و پس از محاسبه توزیع پارامترها، توزیع برآوردگر را مشخص می‌کنیم. بنابر کران پایین کرامرـرائو عناصر ماتریس اطلاع برابر است با

$$I_{ij} = \frac{n}{a_i^2} \qquad i = 1, 2, \cdots, k+1$$

در نتیجه می‌توان واریانس مجانبی پارامترها را محاسبه کرد.

$$Var(\hat{a}_i) = \frac{a_i^2}{n}, \qquad Cov(\hat{a}_i, \hat{a}_j) = 0, \qquad i \neq i = 1, 2, \cdots, k+1$$

داریم $\hat{\mu} \xrightarrow{p} \mu$، از طرفی بنابر قضیه حد مرکزی داریم:

$$\sqrt{n}(\underline{\hat{a}} - \underline{a}) \xrightarrow{d} AN(0, \Sigma)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{p} 0.$$

درنتیجه

$$\sqrt{n}(\underline{\hat{a}} - \underline{a}) + \sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{d} AMVN(0, \Sigma) \qquad \Sigma = diag(a_1^2, \cdots, a_{k+1}^2)$$

با توجه به توزیع مجانبی پارامترها و بنابر قضیه(۱.۲.۲)،$\hat{R}$دارای توزیع مجانبی زیر است.

$$\hat{R} \sim AN(R, B_3' \Lambda_3 B_3)$$

که در آن

$$B_3' = (\partial R/\partial a_1, \cdots, \partial R/\partial a_{k+1}) \qquad \Lambda_3 = \frac{1}{n} diag(a_1^2, \cdots, a_{k+1}^2).$$

حالت دوم: فرض می‌کنیم توزیع پاراتو دارای مقادیر مختلف $\mu_1, \cdots, \mu_{k+1}$ باشد، در این صورت تابع چگالی احتمال برابر است با

$$f_i(x_i) = \frac{a_i \mu_i^{a_i}}{x_i^{a_i+1}} \qquad \mu_i, x_i > 0, \qquad x_i > \mu_i \qquad i = 1, 2, \cdots, k+1$$

همانند قسمت اول تابع بقا را به ازای $Z = Min(X_۱, X_۲, \cdots, X_k)$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\bar{H}(z) &= \prod_{j=۱}^{r} P[X_{i_j} > z], \qquad \mu_{i_r} < z < \mu_{i_{r+۱}}; r = ۱, ۲, \cdots, k \\ &= \prod_{j=۱}^{r} \mu_{i_j}^{a_{i_j}} / z^{\sum_{j=۱}^{r} a_{i_j}}, \qquad \mu_{i_r} < z < \mu_{i_{r+۱}}; r = ۱, ۲, \cdots, k\end{aligned}$$

بطوری که $i_۱ \neq \cdots \neq i_k = ۱, ۲, \cdots, k; \mu_{i_{k+۱}} = \infty$ حال فرض می‌کنیم $K = ۲$ باشد، یعنی این که سیستم تنها دارای ۲ مولفه فشار- مقاومت باشد. در این صورت برای بررسی قابلیت‌اطمینان سیستم تابع بقا را برای $Z > Min(\mu_۱, \mu_۲)$ محاسبه می‌کنیم. با فرض این‌که $\mu_۱ < \mu_۲$ باشد، داریم

$$\bar{H} = \begin{cases} (\mu_۱/z)^{a_۱}, & \mu_۱ < Z < \mu_۲ \\ (\mu_۱/z)^{a_۱}(\mu_۲/z)^{a_۲}, & \mu_۲ < Z < \infty \end{cases}$$

همچنین

$$h(z) = \begin{cases} a_۱ \mu_۱^{a_۱} / z^{a_۱+۱}, & \mu_۱ < Z < \mu_۲ \\ (a_۱ + a_۲) \mu_۱^{a_۱} \mu_۲^{a_۲} / z^{a_۱+a_۲+۱}, & \mu_۲ < Z < \infty \end{cases}$$

تحت مفروضات فوق اگر $\mu_۱ < \mu_۲$ باشد، تابع بقا دارای فرم دیگری است، در نتیجه می‌توان گفت یک سیستم k مولفه‌ای بسته به نوع ارتباط بین پارامترهای خود دارای $k!$ تابع بقا، همچنین قابلیت‌اطمینان است. برآوردگر و توزیع برآوردگر قابلیت‌اطمینان سیستم را تحت فرض $\mu_۲ < \mu_۱$، به‌دست می‌آوریم.

$$R = \int_{\mu_{k+۱}}^{\infty} \bar{H}(x) dF_{k+۱}(x), \qquad \mu_{(۱)} \leq \mu_{\mu_{k+۱}} \tag{۱۲.۲}$$

$$= ۱ - \int_{\mu_{(۱)}}^{\infty} \bar{F}_{k+۱}(x) dH(x), \qquad \mu_{k+۱} \leq \mu_{(۱)} \tag{۱۳.۲}$$

در نتیجه قابلیت‌اطمینان به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
R &= \int_{\mu_{k+1}}^{\infty} \bar{H}(x) dF_{k+1}(x) \\
&= \int_{\mu_{k+1}}^{\infty} \frac{(\prod_{j=1}^{r} \mu_{i_j}^{a_{i_j}} / x^{\sum_{j=1}^{r} a_{i_j}}) a_{k+1} \mu_{k+1}^{a_{k+1}}}{x^{a_{k+1}+1}} \\
&= \prod_{j=1}^{r} \mu_{i_j}^{a_{i_j}} a_{k+1} \mu_{k+1}^{a_{k+1}} \int_{\mu_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{x^{\sum_{j=1}^{r} a_{i_j}} x^{a_{k+1}+1}} \\
&= \prod_{j=1}^{r} \mu_{i_j}^{a_{i_j}} a_{k+1} \mu_{k+1}^{a_{k+1}} (0 - \frac{-1}{(\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} + a_{k+1}) \mu_{k+1}^{\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} + a_{k+1}}}) \\
&= \frac{a_{k+1} \prod_{j=1}^{r} \mu_{i_j}^{a_{i_j}}}{(\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} + a_{k+1}) \mu_{k+1}^{\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} + a_{k+1}}} \\
&= 1 - \sum_{r=1}^{k} \frac{(\sum_{j=1}^{r} a_{i_j}) \mu_{k+1}^{a_{k+1}} (\prod_{j=1}^{r} \mu_{i_j}^{a_{i_j}})}{(\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} + a_{k+1})} \\
&\qquad \times \left[\frac{1}{\mu_{i_r}^{(\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} + a_{k+1})}} - \frac{1}{\mu_{i_{r+1}}^{(\sum_{j=1}^{r} a_{i_j} + a_{k+1})}} \right] \qquad \mu_{k+1} \le \mu_{i_1} \le \cdots \le \mu_{i_k}.
\end{aligned}
$$

برآوردگر ماکزیمم درستنمایی

بنابر فرضیات فوق و با توجه به تابع چگالی احتمال توزیع پاراتو در حالت دوم تابع ماکزیمم درستنمایی به صورت زیر می‌باشد.

$$
L = \prod_{i=1}^{k+1} a_i^n \mu_i^{n a_i} \prod_{i=1}^{k+1} \prod_{j=1}^{n} \frac{I(\mu < X_{ij}) X_{ij}}{X_{ij}^{a_i+1}}. \tag{۱۴.۲}
$$

پس از لگاریتم گیری از تابع درستنمایی و مشتق‌گیری از آن نسبت به پارامترها، معادلات درستنمایی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$
\frac{n}{a_i} + n \log \mu_i - \sum_{j=1}^{n} \log x_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, k+1
$$

با حل معادلات درستنمایی حاصله، برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترها برابر است با.

$$
\hat{a}_i = 1/log(G_i/\hat{\mu}_i), \qquad i = 1, \cdots, k+1 \tag{۱۵.۲}
$$

$$
\hat{\mu}_i = X_{i(1)} = Min(X_{i1}, \cdots, X_{in}), \tag{۱۶.۲}
$$

بطوری که

$$G_i = [\prod_{j=۱}^{n} x_{ij}]^{۱/n}$$

همانند قسمت‌های قبل برای به‌دست آوردن توزیع برآوردگر قابلیت‌اطمینان، ابتدا با استفاده ماتریس اطلاع فیشر واریانس $\hat{a}_i$ را مشخص می‌کنیم.

$$I_{ij} = n/a_i^۲,$$
$$V(\hat{a}_i) = a_i^۲/n \qquad i = ۱, \cdots, k+۱$$

از طرفی بنابر روابط بین توزیع‌ها، می‌دانیم $\hat{\mu}_i$ دارای توزیع پاراتو با پارامترهای (na_i, μ_i) می‌باشد.در نتیجه

$$V(\hat{\mu}_i) = na_i\mu_i^۲/[(na_i - ۲)(na_i - ۱)^۲].$$

اکنون بنابر خاصیت پایایی، برآوردگر ماکزیمم درستنمایی قابلیت‌اطمینان سیستم را با قرار دادن مقادیر $\hat{a}_i$ و $\hat{\mu}_i$ در رابطه ۱۴.۲، به دست می‌آوریم. از آنجایی که $\hat{\mu} \xrightarrow{p} \mu_i$، همچنین دارای تابع توزیع پاراتو با پارامترهای مشخص است. لذا بنابر قضیه (۱.۲.۲) ، $\hat{R}$ دارای توزیع مجانبی زیر است.

$$\hat{R} \sim AN(R, B_۴'\Lambda_۴B_۴/n)$$

بطوری که:

$$B_۴' = (\partial R/\partial a_۱, \cdots, \partial R/\partial a_{k+۱}, \partial R/\partial \mu_۱, \cdots, \partial R/\partial \mu_{k+۱})$$

و

$$\Lambda_۴ = \frac{۱}{n} diag\left(a_۱^۲, \cdots, a_{k+۱}^۲, \frac{n^۲a_۱\mu_۱^۲}{(na_۱ - ۲)(na_۱ - ۱)^۲}, \cdots, \frac{n^۲a_{k+۱}\mu_{k+۱}^۲}{(na_{k+۱} - ۲)(na_{k+۱} - ۱)^۲}\right).$$

فصل ۳

برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی

در این فصل به طور کاملتر به برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی می‌پردازیم. ابتدا با فرض نمایی بودن توزیع طول عمر مولفه‌های فشار و مقاومت، برآورد قابلیت‌اطمینان را به دو روش ماکزیمم درستمایی و بیز محاسبه می‌کنیم. سپس این دو روش برآورد را در حالتی به‌کار می‌بریم که توزیع طول عمر مولفه‌ها وایبل در نظر گرفته شوند. در ادامه باستفاده از روش‌های انتگرال گیری عددی زنجیر مارکوفی مونت‌کارلو قابلیت‌اطمینان را شبیه‌سازی می‌کنیم. لازم بذکر است مقایسه این دو برآوردگر به دلیل نداشتن فرم بسته برآوردگرها، امکان‌پذیر نیست. لذا از مقایسه روش‌ها صرفه نظر می‌کنیم.

۱.۳ مدل فشار -مقاومت توزیع نمایی

در این بخش فرض می‌کنیم سیستم موازی بوده و مولفه‌های فشار و مقاومت دارای طول عمری با توزیع نمایی باشند.لذا ابتدا تحت لم زیر تابع بقای سیستم را به‌دست می‌آوریم.

لم ۱.۱.۳. فرض کنید در یک سیستم موازی با k مولفه، که همگی تحت فشار یکسان (X_{k+1}) قرار دارند طول عمر مولفه‌ها دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد. طبق تعریفی که از سیستم‌های موازی در فصل اول داشتیم، عملکرد سیستم‌های موازی در گرو عملکرد حداقل مولفه‌ها است، یعنی تازمانی که کلیه مولفه از کار نیفتد، سیستم کار می‌کند، لذا برای محاسبه قابلیت‌اطمینان سیستم، آستانه تحمل مولفه‌ای با ماکزیمم قدرت در برابر فشار وارده را محاسبه می‌کنیم بنابراین متغیرY را به صورت $Y = \max(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ تعریف کنیم، آنگاه قابلیت‌طمینان سیستم موازی k مولفه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} R &= P(Y < X_{k+1}) \\ &= \int_{\circ}^{\infty} \bar{G}(x_{k+1}) dF_{k+1}(x_{k+1}) \\ &= \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \sum_{i_1>}^{k} \cdots \sum_{>i_r} \frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_{k+1} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij})}. \end{aligned}$$

برهان. ابتدا داریم

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(X_۱ \le y, X_۲ \le y, \cdots, X_k \le y) \\ &= (۱ - e^{-\lambda_۱ y})(۱ - e^{-\lambda_۲ y}) \cdots (۱ - e^{-\lambda_k y}) \\ &= ۱ - \sum_{r=۱}^{k} (-۱)^{r-۱} \sum_{i_۱>}^{k} \cdots \sum_{>i_r} e^{-\sum_{j=۱}^{r} \lambda_{i_j} y}. \end{aligned}$$

برای اثبات این رابطه، مشابه اثبات رابطه (۱.۴) عمل می‌کنیم. بنابراین، قابلیت‌اطمینان به صورت زیراست.

$$\begin{aligned} R &= \int_{۰}^{\infty} \bar{G}(x_{k+۱}) dF_{k+۱}(x_{k+۱}) \\ &= \int_{۰}^{\infty} \sum_{r=۱}^{k} (-۱)^{r-۱} \sum_{i_۱>}^{k} \cdots \sum_{>i_r} e^{-\sum_{j=۱}^{r} \lambda_{i_j} x_{k+۱}} \lambda_{k+۱} e^{-\lambda_{k+۱} x_{k+۱}} dx_{k+۱} \\ &= \sum_{r=۱}^{k} (-۱)^{r-۱} \sum_{i_۱>}^{k} \cdots \sum_{>i_r} \int_{۰}^{\infty} e^{-\sum_{j=۱}^{r} \lambda_{i_j} x_{k+۱}} \lambda_{k+۱} e^{-\lambda_{k+۱} x_{k+۱}} dx_{k+۱} \\ &= \sum_{r=۱}^{k} (-۱)^{r-۱} \sum_{i_۱>}^{k} \cdots \sum_{>i_r} \frac{\lambda_{k+۱}}{(\lambda_{k+۱} + \sum_{j=۱}^{r} \lambda_{i_j})}. \end{aligned}$$

□

۱.۱.۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی

فرض کنید سیستم دارای n نمونه داریم، با Kمولفه موازی اصلی$X_{۱_j}, \cdots, X_{k_j}; j = ۱, \cdots, n$، که تحت فشار یکسان $X_{(k+۱)_j}$(فشار روی j امین نمونه)است، به‌طوریکه $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_۱, \cdots, \lambda_{k+۱})$ بردار پارامترها و $\mathbf{X} = (x_{۱۱}, ..., x_{۱n}, ..., x_{(k+۱)۱}, ..., x_{(k+۱)n})$ بردار نمونه باشد که دارای $(k+۱)n$ بعد می‌باشد.

