دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

شرایط لازم و کافی برای کارایی در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی

فاطمه سلیمانی

استاد راهنما

دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر مریم قرآنی

آذر ۱۳۹۴

تقدیم

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوارترین تکیه گاهم ، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم ، چشمان سبز مادرم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم .

امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

برادران و خواهران همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگیم

سپاس گزاری

صمیمانه ترین و خالصانه ترین سپاس ها را با اشک شوق به پیشگاه کبریایی پروردگار مهربانم تقدیم میدارم، او که همواره مبهوت حکمتش بوده و هستم، خاضعانه در برابر الطاف بیکرانش پیشانی خضوع و بندگی بر خاك می نهم.

نهایت سپاس خود را از الطاف استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر مهرداد غزنوی دارم، استاد ارجمندی که همواره با خلق نیکو و صبر و حوصله ی بی نظیرشان پاسخگوی تمامی سوالاتم بودند و با بزرگواری خود، نقایص این حقیر را مورد اغماض قرار می دادند.
از خداوند متعال آرزوی طول عمر با عزت و توفیق روزافزون برای ایشان مسئلت می نمایم.

از استاد مشاور گرانقدرم سرکار خانم دکتر مریم قرآنی که با راهنماییهای ارزنده شان همیشه مشوق من بوده اند صمیمانه سپاسگزارم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی و جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را به عهده گرفتند بسیار سپاسگزارم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر مهدی قوتمند نماینده تحصیلات تکمیلی که در جلسه دفاع اینجانب شرکت می کنند بسیار سپاسگزارم.

از دوستان عزیزم خانم ها زبیده سیاقی، رقیه بهمنی، سپیده احمدزاده و تکتم حاتمی و آقای حمیدرضا رحیمی بابت راهنماییهای ارزنده شان صمیمانه سپاسگزارم.

برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون از خداوند متعال مسئلت می نمایم.

فاطمه سلیمانی
آذر ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه سلیمانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **شرایط لازم و کافی برای کارایی در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی** ، تحت راهنمایی **دکتر مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه سلیمانی
آذر ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در شرایط واقعی وضعیت‌هایی رخ می‌دهد که مدل‌های ریاضی شامل تنها یک هدف، بیانگر خواسته‌های مورد نظر تصمیم‌گیرنده نبوده و این امر کارایی و مطلوبیت نتایج حاصل از مدل را کاهش می‌دهد. هم‌چنین در شرایط واقعی پارامترها و عوامل مختلف شامل عدم قطعیت هستند که این امر موجب بروز پیچیدگی‌های فراوانی در تصمیم‌گیری شده است. بنابراین برای برطرف کردن این مشکلات احتمالی، مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی مطرح شده است.

در این پایان‌نامه به بررسی برخی از روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی پرداخته شده است. یکی از پرکاربردترین روش‌های حل این‌گونه مسائل، روش‌های اسکالرسازی است. ابتدا یک روش اسکالرسازی بر اساس مفهوم مخروط محدب و تابع جانشینی به‌طور هم‌زمان مطرح شده است. سپس روش مجموع وزین که یکی از مهم‌ترین تکنیک‌های اسکالرسازی است مورد بررسی قرار گرفته است. هم‌چنین روشی دیگر بر اساس مینیمم‌سازی فاصله توابع از نقاط ایده‌آل مطرح شده است. در این روش اهمیت توابع برای تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود. در ادامه روشی بر اساس شرایط بهینگی کروش–کاهن–تاکر برای حل مسائل چندهدفه فازی بیان شده است. در این روش ابتدا مسأله بهینه‌سازی چند هدفه فازی با استفاده از یک مسأله بهینه‌سازی چند هدفه بازه‌ای مقدار تقریب زده شده است و سپس با استفاده از دو الگوریتم بیان شده، یک جواب کارا برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه بازه‌ای مقدار و یک جواب رضایت بخش برای مسأله چندهدفه فازی مقدار به‌دست می‌آید.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه فازی، اعداد فازی، جواب بهینه پارتو، رابطه جزئا مرتب، مخروط محدب

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. F. Soleimani, M. Ghaznavi, Scalarization for properly efficient solutions of fuzzy multiobjective optimization problems, 8^{th} International Conference of Iranian Operation Research Society, May 21-22, 2015 Ferdowsi University of Mashhad.

2. M. Ghaznavi, F. Soleimani, N. Hoseinpoor, Parametric analysis in fuzzy number linear programming problems, International Journal of Fuzzy Systems, accepted, 2015.

3. T. H. Sangeli, F. Soleimani, J. Fathali, A new approach for two-objective inverse scheduling single machine problems based on fuzzy distance minimization, The 46^{th} Annual Iranian Mathematics Conference. August 25-28, 2015 Yazd University.

فهرست مطالب

فصل ۱

مبانی نظری بهینه‌سازی چندهدفه با ضرایب فازی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم بهینه‌سازی چندهدفه[۱] و نظریه فازی[۲] را بررسی می‌کنیم. سپس برخی تعاریف و مبانی اولیه مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با ضرایب فازی را ارائه می‌دهیم. این تعاریف و قضایا در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲.۱ بهینه‌سازی چندهدفه و نظریه فازی

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی که تاکنون دیده‌ایم، یک هدف (معمولا سود) در نظر گرفته می‌شود. اما در اغلب مسائل، نتیجه‌گیری‌ها وقتی مطلوب و مورد رضایت تصمیم‌گیرنده[۳] است که تصمیم‌گیری بر اساس چندین هدف بررسی و تجزیه و تحلیل شده باشد. به‌عنوان مثال در مسائل برنامه‌ریزی تولید اهدافی مانند حداکثر کردن درآمد، حداقل کردن هزینه، کاهش ضایعات، افزایش رضایت کارکنان و ... مدنظر است که منجر به ایجاد مسائل بهینه‌سازی چندهدفه می‌شود.

به‌طور کلی در یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه تصمیم‌گیرنده سعی می‌کند چند تابع هدف را که معمولا با هم در تضاد هستند، به‌طور هم‌زمان بهینه کند و بهترین جواب ممکن را انتخاب کند. این‌گونه مسائل معمولا دارای چندین جواب بهینه هستند. این جواب‌ها که تعداد آن‌ها می‌تواند از تعداد کمی تا بی‌نهایت تغییر کند، می‌توانند کاملا متفاوت باشند. تصمیم‌گیرنده برای انتخاب این جواب‌ها می‌تواند به‌صورت دلخواه یا سیستماتیک عمل کند.

---

[۱] Multiobjective optimization

[۲] Fuzzy

[۳] Decision maker

برای یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه، یک جواب بهینه جوابی است که هیچ یک از مؤلفه‌هایش نمی‌توانند بهبود یابند مگر این‌که حداقل یکی دیگر از مؤلفه‌هایش بدتر شود. این تعریف برای اولین بار در سال ۱۸۸۱ توسط ادوارت[۴] مطرح شد اما چون ویلفردو پارتو[۵] [۲۹] اقتصاد دان ایتالیایی-فرانسوی، آن‌را در سال ۱۸۹۶ توسعه داد، به این تعریف اغلب بهینگی پارتو گویند.

در مسائل بهینه‌سازی معمولی فرض می‌کنیم همه ضرایب در توابع به‌صورت قطعی باشند. اما در واقعیت به دلیل این‌که تصمیم‌گیرنده اطلاعات دقیقی در دست ندارد یا نمی‌تواند آن‌ها را به‌صورت قطعی بیان کند، معمولا این مسائل را به‌صورت فازی بیان می‌کنند.

فازی در لغت به معنی ابهام و نادقیق است. برای روشن‌تر شدن مفهوم فازی مثالی را مطرح می‌کنیم. مثلا فرض کنید بخواهیم مجموعه افراد قدبلند را از افراد غیر قدبلند متمایز کنیم. در حالت کلاسیک (قطعی) اگر اندازه قد افراد بلندقد را مثلا ۱/۸ متر تصور کنیم، فردی که دارای قد ۱/۷۹ متر است در این مجموعه گنجانده نمی‌شود اما طبق تئوری مجموعه‌های فازی، تفاوت فاحشی بین یک فرد با قد ۱/۷۹ متر و فرد دیگری با قد ۱/۸ متر وجود ندارد. در جهان واقعیت مثال‌های فراوانی از جمله حقوق بالا، ساعت دقیق و ... وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت قطعی بیان کرد. مجموعه‌های فازی ابزارهای مناسبی برای بیان این‌گونه مفاهیم‌اند.

در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی سعی می‌کنیم جوابی واقع‌گرایانه‌تر، نسبت به حالت قطعی پیدا کنیم. برای حل این مسائل روش‌های گوناگونی وجود دارد که در فصل‌های بعد به بررسی برخی از این روش‌ها می‌پردازیم. در این پایان‌نامه از مقاله‌های [۳۹، ۳۶، ۳۵، ۲۵] استفاده شده است.

۳.۱ تعاریف و قضایای اولیه مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی که برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند به‌صورت ریاضی مدل‌سازی کند. در این بخش به بیان برخی از مفاهیم و تعاریف اولیه مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید A یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ باشد در این‌صورت تابع مشخصه[۶] مربوط به A را با $\chi_A(x)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم (شکل ۱.۱):

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. اگر برد تابع مشخصه از مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ به بازه $[0, 1]$ گسترش داده شود، تابعی به‌وجود خواهد آمد که به هر عضو x از X، عددی را از بازه $[0, 1]$ نسبت می‌دهد. این تابع، تابع عضویت[۷] $\tilde{a}$ نامیده می‌شود. بنابراین توابع عضویت را

[۴] Edgeworth

[۵] Vilfredo Pareto

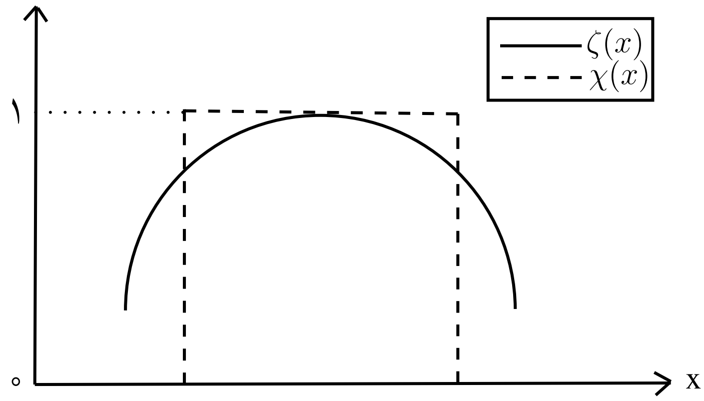
[۶] Indicator function

[۷] Membership function

می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود (شکل ۱.۱):

$$\zeta_{\tilde{a}} : X \longrightarrow [0, 1].$$

هر مجموعه فازی منحصراً به وسیله یک تابع عضویت خاص تعریف می‌شود. در تعریف تابع عضویت، فرض بر این است که مجموعه مرجع X همیشه یک مجموعه کلاسیک است. مجموعه‌های کلاسیک حالت خاصی از مجموعه‌های فازی هستند که مجموعه‌های قطعی[8] نامیده می‌شوند. تابع عضویت مجموعه‌های کلاسیک فقط شامل اعداد صفر و یک است.



شکل ۱.۱: تابع عضویت و تابع مشخصه

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه α-برش[9] (یا α-سطح) $\tilde{a}$ با $\tilde{a}_\alpha$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت

$$\tilde{a}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

تعریف می‌شود. هم‌چنین مجموعه α-برش $\tilde{a}_\alpha$ با استفاده از تابع مشخصه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_{\tilde{a}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha \\ 0 & \zeta_{\tilde{a}}(x) < \alpha. \end{cases}$$

واضح است که برای مجموعه‌های α-برش خاصیت زیر برقرار است:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Leftrightarrow \tilde{a}_{\alpha_1} \supseteq \tilde{a}_{\alpha_2}.$$

این رابطه در شکل ۲.۱ نشان داده شده است.

مجموعه ۰-برش، $\tilde{a}_0$ به‌صورت بستار[10] مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : \zeta_{\tilde{a}}(x) > 0\}$ تعریف می‌شود یعنی

$$\tilde{a}_0 = \mathrm{cl}\{x \in \mathbb{R} : \zeta_{\tilde{a}}(x) > 0\}.$$

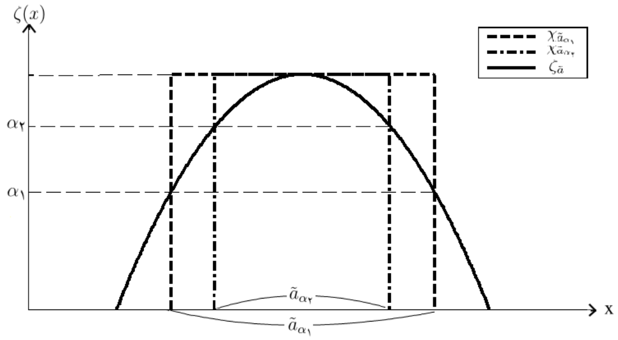
برای راحتی تابع عضویت $\tilde{0}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\zeta_{\tilde{0}}(r) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

[8] Crisp

[9] Cut

[10] Closure



شکل ۲.۱: مجموعه‌های α-برش

مشاهده می‌کنیم که برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\tilde{\circ}_\alpha^L = 0 = \tilde{\circ}_\alpha^U$.
زیرا با توجه به تعریف مجموعه α-برش داریم:

$$\tilde{\circ}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \zeta_{\tilde{\circ}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

از طرفی می‌دانیم که همیشه درجه عضویت عددی بین صفر و یک است یعنی $0 \leq \zeta_{\tilde{\circ}}(x) \leq 1$، پس می‌توانیم مجموعه $\tilde{\circ}$-برش را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{\circ}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \zeta_{\tilde{\circ}}(x) \leq 1\},$$

که با توجه به تعریف تابع عضویت $\zeta_{\tilde{\circ}}(x)$ مجموعه فوق برابر با مجموعه تک عضوی صفر است. پس داریم:

$$\tilde{\circ}_\alpha = \{0\} = [\tilde{\circ}_\alpha^L, \tilde{\circ}_\alpha^U],$$

و این یعنی $\tilde{\circ}_\alpha^L = 0 = \tilde{\circ}_\alpha^U$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $\tilde{a}$ یک مجموعه فازی باشد. مجموعه‌ای که عناصر مجموعه مرجع در آن تابع عضویت غیر صفر دارند، این مجموعه قطعی پشتیبان[11] مجموعه $\tilde{a}$ نامیده می‌شود و با علامت $\mathrm{supp}(\tilde{a})$ نشان داده می‌شود به‌عبارت دیگر

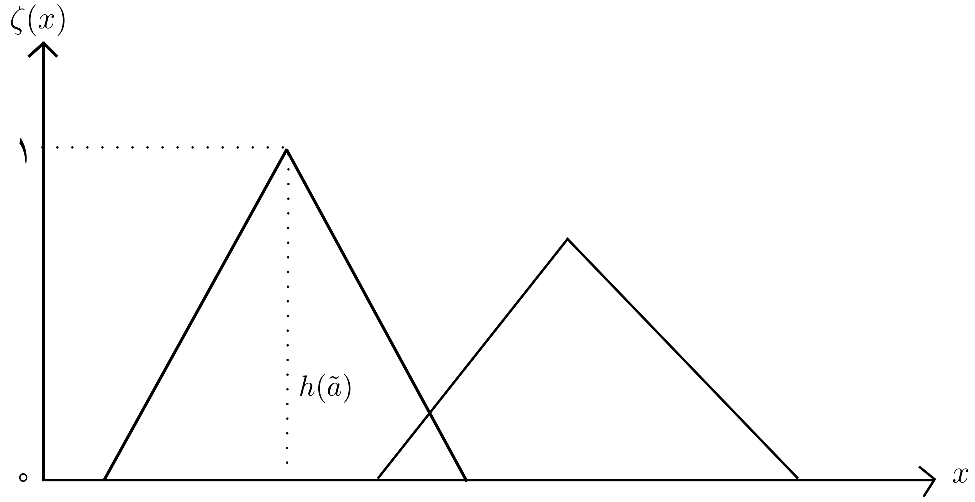
$$\mathrm{supp}(\tilde{a}) = \{x \in X | \zeta_{\tilde{a}(x) > 0}\}.$$

تعریف ۵.۳.۱. ارتفاع[12] یک مجموعه فازی $\tilde{a}$ که با نماد $h(\tilde{a})$ نشان داده می‌شود، بزرگ‌ترین درجه عضویت برای همه عناصر موجود در آن مجموعه است به‌عبارت دیگر

$$h(\tilde{a}) = \sup_{x \in X} \zeta_{\tilde{a}}(x).$$

تعریف ۶.۳.۱. مجموعه فازی $\tilde{a}$ را روی X نرمال شده گویند، اگر ارتفاع آن برابر یک باشد (شکل ۳.۱).

[11] Support
[12] Height



شکل ۳.۱: مجموعه فازی نرمال و غیر نرمال

تعریف ۷.۳.۱. مجموعه تراز[۱۳]، شامل همه اعداد مجزا در بازه $[۰,۱]$ است که به‌عنوان درجه‌های عضویت عناصری از X در مجموعه $\tilde{a}$ به‌کار رفته باشند و با $L(\tilde{a})$ نشان داده می‌شوند.

$$L(\tilde{a}) = \{\alpha \in [۰,۱] : \zeta_{\tilde{a}}(x) = \alpha \quad for \quad x \in X\}.$$

تعریف ۸.۳.۱. مجموعه‌ای که عناصر مجموعه مرجع X در آن دارای تابع عضویت یک باشند، مجموعه کانون[۱۴] عدد فازی $\tilde{a}$ نامیده می‌شود و با نماد $cor(\tilde{a})$ نشان داده می‌شود.

کانون[۱۵] مجموعه فازی $\tilde{a}$ را به‌صورت مقاطع α که در آن $\alpha = ۱$ بوده به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$core(\tilde{a}) = ۱_{\tilde{a}} = \{x \in X|\ \zeta_{\tilde{a}(x) \geq ۱\} = \{x \in X | \tilde{a}(x) = ۱\}}.$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید S مجموعه‌ای محدب باشد و f تابعی مشتق‌پذیر و پیوسته باشد در این‌صورت f روی S محدب است اگر

$$\forall \alpha \in (۰,۱), \quad \forall x_۱, x_۲ \in S, \quad f(\alpha x_۱ + (۱-\alpha)x_۲) \leq \alpha f(x_۱) + (۱-\alpha) f(x_۲).$$

تعریف ۱۰.۳.۱. مجموعه فازی $\tilde{a} : \mathbb{R}^n \to [۰,۱]$ را محدب[۱۶] گویند اگر و تنها اگر همه مجموعه α-برش‌های آن، $\{\tilde{a}_\alpha(x)\}_{\alpha \in [۰,۱]}$ از نظر کلاسیک محدب باشند.

برای این‌که یک مجموعه فازی محدب باشد، نمودار تابع عضویت آن بایستی تنها یک قله داشته باشد.

---

[۱۳]Level set

[۱۴]core set

[۱۵]Core

[۱۶]Convex

قضیه ۱.۳.۱۱. مجموعه فازی $\tilde{a}$ در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه فازی محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $\circ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم:

$$\zeta_{\tilde{a}}(tx + (۱-t)y) \geq min\{\zeta_{\tilde{a}}(x), \zeta_{\tilde{a}}(y)\} = \zeta_{\tilde{a}}(x) \wedge \zeta_{\tilde{a}}(y). \qquad (۱.۱)$$

برهان. فرض کنید $\tilde{a}$ یک مجموعه فازی محدب باشد. همچنین فرض کنید $\alpha = \zeta_{\tilde{a}}(x) \leq \zeta_{\tilde{a}}(y)$. باتوجه به این‌که $\tilde{a}$ یک مجموعه فازی محدب است پس همه مجموعه α-برش‌های آن محدب هستند لذا برای هر $x, y \in \tilde{a}_\alpha$، $tx + (۱-t)y \in \tilde{a}_\alpha$. بنابراین داریم:

$$\zeta_{\tilde{a}}(tx + (۱-t)y) \geq \alpha = min\{\zeta_{\tilde{a}}(x), \zeta_{\tilde{a}}(y)\}.$$

برعکس، اگر تابع عضویت $\zeta_{\tilde{a}}$ از مجموعه فازی $\tilde{a}$ در رابطه (۱.۱) صدق کند، در این‌صورت با گرفتن $\alpha = \zeta_{\tilde{a}}(x)$، مجموعه α-برش $\zeta_{\tilde{a}}$ مجموعه همه نقاط y است که $\zeta_{\tilde{a}}(y) \geq \alpha = \zeta_{\tilde{a}}(x)$. بنابراین برای هر $x, y \in \zeta_{\tilde{a}}$،

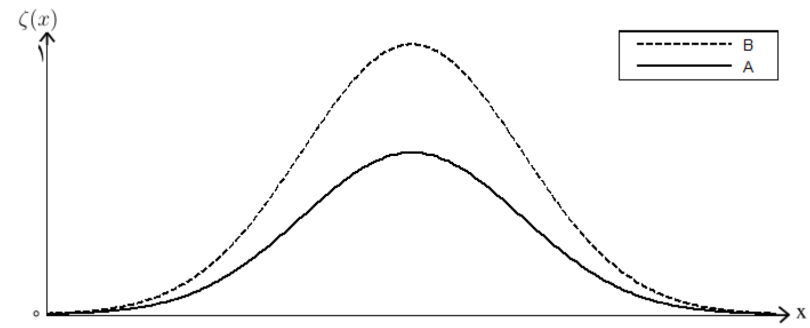
$$\zeta_{\tilde{a}}(tx + (۱-t)y) \geq \alpha = min\{\zeta_{\tilde{a}}(x), \zeta_{\tilde{a}}(y)\} = \zeta_{\tilde{a}}(x) = \alpha,$$

که نتیجه می‌دهد $tx + (۱-t)y \in \tilde{a}_\alpha$. یعنی همه مجموعه α-برش‌های $\zeta_{\tilde{a}}$ محدب‌اند و این یعنی $\tilde{a}$ محدب است. □

۱.۴ عملیات مجموعه‌های فازی

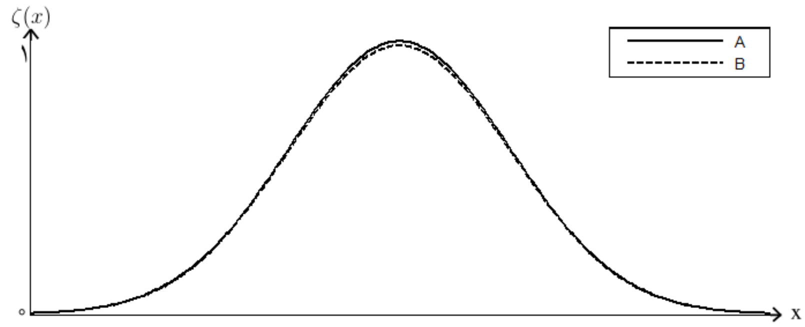
فرض کنید X مجموع مرجع، و A و B مجموعه‌های فازی تعریف شده روی مجموعه مرجع باشند. در این‌صورت تعاریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۴.۱. مجموعه فازی A زیر مجموعه، مجموعه فازی B یا A مشمول در B است اگر برای هر $x \in X$، $\zeta_A(x) \leq \zeta_B(x)$ و با $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱.۴).

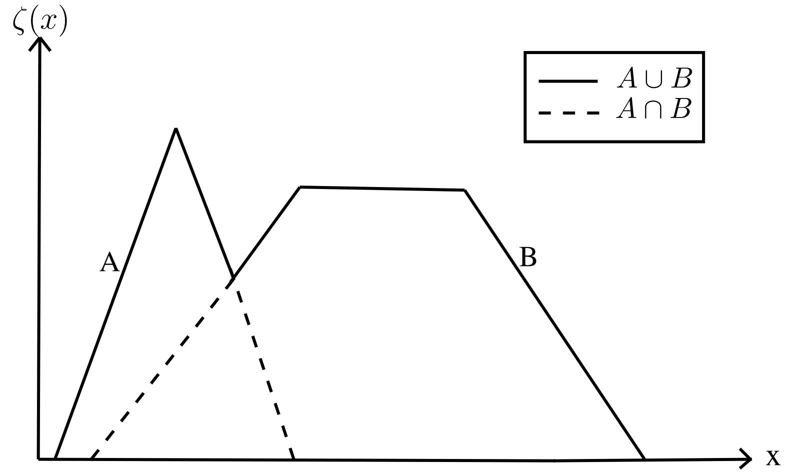


شکل ۱.۴: زیرمجموعه $A \subset B$

تعریف ۱.۴.۲. دو مجموعه فازی A و B را برابر گوییم اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ یعنی $\zeta_A(x) = \zeta_B(x)$ (شکل ۱.۵).



شکل ۵.۱: تساوی $A = B$



شکل ۶.۱: اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی

تعریف ۳.۴.۱. اجتماع استاندارد دو مجموعه فازی A و B یک مجموعه فازی C است که تابع عضویت آن به‌صورت

$$\zeta_C(x) = \max(\zeta_A(x), \zeta_B(x)),$$

است و با $C = A \cup B$ نمایش می‌دهیم (شکل ۶.۱).

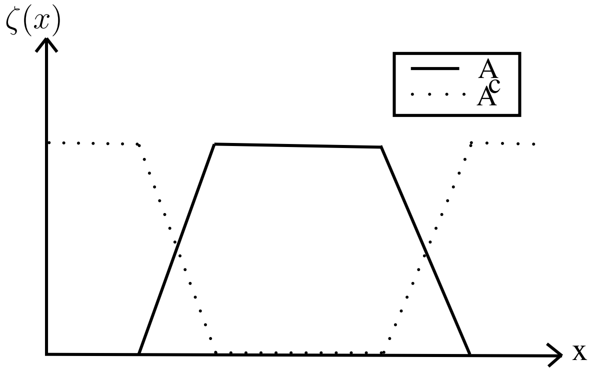
تعریف ۴.۴.۱. اشتراک استاندارد دو مجموعه فازی A و B یک مجموعه فازی D است که تابع عضویت آن به‌صورت

$$\zeta_D(x) = \min(\zeta_A(x), \zeta_B(x)),$$

است و با $D = A \cap B$ نمایش می‌دهیم (شکل ۶.۱).

تعریف ۵.۴.۱. متمم مجموعه فازی A، مجموعه‌ای فازی است که با A^c نمایش می‌دهیم و تابع عضویت آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۷.۱):

$$\zeta_{A^c}(x) = ۱ - \zeta_A(x).$$



شکل ۱.۷: متمم مجموعه فازی

قضیه ۱.۴.۶. *فرض کنید A یک مجموعه فازی در X با تابع عضویت $\zeta_A(x)$ باشد. فرض کنید A_α مجموعه α-برش A و $\chi_{A_\alpha}(x)$، تابع مشخصه مجموعه قطعی A_α برای هر $\alpha \in [0,1]$ باشد، در این‌صورت*

$$\zeta_A(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x)) \quad x \in X.$$

برهان. چون $\chi_{A_\alpha}(x)$، تابع مشخصه مجموعه قطعی A_α برای هر $\alpha \in [0,1]$ است پس داریم:

$$x \in A_\alpha \Rightarrow \chi_{A_\alpha}(x) = 1 \quad (\zeta_A(x) \geq \alpha),$$

و

$$x \notin A_\alpha \Rightarrow \chi_{A_\alpha}(x) = 0 \quad (\zeta_A(x) < \alpha),$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x)) &= \Big(\sup_{\alpha\in[0,\zeta_A(x)]} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x))\Big) \vee \Big(\sup_{\alpha\in(\zeta_A(x),1]} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x))\Big)\\
&= \Big(\sup_{\alpha\in[0,\zeta_A(x)]} (\alpha \wedge 1)\Big) \vee \Big(\sup_{\alpha\in(\zeta_A(x),1]} (\alpha \wedge 0)\Big)\\
&= \sup_{\alpha\in[0,\zeta_A(x)]} \alpha = \zeta_A(x).
\end{aligned}$$

□

قضیه ۱.۴.۷. *فرض کنید $\tilde{a}$ یک مجموعه فازی باشد. می‌توانیم $\tilde{a}$ را به‌صورت زیر نمایش دهیم.*

$$\tilde{a} = \cup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\tilde{a}_\alpha,$$

که در آن $\alpha\tilde{a}_\alpha$ نمایش ضرب جبری یک اسکالر α با مجموعه α-برش $\tilde{a}_\alpha$ است.

برهان. برای اثبات ابتدا تابع مشخصه و مجموعه α-برش را تعریف می‌کنیم:

$$\chi_{\tilde{a}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & if \quad \zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha \\ 0 & if \quad \zeta_{\tilde{a}}(x) < \alpha, \end{cases} \tag{۱.۲}$$

$$\tilde{a}_\alpha(x) = \{x : \zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\} \quad \alpha \in [0,1], \tag{۱.۳}$$

با استفاده از تعریف ۳.۴.۱، قضیه ۶.۴.۱ و رابطه‌های (۲.۱) و (۳.۱) داریم:

$$\zeta_{\cup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\tilde{a}_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \zeta_{\alpha\tilde{a}_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\zeta_{\tilde{a}_\alpha}(x)$$
$$= \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\chi_{\tilde{a}_\alpha}(x) = \sup_{\zeta_{\tilde{a}}(x)\geq\alpha} \alpha = \zeta_{\tilde{a}}(x),$$

پس با استفاده از تعریف ۲.۴.۱ نتیجه می‌گیریم:

$$\tilde{a} = \cup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\tilde{a}_\alpha,$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۸.۴.۱. *فرض کنید $\tilde{a}$ یک زیر مجموعه فازی از $\mathcal{F}(\mathbb{R})$، با تابع عضویت $\zeta_{\tilde{a}}$ و $\tilde{a}_\alpha$ مجموعه α-برش، برای هر $\alpha \in [0,1]$ باشد. تابع عضویت $\zeta_{\tilde{a}}$ را می‌توان به‌صورت*

$$\zeta_{\tilde{a}}(r) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha.1_{\tilde{a}_\alpha}(r),$$

نوشت که در آن $1_{\tilde{a}_\alpha}$ تابع مشخصه مجموعه $\tilde{a}_\alpha$ است.

برهان. با توجه به قضیه ۷.۴.۱ داریم:

$$\tilde{a} = \cup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\tilde{a}_\alpha,$$

پس داریم:

$$\zeta_{\tilde{a}}(r) = \zeta_{\cup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\tilde{a}_\alpha}(r) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \zeta_{\alpha\tilde{a}_\alpha}(r) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha.1_{\tilde{a}_\alpha}(r).$$

□

برعکس لم زیر را داریم.

لم ۹.۴.۱. *([۲۷]) فرض کنید A یک مجموعه و $\{A_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های A باشد، به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:*

۱. $A_0 = A$،

۲. $A_\beta \subseteq A_\alpha$ *برای هر* $\alpha < \beta$،

۳. $\alpha_n \uparrow \alpha \quad A_\alpha = \cap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}$،

در این‌صورت تابع $\zeta : A \longrightarrow [0,1]$ تعریف شده به‌صورت

$$\zeta(r) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha.1_{A_\alpha}(r),$$

دارای خاصیت $A_\alpha = \{r \in A : \zeta(r) \geq \alpha\}$ است.