تابع درستنمایی برای توزیع نمایی به صورت

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{X}) &= \prod_{j=۱}^{n} \prod_{i=۱}^{k+۱} \lambda_i e^{-\lambda_i x_{i_j}} \\ &= \prod_{j=۱}^{n} (e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱} \lambda_i x_{i_j}} . \prod_{i=۱}^{k+۱} \lambda_i) \\ &= e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_i x_{i_j}} . (\prod_{i=۱}^{k+۱} \lambda_i)^n \\ &= e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_i x_{i_j}} . \prod_{i=۱}^{k+۱} \lambda_i^n, \end{aligned}$$

است. با لگاریتم گرفتن از طرفین رابطه فوق، داریم

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\lambda};\mathbf{X}) &= \ln(e^{-\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i x_{i_j}}.\prod_{i=1}^{k+1}\lambda_i^n) \\ &= -\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i x_{i_j} + n\sum_{i=1}^{k+1}\ln(\lambda_i). \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به پارامتر λ، برآورد ماکزیمم درستنمایی این پارامتر برابر است با

$$\hat{\lambda}_i = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_{i_j}}.$$

بنابراین برآورد درستنمایی قابلیت‌اطمینان بنابر خاصیت پایایی برابر است با

$$\hat{R} = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{\hat{\lambda}_{k+1}}{(\hat{\lambda}_{k+1}+\sum_{j=1}^{r}\hat{\lambda}_{i_j})}.$$

۲.۱.۳ برآورد بیزی

برای یافتن برآورد بیزی قابلیت‌اطمینان،ابتدا باید توزیع پسین پارامترها $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1})$را مشخص نماییم. فرض کنید λ_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع پیشین $\Gamma(a_i,b_i)$باشند. در این صورت فرم عمومی تابع توزیع پسین به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{X}) \propto f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\lambda}).\pi(\boldsymbol{\lambda}) &= L(\boldsymbol{\lambda};\mathbf{X}).\pi(\boldsymbol{\lambda}) \\ &\propto e^{-\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}x_{i_j}}(\prod_{i=1}^{k+1}\lambda_i^n).\prod_{i=1}^{k+1}\lambda_i^{a_i-1}.e^{-b_i\lambda_i} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}x_{i_j}}.\prod_{i=1}^{k+1}e^{-b_i\lambda_i}.\prod_{i=1}^{k+1}\lambda_i^{n+a_i-1} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}x_{i_j}-\sum_{i=1}^{k+1}b_i\lambda_i}.\prod_{i=1}^{k+1}\lambda_i^{n+a_i-1} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i(\sum_{j=1}^{n}x_{i_j}+b_i)}.\prod_{i=1}^{k+1}\lambda_i^{n+a_i-1} \\ &= \prod_{i=1}^{k+1}e^{\lambda_i(\sum_{j=1}^{n}x_{i_j}+b_i)}.\lambda_i^{n+a_i-1}. \end{aligned}$$

با توجه به فرم عمومی تابع توزیع پسین، می‌توان نتیجه گرفت که این توزیع پسین از توزیع گاما پیروی می‌کند. بدین ترتیب برآورد بیزی λ_i به صورت

$$E(\lambda_i|\mathbf{X}) = \frac{n+a_i}{b_i+\sum_{j=1}^{n}x_{i_j}},$$

می‌باشد. به همین ترتیب برآورد بیزی قابلیت‌اطمینان عبارتست از

$$\hat{R}_b = E(R|\mathbf{X})$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left(\sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{\lambda_{k+۱}}{(\lambda_{k+۱}+\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j})}|\mathbf{X}\right)\\
&= \int_{۰}^{\infty}\cdots\int_{۰}^{\infty}\left(\sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{\lambda_{k+۱}}{(\lambda_{k+۱}+\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j})}\right)\\
&\quad .\pi(\lambda_i,\cdots,\lambda_{k+۱}|X_۱,\cdots,X_{k+۱})d\lambda_۱\cdots,d\lambda_{k+۱}\\
&= \int_{۰}^{\infty}\cdots\int_{۰}^{\infty}\left(\sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{\lambda_{k+۱}}{(\lambda_{k+۱}+\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j})}\right)\\
&\quad \lambda_۱^{n+a_۱-۱}e^{b_۱+\sum_{j=۱}^{n}x_{۱j}}\ldots\lambda_k^{n+a_{k+۱}-۱}e^{b_{k+۱}+\sum_{j=۱}^{n}x_{k+۱j}}d\lambda_۱,\cdots,d\lambda_{k+۱}, \quad (۱.۳)
\end{aligned}
$$

برای محاسبه رابطه (۱.۳) به دلیل وجود انتگرال‌های چندگانه، و پیچیدگی رابطه از الگوریتم‌های عددی بر پایه روش‌های MCMC استفاده می‌کنیم. در این مورد، به خاطر این که تابع داخل انتگرال دارای فرم مشخص است و می توان از آن به راحتی تولید نمونه کرد روش نمونه‌گیری گیبز را به کار می‌بریم.

۲.۳ مدل فشار-مقاومت توزیع وایبل

در این بخش فرض کنید سیستم موازی، با k مولفه، مولفه‌ها دارای طول عمری با توزیع وایبل، با پارامتر شکل a و پارامترهای مقیاس مختلف $b_i;(i=۱,۲,\cdots,k)$ هستند. . تابع چگالی احتمال متغیرهای فشار و مولفه‌ها به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$f_i(x_i)=ab_ix_i^{a-۱}e^{-b_ix^a};i=۱,۲,\cdots,k+۱.$$

بنابر تعریف سیستم‌های موازی، برای برآورد قابلیت‌اطمینان این سیستم‌ها ابتدا تابع بقا را به‌صورت لم زیر بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. اگر متغیر Y را به صورت $Y=\max(X_۱,X_۲,X_۳,....,X_k)$ تعریف کنیم، آن‌گاه تابع بقا سیستم موازی k مولفه ای عبارتست از

$$G_k(y)=۱-\sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}e^{-\sum_{j=۱}^{r}b_{i_j}y^a}.$$

برهان. برای اثبات درستی رابطه از استقرا استفاده می شود. ابتدا نشان می دهیم رابطه به ازای $k=۱$ برقرار است.

$$
\begin{aligned}
G_۱(y) &= ۱-\sum_{r=۱}^{۱}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{۱}\cdots\sum_{>i_r}e^{-\sum_{j=۱}^{r}b_{i_j}y^a}\\
&= ۱-(-۱)^{۰}e^{-b_۱y^a}\\
&= ۱-e^{-b_۱y^a}.
\end{aligned}
$$

از طرفی خواهیم داشت

$$G_{n+۱}(y)=۱-\sum_{r=۱}^{n+۱}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{n+۱}\cdots\sum_{>i_r}e^{-\sum_{j=۱}^{r}b_{i_j}y^a}.$$

برای ادامه اثبات، ابتدا مقادیر مختلف r را در $۱ - G_{n+۱}(y)$ قرار می‌دهیم. برای $r = ۱$ داریم

$$\begin{aligned} A &= (-۱)^{۱-۱} \sum_{i_۱=۱}^{n+۱} e^{-\sum_{j=۱}^{۱} b_{i_j} y^a} \\ &= (-۱)^{۱-۱} \sum_{i_۱=۱}^{n+۱} e^{-b_{i_۱} y^a} \\ &= e^{-b_{n+۱} y^a} + \sum_{i_۱=۱}^{n} e^{-b_{i_۱} y^a}. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

برای $r = ۲$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} B &= (-۱)^{۲-۱} \sum_{i_۱>}^{n+۱} \sum_{>i_۲} e^{-\sum_{j=۱}^{۲} b_{i_j} y^a} \\ &= (-۱)^{۲-۱} \left(e^{-b_{n+۱} y^a} . \sum_{i_۲} e^{-b_{i_۲} y^a} + \sum_{i_۱>}^{n} \sum_{>i_۲} e^{-(b_{i_۱}+b_{i_۲}) y^a} \right). \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

و به همین ترتیب برای $r = ۳$ و $r = n + ۱$ می‌توان نوشت
$r = ۳$

$$\begin{aligned} C &= (-۱)^{۳-۱} \sum_{i_۱>}^{n+۱} \sum_{>i_۲} \sum_{>i_۳} e^{-(b_{i_۱}+b_{i_۲}+b_{i_۳}) y^a} \\ &= (-۱)^{۳-۱} e^{b_{n+۱} y^a} \sum_{i_۲>} \sum_{>i_۳} e^{-(b_{i_۲}+b_{i_۳}) y^a} + (-۱)^{۳-۱} \sum_{i_۱>}^{n} \sum_{>i_۲} \sum_{>i_۳} e^{-(b_{i_۱}+b_{i_۲}+b_{i_۳}) y^a}. \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

$r = n + ۱$

$$\begin{aligned} D &= (-۱)^{n+۱-۱} \sum_{i_۱>}^{n+۱} \sum_{>i_۲} \cdots \sum_{>i_{n+۱}} e^{-\sum_{j=۱}^{n+۱} b_{i_j} y^a} \\ &= (-۱)^{n+۱-۱} e^{b_{n+۱} y^a} \sum_{i_۲>} \sum_{>i_۳} \cdots \sum_{>i_{n+۱}} e^{-\sum_{j=۲}^{n+۱} b_{i_j} y^a} \\ &\quad + (-۱)^{n+۱-۱} \sum_{i_۱>}^{n} \sum_{>i_۲} \cdots \sum_{>i_{n+۱}} e^{-\sum_{j=۱}^{n+۱} b_{i_j} y^a}. \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

فرض می‌کنیم به ازای $k = n$ برقرار است ثابت می‌کنیم که به ازای $k = n + ۱$ نیز برقرار است. با استفاده از تساوی‌های (۲.۳) تا (۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} G_{n+۱}(y) &= ۱ - \sum_{r=۱}^{n+۱} (-۱)^{r-۱} \sum_{i_۱>}^{n+۱} \cdots \sum_{>i_r} e^{-\sum_{j=۱}^{r} b_{i_j} y^a} \\ &= A + B + C + \cdots + D \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ۱-\Big(e^{-b_{n+۱}y^a}(۱+(-۱)^{۲-۱}\sum_{i_۲} e^{-b_{i_۲}y^a} \\
&\quad +\cdots+(-۱)^{n+۱-۱}\sum_{i_۲>}\sum_{>i_۳}\cdots\sum_{>i_n+۱} e^{-\sum_{j=۲}^{n+۱} b_{i_j}y^a})\Big) \\
&\quad -\Big(\sum_{i_۱=۱}^{n} e^{-b_{i_۱}y^a}+\sum_{i_۱>}^{n}\sum_{>i_۲} e^{-(b_{i_۱}+b_{i_۲})y^a} \\
&\quad +\cdots+(-۱)^{n+۱-۱}\sum_{i_۱>}^{n}\sum_{>i_۲}\cdots\sum_{>i_n+۱} e^{-\sum_{j=۱}^{n+۱} b_{i_j}y^a}\Big) \\
&= ۱-e^{-b_{n+۱}y^a}G_n(y)-(۱-G_n(y)) \\
&= G_n(y)(۱-e^{-b_{n+۱}y^a}).
\end{aligned}
$$

□

بنابراین با استفاده از رابطه فوق می‌توان قابلیت‌اطمینان را بدست آورد

$$
\begin{aligned}
R &= \int_۰^\infty \bar{G}(x_{k+۱})dF_{k+۱}(x_{k+۱}) \\
&= \int_۰^\infty \sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{k}\cdots\sum_{>i_r} e^{-\sum_{j=۱}^{r} b_{i_j}{x_{k+۱}}^a} ab_{k+۱}{x_{k+۱}}^{a-۱}e^{-b_{k+۱}{x_{k+۱}}^a}dx_{k+۱} \\
&= \sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\int_۰^\infty e^{-\sum_{j=۱}^{r} b_{i_j}{x_{k+۱}}^a} ab_{k+۱}{x_{k+۱}}^{a-۱}e^{-b_{k+۱}{x_{k+۱}}^a}dx_{k+۱} \\
&= \sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{b_{k+۱}}{b_{k+۱}+\sum_{j=۱}^{r} b_{i_j}}.
\end{aligned}
$$

۱.۲.۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی

همانند حالت نمایی، فرض کنید سیستم دارای n نمونه،با Kمولفه موازی اصلی$X_{۱_j},\cdots,X_{k_j}$،که تحت فشار یکسان $X_{(k+۱)_j}$(فشار روی j امین نمونه)هستند،باشد، $j=۱,\cdots,n$، و $\mathbf{b}=(b_۱,\cdots,b_{k+۱})$ بردار پارامترهای مقیاس هستند. تابع درستنمایی برای توزیع وایبل عبارتست از

$$
\begin{aligned}
L(a,\mathbf{b},\mathbf{X}) &= \prod_{j=۱}^{n}\prod_{i=۱}^{k+۱} f(x_i;a,\mathbf{b}) \\
&= \prod_{j=۱}^{n}\prod_{i=۱}^{k+۱} ab_i{x_{i_j}}^{a-۱}.e^{-b_i{x_{i_j}}^a} \\
&= a^{n(k+۱)}.(\prod_{i=۱}^{k+۱} {b_i}^n).(\prod_{j=۱}^{n}\prod_{i=۱}^{k+۱}{x_{i_j}}^{a-۱})e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱} b_i\sum_{j=۱}^{n}{x_{i_j}}^a}.
\end{aligned}
$$

با لگاریتم گرفتن از رابطه بدست آمده، داریم

$$
l=\ln L(a,\mathbf{b},\mathbf{X})=n(k+۱)\ln a+\sum_{i=۱}^{k+۱} n\ln b_i+\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{k+۱}(a-۱)\ln x_{i_j}-\sum_{i=۱}^{k} b_i\sum_{j=۱}^{n}{x_{i_j}}^a,
$$

برای بدست آوردن برآورد درستنمایی پارامترها، از رابطه فوق نسبت به پارامترها مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{n(k+1)}{a} + \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n} \ln x_{i_j} - \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n} b_i x_{i_j}^{a} \ln x_{i_j} = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial b_i} = \frac{n}{b_i} - \sum_{j=1}^{n} {x_{i_j}}^{a} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k+1.$$

این معادلات را می‌توان با استفاده از روش نیوتون-رافسون حل کرد. با استفاده از برآوردهای به‌دست آمده، برآورد درستنمایی ماکزیمم قابلیت‌اطمینان بنابر خاصیت پایایی، به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{R} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \sum_{i_1>}^{k} \cdots \sum_{>i_r} \frac{\hat{b}_{k+1}}{\hat{b}_{k+1} + \sum_{j=1}^{r} \hat{b}_{i_j}}$$

۲.۲.۳ برآورد بیزی

برای محاسبه برآورد بیزی قابلیت‌اطمینان، ابتدا فرض کنید $\beta_i = \log b_i$، $i = 1, 2, \cdots, k+1$، آنگاه تابع چگالی وایبل به فرم زیر خواهد شد

$$f_i(x_i|a, \beta_i) = a x^{a-1} e^{\beta_i - e^{\beta_i} x^a}, \quad x_i > 0,$$

به طوری که $a > 0$ و $-\infty < \beta_i < \infty$، $i = 1, \cdots, k+1$.

فرض کنید $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_{k+1})$ متغیرهایی مستقل و هم‌توزیع و همچنین مستقل از a با توزیع‌های پیشین زیر باشند

$$a \sim \Gamma(\lambda, \gamma), \quad \beta_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2).$$

تابع چگالی پسین این متغیرها عبارتند از

$$\pi(a) = \frac{\gamma^\lambda}{\Gamma(\lambda)} a^{\lambda-1} e^{-\gamma a},$$

$$\pi(\beta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(\beta_i - \mu_i)^2}, \quad \sigma_i^2 > 0.$$

به دلیل استقلال متغیرها، چگالی توام پیشین به صورت

$$\begin{aligned} \pi(a, \boldsymbol{\beta}) &= \pi(a) \prod_{i=1}^{k+1} \pi(\beta_i) \\ &= \frac{\gamma^\lambda}{\Gamma(\lambda)} a^{\lambda-1} e^{-\gamma a} \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(\beta_i - \mu_i)^2}, \end{aligned}$$

و چگالی توام پسین $a, \boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}$ به فرم

$$\pi(a, \boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}) \propto L(a, \beta_1, \cdots, \beta_{k+1}) \pi(a) \prod_{i=1}^{k+1} \pi(\beta_i)$$

$$\propto \quad a^{n(k+1)+\lambda-1} e^{\sum_{i=1}^{k+1}(n\beta_i - \sum_{j=1}^{n} e^{\beta_i} X_{ij}^a) + a(\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\log X_{ij} - \gamma)} e^{-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\sigma_i^2}(\beta_i-\mu_i)^2},$$

(۶.۳)

است. از رابطه (۶.۳)، هسته اصلی چگالی‌های پسین حاشیه‌ای را بدست می‌آوریم

$$\pi(a|\beta_i, \mathbf{X}) \propto a^{n(k+1)+\lambda-1} e^{a\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\log X_{ij} - \sum_{i=1}^{k+1} e^{\beta_i}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^a - \gamma a},$$
$$\pi(\beta_i|a, \mathbf{X}) \propto e^{n\beta_i - e^{\beta_i}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^a - \frac{1}{2\sigma_i^2}(\beta_i-\mu_i)^2}.$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، این چگالی‌های پسین به هیچ توزیع شناخته‌شده‌ای تعلق ندارند. برآوردگر بیز قابلیت‌اطمینان حاصل عبارت زیر است

$$\begin{aligned}
\hat{R}_b &= E(R|\mathbf{X}) \\
&= E\left(\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{b_{k+1}}{(b_{k+1}+\sum_{j=1}^{r} b_{i_j})}|\mathbf{X}\right) \\
&= \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left(\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1>}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{b_{k+1}}{(b_{k+1}+\sum_{j=1}^{r} b_{i_j})}\right) \\
&\qquad \pi(a, b_1, \cdots, b_{k+1}|\mathbf{X})\,da\,db_1\cdots db_{k+1}
\end{aligned} \tag{۷.۳}$$

برای حل انتگرال رابطه (۷.۳)، به دلیل وجود چگالی‌های حاشیه‌ای پسین با توزیع نامعلوم، از روش نمونه گیری متروپولیس–هستینگز، که از روش‌های انتگرال گیری MCMC می‌باشد، استفاده می‌کنیم.

۳.۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی، برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم و بیز را برای هر دو توزیع نمایی و وایبل مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، یک سیستم سه مولفه‌ای موازی را با مقادیر متفاوت پارامترها برای توزیع نمایی و مقادیر b_i متفاوت به عنوان پارامتر مقیاس ولی پارامتر شکل یکسان a برای توزیع وایبل در نظر می‌گیریم. همچنین متغیر فشار برای توزیع نمایی، نمایی و برای توزیع وایبل، وایبل در نظر گرفته می‌شود.

۱.۳.۳ توزیع نمایی

با در نظر گرفتن چهار حجم نمونه $n = \{۲۵, ۵۰, ۷۵, ۱۰۰\}$، سه حالت متفاوت را برای هر حجم نمونه در نظر می‌گیریم. این سه حالت در جدول ۱.۳ نشان داده شده است.

برآورد درستنمایی ماکزیمم

همانطور که در بخش ۱.۱.۳ بیان شد، ابتدا برآوردهای درستنمایی ماکزیمم پارامترها رو می‌یابیم آنگاه برآورد درستنمایی ماکزیمم قابلیت‌اطمینان را به‌دست می‌آوریم. نتایج شبیه‌سازی در جدول ۲.۳ نشان

جدول ۱.۳: پارامترهای توزیع نمایی

حالت	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۲
۲	۰/۱۵	۰/۱	۰/۳	۰/۲
۳	۰/۱	۰/۲	۰/۱۵	۰/۲

داده شده است. این جدول شامل مقادیر برآورد درستنمایی ماکزیمم، انحراف معیار و فواصل اطمینان است.

همانطورکه در جدول مشاهده می‌شود روش درستنمایی ماکزیمم برآوردهای بسیار دقیقی ارائه کرده است

جدول ۲.۳: برآورد درستنمایی ماکزیمم

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	٪۹۵ فاصله اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۴۰۸۹۱	۰/۰۰۲۵۶۴۶۶	۰/۷۸۹۰۶۲۵ – ۰/۷۹۹۱۱۵۸
۲	۲۵	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۱۲۲۳۰۷	۰/۰۰۱۸۹۱۷۷۷	۰/۸۰۸۵۲۲۹ – ۰/۸۱۵۹۳۸۵
۳	۲۵	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۴۰۷۶۷۷	۰/۰۰۱۸۳۵۴۹۴	۰/۸۳۷۱۷۰۲ – ۰/۸۴۴۳۶۵۲
۱	۵۰	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۲۰۲۲۷	۰/۰۰۱۱۶۸۸۴۲	۰/۷۸۹۷۳۱۸ – ۰/۷۹۴۳۱۳۵
۲	۵۰	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۲۳۱۵۴۲	۰/۰۰۱۱۱۸۵۰۰	۰/۸۲۰۹۶۲ – ۰/۸۲۵۳۴۶۴
۳	۵۰	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۴۵۳۹۵۶	۰/۰۰۱۲۲۰۳۴۶	۰/۸۴۳۰۰۳۸ – ۰/۸۴۷۷۸۷۴
۱	۷۵	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۸۰۳۵۸۹۷	۰/۰۰۰۸۴۱۱۹۱	۰/۸۰۱۹۴۱ – ۰/۸۰۵۲۳۸۴
۲	۷۵	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۲۴۳۱۲۸	۰/۰۰۰۵۹۵۰۰۵۵	۰/۸۲۳۱۴۶۶ – ۰/۸۲۵۴۷۹
۳	۷۵	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۴۰۶۱۲۵	۰/۰۰۰۸۱۳۸۱۲۹	۰/۸۳۹۰۱۷۵ – ۰/۸۴۲۲۰۷۶
۱	۱۰۰	۰/۷۹۷۶۱۹۰	۰/۷۹۴۱۴۵	۰/۰۰۰۷۲۶۴۸۱۳	۰/۷۹۲۷۲۱۱ – ۰/۷۹۵۵۶۸۸
۲	۱۰۰	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۱۸۱۲۱۸	۰/۰۰۰۷۱۴۶۷۲۰	۰/۸۱۶۷۲۱۱ – ۰/۸۱۶۷۲۱۱
۳	۱۰۰	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۳۲۷۸۳۴	۰/۰۰۰۸۴۱۷۰۷۹	۰/۸۳۱۱۳۳۷ – ۰/۸۳۴۴۳۳۱

و خطاهای بسیار ناچیزی دارد. با افزایش حجم نمونه از ۲۵ تا ۱۰۰ برآوردها دقیق‌تر شده و فواصل اطمینان کوتاه‌تر شده‌اند.

برآورد بیزی

همانطور که در بخش ۲.۱.۳ ذکر شد، برای به‌دست آوردن برآورد بیزی، به الگوریتم‌های MCMC نیاز داریم. با توجه بخش مذکور، توزیع‌های پسین حاشیه‌ای و پارامترها دارای توزیع گاما هستند. بنابراین به راحتی و به طور مستقیم می‌توان از این توزیع‌ها شبیه‌سازی کرد و با استفاده از روش مونت کارلو، قابلیت‌اطمینان را برآورد کرد. برای به‌دست آوردن برآورد بیزی، دو حالت از توزیع‌های پیشین

آگاهی‌بخش[۱] و کم آگاهی‌بخش[۲] را در نظر می‌گیریم.

حالت اول، توزیع پیشین آگاهی‌بخش

در این حالت، توزیع‌های گامای پیشین با واریانس کم را در نظر می‌گیریم که باعث می‌شود توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش داشته باشیم. جدول ۳.۳ پارامترهای توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش گاما را در ۳ حالت نشان می‌دهد. برآوردهای بیز قابلیت‌اطمینان تحت تابع زیان درجه دوم خطا برای حجم نمونه‌های متفاوت به همراه مقادیر انحراف معیار و نواحی اطمینان در جدول ۴.۳ آمده است. با توجه به جدول

جدول ۳.۳: پارامترهای توزیع‌های پیشین

حالت	$a_۱$	$b_۱$	$a_۲$	$b_۲$	$a_۳$	$b_۳$	$a_۴$	$b_۴$
۱	۳۰	۳۰۰	۳۰	۱۵۰	۶۰	۲۰۰	۲۰	۱۰۰
۲	۳۰	۲۰۰	۳۵	۳۵۰	۶۰	۲۰۰	۲۰	۱۰۰
۳	۳۰	۳۰۰	۳۰	۱۵۰	۳۰	۲۰۰	۲۰	۱۰۰

جدول ۴.۳: ببرآورد بیز

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	٪۹۵ فاصله اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۵۸۰۱۹	۰/۰۰۰۸۲۶۴۱۳۹	۰/۷۹۴۱۸۲۱ – ۰/۷۹۷۴۲۱۶
۲	۲۵	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۱۳۰۲۱۲	۰/۰۰۰۶۶۷۲۸۱۱	۰/۸۱۱۷۱۳۴ – ۰/۸۱۴۳۲۹۱
۳	۲۵	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۳۸۳۶۹۴	۰/۰۰۰۶۴۶۶۶۸۹	۰/۸۳۷۱۰۲ – ۰/۸۳۹۶۳۶۹
۱	۵۰	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۳۸۹۹۳	۰/۰۰۰۶۷۸۳۰۳۲	۰/۷۹۲۵۶۹۹ – ۰/۷۹۵۲۲۸۸
۲	۵۰	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۲۰۷۸۳۶	۰/۰۰۰۶۴۲۲۴۸۹	۰/۸۱۹۵۲۴۹ – ۰/۸۲۲۰۴۲۴
۳	۵۰	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۴۲۷۸۶۴	۰/۰۰۰۶۳۱۸۵۰۴	۰/۸۴۱۵۴۸ – ۰/۸۴۴۰۲۴۸
۱	۷۵	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۸۰۰۷۶۷	۰/۰۰۰۴۷۶۲۷۶۷	۰/۷۹۹۸۳۳۵ – ۰/۸۰۱۷۰۰۵
۲	۷۵	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۲۲۲۱۸۴	۰/۰۰۰۴۰۰۰۹۱۵	۰/۸۲۱۴۳۴۳ – ۰/۸۲۳۰۰۲۶
۳	۷۵	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۳۹۷۷۶۴	۰/۰۰۰۵۸۸۴۱۷۱	۰/۸۳۸۶۲۳۱ – ۰/۸۴۰۹۲۹۶
۱	۱۰۰	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۳۱۱۳۷	۰/۰۰۰۵۸۱۵۵۹۷	۰/۷۹۱۹۷۳۹ – ۰/۷۹۴۲۵۳۶
۲	۱۰۰	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۱۷۵۶۱	۰/۰۰۰۴۹۶۸۶۵	۰/۸۱۶۵۸۷۲ – ۰/۸۱۸۵۳۴۹
۳	۱۰۰	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۳۴۴۳۲	۰/۰۰۰۴۹۵۹۹۸۷	۰/۸۳۳۴۵۹۸ – ۰/۸۳۵۴۰۴۱

۴.۳، مشاهده می‌شود که بر خلاف برآورد درستنمایی ماکزیمم، با افزایش حجم نمونه، برآوردهای بیز با سرعت کمتری نسبت به برآوردهای درستنمایی ماکزیمم بهبود می‌یابند. همچنین فواصل اطمینان نیز با افزایش حجم نمونه تغییر محسوسی نمی‌کنند. در این روش نیز برآوردها دقیق و مقدار خطاها کوچک می‌باشند.

[۱] Informative

[۲] Less informative

حالت دوم، توزیع پیشین کم آگاهی‌بخش

در این حالت توزیع‌های پیشینی را در نظر می‌گیریم که تنها اطلاعات خیلی کمی را ارائه می‌دهند. پارامترهای توزیع پیشین به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که توزیع پیشین پراکندگی زیادی داشته باشد. مقادیر پارامترها در جدول ۵.۳ و برآوردهای بیز، انحراف معیار و نواحی اطمینان در جدول ۶.۳ گزارش شده‌اند. با توزیع‌های پیشین با اطلاعات کم هم، با توجه به جدول ۶.۳، برآوردها مانند برآوردهای حاصل از

جدول ۵.۳: پارامترهای توزیع‌های پیشین

حالت	$a_۱$	$b_۱$	$a_۲$	$b_۲$	$a_۳$	$b_۳$	$a_۴$	$b_۴$
۱	۲	۰/۰۱	۲/۵	۰/۰۲	۲	۰/۰۲۵	۱/۵	۰/۰۱۵
۱	۲	۰/۰۱	۲/۵	۰/۰۲	۲	۰/۰۲۵	۱/۵	۰/۰۱۵
۱	۲	۰/۰۱	۲/۵	۰/۰۲	۲	۰/۰۲۵	۱/۵	۰/۰۱۵

جدول ۶.۳: برآورد بیزی

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	٪۹۵ فاصله اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۷۷۰۳۹	۰/۰۰۳۵۸۲۹۱۸	۰/۷۷۰۰۱۶۶ – ۰/۷۸۴۰۶۱۴
۲	۲۵	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۱۵۴۸۲۹	۰/۰۰۲۷۱۶۳۰۳	۰/۸۱۰۱۵۹ – ۰/۸۲۰۸۰۶۷
۳	۲۵	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۲۴۶۶۸۲	۰/۰۰۲۲۹۱۱۶۴	۰/۸۲۰۱۷۷۶ – ۰/۸۲۹۱۵۸۸
۱	۵۰	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۵۵۶۸۶	۰/۰۰۱۲۲۲۷۵۳	۰/۷۹۳۱۷۲۱ – ۰/۷۹۷۹۶۵۲
۲	۵۰	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۱۰۱۵۸۹	۰/۰۰۱۵۳۰۸۱۴	۰/۸۰۷۱۵۸۵ – ۰/۸۱۳۱۵۹۲
۳	۵۰	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۳۵۳۸۵۳	۰/۰۰۰۹۶۷۳۲۶	۰/۸۳۳۴۸۹۴ – ۰/۸۳۷۲۸۱۳
۱	۷۵	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۷۶۹۹۳	۰/۰۰۱۱۶۸۷۰۹	۰/۷۹۵۴۰۸۷ – ۰/۷۹۹۹۹
۲	۷۵	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۲۳۶۵۷۱	۰/۰۰۰۹۰۸۰۶۲۷	۰/۸۲۱۸۷۷۴ – ۰/۸۲۵۴۳۶۹
۳	۷۵	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۲۹۲۱۵۹	۰/۰۰۰۹۴۳۴۶۰۶	۰/۸۲۷۳۶۶۷ – ۰/۸۳۱۰۶۵
۱	۱۰۰	۰/۷۹۷۶۱۹	۰/۷۹۳۷۴۸۲	۰/۰۰۰۹۰۴۷۵۱۱	۰/۷۹۱۹۷۴۹ – ۰/۷۹۵۵۲۱۵
۲	۱۰۰	۰/۸۱۹۲۹۱۸	۰/۸۱۴۷۷۸۲	۰/۰۰۰۶۹۹۶۳۹۳	۰/۸۱۳۴۰۷ – ۰/۸۱۶۱۴۹۵
۳	۱۰۰	۰/۸۳۷۷۰۶۷	۰/۸۳۸۴۸۷۵	۰/۰۰۰۹۵۲۳۴۳	۰/۸۳۶۶۲۰۹ – ۰/۸۴۰۳۵۴

توزیع‌های پیشین با اطلاعات بالا، با افزایش حجم نمونه با سرعت کمی بهبود می‌یابند. از طرفی اختلاف بین برآوردهای حاصل از توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش و کم آگاهی‌بخش، به طور تعجب‌برانگیزی کوچک است.

۲.۳.۳ توزیع وایبل

همانطورکه در بخش ۲.۲.۳ اشاره شد، ابتدا با روش نیوتن–رافسون برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامترها را می‌یابیم آنگاه برآورد قابلیت‌اطمینان را به‌دست می‌آوریم. همانند شبیه‌سازی برای توزیع نمایی، سه

حالت متفاوت با پارامترهای متفاوت را برای چهار حجم نمونه $n = \{۲۵, ۵۰, ۷۵, ۱۰۰\}$ در نظر می‌گیریم. این مقادیر در جدول ۷.۳ ذکر شده‌اند.

جدول ۷.۳: پارامترهای توزیع وایبل

حالت	a	$b_۱$	$b_۲$	$b_۳$	$b_۴$
۱	۰/۵	۲/۵	۵	۴	۳
۲	۰/۶	۲/۵	۴/۵	۲	۳
۳	۰/۴	۳/۵	۴	۴/۵	۳

جدول ۸.۳: برآورد درستنمایی ماکزیمم

حالت	a	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	٪۹۵ فاصله اطمینان
۱	۰/۵	۲۵	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۰۵۲۴۳۱	۰/۰۰۴۲۹۱۷۵۵	۰/۶۴۹۷۵۵۴ – ۰/۷۰۹۰۵۳۵
۲	۰/۶	۲۵	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۸۷۹۹۷۹	۰/۰۰۴۴۸۰۰۳۷	۰/۷۷۹۲۱۷۲ – ۰/۷۹۶۷۷۸۶
۳	۰/۴	۲۵	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۶۷۲۰۱۹	۰/۰۰۴۸۲۲۴۶۳	۰/۶۵۷۷۵ – ۰/۶۷۶۶۵۳۷
۱	۰/۵	۵۰	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۰۲۳۱۴۹	۰/۰۰۲۴۰۳۹۰۶	۰/۶۹۷۶۰۳۳ – ۰/۷۰۷۰۲۶۴
۲	۰/۶	۵۰	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۷۸۷۰۷۷	۰/۰۰۱۵۸۱۴۵۴	۰/۷۷۵۶۰۸۱ – ۰/۷۸۱۸۰۷۳
۳	۰/۴	۵۰	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۰۰۱۹۵۳۹۲۵	۰/۶۷۵۳۷۹ – ۰/۶۸۳۰۳۸۳
۱	۰/۵	۷۵	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۱۰۷۴۶۳	۰/۰۰۱۰۵۱۵۵۳	۰/۷۰۸۶۸۵۳ – ۰/۷۱۲۸۰۷۳
۲	۰/۶	۷۵	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۷۵۳	۰/۰۰۱۲۲۵۸۷۲	۰/۷۷۲۸۹۷۳ – ۰/۷۷۷۷۰۲۶
۳	۰/۴	۷۵	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۷۶۷۴۹۱	۰/۰۰۱۷۱۵۰۱۹	۰/۶۷۳۳۸۷۷ – ۰/۶۸۰۱۱۰۴
۱	۰/۵	۱۰۰	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۶۹۹۳۹۱۶	۰/۰۰۱۳۹۵۵۵۹	۰/۶۹۶۶۵۶۴ – ۰/۷۰۲۱۲۶۸
۲	۰/۶	۱۰۰	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۸۱۶۸۵۳	۰/۰۰۰۶۶۴۲۳۵	۰/۷۸۰۳۸۳۴ – ۰/۷۸۲۹۸۷۲
۳	۰/۴	۱۰۰	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۶۷۷۶۲۱	۰/۰۰۱۲۳۹۷۴۹	۰/۶۶۵۳۳۲۲ – ۰/۶۷۰۱۹۱۹

همانند نتایج شبیه‌سازی برآورد درستنمایی ماکزیمم برای توزیع نمایی، برآوردها در توزیع وایبل نیز با افزایش حجم نمونه بهبود پیدا کرده‌اند و خطای برآورد و همچنین طول فاصله اطمینان کاهش پیدا کرده است. همانطور که از خطاها پیداست، روش درستنمایی ماکزیمم حتی برای حجم نمونه کوچک ۲۵ نیز بسیار خوب عمل کرده است. این مزیت در موقعیت‌های عملی بسیار مهم است چرا که در واقعیت، ممکن است با حجم نمونه کوچکی برخورد کنیم.