۵.۱ اعداد فازی

تعریف ۱.۵.۱. تابع $f(x)$ در $x_\circ$ نیمه پیوسته بالایی[۱۷] است اگر

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) \leq f(x_\circ),$$

که به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) \cong f(x_\circ).$$

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید $\tilde{a}$ یک مجموعه فازی در $\mathbb{R}$ باشد. در این‌صورت $\tilde{a}$ یک عدد فازی نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\tilde{a}$ نرمال شده باشد یعنی وجود داشته باشد $x \in \mathbb{R}$ به‌طوری‌که $\zeta_{\tilde{a}}(x) = ۱$،

۲. $\tilde{a}$ محدب باشد،

۳. تابع عضویت $\zeta_{\tilde{a}}$ نیمه پیوسته بالایی باشد، یعنی $\{x \in \mathbb{R} : \zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$ برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$ یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}$ باشد،

۴. پشتیبان مجموعه $\tilde{a}$ کراندار باشد.

با این تعریف مشاهده می‌کنیم که $\tilde{a}_\alpha$ یک بازه فشرده در $\mathbb{R}$ است و بنابراین α-برش یک عدد فازی را با $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha]$ نمایش می‌دهیم که برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$، $\tilde{a}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \in \mathbb{R}$. از آن‌جا که $\tilde{a}_\alpha \subset \tilde{a}_\circ$ برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$ مجموعه α-برش $\tilde{a}_\alpha$ برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$، زیرمجموعه کرانداری از $\mathbb{R}$ است.

قضیه ۳.۵.۱. *اگر $\tilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد در این‌صورت مجموعه α-برش $\tilde{a}_\alpha$ یک زیر مجموعه بسته، کراندار و محدب از $\mathbb{R}$ است، یعنی یک بازه بسته در $\mathbb{R}$ است که با $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha]$ نشان می‌دهیم.*

برهان. بنا به تعریف ۲.۵.۱ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : \zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$ که همان مجموعه α-برش است نیمه پیوسته بالایی است یعنی

$$\lim_{x\to x^\circ} \zeta_{\tilde{a}}(x) \leq \zeta_{\tilde{a}}(x^\circ),$$

از طرفی

$$\lim_{x\to x^\circ} \zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha,$$

یعنی یک زیر مجموعه بسته و کراندار از $\mathbb{R}$ است.

برای اثبات محدب بودن مجموعه α-برش کافیست نشان دهیم:

$$\forall x, y \in \tilde{a}_\alpha, \quad \forall \lambda \in [\circ, ۱] \Rightarrow \lambda x + (۱ - \lambda) y \in \tilde{a}_\alpha.$$

فرض می‌کنیم $x, y \in \tilde{a}_\alpha$، پس $\zeta_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha$ و $\zeta_{\tilde{a}}(y) \geq \alpha$، از طرفی بنا به قضیه ۱۱.۳.۱ و تعریف ۲.۵.۱ چون $\tilde{a}$ عدد فازی است پس محدب است لذا داریم:

$$\zeta_{\tilde{a}}(\lambda x + (۱ - \lambda) y) \geq \zeta_{\tilde{a}}(x) \wedge \zeta_{\tilde{a}}(y) \geq \alpha,$$

[۱۷] Upper semicontinuous

یعنی
$$\lambda x + (۱ - \lambda)y \in \tilde{a}_\alpha,$$
و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد. در این‌صورت برای $\alpha < \beta$، روابط $\tilde{a}^L_\alpha \leq \tilde{a}^U_\alpha$، $\tilde{a}^L_\alpha \leq \tilde{a}^L_\beta$ و $\tilde{a}^U_\alpha \geq \tilde{a}^U_\beta$ برقرار می‌باشد. حال تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۴.۵.۱. فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد. $\tilde{a}$ یک عدد فازی کانونی[18] نامیده می‌شود اگر $\tilde{a}^L_\alpha$ و $\tilde{a}^U_\alpha$ نسبت به α روی بازه $[۰, ۱]$ پیوسته باشند. یعنی تابع $f(\alpha) = \tilde{a}^L_\alpha$ و $g(\alpha) = \tilde{a}^U_\alpha$ روی بازه $[۰, ۱]$ پیوسته باشد.

مجموعه همه اعداد فازی کانونی را با $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۵.۱. فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی کانونی باشد. $\tilde{a}$ یک عدد فازی استاندارد[19] نامیده می‌شود، اگر برای $\alpha < \beta$ داشته باشیم، $\tilde{a}^L_\alpha < \tilde{a}^U_\alpha$، $\tilde{a}^L_\alpha < \tilde{a}^L_\beta$ و $\tilde{a}^U_\alpha < \tilde{a}^U_\beta$.

مجموعه همه اعداد فازی استاندارد را با $\mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۵.۱. عدد فازی $\tilde{a} = (a^L, a, a^U)$، یک عدد فازی مثلثی[20] نامیده می‌شود اگر تابع عضویت آن به‌صورت زیر باشد (شکل ۸.۱):

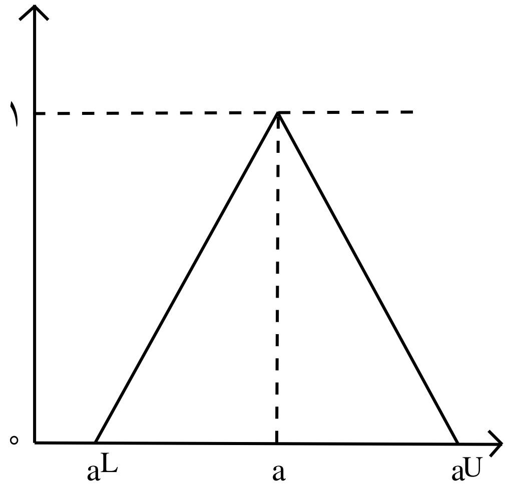
$$\zeta_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a^L)}{(a-a^L)} & a^L \leq x \leq a \\ \frac{(a^U-x)}{(a^U-a)} & a < x \leq a^U \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

نمودار $\tilde{a}$ یک مثلث با پایه $[a^L, a^U]$ و قله a است و مجموعه α-برش آن به‌صورت
$$\tilde{a}_\alpha = [(۱ - \alpha)a^L + \alpha a, (۱ - \alpha)a^U + \alpha a], \tag{۴.۱}$$
است. به‌عبارت دیگر
$$\tilde{a}^L_\alpha = (۱ - \alpha)a^L + \alpha a, \quad \tilde{a}^U_\alpha = (۱ - \alpha)a^U + \alpha a. \tag{۵.۱}$$
برای اثبات رابطه (۴.۱)، با توجه به تعریف مجموعه α-برش مقدار تابع عضویت اعضای مجموعه $\tilde{a}_\alpha(x)$ باید بزرگ‌تر یا مساوی α باشد پس داریم:
$$\frac{(x - a^L)}{(a - a^L)} \geq \alpha \Rightarrow x \geq (۱ - \alpha)a^L + \alpha a,$$
$$\frac{(a^U - x)}{(a^U - a)} \geq \alpha \Rightarrow x \leq (۱ - \alpha)a^U + \alpha a,$$

[18] Canonical

[19] Standard

[20] Triangular



شکل ۸.۱: عدد فازی مثلثی

یعنی

$$\tilde{a}_\alpha = [(۱-\alpha)a^L+\alpha a, (۱-\alpha)a^U+\alpha a].$$

هم‌چنین چون هر عدد فازی مثلثی $\tilde{a}$ را به‌صورت بازه‌ای از اعداد حقیقی نشان می‌دهیم، می‌بینیم $-\tilde{a} = (-a^U, -a, -a^L)$. عدد فازی مثلثی $\tilde{a}$ یک عدد فازی استاندارد است، و اگر $a^L > ۰$ باشد، $\tilde{a}$ مثبت است.

تعریف ۷.۵.۱. اصلی که توابع قطعی را به توابع فازی تبدیل می‌کند، اصل گسترش[۲۱] گویند.

فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دوعدد فازی باشند با استفاده از اصل گسترش [۴۴، ۴۳، ۴۲] و با استفاده از [۳۱] تابع عضویت $\tilde{a}\oplus\tilde{b}$ به‌صورت

$$\zeta_{\tilde{a}\oplus\tilde{b}}(z) = \sup_{\{(x,y):x+y=z\}} min\{\zeta_{\tilde{a}}(x), \zeta_{\tilde{b}}(y)\}, \qquad (۶.۱)$$

و تابع عضویت ضرب اسکالر $\lambda\tilde{a}$ که $\lambda\in\mathbb{R}$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta_{\lambda\tilde{a}}(z) = \begin{cases} \zeta_{\tilde{a}}(\frac{z}{\lambda}) & if\ \lambda \neq ۰ \\ ۰ & if\ \lambda = ۰, z\neq ۰ \\ ۱ & if\ \lambda = ۰ = z, \end{cases} \qquad (۷.۱)$$

و این بدان معنی است که اگر $\lambda = ۰$ آن‌گاه $\lambda\tilde{a} = \tilde{۰}$.

گزاره ۸.۵.۱. *([۴۵]) فرض کنید $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد، در این‌صورت $\tilde{a}\oplus\tilde{b}\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ و برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و $\lambda\neq ۰$، $\lambda\tilde{a}\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$. علاوه بر این نتایج زیر را داریم:*

۱. $(\tilde{a}\oplus\tilde{b})^L_\alpha = \tilde{a}^L_\alpha + \tilde{b}^L_\alpha$ *و* $(\tilde{a}\oplus\tilde{b})^U_\alpha = \tilde{a}^U_\alpha + \tilde{b}^U_\alpha$ *برای هر* $\alpha\in[۰,۱]$.

۲. $(\lambda\tilde{a})^L_\alpha = \lambda.\tilde{a}^L_\alpha$ *و* $(\lambda\tilde{a})^U_\alpha = \lambda.\tilde{a}^U_\alpha$ *برای هر* $\alpha\in[۰,۱], \lambda > ۰$.

۳. $(\lambda\tilde{a})^L_\alpha = \lambda.\tilde{a}^U_\alpha$ *و* $(\lambda\tilde{a})^U_\alpha = \lambda.\tilde{a}^L_\alpha$ *برای هر* $\alpha\in[۰,۱], \lambda < ۰$.

[۲۱] Extention principle

۶.۱ حساب بازه‌ای اعداد فازی

فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی باشند. با استفاده از α-برش‌های آن‌ها حساب بازه‌ای[۲۲] اعداد فازی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

جمع و تفریق بین هر دو عدد فازی در $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ را به‌صورت زیر داریم:

$$[\tilde{a} \oplus \tilde{b}]_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha + \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha + \tilde{b}^U_\alpha],$$

و

$$[\tilde{a} \ominus \tilde{b}]_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha - \tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha - \tilde{b}^L_\alpha],$$

به‌علاوه برای هر دو عدد فازی ضرب و تقسیم را به‌صورت زیر داریم:

$$(\tilde{a} \otimes \tilde{b})_\alpha = \tilde{a}_\alpha \times \tilde{b}_\alpha = \left[\min\{\tilde{a}^L_\alpha\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha\tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha\tilde{b}^U_\alpha\}, \max\{\tilde{a}^L_\alpha\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha\tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha\tilde{b}^U_\alpha\}\right],$$

و

$$(\tilde{a} \oslash \tilde{b})_\alpha = \tilde{a}_\alpha / \tilde{b}_\alpha = \left[\min\{\tilde{a}^L_\alpha/\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha/\tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha/\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha/\tilde{b}^U_\alpha\}, \max\{\tilde{a}^L_\alpha/\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha/\tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha/\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha/\tilde{b}^U_\alpha\}\right],$$

که $\circ \notin [\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{b}^U_\alpha]$، و ضرب یک عدد فازی در اسکالر $\lambda > \circ$ نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(\lambda.\tilde{a})_\alpha = \lambda.\tilde{a}_\alpha = [\lambda\tilde{a}^L_\alpha, \lambda\tilde{a}^U_\alpha].$$

۷.۱ مدل ریاضی مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی

برای فرمول‌بندی یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی به‌صورت ریاضی، به برخی تعاریف اولیه نیاز داریم که ابتدا به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۷.۱. مجموعه V را همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر، یک فضای برداری[۲۳] روی میدان F می‌نامیم هرگاه:

عمل جمع خواص شرکت‌پذیری، همانی(عضو خنثی)، قرینه(عضو معکوس)، و جابجایی را داشته باشد و عمل ضرب اسکالر دارای شرایط زیر باشد:

۱. $۱a = a$ برای هر $a \in V$ (منظور از ۱ همان عضو همانی F است).

۲. $\lambda_۱(\lambda_۲ a) = (\lambda_۱\lambda_۲)a$ برای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \in F$.

۳. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ برای هر $\lambda \in F$ و هر $a, b \in V$.

۴. $(\lambda_۱ + \lambda_۲)a = \lambda_۱ a + \lambda_۲ a$ برای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \in F$ و هر $a, b \in V$.

تعریف ۲.۷.۱. یک فضای نرم‌دار[۲۴] یک فضای برداری V با تابع $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوری‌که:

---

[۲۲] Arithmetic

[۲۳] Vector space

[۲۴] Normed space

۱ . $0 \leq \|x\| < \infty$ برای هر $x \in V$.

۲ . $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ برای هر $x \in V$.

۳ . $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ برای هر $\alpha \in F$ و هر $x \in V$.

۴ . $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in V$.

هر تابع $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ با این چهار خاصیت نرم نامیده می‌شود. به زوج $(V, \|.\|)$ فضای خطی نرم‌دار گویند.

تعریف ۳.۷.۱. فضای X هاسدورف[۲۵] است اگر بتوان هر دو نقطه متمایز در X را توسط همسایگی‌هایی از هم جدا کرد. فضای هاسدورف فضای T_2 نیز نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۷.۱. فضای توپولوژی[۲۶] زوج مرتبی مانند (X, τ) است که در آن X یک مجموعه و τ نیز گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های X است، به گونه‌ای که در شرایط زیر صدق کند:

۱ . اجتماع هر گردایه از مجموعه‌های عضو τ در τ قرار داشته باشد.

۲ . اشتراک هر تعداد متناهی مجموعه عضو τ در τ قرار داشته باشد.

۳ . مجموعه‌های تهی و X عضو τ باشند.

گردایه τ، توپولوژی تعریف شده روی X نام دارد.

تعریف ۵.۷.۱. نگاشت f میان دو فضای توپولوژی X و Y یکریخت[۲۷] نامیده می‌شود، اگر دارای خواص زیر باشد:

۱ . f دوسویه (یک‌به‌یک و پوشا) باشد.

۲ . f پیوسته باشد.

۳ . نگاشت وارون، f^{-1} پیوسته باشد.

اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد، آن‌گاه X و Y یکریخت هستند.

دو فضای یکریخت، خواص توپولوژیکی مشترک دارند. برای نمونه اگر یکی از آن‌ها فشرده، هم‌بند یا هاسدورف باشد دیگری نیز به ترتیب فشرده، هم‌بند یا هاسدورف است.

تعریف ۶.۷.۱. هر رابطه دوتایی $\leq$ روی فضای برداری حقیقی V، یک رابطه جزئاً مرتب روی V نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

[۲۵] Hausdorff

[۲۶] Topological space

[۲۷] Homeomorphism

۱ . $x \leq x$ برای هر $x \in V$ (انعکاسی).

۲ . اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آن‌گاه $x \leq z$ برای هر $x, y, z \in v$ (تعدی).

۳ . اگر $x \leq y$ و $a \leq b$ آن‌گاه $x + a \leq y + b$ برای هر $x, y, a, b \in v$.

۴ . اگر $x \leq y$ و λ یک عدد حقیقی مثبت باشد آن‌گاه $\lambda x \leq \lambda y$ برای هر $x, y \in v$.

تعریف ۷.۷.۱. هر رابطه دوتایی $\leq$ روی مجموعه $\mathcal{S}$، یک رابطه جزئاً مرتب روی $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱ . $x \leq x$ برای هر $x \in \mathcal{S}$ (انعکاسی).

۲ . اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آن‌گاه $x \leq z$ برای هر $x, y, z \in \mathcal{S}$ (تعدی).

فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی و $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نمایش مجموعه همه اعداد فازی[۲۸] باشد. تابع $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار تعریف شده روی X نامیده می‌شود. یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه با ضرایب فازی در حالت کلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} min \quad & \left(\tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_n(x)\right) \\ s.t \quad & \tilde{g}_i \preceq \tilde{0} \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

که در آن $\tilde{f}_j$ و $\tilde{g}_i$ برای هر $j = 1, \ldots, n$ و هر $i = 1, \ldots, m$، توابع استاندارد فازی مقدار تعریف شده روی X و $\preceq$ یک رابطه جزئا مرتب روی $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ است. اگرچه در این‌جا فقط حالت مینیمم‌سازی، مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه فازی را در نظر گرفته‌ایم، مسائل ماکزیمم‌سازی برنامه‌ریزی چندهدفه فازی شامل راه حل‌های مشابهی هستند.

در حالت $n = 1$، مسأله (۸.۱) به یک مسأله بهینه‌سازی تک‌هدفه فازی تبدیل می‌شود. در بهینه‌سازی چندهدفه با ضرایب فازی همواره فرض می‌کنیم $n \geq 2$.

[۲۸] Fuzzy numbers

فصل ۲

روش‌هایی برای حل مسائل چندهدفه فازی براساس مفهوم اسکالرسازی

۱.۲ مقدمه

در این فصل روش‌های اسکالرسازی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی را بر اساس مفهوم مخروط محدب و تابع جانشینی به‌طور هم‌زمان ارائه می‌دهیم. با توجه به این‌که مجموعه تمام اعداد فازی را می‌توان در یک فضای نرم‌دار قرار داد، برای بررسی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با ضرایب فازی از تکنیک‌های اسکالرسازی در مسائل بهینه‌سازی برداری استفاده می‌کنیم و با در نظرگرفتن مخروط‌های محدب متفاوت دو راه‌حل برای پیدا کردن جواب‌های کارای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با ضرایب فازی ارائه می‌دهیم. در ادامه به بررسی روش مجموع وزین که یکی از مهم‌ترین تکنیک‌های اسکالرسازی است، می‌پردازیم. مطالب این فصل از مراجع [۳۹، ۳۶] می‌باشد.

۲.۲ تعاریف و قضایای اولیه

به‌طور کلی مجموعه همه اعداد فازی کانونی، $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ نسبت به جمع و ضرب اسکالر که در رابطه‌های (۶.۱) و (۷.۱) تعریف شده یک فضای برداری نیست. اما پوری[۱] و رالسکو[۲] [۳۱] و کالوا[۳] [۲۱] ثابت کردند که می‌توان $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ را در یک فضای نرم‌دار $(\mathcal{N}, \|.\|)$ به‌صورت ایزومتریک و ایزومورفیسم قرار داد. به‌عبارت دیگر اگر $\pi : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{N}$ یک تابع جانشینی[۴] باشد، در این‌صورت داریم:

۱. $\pi(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) = \pi(\tilde{a}) + \pi(\tilde{b})$.

[۱] Puri

[۲] Ralescu

[۳] Kaleva

[۴] Embedding function

۲. $\pi(\lambda\tilde{a}) = \lambda\pi(\tilde{a})$ برای هر $\lambda \geq 0$.

۳. $d(\tilde{a},\tilde{b}) = \|\pi(\tilde{a}) - \pi(\tilde{b})\|$.

که متر $d(.,.)$ روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ به‌صورت

$$d(\tilde{a},\tilde{b}) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} d_H(\tilde{a}_\alpha,\tilde{b}_\alpha),$$

تعریف شده است و فاصله هاسدورف d_H با رابطه

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|a-b|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|a-b|\},$$

به‌دست می‌آید.

به‌طور دقیق‌تر، فضای نرم‌دار $(\mathcal{N},\|.\|)$، شامل کلاس‌های هم‌ارزی $[[\tilde{a},\tilde{b}]]$ است که با رابطه هم‌ارزی، $(\tilde{a},\tilde{b}) \sim (\tilde{c},\tilde{d})$ اگر و تنها اگر $\tilde{a}\oplus\tilde{d} = \tilde{b}\oplus\tilde{c}$، به‌دست می‌آید که در آن $(\tilde{a},\tilde{b}),(\tilde{c},\tilde{d}) \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})\times\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$.

بردار جمع و ضرب اسکالر در $(\mathcal{N},\|.\|)$ به‌صورت

$$[[\tilde{a},\tilde{b}]] + [[\tilde{c},\tilde{d}]] = [[\tilde{a}\oplus\tilde{c},\tilde{b}\oplus\tilde{d}]], \tag{۱.۲}$$

و

$$\lambda[[\tilde{a},\tilde{b}]] = \begin{cases} [[\lambda\tilde{a},\lambda\tilde{b}]], & if\lambda \geq 0, \\ [[(-\lambda)\tilde{b},(-\lambda)\tilde{a}]], & if\lambda < 0. \end{cases}$$

تعریف می‌شوند.

نرم در $\mathcal{N}$ به‌صورت $\|[[\tilde{a},\tilde{b}]]\| = d(\tilde{a},\tilde{b})$ تعریف می‌شود. می‌بینیم که $[[\tilde{0},\tilde{0}]]$ عنصر صفر فضای نرم‌دار $(\mathcal{N},\|.\|)$ است زیرا از رابطه (۱.۲) داریم:

$$[[\tilde{a},\tilde{b}]] + [[\tilde{0},\tilde{0}]] = [[\tilde{a},\tilde{b}]] = [[\tilde{0},\tilde{0}]] + [[\tilde{a},\tilde{b}]].$$

تعریف ۱.۲.۲. تابع جانشینی $\pi : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{N}$ به‌صورت

$$\pi(\tilde{a}) = [[\tilde{a},\tilde{0}]], \tag{۲.۲}$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید $[[\tilde{a},\tilde{0}]] = [[\tilde{b},\tilde{0}]]$. در این‌صورت $(\tilde{a},\tilde{0}) \sim (\tilde{b},\tilde{0})$ پس $\tilde{a} = \tilde{b}$، یعنی تابع جانشینی π یک‌به‌یک است. می‌بینیم که $\pi(\tilde{0}) = [[\tilde{0},\tilde{0}]]$ عنصر صفر فضای نرم‌دار $(\mathcal{N},\|.\|)$ است.

تعریف ۲.۲.۲. تابع $\eta : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. تحت این تابع یک عدد فازی $\tilde{a}\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ به یک عدد حقیقی غیرفازی $\eta(\tilde{a})$ تبدیل می‌شود. بنابراین η را یک تابع غیرفازی‌سازی[5] می‌نامیم.

گوییم تابع غیرفازی‌سازی η خطی است اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\eta(\tilde{a}\oplus\tilde{b}) = \eta(\tilde{a}) + \eta(\tilde{b}), \quad \eta(\lambda\tilde{a}) = \lambda.\eta(\tilde{a}) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}. \tag{۳.۲}$$

[5] Defuzzification

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید $\tilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. تعریف می‌کنیم

$$\eta(\tilde{a}) = ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{a}_{\alpha}^{L} + \tilde{a}_{\alpha}^{U}) \mathrm{d}\alpha.$$

با استفاده از گزاره ۸.۵.۱ نشان می‌دهیم η یک تابع خطی غیرفازی‌سازی است. برای اثبات خطی بودن کافیست نشان دهیم:

$$\eta(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) = \eta(\tilde{a}) + \eta(\tilde{b}), \quad \eta(\lambda \tilde{a}) = \lambda.\eta(\tilde{a}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\eta(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) &= ۱/۲ \int_{۰}^{۱} ((\tilde{a} \oplus \tilde{b})_{\alpha}^{L} + (\tilde{a} \oplus \tilde{b})_{\alpha}^{U}) \mathrm{d}\alpha \\
&= ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{a}_{\alpha}^{L} + \tilde{b}_{\alpha}^{L}) \mathrm{d}\alpha + ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{a}_{\alpha}^{U} + \tilde{b}_{\alpha}^{U}) \mathrm{d}\alpha \\
&= ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{a}_{\alpha}^{L} + \tilde{a}_{\alpha}^{U}) \mathrm{d}\alpha + ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{b}_{\alpha}^{L} + \tilde{b}_{\alpha}^{U}) \mathrm{d}\alpha \\
&= \eta(\tilde{a}) + \eta(\tilde{b}).
\end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}
\eta(\lambda \tilde{a}) &= ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\lambda \tilde{a})_{\alpha}^{L} + (\lambda \tilde{a})_{\alpha}^{U} \mathrm{d}\alpha \\
&= ۱/۲ \int_{۰}^{۱} \lambda \tilde{a}_{\alpha}^{L} + \lambda \tilde{a}_{\alpha}^{U} \mathrm{d}\alpha \\
&= \lambda \big(۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{a}_{\alpha}^{L} + \tilde{a}_{\alpha}^{U}) \mathrm{d}\alpha\big) \\
&= \lambda \eta(\tilde{a}).
\end{aligned}$$

یعنی η یک تابع خطی است و چون $\eta(\tilde{a})$ یک عدد حقیقی است پس $\eta(\tilde{a})$ یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است.

با مراجعه به [۳۱] تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. اگر یک عدد فازی $\tilde{c} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\tilde{b} = \tilde{a} \oplus \tilde{c}$ (واضح است که جمع $\oplus$ خاصیت جابجایی دارد)، در این‌صورت $\tilde{c}$ منحصربفرد است و $\tilde{c}$ فاصله هاکاهارا[۶] بین $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ نامیده می‌شود و به‌صورت $\tilde{c} = \tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ می‌نویسیم.

گزاره ۵.۲.۲. *فرض کنید $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. اگر فاصله هاکاهارا $\tilde{c} = \tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ وجود داشته باشد، در این‌صورت برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ داریم:*

۱. $\tilde{c}_{\alpha}^{L} = \tilde{b}_{\alpha}^{L} - \tilde{a}_{\alpha}^{L}$.

[۶] Hukuhara

۲. $\tilde{c}^U_\alpha = \tilde{b}^U_\alpha - \tilde{a}^U_\alpha$.

اگر $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$، و فاصله هاکاهارا، $\tilde{c} = \tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ وجود داشته باشد در این‌صورت $\tilde{c} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ است.

برهان. فرض می‌کنیم فاصله هاکاهارا $\tilde{c} = \tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ وجود داشته باشد، پس داریم:

$$\tilde{c} = \tilde{b} \ominus_H \tilde{a} \Rightarrow \tilde{b} = \tilde{a} \oplus \tilde{c}$$

$$\Rightarrow (\tilde{b})^L_\alpha = (\tilde{a} \oplus \tilde{c})^L_\alpha,\ (\tilde{b})^U_\alpha = (\tilde{a} \oplus \tilde{c})^U_\alpha,$$

با توجه به گزاره ۱.۵.۰.۸ داریم:

$$\Rightarrow (\tilde{b})^L_\alpha = (\tilde{a})^L_\alpha + (\tilde{c})^L_\alpha,\ (\tilde{b})^U_\alpha = (\tilde{a})^U_\alpha + (\tilde{c})^U_\alpha$$

$$\Rightarrow (\tilde{c})^L_\alpha = (\tilde{b})^L_\alpha - (\tilde{a})^L_\alpha,\ (\tilde{c})^U_\alpha = (\tilde{b})^U_\alpha - (\tilde{a})^U_\alpha.$$

همچنین چون $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ پس برای هر $\alpha \in [0, 1]$ تابع‌های $(\tilde{a})^L_\alpha$، $(\tilde{a})^U_\alpha$، $(\tilde{b})^L_\alpha$ و $(\tilde{b})^U_\alpha$ روی $[0, 1]$ پیوسته هستند لذا تفاضل آن‌ها نیز پیوسته است. یعنی تابع‌های $\tilde{c}^L_\alpha$ و $\tilde{c}^U_\alpha$ وجود دارند و پیوسته‌اند و پس $\tilde{c} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. □

گزاره ۶.۲.۲. *عبارات زیر درست هستند:*

۱. *فرض کنید $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشند و η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد. اگر فاصله هاکاهارا، $\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ وجود داشته باشد در این‌صورت $\eta(\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}) = \eta(\tilde{b}) - \eta(\tilde{a})$.*

۲. *فرض کنید $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشند و π را تابع جانشینی تعریف شده در رابطه (۲.۲) در نظر بگیرید. اگر فاصله هاکاهارا، $\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ وجود داشته باشد و متعلق به $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد، در این‌صورت*

$$\pi(\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}) = \pi(\tilde{b}) - \pi(\tilde{a}).$$

برهان. فرض کنید $\tilde{c} = \tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ یعنی $\tilde{b} = \tilde{a} \oplus \tilde{c}$. پس طبق فرض چون η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است داریم:

$$\begin{aligned} & \eta(\tilde{b}) = \eta(\tilde{a}) + \eta(\tilde{c}) \\ \Rightarrow\ & \eta(\tilde{c}) = \eta(\tilde{b}) - \eta(\tilde{a}) \\ \Rightarrow\ & \eta(\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}) = \eta(\tilde{b}) - \eta(\tilde{a}), \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} & \pi(\tilde{b}) = \pi(\tilde{a}) + \pi(\tilde{c}) \\ \Rightarrow\ & \pi(\tilde{c}) = \pi(\tilde{b}) - \pi(\tilde{a}) \\ \Rightarrow\ & \pi(\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}) = \pi(\tilde{b}) - \pi(\tilde{a}), \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

تعریف ۷.۲.۲. زیر مجموعه $\mathcal{C}$ از $\mathbb{R}^p$ یک مخروط[7] نامیده می‌شود هرگاه، برای هر $x \in \mathcal{C}$ و هر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda x \in \mathcal{C}$. همچنین مخروط $\mathcal{C}$ محدب است اگر $\mathcal{C}$ یک مجموعه محدب باشد. به‌عبارت دیگر مخروط $\mathcal{C}$ محدب است اگر برای هر $d_1, d_2 \in \mathcal{C}$، $d_1 + d_2 \in \mathcal{C}$.

تعریف ۸.۲.۲. مخروط $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^p$ نوک‌تیز[8] نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = 0$. به‌عبارت دیگر، اگر $x \in \mathcal{C}$ و $x \neq 0$ آن‌گاه $(-x) \notin \mathcal{C}$.

تعریف ۹.۲.۲. مخروط محدب $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ یک مخروط ترتیبی[9] نامیده می‌شود که یک ترتیب جزئی[10] روی $\mathcal{Y}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کند. فرض می‌کنیم $y^1, y^2 \in \mathcal{Y}$ در این‌صورت

$$y^1 \leq_{\mathcal{C}} y^2 \Longleftrightarrow y^2 - y^1 \in \mathcal{C} - \{0\} \Longleftrightarrow y^1 \leqq_{\mathcal{C}} y^2,\ y^1 \neq y^2.$$

تعریف ۱۰.۲.۲. رابطه R روی $\mathcal{S}$ پادمتقارن است اگر برای هر $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$، که $(s_1, s_2) \in R$ و $(s_2, s_1) \in R$ آن‌گاه $s_1 = s_2$.

قضیه ۱۱.۲.۲. *الف . اگر $\leqq$ یک رابطه جزئاً مرتب روی فضای برداری حقیقی V باشد آن‌گاه مجموعه $\mathcal{C}_V = \{x \in V : x \geqq 0\}$ یک مخروط محدب است. در این‌صورت گوییم $\mathcal{C}_V$ با $\leqq$ القا شده است. برعکس، اگر $\mathcal{C}_V$ یک مخروط محدب در V باشد در این‌صورت رابطه دوتایی $\leqq$ تعریف شده با $x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}_V$، یک رابطه جزئاً مرتب در V است. در این‌صورت گوییم $\leqq$ با $\mathcal{C}_V$ القا شده است.*

ب . اگر مخروط ترتیبی $\mathcal{C}_V$ نوک‌تیز باشد در این‌صورت رابطه جزئاً مرتب $\leqq$ القا شده با $\mathcal{C}_V$ یک رابطه پادمتقارن است. برعکس اگر رابطه جزئاً مرتب $\leqq$ پادمتقارن باشد در این‌صورت مخروط محدب $\mathcal{C}_V$ القاشده با $\leqq$ نوک‌تیز است.

برهان. الف . واضح است که $\mathcal{C}_V$ یک مخروط محدب است. برعکس فرض می‌کنیم $\mathcal{C}_V$ یک مخروط محدب در V باشد. نشان می‌دهیم رابطه دوتایی $\leqq$ با تعریف $x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}_V$ یک رابطه جزئاً مرتب در V است.

خاصیت اول. چون $\mathcal{C}_V$ مخروط است پس برای هر $x \in \mathcal{C}_V$ و $\lambda \geq 0$ داریم $\lambda x \in \mathcal{C}_V$. به خصوص برای $\lambda = 0$ نیز برقرار است یعنی $0 \in \mathcal{C}_V$ پس باتوجه به تعریف مخروط داریم:

$$\forall x \in V, \quad x \leqq x \Longleftrightarrow x - x = 0 \in \mathcal{C}_V$$

یعنی مخروط $\mathcal{C}_V$ انعکاسی است.

خاصیت دوم. فرض می‌کنیم $\mathcal{C}_V$ یک مخروط محدب باشد. همچنین فرض می‌کنیم $x, y, z \in V$ و $x \leqq y$ و $y \leqq z$ پس داریم:

$$x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}_V, \quad y \leqq z \Longleftrightarrow z - y \in \mathcal{C}_V$$

---

[7] Cone

[8] Pointed

[9] Ordering cone

[10] Partial order

قرار می‌دهیم $d_۱ = y - x$ و $d_۲ = z - y$، از آن‌جاکه $\mathcal{C}_V$ مخروط محدب است پس برای هر $d_۲, d_۱ \in \mathcal{C}_V$ داریم $d_۱ + d_۲ \in \mathcal{C}_V$ پس $z - x \in \mathcal{C}_V$ یعنی $x \leqq z$. پس مخروط $\mathcal{C}_V$ دارای خاصیت تعدی نیز می‌باشد.

خاصیت سوم. باید نشان دهیم

$$\forall x, y, a, b \in V, \quad x \leqq y, a \leqq b \Rightarrow x + a \leqq y + b,$$

فرض می‌کنیم $x, y, a, b \in V$ و $x \leqq y$ و $a \leqq b$. داریم:

$$x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}_V, \qquad a \leqq b \Longleftrightarrow b - a \in \mathcal{C}_V.$$

قرار می‌دهیم $d_۱ = y - x$ و $d_۲ = b - a$، از آن‌جاکه $\mathcal{C}_V$ مخروط محدب است پس برای هر $d_۲, d_۱ \in \mathcal{C}_V$ داریم $d_۱ + d_۲ \in \mathcal{C}_V$ پس $y - x + b - a \in \mathcal{C}_V$ یعنی $x + a \leqq y + b$.

خاصیت چهارم. نشان می‌دهیم

$$\forall x, y \in V, \quad x \leqq y, \lambda \geq ۰ \Rightarrow \lambda x \leqq \lambda y.$$

فرض می‌کنیم $x, y \in V$ و $x \leqq y$ و $\lambda \geq ۰$ باشد. داریم:

$$x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}_V,$$

چون $\mathcal{C}_V$ مخروط است پس برای هر $\lambda \geq ۰$ داریم:

$$\lambda(y - x) = \lambda y - \lambda x \in \mathcal{C}_V \Longleftrightarrow \lambda x \leqq \lambda y.$$

ب . فرض کنیم مخروط ترتیبی $\mathcal{C}_V$ نوک‌تیز باشد. نشان می‌دهیم رابطه جزئاً مرتب $\leqq$ القا شده با $\mathcal{C}_V$ یک رابطه پاد متقارن است.

فرض می‌کنیم $(x, y), (y, x) \in \leqq$ داریم:

$$x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}_V, \quad y \leqq x \Longleftrightarrow x - y \in \mathcal{C}_V,$$

قرار می‌دهیم $d = y - x$ لذا داریم:

$$d = y - x \in \mathcal{C}_V, \quad -d = x - y \in \mathcal{C}_V,$$

چون مخروط ترتیبی $\mathcal{C}_V$ نوک‌تیز است پس $d, -d \in \mathcal{C}_V$ نتیجه می‌دهد $d = ۰$ یعنی $x = y$ و این یعنی رابطه $\leqq$ پاد متقارن است.

برعکس فرض می‌کنیم رابطه $\leqq$ پاد متقارن باشد نشان می‌دهیم مخروط ترتیبی $\mathcal{C}_V$ نوک‌تیز است. برای این منظور فرض می‌کنیم $d, -d \in \mathcal{C}_V$ داریم:

$$\begin{aligned} d \in \mathcal{C}_V, -d \in \mathcal{C}_V &\Longleftrightarrow ۰ \leqq d, \ ۰ \leqq -d \\ &\Longleftrightarrow ۰ \leqq d, \ d \leqq ۰, \end{aligned}$$

چون رابطه $\leqq$ پاد متقارن است پس $d = ۰$ یعنی مخروط $\mathcal{C}_V$ نوک‌تیز است.

□

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنید $\tilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد. گوییم $\tilde{a}$ نامنفی است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، داشته باشیم $\tilde{a}^L_\alpha \geq ۰$. هم‌چنین گوییم $\tilde{a}$ مثبت است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، داشته باشیم $\tilde{a}^L_\alpha > ۰$.

ملاحظه ۱۳.۲.۲. *فرض کنید $\tilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد. از آن‌جا که برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، $\tilde{a}^L_\alpha \leq \tilde{a}^U_\alpha$ است، می‌بینیم $\tilde{a}$ نامنفی است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، $\tilde{a}^L_\alpha \geq ۰$ و $\tilde{a}^U_\alpha \geq ۰$ باشد و $\tilde{a}$ مثبت است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، $\tilde{a}^L_\alpha > ۰$ و $\tilde{a}^U_\alpha > ۰$ باشد.*

می‌نویسیم $\mathcal{F}^n_c(\mathbb{R}) = \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ (n بار). هم‌چنین برای $\underline{\tilde{u}} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$ می‌نویسیم $\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}^۱, \ldots, \tilde{u}^n)$ که برای هر $j = ۱, \ldots, n$، $\tilde{u}^j \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. جمع و ضرب اسکالر در $\mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$، برای هر $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{\tilde{u}} \oplus \underline{\tilde{v}} = (\tilde{u}^۱ \oplus \tilde{v}^۱, \ldots, \tilde{u}^n \oplus \tilde{v}^n),$$

و

$$\lambda\tilde{u} = (\lambda\tilde{u}^۱, \ldots, \lambda\tilde{u}^n), \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

هم‌چنین گوییم فاصله هاکاهارا، $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ وجود دارد اگر برای هر $j = ۱, \ldots, n$، $\tilde{v}^j \ominus_H \tilde{u}^j$ وجود داشته باشد. هم‌چنین $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ یعنی $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} = (\tilde{v}^۱ \ominus_H \tilde{u}^۱, \ldots, \tilde{v}^n \ominus_H \tilde{u}^n)$.

فرض کنید η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی باشد. در ادامه قصد داریم دو مفهوم از جواب‌ها را در نظر بگیریم. برای این منظور دو مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{C}^۱ = \{\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}^۱, \ldots, \tilde{u}^n) : \eta(\tilde{u}^j) \geq ۰ \quad \forall j = ۱, \ldots, n, \quad \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})\},$$

و

$$\mathcal{C}^۲ = \{\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}^۱, \ldots, \tilde{u}^n) : \tilde{u}^j \ \text{نامنفی}, \quad \forall j = ۱, \ldots, n, \quad \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})\}.$$

دو رابطه دوتایی $\preceq^۱$ و $\preceq^۲$ روی $\mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۴.۲.۲. فرض کنید $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$. می‌نویسیم $\underline{\tilde{u}} \preceq^۱ \underline{\tilde{v}}$ (یا $\underline{\tilde{u}} \preceq^۲ \underline{\tilde{v}}$) اگر فاصله هاکاهارا، $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ وجود داشته باشد و $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{C}^۱$ (یا $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{C}^۲$).

گزاره ۱۵.۲.۲. *فرض کنید $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$ و η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد.*

الف . اگر $\underline{\tilde{u}} \preceq^۱ \underline{\tilde{v}}$ در این‌صورت $\eta(\tilde{u}^j) \leq \eta(\tilde{v}^j)$ برای هر $j = ۱, \ldots, n$، و اگر $\underline{\tilde{u}} \preceq^۲ \underline{\tilde{v}}$ در این‌صورت $(\tilde{u}^j)^L_\alpha \leq (\tilde{v}^j)^L_\alpha$ و $(\tilde{u}^j)^U_\alpha \leq (\tilde{v}^j)^U_\alpha$ برای هر $j = ۱, \ldots, n$ و هر $\alpha \in [۰,۱]$.

ب . رابطه‌های دوتایی $\preceq^۱$ و $\preceq^۲$ تعریف شده روی $\mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$ در روابط ۴-۱ تعریف ۶.۷.۱ صدق می‌کنند.

برهان. الف . فرض می‌کنیم $\underline{\tilde{v}} \succeq^{1} \underline{\tilde{u}}$. پس طبق تعریف ۱۴.۲.۲، فاصله هاکاهارا $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ وجود دارد و $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{C}^{1}$. لذا طبق تعریف مخروط $\mathcal{C}^{1}$، $\eta(\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}) \geq 0$. قرار می‌دهیم $\tilde{c} = \underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ پس داریم:

$$\tilde{c} = \underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} \Rightarrow \underline{\tilde{v}} = \underline{\tilde{u}} \oplus \underline{\tilde{c}},$$

لذا چون η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است داریم:

$$\begin{aligned}
&\eta(\underline{\tilde{v}}) = \eta(\underline{\tilde{u}}) + \eta(\underline{\tilde{c}}) \\
\Rightarrow\quad &\eta(\tilde{v}^j) = \eta(\tilde{u}^j) + \eta(\tilde{c}^j) \qquad \forall j = 1, \dots, n \\
\Rightarrow\quad &\eta(\tilde{c}^j) = \eta(\tilde{v}^j) - \eta(\tilde{u}^j) \qquad \forall j = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

و چون $\eta(\tilde{c}) = \eta(\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}})$ داریم:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad &\eta(\tilde{c}^j) = \eta(\tilde{v}^j) - \eta(\tilde{u}^j) \geq 0 \qquad \forall j = 1, \dots, n \\
\Rightarrow\quad &\eta(\tilde{v}^j) - \eta(\tilde{u}^j) \geq 0 \qquad \forall j = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

و این یعنی

$$\eta(\tilde{v}^j) \geq \eta(\tilde{u}^j), \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

حال فرض می‌کنیم $\underline{\tilde{v}} \succeq^{2} \underline{\tilde{u}}$. پس طبق تعریف ۱۴.۲.۲، فاصله هاکاهارا $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ وجود دارد و $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{C}^{2}$. لذا طبق تعریف مخروط $\mathcal{C}^{2}$، $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ نامنفی است. قرار می‌دهیم $\tilde{c} = \underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ همچنین از گزاره ۵.۲.۲ داریم:

$$\tilde{c}^L_\alpha = \tilde{v}^L_\alpha - \tilde{u}^L_\alpha, \quad \tilde{c}^U_\alpha = \tilde{v}^U_\alpha - \tilde{u}^U_\alpha.$$

با توجه به تعریف ۱۲.۲.۲، $\tilde{c}$ نامنفی است اگر $\tilde{c}^L_\alpha \geq 0$ و در نتیجه $\tilde{c}^U_\alpha \geq \tilde{c}^L_\alpha \geq 0$، پس $\tilde{c}$ نامنفی است اگر برای هر $j = 1, \dots, n$ و هر $\alpha \in [0, 1]$، $(\tilde{c}^j)^L_\alpha \geq 0$ و $(\tilde{c}^j)^U_\alpha \geq 0$. پس برای هر $j = 1, \dots, n$ و هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم:

$$(\tilde{v}^j)^L_\alpha \geq (\tilde{u}^j)^L_\alpha, \quad (\tilde{v}^j)^U_\alpha \geq (\tilde{u}^j)^U_\alpha.$$

ب . خاصیت اول. با توجه به تعریف ۴.۲.۲ داریم:

$$\forall \tilde{u} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}^n(\mathbb{R}); \tilde{u} = \tilde{u} \oplus \tilde{0} \longrightarrow \tilde{0} = \tilde{u} \ominus_H \tilde{u}.$$

همچنین $\tilde{0} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}^n(\mathbb{R})$، و چون η تابع غیرفازی‌سازی خطی است پس

$$\eta(\tilde{u}) = \eta(\tilde{u}) + \eta(\tilde{0}) \longrightarrow \eta(\tilde{0}) = \eta(\tilde{u}) - \eta(\tilde{u}) = 0 \geq 0 \longrightarrow \eta(\tilde{0}) \in \mathcal{C}^{1}.$$

پس فاصله هاکاهارا $\eta(\tilde{0})$ وجود دارد و $\tilde{0} \in \mathcal{C}^{1}$ لذا $\tilde{u} \preceq^{1} \tilde{u}$.

خاصیت دوم. نشان می‌دهیم برای هر $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{k} \in \mathcal{F}^n_c(\mathbb{R})$ که $\tilde{v} \preceq^{1} \tilde{u}$ و $\tilde{k} \preceq^{1} \tilde{v}$، آنگاه $\tilde{k} \preceq^{1} \tilde{u}$.

$$\tilde{u} \preceq^{1} \tilde{v} \longrightarrow \tilde{p} = \tilde{v} \ominus_H \tilde{u} \in \mathcal{C}^{1} \longrightarrow \tilde{v} = \tilde{p} \oplus \tilde{u} \longrightarrow \eta(\tilde{v}) = \eta(\tilde{p}) + \eta(\tilde{u}), \qquad (۴.۲)$$

و

$$\tilde{v} \preceq^{1} \tilde{k} \longrightarrow \tilde{q} = \tilde{k} \ominus_H \tilde{v} \in \mathcal{C}^{1} \longrightarrow \tilde{k} = \tilde{q} \oplus \tilde{v} \longrightarrow \eta(\tilde{k}) = \eta(\tilde{q}) + \eta(\tilde{v}). \qquad (۵.۲)$$

با جمع کردن رابطه‌های (۴.۲) و (۵.۲) داریم:

$$\eta(\tilde{k}) = \eta(\tilde{p}) + \eta(\tilde{q}) + \eta(\tilde{u}) \longrightarrow \eta(\tilde{k}) = \eta(\tilde{p} \oplus \tilde{q}) + \eta(\tilde{u})$$

$$\longrightarrow \tilde{k} = (\tilde{p} \oplus \tilde{q}) + \tilde{u} \longrightarrow (\tilde{p} \oplus \tilde{q}) = \tilde{k} \ominus_H \tilde{u}.$$

یعنی فاصله هاکاهارا وجود دارد و چون

$$\eta(\tilde{p} \oplus \tilde{q}) = \eta(\tilde{p}) + \eta(\tilde{q}) \geq 0,$$

پس $\tilde{p} \oplus \tilde{q} \in \mathcal{C}^1$ یعنی $\tilde{u} \preceq^1 \tilde{k}$.

خاصیت‌های سوم و چهارم نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

$\square$

ملاحظه ۱۶.۲.۲. *اگرچه رابطه‌های دوتایی $\preceq^1$ و $\preceq^2$ در روابط ۴-۱ تعریف ۶.۷.۱ صدق می‌کنند، اما چون به‌طور کلی $\mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ یک فضای برداری حقیقی نیست، نمی‌توانیم بگوییم $\preceq^1$ و $\preceq^2$ یک رابطه جزئاً مرتب روی $\mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ است. با این حال اگر $\mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ را به‌عنوان یک مجموعه در نظر بگیریم در این‌صورت $\preceq^1$ و $\preceq^2$ رابطه‌هایی جزئاً مرتب روی $\mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ هستند. از سوی دیگر، اگر در تعریف ۶.۷.۱ به جای یک فضای برداری حقیقی V از یک مجموعه V با جمع و ضرب اسکالر تعریف شده استفاده کنیم، در این‌صورت تحت این تعریف جدید برای رابطه جزئاً مرتب، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\preceq^1$ و $\preceq^2$ رابطه‌هایی جزئاً مرتب روی $\mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ هستند.*

گاهی اوقات اگر V یک مجموعه باشد گوییم رابطه $\preceq$ یک رابطه جزئاً مرتب روی V است اگر در شرایط ۱ و ۲ در تعریف ۶.۷.۱ صدق کند. وقتی V فضای برداری نیست نیازی نداریم که شرایط ۳ و ۴ را بررسی کنیم. چون ممکن است جمع و ضرب برداری روی مجموعه تعریف نشده باشند.

گزاره ۱۷.۲.۲. *فرض کنید $\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{v}} \in \mathcal{C}^1$ در این‌صورت نتایج زیر را داریم:*

۱. $\lambda\tilde{\underline{u}} \in \mathcal{C}^1$ *برای* $\lambda > 0$.

۲. $\lambda\tilde{\underline{u}} \oplus (1-\lambda)\tilde{\underline{v}} \in \mathcal{C}^1$ *برای* $\lambda \in (0, 1)$.

برهان. طبق فرض داریم $\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{v}} \in \mathcal{C}^1$. پس با توجه به تعریف مجموعه $\mathcal{C}^1$ نتیجه می‌گیریم $\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{v}} \in \mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ یعنی $\tilde{u}^j, \tilde{v}^j \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. لذا برای هر $j = 1, \dots, n$ داریم:

$$\lambda\tilde{u}^j, \lambda\tilde{u}^j \oplus (1-\lambda)\tilde{v}^j \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}),$$

و از آن‌جا که η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است داریم:

$$\eta(\lambda\tilde{u}^j) = \lambda.\eta(\tilde{u}^j) \geq 0,$$

و برای هر $j = 1, \dots, n$،

$$\eta(\lambda\tilde{u}^j \oplus (1-\lambda)\tilde{v}^j) = \lambda.\eta(\tilde{u}^j) + (1-\lambda).\eta(\tilde{v}^j) \geq 0,$$

و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

گزاره ۱۸.۲.۲. *فرض کنید $\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{v}} \in \mathcal{C}^2$ در این‌صورت نتایج زیر را داریم:*

۱. $\lambda\underline{\tilde{u}} \in \mathcal{C}^2$ *برای* $\lambda > 0$.

۲. $\lambda\underline{\tilde{u}} \oplus (1-\lambda)\underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^2$ *برای* $\lambda \in (0,1)$.

برهان. طبق فرض داریم $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^2$. پس با توجه به تعریف مجموعه $\mathcal{C}^2$ نتیجه می‌گیریم $\tilde{u}^j, \tilde{v}^j$ نامنفی و $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$. یعنی برای هر $j = 1, \ldots, n$ بردارهای $\tilde{u}^j, \tilde{v}^j$ نامنفی و $\tilde{u}^j, \tilde{v}^j \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. از آن‌جا که $\lambda, (1-\lambda) > 0$، پس برای هر $j = 1, \ldots, n$، $\lambda\tilde{u}^j, \lambda\tilde{u}^j \oplus (1-\lambda)\tilde{v}^j \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ است و نامنفی‌اند پس $\lambda\underline{\tilde{u}} \oplus (1-\lambda)\underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^2$. □

ملاحظه ۱۹.۲.۲. *گزاره ۱۷.۲.۲ و ۱۸.۲.۲ نشان می‌دهند $\mathcal{C}^1$ و $\mathcal{C}^2$ به یک مفهوم ساختار مخروط محدب دارند، اما چون $\mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ یک فضای برداری نیست نمی‌توانیم بگوییم $\mathcal{C}^1$ و $\mathcal{C}^2$ مخروط‌های محدب هستند. البته اگر در تعریف مخروط محدب از یک مجموعه به جای فضای برداری حقیقی استفاده کنیم، می‌توانیم بگوییم $\mathcal{C}^1$ و $\mathcal{C}^2$ مخروط‌های محدب در $\mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ هستند.*

فرض می‌کنیم $\mathcal{N}$ یک فضای نرم‌دار باشد. فضای حاصل‌ضربی $\mathcal{N}^n = \mathcal{N} \times \cdots \times \mathcal{N}$ (nبار) را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم $\mathcal{N}^n$ یک فضای نرم‌دار با نرم داده شده

$$\|\underline{s}\| = \max\{\|s^1\|, \ldots, \|s^n\|\},$$

است که در آن $\underline{s} = (s^1, \ldots, s^n) \in \mathcal{N}^n$. کافی است نشان دهیم $\mathcal{N}^n$ با نرم تعریف شده در خاصیت‌های تعریف ۲.۷.۱ صدق می‌کند. فرض می‌کنیم $\|s^j\| = \max\{\|s^1\|, \ldots, \|s^n\|\}$.

خاصیت اول. چون $s^j \in \mathcal{N}$ و $\mathcal{N}$ فضای نرم‌دار است داریم $0 \leq \|s^j\| \leq \infty$ و در نتیجه $0 \leq \|\underline{s}\| \leq \infty$.

خاصیت دوم.

$$\|\underline{s}\| = 0 \iff \max\{\|s^1\|, \ldots, \|s^n\|\} = 0 \iff$$

$$\|s^j\| = 0 \ \forall j = 1, \ldots, n \iff s^j = 0 \ \forall j = 1, \ldots, n \iff \underline{s} = 0.$$

خاصیت سوم. برای هر $\alpha \in F$ داریم:

$$\begin{aligned}\|\alpha\underline{s}\| &= \max\{\|\alpha s^1\|, \ldots, \|\alpha s^n\|\}\\ &= \|\alpha s^j\| = |\alpha|\|s^j\| = |\alpha|\|\underline{s}\|.\end{aligned}$$

خاصیت چهارم. برای هر $\underline{s}, \underline{u} \in \mathcal{N}^n$،

$$\begin{aligned}\|\underline{s} + \underline{u}\| &= \max\{\|s^1 + u^1\|, \ldots, \|s^n + u^n\|\}\\ &= \|s^j + u^j\| \leq \|s^j\| + \|u^j\| = \|\underline{s}\| + \|\underline{u}\|.\end{aligned}$$

فرض کنید π تابع جانشینی داده شده در رابطه (۲.۲) باشد. برای هر $\underline{\tilde{u}} \in \mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$ تابع

$$\sqcap : \mathcal{F}_c^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{N}^n,$$

را به‌صورت

$$\sqcap(\underline{\tilde{u}}) = (\pi(\tilde{u}^1), \ldots, \pi(\tilde{u}^n)), \qquad (۶.۲)$$

تعریف می‌کنیم.

گزاره ۲۰.۲.۲. *مجموعه‌های* $\sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ *و* $\sqcap(\mathcal{C}^{۲})$ *مخروط‌هایی محدب در* $\mathcal{N}^n$ *هستند.*

برهان. فرض کنید $\underline{s}, \underline{t} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})$. در این‌صورت $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^{۱}$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $j = ۱, \ldots, n$، $\pi(\tilde{u}^j) = s^j$ و $\pi(\tilde{v}^j) = t^j$ است. از طرفی داریم:

$$\lambda s^j + (۱-\lambda)t^j = \lambda.\pi(\tilde{u}^j) + (۱-\lambda).\pi(\tilde{v}^j) = \pi(\lambda\tilde{u}^j \oplus (۱-\lambda)\tilde{v}^j).$$

از گزاره ۱۷.۲.۲ می‌بینیم $\lambda\underline{\tilde{u}} \oplus (۱-\lambda)\underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^{۲}$ پس $\lambda\underline{s} + (۱-\lambda)\underline{t} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})$. این نشان می‌دهد $\sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ یک زیر مجموعه محدب از $\mathcal{N}^n$ است. از طرف دیگر برای هر $\lambda > ۰$، $\lambda\underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})$. بنابراین $\sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ یک مخروط محدب در $\mathcal{N}^n$ است. به‌طور مشابه از گزاره ۱۸.۲.۲ می‌بینیم $\sqcap(\mathcal{C}^{۲})$ یک مخروط محدب در $\mathcal{N}^n$ است. □

از گزاره ۲۰.۲.۲ و قضیه ۱۱.۲.۲ می‌توانیم دو رابطه جزئاً مرتب $\leq^{۱}$ و $\leq^{۲}$ روی $\mathcal{N}^n$ از $\sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ و $\sqcap(\mathcal{C}^{۲})$ نتیجه بگیریم. اکنون نشان می‌دهیم خاصیت مرتب بودن تحت تابع $\sqcap$ حفظ می‌شود.

گزاره ۲۱.۲.۲. *(حفظ ترتیب) فرض کنید* $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{F}_c^n(\mathbb{R})$. *در این‌صورت* $\underline{\tilde{u}} \preceq^{۱} \underline{\tilde{v}}$ *اگر و تنها اگر* $\sqcap(\underline{\tilde{u}}) \leq^{۱} \sqcap(\underline{\tilde{v}})$، *و* $\underline{\tilde{u}} \preceq^{۲} \underline{\tilde{v}}$ *اگر و تنها اگر* $\sqcap(\underline{\tilde{u}}) \leq^{۲} \sqcap(\underline{\tilde{v}})$.

برهان. فرض می‌کنیم $\underline{\tilde{u}} \preceq^{۱} \underline{\tilde{v}}$. بنا به تعریف ۱۴.۲.۲ فاصله هاکاهارا $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}$ وجود دارد و $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{C}^{۱}$. لذا با استفاده از گزاره ۶.۲.۲ می‌بینیم $\pi(\tilde{v}^j) - \pi(\tilde{u}^j) = \pi(\tilde{v}^j \ominus_H \tilde{u}^j)$ برای هر $j = ۱, \ldots, n$ که این یعنی $\sqcap(\underline{\tilde{v}}) - \sqcap(\underline{\tilde{u}}) = \sqcap(\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}) \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ پس $\sqcap(\underline{\tilde{u}}) \leq^{۱} \sqcap(\underline{\tilde{v}})$.

برعکس، فرض می‌کنیم $\sqcap(\underline{\tilde{u}}) \leq^{۱} \sqcap(\underline{\tilde{v}})$ یعنی $\sqcap(\underline{\tilde{v}}) - \sqcap(\underline{\tilde{u}}) = \sqcap(\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}}) \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})$. پس وجود دارد $\underline{\tilde{\omega}} = \underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} \in \mathcal{C}^{۱}$ به‌طوری‌که $\sqcap(\underline{\tilde{v}}) - \sqcap(\underline{\tilde{u}}) = \sqcap(\underline{\tilde{\omega}})$. پس $\sqcap(\underline{\tilde{v}}) = \sqcap(\underline{\tilde{u}}) + \sqcap(\underline{\tilde{\omega}})$. لذا با توجه به تعریف تابع $\sqcap$ در رابطه (۶.۲)، برای هر $j = ۱, \ldots, n$، $\pi(\tilde{v}^j) = \pi(\tilde{u}^j) + \pi(\tilde{\omega}^j) = \pi(\tilde{u}^j \oplus \tilde{\omega}^j)$.
از آن‌جا که $\pi : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{N}$ یکریخت است، پس یک به یک و پوشاست لذا داریم $\tilde{v}^j = \tilde{u}^j \oplus \tilde{\omega}^j$.
این نشان می‌دهد $\tilde{\omega}^j = \tilde{v}^j \ominus_H \tilde{u}^j$ برای هر $j = ۱, \ldots, n$ موجود است، یعنی $\underline{\tilde{v}} \ominus_H \underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{\omega}} \in \mathcal{C}^{۱}$، و این یعنی $\underline{\tilde{u}} \preceq^{۱} \underline{\tilde{v}}$. به‌طور مشابه برای $\preceq^{۲}$ نیز می‌توانیم ثابت کنیم و این اثبات را کامل می‌کند. □

به‌منظور تعبیر مفهوم ترتیب برای توابع فازی مقدار در محدودیت‌ها، دو مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{C}_\pi^{۱} = \{\tilde{a} : \eta(\tilde{a}) \geq ۰,\ \tilde{a} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})\},$$

و

$$\mathcal{C}_\pi^{۲} = \{\tilde{a} : \tilde{a}\ \text{نامنفی},\ \tilde{a} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})\}.$$

ملاحظه ۲۲.۲.۲. *فرض کنید* $\underline{s} \in \mathcal{N}^n$. *می‌بینیم* $\underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ *اگر و تنها اگر* $s^j \in \pi(\mathcal{C}_\pi^{۱})$، *برای هر* $j = ۱, \ldots, n$، *و* $\underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۲})$ *اگر و تنها اگر* $s^j \in \pi(\mathcal{C}_\pi^{۲})$، *برای هر* $j = ۱, \ldots, n$.

با استفاده از استدلالی مشابه با گزاره ۲۰.۲.۲، نشان می‌دهیم $\pi(\mathcal{C}_\pi^{۱})$ و $\pi(\mathcal{C}_\pi^{۲})$ مخروط‌هایی محدب در $\mathcal{N}$ هستند که در آن π، تابع جانشینی تعریف شده در رابطه (۲.۲) است.

فرض می‌کنیم $s,t \in \pi(\mathcal{C}^{۱}_{\pi})$ پس وجود دارد $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ به‌طوری‌که $\pi(\tilde{a}) = s$ و $\pi(\tilde{b}) = t$، پس داریم:

$$\lambda s + (۱-\lambda)t = \lambda.\pi(\tilde{a}) + (۱-\lambda)\pi(\tilde{b}) = \pi(\lambda\tilde{a} \oplus (۱-\lambda)\tilde{b}),$$

و چون $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ و $\mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ محدب است پس $\lambda\tilde{a} \oplus (۱-\lambda)\tilde{b} \in \mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ لذا $\lambda s + (۱-\lambda)t \in \pi(\mathcal{C}^{۱}_{\pi})$ یعنی $\pi(\mathcal{C}^{۱}_{\pi})$ محدب است.

بنابراین چون $\pi(\mathcal{C}^{۱}_{\pi})$ و $\pi(\mathcal{C}^{۲}_{\pi})$ مخروط‌هایی محدب هستند می‌توانیم روابط $\leq^{۱}_{\pi}$ و $\leq^{۲}_{\pi}$ را در $\mathcal{N}$ به‌ترتیب روی $\pi(\mathcal{C}^{۱}_{\pi})$ و $\pi(\mathcal{C}^{۲}_{\pi})$ تعریف کنیم به‌طوری‌که جزئاً مرتب باشند. هم‌چنین برای هر $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ می‌توانیم تعریف کنیم $\tilde{b} \preceq^{۱}_{\pi} \tilde{a}$ (یا $\tilde{b} \preceq^{۲}_{\pi} \tilde{a}$) اگر فاصله هاکاهارا، $\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ وجود داشته باشد و $\tilde{b} \ominus_H \tilde{a} \in \mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ (یا $\tilde{b} \ominus_H \tilde{a} \in \mathcal{C}^{۲}_{\pi}$).

هم‌چنین خاصیت مرتب بودن تحت تابع π حفظ می‌شود.

گزاره ۲۳.۲.۲. *(حفظ ترتیب) فرض کنید* $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. *در این‌صورت* $\tilde{b} \preceq^{۱}_{\pi} \tilde{a}$ *اگر و تنها اگر* $\pi(\tilde{b}) \leq^{۱}_{\pi} \pi(\tilde{a})$، *و* $\tilde{b} \preceq^{۲}_{\pi} \tilde{a}$ *اگر و تنها اگر* $\pi(\tilde{b}) \leq^{۲}_{\pi} \pi(\tilde{a})$.

برهان. فرض می‌کنیم $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ طبق گزاره ۶.۲.۲ اگر فاصله هاکاهارا $\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}$ وجود داشته باشد و متعلق به $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد آن‌گاه

$$\pi(\tilde{b} \ominus_H \tilde{a}) = \pi(\tilde{b}) - \pi(\tilde{a}) \in \pi(\mathcal{C}^{۱}_{\pi}),$$

و این یعنی $\pi(\tilde{b}) \leq^{۱}_{\pi} \pi(\tilde{a})$.