برآورد بیزی

برای بدست آوردن برآورد بیزی برای توزیع وایبل همانطور که در بخش ۲.۲.۳ بیان شد، به دلیل نامعلوم بودن توزیع‌های پسین حاشیه‌ای، از روش متروپولیس–هستینگز استفاده می‌کنیم. همانند بدست آوردن برآورد بیزی برای توزیع نمایی، دو حالت توزیع پیشین آگاهی‌بخش و کم آگاهی‌بخش را در نظر می‌گیریم.

حالت اول، توزیع پیشین آگاهی‌بخش

در این حالت توزیع‌های پسینی در نظر می‌گیریم که در همسایگی میانگین توزیع متمرکز شده باشند. همانطور که قبلا ذکر شد،

$$a \sim \Gamma(\lambda, \gamma), \quad \beta_i = \log b_i \sim N(\mu_i, \sigma_i); i = ۱, \cdots, ۴.$$

جدول ۹.۳ شامل مقادیر پارامترها برای حالت مذکور می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی، در جدول ۱۰.۳ ارائه شده‌اند.

جدول ۹.۳: پارامترهای توزیع‌های پیشین

حالت	λ	γ	$\mu_۱$	$\sigma_۱$	$\mu_۲$	$\sigma_۲$	$\mu_۳$	$\sigma_۳$	$\mu_۴$	$\sigma_۴$
۱	۵	۱۰	۲/۵	۱۰	۵	۱۰	۴	۱۰	۳	۱۰
۲	۸	۱۲	۲/۵	۱۰	۴/۵	۱۰	۲	۱۰	۳	۱۰
۳	۴	۱۰	۳/۵	۱۰	۴	۱۰	۴/۵	۱۰	۳	۱۰

جدول ۱۰.۳: برآورد بیز

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	۹۵٪ فاصله اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۱۰۱۵۵۲	۰/۰۰۵۴۴۸۲۴۱	۰/۶۹۹۴۷۶۸ – ۰/۷۲۰۸۳۳۵
۲	۲۵	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۸۰۰۹۵۶	۰/۰۰۳۸۴۴۹۶۶	۰/۷۹۳۴۲ – ۰/۸۰۸۴۹۲
۳	۲۵	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۸۵۶۹۳۷	۰/۰۰۲۴۴۳۵۶۸	۰/۶۸۰۹۰۴۴ – ۰/۶۹۰۴۸۳
۱	۵۰	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۲۶۶۱۸۶	۰/۰۰۱۳۸۷۸۹۷	۰/۷۲۳۸۹۸۴ – ۰/۷۲۹۳۳۸۸
۲	۵۰	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۸۲۰۶۶۵	۰/۰۰۱۷۲۶۵۰۶	۰/۷۷۸۶۸۲۶ – ۰/۷۸۵۴۵۰۴
۳	۵۰	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۶۰۴۲۷	۰/۰۰۳۰۸۴۵۴۲	۰/۶۵۴۳۸۱۴ – ۰/۶۶۶۴۷۲۶
۱	۷۵	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۲۳۶۵۹	۰/۰۰۱۳۲۲۰۸۹	۰/۷۲۱۰۶۷۷ – ۰/۷۲۶۲۵۰۲
۲	۷۵	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۸۷۰۳۲۲	۰/۰۰۱۷۸۸۲۴۹	۰/۷۸۳۵۲۷۳ – ۰/۷۹۰۵۳۷۱
۳	۷۵	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۹۳۷۱۳۸	۰/۰۰۱۷۲۸۱۷۸	۰/۶۹۰۳۲۶۷ – ۰/۶۹۷۱۰۱
۱	۱۰۰	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۲۴۷۹۶۹	۰/۰۰۰۹۹۸۳۱۵۷	۰/۷۲۲۸۴۰۲ – ۰/۷۲۶۷۵۳۵
۲	۱۰۰	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۸۱۳۵۴۲	۰/۰۰۰۴۸۴۵۰۶۳	۰/۷۸۰۴۰۴۶ – ۰/۷۸۲۳۰۳۸
۳	۱۰۰	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۷۷۴۳۵۶	۰/۰۰۰۶۴۳۶۵۳۵	۰/۶۷۶۱۷۴۱ – ۰/۶۷۸۶۹۷۲

با توجه به اینکه نتایج شبیه‌سازی قابل قبول می‌باشد، اما همانند نتایج شبیه‌سازی برای مدل فشار مقاومت نمایی، برآوردها و فواصل با سرعت کمی بهبود می‌یابند.

حالت دوم، توزیع پیشین کم آگاهی‌بخش

برای تولید توزیع‌های پیشینی که اطلاعات کمی دارند، پارامترهای توزیع گاما و نرمال به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که این توزیع‌های پیشین پراکندگی زیادی داشته باشند. مقادیر پارامترهای این توزیع‌ها در جدول ۱۱.۳ آمده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود، مقادیر انحراف معیار در حالت کم آگاهی‌بخش، ۱۰۰ برابر

بزرگتر از حالتی است که توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش استفاده شد. در این حالت تقریبا اطلاعاتی وجود ندارد. جدول ۱۲.۳، مقادیر شبیه‌سازی را همراه با انحراف معیار و نواحی اطمینان برای حالت‌های

جدول ۱۱.۳: پارامترهای توزیع‌های پیشین

حالت	λ	γ	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	μ_3	σ_3	μ_4	σ_4
۱	۰/۵	۰/۰۱	۲/۵	۱۰۰۰	۵	۱۰۰۰	۴	۱۰۰۰	۳	۱۰۰۰
۲	۰/۶	۰/۰۱	۲/۵	۱۰۰۰	۴/۵	۱۰۰۰	۲	۱۰۰۰	۳	۱۰۰۰
۳	۰/۴	۰/۰۱	۳/۵	۱۰۰۰	۴	۱۰۰۰	۴/۵	۱۰۰۰	۳	۱۰۰۰

مختلفی که در جدول ۱۱.۳ ذکر شد، نشان می‌دهد. در این حالت نیز با افزایش حجم نمونه، برآوردها

جدول ۱۲.۳: ببرآورد بیز

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	۹۵٪ فاصله اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۱۳۷۵۹	۰/۰۰۳۰۸۷۴۱۶	۰/۷۰۷۷۰۷۸ – ۰/۷۱۹۸۱۰۳
۲	۲۵	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۹۸۵۱۴۷	۰/۰۰۲۲۶۵۵۴۷	۰/۷۹۴۰۷۴۳ – ۰/۸۰۲۹۵۵۱
۳	۲۵	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۸۳۱۵۱۹	۰/۰۰۳۶۰۰۳۲۷	۰/۶۷۶۰۹۵۴ – ۰/۶۹۰۲۰۸۴
۱	۵۰	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۲۴۲۲۹۶	۰/۰۰۱۴۹۳۹۱۳	۰/۷۲۱۳۰۱۶ – ۰/۷۲۷۱۵۷۶
۲	۵۰	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۹۵۱۶۴۵	۰/۰۰۴۲۳۸۰۵۲	۰/۷۸۶۸۵۸۱ – ۰/۸۰۳۴۷۰۹
۳	۵۰	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۸۷۷۰۷۵	۰/۰۰۲۷۷۲۴۸۸	۰/۶۸۲۲۷۳۵ – ۰/۶۹۳۱۴۱۴
۱	۷۵	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۰۸۱۸۶۱	۰/۰۰۱۰۷۵۳۸۴	۰/۷۰۶۰۷۸۴ – ۰/۷۱۰۲۹۳۹
۲	۷۵	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۹۳۱۳۸۵	۰/۰۰۰۷۴۴۶۶۶۵	۰/۷۹۱۶۷۹ – ۰/۷۹۴۵۹۸
۳	۷۵	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۹۳۱۳۳۷	۰/۰۰۱۲۶۷۷۷۲	۰/۶۹۰۶۴۸۹ – ۰/۶۹۵۶۱۸۵
۱	۱۰۰	۰/۷۰۴۴۱۸۸	۰/۷۱۶۹۸۵۳	۰/۰۰۱۱۷۴۰۴۵	۰/۷۱۴۶۸۴۲ – ۰/۷۱۹۲۸۶۴
۲	۱۰۰	۰/۷۷۹۶۶۵۱	۰/۷۸۸۹۰۳۶	۰/۰۰۱۰۱۰۱۸۷	۰/۷۸۶۹۲۳۶ – ۰/۷۹۰۸۸۳۵
۳	۱۰۰	۰/۶۷۰۷۹۸۸	۰/۶۸۳۰۱۵۶	۰/۰۰۱۲۶۴۴۳۷	۰/۶۸۰۵۳۷۴ – ۰/۶۸۵۴۹۳۹

با سرعت کمی بهبود پیدا می‌کنند. همانند برآورد بیزی برای مدل فشار- مقاومت نمایی، اختلاف بین برآوردهای حاصل از توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش و کم آگاهی‌بخش اندک است.

فصل ۴

برآود قابلیت‌اطمینان سیستم تحت توزیع نمایی دو پارامتری

۱.۴ مدل فشار -مقاومت نمایی دو پارامتری

در این فصل، قابلیت اطمینان را برای سیستم‌های موازی هنگامی که مولفه‌های فشار - مقاومت، دارای طول عمری با توزیع نمایی دو پارامتری هستند، به دو روش درستنمایی ماکزیمم و بیزی به‌دست می‌آوریم. این مبحث، جدید بوده و بوسیله نویسنده پایان‌نامه انجام شده است.

۱.۱.۴ قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی

در این بخش، برآورد قابلیت‌اطمینان یک سیستم موازی، با k مولفه $X_۱, X_۲, ..., X_k$، که با فشار مشترک تصادفی $X_{k+۱}$ روبرو است ارائه می‌شود. فرض کنید $X_i; (i = ۱, ۲, \cdots, k+۱)$ها دارای توزیع مستقل نمایی دو پارامتری باپارمترهای μ و λ هستند. بدین ترتیب تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی مدل به صورت زیر بیان می‌شود

$$f_i(x_i) = \frac{۱}{\lambda_i} e^{-\frac{x_i - \mu_i}{\lambda_i}}, \qquad x_i > \mu_i > ۰, \lambda_i > ۰.$$

در ادامه روند برآورد قابلیت‌اطمینان، ابتدا تابع بقای سیستم را تحت لم زیر به‌دست می‌آوریم.

لم ۱.۱.۴. فرض کنید $X_i; (i = ۱, ۲, \cdots, k)$ها (متغیرهای طول عمر) دارای توزیع نمایی دو پارامتری هستند. آن‌گاه به ازای $y > \mu^*$ که $\mu^* = \max(\mu_۱, \mu_۲, \mu_۳, ..., \mu_k)$ ، توزیع $Y = \max(X_۱, X_۲, X_۳, ..., X_k)$ برابر عبارت زیر است

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(X_۱ \le y, X_۲ \le y, X_۳ \le y, \cdots, X_k \le y) \\ &= (۱ - e^{-\frac{y-\mu_۱}{\lambda_۱}})(۱ - e^{-\frac{y-\mu_۲}{\lambda_۲}})(۱ - e^{-\frac{y-\mu_۳}{\lambda_۳}}) \cdots (۱ - e^{-\frac{y-\mu_k}{\lambda_k}}) \end{aligned}$$

$$= 1 - \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1>}^{k}\cdots\sum_{>i_r} e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{y-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}.$$

برهان. ابتدا به ازای $k = 3$ رابطه فوق را اثبات می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned} G(y) &= 1 - \sum_{r=1}^{3}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{>i_2}\sum_{>i_3} e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{y-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})} \\ &= 1 - (-1)^{0}\sum_{i_1=1}^{3} e^{-(\frac{y-\mu_{i_1}}{\lambda_{i_1}})} - (-1)^{1}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{>i_2} e^{-\sum_{j=1}^{2}(\frac{y-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})} \\ &\quad -(-1)^{2}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{>i_2}\sum_{>i_3} e^{-\sum_{j=1}^{3}(\frac{y-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})} \\ &= 1 - A - B - C. \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

مقادیر A، B و C به صورت عبارات زیر هستند

$$A = e^{-(\frac{y-\mu_1}{\lambda_1})} + e^{-(\frac{y-\mu_2}{\lambda_2})} + e^{-(\frac{y-\mu_3}{\lambda_3})}. \tag{۲.۴}$$

$$B = -e^{-(\frac{y-\mu_1}{\lambda_1})-(\frac{y-\mu_2}{\lambda_2})} - e^{-(\frac{y-\mu_2}{\lambda_2})-(\frac{y-\mu_3}{\lambda_3})} - e^{-(\frac{y-\mu_3}{\lambda_3})-(\frac{y-\mu_1}{\lambda_1})}. \tag{۳.۴}$$

$$C = e^{-(\frac{y-\mu_1}{\lambda_1})-(\frac{y-\mu_2}{\lambda_2})-(\frac{y-\mu_3}{\lambda_3})}. \tag{۴.۴}$$

با قرار دادن روابط (۲.۴–۴.۴) در رابطه (۱.۴) خواهیم داشت

$$G(y) = (1 - e^{-\frac{y-\mu_1}{\lambda_1}})(1 - e^{-\frac{y-\mu_2}{\lambda_2}})(1 - e^{-\frac{y-\mu_3}{\lambda_3}}),$$

بنابراین نشان می‌دهیم رابطه به ازای $k = 3$ اثبات شده، و به ازای مقدار کلی k اثبات مشابهی انجام می‌شود. □

اکنون قابلیت‌اطمینان سیستم مورد نظر را براساس تابع بقا فوق به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} R &= P[X_{k+1} < Y] \\ &= \int_{\mu_{k+1}}^{\infty} \bar{G}(x_{k+1})dF_{k+1}(x_{k+1}) \\ &= \int_{\mu_{k+1}}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r} e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{x-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}\frac{1}{\lambda_{k+1}}e^{-(\frac{x-\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}})}dx \\ &= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\int_{\mu_{k+1}}^{\infty} e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{x-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}\frac{1}{\lambda_{k+1}}e^{-(\frac{x-\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}})}dx \\ &= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\int_{\mu_{k+1}}^{\infty} e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{x-\mu_{k+1}+\mu_{k+1}-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}\frac{1}{\lambda_{k+1}}e^{-(\frac{x-\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}})}dx \\ &= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{1}{\lambda_{k+1}}e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{\mu_{k+1}-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}\int_{\mu_{k+1}}^{\infty} e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{x-\mu_{k+1}}{\lambda_{i_j}})}e^{-(\frac{x-\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}})}dx \\ &= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{1}{\lambda_{k+1}}e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{\mu_{k+1}-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}\int_{\mu_{k+1}}^{\infty} e^{-(x-\mu_{k+1})\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_{i_j}}}e^{-(x-\mu_{k+1})\frac{1}{\lambda_{k+1}}}dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{1}{\lambda_{k+1}}e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{\mu_{k+1}-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}\int_{\mu_{k+1}}^{\infty}e^{-(x-\mu_{k+1})(\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_{i_j}}+\frac{1}{\lambda_{k+1}})}dx$$

$$= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{1}{\lambda_{k+1}}e^{-\sum_{j=1}^{r}(\frac{\mu_{k+1}-\mu_{i_j}}{\lambda_{i_j}})}\frac{1}{(\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_{i_j}}+\frac{1}{\lambda_{k+1}})}, \quad (۵.۴)$$

به طوری که $\mu_{i_j} \leq \mu^*$ ، $\mu_{i_1}....\mu_{i_k}$ و $\bar{G}(t) = P(Y > t)$.
اگر در رابطه فوق، تساوی $\mu_1 = ... = \mu_{k+1} = \mu$ برقرار باشد، آنگاه قابلیت‌اطمینان به صورت زیر باز نویسی می‌شود

$$R = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\frac{1}{\lambda_{k+1}}\frac{1}{(\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_{i_j}}+\frac{1}{\lambda_{k+1}})}. \quad (۶.۴)$$

۲.۱.۴ برآورد ماکزیمم درستنمایی

تحت مفروضات بخش ۱.۱.۴ تابع ماکزیمم درستنمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} L(\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1},\mu_1,\cdots,\mu_{k+1};\mathbf{X}) &= \prod_{i=1}^{k+1}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i e^{-\lambda_i(x_{i_j}-\mu_i)}I_{(\mu_i,\infty)}(x_{i_j}) \\ &= e^{-\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i(X_{i_j}-\mu_i)}(\prod_{i=1}^{k+1}(\lambda_i)^n)\prod_{i=1}^{k+1}I_{(\mu_i,\infty)}(x_{i_{(1)}}), \end{aligned}$$

با لگاریتم گرفتن از طرفین تساوی داریم

$$l(\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1},\mu_1,\cdots,\mu_{k+1}) = -\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i(X_{i_j}-\mu_i)+\sum_{i=1}^{k+1}n\ln(\lambda_i)I(x_{i_{(1)}}>\mu_i),$$

در نهایت با مشتق‌گیری نسبت به پارامترهای مقیاس، معادله درستنمایی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}l(\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1},\mu_1,\cdots,\mu_{k+1}) = -\lambda_i^2\sum_{j=1}^{n}(x_{i_j}-\mu_i)+n\frac{1}{\lambda_i}=0,$$

بنابراین با حل معادله درستنمایی، برآورد ماکزیمم درستنمایی برای پارامتر مقیاس عبارتند از

$$\hat{\lambda}_i = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n}(X_{i_j}-X_{i_{(1)}})}.$$

از سوی دیگر چون تابع درستنمایی بر حسب μ صعودی است، بنابراین این تابع بیشترین مقدار خود را در بیشترین مقدار μ که $X_{(1)}$ باشد به دست می‌آورد. بنابراین برآورد ماکزیمم درستنمایی برای μ عبارتند از

$$\hat{\mu}_i = X_{i_{(1)}}; i = 1,2,3,\cdots,k+1.$$

حال با استفاده از خاصیت پایایی برآورد ماکزیمم درستنمایی، می‌توان با قرار دادن برآوردهای فوق درروابط ۵.۴و ۶.۴، برآورد ماکزیمم درستنمایی قابلیت اطمینان را در دو حالت ذکر شده به‌دست آورد. در این فصل با انجام مطالعه شبیه‌سازی، برآوردهای درستنمایی ماکزیمم و بیزی را برای قابلیت اطمینان سیستم فشار مقاومت موازی دارای توزیع نمایی دو پارامتری، به‌دست می‌آوریم.

۳.۱.۴ برآورد بیزی

برای به‌دست آوردن برآورد بیزی قابلیت اطمینان، دو حالت را در نظر می‌گیریم. در حالت اول فرض می‌کنیم پارامتر مقیاس معلوم و برابر مقدار معلوم ۱ $\lambda_i; i = ۱, ۲, \cdots, k+۱$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن برآورد بیزی پارامتر شکل، ابتدا تابع پیشین زیر را در نظر می‌گیریم

$$\pi(\mu_i) = a_i e^{-a_i \mu_i}, \quad i = ۱, ۲, \cdots, k+۱.$$

بنابراین فرم عمومی توزیع پسین با فرض معلوم بودن a_iها،به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{X}) \propto f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\mu}).\pi(\boldsymbol{\mu}) &= L(\boldsymbol{\mu};\mathbf{X}).\pi(\boldsymbol{\mu}) \\
&\propto e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱}\sum_{j=۱}^{n}\lambda_i(x_{i_j}-\mu_i)} \prod_{i=۱}^{k+۱} I(x_{i_{(۱)}} > \mu_i).\prod_{i=۱}^{k+۱} a_i e^{-a_i\mu_i} \\
&\propto e^{n\sum_{i=۱}^{k+۱}\lambda_i\mu_i} e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱}a_i\mu_i} \prod_{i=۱}^{k+۱} I(x_{i_{(۱)}} > \mu_i) \\
&\propto e^{-\sum_{i=۱}^{k+۱}(n\lambda_i - a_i)\mu_i} \prod_{i=۱}^{k+۱} I(x_{i_{(۱)}} > \mu_i) \\
&= \prod_{i=۱}^{k+۱} e^{-(n\lambda_i-a_i)\mu_i} I(x_{i_{(۱)}} > \mu_i) \\
&\propto \prod_{i=۱}^{k+۱} e^{-(n\lambda_i-a_i)\mu_i} e^{(n\lambda_i-a_i)x_{i_{(۱)}}} \\
&\propto \prod_{i=۱}^{k+۱} (n\lambda_i - a_i) e^{-(n\lambda_i-a_i)\mu_i} e^{(n\lambda_i-a_i)x_{i_{(۱)}}} \\
&= \prod_{i=۱}^{k+۱} (n\lambda_i - a_i) e^{-(n\lambda_i-a_i)(\mu_i - x_{i_{(۱)}})},
\end{aligned}$$

با توجه به فرم عمومی توزیع پسین می‌توان گفت که این توزیع پسین دارای توزیع نمایی دو پارامتری با پارامتر مقیاس $n\lambda_i + a_i$ و پارامتر شکل $x_{i_{(۱)}}$ است. بنابراین برآورد بیزی μ_i به صورت

$$E(\mu_i|\mathbf{X}) = x_{i_{(۱)}} + \frac{۱}{n\lambda_i - a_i},$$

می‌باشد. به این ترتیب برآورد بیزی قابلیت اطمینان به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
\hat{R}_b &= E(R|\mathbf{X}) \\
&= E\left(\sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱=۱}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\lambda_{k+۱}e^{-\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j}(\mu_{k+۱}-\mu_{i_j})}\frac{۱}{(\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j}+\lambda_{k+۱})}|\mathbf{X}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{۰}^{\infty}\cdots\int_{۰}^{\infty}\left(\sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱=۱}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\lambda_{k+۱}e^{-\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j}(\mu_{k+۱}-\mu_{i_j})}\frac{۱}{(\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j}+\lambda_{k+۱})}\right)\\
&\quad .\pi(\mu_۱,\cdots,\mu_{k+۱}|X_۱,\cdots,X_{k+۱})d\mu_۱\cdots,d\mu_{k+۱}\\
&= \int_{۰}^{\infty}\cdots\int_{۰}^{\infty}\left(\sum_{r=۱}^{k}(-۱)^{r-۱}\sum_{i_۱=۱}^{k}\cdots\sum_{>i_r}\lambda_{k+۱}e^{-\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j}(\mu_{k+۱}-\mu_{i_j})}\frac{۱}{(\sum_{j=۱}^{r}\lambda_{i_j}+\lambda_{k+۱})}\right)\\
&\quad (n\lambda_۱-a_۱)e^{-(n\lambda_۱-a_۱)(\mu_۱-x_{۱_{(۱)}})}\cdots(n\lambda_{k+۱}-a_{k+۱})e^{-(n\lambda_{k+۱}-a_{k+۱})(\mu_{k+۱}-x_{k+۱_{(۱)}})}\\
&\quad d\mu_۱\cdots,d\mu_{k+۱}, \qquad (۷.۴)
\end{aligned}
$$

به دلیل پیچیده بودن انتگرال (۷.۴)، همان گونه که در فصل ۳ همین پایان نامه بیان کردیم در این‌گونه موارد از الگوریتم‌های عددی بر پایه روش‌های MCMC استفاده می‌کنیم. در این مورد، به دلیل مشخص بودن توزیع پسین پارامترها و سهولت در نمونه‌گیری روش نمونه‌گیری گیبز را به کار می‌بریم.

در حالت دوم: فرض می‌کنیم پارامتر شکل ثابت و برابر با مقدار معلوم $\mu_i; i = ۱, ۲, \cdots, k+۱$ می‌باشد. در این حالت نیز توزیع پیشین پارامتر مقیاس را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\pi(\lambda_i) = b_i e^{-b_i(\lambda_i-\mu_i)}, \quad i = ۱, ۲, \cdots, k+۱.$$

آن‌گاه برای توزیع پسین با فرض معلوم بودن b_iها، داریم

$$
\begin{aligned}
\pi(\lambda_i|\mathbf{x}_i) &\propto \prod_{j=۱}^{n} f(x_{i_j};\lambda_i)\pi(\lambda_i)\\
&\propto \prod_{j=۱}^{n}\lambda_i e^{-\lambda_i(x_{i_j}-۱)}.b_i e^{-b_i(\lambda_i-\mu_i)}\\
&\propto \lambda_i^n e^{-\lambda_i\sum_{j=۱}^{n}(x_{i_j}-۱)}.e^{-b_i\lambda_i}\\
&\propto \lambda_i^n e^{-\lambda_i(n\bar{x}_i-(n-b_i))}.
\end{aligned}
$$

در نتیجه توزیع پسین عبارتست از

$$\lambda_i|\mathbf{x}_i \sim \Gamma(n+۱, n\bar{x}_i-(n-b_i)).$$

بنابراین تحت تابع زیان درجه دوم خطا، برآوردگر بیزی بصورت

$$E(\lambda_i|\mathbf{X}_i) = \frac{n+۱}{n\bar{X}_i-(n-b_i)},$$

محاسبه می‌شود. برای محاسبه برآورد بیزی قابلیت اطمینان، همانند رابطه (۷.۴) عمل کرده و از روش‌های عددی MCMC استفاده می‌کنیم.

۴.۱.۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این فصل نیز با انجام یک مطالعه شبیه‌سازی، برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم و بیزی را برای توزیع نمایی دو پارامتری ارزیابی می‌کنیم. همانند فصل گذشته و مطالعه شبیه‌سازی برای توزیع وایبل و نمایی، در این فصل نیز یک سیستم سه مولفه‌ای موازی را با مقادیر متفاوت پارامترهای شکل و مقیاس برای

توزیع نمایی دو پارامتری در نظر می‌گیریم. متغیر فشارنیز برای این توزیع، نمایی دو پارامتری در نظر گرفته می‌شود.

همانند فصل قبل، چهار حجم نمونه $n = \{۲۵, ۵۰, ۷۵, ۱۰۰\}$ و سه حالت متفاوت برای هر حجم نمونه در نظر می‌گیریم.

برآورد درستنمایی ماکزیمم

برای به‌دست آوردن برآورد درستنمایی ماکزیمم، مقادیر جداول ۱.۴ و ۲.۴ را به ترتیب بعنوان مقادیر پارامتر شکل و مقیاس توزیع در نظر می‌گیریم.

جدول ۱.۴: پارامترهای شکل توزیع نمایی دو پارامتری

حالت	$\mu_۱$	$\mu_۲$	$\mu_۳$	$\mu_۴$
۱	۱	۲	۳	۲
۲	۱/۵	۱	۳	۲
۳	۱	۲	۱/۵	۲

جدول ۲.۴: پارامترهای مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری

حالت	$\lambda_۱$	$\lambda_۲$	$\lambda_۳$	$\lambda_۴$
۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۲
۲	۰/۱۵	۰/۱	۰/۳	۰/۲
۳	۰/۱	۰/۲	۰/۱۵	۰/۲

با توجه به بخش ۱.۱.۴، ابتدا برآوردهای درستنمایی ماکزیمم پارامترها رو به‌دست می‌آوریم، آنگاه با قرار دادن مقادیر این برآوردها در رابطه (۵.۴)، برآورد درستنمایی قابلیت اطمینان را محاسبه می‌کنیم. نتایج شبیه‌سازی در جدول ذکر شده‌اند. با توجه به نتایج جدول ۳.۴، مشاهده می‌شود که برآوردها به روش درستنمایی ماکزیمم بسیار دقیق می‌باشند و خطاهای بسیار ناچیزی دارند. همچنین افزایش حجم نمونه تاثیر مثبتی بر بهبود برآوردها دارند و با افزایش حجم نمونه، خطاها کمتر و فواصل اطمینان کوچکتر شده‌اند. با توجه به اینکه مقادیر پارامترهای مقیاس در توزیع نمایی دو پارامتری در این فصل و توزیع نمایی در فصل قبل با هم برابر هستند، اما نتایج و خطاهای تقریبا مشابهی در برآورد قابلیت اطمینان به‌دست آمده است.

برآورد بیزی

مطابق آنچه در بخش ۳.۱.۴ بیان شد، با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس برابر مقدار معلوم λ_i، در این فصل تنها حالت توزیع پیشین کم آگاهی‌بخش را در نظر می‌گیریم. اگر نتایج قابل قبول باشند، نتایج

جدول ۳.۴: برآورد درستنمایی ماکزیمم قابلیت اطمینان

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	٪۹۵ فاصله اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۴۳۳۳۷	۰/۰۰۲۳۸۳۷۹۸	۰/۷۸۹۶۶۱۶ – ۰/۷۹۹۰۰۵۹
۲	۲۵	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۰۸۹۷۹۶	۰/۰۰۳۱۱۶۰۱۵	۰/۸۰۲۸۷۲۳ – ۰/۸۱۵۰۸۶۹
۳	۲۵	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۱۸۹۱۱۸	۰/۰۰۳۳۸۴۱۴۱	۰/۸۱۲۲۷۹ – ۰/۸۲۵۵۴۴۶
۱	۵۰	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۵۰۲۸۵	۰/۰۰۱۵۱۹۴۲۲	۰/۷۹۲۰۵۰۴ – ۰/۷۹۸۰۰۶۵
۲	۵۰	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۰۹۱۱۶۸	۰/۰۰۱۳۴۱۱۵۷	۰/۸۰۶۴۸۸۲ – ۰/۸۱۱۷۴۵۴
۳	۵۰	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۱۹۹۸۱	۰/۰۰۱۳۷۰۴۰۱	۰/۸۱۷۲۹۵۱ – ۰/۸۲۲۶۶۷
۱	۷۵	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۲۱۳۱۹	۰/۰۰۱۱۲۰۵۵۱	۰/۷۸۹۹۳۵۶ – ۰/۷۹۴۳۲۸۱
۲	۷۵	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۱۰۶۲۴۹	۰/۰۰۰۸۹۷۴۱۶۷	۰/۸۰۸۸۶۶ – ۰/۸۱۲۳۸۳۸
۳	۷۵	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۲۰۰۱۷۴	۰/۰۰۰۹۰۹۸۴۹۵	۰/۸۱۸۲۳۴۲ – ۰/۸۲۱۸۰۰۷
۱	۱۰۰	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۳۵۹۰۲	۰/۰۰۰۷۷۴۹۹۸۱	۰/۷۹۲۰۷۱۳ – ۰/۷۹۵۱۰۹۲
۲	۱۰۰	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۱۰۷۹۱۹	۰/۰۰۰۶۸۰۸۴۱	۰/۸۰۹۴۵۷۴ – ۰/۸۱۲۱۲۶۳
۳	۱۰۰	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۱۹۶۹۳۷	۰/۰۰۰۶۲۷۶۶۹	۰/۸۱۸۴۶۳۴ – ۰/۸۲۰۹۲۳۹

مشابهی را می‌توان در حالتی که توزیع پیشین آگاهی‌بخش انتخاب می‌شود متصور بود. با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشینی که در همسایگی میانگین توزیع متمرکز نیستند و در واقع حاوی اطلاعات زیادی نمی‌باشند، جدول ۴.۴ که شامل مقادیر پارامترهای a_i برای توزیع پیشین $\pi(\mu_i) = a_i e^{-a_i \mu_i}$ است را در نظر می‌گیریم. برآوردهای قابل اطمینان در حالت مذکور در جدول ۵.۴ ذکر شده‌اند.

جدول ۴.۴: پارامترهای توزیع پیشین پارامتر شکل

حالت	a_1	a_2	a_3	a_4
۱	۰/۱	۰/۳	۰/۲	۰/۳
۲	۰/۱۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۳	۰/۱	۰/۳	۰/۱۵	۰/۳

با وجود توزیع پیشینی با اطلاعات کم اما مقادیر خطاها و برآوردها نشان از برآوردی بسیار دقیق دارند. از طرفی با افزایش حجم نمونه، برآوردها دقیق‌تر شده‌اند.

در حالتی که پارامتر شکل مقداری معلوم است، جدول ۶.۴ را مقادیر پارامترهای b_i توزیع پیشین $\pi(\lambda_i) = b_i e^{-b_i(\lambda_i - \mu_i)}$ در نظر می‌گیریم. برآورد بیزی قابلیت اطمینان در جدول ۷.۴ گزارش شده‌اند. همانطور که در جدول ۷.۴ مشاهده می‌شود، برآوردهای بیزی پارامتر مقیاس از دقت خوبی برخوردار هستند اما در مقایسه به برآورد بیزی پارامتر شکل در جدول ۵.۴، این میزان دقت کمتر است. اما به‌طور مشابه با نتایج جدول ۵.۴، با افزایش حجم نمونه، دقت برآوردها افزایش یافته‌اند.