برعکس. فرض می‌کنیم $\pi(\tilde{b}) \leq^{۱}_{\pi} \pi(\tilde{a})$. یعنی $\pi(\tilde{b}) - \pi(\tilde{a}) \in \pi(\mathcal{C}^{۱}_{\pi})$ در این‌صورت وجود دارد $\tilde{c} \in \mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ به‌طوری‌که $\pi(\tilde{b}) - \pi(\tilde{a}) = \pi(\tilde{c})$ و این یعنی $\pi(\tilde{b}) = \pi(\tilde{a}) + \pi(\tilde{c}) = \pi(\tilde{a} \oplus \tilde{b})$ و چون $\pi : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{N}$ یکریخت است، پس یک به یک و پوشاست لذا داریم $\tilde{b} = \tilde{a} \oplus \tilde{c}$. یعنی $\tilde{c}$ وجود دارد و $\tilde{b} \ominus_H \tilde{a} = \tilde{c} \in \mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ یعنی $\tilde{b} \preceq^{۱}_{\pi} \tilde{a}$. □

نکته: توجه کنید که اگر تابع جانشینی π در رابطه (۲.۲) و مجموعه‌های $\mathcal{C}^{۱}_{\pi}$ و $\mathcal{C}^{۲}_{\pi}$ روی $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ و مجموعه‌های $\mathcal{C}^{۱}$ و $\mathcal{C}^{۲}$ روی $\mathcal{F}^n(\mathbb{R})$ تعریف شده باشند آن‌گاه تعاریف و قضایایی که تاکنون بیان شده‌اند برای هر $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ و هر $\underline{\tilde{u}},\underline{\tilde{v}} \in \mathcal{F}^n(\mathbb{R})$ نیز برقرار می‌باشند.

۳.۲ مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه فازی

فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد. تابع $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار کانونی تعریف شده روی X نامیده می‌شود. حال دو مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} min & (\tilde{f}_۱(x),\ldots,\tilde{f}_n(x)) & \\ s.t. & \tilde{g}_i \preceq^{۱}_{\pi} \tilde{۰} \qquad i = ۱,۲,\ldots,m & (I) \\ & x \in X, & \end{array}$$

و

$$\begin{aligned} min \quad & (\tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_n(x)) \\ s.t. \quad & \tilde{g}_i \preceq^2_\pi \tilde{0} \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (II) \\ & x \in X, \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{f}_j$ و $\tilde{g}_i$ توابع استاندارد فازی مقدار، تعریف شده روی X برای هر $j = 1, \ldots, n$ و هر $i = 1, \ldots, m$ هستند. هر مسأله باتوجه به راه حل مربوط به آن حل خواهد شد. رابطه‌های جزئاً مرتب $\preceq^1$ و $\preceq^2$ در تعریف ۱۴.۲.۲ برای به‌دست آوردن مقادیر توابع چندهدفه فازی $(\tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_n(x))$ به‌ترتیب در مسائل فازی (I) و (II) مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فرض کنید $\underline{\tilde{f}}(x) = (\tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_n(x))$. در این‌صورت داریم:

$$(\sqcap o \underline{\tilde{f}}(x)) = \sqcap(\underline{\tilde{f}}(x)) = (\pi(\tilde{f}_1(x)), \ldots, \pi(\tilde{f}_n(x))) = ((\pi o \tilde{f}_1)(x), \ldots, (\pi o \tilde{f}_n)(x))$$

با استفاده از تابع جانشینی π برای مسائل فازی (I) و (II) و با استفاده از گزاره‌های ۲۱.۲.۲ و ۲۳.۲.۲، دو مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه (III) و (IV) مربوط به آن دو را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} min \quad & (\sqcap o \underline{\tilde{f}}(x)) = ((\pi o \tilde{f}_1)(x), \ldots, (\pi o \tilde{f}_n)(x)) \\ s.t. \quad & (\pi o \tilde{g}_i)(x) \leq^1_\pi \pi(\tilde{0}) \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (III) \\ & x \in X, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} min \quad & (\sqcap o \underline{\tilde{f}}(x)) = ((\pi o \tilde{f}_1)(x), \ldots, (\pi o \tilde{f}_n)(x)) \\ s.t. \quad & (\pi o \tilde{g}_i)(x) \leq^2_\pi \pi(\tilde{0}) \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (IV) \\ & x \in X, \end{aligned}$$

که در آن $\pi(\tilde{0}) = [[\tilde{0}, \tilde{0}]]$ عنصر صفر در فضای نرم‌دار $\mathcal{N}$ می‌باشد. از آن‌جا که برای هر $x \in X$ $(\sqcap o \underline{\tilde{f}}(x)) \in \mathcal{N}^n$، رابطه‌های جزئاً مرتب $\preceq^1$ و $\preceq^2$ که به‌ترتیب از مخروط‌های محدب $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ و $\sqcap(\mathcal{C}^2)$ ناشی شده‌اند، برای به‌دست آوردن مقادیر توابع چندهدفه در مسائل (III) و (IV) مورد استفاده قرار می‌گیرند.

یک مخروط محدب $\mathcal{C}_V$ با رابطه جزئاً مرتب شرح داده شده در فضای برداری حقیقی V نیز یک مخروط مرتب نامیده می‌شود. فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیر مجموعه از V با رابطه جزئاً مرتب $\leq$ باشد.

اگر رابطه جزئاً مرتب $\leq$ را در مخروط ترتیبی $\mathcal{C}_V$ در نظر بگیریم، با مراجعه به [۲۰] تعاریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۳.۲. نقطه $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر مینیمال[11] از $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in \mathcal{S}$، که $x \leq x^*$ باشد آن‌گاه $x^* \leq x$ باشد. به‌طور معادل هر عنصر $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر $(\{x^*\} + (-\mathcal{C}_V)) \cap \mathcal{S} \subseteq \{x^*\} + \mathcal{C}_V$.

[11] Minimal

تعریف ۲.۳.۲. نقطه $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر ماکزیمال[۱۲] از $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in \mathcal{S}$، که $x^* \leq x$ باشد آن‌گاه $x \leq x^*$ باشد. به‌طور معادل هر عنصر $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر ماکزیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر $(\{x^*\} + \mathcal{C}_V) \cap \mathcal{S} \subseteq \{x^*\} + (-\mathcal{C}_V)$.

تعریف ۳.۳.۲. نقطه $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر مینیمال قوی از $\mathcal{S}$ است، اگر برای هر $x \in \mathcal{S}$، $x^* \leq x$ باشد. به‌طور معادل هر عنصر $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر مینیمال قوی از مجموعه $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر $\mathcal{S} \subseteq \{x^*\} + \mathcal{C}_V$.

تعریف ۴.۳.۲. نقطه x^* یک عنصر ماکزیمال قوی از $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in \mathcal{S}$، $x \leq x^*$ باشد. به‌طور معادل عنصر $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر ماکزیمال قوی از مجموعه $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر $\mathcal{S} \subseteq \{x^*\} + (-\mathcal{C}_V)$.

فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیر مجموعه ناتهی از فضای برداری حقیقی V باشد. مجموعه

$$int(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{S} : \forall y \in V \quad \exists \zeta > 0 \ s.t \ \ x + \lambda y \in \mathcal{S} \quad \forall \lambda \in [0, \zeta]\},$$

مجموعه درونی $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳.۲. نقطه $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر مینیمال ضعیف از مجموعه $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر $int(\mathcal{C}_V) \neq \varnothing$ و وجود نداشته باشد هیچ $x \in \mathcal{S}$ به‌طوری‌که $x^* - x \in int(\mathcal{C}_V)$ یا به‌طور معادل $(\{x^*\} + (-int(\mathcal{C}_V))) \cap \mathcal{S} = \varnothing$.

تعریف ۶.۳.۲. نقطه $x^* \in \mathcal{S}$ یک عنصر ماکزیمال ضعیف از مجموعه $\mathcal{S}$ نامیده می‌شود، اگر $int(\mathcal{C}_V) \neq \varnothing$ و وجود نداشته باشد هیچ $x \in \mathcal{S}$ به‌طوری‌که $x - x^* \in int(\mathcal{C}_V)$ یا به‌طور معادل $(\{x^*\} + (int(\mathcal{C}_V))) \cap \mathcal{S} = \varnothing$.

لم ۷.۳.۲. *فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرمجموعه ناتهی از یک فضای خطی جزئاً‌مرتب X با مخروط ترتیبی $\mathcal{C}$ باشد که $\mathcal{C} \neq X$ و $int(\mathcal{C}) \neq \varnothing$. در این‌صورت هر عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ یک عنصر مینیمال ضعیف از مجموعه $\mathcal{S}$ است.*

برهان. فرض می‌کنیم $\mathcal{C} \neq X$ در نتیجه $(-int(\mathcal{C})) \cap \mathcal{C} = \varnothing$. بنابراین برای هر عنصر مینیمال دلخواه $\bar{x}$ از $\mathcal{S}$ داریم:

$$\begin{aligned} \varnothing &= (\{\bar{x}\} - int(\mathcal{C})) \cap (\{\bar{x}\} + \mathcal{C}) \\ &= (\{\bar{x}\} - int(\mathcal{C})) \cap (\{\bar{x}\} - \mathcal{C}) \cap \mathcal{S} \\ &= (\{\bar{x}\} - int(\mathcal{C})) \cap \mathcal{S}, \end{aligned}$$

(توجه کنید که چون $\bar{x}$ عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ است پس $(\{\bar{x}\} - \mathcal{C}) \cap \mathcal{S} \subset \{\bar{x}\} + \mathcal{C}$) یعنی $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال ضعیف از مجموعه $\mathcal{S}$ است. $\square$

---
[۱۲] Maximal

لم ۸.۳.۲. *فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی جزئاًمرتب X با مخروط ترتیبی $\mathcal{C}$ باشد. در این‌صورت هر عنصر مینیمال قوی از مجموعه $\mathcal{S}$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ است.*

برهان. فرض می‌کنیم $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال قوی از مجموعه $\mathcal{S}$ باشد طبق تعریف مینیمال قوی داریم:

$$\begin{aligned}\{\bar{x}\} &= (\{\bar{x}\} - \mathcal{C}) \cap (\{\bar{x}\} + \mathcal{C}) \\ &= (\{\bar{x}\} - \mathcal{C}) \cap \mathcal{S},\end{aligned}$$

(توجه داشته باشید که چون $\bar{x}$ عنصر مینیمال قوی از مجموعه $\mathcal{S}$ است پس $\mathcal{S} \subset \{\bar{x}\} + \mathcal{C}$) یعنی $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ است. $\square$

لم ۹.۳.۲. *([۲۰]) فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرمجموعه از فضای خطی جزئاً مرتب X با مخروط ترتیبی $\mathcal{C}_X$ و X' مجموعه همه نگاشت‌های خطی از X به $\mathbb{R}$ باشد. هر تابع خطی $L \in \mathcal{C}_{X'}$ به‌طور یکنواخت روی $\mathcal{S}$ صعودی است. علاوه‌بر این هر تابع خطی $L \in \mathcal{C}^{\circ}_{X'}$ قویا یکنوای صعودی روی $\mathcal{S}$ است. اگر $int(\mathcal{C}_X) \neq \varnothing$ در این‌صورت هر تابع خطی $L \in \mathcal{C}_{X'} - \{0_{X'}\}$ به‌طور اکید یکنوای صعودی روی $\mathcal{S}$ است.*

لم ۱۰.۳.۲. *فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرمجموعه ناتهی از یک فضای جزئاً مرتب با مخروط ترتیبی $\mathcal{C}$ باشد. به‌علاوه فرض کنید $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ یک تابع داده شده باشد و فرض کنید هر عنصر $\bar{x} \in \mathcal{S}$ دارای ویژگی*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{S}, \tag{۷.۲}$$

باشد.

الف . اگر تابع f روی $\mathcal{S}$ به‌طور یکنوا صعودی باشد و اگر $\bar{x}$ داده شده با رابطه (۷.۲) منحصر بفرد باشد در این‌صورت $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ است.

ب . اگر تابع f روی $\mathcal{S}$ قویا یکنوای صعودی باشد، در این‌صورت $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ است.

برهان. برای اثبات هر دو بخش فرض می‌کنیم $\bar{x}$ عنصر مینیمال مجموعه $\mathcal{S}$ نباشد، در این‌صورت وجود دارد عنصر $x \in (\{\bar{x}\} - \mathcal{C}) \cap \mathcal{S}$ و $x \neq \bar{x}$. چون بنا به فرض $\bar{x}$ عنصر مینیمال نیست پس وجود دارد $x \in \mathcal{S}$ به‌طوری‌که $x \leq \bar{x}$ و چون تابع f روی $\mathcal{S}$ صعودی است پس $f(x) \leq f(\bar{x})$ در قسمت الف با منحصر بفرد بودن $\bar{x}$ تناقض دارد و در قسمت ب به‌دست می‌آوریم $f(x) < f(\bar{x})$ که با مینیمال بودن f در $\bar{x}$ تناقض دارد. $\square$

قضیه ۱۱.۳.۲. *فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی جزئاً مرتب X با مخروط ترتیبی نوک‌تیز $\mathcal{C}_X$ باشد.*

الف . اگر تابع خطی $L \in \mathcal{C}_{X'}$ و عنصر $\bar{x} \in \mathcal{S}$ با ویژگی

$$L(\bar{x}) < L(x) \qquad \forall x \in \mathcal{S} - \{\bar{x}\},$$

باشد در این‌صورت $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ است.

ب . *اگر تابع خطی $L \in \mathcal{C}^{\circ}_{X'}$ و عنصر $\bar{x} \in \mathcal{S}$ با ویژگی*

$$L(\bar{x}) \leq L(x) \qquad \forall x \in \mathcal{S} - \{\bar{x}\},$$

باشد در این‌صورت $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}$ است.

برهان. طبق لم ۹.۳.۲ تابع $L \in \mathcal{C}_{X'}$ یکنوای صعودی است پس این قضیه همه شرایط لم ۱۰.۳.۲ را داراست لذا طبق این لم $\bar{x}$ عنصر مینیمال مجموعه $\mathcal{S}$ است. □

قضیه ۱۲.۳.۲. *فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی جزئاً مرتب X با مخروط ترتیبی $\mathcal{C}_X$ باشدکه درون جبری آن ناتهی است. اگر برای یک $\bar{x} \in \mathcal{S}$ تابع خطی $L \in \mathcal{C}_{X'} - \{0_{X'}\}$ با ویژگی*

$$L(\bar{x}) \leq L(x) \qquad \forall x \in \mathcal{S},$$

باشد، در این‌صورت $\bar{x}$ یک عنصر مینیمال ضعیف از مجموعه $\mathcal{S}$ است.

برهان. به برهان خلف فرض می‌کنیم $\bar{x}$ عنصر مینیمال ضعیف برای $\mathcal{S}$ نباشد پس

$$\exists x \in \mathcal{S} \;\; s.t \; x < \bar{x},$$

از طرفی طبق لم ۹.۳.۲ تابع L اکیدا یکنوای صعودی روی $\mathcal{S}$ است یعنی

$$L(x) < L(\bar{x}),$$

که با فرض در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

تعریف ۱۳.۳.۲. فرض کنید η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ باشد. گوییم η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی کانونی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ است اگر، $\tilde{a} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ و $\eta(\tilde{a}) = 0$ ایجاب کند که $\tilde{a} = \tilde{0}$.

گزاره ۱۴.۳.۲. *فرض کنید $\sqcap$ تابع تعریف شده با رابطه (۶.۲) باشد.*

الف . *اگر η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی‌کانونی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد، در این‌صورت مجموعه $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ یک مخروط محدب نوک‌تیز در $\mathcal{N}^n$ است.*

ب . *مجموعه $\sqcap(\mathcal{C}^2)$ یک مخروط محدب نوک‌تیز در $\mathcal{N}^n$ است.*

برهان. از گزاره ۲۰.۲.۲، کافی است نشان دهیم:

$$\sqcap(\mathcal{C}^1) \cap (- \sqcap (\mathcal{C}^1)) = (\pi(\tilde{0}), \dots, \pi(\tilde{0})) = \sqcap(\mathcal{C}^2) \cap (- \sqcap (\mathcal{C}^2)),$$

که در آن $(\pi(\tilde{0}), \dots, \pi(\tilde{0}))$ عنصر صفر فضای نرم‌دار $\mathcal{N}^n$ است.

الف . فرض کنید $\underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^1) \cap (- \sqcap (\mathcal{C}^1))$. در این‌صورت $-\underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^1)$. بنابراین وجود دارد $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^1$ به‌طوری‌که $\sqcap(\underline{\tilde{u}}) = \underline{s}$ و $\sqcap(\underline{\tilde{v}}) = -\underline{s}$، یعنی برای هر $j = 1, \dots, n$، $\pi(\tilde{u}^j) = s^j$ و $\pi(\tilde{v}^j) = -s^j$. با اضافه کردن آن‌ها با هم داریم:

$$\pi(\tilde{u}^j \oplus \tilde{v}^j) = \pi(\tilde{u}^j) + \pi(\tilde{v}^j) = \pi(\tilde{0}),$$

(توجه کنید $\pi(\tilde{\circ})$ عنصر صفر فضای نرم‌دار $\mathcal{N}$ است). از آن‌جا که π یک‌به‌یک است، می‌بینیم $\tilde{u}^j \oplus \tilde{v}^j = \tilde{\circ}$. سپس $\circ = \eta(\tilde{\circ}) = \eta(\tilde{u}^j \oplus \tilde{v}^j) = \eta(\tilde{u}^j) + \eta(\tilde{v}^j)$.

از آن‌جا که $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^1$، پس $\eta(\tilde{u}^j) \geq \circ$ و $\eta(\tilde{v}^j) \geq \circ$ است. بنابراین به‌دست می‌آوریم $\eta(\tilde{u}^j) = \circ = \eta(\tilde{v}^j)$ و چون η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی کانونی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ است، پس برای هر $j = 1, \ldots, n$، داریم $\tilde{u}^j = \tilde{\circ} = \tilde{v}^j$. لذا نتیجه می‌گیریم $\underline{s} = (\pi(\tilde{\circ}), \ldots, \pi(\tilde{\circ}))$.

ب . برای حالت $\sqcap(\mathcal{C}^2)$، مشابه قسمت قبل برای هر $j = 1, \ldots, n$ به‌دست می‌آوریم $\tilde{u}^j \oplus \tilde{v}^j = \tilde{\circ}$.
با استفاده از گزاره ۵.۲.۲ داریم:

$$\circ = (\tilde{u}^j)^L_\alpha + (\tilde{v}^j)^L_\alpha = (\tilde{u}^j)^U_\alpha + (\tilde{v}^j)^U_\alpha,$$

و چون $\underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{v}} \in \mathcal{C}^2$، با توجه به ملاحظه ۱۳.۲.۲ داریم:

$$(\tilde{u}^j)^L_\alpha \geq \circ,\ (\tilde{v}^j)^L_\alpha \geq \circ,\ (\tilde{u}^j)^U_\alpha) \geq \circ,\ (\tilde{v}^j)^U_\alpha \geq \circ,$$

بنابراین برای هر $\alpha \in [\circ, 1]$ و هر $j = 1, \ldots, n$ به‌دست می‌آوریم

$$\circ = (\tilde{u}^j)^L_\alpha = (\tilde{v}^j)^L_\alpha = (\tilde{u}^j)^U_\alpha = (\tilde{v}^j)^U_\alpha,$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

□

فرض کنید $\sqcap$ تابع داده شده در رابطه (۶.۲) باشد. در ادامه نشان می‌دهیم

$$int(\sqcap(\mathcal{C}^1)) \neq \varnothing, \quad int(\sqcap(\mathcal{C}^2)) \neq \varnothing.$$

لم ۱۵.۳.۲. *[۳۶] فرض کنید $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ و $\tilde{c}, \tilde{d} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشند. در این‌صورت یک $\zeta > \circ$ و یک تابع فازی مقدار استاندارد $\tilde{b} : [\circ, \zeta] \longrightarrow \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ تعریف شده روی $[\circ, \zeta]$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\lambda \in [\circ, \zeta]$ داریم $\tilde{a} \oplus \lambda\tilde{c} = \tilde{b}(\lambda) \oplus \lambda\tilde{d}$.*

لم ۱۶.۳.۲. *فرض کنید π تابع جانشینی داده شده در رابطه (۲.۲) و η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد. اگر $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ با $\eta(\tilde{a}) > \circ$ باشد، در این‌صورت برای هر $s \in \mathcal{N}$، وجود دارد $\zeta > \circ$ به‌طوری‌که برای هر $\lambda \in [\circ, \zeta]$، $\pi(\tilde{a}) + \lambda s \in \pi(\mathcal{C}^1_\pi)$.*

برهان. طبق فرض $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ و $\eta(\tilde{a}) > \circ$ بنابراین $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$.
همچنین $\pi : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{N}$ پس $\pi(\tilde{a}) \in \mathcal{C}^1_\pi$. فرض می‌کنیم $\tilde{s} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. بنا به لم ۱۵.۳.۲، $\zeta > \circ$ و تابع $\pi : [\circ, \zeta] \longrightarrow N$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\lambda \in [\circ, \zeta]$، $\tilde{a} \oplus \lambda\tilde{s} = \pi(\tilde{a}) + \lambda\pi(\tilde{s})$. از طرفی چون $\tilde{a}, \tilde{s} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ پس $\tilde{a} \oplus \lambda\tilde{s} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}$. همچنین

$$\eta(\tilde{a} \oplus \lambda\tilde{s}) = \eta(\tilde{a}) + \lambda\eta(\tilde{s}) > \circ.$$

بنابراین $\pi(\tilde{a}) + \lambda s \in \pi(\mathcal{C}^1_\pi)$. □

لم ۱۷.۳.۲. *فرض کنید π تابع جانشینی داده شده در رابطه (۲.۲) باشد. اگر $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ و $\tilde{a}$ مثبت باشد، در این‌صورت برای هر $s \in \mathcal{N}$ وجود دارد $\zeta > \circ$ به‌طوری‌که برای هر $\lambda \in [\circ, \zeta]$ داریم $\pi(\tilde{a}) + \lambda s \in \pi(\mathcal{C}^2_\pi)$.*

برهان. مشابه لم ۱۶.۳.۲ ثابت می‌شود. □

برای اثبات ناتهی بودن $int(\sqcap(\mathcal{C}^1))$ و $int(\sqcap(\mathcal{C}^2))$ فرض می‌کنیم اعداد فازی مثلثی باشند و گزاره‌های زیر را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱۸.۳.۲. *فرض کنید $\sqcap$ تابع داده شده در رابطه (۶.۲) باشد. اگر η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد به‌طوری‌که برای یک $\tilde{u} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ داشته باشیم، $\eta(\tilde{u}) > 0$، در این‌صورت $int(\sqcap(\mathcal{C}^1)) \neq \varnothing$.*

برهان. فرض کنید $\tilde{u}^j \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$ با $\eta(\tilde{u}^j) > 0$ باشد، که برای هر $j = 1, \dots, n$، $\tilde{u}^j$ لزوما متمایز نیستند، با این فرض می‌توانیم برای هر $j = 1, \dots, n$، $\tilde{u}^j = \tilde{u}$ در نظر بگیریم. فرض کنید $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{N}^n$. طبق لم ۱۶.۳.۲، یک $\zeta^j > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\lambda \in [0, \zeta^j]$، $\pi(u^j) + \lambda s^j \in \pi(\mathcal{C}_\pi^1)$. تعریف می‌کنیم $\zeta = \min\{\zeta^1, \dots, \zeta^n\}$. پس برای هر $j = 1, \dots, n$ و هر $\lambda \in [0, \zeta]$ داریم:

$$\pi(u^j) + \lambda s^j \in \pi(\mathcal{C}_\pi^1),$$

از طرفی طبق ملاحظه ۲۲.۲.۲، برای هر $\lambda \in [0, \zeta]$ داریم:

$$\sqcap(\underline{\tilde{u}}) + \lambda \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^1),$$

یعنی $\sqcap(\underline{\tilde{u}}) \in int(\sqcap(\mathcal{C}^1))$، که در آن $\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

گزاره ۱۹.۳.۲. *فرض کنید $\sqcap$ تابع داده شده در رابطه (۶.۲) باشد. در این‌صورت $int(\sqcap(\mathcal{C}^2)) \neq \varnothing$.*

برهان. باید از لم ۱۷.۳.۲ و استدلال‌هایی مشابه اثبات گزاره ۱۸.۳.۲ استفاده کنیم. از آن‌جا که هر عدد فازی مثلثی، یک عدد فازی استاندارد است، برای اثبات کافی است فرض کنیم اعداد ما اعداد فازی مثلثی هستند. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم اعداد فازی مثلثی $\tilde{u}^j = (u^{jL}, u^j, u^{jU})$، مثبت باشند یعنی برای هر $j = 1, \dots, n$، $u^{jL} > 0$. فرض می‌کنیم $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{N}^n$. $\tilde{u}$ در شرایط لم ۱۷.۳.۲ صدق می‌کند پس طبق این لم برای هر $s \in \mathcal{N}$ وجود دارد $\zeta > 0$ به‌طوری‌که برای هر $\lambda \in [0, \zeta]$ داریم:

$$\pi(\tilde{u}) + \lambda s \in \pi(\mathcal{C}_\pi^2),$$

از طرفی طبق ملاحظه ۲۲.۲.۲، برای هر $\lambda \in [0, \zeta]$ داریم:

$$\sqcap(\underline{\tilde{u}}) + \lambda \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^2) \Rightarrow \sqcap(\underline{\tilde{u}}) \in int(\sqcap(\mathcal{C}^2)),$$

یعنی $int(\sqcap(\mathcal{C}^2)) \neq \varnothing$. □

حال فرض می‌کنیم:

$$X^1 = \{x \in X : (\pi o \tilde{g}_i)(x) \leq_\pi^1 \pi(\tilde{0}), i = 1, \dots, m\}, \quad (۸.۲)$$

$$\mathcal{S}^1 = \{(\sqcap o \underline{\tilde{f}})(x) : x \in X^1\}, \quad (۹.۲)$$

و

$$X^2 = \{x \in X : (\pi o \tilde{g}_i)(x) \leq_\pi^2 \pi(\tilde{0}), i = 1, \dots, m\}, \quad (۱۰.۲)$$

$$\mathcal{S}^2 = \{(\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x) : x \in X^2\}. \qquad (۱۱.۲)$$

گزاره ۲۳.۲.۲ نشان می‌دهد مسائل (I) و (III) مجموعه شدنی مشابهی دارند. به‌طور مشابه، مسائل (II) و (IV) مجموعه شدنی مشابهی دارند. از آن‌جا که π یک‌به‌یک است تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۳.۲. مخروط محدب $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ را در نظر بگیرید.

۱ . گوییم x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه کامل برای مسأله (I) است اگر، $(\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)$ یک عنصر مینیمال قوی از مجموعه $\mathcal{S}^1$ تعریف شده در (۹.۲) تحت مخروط محدب $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ باشد.

۲ . گوییم x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو برای مسأله (I) است اگر، $(\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)$ یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}^1$ تحت مخروط محدب $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ باشد.

۳ . گوییم x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو ضعیف برای مسأله (I) است اگر، $(\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)$ یک عنصر مینیمال ضعیف از مجموعه $\mathcal{S}^1$ تحت مخروط محدب $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ باشد.

هم‌چنین با در نظر گرفتن مجموعه $\mathcal{S}^2$ تعریف شده در (۱۱.۲) و مخروط محدب $\sqcap(\mathcal{C}^2)$ می‌توانیم جواب‌هایی مشابه برای مسأله (II) ارائه دهیم.
فرض کنید X_1^{Co}، X_1^{P}، X_1^{WP}، به‌ترتیب نشان دهنده جواب‌های $\mathcal{C}^1$-بهینه کامل، جواب‌های $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو و جواب‌های $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو ضعیف برای مسأله (I) باشند. به‌طور مشابه می‌توانیم مجموعه‌های X_2^{Co}، X_2^{P}، X_2^{WP} را بر پایه‌ی مخروط محدب $\sqcap(\mathcal{C}^2)$ و مسأله (II) تعریف کنیم. سپس نتایج جالب زیر را داریم.

گزاره ۲۱.۳.۲. *فرض کنید مسائل (I) و (II) شدنی باشند.*

الف . اگر η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد به طوری‌که برای یک $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$، $\eta(\tilde{a}) > 0$ باشد در این‌صورت داریم $X_1^{Co} \subseteq X_1^{P} \subseteq X_1^{WP}$.

ب . هم‌چنین داریم $X_2^{Co} \subseteq X_2^{P} \subseteq X_2^{WP}$.

برهان. الف . چون مسأله (I) شدنی است، مجموعه $\mathcal{S}^1$ تعریف شده در رابطه (۹.۲) ناتهی است. از لم ۸.۳.۲، هر عنصر مینیمال قوی از $\mathcal{S}^1$ یک عنصر مینیمال از $\mathcal{S}^1$ است. بنابراین $X_1^{Co} \subseteq X_1^{P}$. از طرفی با توجه به لم ۷.۳.۲، اگر $\sqcap(\mathcal{C}^1) \neq \mathcal{N}$ و $int(\sqcap(\mathcal{C}^1)) \neq \varnothing$، آن‌گاه هر عنصر مینیمال $\mathcal{S}^1$ یک عنصر مینیمال ضعیف از $\mathcal{S}^1$ است یعنی $X_1^{P} \subseteq X_1^{WP}$. طبق فرض η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ است به‌طوری‌که برای یک $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$، $\eta(\tilde{a}) > 0$ است پس با توجه به گزاره ۱۸.۳.۲ نتیجه می‌گیریم $int(\sqcap(\mathcal{C}^1)) \neq \varnothing$ و واضح است که $\sqcap(\mathcal{C}^1) \neq \mathcal{N}$، لذا حکم نتیجه می‌شود.

ب . چون مسأله (II) شدنی است، مجموعه $\mathcal{S}^2$ در رابطه (۱۱.۲) ناتهی است. از لم ۸.۳.۲، هر عنصر مینیمال قوی از $\mathcal{S}^2$ یک عنصر مینیمال از $\mathcal{S}^2$ است. بنابراین $X_2^{Co} \subseteq X_2^{P}$. از طرفی

باتوجه به لم ۷.۳.۲، اگر $\sqcap(\mathcal{C}^{۲}) \neq \mathcal{N}$ و $int(\sqcap(\mathcal{C}^{۲})) \neq \varnothing$، آن‌گاه هر عنصر مینیمال $\mathcal{S}^{۲}$ یک عنصر مینیمال ضعیف از $\mathcal{S}^{۲}$ است. طبق فرض و باتوجه به گزاره ۱۹.۳.۲ نتیجه می‌گیریم $int(\sqcap(\mathcal{C}^{۲})) \neq \varnothing$ و واضح است که $\sqcap(\mathcal{C}^{۲}) \neq \mathcal{N}$، لذا حکم نتیجه می‌شود.

□

۴.۲ اسکالرسازی

مجموعه همه توابع خطی از $\mathcal{N}^n$ به $\mathbb{R}$ را با $(\mathcal{N}^n)'$ نشان می‌دهیم. سپس مجموعه

$$\mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'} = \{\phi \in (\mathcal{N}^n)' : \phi(\underline{s}) \geq ۰ \quad \forall \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})\},$$

یک مخروط محدب است و مخروط دوگان برای $\sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ نامیده می‌شود. مجموعه تعریف شده با

$$(\mathcal{C}^{۱})^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'} = \{\phi \in (\mathcal{N}^n)' : \phi(\underline{s}) > ۰ \quad \forall \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱}) \setminus \{\sqcap(\tilde{۰}, \dots, \tilde{۰})\}\},$$

یک شبه-درون[۱۳] مخروط دوگان برای $\sqcap(\mathcal{C}^{۱})$ نامیده می‌شود، که در آن $\sqcap(\tilde{۰}, \dots, \tilde{۰})$ عنصر صفر فضای نرم‌دار $\mathcal{N}^n$ است.