جدول ۵.۴: برآورد بیزی قابلیت اطمینان

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	٪۹۵ فاصله اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۹۰۴۴۴	۰/۰۰۰۲۲۹۵۷۸۱	۰/۷۹۵۵۹۴۴ – ۰/۷۹۹۴۹۴۴
۲	۲۵	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۱۶۹۹۹۱	۰/۰۰۰۱۶۱۴۳۸۹	۰/۸۰۶۶۸۲۷ – ۰/۸۱۷۳۱۵۵
۳	۲۵	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۲۵۷۹۱۷	۰/۰۰۰۱۴۳۱۰۱۹	۰/۸۱۵۵۱۱۲ – ۰/۸۲۶۰۷۲۲
۱	۵۰	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۶۱۶۴۱	۰/۰۰۰۰۳۳۰۶۸۵۵	۰/۷۹۱۰۹۹۳ – ۰/۷۹۶۲۲۸۹
۲	۵۰	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۱۲۷۴۶۶	۰/۰۰۰۰۴۴۶۸۱۸۳	۰/۸۰۲۶۵۹ – ۰/۸۱۲۸۳۴۲
۳	۵۰	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۲۳۰۶۰۸	۰/۰۰۰۰۳۴۵۴۰۸۷	۰/۸۱۲۹۹۳۱ – ۰/۸۲۳۱۲۸۵
۱	۷۵	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۵۱۱۲۴	۰/۰۰۰۰۱۹۰۹۵۳۵	۰/۷۹۰۰۷۵ – ۰/۷۹۵۱۴۹۸
۲	۷۵	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۱۱۷۰	۰/۰۰۰۰۱۲۸۰۶۱۳	۰/۸۰۱۶۷۷۹ – ۰/۸۱۱۷۲۸۱
۳	۷۵	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۲۱۳۷۹۶	۰/۰۰۰۰۲۰۴۰۰۷۲	۰/۸۱۱۳۳۹۶ – ۰/۸۲۱۴۱۹۶
۱	۱۰۰	۰/۷۹۳۷۷۶	۰/۷۹۵۲۵۶	۰/۰۰۰۰۰۹۶۴۸۸۰۴	۰/۷۹۰۲۳۷۱ – ۰/۷۹۵۲۷۴۹
۲	۱۰۰	۰/۸۰۹۹۲۴۲	۰/۸۱۰۸۵۸۱	۰/۰۰۰۰۱۱۲۳۴۳۹	۰/۸۰۰۸۳۶۱ – ۰/۸۱۰۸۸۰۱
۳	۱۰۰	۰/۸۱۹۲۷۰۳	۰/۸۲۱۰۶۶۷	۰/۰۰۰۰۰۹۹۷۵۴۷۹	۰/۸۱۱۰۴۷۱ – ۰/۸۲۱۰۸۶۲

جدول ۶.۴: پارامترهای توزیع پیشین پارامتر مقیاس

حالت	۱	۲	۳	۴
۱	۳۰۰	۴۰۰	۲۵۰	۳۲۰
۲	۳۵۰	۳۰۰	۲۵۰	۳۲۰
۳	۳۰۰	۴۰۰	۳۵۰	۳۲۰

جدول ۷.۴: برآورد بیزی قابلیت اطمینان

حالت	n	R	$\hat{R}$	انحراف معیار	۹۵٪ فاصله‌اطمینان
۱	۲۵	۰/۷۵۳۷۷۶	۰/۷۵۰۲۵۸۵	۰/۰۰۲۱۶۴۴۳۹	۰/۷۴۶۰۱۶۳ – ۰/۷۵۴۵۰۰۷
۲	۲۵	۰/۷۴۹۹۲۴۲	۰/۷۳۷۸۲۱۷	۰/۰۰۵۶۴۴۷۷۴	۰/۷۲۶۷۵۸۲ – ۰/۷۴۹۹۸۵۳
۳	۲۵	۰/۷۸۹۲۷۰۳	۰/۷۷۵۸۰۹	۰/۰۰۲۱۹۰۲۵۶	۰/۷۷۱۵۱۶۲ – ۰/۷۹۰۱۰۱۹
۱	۵۰	۰/۷۵۳۷۷۶	۰/۷۵۲۰۸۲۱	۰/۰۰۱۸۹۲۶۰۹	۰/۷۴۸۳۷۲۷ – ۰/۷۵۵۷۹۱۶
۲	۵۰	۰/۷۴۹۹۲۴۲	۰/۷۳۶۲۰۹۷	۰/۰۰۵۶۶۴۴۸۹	۰/۷۳۵۱۰۷۵ – ۰/۷۵۷۳۱۱۹
۳	۵۰	۰/۷۸۹۲۷۰۳	۰/۷۷۴۴۶۹۹	۰/۰۰۲۳۶۲۵۶۲	۰/۷۶۹۸۳۹۴ – ۰/۷۸۹۴۰۰۵
۱	۷۵	۰/۷۵۳۷۷۶	۰/۷۵۳۱۷۸۴	۰/۰۰۱۹۸۳۴۱۳	۰/۷۴۹۲۹۱ – ۰/۷۵۷۰۶۵۸
۲	۷۵	۰/۷۴۹۹۲۴۲	۰/۷۴۰۷۸۴۲	۰/۰۰۵۰۱۸۸۰۳	۰/۷۳۰۹۴۷۵ – ۰/۷۵۰۶۲۰۹
۳	۷۵	۰/۷۸۹۲۷۰۳	۰/۷۷۹۹۳۲۵	۰/۰۰۱۷۸۸۹۵۵	۰/۷۷۶۴۲۶۳ – ۰/۷۸۹۹۳۸۸
۱	۱۰۰	۰/۷۵۳۷۷۶	۰/۷۵۸۶۴۶۶	۰/۰۰۱۴۴۳۳۵۴	۰/۷۵۱۸۱۷۷ – ۰/۷۶۱۴۷۵۵
۲	۱۰۰	۰/۷۴۹۹۲۴۲	۰/۷۴۱۶۹۲۲	۰/۰۰۴۸۸۵۱۴۲	۰/۷۳۲۱۱۷۵ – ۰/۷۵۱۲۶۶۹
۳	۱۰۰	۰/۷۸۹۲۷۰۳	۰/۷۸۸۲۳۸۳	۰/۰۰۱۱۴۱۴۵۲	۰/۷۸۶۰۰۱۱ – ۰/۷۹۰۴۷۵۵

نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها در انتخاب سیستم و میزان رضایت‌مندی از سیسم‌ها در صورتی که مولفه‌های سیستم دارای طول عمری تحت توزیع‌های مختلف آماری باشند، بسیار با اهمیت است. لذا برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها امری مهم است که محققان زیادی تاکنون به آن پرداخته‌اند و روش‌های برآورد متعددی را مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند. دو روش برآوردیابی ماکزیمم درستنمایی و بیزی که از کاربردیترین روش‌ها در برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها هستند را در صورتی که مولفه‌ها دارای طول عمری تحت توزیع‌های مختلف آماری باشند، برای سیستم‌های سری و موازی به‌دست آورده، همچنین تابع توزیع برآوردگرهای قابلیت‌اطمینان را نیز به‌دست می‌آمریم و پس از شبیه‌سازی به نتایج زیر می‌رسیم:

- با فرض این‌که مولفه‌های سیستم‌ها(سری و موازی) دارای طول عمری تحت توزیع‌های مختلف آماری از جمله نمایی،نمایی دوپارامتری، گاما، وایبل و ...باشند، می‌توان با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر و قضیه ۱.۲.۲، تابع توزیع را برای برآودگرهای ماکزیمم درستنمایی قابلیت‌اطمینان به‌دست آورد، و اثبات کرد که این برآوردگرها دارای توزیع مجانبی نرمال هستند.

- پس از انجام شبیه‌سازی نتایج به‌دست آمده در جداول بیان شده درفصول مختلف به این نتیجه می‌رسیم که برای نمونه‌هایی با حجم زیاد استفاده از برآودگر ماکزیمم درستنمایی در بحث برآورد به دلیل داشتن خطای کمتر و فواصل اطمینان کوچکتر برای برآوردگر، به برآورد بیزی ترجیح داده می‌شود.

- با مقایسه جداول مربوط به برآودگرهای بیزی به ازای توزیع‌های پیشن مختلف،(آگاهی بخش و کم آگاهی بخش) به این نتیجه می‌رسیم که نتایج تفاوت چندان ندارند. یعنی انتخاب توابع توزیع پیشیین مختلف(از نظر میزان آگاهی بخشی) در برآورد بیزی تفاوت چشمی‌گیری ندارد.

- در ادامه روند برآورد قابلیت‌اطمینان سیستم‌ها، می‌توان قابلیت‌اطمینان را تحت توزیع‌های مختلف آماری و به روش‌های گوناکو برآوردیابی، برآورد کرده و بهترین مدل را انتخاب کرد.

- می توانیم قابلیت‌اطمینان سیستم های سری و موازی دارای مولفه‌های یکسان، با طول عمری تحت توزیع‌های یکسان برآوردکرده و باهم مقایسه کنیم.

پیوست آ

نمادها و تعریف‌ها

برخی از کمیت‌ها در متن پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند که تعریف‌های آن‌ها به صورت زیر می‌باشند

آ.۱ توزیع‌های پارامتری مهم در قابلیت‌اطمینان.

دراین بخش چند توزیع مهم را که در مطالعات طول عمر و تحلیل بقا نقش اساسی ایفاء می‌کنند بیان می‌کنیم.

تعریف آ.۱.۱ . توزیع نمایی

توزیع نمایی یکی از مهمترین توزیع‌های آماری است که به دلیل خواص جالب، نقش مهمی در مدل سازی داده‌های قابلیت‌اطمینان دارد. توزیع نمایی دارای دو نوع تک پارامتری و دو پارامتری است.اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > ۰, \ \ \lambda > ۰$$

گوییم X دارای توزیع نمایی تک پارامتری با پارامتر λ است و آن را با نماد $X \sim E(\lambda)$ نشان می‌دهیم.اکنون فرض می‌کنیم X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد در این صورت میانگین و واریانس توزیع بصورت زیراست:

$$E_\lambda(x) = \frac{۱}{\lambda} \qquad Var_\lambda(x) = \frac{۱}{\lambda^۲}$$

توجه کنید که تابع قابلیت‌اطمینان این توزیع مساوی است با:

$$\bar{F}(x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda x} \qquad x > ۰ . \lambda > ۰$$

یکی از خواص مهم توزیع نمایی خاصیتی است به نام فقدان حافظه [۱]. متغیر تصادفی پیوسته ونامنفی

[۱] Memoryless Property

T را دارای خاصیت فقدان حافظه گوئیم هرگاه به ازای هر $t_۱$و $t_۲$ نامنفی داشته باشیم:

$$P(T > t_۱ + t_۲ | T > t_۱) = P(T > t_۲)$$

تعریف آ.۲.۱. توزیع گاما :دستگاهی را در نظر بگیرید که از K مولفه مشابه تشکیل شده است، که به صورت دنباله‌ای به هم متصل شده‌اند. هرگاه مولفه شماره ۱ از کار می‌افتد، مولفه شماره ۲ به صورت خودکار شروع به‌کار می‌کند و$\cdots$ تا این‌که مولفه kام از کار بیفتد. فرض می‌کنیم مولفه‌ها دارای توزیع نمایی با پارامتر λ هستند و این‌که مولفه‌ها مستقل از یکدیگر کار می‌کنند. آنگاه طول عمر دستگاه T_D، برابر خواهد شد با مجموع طول عمرهمه مولفه‌ها که با $T_۱, T_۲, \cdots, T_n$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$T_D = \sum_{i=۱}^{n} T_i$$

با توجه به تابع توزیع طول عمر مولفه‌ها وبنابر روابط بین توزیع‌ها، به راحتی می‌توان نشان داد که توزیع T_D دارای چگالی به فرم زیر می‌باشد:

$$f_{T_D}(t) = \frac{t^{k-۱}}{(k-۱)!}\lambda^k e^{-kt} \qquad t > ۰, \lambda > ۰, k = ۱, ۲, \cdots \qquad (۱.آ)$$

این توزیع به توزیع ارلانگ معروف است که خود حالت خاصی از توزیع گاما است که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم. تابع توزیع ارلانگ برابر است با:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{۱}{(k-۱)!}\lambda^k \int_{۰}^{t} x^{k-۱} e^{-\lambda x} dx \\ &= ۱ - e^{-\lambda t} \sum_{j=۱}^{k-۱} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \qquad t > ۰ \end{aligned}$$

چنانچه در توزیع ارلانگ که پارامتر kمقادیر $۱, ۲, \cdots$را اختیار می‌کند،بتواند هر مقدار مثبتی بین صفر وبی‌نهایت را بگیرد توزیع را گاما می‌نامند.

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-۱} e^{-\lambda x} \quad , \quad x > ۰ \quad , \quad \alpha > ۰ \quad , \quad \lambda > ۰$$

گوییم X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و λ است و آن را با نماد $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ یا $X \sim G(\alpha, \lambda)$ نشان می‌دهیم. حالت خاص. اگر $\alpha = ۱$ باشد توزیع گاما تبدیل به توزیع نمایی تک پارامتری می‌شود. اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای فوق باشد آنگاه میانگین و واریانس آن به صورت زیر است.

$$E_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad Var_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^۲}$$

اکنون می‌خواهیم دو توزیع جدید از مشتقات توزیع گاما، که در فصل دوم استفاده می‌شود بیان کنیم.توزیع دی گاما و توزیع تری گاما.

توزیع دی‌گاما:فرض می‌کنیم $\Gamma(x)$ توزیع گاما با پارامترهای مورد نظر باشد.آنگاه توزیع دی‌گاما به‌صورت

زیر بیان می‌شود

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

توزیع تری گاما:

$$\psi_۱(z) = \frac{d^۲}{dz^۲} ln\Gamma(z)$$

تعریف آ.۳.۱. توزیع نرمال :توزیع نرمال با توجه به این‌که در فاصله $(-\infty, \infty)$ مقدار می‌گیرد به ندرت در مباحث قابلیت‌اطمینان به عنوان یک مدل طول طول عمر به کار می‌رود. (تنها در حالتی می‌توان آن‌را به عنوان مدل طول عمر به کار برد که میانگین آن خیلی بزرگتر از صفر باشد) اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\mu,\sigma^۲}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} exp\{= \frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲\} \quad x \in R \ , \ \mu \in R \ , \ \sigma > ۰$$

گوییم X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$است و آن را با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ نشان می‌دهیم. میانگین و واریانس توزیع نرمال را به‌صورت زیر قابل دستیابی است.

$$E_{\mu,\sigma^۲}(x) = \mu \quad Var_{\mu,\sigma^۲}(x) = \sigma^۲$$

تعریف آ.۴.۱. توزیع وایبل توزیع وایبل یکی دیگر از مهمترین توزیع‌های طول عمر در مطالعات قابلیت‌اطمینان و تحلیل بقا است. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-۱} e^{-\lambda x^\alpha} \quad x > ۰ \quad \alpha > ۰ \ , \quad \lambda > ۰$$

در این صورت X دارای توزیع وایبل با پارامترهای αو λ است و دارای نماد $X \sim W(\alpha, \lambda)$ می‌باشد. در توزیع وایبل اگر $\alpha = ۲$ فرض شود، یعنی $W(۲.\lambda)$، به توزیع رای لی تبدیل می‌شود. بدلیل عدم نیاز به توزیع رای لی از بیان کلی آن صرف نظر می‌کنیم. همچنین اگر $\alpha = ۱$ باشد، توزیع $W(۱, \lambda)$،همان توزیع نمایی تک پارامتری با پارامتر λ است.
اگر X دارای توزیع وایبل با پارامترهای فوق باشد،آن‌گاه داریم:

$$E_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\Gamma(۱ + \frac{۱}{\alpha})}{\frac{۱}{\lambda\alpha}} \qquad Var_{\alpha,\lambda}(X) = \frac{\Gamma(۱ + \frac{۲}{\alpha}) - \Gamma^۲(۱ + \frac{۱}{\alpha})}{\frac{۲}{\lambda\alpha}}$$

تابع نرخ در توزیع وایبل برابر است با

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \lambda^\alpha \alpha t^{\alpha-۱}$$

در نتیجه برای $\alpha > ۱$، $h(t)$ تابعی صعودی از t است و برای $\alpha < ۱$، $h(t)$ تابعی نزولی از t است و برای $\alpha = ۱$ مقداری ثابت خواهد داشت.

از جمله دلایل اهمیت توزیع وایبل در تحلیل قابلیت‌اطمینان می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.
الف)نرخ خطر توزیع وایبل دارای فرم بسته است $(h(t) = \lambda^{\alpha}\alpha t^{\alpha-1})$ و همین امر باعث می شود تحلیل در مورد داده ها با این توزیع راحت‌تر صورت گیرد.
ب)توزیع وایبل مدلی است که انواع داده‌ها را می‌توان با آن تفسیر کرد. داده‌های با نرخ خطر صعودی $(\alpha > 1)$، نرخ خطر نزولی $(\alpha < 1)$ و نرخ خطر ثابت $(\alpha = 1)$.
ج)تحت شرایطی، ثابت می‌شود که مینمم یک مجموعه از متغیرهای تصادفی وایبل، خود درای توزیع وایبل است.

تعریف آ.۵.۱. توزیع پاراتو :اگر متغیر تصادفیX دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \quad , \quad x \geq \beta \quad , \quad \beta > 0 \quad , \quad \alpha > 0$$

گوییم X دارای توزیع پاراتو با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $X \sim Pa(\alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم.اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع پاراتو با پارامترهای بیان شده باشد،میانگین و واریانس آن به‌صورت زیر است.

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \quad , \quad \alpha > 1 \quad Var_{\alpha,\beta}(X) = \frac{\alpha\beta^{2}}{(\alpha-1)^{2}(\alpha-2)}; \quad , \quad \alpha > 2$$

آ.۲ توزیع مجانبی.