نشان می‌دهیم $\mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'}$ مخروط محدب است. ابتدا ثابت می‌کنیم مخروط است. یعنی نشان می‌دهیم

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'},\ \forall \lambda \geq ۰ \Rightarrow \lambda\phi \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'},$$

فرض می‌کنیم $\phi \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'}$ و $\lambda \geq ۰$، داریم:

$$\phi \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'} \Rightarrow \forall \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱}),\ \phi(\underline{s}) \geq ۰,\ \lambda \geq ۰ \Rightarrow \lambda\phi(\underline{u}) \geq ۰,$$

هم‌چنین چون λ یک اسکالر است پس با ضرب آن در $\phi(\underline{s})$ خطی بودن تابع ϕ حفظ می‌شود یعنی $\lambda\phi(\underline{s}) \in (\mathcal{N}^n)'$ و برای هر $\underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱})$، $\lambda\phi(\underline{s}) \geq ۰$ پس $\lambda\phi(\underline{s}) \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'}$.

برای اثبات محدب بودن فرض می‌کنیم $\phi_۱, \phi_۲ \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'}$ و $\lambda \in [۰, ۱]$. پس داریم:

$$\phi_۱(\underline{s}) \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'} \Rightarrow \phi_۱(\underline{s}) \geq ۰,\ \phi \in (\mathcal{N}^n)',\ \ \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱}),$$

و

$$\phi_۲(\underline{s}) \in \mathcal{C}^{۱}_{(\mathcal{N}^n)'} \Rightarrow \phi_۲(\underline{s}) \geq ۰,\ \phi \in (\mathcal{N}^n)',\ \ \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^{۱}).$$

از آن‌جاکه $\lambda \in [۰, ۱]$ پس $\lambda, (۱ - \lambda) \geq ۰$. کافی است طرفین نامساوی اول را در λ و طرفین نامساوی دوم را در $(۱ - \lambda)$ ضرب کرده و با هم جمع کنیم داریم:

$$\lambda\phi_۱(\underline{s}) + (۱ - \lambda)\phi_۲(\underline{s}) \geq ۰, \tag{۱۲.۲}$$

هم‌چنین چون λ و $(۱ - \lambda)$ اسکالر هستند و $\phi_۱$ و $\phi_۲$ خطی‌اند پس $\lambda\phi_۱$ و $(۱ - \lambda)\phi_۲$ و در نتیجه $\lambda\phi_۱ + (۱ - \lambda)\phi_۲$ نیز خطی‌اند یعنی

$$\lambda\phi_۱(\underline{s}) + (۱ - \lambda)\phi_۲(\underline{s}) \in (\mathcal{N}^n)', \tag{۱۳.۲}$$

[۱۳] Quasi-interior

پس از رابطه (۱۲.۲) و (۱۳.۲) داریم:

$$\lambda\phi_1(\underline{s}) + (1-\lambda)\phi_2(\underline{s}) \in \mathcal{C}^1_{(\mathcal{N}^n)'},$$

یعنی $\mathcal{C}^1_{(\mathcal{N}^n)'}$ مخروط محدب است.

به‌طور مشابه، داریم:

$$\mathcal{C}^2_{(\mathcal{N}^n)'} = \{\phi \in (\mathcal{N}^n)' : \phi(\underline{s}) \geq 0 \quad \forall \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^2)\},$$

و

$$(\mathcal{C}^2)^\circ_{(\mathcal{N}^n)'} = \{\phi \in (\mathcal{N}^n)' : \phi(\underline{s}) > 0 \quad \forall \underline{s} \in \sqcap(\mathcal{C}^2) \setminus \{\sqcap(\tilde{0}, \ldots, \tilde{0})\}\}.$$

سپس نتایج جالب زیر را داریم.

قضیه ۱.۴.۲. *فرض کنید مسائل (III) و (IV) شدنی باشند.*

الف . فرض کنید η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد به‌طوری‌که برای یک $\tilde{a} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{R})$، $\eta(\tilde{a}) > 0$. اگر تابعی خطی مانند $\phi \in \mathcal{C}^1_{(\mathcal{N}^n)'} \setminus \{0_{(\mathcal{N}^n)'}\}$، که در آن $0_{(\mathcal{N}^n)'}$ عنصر صفر از $(\mathcal{N}^n)'$ است، و یک عنصر $x^* \in X^1$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)) \leq \phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x)) \quad \forall x \in X^1,$$

در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو ضعیف است.

ب . اگر یک تابع خطی مانند $\phi \in \mathcal{C}^2_{(\mathcal{N}^n)'} \setminus \{0_{(\mathcal{N}^n)'}\}$ و یک عنصر $x^* \in X^1$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)) \leq \phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x)) \quad \forall x \in X^2,$$

در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^2$-بهینه پارتو ضعیف است.

برهان. الف . با توجه به گزاره ۱۸.۳.۲ می‌بینیم $int(\sqcap(\mathcal{C}^1)) \neq \varnothing$ پس طبق قضیه ۱۲.۳.۲، y^* یک عنصر مینیمال ضعیف برای $\mathcal{S}^1$ است. لذا از تعریف ۲۰.۳.۲، x^* عنصر $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو ضعیف برای مسأله (III) است.

ب . اثبات مشابه قسمت الف می‌باشد.

□

قضیه ۲.۴.۲. *فرض کنید مسأله (III) شدنی و η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی کانونی روی $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ باشد.*

الف . اگر تابعی (تابعک) خطی مانند $\phi \in \mathcal{C}^1_{(\mathcal{N}^n)'}$ و یک عنصر $x^* \in X^1$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)) < \phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x)) \quad \forall x \in X^1 \setminus \{x^*\},$$

در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو است.

ب . *اگر تابعی (تابعک) خطی مانند $\phi \in (\mathcal{C}^1)^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$ و یک عنصر $x^* \in X^1$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که*

$$\phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)) \leq \phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x)) \quad \forall x \in X^1,$$

در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو است.

برهان. الف . با توجه به گزاره ۱۴.۳.۲، $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ یک مخروط نوک‌تیز است. هم‌چنین با توجه به لم ۹.۳.۲، هر تابع $\phi \in (\mathcal{C}^1)_{(\mathcal{N}^n)'}$ به‌طور یکنواخت روی $\mathcal{S}$ صعودی است لذا بنا به قضیه ۱۱.۳.۲ اگر تابع خطی $\phi \in (\mathcal{C}^1)_{(\mathcal{N}^n)'}$ وجود داشته باشد که برای هر $y \in \mathcal{S}^1 - \{y^*\}$، $\phi(y^*) < \phi(y)$، y^* عنصر مینیمال مجموعه $\mathcal{S}$ است. پس بنا به تعریف ۲۰.۳.۲، x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو برای مسأله (III) است.

ب . اثبات مشابه قسمت قبل می‌باشد.

□

قضیه ۳.۴.۲. *فرض کنید مسأله (IV) شدنی باشد.*

الف . *اگر تابعی (تابعک) خطی مانند $\phi \in \mathcal{C}^2_{(\mathcal{N}^n)'}$ و یک عنصر $x^* \in X^2$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که*

$$\phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)) < \phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x)), \quad \forall x \in X^2 \setminus \{x^*\},$$

در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^2$-بهینه پارتو است.

ب . *اگر تابعی (تابعک) خطی مانند $\phi \in (\mathcal{C}^2)^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$ و یک عنصر $x^* \in X^2$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که*

$$\phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x^*)) \leq \phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x)) \quad \forall x \in X^2,$$

در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^2$-بهینه پارتو است.

برهان. الف . با توجه به گزاره ۱۴.۳.۲، $\sqcap(\mathcal{C}^2)$ یک مخروط نوک‌تیز است. هم‌چنین با توجه به لم ۹.۳.۲، هر تابع $\phi \in (\mathcal{C}^2)_{(\mathcal{N}^n)'}$ به‌طور یکنواخت روی $\mathcal{S}$ صعودی است لذا بنا به قضیه ۱۱.۳.۲ اگر تابع خطی $\phi \in (\mathcal{C}^1)_{(\mathcal{N}^n)'}$ وجود داشته باشد که برای هر $y \in \mathcal{S}^2 - \{y^*\}$، $\phi(y^*) < \phi(y)$ ، y^* عنصر مینیمال مجموعه $\mathcal{S}$ است. پس با استدلالی مشابه با تعریف ۲۰.۳.۲، x^* یک جواب $\mathcal{C}^2$-بهینه پارتو برای مسأله (IV) است.

ب . اثبات مشابه قسمت قبل می‌باشد.

□

ملاحظه ۴.۴.۲. *قضیه‌های ۲.۴.۲ و ۳.۴.۲ حتی وقتی توابع هدف $\tilde{f}_j$، $j = 1, \ldots, n$، و توابع محدودیت $\tilde{g}_i$، $i = 1, \ldots, m$، را مقادیری روی $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ به‌جای $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ درنظر بگیریم درست هستند، زیرا به ناتهی بودن $int(\sqcap(\mathcal{C}^1))$ و $int(\sqcap(\mathcal{C}^2))$ در این دو قضیه نیازی نداریم.*

۵.۲ مسائل کاربردی

به منظور تفسیر محدودیت‌های مسأله (II)، رابطه مرتب $\pi(\tilde{a}) \leq^{۲}_{\pi} \pi(\tilde{\circ})$ را در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که $\pi(\tilde{\circ})$ عنصر صفر فضای نرم‌دار $(\mathcal{N}, \|.\|)$ است، با استفاده از تعریف داریم:

$$-\pi(\tilde{a}) = \pi(\tilde{\circ}) - \pi(\tilde{a}) \in \pi(\mathcal{C}^{۲}_{\pi}).$$

اگرچه در حالت کلی $-\pi(\tilde{a}) \neq \pi((-۱)\tilde{a})$ اما می‌بینیم برای بعضی $\tilde{b}$ نامنفی در $\mathcal{C}^{۲}_{\pi}$، $-\pi(\tilde{a}) = \pi(\tilde{b})$. با اضافه کردن $\pi(\tilde{a})$ به طرفین مساوی داریم:

$$\pi(\tilde{\circ}) = \pi(\tilde{a}) + \pi(\tilde{b}) = \pi(\tilde{a} \oplus \tilde{b}),$$

و چون π یک‌به‌یک است به‌دست می‌آوریم $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = \tilde{\circ}$. پس نتیجه می‌گیریم برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$، $\tilde{a}^{U}_{\alpha} = -(\tilde{b}^{U}_{\alpha}) \leq \circ$ و $\tilde{a}^{L}_{\alpha} = -(\tilde{b}^{L}_{\alpha}) \leq \circ$. بنابراین مجموعه شدنی $X^{۲}$ از مسأله (II) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$X^{۲} = \{x \in X : (\tilde{g}_i(x))^{L}_{\alpha} \leq \circ,\ (\tilde{g}_i(x))^{U}_{\alpha} \leq \circ,\ \ \forall \alpha \in [\circ, ۱],\ i = ۱, \ldots, m\}. \quad (۱۴.۲)$$

به‌طور مشابه برای مسأله (I)، به‌دست می‌آوریم $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = \tilde{\circ}$، که در آن $\tilde{b} \in \mathcal{C}^{۱}_{\pi}$، پس $\eta(\tilde{b}) \geq \circ$، یعنی

$$\eta(\tilde{a}) + \eta(\tilde{b}) = \eta(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) = \eta(\tilde{\circ}) = \circ.$$

بنابراین داریم $\eta(\tilde{a}) \leq \circ$. این نشان می‌دهد مجموعه $X^{۱}$ از مسأله (I) در رابطه (۹.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$X^{۱} = \{x \in X : \eta(\tilde{g}_i(x)) \leq \circ,\ i = ۱, \ldots, m\}, \qquad (۱۵.۲)$$

به منظور به‌کار گرفتن قضایای قبلی، تابع خطی $\phi : \mathcal{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi([[\tilde{a}_۱, \tilde{b}_۱]], \ldots, [[\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]]) = \sum_{i=۱}^{n} \eta(\tilde{a}_i) - \sum_{i=۱}^{n} \eta(\tilde{b}_i),$$

که در آن η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است. نشان می‌دهیم این تابع خوشتعریف است. برای این منظور فرض می‌کنیم برای هر $i = ۱, \ldots, n$، $(\tilde{c}_i, \tilde{d}_i) \in [[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]]$. بنا به تعریف داریم:

$$[[\tilde{c}_i, \tilde{d}_i]] = [[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]],$$

و

$$\tilde{a}_i \oplus \tilde{d}_i = \tilde{b}_i \oplus \tilde{c}_i.$$

چون η یک تابع خطی است پس از رابطه (۳.۲) برای هر $i = ۱, \ldots, m$ داریم:

$$\eta(\tilde{a}_i \oplus \tilde{d}_i) = \eta(\tilde{b}_i \oplus \tilde{c}_i) \Rightarrow \eta(\tilde{a}_i) + \eta(\tilde{d}_i) = \eta(\tilde{b}_i) + \eta(\tilde{c}_i).$$

این نشان می‌دهد برای هر $i = ۱, \ldots, m$،

$$\eta(\tilde{a}_i) - \eta(\tilde{b}_i) = \eta(\tilde{c}_i) - \eta(\tilde{d}_i).$$

هم‌چنین می‌بینیم:

$$\begin{aligned}\phi([[\tilde{a}_۱, \tilde{b}_۱]], \ldots, [[\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]]) &= \phi([[\tilde{c}_۱, \tilde{d}_۱]], \ldots, [[\tilde{c}_n, \tilde{d}_n]]) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \eta(\tilde{a}_i) - \sum_{i=۱}^{n} \eta(\tilde{b}_i) = \sum_{i=۱}^{n} \eta(\tilde{c}_i) - \sum_{i=۱}^{n} \eta(\tilde{d}_i),\end{aligned}$$

یعنی ϕ خوشتعریف است. هم‌چنین ϕ یک تابع خطی است.
برای اثبات خطی بودن ϕ باید نشان دهیم

$$\phi\big(([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]])+([[\tilde{c}_1,\tilde{d}_1]],\ldots,[[\tilde{c}_n,\tilde{d}_n]])\big)=$$
$$\phi\big([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]]\big)+\phi\big([[\tilde{c}_1,\tilde{d}_1]],\ldots,[[\tilde{c}_n,\tilde{d}_n]]\big),$$

و برای هر λ،

$$\phi\big(\lambda([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]])\big)=\lambda\phi\big([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]]\big).$$

با استفاده از رابطه (۱.۲) و تعریف تابع ϕ و خطی بودن تابع η در رابطه (۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
&\phi\big(([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]])+([[\tilde{c}_1,\tilde{d}_1]],\ldots,[[\tilde{c}_n,\tilde{d}_n]])\big)\\
&=\phi\big([[\tilde{a}_1\oplus\tilde{c}_1,\tilde{b}_1\oplus\tilde{d}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n\oplus\tilde{c}_n,\tilde{b}_n\oplus\tilde{d}_n]]\big)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{a}_i\oplus\tilde{c}_i)-\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{b}_i\oplus\tilde{d}_i)\\
&=\sum_{i=1}^{n}(\eta(\tilde{a}_i)+\eta(\tilde{c}_i))-\sum_{i=1}^{n}(\eta(\tilde{b}_i)+\eta(\tilde{d}_i))\\
&=\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{a}_i)-\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{b}_i)+\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{c}_i)-\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{d}_i)\\
&=\phi\big([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]]\big)+\phi\big([[\tilde{c}_1,\tilde{d}_1]],\ldots,[[\tilde{c}_n,\tilde{d}_n]]\big).
\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $\lambda\geq 0$ (برای $\lambda<0$ نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود) داریم:

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]])) &= \phi([[\lambda\tilde{a}_1,\lambda\tilde{b}_1]],\ldots,[[\lambda\tilde{a}_n,\lambda\tilde{b}_n]])\\
=\sum_{i=1}^{n}\eta(\lambda\tilde{a}_i)-\sum_{i=1}^{n}\eta(\lambda\tilde{b}_i) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda\eta(\tilde{a}_i)-\sum_{i=1}^{n}\lambda\eta(\tilde{b}_i)\\
=\lambda(\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{a}_i)-\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{b}_i)) &= \lambda\phi([[\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]],\ldots,[[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]]),
\end{aligned}$$

یعنی تابع ϕ خطی است. از آن‌جا که $\pi(\tilde{a})=[[\tilde{a},\tilde{0}]]$ می‌بینیم:

$$\begin{aligned}
&\sqcap o\underline{\tilde{f}}(x)=(\pi(\tilde{f}_1(x)),\ldots,\pi(\tilde{f}_n(x)))=([[\tilde{f}_1(x),\tilde{0}]],\ldots,[[\tilde{f}_n(x),\tilde{0}]])\\
&\Longrightarrow \phi(\sqcap o\underline{\tilde{f}}(x))=\phi([[\tilde{f}_1(x),\tilde{0}]],\ldots,[[\tilde{f}_n(x),\tilde{0}]])\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{f}_i(x))-\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{0})=\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{f}_i(x)),
\end{aligned}$$

لذا

$$f(x)\equiv\phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x))=\sum_{i=1}^{n}\eta(\tilde{f}_i(x)). \qquad (۱۶.۲)$$

بنابراین با توجه به قضیه‌های بیان شده، برای حل مسأله (II)، کافی است تابع هدف داده شده در رابطه (۱۶.۲) را با مجموعه شدنی X^2 داده شده در رابطه (۱۴.۲) کمینه کنیم، که یک مسأله برنامه‌ریزی

نیمه نامتناهی[۱۴] است، چون $X^۲$ مجموعه‌ای از محدودیت‌های نامتناهی است. برای حل این مسائل الگوریتم‌های برنامه‌ریزی نیمه نامتناهی بسیاری وجود دارد که در [۱۷] به آن‌ها اشاره شده است.

حال مسأله (I) را با یک مثال عددی حل می‌کنیم.

برای این منظور فرض می‌کنیم $\tilde{a} = (a-h, a, a+h)$ یک عدد فازی مثلثی باشد که در آن $h \in \mathbb{R}^+$، و $a \in \mathbb{R}$ مقدار اصلی $\tilde{a}$ می‌باشد. اگر η را تابع غیرفازی‌سازی خطی

$$\eta(\tilde{a}) = ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{a}_\alpha^L + \tilde{a}_\alpha^U)\mathrm{d}\alpha,$$

در نظر بگیریم، با توجه به رابطه (۵.۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\tilde{a}_\alpha^L = (۱-\alpha)a^L + \alpha a = (۱-\alpha)(a-h) + \alpha a = a - (۱-\alpha)h,$$
$$\tilde{a}_\alpha^U = (۱-\alpha)a^U + \alpha a = (۱-\alpha)(a+h) + \alpha a = a + (۱-\alpha)h,$$
$$\Rightarrow \eta(\tilde{a}) = ۱/۲ \int_{۰}^{۱} (\tilde{a}_\alpha^L + \tilde{a}_\alpha^U)\mathrm{d}\alpha = a.$$

مسأله دوهدفه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} min \quad & (\tilde{f}_۱(x_۱,\dots,x_۵), \tilde{f}_۲(x_۱,\dots,x_۵)) \\ s.t. \quad & \tilde{۲}x_۱ \oplus \tilde{۳}x_۲ \oplus \tilde{۳}x_۳ \oplus \tilde{۲}x_۴ \oplus \tilde{۲}x_۵ \oplus (-\tilde{۲۰}) \preceq_\pi^۱ \tilde{۰} \\ & \tilde{۳}x_۱ \oplus \tilde{۵}x_۲ \oplus \tilde{۴}x_۳ \oplus \tilde{۲}x_۴ \oplus \tilde{۴}x_۵ \oplus (-\tilde{۳۰}) \preceq_\pi^۱ \tilde{۰} \\ & x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \geq ۰, \end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

که در آن

$$\tilde{f}_۱(x_۱,\dots,x_۵) = \tilde{۲}x_۱ \oplus \tilde{۱}x_۲ \oplus -\tilde{۲}x_۳ \oplus \tilde{۲}x_۴ \oplus -\tilde{۹}x_۵,$$
$$\tilde{f}_۲(x_۱,\dots,x_۵) = -\tilde{۷}x_۱ \oplus -\tilde{۹}x_۲ \oplus \tilde{۹}x_۳ \oplus -\tilde{۶}x_۴ \oplus \tilde{۳}x_۵.$$

باتوجه به رابطه‌های (۱۵.۲) و (۱۶.۲)، متناظر با آن مسأله اسکالرسازی زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x_۱,\dots,x_۵) \equiv \phi((\sqcap o\underline{\tilde{f}})(x_۱,\dots,x_۵)) = \sum_{i=۱}^{۲} \eta(\tilde{f}_i(x_۱,\dots,x_۵))$$
$$\Rightarrow f(x_۱,\dots,x_۵) \equiv \eta(\tilde{f}_۱(x_۱,\dots,x_۵)) + \eta(\tilde{f}_۲(x_۱,\dots,x_۵)) =$$
$$\eta(\tilde{۲}x_۱ \oplus \tilde{۱}x_۲ \oplus -\tilde{۲}x_۳ \oplus \tilde{۲}x_۴ \oplus -\tilde{۹}x_۵) + \eta(-\tilde{۷}x_۱ \oplus -\tilde{۹}x_۲ \oplus \tilde{۹}x_۳ \oplus -\tilde{۶}x_۴ \oplus \tilde{۳}x_۵),$$

و چون η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است داریم:

$$\begin{aligned} f(x_۱,\dots,x_۵) &\equiv ۲x_۱ + ۱x_۲ - ۲x_۳ + ۲x_۴ - ۹x_۵ - ۷x_۱ - ۹x_۲ + ۹x_۳ - ۶x_۴ + ۳x_۵ \\ &= -۵x_۱ - ۸x_۲ - ۷x_۳ - ۴x_۴ - ۶x_۵. \end{aligned}$$

هم‌چنین داریم:

$$\tilde{g}_۱(x_۱,\dots,x_۵) = \tilde{۲}x_۱ \oplus \tilde{۳}x_۲ \oplus \tilde{۳}x_۳ \oplus \tilde{۲}x_۴ \oplus \tilde{۲}x_۵ \oplus (-\tilde{۲۰}) \preceq_\pi^۱ \tilde{۰},$$

[۱۴] Semi-infinite

و

$$\tilde{g}_2(x_1,\ldots,x_5) = \tilde{3}x_1 \oplus \tilde{5}x_2 \oplus \tilde{4}x_3 \oplus \tilde{2}x_4 \oplus \tilde{4}x_5 \oplus (-\tilde{30}) \preceq_{\pi}^{1} \tilde{0}.$$

باتوجه به رابطه (۱۵.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\eta(\tilde{g}_i(x_1,\ldots,x_5)) \leq 0 \quad \forall i = 1,2 \quad \Rightarrow$$

$$\eta(\tilde{2}x_1 \oplus \tilde{3}x_2 \oplus \tilde{3}x_3 \oplus \tilde{2}x_4 \oplus \tilde{2}x_5 \oplus (-\tilde{20})) \leq 0,$$

و

$$\eta(\tilde{3}x_1 \oplus \tilde{5}x_2 \oplus \tilde{4}x_3 \oplus \tilde{2}x_4 \oplus \tilde{4}x_5 \oplus (-\tilde{30})) \leq 0,$$

و چون η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است

$$\Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 20,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 30,$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} min \quad & -5x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 6x_5 \\ s.t. \quad & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 20 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

جواب بهینه این مسأله نقطه $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 5, 0, 2/5, 0)$ می‌باشد. بنابراین طبق قضیه ۱.۴.۲، نقطه $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 5, 0, 2/5, 0)$، یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو ضعیف برای مسأله (۱۷.۲) می‌باشد.

۶.۲ مسأله مجموع وزین

مسأله مجموع وزین را برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی در یک حالت خاص یعنی وقتی مخروط دلخواه $X = \mathbb{R}_+^n$ است بررسی می‌کنیم. مجموعه همه توابع خطی از $\mathcal{N}$ به $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{N}'$ نشان می‌دهیم و مشابه بخش ۴.۲ مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{N}'}^{1} = \{\phi_\pi \in \mathcal{N}' \ : \phi_\pi(s) \geq 0 \quad \forall s \in \pi(\mathcal{C}_\pi^1)\},$$

$$(\mathcal{C}^1)_{\mathcal{N}'}^{\circ} = \{\phi_\pi \in \mathcal{N}' \ : \phi_\pi(s) > 0 \quad \forall s \in \pi(\mathcal{C}_\pi^1) - \{\pi(\tilde{0})\}\},$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{N}'}^{2} = \{\phi_\pi \in \mathcal{N}' \ : \phi_\pi(s) \geq 0 \quad \forall s \in \pi(\mathcal{C}_\pi^2)\},$$

$$(\mathcal{C}^2)_{\mathcal{N}'}^{\circ} = \{\phi_\pi \in \mathcal{N}' \ : \phi_\pi(s) > 0 \quad \forall s \in \pi(\mathcal{C}_\pi^2) - \{\pi(\tilde{0})\}\},$$

سپس نتایج زیر را داریم.

قضیه ۱.۶.۲. *مسائل (III) و (IV) را در نظر بگیرید. اگر $\phi_\pi \in \mathcal{C}^{1}_{\mathcal{N}'}$ (یا $\phi_\pi \in \mathcal{C}^{2}_{\mathcal{N}'}$) در این‌صورت $(\pi o\tilde{g}_i)(x) \leq^{1}_{\pi} \pi(\tilde{\circ})$ (یا $(\pi o\tilde{g}_i)(x) \leq^{2}_{\pi} \pi(\tilde{\circ})$) اگر و تنها اگر $\phi_\pi((\pi o\tilde{g}_i)(x)) \leq \phi_\pi(\pi(\tilde{\circ}))$ برای $j = 1, \ldots, m$.*

برهان. می‌بینیم $\pi(\tilde{\circ}) - (\pi o\tilde{g}_i)(x) \in \pi(\mathcal{C}^{1}_{\pi})$ اگر و تنها اگر $\phi_\pi(\pi(\tilde{\circ}) - (\pi o\tilde{g}_i)(x)) \geq 0$ یعنی $\phi_\pi(\pi(\tilde{\circ})) \geq \phi_\pi((\pi o\tilde{g}_i)(x))$. برای $\leq^{2}_{\pi}$ نیز به‌طور مشابه می‌توانیم ثابت کنیم. □

فرض کنید η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی باشد. تابع $\phi : \mathcal{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi([[\tilde{u}^1, \tilde{v}^1]], \ldots, [[\tilde{u}^n, \tilde{v}^n]]) = \sum_{i=1}^{n} w^j \eta(\tilde{u}^i) - \sum_{i=1}^{n} w^j \eta(\tilde{v}^i), \qquad (18.2)$$

که در آن $W = (w^1, \ldots, w^n) \in \mathbb{R}^n$ یک بردار n-تایی با $w^j > 0$، برای $j = 1, \ldots, n$ و $\sum_{j=1}^{n} w^j = 1$ می‌باشد. ادعا می‌کنیم تابع ϕ خوشتعریف است. اگر $[[\tilde{u}^j, \tilde{v}^j]]$ برای $(\tilde{a}^j, \tilde{b}^j) \in [[\tilde{u}^j, \tilde{v}^j]]$ و $\tilde{a}^j, \tilde{b}^j \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$، $j = 1, \ldots, n$ سپس $[[\tilde{u}^j, \tilde{v}^j]] = [[\tilde{a}^j, \tilde{b}^j]]$، $j = 1, \ldots, n$ برای این منظور نشان می‌دهیم

$$\phi([[\tilde{u}^1, \tilde{v}^1]], \ldots, [[\tilde{u}^n, \tilde{v}^n]]) = \phi([[\tilde{a}^1, \tilde{b}^1]], \ldots, [[\tilde{a}^n, \tilde{b}^n]]).$$

با استفاده از تعریف داریم $(\tilde{a}^j, \tilde{b}^j) \backsim (\tilde{u}^j, \tilde{v}^j)$، یعنی $\tilde{u}^j \oplus \tilde{b}^j = \tilde{v}^j \oplus \tilde{a}^j$، که این یعنی

$$\eta(\tilde{u}^j) + \eta(\tilde{b}^j) = \eta(\tilde{v}^j) + \eta(\tilde{a}^j), \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\phi([[\tilde{u}^1, \tilde{v}^1]], \ldots, [[\tilde{u}^n, \tilde{v}^n]]) &= \sum_{i=1}^{n} w^j \left[(\eta(\tilde{u}^i) - \eta(\tilde{v}^i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} w^j \left[(\eta(\tilde{a}^i) - \eta(\tilde{b}^i)\right] = \phi([[\tilde{a}^1, \tilde{b}^1]], \ldots, [[\tilde{a}^n, \tilde{b}^n]]),\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که تابع ϕ خوشتعریف است.

قضیه ۲.۶.۲. *فرض کنید ϕ یک تابع تعریف شده در رابطه (۱۸.۲) باشد. در این‌صورت خواص زیر درست هستند:*

الف . تابع ϕ روی $\mathcal{N}^n$ خطی است و $\phi \in \mathcal{C}^{1}_{(\mathcal{N}^n)'}$.

ب . اگر η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی کانونی باشد در این‌صورت $\phi \in (\mathcal{C}^{1})^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$.

ج . اگر $\eta(\tilde{a}) \geq 0$ برای $\tilde{a}$ نامنفی، در این‌صورت $\phi \in \mathcal{C}^{2}_{(\mathcal{N}^n)'}$.

د . برای $\tilde{a}$ نامنفی، اگر $\eta(\tilde{a}) = 0$ نتیجه دهد $\tilde{a} = \tilde{\circ}$، در این‌صورت $\phi \in (\mathcal{C}^{2})^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$.

برهان. الف . برای اثبات خطی بودن ϕ باید نشان دهیم

$$\phi\big(([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]])+([[\tilde{a}^1,\tilde{b}^1]],\ldots,[[\tilde{a}^n,\tilde{b}^n]])\big)$$
$$=\phi([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]])+\phi([[\tilde{a}^1,\tilde{b}^1]],\ldots,[[\tilde{a}^n,\tilde{b}^n]]),$$

و برای هر λ،

$$\phi\big(\lambda([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]])\big)=\lambda\phi([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]]).$$

با استفاده از رابطه (۱.۲) و تعریف تابع ϕ و خطی بودن تابع η در رابطه (۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
&\phi\big(([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]])+([[\tilde{a}^1,\tilde{b}^1]],\ldots,[[\tilde{a}^n,\tilde{b}^n]])\big)\\
&= \phi\big([[\tilde{u}^1\oplus\tilde{a}^1,\tilde{v}^1\oplus\tilde{b}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n\oplus\tilde{a}^n,\tilde{v}^n\oplus\tilde{b}^n]]\big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{u}^j\oplus\tilde{a}^j)-\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{v}^j\oplus\tilde{b}^j)\\
&= \sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{u}^j)+\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{a}^i)-\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{v}^j)-\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{b}^j)\\
&= \phi([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]])+\phi([[\tilde{a}^1,\tilde{b}^1]],\ldots,[[\tilde{a}^n,\tilde{b}^n]]).
\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $\lambda \geq 0$ (برای $\lambda < 0$ نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود) داریم:

$$\phi\big(\lambda([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]])\big)=\phi\big([[\lambda\tilde{u}^1,\lambda\tilde{v}^1]],\ldots,[[\lambda\tilde{u}^n,\lambda\tilde{v}^n]]\big)=$$
$$\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\lambda\tilde{u}^j)-\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\lambda\tilde{v}^j)=\lambda\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{u}^j)-\lambda\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{v}^j)=$$
$$\lambda\phi([[\tilde{u}^1,\tilde{v}^1]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]]),$$

یعنی تابع ϕ روی $\mathcal{N}^n$ خطی است.

اگر $s\in\sqcap(\mathcal{C}^1)$ در این‌صورت $s^j=\pi(\tilde{u}^j)=[[\tilde{u}^j,\tilde{0}]]$ برای $\tilde{u}^j$ با $\eta(\tilde{u}^j)\geq 0$، برای هر $j=1,\ldots,n$. بنابراین داریم:

$$\phi([[\tilde{u}^1,\tilde{0}]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{0}]])=\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{u}^j)-\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{0})=\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{u}^j)\geq 0,$$

یعنی $\phi\in\mathcal{C}^1_{(\mathcal{N}^n)'}$.

ب . با استفاده از اثبات قسمت الف می‌بینیم $\phi(s)=\sum_{j=1}^{n} w^j\eta(\tilde{u}^j)\geq 0$. بنابراین اگر $\phi(s)=0$ در این‌صورت برای هر $j=1,\ldots,n$، $\eta(\tilde{u}^j)=0$ چون $\eta(\tilde{u}^j)\geq 0$ و $w^j>0$ برای هر $j=1,\ldots,n$. از طرفی چون بنا به فرض η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی کانونی است پس $\eta(\tilde{u}^j)=0$ نتیجه می‌دهد برای هر $j=1,\ldots,n$، $\tilde{u}^j=\tilde{0}$. این نشان می‌دهد که

$$s=([[\tilde{u}^1,\tilde{0}]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{0}]])=([[\tilde{0},\tilde{0}]],\ldots,[[\tilde{0},\tilde{0}]]),$$

عنصر صفر فضای نرم‌دار $\mathcal{N}^n$ است. به‌عبارت دیگر اگر $s\in\sqcap(\mathcal{C}^1)$ و ناصفر باشد آن‌گاه $\phi(s)>0$. این نشان می‌دهد $\phi\in(\mathcal{C}^1)^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$.

ج . با استدلالی مشابه قسمت الف برای هر $s \in \sqcap(\mathcal{C}^{۲})$ و هر $j = ۱,\ldots,n$ به‌دست می‌آوریم $\phi(s) = \sum_{j=۱}^{n} w^j \eta(\tilde{u}^j)$، که در آن $\tilde{u}^j$، $j = ۱,\ldots,n$ نامنفی هستند. با این فرض واضح است که $\phi(s) \geq ۰$ یعنی $\phi \in (\mathcal{C}^{۲})_{(\mathcal{N}^n)'}$.

د . با استدلالی مشابه قسمت ب به‌دست می‌آوریم $\eta(\tilde{u}^j) = ۰$ برای $\tilde{u}^j$، $j = ۱,\ldots,n$ نامنفی، که این نتیجه می‌دهد $\tilde{u}^j = ۰$، برای هر $j = ۱,\ldots,n$. پس اگر $s \in \sqcap(\mathcal{C}^{۲})$ و ناصفر باشد آن‌گاه $\phi(s) > ۰$. این نشان می‌دهد $\phi \in (\mathcal{C}^{۲})^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$.

□

حال تابع $\phi_\pi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$\phi_\pi([[\tilde{a},\tilde{b}]]) = \eta(\tilde{a}) - \eta(\tilde{b}), \qquad (۱۹.۲)$$

تعریف می‌کنیم. واضح است ϕ_π خطی است. هم‌چنین داریم:

$$\phi_\pi(\pi(\tilde{a})) = \phi_\pi([[\tilde{a},\tilde{۰}]]) = \eta(\tilde{a}) - \eta(\tilde{۰}) = \eta(\tilde{a}). \qquad (۲۰.۲)$$

حال تابع خطی ϕ_π را به توابع هدف مسائل (III) و (IV) اعمال می‌کنیم داریم:

$$\phi_\pi((\pi o\tilde{f}_j)(x)) = \phi_\pi(\pi(\tilde{f}_j)(x)) = \eta((\tilde{f}_j)(x)) = f_j(x) \quad \forall\, j = ۱,\ldots,n, \qquad (۲۱.۲)$$

که در آن $f_j(x)$ یک تابع حقیقی مقدار با ضرایب $\eta(\tilde{a})$ متناظر با ضرایب $\tilde{a}$ در $\tilde{f}_j$ است.
به‌طور مشابه اگر تابع خطی ϕ_π را به توابع محدودیت‌های مسائل (III) و (IV) اعمال کنیم داریم:

$$\phi_\pi((\pi o\tilde{g}_j)(x)) = \phi_\pi(\pi(\tilde{g}_j)(x)) = \eta((\tilde{g}_j)(x)) = g_j(x) \quad \forall\, j = ۱,\ldots,n. \qquad (۲۲.۲)$$

سپس نتایج زیر را داریم.

قضیه ۳.۶.۲. *اگر $\phi_\pi \in \mathcal{C}^{۱}_{\mathcal{N}'}$ (یا $\phi_\pi \in \mathcal{C}^{۲}_{\mathcal{N}'}$)، آن‌گاه $\tilde{g}_i \preceq^{۱}_{\pi} \tilde{۰}$ (یا $\tilde{g}_i \preceq^{۲}_{\pi} \tilde{۰}$) اگر و تنها اگر $g_i(x) \leq \eta(\tilde{۰})$ برای هر $j = ۱,\ldots,m$.*

برهان. با توجه به گزاره ۲۳.۲.۲ و قضیه ۱.۶.۲ داریم $\tilde{g}_i \preceq^{۱}_{\pi} \tilde{۰}$ اگر و تنها اگر $\pi(\tilde{g}_i) \leq^{۱}_{\pi} \pi(\tilde{۰})$ اگر و تنها اگر $\phi_\pi(\pi(\tilde{g}_i)) \leq \phi_\pi(\pi(\tilde{۰}))$. از رابطه‌های (۲۰.۲) و (۲۲.۲) داریم:

$$g_i(x) = \phi_\pi(\pi(\tilde{g}_j)(x)) \leq \phi_\pi(\pi(\tilde{۰})(x)) = \eta(\tilde{۰}).$$

برای $\preceq^{۲}_{\pi}$ نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود و این اثبات را کامل می‌کند. □

با استفاده از رابطه (۲۱.۲) و قضیه ۳.۶.۲، مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه متناظر با مسائل (I) یا (II) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{lll} min & (f_۱(x),\ldots,f_n(x)) & \\ s.t. & g_i(x) \leq \eta(\tilde{۰}) \qquad i = ۱,۲,\ldots,m & \qquad (V) \\ & x \in \mathbb{R}^n_+. & \end{array}$$

حال فرض کنید ϕ تابع خطی تعریف شده در رابطه (۱۸.۲) باشد. از رابطه (۱۹.۲) داریم:

$$\phi\big([[\tilde{u}^۱,\tilde{v}^۱]],\ldots,[[\tilde{u}^n,\tilde{v}^n]]\big) = \sum_{j=۱}^{n} w^j\left[\eta(\tilde{u}^j) - \eta(\tilde{v}^j)\right] = \sum_{j=۱}^{n} w^j \phi_\pi([[\tilde{u}^j,\tilde{v}^j]]), \qquad (۲۳.۲)$$

از رابطه (۲۱.۲) و (۲۳.۲) داریم:

$$\phi\big((\sqcap o\tilde{f})(x)\big) = \phi\big((\pi o\tilde{f_۱})(x), \ldots, (\pi o\tilde{f_n})(x)\big) = \sum_{j=۱}^{n} w^j f_j(x), \qquad (۲۴.۲)$$

بنابراین از قضیه ۳.۶.۲، مشاهده می‌کنیم مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین متناظر با مسائل (I) یا (II) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{j=۱}^{n} w^j f_j(x) \\ s.t. \quad & g_i(x) \leq \eta(\tilde{۰}) \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m \qquad (VI) \\ & x \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

برای اثبات قضیه بعدی به لم فارکاس نیاز داریم که ابتدا به بیان آن می‌پردازیم.

قضیه ۴.۶.۲. *([۱۵]) فرض‌کنید X یک مجموعه محدب باشد، فرض‌کنید $h_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ برای $k = ۱, ..., p$ توابعی محدب باشند در این‌صورت اگر سیستم $h_k(x) < ۰$ برای $k = ۱, ..., p$ و $x \in X$ جواب نداشته باشد آن‌گاه وجود دارد $\lambda_k \geq ۰$ با $\sum_{k=۱}^{p} \lambda_k = ۱$ به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ داریم:*

$$\sum_{k=۱}^{p} \lambda_k h_k(x) \geq ۰.$$

قضیه ۵.۶.۲. *([۲۶]) خواص زیر درست هستند:*

الف . اگر ضرایب وزنی $w^j > ۰$ برای هر $j = ۱, \ldots, n$، آن‌گاه جواب بهینه مسأله مجموع وزین (VI) یک جواب بهینه پارتو از مسأله بهینه‌سازی برداری (V) است.

ب . فرض‌کنید مسأله بهینه‌سازی برداری (V) محدب باشد. اگر x^* یک جواب بهینه پارتو برای مسأله (V) باشد، در این‌صورت یک بردار وزنی $W \in \mathbb{R}^n_+$ یعنی $w^j \geq ۰$، $j = ۱, \ldots, n$ با $\sum_{j=۱}^{n} w^j = ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که x^* یک جواب بهینه برای مسأله مجموع وزین (VI) است.

برهان. الف . فرض می‌کنیم x^* یک جواب بهینه برای مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین (VI) باشد. نشان می‌دهیم یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری است. به برهان خلف فرض می‌کنیم x^* جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری نباشد. پس

$$\exists x' \in X \;\; s.t \;\; f_j(x') \leq f_j(x^*) \quad \forall j = ۱, \ldots, n,$$

پس

$$\exists j \in \{۱, \ldots, n\} \;\; s.t \;\; f_j(x') < f_j(x^*),$$

و چون ضرایب $w^j > ۰$ پس داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} w^j f_j(x') < \sum_{j=۱}^{n} w^j f_j(x^*),$$

که با بهینه بودن x^* برای مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین (VI) تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و x^* جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری است.

ب . فرض می‌کنیم x^* یک جواب بهینه پارتو برای مساله برداری (V) باشد پس سیستم $f_k(x) < f_k(x^*)$ یا به‌طور معادل $h_k(x) = f_k(x) - f_k(x^*) < ۰$ برای $k = ۱, ..., p$ جواب ندارد لذا طبق لم فارکاس

$$\exists \lambda_k \geq ۰ \quad \sum_{k=۱}^{p} \lambda_k = ۱ \quad s.t \quad \forall x \in X \quad \sum_{k=۱}^{p} \lambda_k h_k(x) \geq ۰,$$

پس داریم:

$$\sum_{k=۱}^{p} \lambda_k f_k(x) - \sum_{k=۱}^{p} \lambda_k f_k(x^*) \geq ۰ \Rightarrow \sum_{k=۱}^{p} \lambda_k f_k(x) \geq \sum_{k=۱}^{p} \lambda_k f_k(x^*).$$

یعنی x^* جواب بهینه برای مساله مجموع وزین است.

$\square$

حال چگونگی رابطه بین مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین (VI) و مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (I) و (II) را در دو قضیه زیر بررسی می‌کنیم.

قضیه ۶.۶.۲. *(اسکالر سازی). فرض کنید مسأله (I) شدنی باشد و η یک تابع غیرفازی‌سازی کانونی باشد. در این‌صورت عبارت‌های زیر درست هستند.*

الف . اگر $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ یک جواب بهینه منحصر بفرد برای مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین (VI) باشد، در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^۱$-بهینه پارتو از مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (I)، و یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری (V) است.

ب . اگر $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ یک جواب بهینه برای مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین (VI) باشد، در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^۱$-بهینه پارتو از مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (I)، و یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری (V) است.

برهان. الف . فرض کنید X_I و X_{VI} به‌ترتیب مجموعه‌های شدنی مسائل (I) و (VI) باشند. طبق قضیه ۳.۶.۲، $X_I = X_{VI}$. از قسمت الف قضیه ۱۱.۳.۲ داریم، اگر $\sqcap(\mathcal{C}^۱)$ یک مخروط محدب نوک‌تیز باشد و اگر یک تابع خطی $\phi \in \mathcal{C}^۱_{(\mathcal{N}^n)'}$ و یک $y^* \in \mathcal{S}^۱$ با $\phi(y^*) < \phi(y)$ برای هر $y \in \mathcal{S}^۱ - \{y^*\}$ وجود داشته باشد، در این‌صورت y^* یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}^۱$ است. با استفاده از این قضیه نتیجه را اثبات می‌کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم ϕ یک تابع خطی تعریف شده در رابطه (۱۸.۲) باشد. از رابطه (۲۴.۲) داریم:

$$\phi\big((\sqcap o\tilde{f})(x^*)\big) = \sum_{j=۱}^{n} w^j f_j(x^*) < \sum_{j=۱}^{n} w^j f_j(x) = \phi\big((\sqcap o\tilde{f})(x)\big),$$

برای هر $x \in X_{VI} = X_I$ با $x \neq x^*$، از گزاره ۱۴.۳.۲ می‌بینیم $\sqcap(\mathcal{C}^۱)$ یک مخروط محدب نوک‌تیز است. همچنین با استفاده از قسمت الف قضیه ۲.۶.۲ داریم $\phi \in \mathcal{C}^۱_{(\mathcal{N}^n)'}$ و همچنین

نشان دادیم ϕ یک تابع افزایشی است لذا از قضیه ۱۱.۳.۲ و تعریف ۲۰.۳.۲ نتیجه می‌گیریم x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (I) است. در نتیجه طبق قضیه ۵.۶.۲، x^* یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری (V) است.

ب . فرض کنید X_I و X_{VI} به‌ترتیب مجموعه‌های شدنی مسائل (I) و (VI) باشند. طبق قضیه ۳.۶.۲، $X_I = X_{VI}$. از قسمت ب قضیه ۱۱.۳.۲ داریم، اگر $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ یک مخروط محدب نوک‌تیز باشد و اگر یک تابع خطی $\phi \in (\mathcal{C}^1)^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$ و یک $y^* \in \mathcal{S}^1$ با $\phi(y^*) \le \phi(y)$ برای هر $y \in \mathcal{S}^1$ وجود داشته باشد، دراین‌صورت y^* یک عنصر مینیمال از مجموعه $\mathcal{S}^1$ است. با استفاده از این قضیه نتیجه را اثبات می‌کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم ϕ یک تابع خطی تعریف شده در رابطه (۱۸.۲) باشد. از رابطه (۲۴.۲) داریم:

$$\phi\big((\sqcap o\tilde{\mathrm{f}})(x^*)\big) = \sum_{j=1}^{n} w^j f_j(x^*) \le \sum_{j=1}^{n} w^j f_j(x) = \phi\big((\sqcap o\tilde{\mathrm{f}})(x)\big),$$

برای هر $x \in X_{VI} = X_I$ با $x \neq x^*$، از گزاره ۱۴.۳.۲ می‌بینیم $\sqcap(\mathcal{C}^1)$ یک مخروط محدب نوک‌تیز است. همچنین با استفاده از قسمت ب قضیه ۲.۶.۲ داریم $\phi \in (\mathcal{C}^1)^{\circ}_{(\mathcal{N}^n)'}$ و همچنین نشان دادیم ϕ یک تابع افزایشی است لذا از قضیه ۱۱.۳.۲ و تعریف ۲۰.۳.۲ نتیجه می‌گیریم x^* یک جواب $\mathcal{C}^1$-بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (I) است. در نتیجه طبق قضیه ۵.۶.۲، x^* یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری (V) است.

□

قضیه ۷.۶.۲. *(اسکالر سازی). فرض کنید مسأله (II) شدنی باشد و η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی باشد. در این‌صورت عبارت‌های زیر درست هستند.*

الف . فرض کنید برای $\tilde{a}$ نامنفی $\eta(\tilde{a}) \ge 0$ باشد. اگر $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ یک جواب بهینه منحصر بفرد برای مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین (VI) باشد، در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^2$-بهینه پارتو از مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (II)، و یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری (V) است.

ب . فرض کنید برای $\tilde{a}$ نامنفی $\eta(\tilde{a}) = 0$ نتیجه دهد $\tilde{a} = 0$. اگر $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ یک جواب بهینه برای مسأله بهینه‌سازی مجموع وزین (VI) باشد، در این‌صورت x^* یک جواب $\mathcal{C}^2$-بهینه پارتو از مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی (II)، و یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری (V) است.

برهان. مشابه قضیه ۶.۶.۲ می‌باشد. □

مثال ۸.۶.۲. فرض کنید

$$\eta(\tilde{a}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\tilde{a}^L_\alpha + \tilde{a}^U_\alpha),$$

یک تابع غیرفازی‌سازی خطی باشد. قبلا ثابت کردیم برای هر عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = (a^L, a, a^U)$، $\eta(\tilde{a}) = a$. حال مسأله برنامه‌ریزی دوهدفه زیر با ضرایب فازی را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} min \quad & \tilde{\mathrm{f}}(x_1, x_2) = \big(\tilde{f}_1(x_1, x_2), \tilde{f}_2(x_1, x_2)\big) = \big(\tilde{1}x_1^2 \oplus \tilde{1}x_2^2 \oplus \tilde{1}, \tilde{1}x_1^2 \oplus \tilde{1}x_2^2 \oplus \tilde{2}\big) \\ s.t \quad & (-\tilde{1})x_1 \oplus (-\tilde{1})x_2 \oplus \tilde{1} \preceq_\pi^2 \tilde{0} \\ & (-\tilde{6})x_1 \oplus (-\tilde{2})x_2 \oplus \tilde{12} \preceq_\pi^2 \tilde{0} \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

(۲۵.۲)

که در آن $(0,1,2) = \tilde{1}$، $(1,2,3) = \tilde{2}$، $(5,6,7) = \tilde{6}$، $(11,12,13) = \tilde{12}$ اعداد فازی مثلثی هستند.

با استفاده از گزاره ۲۰.۲.۲ و ۲۱.۲.۲ با اعمال تابع جانشینی π مسأله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} min \quad & (\sqcap o\tilde{\mathrm{f}})(x_1, x_2) = \big((\pi o\tilde{f}_1)(x_1, x_2), (\pi o\tilde{f}_2)(x_1, x_2)\big) \\ & \qquad = \big(\pi(\tilde{1})x_1^2 + \pi(\tilde{1})x_2^2 + \pi(\tilde{1}), \pi(\tilde{1})x_1^2 + \pi(\tilde{1})x_2^2 + \pi(\tilde{2})\big) \\ s.t \quad & \pi(-\tilde{1})x_1 + \pi(-\tilde{1})x_2 + \pi(\tilde{1}) \leq_\pi^2 \pi(\tilde{0}) \\ & \pi(-\tilde{6})x_1 + \pi(-\tilde{2})x_2 + \pi(\tilde{12}) \leq_\pi^2 \pi(\tilde{0}) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

چون در حالت کلی $\pi(-\tilde{a}) \neq -\pi(\tilde{a})$ نیاز داریم تابع $\phi_\pi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ را برحسب تابع غیرفازی‌سازی خطی η به‌صورت

$$\phi_\pi([[\tilde{a}, \tilde{b}]]) = \eta(\tilde{a}) - \eta(\tilde{b}),$$

تعریف کنیم. با توجه به رابطه (۲۰.۲) داریم:

$$\phi_\pi(\pi(\tilde{a})) = \eta(\tilde{a}),$$

حال تابع ϕ_π را به توابع هدف و توابع محدودیت‌ها اعمال می‌کنیم با استفاده از قضیه ۳.۶.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \phi_\pi(\sqcap o\tilde{\mathrm{f}}) &= \big(\phi_\pi((\pi o\tilde{f}_1)(x_1, x_2)), \phi_\pi((\pi o\tilde{f}_2)(x_1, x_2))\big) \\ &= \big(\phi_\pi(\pi(\tilde{f}_1(x_1, x_2))), \phi_\pi(\pi(\tilde{f}_2(x_1, x_2)))\big) \\ &= \big(\eta(\tilde{f}_1(x_1, x_2)), \eta(\tilde{f}_2(x_1, x_2))\big) \\ &= \big(\eta(\tilde{1})x_1^2 + \eta(\tilde{1})x_2^2 + \eta(\tilde{1}), \eta(\tilde{1})x_1^2 + \eta(\tilde{1})x_2^2 + \eta(\tilde{2})\big). \end{aligned}$$

برای محدودیت‌ها نیز به‌طور مشابه به‌دست می‌آید. پس مسأله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} min \quad & \big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big) = \big(\eta(\tilde{1})x_1^2 + \eta(\tilde{1})x_2^2 + \eta(\tilde{1}), \eta(\tilde{1})x_1^2 + \eta(\tilde{1})x_2^2 + \eta(\tilde{2})\big) \\ s.t \quad & \eta(-\tilde{1})x_1 + \eta(-\tilde{1})x_2 + \eta(\tilde{1}) \leq \eta(\tilde{0}) \\ & \eta(-\tilde{6})x_1 + \eta(-\tilde{2})x_2 + \eta(\tilde{12}) \leq \eta(\tilde{0}) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(۲۶.۲)

این یک مسأله بهینه‌سازی برداری است حال با استفاده از تعریف تابع ϕ در رابطه (۱۸.۲) آن‌را به یک مسأله مجموع وزین تک‌هدفه تبدیل می‌کنیم. فرض می‌کنیم ضرایب وزنی در رابطه (۱۸.۲)، $w^{۱} = w^{۲} = \frac{۱}{۲}$ باشد پس با توجه به رابطه (۲۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\phi\big((\sqcap o\tilde{\mathrm{f}})(x)\big) &= \sum_{j=۱}^{n} w^{j} f_j(x) \\
&= \frac{۱}{۲} f_{۱}(x_{۱},x_{۲}) + \frac{۱}{۲} f_{۲}(x_{۱},x_{۲}) \\
&= \eta(\tilde{۱})x_{۱}^{۲} + \eta(\tilde{۱})x_{۲}^{۲} + \frac{۱}{۲}\big(\eta(\tilde{۱}) + \eta(\tilde{۲})\big).
\end{aligned}$$

پس مسأله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
min \quad & \frac{۱}{۲} f_{۱}(x_{۱},x_{۲}), \frac{۱}{۲} f_{۲}(x_{۱},x_{۲}) = \eta(\tilde{۱})x_{۱}^{۲} + \eta(\tilde{۱})x_{۲}^{۲} + \frac{۱}{۲}\big(\eta(\tilde{۱}) + \eta(\tilde{۲})\big) \\
s.t. \quad & \eta(-\tilde{۱})x_{۱} + \eta(-\tilde{۱})x_{۲} + \eta(\tilde{۱}) \leq \eta(\tilde{۰}) \\
& \eta(-\tilde{۶})x_{۱} + \eta(-\tilde{۲})x_{۲} + \eta(\tilde{۱۲}) \leq \eta(\tilde{۰}) \\
& x_{۱}, x_{۲} \geq ۰.
\end{aligned}$$

چون η یک تابع غیرفازی‌سازی خطی است و ثابت کردیم برای هر عدد مثلثی فازی $\tilde{a} = (a^L, a, a^U)$، $\eta(\tilde{a}) = a$ پس مسأله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
min \quad & x_{۱}^{۲} + x_{۲}^{۲} + \frac{۳}{۲} \\
s.t. \quad & -x_{۱} - x_{۲} \leq -۱ \\
& -۶x_{۱} - ۲x_{۲} \leq -۱۲ \\
& x_{۱}, x_{۲} \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۲۷.۲}$$

جواب بهین مسأله (۲۷.۲) نقطه $(x_{۱}^{*}, x_{۲}^{*}) = (۹/۵, ۳/۵)$ لذا بنا به قضیه ۷.۶.۲، نقطه $(x_{۱}^{*}, x_{۲}^{*}) = (۹/۵, ۳/۵)$ یک جواب $C^{۲}$-بهینه پارتو از مسأله بهینه‌سازی فازی (۲۵.۲) می‌باشد و با توجه به قضیه ۵.۶.۲ چون $w^{۱}, w^{۲} > ۰$ پس این نقطه یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی برداری (۲۶.۲) است.

فصل ۳

روشی جدید برای تصمیم‌گیری چندهدفه بر اساس مینیمم‌سازی فاصله فازی

۱.۳ مقدمه

در این فصل روشی را برای حل مسائل با پارامترهای فازی (که اعداد فازی می‌توانند از هر نوعی باشند)، بر اساس بهینه‌سازی فاصله متری معرفی می‌کنیم. روش‌های بررسی تصمیم‌گیری چند معیاره بر اساس توابع فاصله شامل مینیمم‌سازی فاصله از یک نقطه مطلوب[۱] (ایده‌آل[۲] یا نقطه‌ای که توسط تصمیم‌گیرنده[۳] مشخص می‌شود) است. مسائلی که در این فصل در نظر گرفته‌ایم با پارامترهای فازی هستند لذا این نقطه نیز همین‌طور است. بنابراین فرض می‌کنیم نقطه مطلوب یک بردار از اعداد فازی است که براساس یک سری اطلاعات غیر دقیق توسط تصمیم‌گیرنده مشخص شده باشد یا یک نقطه بهینه منحصر بفرد است که با توجه به بهینه کردن هر یک از توابع هدف به‌دست می‌آید.
روش پیشنهادی شامل دو مرحله است ابتدا یک مینیمم فاصله فازی را با حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به‌دست می‌آوریم. سپس نشان می‌دهیم این مینیمم فاصله فازی دارای ویژگی‌های کیفیت و خطای مناسب‌تری نسبت به مدل‌هایی است که بر اساس فاصله معمولی مطرح شده‌اند. مطالب این فصل از مرجع [۳۵] می‌باشد.

۲.۳ معرفی روش

ابتدا به معرفی برخی مفاهیم و نتایج فازی که در این فصل استفاده شده است می‌پردازیم.

---

[۱] Desired point

[۲] Ideal

[۳] Decision making

۱.۲.۳ مفاهیم اولیه

فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی مثلثی باشد آن را به سه بازه $[a_1, a_2]$، $[a_2, a_3]$ و $[a_3, a_4]$ تفکیک می‌کنیم به‌طوری‌که $\zeta_{\tilde{a}}$ روی $[a_1, a_2]$ نزولی نیست، روی $[a_2, a_3]$ برابر با یک است، روی بازه $[a_3, a_4]$ صعودی نیست و در بقیه جاها برابر با صفر است. به بازه $[a_2, a_3]$ مد[۴] $\tilde{a}$ گوییم و با علامت $Mod(\tilde{a})$ نشان می‌دهیم و به بازه $[a_1, a_4]$ پشتیبان $\tilde{a}$ گوییم و با علامت $Supp(\tilde{a})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۳. *[۲۸] عدد فازی $\tilde{a}$ را می‌توانیم به‌صورت یک خانواده رتبه کامل از مجموعه‌های معمولی از $\mathbb{R}$ نمایش دهیم. α-برش‌های آن، $\{a_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ است که $\tilde{a}$ برابر با اجتماع آن‌ها است.*

دلگادو[۵] و همکاران [۱۴، ۱۳] مفاهیم ارزش[۶]، ابهام[۷] و فازی بودن[۸] یک عدد فازی را معرفی کردند. این مفاهیم شاخص‌هایی هستند که می‌توانند اطلاعات مربوط به یک عدد فازی را در اختیار ما قرار دهند. اکنون به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۲.۲.۳. ارزش عدد فازی $\tilde{a}$، به تابع نزولی $s(\alpha) = \alpha$ وابسته است که با $V(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت $V(\tilde{a}) = \int_0^1 \alpha[a_\alpha^L + a_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha$ تعریف می‌شود.

مفهوم ارزش اجازه می‌دهد که به یک عدد فازی یک عدد حقیقی نسبت دهیم. مقدار مرکزی $V(\tilde{a})$ را می‌توانیم به‌عنوان نمایش قدر مطلق ابهام عدد فازی از یک نقطه سراسری[۹]، در نظر بگیریم.

تعریف ۳.۲.۳. ابهام عدد فازی $\tilde{a}$، به تابع نزولی $s(\alpha) = \alpha$ وابسته است که با $A(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت $A(\tilde{a}) = \int_0^1 \alpha[a_\alpha^U - a_\alpha^L]\mathrm{d}\alpha$ تعریف می‌شود.

توجه کنید که $a_\alpha^U - a_\alpha^L$ عرض α-برش $a_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^U]$ است و $A(\tilde{a})$ به معنی ”گستره سراسری“ تابع عضویت $\tilde{a}$ (بواسطه وزن $s(\alpha)$) است و از این‌رو $A(\tilde{a})$ را به‌عنوان مقیاس ابهام عدد فازی $\tilde{a}$ در نظر می‌گیریم.

کلیر[۱۰] و فولگر[۱۱] [۲۳]، یک روش طبیعی برای بیان فازی بودن برحسب فاصله بین مجموعه فازی و مکمل آن بیان کرده‌اند. پس از آن، دلگادو و همکارانش [۱۳] فازی بودن را روشی برای بیان تراکم ارزش عدد فازی $\tilde{a}$ از ۰.۵ تعریف کردند.

تعریف ۴.۲.۳. فازی بودن عدد فازی $\tilde{a}$، به تابع نزولی $s(\alpha) = \alpha$ وابسته است که با $F(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(\tilde{a}) = \int_0^{\frac{1}{2}} [a_\alpha^U - a_\alpha^L]\mathrm{d}\alpha + \int_{\frac{1}{2}}^1 [a_\alpha^L - a_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha$$

[۴] Mode

[۵] Delgado

[۶] Value

[۷] Ambiguity

[۸] Fuzziness

[۹] Global point

[۱۰] Klir

[۱۱] Folger

اگر اسکالرها نامنفی باشند شاخص‌های بالا خطی می‌شوند.

۲.۲.۳ برنامه‌ریزی آرمانی

برنامه‌ریزی آرمانی[۱۲] خطی از جمله تکنیک‌های اساسی برای مدل‌هایی است که تصمیم‌گیرنده هم‌زمان درصدد دست‌یابی به چندین هدف می‌باشد. به منظور ایجاد درکی روشن از برنامه‌ریزی آرمانی، آشنایی با مفاهیم زیر ضروری است.
هدف: عبارتی کلی است که نشان دهنده علایق تصمیم‌گیرنده در مواردی مانند مینیمم‌سازی هزینه یا ماکزیمم‌سازی سهم بازار می‌باشد.
سطح مطلوب عددی (سطح تمایل): سطح مطلوب عبارت است از یک مقدار عددی خاص همراه با یک سطح توفیق قابل قبول یا مطلوب برای هدف معین.
آرمان: هدف مرتبط با یک سطح تمایل را آرمان می‌نامند. مثلاً آرزوی ''کسب سودی معادل x ریال'' یا ''کاهش هزینه‌ای معادل y ریال'' آرمان نامیده می‌شود. به این ترتیب حداکثر کردن سود، یک هدف است اما کسب سودی معادل x ریال، یک آرمان می‌باشد.
متغیرهای انحراف از آرمان: دست‌یابی به سطح تمایل تعیین شده در یک هدف وابسته به امکانات، منابع، محدودیت‌ها و ... می‌باشد که در عمل ممکن است تصمیم‌گیرنده به سطح تمایل تعیین شده دست یابد یا نیابد. در بسیاری از موارد ممکن است بین آرزوها، تمایلات و خواسته‌های تصمیم‌گیرنده و آن‌چه که در عمل به آن می‌توان دست یافت، تفاوت و اختلاف وجود داشته باشد. این میزان تفاوت در مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی توسط متغیرهایی که به آن متغیرهای انحراف از آرمان گفته می‌شود، اندازه‌گیری می‌شود. متغیرهای انحراف از آرمان را با d_k^+ و d_k^- نشان می‌دهیم. d_k^+ میزان پیشی گرفتن از آرمان تعیین شده را نشان می‌دهد و d_k^- میزان عدم دست‌یابی به آرمان تعیین شده است.