در بحث مشخص کردن توزیع برآوردگرهای قابلیت‌اطمینان، یکی از مهمترین و پرکابردترین توزیع‌ها، توزیع مجانبی است. توزیع مجانبی، توزیع احتمالاتی است که هرگاه اندازه نمونه به بی‌نهایت نزدیک شود داده آماری بدان می‌گراید.در ریاضیات و آمار، توزیع مجانبی توزیع محدود از دنباله‌ای از توزیع‌ها است. یکی از استفاده‌های مهم این توزیع در ارائه تقریب به توابع توزیع تجمعی آماری است.فرض می‌کنیم Z_i دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است.در ساده‌ترین حالت دنباله مورد نظر دارای توزیع مجانبی است، اگر Z_i ها دارای همگرایی در احتمال باشند.یعنی زمانی که $i \to \infty$ ، دنباله فوق به ۰ میل کند.مفهوم کلی‌تر توزیع مجانبی مطرح شده برای متغیرهای‌تصادفی اصلاح شده است.یعنی اگر متغیرهای تصادفی مورد نظر را اصلاح کنیم می‌توان گفت تابع توزیع آن‌ها توزیع مجانبی است.متغیرهای تصادفی $\{Z_i\}$ را به‌صورت زیر اصلاح می‌کنیم.

$$Y_i = \frac{Z_i - a_i}{b_i}$$

درصورتی که دنباله‌های a_i و b_i دارای شرط همگرایی در توزیع باشند،متغیرهای Y_i ،اصلاح شده و غیر تصادفی هستد. بنابراین تابع توزیع آن‌ها مجانبی است،اگر
ط

$$P(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \leq x) \approx F(x) \qquad P(Z_n \leq z) \approx F(\frac{Z - a_n}{b_n})$$

که یکی از پرکاربردترین توزیع‌ها در بحث مجانبی است بیان می‌کنیم.

تعریف آ.۱.۲. توزیع مجانبی نرمال سازگار توزیع مجانبی نرمال سازگار اصولا بر اساس کارایی و سازگاری برآورگرها بیان می‌شود، یعنی برآوردگری دارای این توزیع است که هم کارا باشد وهم سازگار. برآوردگرسازگار:گوییم دنباله برآوردگرهای $\{T_n\}$ برای $\gamma(\theta)$ سازگار است اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه

$$T_n \longrightarrow \gamma(\theta)$$

یعنی برای هر $\epsilon > ۰$ و $\delta > ۰$ عدد صحیح مثبتی مانند $n_۰ = n_۰(\epsilon, \gamma)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n > n_۰$،

$$P_\theta(|T_n - \gamma(\theta)| > \epsilon) < \delta$$

یابرای هر $\epsilon > ۰$ ،

$$lim_{n\to\infty} P_\theta(|T_n - \gamma| > \epsilon) = ۰$$

تعریف آ.۲.۲. کارایی منظور از کارایی یک برآوردگر سنجش و درجه دقت برآوردگر است. کارایی یک برآوردگر دارای رابطه معکوس با واریانس آن است.یعنی هرچه واریانس برآوردگری کمتر باشد، برآوردگر کاراتراست.پس هدف ما پیدا کردن برآوردگرهای با کمترین واریانس است. یکی ازمهمترین مباحث آماری در زمینه کمترین واریاس کران پایین کرامر-رائو یا نامساوی کرامر-رائو است. براین اساس برآوردگری کارا است که واریانسش برابر با کران پایین کرامر-رائو باشد. ابتدا تعریف داریم از این نامساوی.

تعریف آ.۳.۲. نامساوی کرامر-رائو که بعضانامساوی اطلاع نیز نامیده می‌شود به دلیل تحقیق مستقل کرامر[۲] (۱۹۲۶) و رائو[۳] (۱۹۲۵) در مورد واریانس برآوردگرها بدین نام معروف شده است.قبل از بیان نامساوی ابتدا شرایطی که برای برقراری نامساوی لازم هستند را بیان می‌کنیم:
اگر X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانواده چگالیهای $\{P_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$ باشد. فرض می‌کنیم:
۱. Θ یک زیر فاصله باز از عداد حقیقی است، یعنی $\Theta \in R$
۲.مشتق تابع چگالی نسبت به پارامتر،یعنی $\frac{d}{d\theta}P_\theta(X)$ وجود دارد.
۳.جابه‌جایی عملگرهای مشتق و انتگرال مجاز است، یعنی

$$\frac{d}{d\theta}\int P_\theta(x)d\mu(x) = \frac{d}{d\theta}\int P_\theta(x)d\mu(x)$$

[۲] H. Cramer
[۳] C.R.Rao

۴.برای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[\frac{d}{d\theta} lnP_\theta(x)]^۲ > ۰$$

۵.برای هر برآوردگر T پارامتر $\gamma(\theta)$،

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[T(x)] = \frac{d}{d\theta} \int t(x) P_\theta(x) d\mu(x) = \int t(x) \frac{d}{d\theta} P_\theta(x) d\mu(x)$$

بنابرشرایط مذکور،نتیجه می‌گیریم که برای هر $\theta \in \Theta$

$$E_\theta[\frac{d}{d\theta} lnP_\theta(x)] = ۰$$

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta(T(x)) = E_\theta(T(x) \frac{d}{d\theta} lnP_\theta(x)) = cov_\theta(T(x)), \frac{d}{d\theta} lnP_\theta(X))$$

قضیه آ.۴.۲. فرض کنید $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$دارای توزیع توأم با تابع چگالی احتمال توأم $P_\theta(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$، $\theta \in \Theta$،باشند. اگر T برآوردگر پارامتر $\gamma(\theta)$ باشد، آنگاه تحت شرایط فوف کران پایین کرامرـرائو.

$$V_\theta(T) \geq \frac{[\gamma'(\theta) + b'(\theta)]^۲}{E_\theta[\frac{d}{d\theta} lnP_\theta(X_۱, X_۲, \cdots, X_n)]^۲} \qquad (۲.آ)$$

در رابطه فوق $b(\theta) = E_\theta(T) - \gamma(\theta)$ نماینگر اریبی برآوردگر T در برآورد پارامتر $\gamma(\theta)$ است.

برهان. به پارسیان (۱۳۸۵) رجوع شود. □

تعریف آ.۵.۲. ماتریس اطلاع فیشر فرض کنید $\{X_{ij}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد با تابع چگالی احتمال $f_{X_{ij}}(\theta)$، به طوری که $i = ۱, ۲, \cdots, k$ و $j = ۱, ۲, \cdots, n$ در این صورت ماتریس اطلاع فیشر یک ماتریس nk بعدی است.

$$\begin{bmatrix} I_{۱۱} & I_{۱۲} & \cdots & I_{۱n} \\ I_{۲۱} & I_{۲۲} & \cdots & I_{۲n} \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق

$$I_{ii} = Var(X_{ii}) \qquad I_{ij} = cor(X_i, X_j)$$

تعریف آ.۶.۲. روش عددی نیوتون-رافسون[۴]

قسمت‌هایی از مسایل استنباط آماری به پیدا کردن ریشه یک معادله، می‌نیمم‌سازی یک تابع یا یافتن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی منتهی می‌شوند. این‌گونه مسایل، حل یک معادله یا یک دستگاه

[۴] Newton-Raphson

معادلات را شامل می‌شوند که حل آن‌ها به یک فرم تحلیلی منتهی نمی‌شوند. در چنین مواردی، باید جواب‌های تقریبی برای آن‌ها به‌دست آورد. یک رهیافت برای حصول جواب‌های تقریبی، حل عددی معادله‌ها با روش‌های عددی است. یکی از این روش‌های عددی، روش نیوتون–رافسون است. در این روش با داشتن مقدار اولیه $x_۰$، خطی بر تابع f در این نقطه مماس می‌کنیم. خط مماس f در $x_۰$ عبارتست از:

$$f(x_۰) + f'(x_۰)(x - x_۰).$$

نقطه صفر این خط مماس را برابر $x_۱$ قرار می‌دهیم. نقطه صفر (ریشه) این خط، $x_۱$، در معادله زیر صدق می‌کند:

$$f(x_۰) + f'(x_۰)(x_۱ - x_۰) = ۰.$$

اکنون می‌توان جای $x_۰$ را با $x_۱$ عوض کرد و عمل را تکرار کرد. تکرار را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که ریشه به‌دست آمده به مقدار واقعی نزدیک باشد. این عمل منتهی به رابطه زیر می‌شود:

$$x_{i+۱} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

به طور مشابه برای ابعاد بالاتر از یک، خواهیم داشت

$$x_{i+۱} = x_i - f'(x_i)^{-۱} f(x_i),$$

که در آن $f'(x)$ ماتریس مشتق‌های جزیی است.

تعریف آ.۷.۲. قضیه حد مرکزی چندمتغیره

فرض کنید $\mathbf{X}_۱, \mathbf{X}_۲, \ldots, \mathbf{X}_n$ بردارهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع در R^k با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}_i)$ و ماتریس کوواریانس Σ باشند. این قضیه بیان می‌کند که اگر مجموع این بردارها را استاندارد کنیم، آن‌گاه آماره به‌دست آمده به توزیع نرمال چندمتغیره همگراست. اگر تعریف کنیم

$$\begin{pmatrix} X_{۱(۱)} \\ \vdots \\ X_{۱(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{۲(۱)} \\ \vdots \\ X_{۲(k)} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} X_{n(۱)} \\ \vdots \\ X_{n(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=۱}^n X_{i(۱)} \\ \vdots \\ \sum_{i=۱}^n X_{i(k)} \end{pmatrix} = \sum_{i=۱}^n \mathbf{X}_i,$$

آن‌گاه می‌توان بردار میانگین را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n \mathbf{X}_i = \frac{۱}{n}\begin{pmatrix} \sum_{i=۱}^n X_{i(۱)} \\ \vdots \\ \sum_{i=۱}^n X_{i(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_{i(۱)} \\ \vdots \\ \bar{X}_{i(k)} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{X}}_n.$$

بنابراین داریم

$$\frac{۱}{\sqrt{n}}\sum_{i=۱}^n [\mathbf{X}_i - E(\mathbf{X}_i)] = \frac{۱}{\sqrt{n}}\sum_{i=۱}^n [\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}] = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}).$$

قضیه حد مرکزی چندمتغیره بیان می‌کند

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} N(۰, \Sigma).$$

به طوری که

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_{۱(۱)}) & Cov(X_{۱(۱)}, X_{۱(۲)}) & Cov(X_{۱(۱)}, X_{۱(۳)}) & \cdots & Cov(X_{۱(۱)}, X_{۱(k)}) \\ Cov(X_{۱(۲)}, X_{۱(۱)}) & Var(X_{۱(۲)}) & Cov(X_{۱(۲)}, X_{۱(۳)}) & \cdots & Cov(X_{۱(۲)}, X_{۱(k)}) \\ Cov(X_{۱(۳)}, X_{۱(۱)}) & Cov(X_{۱(۳)}, X_{۱(۲)}) & Var(X_{۱(۳)}) & \cdots & Cov(X_{۱(۳)}, X_{۱(k)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_{۱(k)}, X_{۱(۱)}) & Cov(X_{۱(k)}, X_{۱(۲)}) & Cov(X_{۱(k)}, X_{۱(۳)}) & \cdots & Var(X_{۱(k)}) \end{pmatrix},$$

و منظور از $\xrightarrow{D}$، همگرایی در توزیع است در ماتریس فوق منظور از $Var(X_{۱(۱)})$واریانس نمونه اول است.

پیوست ب

کد برنامه R برای اجرای فصل سوم و چهارم

دستورات و کدهای مربوط به شبیه‌سازی فصول ۳ و ۴.

برآورد درستنمایی ماکزیمم توزیع نمایی تک پارامتری فصل۳

- کد زیر مربوط به جدول ۲.۳ می‌باشد.

```
X=function(n,lambda,a,b){
K=length(lambda)#in hamun k+1 tu maghale hast
k=K-1
x=matrix(0,n,K)
  for (ii in 1:K){
    x[,ii]=rexp(n,lambda[ii])
  }
aa=apply(x,2,sum)
lambda_hat=n/aa
lambdahat_last=lambda_hat[K]
lambda_last=lambda[K]
r=1
t=c();w=c();
while (r<=k){
comp=combn(1:k,r)
col=ncol(comp)
     v=c();q=c();
     for (j in 1:col){
        u=comp[,j]
        lam=lambda[u]
```

```
        lam_hat=lambda_hat[u]
        v[j]=lambda_last/(lambda_last+sum(lam))
        q[j]=lambdahat_last/(lambdahat_last+sum(lam_hat))
      }
     t[r]=((-1)^(r-1))*sum(v)
     w[r]=((-1)^(r-1))*sum(q)
     r=r+1
}
Rp=sum(t)
Rp_hat=sum(w)
b=list(Rp,Rp_hat,x)
return(b)
}
```

- **برآورد بیزی توزیع نمایی تک پارامتری فصل۳**

دستورات مربوط به جدول ۴.۳

```
Bayes=function(n,Nsim,a,b,x){
K=ncol(x)
lambda_bayes=matrix(0,Nsim,K)
   for (i in 1:K){
    lambda_bayes[,i]=rgamma(Nsim,shape=n+a[i],scale=1/(b[i]+sum(x[,i])))
   }
Lam=expand.grid(lambda_bayes[,1],lambda_bayes[,2]
          ,lambda_bayes[,3],lambda_bayes[,4])
Lam=as.matrix(Lam)
row=nrow(Lam)
estim=numeric(row)
for (m in 1:row){
   lambda=Lam[m,]
   lambda_last=lambda[K]
   k=K-1;r=1;
   t=c()
   while (r<=k){
```

```
   comp=combn(1:k,r)
   col=ncol(comp)
        v=c()
        for (j in 1:col){
           u=comp[,j]
           lam=lambda[u]
           v[j]=lambda_last/(lambda_last+sum(lam))
         }
        t[r]=((-1)^(r-1))*sum(v)
        r=r+1
   }
   Rp=sum(t)
   estim[m]=Rp
}
Estim=mean(estim)
return(Estim)
}
RR=X(n,lambda,a,b)
x=RR[[3]]
Nsim=10
bb=Bayes(n,Nsim,a,b,x)
```

- برای نمونه، با استفاده از دستورات زیر می‌توان انحراف از معیار برآوردهای درستنمایی قابلیت‌اطمینان را، که در جداول ۲.۳ از آن استفاده شده، به‌دست آورد. به عنوان مثال برای نمونه به حجم ۱۰۰ کد زیر را می‌نویسیم.

```
iter=60
n=100
tt=numeric(iter)
for (i in 1:iter){
result=X(n,lambda,a,b)
tt[i]=result[[2]]
x=result[[3]]
}
```

```
mm_hat=mean(tt)
sd_hat=var(tt)
U=mm_hat+qnorm(0.975)*sd_hat
L=mm_hat-qnorm(0.975)*sd_hat
```

- در زیر دستورات مربوط به برآوردهای درسنمایی و بیزی قابلیت‌اطمینان سیستم‌های موازی را در شرایطی که مولفه‌ها تحت توزیع وایبل باشند، بیان می‌کنیم.

برآورد ماکزیمم درستنمایی توزیع وایبل فصل۳

دستور زیر مربوط به جدول ۸.۳می‌باشد.

```
library(miscTools)
library(maxLik)
y=function(n,a,b){
K=length(b)
k=K-1
x=matrix(0,n,K)
  for (i in 1:K){
    x[,i]=rweibull(n,a,(b[i])^(-1/a))
  }
pa=c(a,b)
Like=function(pa,x){
a=pa[1]
a=abs(a)
b=pa[2:length(pa)]
b=abs(b)
g=n*(k+1)*log(a)+n*sum(log(b))+(a-1)*(sum(apply(log(x),2,sum)))
     -(sum(b*apply(x^a,2,sum)))
g
}
m=maxLik(Like,start=c(a,b),x=x,method="BFGS")
b_last=b[K]
b_hat=abs(coef(m))[-1]
bhat_last=b_hat[K]
r=1
t=c();w=c()
  while (r<=k){
```

```
    comp=combn(1:k,r)
    col=ncol(comp)
    v=c();q=c()
      for (j in 1:col){
         u=comp[,j]
         B=b[u]
         B_HAT=b_hat[u]
         v[j]=b_last/(b_last+sum(B))
         q[j]=bhat_last/(bhat_last+sum(B_HAT))
      }
      t[r]=((-1)^(r-1))*sum(v)
      w[r]=((-1)^(r-1))*sum(q)
  r=r+1
  }
Rp=sum(t)
Rp_hat=sum(w)
l=list(Rp,Rp_hat,x)
return(l)
}
```

برآورد بیزی توزیع وایبل فصل۳

- دستورات زیر برای بدست آوردن برآورد بیزی قابلیت اطمینان در حالتی که مولفه‌ها دارای توزیع وایبل هستند به‌کار می‌روند.

```
library(miscTools)
library(maxLik)
library(MASS)
library(MHadaptive)
func=function(n,Nsim,a,b,lambda,gamma,mu,sigma2){
x=matrix(0,n,K)
  for (i in 1:K){
    x[,i]=rweibull(n,a,(b[i])^(-1/a))
  }
pa=c(a,b)
Like=function(pa,x){
```

```
a=pa[1]
a=abs(a)
b=pa[2:length(pa)]
b=abs(b)
g=n*(k+1)*log(a)+n*sum(log(b))+(a-1)*(sum(apply(log(x),2,sum)))
     -(sum(b*apply(x^a,2,sum)))
g
}
m=maxLik(Like,start=c(a,b),x=x,method="BFGS")
a1=abs(coef(m))[1]
b1=log(abs(coef(m))[2])
b2=log(abs(coef(m))[3])
b3=log(abs(coef(m))[4])
b4=log(abs(coef(m))[5])
prior_reg<-function(pars){
         a<-abs(pars[1])
         beta<-pars[2:length(pars)]
         prior_a<-dgamma(a,shape=lambda,scale=1/gamma,log=TRUE)
         prior_beta1<-dnorm(beta[1],mu[1],sigma2[1],log=TRUE)
         prior_beta2<-dnorm(beta[2],mu[2],sigma2[2],log=TRUE)
         prior_beta3<-dnorm(beta[3],mu[3],sigma2[3],log=TRUE)
         prior_beta4<-dnorm(beta[4],mu[4],sigma2[4],log=TRUE)
      return(prior_a+prior_beta1+prior_beta2+prior_beta3+prior_beta4)
}
loglike=function(pars,data){
x=data
a=abs(pars[1])
beta=pars[2:length(pars)]
g=(n*(k+1))*log(a)+sum(n*beta)+(a-1)*sum(apply(log(x),2,sum))
      -sum(exp(beta)*apply(x^a,2,sum))
prior=prior_reg(pars)
return(g+prior)
}
mcmc_r<-Metro_Hastings(li_func=loglike,pars=c(a1,b1,b2,b3,b4)
```

```
    ,par_names=c('a','beta1','beta2','beta3','beta4'),iterations=2000,data=x)
mcmc_r<-mcmc_thin(mcmc_r)

Bayes=function(n,Nsim,x){
MH=mcmc_r$trace[1:Nsim,]
Lam=expand.grid(MH[,2],MH[,3],MH[,4],MH[,5])
Lam=as.matrix(Lam)
row=nrow(Lam)
estim=numeric(row)
for (m in 1:row){
   lambda=Lam[m,]
   lambda_last=lambda[K]
   k=K-1;r=1;
   t=c()
   while (r<=k){
   comp=combn(1:k,r)
   col=ncol(comp)
        v=c()
        for (j in 1:col){
           u=comp[,j]
           lam=lambda[u]
           v[j]=lambda_last/(lambda_last+sum(lam))
         }
        t[r]=((-1)^(r-1))*sum(v)
        r=r+1
   }
   Rp=sum(t)#*(max(MH[,1])-min(MH[,1]))
   estim[m]=Rp
}
Estim=mean(estim)
return(Estim)
}
estim=Bayes(n,Nsim,x)
return(estim)
```

```
}
```

برآورد درستنمایی توزیع نمایی دو پارامتری فصل۴

- از دستورات زیر برای به‌دست آوردن برآورد درستنمایی ماکزیمم قابلیت اطمینان در حالتی که مولفه‌ها دارای توزیع نمایی دو پارامتری هستند استفاده می‌کنیم.نتاییج آن در جدول ۳.۴نشان‌داده شده است.

```
rexp2 <- function(n,rate,loc) {
   rexp(n,rate)+loc
}
X=function(n,lambda,mu){
K=length(lambda)
k=K-1
x=matrix(0,n,K)
  for (ii in 1:K){
    x[,ii]=rexp2(n,lambda[ii],mu[ii])
  }
mu_hat=apply(x,2,min)
y=matrix(mu_hat,n,K,byrow=T)
z=x-y
lambda_hat=n/(apply(z,2,sum))
lambdahat_last=lambda_hat[K]
lambda_last=lambda[K]
muhat_last=mu_hat[K]
mu_last=mu[K]
r=1
t=c();w=c();
while (r<=k){
comp=combn(1:k,r)
col=ncol(comp)
     v=c();q=c();
     for (j in 1:col){
        u=comp[,j]
        lam=lambda[u]
        muu=mu[u]
        lam_hat=lambda_hat[u]
        muu_hat=mu_hat[u]
```

```
        e=numeric(length(u))
        e_hat=numeric(length(u))
           for (l in 1:length(u)){
                e[l]=(mu_last-muu[l])*lam[l]
                e_hat[l]=(muhat_last-muu_hat[l])*lam_hat[l]
           }
        v[j]=(lambda_last)
                 *exp(-sum(e))/(sum(lam)+lambda_last)
        q[j]=(lambdahat_last)
                *exp(-sum(e_hat))/(sum(lam_hat)+lambdahat_last)
      }
     t[r]=((-1)^(r-1))*sum(v)
     w[r]=((-1)^(r-1))*sum(q)
     r=r+1
}
Rp=sum(t)
Rp_hat_parallel=sum(w)
b=list(Rp,Rp_hat_parallel,x)
return(b)
}
```

برآورد بیزی توزیع نمایی دو پارامتری فصل۴

- برای محاسبه برآورد بیزی قابلیت اطمینان هنگامی که مولفه‌ها دارای توزیع نمایی دو پارامتری هستند، از دستورات زیر استفاده می‌کنیم. دو حالت زیر را در محاسبه برآورد بیزی داریم. حالت اول، زمانی که پارامتر شکل معلوم است.

```
rexp2 <- function(n,rate,loc) {
   rexp(n,rate)+loc
}
X=function(n,Nsim,mu,lambda,a){
K=length(lambda)
k=K-1
x=matrix(0,n,K)
  for (ii in 1:K){
    x[,ii]=rexp2(n,lambda[ii],mu[ii])
  }
```

```
mu_bay=matrix(0,Nsim,K)
  for (i in 1:K){
       mu_bay[,i]=rexp2(Nsim,n*lambda[i]-a[i],min(x[,i]))
  }
Mu=expand.grid(mu_bay[,1],mu_bay[,2]
       ,mu_bay[,3],mu_bay[,4])
Mu=as.matrix(Mu)
row=nrow(Mu)
estim=numeric(row)
for (m in 1:row){
   mu_bayes=Mu[m,]
   mu_last_bayes=mu_bayes[K]
   mu_last=mu[K]
   lambda_last=lambda[K]
   k=K-1;r=1;
   t=c();w=c();
while (r<=k){
comp=combn(1:k,r)
col=ncol(comp)
     v=c();q=c();
     for (j in 1:col){
        u=comp[,j]
        lam=lambda[u]
        muu=mu[u]
        muu_bayes=mu_bayes[u]
        e=numeric(length(u))
        e_bayes=numeric(length(u))
           for (l in 1:length(u)){
                e[l]=(mu_last-muu[l])*lam[l]
                e_bayes[l]=(mu_last_bayes-muu_bayes[l])*lam[l]
           }
        v[j]=(lambda_last)
                *exp(-sum(e))/(sum(lam)+lambda_last)
        q[j]=(lambda_last)
```

```
                *exp(-sum(e_bayes))/(sum(lam)+lambda_last)
      }
     t[r]=((-1)^(r-1))*sum(v)
     w[r]=((-1)^(r-1))*sum(q)
     r=r+1
}
   Rp=sum(t)
   Rp_Bayes=sum(w)
   estim[m]=Rp_Bayes
}
Estim=mean(estim)
b=list(Rp,Estim)
return(b)
}
```

- دستور زیر برای محاسبه برآورد بیزی قابیلت اطمینان زمانی که مولفه‌ها دارای توزیع نمایی دو پارامتری و پارامتر مقیاس معلوم است.

```
rexp2 <- function(n,rate,loc) {
   rexp(n,rate)+loc
}
X=function(n,Nsim,mu,lambda,b){
K=length(lambda)
k=K-1
x=matrix(0,n,K)
  for (ii in 1:K){
    x[,ii]=rexp2(n,lambda[ii],mu[ii])
  }
lambda_bay=matrix(0,Nsim,K)
  for (i in 1:K){
     lambda_bay[,i]=rgamma(Nsim,shape=n+1,scale=1/(n*mean(x[,i])-(n-b[i])))
  }
LAM=expand.grid(lambda_bay[,1]
    ,lambda_bay[,2],lambda_bay[,3],lambda_bay[,4])
LAM=as.matrix(LAM)
row=nrow(LAM)
```

```
estim=numeric(row)
for (m in 1:row){
   lambda_bayes=LAM[m,]
   lambda_last_bayes=lambda_bayes[K]
   lambda_last=lambda[K]
   mu_last=mu[K]
   k=K-1;r=1;
   t=c();w=c();
while (r<=k){
comp=combn(1:k,r)
col=ncol(comp)
     v=c();q=c();
     for (j in 1:col){
        u=comp[,j]
        lam=lambda[u]
        muu=mu[u]
        lamm_bayes=lambda_bayes[u]
        e=numeric(length(u))
        e_bayes=numeric(length(u))
           for (l in 1:length(u)){
                e[l]=(mu_last-muu[l])*lam[l]
                e_bayes[l]=(mu_last-muu[l])*lamm_bayes[l]
           }
        v[j]=(lambda_last)
              *exp(-sum(e))/(sum(lam)+lambda_last)
        q[j]=(lambda_last_bayes)
             *exp(-sum(e_bayes))/(sum(lamm_bayes)+lambda_last_bayes)
      }
     t[r]=((-1)^(r-1))*sum(v)
     w[r]=((-1)^(r-1))*sum(q)
     r=r+1
}
   Rp=sum(t)
   Rp_Bayes=sum(w)
```

```
   estim[m]=Rp_Bayes
}
Estim=mean(estim)
b=list(Rp,Estim)
return(b)
}
```

مراجع

[۱] اسدی،م. (۱۳۹۲). "آشنایی با نظریه قابلیت‌اعتماد". چاپ اول. مرکز نشردانشگاهی.

[۲] پارسیان،ا‌ح. (۱۳۸۵). "مبانی آمار ریاضی. "دیبایی‌نیا،ب. چاپ دوم. مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.

[3] Asmussen,Søren. ,Glynn, Peter, W . (2007). *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis.* Stochastic Modelling and Applied Probability. 57. 242-258.

[4] Bandyopadhyay,S. P. and Forster, R. M. (2011). *Philosophy of Statistics.* New Hampshire. 7. 354-361.

[5] Bayes, T. (1763). *A letter from the late Reverend Mr. Thomas Bayes, FRS to John Canton, MA and FRS.* Philosophical Transactions. 1683-1775 . 269-271.

[6] Berger,J. O. and Wolpert, R. L. (1988). The Likelihood Principle (2nd ed.). *Haywood. CA: The Institute of Mathematical Statistics, New York.*

[7] Beg,M. A. (1980). *On the estimation of P(Y<X) for the two parameter exponential distribution.* Metrika. 27. 29-34.

[8] Bhattacharya,G. K. and Johnson,R. A. (1974) . *Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model* . Journal of American Statistical Association. 69. 966–970.

[9] Church,J. D. and Harris,B. (1970). *The Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationships.* Technometrics. 12. 49–54.

[10] Cramer,H. (1946). *AContribution to the Theory of Statistical Estimation.* Skondinavisk Akluarietidskrift. 29. 85-94

[11] Draper,N. R. and Guttman, I. (1978). *Bayesian Analysis of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Models. Communications in Statistics.* Theory and Methods. 7. 441–451.

[12] Duran,Monica. , Penaand,Alexis and Vıctor, Salin,H. (2007). *A Bayesian approach to parallel stress-strength models.* Economic Quality Control. 22 . 1. 71–85.

[13] Ebrahimi,N. (1982). *Estimation of reliability for a series stress-strength system.* Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Reliability. 31. 202-205.

[14] Enis,P. and Geisser,S. (1971). *Estimation of probability that Y<X.* Journal of the American Statistical Association 66. 333 . 162-168

[15] Fisher,R. A. (1926). The arrangement of field experiments. *In Breakthroughs in Statistics. 82-91. New York.*

[16] Gauss, C. F. *Theory of the Combination of Observations which leads to the smallest Errors.* Gauss Werke 4 (1821). 1-93.

[17] Gelfand,A. E. and Smith,A. F. M. (1990). *Sampling Based Approaches to Calculating Marginal Densities.* Journal of the American Statistical Association. 85. 398–409.

[18] Gelman,A. and Rubin,D. B. (1992). *Inference from Iterative Simulation using Multiple Sequences* . Statistic Science. 7. 457–511.

[19] Geman. S. and Geman. D. (1984). *Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images.* Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 6. 721–741.

[20] Green,P. J. (1995). *Reversible-jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination.* Biometrika. 82(4). 711-732.

[21] Hanagal,D. D. (1996). *Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationship. Communication in Statistics.* Theroy and Methods. 25. 1783–1797

[22] Hanagal. D. D. (1996a). *A multivariate Pareto distribution.* Communications in Statistics. Theory and Methods. 25(7). 1471-88.

[23] Hanagal,D. D. (1996b). *Estimation of system reliability from stress-strength relationship.* Communications in Statistics, Theory and Methods. 25(8). 1783-17 97.

[24] Hanagal,D. D. (1998). *On the Estimation of Reliability in Stress-Strength Models.* Economic Quality Control. 13. 17-22.

[25] Hanagal,D. D. (2003). *Estimation of system reliability in multicomponent series stressstrength models.* Journal of the Indian Statistical Association. 41. 1–7.

[26] Ibraim, J. G. , Chen, M. and Sinha, D. (2001). Bayesian Survival Analysis. . *Springer,New York.*

[27] Johnson,R. A. (1988). Stress-Strength Models for Reliability. *Handbook of Statistics. Eds* Krishnaiah. P. R. and Rao. C. R. 7. 27-54.

[28] Johnson,N. L. and Kotz,S. (1970). Continuous Univariate Distributions. *John Wiley and Sons,Inc. New York*

[29] Kelley,G. D. , Kelley,J. A. and Schucany,W. R. (1976). *Efficient estimation of $PY<X$ in the exponential case.* Technometrics. 18(3). 359-360.

[30] Kotz,S. , Lumelskii. Y. and Pensky,M. (2003). The Stress-Strength Model and its Generalizations:Theory and Aplications. *Imperial College Press. London.*

[31] Kotz,S. , Lumelskii,Y and Pensky,M. (2003) The Stress-Strength Model and its Generalizations . *John Wily and Sons, Inc. London*

[32] Kunchur,S. H. and Munoli,S. B. (1993). Estimation of Reliability for a multicomponent survival Stress-Strength model based on exponential distributions. *Communications on Statististics - Theory and Methods.* 22. 767–779.

[33] Murray, I. , Ghahramani,Z. and MacKay, D. (2006). *MCMC for doubly-intractable distributions.* In Proceedings of the 22nd Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-06). Arlington. Virginia. AUAI Press (2006). No 359-366

[34] Neyman,J. and Pearson,E. S. (1933). *On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical.* Physical and Engineering Sciences. 231. 694-706.

[35] Raftery,A. E. and Lewis,S. (1992). *How Many Iterations in the Gibbs Sampler.* In Bayesian Statistics. 4. 763-773. (eds. J. M. Bernardo, J. Berger. A. P. Dawid and A. F. M. Smith). Oxford University Press, Oxford

[36] Rao,C. R. (1945). *Information and the accarocy attainable in the Estimation of Statistical Parameters.* Bull,Calcutta. Math,Soc. 37. 81-91

[37] Rao,C. R. (1973). Linear Statistical Inference and Its Applications. *Wiley Eastern Ltd.*

[38] Raqab,M. Z. (2009) *Statistics and Probability Letters.* Statistics and Probability Letters . 79. 1839-1846.

[39] Richey,M. (2010). *The Evolution of Markov Chain Monte Carlo Methods.* The American Mathematical Monthly. Mathematical Association of America. 117(5). 383-413.

[40] Robert,C. and Casella,G. (2004). Monte Carlo Statistical Methods. *2nd edn. Springer. New York.*

[41] Shewhar,Walter, A. (1994). Economy in producing Quality. *New York.*

[42] Smith,R. L. (1984). *Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions.* Operations Research. 32. 1296–1308.

[43] Sverdrup, E. (1965). *Estimates and test procedures in connection with stochastic models for deaths, recoveries and transfers between different states of health.* Scandinavian Actuarial Journal 1965. 3-4 . 184-211.

[44] Tierney,L. and Kadane,J. (1986). *Accurate approximations for posterior moments and marginal densities.* Journals of the American Statistical Association. 81(393). 82–86.

[45] Tong,H. (1974). *A Note on the Estimation of P(Y<X) in the Exponential Case.* Technometrics. 16. 625,

[46] Weier,D. R. (1981). *Bayes estimation for a bivariate survival model based on exponential distributions.* Communications on Statistics-Theory and Methods 10, 1415–1427.

[47] Zacks,S. (1971). The Theory of Statistical Inference. *Wiley, New York*

Aabstract

Nowadays, reliability and performance of the systems are the most important principles in using systems. Our goal is the estimation of the system reliability in two cases, parallel and series systems, in stress-strength models. Therefore, we estimated the system reliability given the independence of the components (strength) under different distributions (Exponential, Weibull, Gamma, Pareto,...) by maximum likelihood and Bayesian approach in order to achieve better estimates, useful results and to raise working efficiency. The results are compared for some cases. In addition to the estimation of reliability, we derive the estimator distributions. Also, we simulated some of estimators to get optimal estimator. Under some of distributions, the estimator of reliability has complex form. So in such cases for simulating, using the Monte Carlo Markov Chain (MCMC) sampling method is recommended.
Keywords Reliability, Series and parallel systems, Stress-Strength models, Monte Carlo Markov Chain sampling methods.

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

A Bayesian approach for the reliability of a parallel system in stress-strength models

Mohsen Mehdizadeh

Supervisor

dr.Ahmad Nezakati

Advisor

dr.Hossein Baghishani

September 2015