فرض کنید $f_k(x) = c_{ik}x_i$، $i = ۱, \ldots, n$، $k = ۱, \ldots, m$ تمامی توابع هدف مسأله باشند که در آن x_i متغیرهای تصمیم مسأله و c_{ik} بردار ضرایب k امین تابع هدف است. فرض کنید g_k آرمان مورد نظر تابع هدف k-ام و $Ax = b$ و $x \geq ۰$ محدودیت‌های مسأله باشند. در این روش به جای این‌که هر یک از توابع هدف را بهینه کنیم از تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود که برای هر یک از توابع هدف، هدفی یا آرمانی در نظر بگیرد. که این مقدار بهترین مقداری است که آن تابع هدف می‌تواند اختیار کند. سپس باید در جستجوی جوابی باشیم که جمع موزون انحراف اهداف از آرمان‌های مربوطه را کمینه سازد. در نتیجه داریم:

$$\begin{array}{ll}
\sum_{i=۱}^{n} c_{i۱}x_i = g_۱, & \text{(آرمان اول)} \\
\sum_{i=۱}^{n} c_{i۲}x_i = g_۲, & \text{(آرمان دوم)} \\
\vdots & \vdots \\
\sum_{i=۱}^{n} c_{im}x_i = g_m, & (m\text{-ام آرمان})
\end{array}$$

از آن‌جا که دست‌یابی هم‌زمان به کلیه آرمان‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد، تابع هدف تلفیقی[۱۳] برای مدل

[۱۲] Goal programming
[۱۳] Combination

برنامه‌ریزی آرمانی تعیین می‌شود. با این فرض که انحرافات مثبت و منفی از آرمان‌ها از اهمیت یکسانی برخوردار باشند، تابع هدف تلفیقی برای مدل برنامه‌ریزی آرمانی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{ll} \min & z=\sum_{k=1}^{m}|\sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_i-g_k| \\ s.t. & Ax=b \\ & x\geq 0. \end{array}$$

حال اگر عبارت داخل قدر مطلق را برابر با d_k قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ll} \min & z=\sum_{k=1}^{m}|d_k| \\ s.t. & Ax=b \\ & d_k=\sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_i-g_k \\ & x\geq 0, \end{array}$$

و چون d_k می‌تواند مقدار مثبت یا منفی باشد می‌توان آن‌را با تفاضل دو متغیر غیر منفی جدید d_k^+ و d_k^- جایگزین نمود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ll} d_k=d_k^+-d_k^- & d_k^+\geq 0,\ d_k^-\geq 0 \\ d_k=d_k^+-d_k^-=d_k^--d_k^+ & k=1,\ldots,m, \end{array}$$

لذا مدل برنامه‌ریزی آرمانی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \min & z=\sum_{k=1}^{m}d_k^++d_k^-, \\ s.t & \sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_i+d_k^--d_k^+=g_k \\ & Ax=b \\ & x,d_k^+,d_k^-\geq 0. \end{array} \tag{1.3}$$

مدل برنامه‌ریزی آرمانی (۱.۳) را می‌توانیم با استفاده از روش سیمپلکس حل کنیم.

در اکثر موارد محدودیت هدف، شامل متغیرهای d_k^+ و d_k^- می‌باشد اما در شرایطی ممکن است یکی از این دو متغیر در محدودیت هدف ظاهر نشوند.

اگر d_k^+ در محدودیت هدف ظاهر نشود بیانگر این واقعیت است که موفقیت بیش از حد این سطح از آرمان امکان‌پذیر نیست. این نمونه‌ای از آرمان کران بالا است و مشابه نامعادله $\leq$ در مدل برنامه‌ریزی خطی است. در این حالت محدودیت هدف به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_i+d_k^-=g_k\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_i\leq g_k.$$

حال اگر d_k^- در محدودیت هدف ظاهر نشود بیانگر این واقعیت است که موفقیت کم‌تر از حد این سطح از آرمان امکان‌پذیر نیست. این نمونه‌ای از آرمان کران پایین است و مشابه نامعادله $\geq$ در مدل برنامه‌ریزی خطی است. در این حالت محدودیت هدف به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_i-d_k^+=g_k\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_i\geq g_k.$$

هم‌چنین ممکن است انحراف از برخی از آرمان‌ها مهم‌تر از انحراف از سایر آرمان‌ها باشد و یا برای یک آرمان مشخص، انحراف در یک جهت اهمیت بیشتری نسبت به جهت مخالف آن داشته باشد که در

این‌صورت مدل (۱.۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{k=1}^{m} w_k^+ d_k^+ + w_k^- d_k^- \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_i + d_k^- - d_k^+ = g_k \\ & Ax = b \\ & x, d_k^+, d_k^- \geq 0. \end{aligned}$$

۳.۲.۳ روش‌های حل برنامه‌ریزی آرمانی

برای حل یک مسأله برنامه ریزی آرمانی روش‌هایی از جمله روش وزن دهی و روش اولویت وجود دارد که در ادامه به بیان این روش‌ها می‌پردازیم.

روش وزن دهی

در روش وزن دهی[۱۴] یک تابع تک‌هدفه تشکیل می‌شود که مجموع وزین توابع مورد علاقه (توابع آرمانی)، هدف‌های مسأله می‌باشد.
فرض کنید برنامه‌ریزی آرمانی دارای m هدف باشد به‌طوری‌که k-امین هدف به‌صورت زیر باشد:

$$\min G_k \quad k = 1, \ldots, m,$$

تابع هدف، ترکیبی از تمام هدف‌ها است که در آن w_k ها وزن‌های هر کدام از اهداف‌اند که تصمیم‌گیرنده آن‌را مشخص می‌کند.

روش اولویت

در روش اولویت[۱۵] تصمیم‌گیرنده باید آرمان‌هایش (اهدافش) را اولویت‌بندی کند. فرض کنید m هدف مسأله به‌صورت زیر مشخص شده باشند:

$$\begin{aligned} &\min G_1 = \rho_1, && \text{(بالاترین اولویت)} \\ &\quad \vdots && \quad \vdots \\ &\min G_m = \rho_m, && \text{(پایین‌ترین اولویت)} \end{aligned}$$

که در آن ρ_k یکی از متغیرهای d_k^- یا d_k^+ است که آرمان k را نشان می‌دهد.

روش حل به‌طوری است که ابتدا تابع هدف با بالاترین اولویت یعنی G_1 را انتخاب و تحت محدودیت‌های مسأله حل می‌کنیم. فرض کنید x^* جواب بهین مسأله حل شده باشد. سپس محدودیت جدید $G_1(x) = G_1(x^*)$ را به مسأله اضافه می‌کنیم و تابع هدف را اولویت بعدی در نظر می‌گیریم. این روند را تا تابع هدف با کم‌ترین اولویت یعنی G_m ادامه می‌دهیم.

---

[۱۴] Weights method

[۱۵] Preemptire method

۴.۲.۳ فرمول‌بندی مسأله

مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{lll} \min & \tilde{f}_k(x) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{ki} x_i = \tilde{c}_k.x & k = 1, 2, \ldots, l \\ \max & \tilde{f}_r(x) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{ri} x_i = \tilde{c}_r.x & r = l+1, \ldots, m \\ s.t. & x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad x \geq 0, & \end{array} \tag{۲.۳}$$

که در آن $\tilde{c}_j = (\tilde{c}_{j1}, \tilde{c}_{j2}, \ldots, \tilde{c}_{jn})$، $j = 1, \ldots, m$ نمایش یک بردار از پارامترهای فازی است. این پارامترهای فازی اعداد فازی مشخصی فرض شده‌اند. برای حل مسأله (۲.۳) یک روش بر اساس فاصله متریک ارائه می‌دهیم که در آن فاصله یک جواب را با یک نقطه ایده‌آل یا نقطه مطلوب مینیمم می‌کند. نقطه ایده‌آل (مطلوب) توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود و این نقطه از سطوح دسترسی (دست‌یابی) مطلوب تشکیل شده است. به‌عنوان مثال می‌توان سطح آرمان یا اهداف را در روش برنامه‌ریزی آرمانی با بهینه کردن هر یک از توابع هدف به‌دست آورد که همان نقطه ایده‌آل در روش توافقی[۱۶] فازی است. این نقطه در فضای توابع هدف به‌صورت $(\tilde{f}_1^*, \tilde{f}_2^*, \ldots, \tilde{f}_m^*)$ نمایش داده می‌شود. آرناس[۱۷] [۳۰] روشی را برای به‌دست آوردن نقطه ایده‌آل فازی مسأله (۲.۳) ارائه دادند به‌علاوه نشان دادند که مؤلفه‌های این نقطه ایده‌آل اعداد فازی هستند. در روش برنامه‌ریزی آرمانی فرض می‌کنیم اهداف ارائه شده توسط تصمیم‌گیرنده با اعداد فازی مشخص شوند بنابراین فرض می‌کنیم $\tilde{f}_i^*$ نمایش یک عدد فازی باشد.
با توجه به فرضیات بالا، استفاده از روش مبنی بر فاصله برای حل مسأله (۲.۳) مستلزم انتخاب یک مقیاس فاصله مناسب و نرمال کردن توابع هدف است. رایج‌ترین انتخاب استفاده از L_p–فاصله ($1 \leq p \leq \infty$) است. در خصوص این انتخاب، بوگاردی[۱۸] و باردوسی[۱۹] [۵] یک فاصله مرکب از چندین L_p–فاصله برای مقادیر مختلف از پارامترهای p، با در نظر گرفتن ماهیت اهداف و تفسیر اولویت مقادیر p، معرفی کرده‌اند. روش چندهدفه به‌دست آمده از این فاصله برنامه‌ریزی مرکب[۲۰] نامیده می‌شود و یک رابطه بده و بستان[۲۱] دو سطحی را به وجود می‌آورد. ابتدا با L_p–مترهای متفاوت در بین توابع هدف و سپس با یک L_p–متر متفاوت در بین همه اهداف. باردوسی و همکاران [۲۲، ۴] نشان داده اند که این فاصله مرکب در خواص ریاضی مترهای به‌کار رفته در برنامه‌ریزی توافقی حقیقی صدق می‌کند.

مورد مهم دیگر در مدل‌سازی بر مبنای مینیمم‌سازی فاصله، در نظر گرفتن اهمیت توابع برای تصمیم‌گیرنده است. به این مفهوم که تصمیم‌گیرنده اولویت انحراف بین هر تابع و سطح مطلوب مورد نظرش را با یک سری وزن‌های نامنفی که با w_j نمایش می‌دهیم، تعیین می‌کند. اکنون L_p–فاصله را در

[۱۶] Compromise programming
[۱۷] Arenas
[۱۸] Bogardy
[۱۹] Bardossy
[۲۰] Composite programming
[۲۱] Trade-off

مدلی به‌صورت زیر فرموله می‌کنیم:

$$\min \quad L_p = \left[\sum_{k=1}^{l} w_k^p \left(\frac{\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*}{r_{\tilde{f}_k}}\right)^p + \sum_{r=l+1}^{m} w_r^p \left(\frac{\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)}{r_{\tilde{f}_r}}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (۳.۳)$$
$$x \in X \quad x \geq 0,$$

که در آن $r_{\tilde{f}_j}$ ثابت نرمال سازی مربوط به jامین هدف است.
چندین روش استفاده از نرمال سازی وجود دارد، برخی از دامنه توابع $\tilde{f}_j$ و برخی از سطح مطلوب[۲۲] $\tilde{f}_j$، استفاده می‌کنند. توجه کنید که برای نرمال کردن انحراف، ماکزیمم $\tilde{f}_{k*}$، $k = 1, \dots, l$ و مینیمم $\tilde{f}_{r*}$، $r = l+1, \dots, m$ را از هر تابع هدف محاسبه می‌کنیم. علامت $(\tilde{f}_{1*}, \tilde{f}_{2*}, \dots, \tilde{f}_{m*})$ نقطه ضد ایده‌آل[۲۳] نامیده می‌شود. سپس دامنه $\tilde{f}_j$ برای توابع مینیمم‌سازی به‌صورت کران بالای اعداد فازی $\tilde{f}_{j*} - \tilde{f}_j^*$ به‌دست می‌آید یعنی $r_{\tilde{f}_j} = f_{j*0}^U - f_{j0}^{*L}$ و برای ماکزیمم‌سازی به‌صورت کران بالای اعداد فازی $\tilde{f}_j^* - \tilde{f}_{j*}$ به‌دست می‌آید یعنی $r_{\tilde{f}_j} = f_{j0}^{*U} - f_{j*0}^L$.
برای $p = 1$ انحراف از $\tilde{f}_j^*$ در رابطه با سود و زیان نسبت مستقیم با مقدار هر یک از آن‌ها دارد. برای $2 \leq p \leq \infty$ بیشترین انحراف بیشترین اثر را دارد. برای $p = \infty$ (معیار مینیمم ماکزیمم[۲۴])، فقط بیشترین انحراف اثر دارد.
اکنون به دلایل مختلف فقط فاصله L_1 را در نظر می‌گیریم. اولا برای این فاصله، مسأله برنامه‌ریزی (۳.۳) به‌صورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌شود. غیر خطی بودن برای مقادیر مختلف p از ۱ تا ∞ در حالت کلی مشکلات زیادی به همراه خواهد داشت اما وقتی در محیط فازی کار می‌کنیم این مشکلات بیشتر خواهد شد. ثانیا تفاسیر جالبی از نقطه ترجیحی[۲۵] می‌بینیم، به این معنی که چندین قضیه مفید در [۳۳، ۳۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. ثالثا رومرو[۲۶] مسأله برنامه‌ریزی مرکب[۲۷] [۳۳] و گسترشی از برنامه‌ریزی آرمانی[۲۸] [۵] را به‌صورت ترکیب محدب خطی متر L_1 مطالعه کرده است. هم‌چنین، جواب‌های L_1 برای مجموعه توافقی با دو تابع هدف [۴۱، ۱۲] و برای بیش از دو تابع هدف تحت چندین شرط نرم[۲۹] [۸] یک کران بالا است. برای مطالعه بیشتر خواص جواب‌های مرکب در محیط قطعی می‌توانید به فصل ۴ کتاب یو[۳۰] [۴۰] مراجعه کنید.
فرض کنید

$$\tilde{d}_j(x) = \frac{\tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_j^*}{r_{\tilde{f}_j}}, \qquad (۴.۳)$$

[۲۲] Desired level
[۲۳] Anti-ideal
[۲۴] Minmax
[۲۵] Preferential point
[۲۶] Romero
[۲۷] CPP
[۲۸] EGP
[۲۹] Soft
[۳۰] Yu

و

$$\tilde{d}_j(x) = \frac{\tilde{f}_j^* - \tilde{f}_j(x)}{r_{\tilde{f}_j}}, \tag{۵.۳}$$

به ترتیب درجه اختلاف متناظر با j-امین تابع هدف وقتی که j-امین هدف مینیمم‌سازی و وقتی که j-امین هدف ماکزیمم‌سازی است، باشند. وجود پارامترهای فازی در مدل لزوم تعریف و ارائه مفاهیم جدید مانند مینیمم‌سازی فاصله فازی از نقطه مطلوب را نشان می‌دهد. برای این کار، حساب فازی را برای کسرهای روابط (۴.۳) و (۵.۳) به کار می‌بریم و دو مسأله قطعی می‌سازیم که جواب‌های آن‌ها به ما کمک می‌کند تا α-برش‌های فاصله مینیمم فازی را به‌دست آوریم.

۳.۳ حل مسأله L_1

در این بخش مدلی را که شامل دو مرحله است معرفی می‌کنیم. در مرحله اول مینیمم فاصله فازی را تحت متر L_1 محاسبه می‌کنیم و در مرحله دوم تصمیم بهینه را با توجه به مینیمم فاصله فازی به‌دست آمده از مرحله اول، به‌دست می‌آوریم.

۱.۳.۳ محاسبه مینیمم فاصله فازی

در رابطه (۳.۳) قرار می‌دهیم $p = 1$ و مسأله زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{k=1}^{l} w_k \tilde{d}_k(x) + \sum_{r=l+1}^{m} w_r \tilde{d}_r(x) \\ & x \in X \qquad x \geq 0. \end{array} \tag{۶.۳}$$

که در آن تابع هدف مجموع وزنی تک تک انحرافات نسبت به نقطه مطلوب است. مشاهده می‌کنیم وقتی که نقطه مطلوب بهتر از یا برابر با نقطه ایده‌آل باشد، مسأله (۶.۳) معادل مدل وزنی برنامه‌ریزی آرمانی [۳۲] است.
برای حل مسأله (۶.۳) برای هر $\alpha \in [0, 1]$ دو مسأله قطعی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} \min & d_\alpha^L = \sum_{k=1}^{l} w_k d_{k\alpha}^L(x) + \sum_{r=l+1}^{m} w_r d_{r\alpha}^L(x) & \\ s.t. & \dfrac{f_{k\alpha}^L(x)}{r_{\tilde{f}_k}} - d_{k\alpha}^L = \dfrac{f_{k\alpha}^{*U}(x)}{r_{\tilde{f}_k}} & k = 1, \ldots, l \\ & \dfrac{f_{r\alpha}^U(x)}{r_{\tilde{f}_r}} + d_{r\alpha}^L = \dfrac{f_{r\alpha}^{*L}(x)}{r_{\tilde{f}_r}} & r = l+1, \ldots, m \\ & x \in X \qquad x \geq 0, & \end{array} \tag{۷.۳}$$

و

$$\begin{array}{lll} \min & d_\alpha^U = \sum_{k=1}^l w_k d_{k\alpha}^U(x) + \sum_{r=l+1}^m w_r d_{r\alpha}^U(x) & \\ s.t. & \dfrac{f_{k\alpha}^U(x)}{r_{\tilde{f}_k}} - d_{k\alpha}^U = \dfrac{f_{k\alpha}^{*L}(x)}{r_{\tilde{f}_k}} & k = 1, \dots, l \\ & \dfrac{f_{r\alpha}^L(x)}{r_{\tilde{f}_r}} + d_{r\alpha}^U = \dfrac{f_{r\alpha}^{*U}(x)}{r_{\tilde{f}_r}} & r = l+1, \dots, m \\ & x \in X \qquad x \geq 0, & \end{array} \tag{۸.۳}$$

که در آن $f_{j\alpha}^L$ نمایش مقدار j-امین تابع هدف در x است وقتی که ضرایب برابر با کران پایین α-برش باشند، و به‌طور مشابه $f_{j\alpha}^U$ برای حالتی که ضرایب برابر با کران بالای α-برش باشند. حال قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنید $\tilde{d}$ مجموعه فازی تعریف شده روی خانواده‌ای از مجموعه‌های قطعی*

$$\tilde{d}_\alpha \in \{[d_\alpha^L, d_\alpha^U], \alpha \in [0, 1]\},$$

باشد که در آن d_α^L و d_α^U به‌ترتیب جواب‌های مسائل (۷.۳) و (۸.۳) هستند. در این‌صورت $\tilde{d}$ یک عدد فازی است که مینیمم فاصله از نقطه مطلوب تحت متر L_1 را نشان می‌دهد.

برهان. مسأله برنامه‌ریزی خطی فازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{k=1}^l w_k \dfrac{\tilde{f}_k(x)}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m w_r \dfrac{\tilde{f}_r(x)}{r_{\tilde{f}_r}} \\ s.t. & x \in X \qquad x \geq 0, \end{array} \tag{۹.۳}$$

که مقدار بهینه آن یک عدد فازی است که با استفاده از روش گسترش یافته توسط آرناس[۳۱] [۲] به‌دست می‌آید. بردار ضرایب تابع هدف مسأله (۹.۳) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{c} = \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{\tilde{c}_k}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{\tilde{c}_r}{r_{\tilde{f}_r}}. \tag{۱۰.۳}$$

لذا مسأله (۹.۳) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \min & \tilde{z} = \tilde{c}x \\ & x \in X \quad x \geq 0. \end{array} \tag{۱۱.۳}$$

α-برش‌های عدد فازی $\tilde{z}$، یعنی جواب مسأله (۱۱.۳)، با حل دو مسأله زیر به‌دست می‌آیند. ابتدا مسأله

$$\begin{array}{ll} \min & c_\alpha^L . x \\ s.t. & x \in X \quad x \geq 0, \end{array} \tag{۱۲.۳}$$

را حل می‌کنیم، که در آن $c_\alpha^L = \sum_{k=1}^l w_k \dfrac{c_{k\alpha}^L}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m w_r \dfrac{c_{r\alpha}^U}{r_{\tilde{f}_r}}$. جواب بهینه این مسأله z_α^L است که کران پایین α-برش عدد فازی $\tilde{z}$ می‌باشد. سپس مسأله

$$\begin{array}{ll} \min & c_\alpha^U . x \\ s.t. & x \in X \quad x \geq 0, \end{array} \tag{۱۳.۳}$$

[۳۱] Arenas

را حل می‌کنیم که در آن $c_\alpha^U = \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{c_{k\alpha}^U}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{c_{r\alpha}^L}{r_{\tilde{f}_r}}$. جواب بهینه این مسأله z_α^U است که کران بالای α-برش عدد فازی $\tilde{z}$ می‌باشد. نشان می‌دهیم که

$$\begin{aligned} d_\alpha^L &= z_\alpha^L - \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{f_{k\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}}, \\ d_\alpha^U &= z_\alpha^U - \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{f_{k\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{f_{r\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_r}}. \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

با استفاده از رابطه (۷.۳) داریم:

$$d_\alpha^L = \sum_{k=1}^{l} w_k d_{k\alpha}^L(x) + \sum_{r=l+1}^{m} w_r d_{r\alpha}^L(x). \tag{۱۵.۳}$$

هم‌چنین داریم $d_{k\alpha}^L = \frac{f_{k\alpha}^L(x)}{r_{\tilde{f}_k}} - \frac{f_{k\alpha}^{*U}(x)}{r_{\tilde{f}_k}}$ و $d_{r\alpha}^L = \frac{f_{r\alpha}^{*L}(x)}{r_{\tilde{f}_r}} - \frac{f_{r\alpha}^U(x)}{r_{\tilde{f}_r}}$. با جایگذاری $d_{k\alpha}^L$ و $d_{r\alpha}^L$ در رابطه (۱۵.۳) و با توجه به این‌که z_α^L جواب بهینه مسأله (۱۲.۳) است و با توجه به مقدار c_α^L داریم:

$$d_\alpha^L = z_\alpha^L - \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{f_{k\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}}.$$

به‌طور مشابه برای d_α^U، با توجه به رابطه (۸.۳) و این‌که z_α^U جواب بهینه مسأله (۱۳.۳) است و با توجه به مقدار c_α^U می‌توانیم نشان دهیم

$$d_\alpha^U = z_\alpha^U - \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{f_{k\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{f_{r\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_r}}.$$

ثابت می‌کنیم برای هر α مجموعه $[d_\alpha^L, d_\alpha^U]$ در واقع یک بازه بسته حقیقی است. توجه داشته باشید که جواب مسأله (۹.۳) یعنی $\tilde{z}$ و مؤلفه‌های نقطه مطلوب یعنی $\tilde{f}_j^*$، $j = 1, \ldots, m$ اعداد فازی هستند. لذا

$$\begin{aligned} & z_\alpha^L \le z_\alpha^U \\ & f_{k\alpha}^{*L} \le f_{k\alpha}^{*U} \qquad k = 1, \ldots, l \\ & f_{r\alpha}^{*L} \le f_{r\alpha}^{*U} \qquad r = l+1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

از این‌رو به آسانی ثابت می‌شود که:

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{l} \frac{f_{k\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_k}} &\le -\sum_{k=1}^{l} \frac{f_{k\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_k}} \\ \sum_{r=l+1}^{m} \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}} &\le \sum_{r=l+1}^{m} \frac{f_{r\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_r}}, \end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

با توجه به این‌که $r_{\tilde{f}_k}$ و $r_{\tilde{f}_r}$ ثابت‌های نرمال سازی هستند و مثبت‌اند و با توجه به رابطه (۱۶.۳) نتیجه واضح است.

در این‌صورت با توجه به روابط (۱۴.۳) و (۱۶.۳) و (۱۷.۳) مشاهده می‌کنیم که برای هر α، $d_\alpha^L \le d_\alpha^U$.

اکنون ثابت می‌کنیم که بازه‌های α-برش عدد فازی $\tilde{d}$ تودرتو هستند یعنی اگر $\alpha < \alpha'$ آن‌گاه

$$[d_{\alpha'}^L, d_{\alpha'}^U] \subseteq [d_\alpha^L, d_\alpha^U].$$

با توجه به مراحلی مشابه بالا ثابت می‌کنیم. چون جواب مسأله (۹.۳) یعنی $\tilde{z}$ و مؤلفه‌های نقطه مطلوب یعنی $\tilde{f}_j^*$، $j = 1, \ldots, m$ اعداد فازی می‌باشند نتیجه می‌گیریم که α-برش‌های آن‌ها تودرتو هستند:

$$\begin{aligned} d_\alpha^L &= z_\alpha^L - \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{f_{k\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}} \\ &\leq z_{\alpha'}^L - \sum_{k=1}^{l} w_k \frac{f_{k\alpha'}^{*U}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^{m} w_r \frac{f_{r\alpha'}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}} = d_{\alpha'}^L. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه نشان می‌دهیم $d_{\alpha'}^U \leq d_\alpha^U$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۲.۳.۳. *فرض کنید نقطه مطلوب $(\tilde{f}_1^*, \tilde{f}_2^*, \ldots, \tilde{f}_m^*)$ در هر α-برش بهتر از یا برابر با نقطه ایده‌آل باشد و $\tilde{d}$ عدد فازی تعریف شده در قضیه ۱.۳.۳ باشد در این‌صورت ارزش $\tilde{d}$، یعنی $V(\tilde{d})$ بزرگ‌تر یا برابر با صفر است.*

برهان. فرض کنید x_α^U یک جواب از مسأله (۸.۳) و x_α^L یک جواب از مسأله (۷.۳) باشد. در این‌صورت با توجه به محدودیت‌های مسائل (۷.۳) و (۸.۳) برای توابع مینیمم‌سازی داریم:

$$\begin{aligned} d_{j\alpha}^U(x_\alpha^U) &= \frac{f_{j\alpha}^U(x_\alpha^U)}{r_{\tilde{f}_j}} - \frac{f_{j\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_j}}, \\ d_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) &= \frac{f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L)}{r_{\tilde{f}_j}} - \frac{f_{j\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_j}}, \end{aligned} \qquad (۱۸.۳)$$

و برای توابع ماکزیمم‌سازی داریم:

$$\begin{aligned} d_{j\alpha}^U(x_\alpha^U) &= \frac{f_{j\alpha}^{*U}}{r_{\tilde{f}_j}} - \frac{f_{j\alpha}^L(x_\alpha^U)}{r_{\tilde{f}_j}}, \\ d_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) &= \frac{f_{j\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_j}} - \frac{f_{j\alpha}^U(x_\alpha^L)}{r_{\tilde{f}_j}}. \end{aligned} \qquad (۱۹.۳)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم ارزش $\tilde{d}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است یعنی $V(\tilde{d}) = \int_0^1 \alpha(d_\alpha^L + d_\alpha^U)\mathrm{d}\alpha \geq 0$ کافیست نشان دهیم

$$d_\alpha^L + d_\alpha^U \geq 0 \qquad \forall \alpha \in [0, 1]. \qquad (۲۰.۳)$$

برای این منظور نشان می‌دهیم رابطه (۲۰.۳) برای تک تک توابع هدف مینیمم‌سازی و ماکزیمم‌سازی برقرار است در نتیجه برای مجموع آن‌ها نیز برقرار می‌باشد یعنی ثابت می‌کنیم

$$d_{j\alpha}^L + d_{j\alpha}^U \geq 0 \qquad \forall \alpha \in [0, 1]. \qquad (۲۱.۳)$$

فرض می‌کنیم j-امین تابع هدف مینیمم‌سازی باشد. داریم:

$$\begin{aligned} f_{j\alpha}^U(x_\alpha^U) - f_{j\alpha}^{*L} &= f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*L} + f_{j\alpha}^{*U} - f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) + f_{j\alpha}^U(x_\alpha^U) - f_{j\alpha}^{*U} \\ &= f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*L} - r_{\tilde{f}_j} d_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) + f_{j\alpha}^U(x_\alpha^U) - f_{j\alpha}^{*U}. \end{aligned} \qquad (۲۲.۳)$$

قرار می‌دهیم $l = f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*L}$ و $m = f_{j\alpha}^U(x_\alpha^U) - f_{j\alpha}^{*U}$ واضح است که $m, l \geq 0$ (زیرا $f_{j\alpha}^{*L}$ و $f_{j\alpha}^{*U}$ در واقع به‌ترتیب کوچک‌ترین عدد بین $f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L)$ و $f_{j\alpha}^U(x_\alpha^U)$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$ هستند). لذا از

رابطه (۱۸.۳) داریم:

$$r_{\tilde{f}_j} d^U_{j\alpha}(x^U_\alpha) + r_{\tilde{f}_j} d^L_{j\alpha}(x^L_\alpha) = l + m \geq 0. \tag{۲۳.۳}$$

به‌طور مشابه و با استفاده از رابطه (۱۹.۳) برای j-امین تابع هدف وقتی که تابع هدف ماکزیمم‌سازی است نیز ثابت می‌شود که

$$r_{\tilde{f}_j} d^U_{j\alpha}(x^U_\alpha) + r_{\tilde{f}_j} d^L_{j\alpha}(x^L_\alpha) = l + m \geq 0,$$

یعنی برای هر j، $d^L_{j\alpha} + d^U_{j\alpha} \geq 0$. □

قضیه ۳.۳.۳. *فرض کنید نقطه مطلوب برای هر α-برش بهتر از یا برابر با نقطه ایده‌آل باشد و فرض کنید $\tilde{d}$ عدد فازی تعریف شده در قضیه ۱.۳.۳ باشد. در این‌صورت ارزش $\tilde{d}$، یعنی $V(\tilde{d})$ برابر با صفر است اگر و تنها اگر در هر α-برش هر تابع به سطح مطلوب برسد.*

برهان. فرض می‌کنیم در هر α-برش هر تابع به سطح مطلوب برسد، یعنی وجود داشته باشند x^L_α و x^U_α به‌طوری‌که:

$$f^L_{k\alpha}(x^L_\alpha) = f^{*L}_{k\alpha}, \quad f^U_{k\alpha}(x^U_\alpha) = f^{*U}_{k\alpha}, \quad f^L_{r\alpha}(x^U_\alpha) = f^{*L}_{r\alpha}, \quad f^U_{r\alpha}(x^L_\alpha) = f^{*U}_{r\alpha},$$

در این‌صورت داریم:

$$d^L_{j\alpha} = \frac{f^{*L}_{j\alpha} - f^{*U}_{j\alpha}}{r_{\tilde{f}_j}}, \quad d^U_{j\alpha} = \frac{f^{*U}_{j\alpha} - f^{*L}_{j\alpha}}{r_{\tilde{f}_j}}.$$

لذا طبق تعریف ارزش داریم:

$$V(\tilde{d}) = \int_0^1 \alpha[d^L_\alpha + d^U_\alpha]\mathrm{d}\alpha = 0.$$

برعکس فرض کنید $V(\tilde{d}) = 0$. یعنی

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \int_0^1 \alpha(d^L_{j\alpha} + d^U_{j\alpha})\mathrm{d}\alpha = 0. \tag{۲۴.۳}$$

لذا با توجه به قضیه ۲.۳.۳ چون برای هر α-برش، $d^L_{j\alpha} + d^U_{j\alpha} \geq 0$ پس با توجه به رابطه (۲۴.۳) برای هر α-برش و هر j داریم $d^L_{j\alpha} + d^U_{j\alpha} = 0$ بنابراین برای x^U_α که یک جواب از مسأله (۸.۳) و x^L_α که یک جواب از مسأله (۷.۳) است و برای حالتی که توابع مینیمم‌سازی هستند با توجه به قیدهای مسائل (۷.۳) و (۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned} f^U_{j\alpha}(x^U_\alpha) - f^{*L}_{j\alpha} &= \ f^{*U}_{j\alpha} - f^L_{j\alpha}(x^L_\alpha) \\ \Rightarrow \ f^U_{j\alpha}(x^U_\alpha) - f^{*U}_{j\alpha} &= \ f^{*L}_{j\alpha} - f^L_{j\alpha}(x^L_\alpha), \end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

مشاهده می‌کنیم که طرف راست برابری (۲۵.۳) کوچک‌تر یا مساوی صفر و طرف چپ آن بزرگ‌تر مساوی صفر است بنابراین هر دو برابر صفر می‌باشند یعنی

$$f^U_{j\alpha}(x^U_\alpha) = f^{*U}_{j\alpha}, \qquad f^L_{j\alpha}(x^L_\alpha) = f^{*L}_{j\alpha}.$$

به‌طور مشابه برای حالتی که توابع ماکزیمم‌سازی هستند با توجه به رابطه (۷.۳) و (۸.۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
& d_{j\alpha}^{U}=d_{j\alpha}^{L} \\
\Rightarrow\quad & f_{j\alpha}^{*U}-f_{j\alpha}^{L}(x_{\alpha}^{U})=f_{j\alpha}^{U}(x_{\alpha}^{L})-f_{j\alpha}^{*L} \\
\Rightarrow\quad & f_{j\alpha}^{*L}-f_{j\alpha}^{L}(x_{\alpha}^{U})=f_{j\alpha}^{U}(x_{\alpha}^{L})-f_{j\alpha}^{*U} \\
\Rightarrow\quad & f_{j\alpha}^{L}(x_{\alpha}^{U})=f_{j\alpha}^{*L},\quad f_{j\alpha}^{U}(x_{\alpha}^{L})=f_{j\alpha}^{*U},
\end{aligned}
$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

۲.۳.۳ مدلی برای تصمیم بهینه تحت متر L_1

در زیربخش قبلی فاصله فازی $\tilde{d}$ به‌دست آمده، نمایش مینیمم فاصله از نقطه مطلوب تحت متر انتخاب شده بود. در این زیربخش می‌خواهیم یک بردار تصمیم پیدا کنیم به‌طوری‌که فاصله آن نسبت به نقطه مطلوب بیشترین شباهت را به عدد فازی $\tilde{d}$ داشته باشد. اگرچه روش‌های مختلفی برای حل این مسأله در مقالات استفاده شده است، اما ما می‌خواهیم روشی را برای غیرفازی‌سازی[32] بر پایه ارزش، ابهام و فازی بودن یک عدد فازی [۱۴، ۱۳] بیان کنیم. با در نظر گرفتن این شاخص‌های حقیقی مدل زیر را داریم:

$$
\begin{aligned}
& Find\ x \\
& s.t. \\
& V\left(\textstyle\sum_{j=1}^{m} w_j\tilde{d}_j(x)\right)\approx V(\tilde{d}) \\
& A\left(\textstyle\sum_{j=1}^{m} w_j\tilde{d}_j(x)\right)\approx A(\tilde{d}) \\
& F\left(\textstyle\sum_{j=1}^{m} w_j\tilde{d}_j(x)\right)\approx F(\tilde{d}) \\
& x\in X \qquad x\geq 0,
\end{aligned}
\tag{۲۶.۳}
$$

که در آن $\approx$ به معنی "تقریبا برابر با" و هر یک از $V(\tilde{d})$، $A(\tilde{d})$ و $F(\tilde{d})$ نمایش ایده‌آل یا سطح آرمانی است. ضرایب مدل (۲۶.۳) با به‌کار گرفتن حساب فازی برای محاسبه α-برش انحراف فازی $\tilde{d}_j(x)$ و خواص ارزش، ابهام و فازی بودن به‌دست آمده است.

محاسبه ارزش

به راحتی می‌توان نشان داد که

$$
V\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\tilde{d}_j(x)\right)=\sum_{k=1}^{l} w_k V\left(\tilde{d}_k(x)\right)+\sum_{r=l+1}^{m} w_r V\left(\tilde{d}_r(x)\right). \tag{۲۷.۳}
$$

اکنون ارزش را برای انحراف مینیمم محاسبه می‌کنیم:

$$
V\left(\tilde{d}_k(x)\right)=V\left(\frac{\tilde{f}_k(x)-\tilde{f}_k^{*}}{r_{\tilde{f}_k}}\right)=\frac{1}{r_{\tilde{f}_k}}V\left(\tilde{f}_k(x)-\tilde{f}_k^{*}\right). \tag{۲۸.۳}
$$

[32] Defuzzyfication

طبق حساب فازی، α-برش برای $\tilde{f}_k(x)-\tilde{f}_k^*$ به‌صورت زیر است:

$$(\tilde{f}_k(x)-\tilde{f}_k^*)_\alpha=\left[\sum x_i c_{ki\alpha}^L-f_{k\alpha}^{*U},\sum x_i c_{ki\alpha}^U-f_{k\alpha}^{*L}\right]. \tag{۲۹.۳}$$

لذا طبق تعریف ۲.۲.۳ داریم:

$$V\left(\tilde{f}_k(x)-\tilde{f}_k^*\right)=\sum x_i\int_۰^۱\alpha\left(c_{ki\alpha}^L+c_{ki\alpha}^U\right)\mathrm{d}\alpha-\int_۰^۱\alpha\left(f_{k\alpha}^{*U}+f_{k\alpha}^{*L}\right)\mathrm{d}\alpha, \tag{۳۰.۳}$$

و ارزش برای انحراف ماکزیمم به‌صورت زیر است:

$$V\left(\tilde{d}_r(x)\right)=V\left(\frac{\tilde{f}_r^*-\tilde{f}_r(x)}{r_{\tilde{f}_r}}\right)=\frac{۱}{r_{\tilde{f}_r}}V\left(\tilde{f}_r^*-\tilde{f}_r(x)\right). \tag{۳۱.۳}$$

α-برش $\tilde{f}_r^*-\tilde{f}_r(x)$ طبق حساب فازی برابر است با:

$$(\tilde{f}_r^*-\tilde{f}_r(x))_\alpha=\left[f_r^{*L}-\sum x_i c_{ri\alpha}^U, f_{r\alpha}^{*U}-\sum x_i c_{ri\alpha}^L\right], \tag{۳۲.۳}$$

بنابراین طبق تعریف ۲.۲.۳ داریم:

$$V\left(\tilde{f}_r^*-\tilde{f}_r(x)\right)=\int_۰^۱\alpha\left(f_{r\alpha}^{*L}+f_{r\alpha}^{*U}\right)\mathrm{d}\alpha-\sum x_i\int_۰^۱\alpha\left(c_{ri\alpha}^U+c_{ri\alpha}^L\right)\mathrm{d}\alpha. \tag{۳۳.۳}$$

محاسبه ابهام

با محاسباتی مشابه آن‌چه در قسمت قبل نشان دادیم ابهام یک عدد فازی را به‌دست می‌آوریم.

$$A\left(\sum_{j=۱}^m w_j\tilde{d}_j(x)\right)=\sum_{j=۱}^m w_jA\left(\tilde{d}_j(x)\right), \tag{۳۴.۳}$$

برای انحرافات مربوط به توابع مینیمم‌سازی داریم:

$$A\left(\tilde{d}_k(x)\right)=\frac{۱}{r_{\tilde{f}_k}}A\left(\tilde{f}_k(x)-\tilde{f}_k^*\right). \tag{۳۵.۳}$$

با استفاده از تعریف ۳.۲.۳ داریم:

$$A\left(\tilde{f}_k(x)-\tilde{f}_k^*\right)=\sum x_i\int_۰^۱\alpha\left(c_{ki\alpha}^U-c_{ki\alpha}^L\right)\mathrm{d}\alpha+\int_۰^۱\alpha\left(f_{k\alpha}^{*U}-f_{k\alpha}^{*L}\right)\mathrm{d}\alpha, \tag{۳۶.۳}$$

و برای انحرافات مربوط به توابع ماکزیمم‌سازی داریم:

$$A\left(\tilde{d}_r(x)\right)=\frac{۱}{r_{\tilde{f}_r}}A\left(\tilde{f}_r^*-\tilde{f}_r(x)\right), \tag{۳۷.۳}$$

که طبق تعریف ۳.۲.۳ داریم:

$$A\left(\tilde{f}_r^*-\tilde{f}_r(x)\right)=\sum x_i\int_۰^۱\alpha\left(c_{ri\alpha}^U-c_{ri\alpha}^L\right)\mathrm{d}\alpha+\int_۰^۱\alpha\left(f_{r\alpha}^{*U}-f_{r\alpha}^{*L}\right)\mathrm{d}\alpha. \tag{۳۸.۳}$$

محاسبه فازی بودن

در نهایت برای عملگر میزان فازی بودن داریم:

$$F\left(\sum_{j=۱}^m w_j\tilde{d}_j(x)\right)=\sum_{j=۱}^m w_jF\left(\tilde{d}_j(x)\right). \tag{۳۹.۳}$$

برای انحرافات مربوط به توابع مینیمم‌سازی داریم:

$$F\left(\tilde{d}_k(x)\right) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_k}} F\left(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*\right), \qquad (۴۰.۳)$$

با استفاده از تعریف ۴.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned} F\left(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*\right) &= \sum x_i \int_0^{\frac{1}{2}} \left(c_{ki\alpha}^U - c_{ki\alpha}^L\right) \mathrm{d}\alpha + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f_{k\alpha}^{*U} - f_{k\alpha}^{*L}\right) \mathrm{d}\alpha \\ &+ \sum x_i \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(c_{ki\alpha}^L - c_{ki\alpha}^U\right) \mathrm{d}\alpha + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(f_{k\alpha}^{*L} - f_{k\alpha}^{*U}\right) \mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \qquad (۴۱.۳)$$

و برای انحرافات مربوط به توابع ماکزیمم‌سازی داریم:

$$F\left(\tilde{d}_r(x)\right) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_r}} F\left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)\right), \qquad (۴۲.۳)$$

که طبق تعریف ۴.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned} F\left(\tilde{f}_r(x) - \tilde{f}_r^*\right) &= \sum x_i \int_0^{\frac{1}{2}} \left(c_{ri\alpha}^U - c_{ri\alpha}^L\right) \mathrm{d}\alpha + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f_{r\alpha}^{*U} - f_{r\alpha}^{*L}\right) \mathrm{d}\alpha \\ &+ \sum x_i \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(c_{ri\alpha}^L - c_{ri\alpha}^U\right) \mathrm{d}\alpha + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(f_{r\alpha}^{*L} - f_{r\alpha}^{*U}\right) \mathrm{d}\alpha. \end{aligned} \qquad (۴۳.۳)$$

۴.۳ مثال کاربردی

مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی با پارامترهای فازی که با اعداد فازی مثلثی مشخص شده‌اند را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ll} \min & (40, 50, 80)x_1 + 100x_2 + 17.5x_3 \\ \max & (80, 92, 120)x_1 + (50, 75, 110)x_2 + 50x_3 \\ \max & (10, 25, 70)x_1 + 100x_2 + 75x_3 \\ s.t. & 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\ & 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\ & 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\ & 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\ & 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\ & 9.5x_1 + 9.5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\ & x \geq 0. \end{array} \qquad (۴۴.۳)$$

تابع عضویت عدد فازی مثلثی تکه‌ای خطی[۳۳] است و مد[۳۴] (یا نما، داده‌ای که بیشترین مقدار را دارد) آن منحصر بفرد است. عدد فازی مثلثی را با $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ نمایش می‌دهیم که $Supp(\tilde{a}) = [a_1, a_3]$ و $Mod(\tilde{a}) = a_2$.

در این مثال نقطه مطلوب را نقطه‌ای قرار می‌دهیم که مؤلفه‌های آن اعداد فازی هستند که با حل سه

[۳۳] Piecewise

[۳۴] Mode

مسأله تک‌هدفه فازی، مربوط به بهینه کردن هر یک از توابع به‌دست می‌آید. خلاصه این نتایج را در جدول ۱.۳ و شکل ۱.۳ نشان می‌دهیم. برای به‌دست آوردن مینیمم فاصله فازی $\tilde{d}_1$، مسائل (۷.۳) و (۸.۳) را با استفاده از متر L_1 حل می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای $\alpha = 0$ مینیمم فاصله فازی $\tilde{d}_1$ از حل دو مسأله (۴۵.۳) و (۴۶.۳) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\min \quad & d^L_0 = w_1 d^L_{10} + w_2 d^L_{20} + w_3 d^L_{30} \\
s.t. \quad & \frac{f^L_{10}(x)}{r_{\tilde{f}_1}} - d^L_{10} = \frac{f^{*U}_{10}}{r_{\tilde{f}_1}} \\
& \frac{f^U_{20}(x)}{r_{\tilde{f}_2}} + d^L_{20} = \frac{f^{*L}_{20}}{r_{\tilde{f}_2}} \\
& \frac{f^U_{30}(x)}{r_{\tilde{f}_1}} + d^L_{30} = \frac{f^{*L}_{30}}{r_{\tilde{f}_3}} \\
& 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\
& 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\
& 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\
& 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\
& 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\
& 9/5x_1 + 9/5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\
& x \geq 0,
\end{aligned} \tag{۴۵.۳}$$

و

$$\begin{aligned}
\min \quad & d^U_0 = w_1 d^U_{10} + w_2 d^U_{20} + w_3 d^U_{30} \\
s.t. \quad & \frac{f^U_{10}(x)}{r_{\tilde{f}_1}} - d^U_{10} = \frac{f^{*L}_{10}}{r_{\tilde{f}_1}} \\
& \frac{f^L_{20}(x)}{r_{\tilde{f}_2}} + d^U_{20} = \frac{f^{*U}_{20}}{r_{\tilde{f}_2}} \\
& \frac{f^L_{30}(x)}{r_{\tilde{f}_3}} + d^U_{30} = \frac{f^{*U}_{30}}{r_{\tilde{f}_3}} \\
& 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\
& 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\
& 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\
& 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\
& 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\
& 9/5x_1 + 9/5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\
& x \geq 0,
\end{aligned} \tag{۴۶.۳}$$

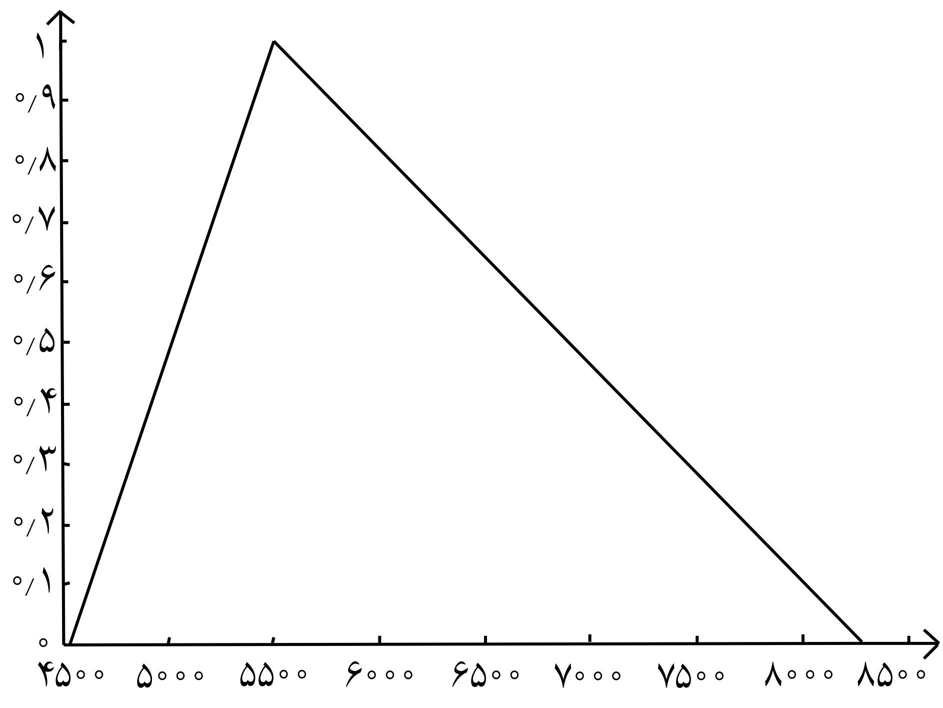
برای این منظور ابتدا α-برش‌های مربوط به هر تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f^L_{1\alpha} = (40 + 10\alpha)x_1 + 100x_2 + 17/5x_3, \\ f^U_{1\alpha} = (80 - 30\alpha)x_1 + 100x_2 + 17/5x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^L_{10} = 40x_1 + 100x_2 + 17/5x_3, \\ f^U_{10} = 80x_1 + 100x_2 + 17/5x_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^L_{2\alpha} = (80 + 12\alpha)x_1 + (50 + 25\alpha)x_2 + 50x_3, \\ f^U_{2\alpha} = (120 - 28\alpha)x_1 + (110 - 35\alpha)x_2 + 50x_3, \end{cases}$$

جدول ۱.۳: ایده‌آل‌های فازی

α	$\tilde{f}_1^*$	$\tilde{f}_2^*$	$\tilde{f}_3^*$
۰	[۴۵۲۶/۳۲, ۸۲۷۶/۶۱]	[۱۱۲۷۷/۸, ۱۵۹۴۴/۴]	[۸۶۷۷/۵۸, ۱۱۴۱۷]
۰/۱	[۴۶۳۹/۴۷, ۷۹۹۷/۷۱]	[۱۱۴۱۷/۸, ۱۵۶۱۷/۸]	[۸۷۴۵/۴۱, ۱۱۲۱۱]
۰/۲	[۴۷۴۳/۸, ۷۷۱۸/۸]	[۱۱۵۵۷/۸, ۱۵۲۹۱/۱]	[۸۸۱۳/۲۵, ۱۱۰۰۵]
۰/۳	[۴۸۳۶/۷۷, ۷۴۳۹/۸۹]	[۱۱۶۹۷/۸, ۱۴۹۶۴/۴]	[۸۸۸۱/۰۸, ۱۰۷۹۹/۱]
۰/۴	[۴۹۲۹/۷۴, ۷۱۶۰/۹۹]	[۱۱۸۳۷/۸, ۱۴۶۳۷/۸]	[۸۹۴۸/۹۱, ۱۰۵۹۳/۱]
۰/۵	[۵۰۲۲/۷۱, ۶۸۸۲/۰۸]	[۱۱۹۷۷/۸, ۱۴۳۱۱/۱]	[۹۰۱۶/۷۴, ۱۰۳۸۷/۱]
۰/۶	[۵۱۱۵/۶۷, ۶۶۰۳/۱۷]	[۱۲۱۱۷/۸, ۱۳۹۸۴/۴]	[۹۰۸۴/۵۷, ۱۰۱۸۱/۲]
۰/۷	[۵۲۰۸/۶۴, ۶۳۲۴/۲۷]	[۱۲۲۵۷/۸, ۱۳۶۵۷/۸]	[۹۱۵۲/۴, ۹۹۵۷/۱۹]
۰/۸	[۵۳۰۱/۶۱, ۶۰۴۵/۳۶]	[۱۲۳۹۷/۸, ۱۳۳۳۱/۱]	[۹۲۲۰/۲۳, ۹۷۶۹/۲۲]
۰/۹	[۵۳۹۴/۵۸, ۵۷۶۶/۴۶]	[۱۲۵۳۷/۸, ۱۳۰۰۴/۴]	[۹۲۸۸/۶۳, ۹۵۶۳/۲۵]
۱	[۵۴۸۷/۵۵, ۵۴۸۷/۵۵]	[۱۲۶۷۷/۸, ۱۲۶۷۷/۸]	[۹۳۵۷/۲۹, ۹۳۵۷/۲۹]



شکل ۱.۳: $\tilde{f}_1^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{۲۰}^{L} = ۸۰x_۱ + ۵۰x_۲ + ۵۰x_۳, \\ f_{۲۰}^{U} = ۱۲۰x_۱ + ۱۱۰x_۲ + ۵۰x_۳, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{۳\alpha}^{L} = (۱۰ + ۱۵\alpha)x_۱ + ۱۰۰x_۲ + ۷۵x_۳, \\ f_{۳\alpha}^{U} = (۷۰ - ۴۵\alpha)x_۱ + ۱۰۰x_۲ + ۷۵x_۳, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{۳۰}^{L} = ۱۰x_۱ + ۱۰۰x_۲ + ۷۵x_۳, \\ f_{۳۰}^{U} = ۷۰x_۱ + ۱۰۰x_۲ + ۷۵x_۳, \end{cases}$$

هم‌چنین با توجه به جدول ۱.۳ داریم:

$$\begin{array}{lll} f_{۱۰}^{*L} = ۴۵۲۶/۳۲, & f_{۲۰}^{*L} = ۱۱۲۷۷/۸, & f_{۳۰}^{*L} = ۸۶۷۷/۵۸, \\ f_{۱۰}^{*U} = ۸۲۷۶/۶۱, & f_{۲۰}^{*U} = ۱۵۹۴۴/۴, & f_{۳۰}^{*U} = ۱۱۴۱۷. \end{array} \quad (۴۷.۳)$$

برای به‌دست آوردن ثابت نرمال‌ساز توابع هدف، ابتدا نیاز داریم نقطه ضد ایده‌آل مربوط به هر تابع هدف را محاسبه کنیم. با توجه به این‌که تابع هدف اول مینیمم‌سازی است داریم:

$$r_{\tilde{f}_{۱۰}} = f_{۱*۰}^{U} - f_{۱۰}^{*L}, \quad (۴۸.۳)$$

که در آن $f_{۱*۰}^{U}$ کران بالای نقطه ضد ایده‌آل تابع هدف اول در $\alpha = ۰$ است. نقطه ضد ایده‌آل مربوط به تابع هدف اول از حل مسأله (۴۹.۳) به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{ll} \max & (۴۰, ۵۰, ۸۰)x_۱ + ۱۰۰x_۲ + ۱۷/۵x_۳ \\ s.t. & ۱۲x_۱ + ۱۷x_۲ \leq ۱۴۰۰ \\ & ۳x_۱ + ۹x_۲ + ۸x_۳ \leq ۱۰۰۰ \\ & ۱۰x_۱ + ۱۳x_۲ + ۱۵x_۳ \leq ۱۷۵۰ \\ & ۶x_۱ + ۱۶x_۳ \leq ۱۳۲۵ \\ & ۱۲x_۲ + ۷x_۳ \leq ۹۰۰ \\ & ۹/۵x_۱ + ۹/۵x_۲ + ۴x_۳ \geq ۱۰۷۵ \\ & x \geq ۰. \end{array} \quad (۴۹.۳)$$

اکنون برای محاسبه $f_{۱*۰}^{U}$، کران بالای α-برش ضرایب فازی تابع هدف اول را در مسأله (۴۹.۳) قرار می‌دهیم و آن‌را حل می‌کنیم جواب بهینه این مسأله مقدار $f_{۱*۰}^{U}$ را نشان می‌دهد. با توجه به این‌که $\alpha = ۰$ کران بالای ضریب فازی $x_۱$، ۸۰ است پس داریم:

$$\begin{array}{ll} \max & ۸۰x_۱ + ۱۰۰x_۲ + ۱۷/۵x_۳ \\ s.t. & ۱۲x_۱ + ۱۷x_۲ \leq ۱۴۰۰ \\ & ۳x_۱ + ۹x_۲ + ۸x_۳ \leq ۱۰۰۰ \\ & ۱۰x_۱ + ۱۳x_۲ + ۱۵x_۳ \leq ۱۷۵۰ \\ & ۶x_۱ + ۱۶x_۳ \leq ۱۳۲۵ \\ & ۱۲x_۲ + ۷x_۳ \leq ۹۰۰ \\ & ۹/۵x_۱ + ۹/۵x_۲ + ۴x_۳ \geq ۱۰۷۵ \\ & x \geq ۰. \end{array} \quad (۵۰.۳)$$

با قرار دادن $f_{۱*۰}^{U}$ از مسأله (۵۰.۳) و $f_{۱۰}^{*L}$ از رابطه (۴۷.۳) در رابطه (۴۸.۳) ثابت نرمال‌ساز $r_{\tilde{f}_{۱۰}}$ به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه برای سایر αها و سایر توابع هدف نیز می‌توانیم $r_{\tilde{f}_۲}$ و $r_{\tilde{f}_۳}$ را نیز محاسبه می‌کنیم. این فواصل در جدول ۲.۳ نشان داده شده است. حال مقادیر $f_{۱۰}^{L}$، $f_{۱۰}^{U}$، $f_{۲۰}^{L}$، $f_{۲۰}^{U}$، $f_{۳۰}^{L}$، $f_{۳۰}^{U}$،

$r_{\tilde{f}_1}$، $r_{\tilde{f}_2}$، $r_{\tilde{f}_3}$، $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ و مقادیر رابطه (۴۷.۳) را در مسائل (۴۵.۳) و (۴۶.۳) قرار می‌دهیم داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & d_0^L = d_{10}^L + d_{20}^L + d_{30}^L \\ s.t. \quad & 0/0073x_1 + 0/0182x_2 + 0/0032x_3 - d_{10}^L = 1/5082 \\ & 0/0155x_1 + 0/0142x_2 + 0/0065x_3 + d_{20}^L = 1/4591 \\ & 0/0068x_1 + 0/0097x_2 + 0/0073x_3 + d_{30}^L = 0/8437 \\ & 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\ & 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\ & 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\ & 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\ & 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\ & 9/5x_1 + 9/5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{۵۱.۳}$$

و

$$\begin{aligned} \min \quad & d_0^U = d_{10}^U + d_{20}^U + d_{30}^U \\ s.t. \quad & 0/0146x_1 + 0/0182x_2 + 0/0032x_3 - d_{10}^U = 0/8248 \\ & 0/0135x_1 + 0/0065x_2 + 0/0065x_3 + d_{20}^U = 2/0629 \\ & 0/001x_1 + 0/0097x_2 + 0/0073x_3 + d_{30}^U = 1/11 \\ & 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\ & 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\ & 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\ & 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\ & 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\ & 9/5x_1 + 9/5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

پس از حل داریم:

$$\tilde{d}_0 = [d_0^L, d_0^U] = [0, 2/05678],$$

به‌طور مشابه برای سایر αها و سایر توابع هدف نیز می‌توانیم مینیمم فاصله فازی را محاسبه کنیم. این فواصل در جدول ۳.۳ نشان داده شده است. ارزش، ابهام و میزان فازی بودن $\tilde{d}_1$ به‌ترتیب ۰.۵۹۲۶، ۰.۵۹۲۶ و ۰/۲۹۶۳− است. با در نظر گرفتن $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ در رابطه (۴۱.۳) تصمیم بهینه،

جدول ۲.۳: مقادیر ثابت نرمال‌ساز

α	$r_{\tilde{f}_1}$	$r_{\tilde{f}_2}$	$r_{\tilde{f}_3}$
۰	۵۴۸۷/۵۸	۷۷۲۹/۲۱	۱۰۲۸/۴۲
۰/۱	۵۰۲۴/۴۲	۷۲۲۲/۱	۹۹۰۹/۶۸
۰/۲	۴۵۷۰/۰۹	۶۷۱۴/۹	۹۵۳۳/۹۵
۰/۳	۴۱۶۶/۰۴	۶۲۰۷/۶۹	۹۱۵۸/۳۱
۰/۴	۳۹۳۵/۷۶	۵۷۰۰/۵۸	۸۷۸۲/۵۷
۰/۵	۳۷۰۵/۴۸	۵۱۹۳/۳۸	۸۴۰۶/۸۴
۰/۶	۳۴۷۵/۲۱	۴۶۸۶/۱۷	۸۰۳۱/۲
۰/۷	۳۲۴۴/۹۳	۴۱۷۹/۰۷	۷۶۵۵/۴۵
۰/۸	۳۰۱۴/۶۴	۳۶۷۱/۸۶	۷۲۷۹/۷۵
۰/۹	۲۷۸۴/۳۶	۳۱۶۴/۶۵	۶۹۰۴/۰۴
۱	۲۵۵۴/۰۸	۲۶۵۷/۵	۶۵۲۸/۳۴

جدول ۳.۳: L_1-فاصله فازی

α	$\tilde{d}_1$	α	$\tilde{d}_1$
۰	[۰, ۲/۰۵۶۷۸]	۰/۶	[۰, ۱/۷۴۹۲۵]
۰/۱	[۰, ۲/۰۳۸۲]	۰/۷	[۰/۱۲۰۳۶۲, ۱/۶۵۴۲۶]
۰/۲	[۰, ۲/۰۱۱۱۸]	۰/۸	[۰/۲۶۶۲۶۷, ۱/۴۸۱۵]
۰/۳	[۰, ۱/۹۷۸۰۵]	۰/۹	[۰/۵۴۹۴۰۳, ۱/۲۳۵۰۴]
۰/۴	[۰, ۱/۹۲۵۸۱]	۱	[۰/۹۵۲۰۶۷, ۰/۹۵۲۰۶۷]
۰/۵	[۰, ۱/۸۴۱۴۵]		

جواب مسأله زیر است.

$$
\begin{aligned}
Find\quad & (x_1, x_2, x_3) \\
s.t.\quad & -0/1278x_1 - 0/0157x_2 - 0/1914x_3 \approx -30/3197 && \text{(ارزش)} \\
& 0/0429x_1 + 0/0199x_2 \approx -3/1857 && \text{(ابهام)} \\
& 0/053x_1 + 0/0209x_2 \approx -4/7449 && \text{(فازی بودن)} \\
& 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\
& 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\
& 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\
& 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\
& 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\
& 9/5x_1 + 9/5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۵۳.۳}
$$

این مسأله با استفاده از روش اولویت برنامه‌ریزی آرمانی با اولویت‌های: اولین اولویت ارزش متناظر با هدف، دومین اولویت ابهام هدف و سرانجام اولویت آخر مربوط به میزان فازی حل می‌شود. مدل برنامه‌ریزی آرمانی به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
min\quad & d_1^- + d_1^+ \\
s.t.\quad & -0/1278x_1 - 0/0157x_2 - 0/1914x_3 + d_1^- - d_1^+ = -30/3197 \\
& 0/0429x_1 + 0/0199x_2 + d_2^- - d_2^+ = -3/1857 \\
& 0/053x_1 + 0/0209x_2 + d_3^- - d_3^+ = -4/7449 \\
& 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\
& 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\
& 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\
& 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\
& 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\
& 9/5x_1 + 9/5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

مقدار بهین این مسأله پس از حل ۷.۹۶۶۳۷ می‌باشد. اکنون مسأله را با اولویت دوم حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
min \quad & d_2^- + d_2^+ \\
s.t. \quad & -0.1278x_1 - 0.0157x_2 - 0.1914x_3 + d_1^- - d_1^+ + 30.3197 = 7.96637 \\
& 0.0429x_1 + 0.0199x_2 + d_2^- - d_2^+ = -3.1857 \\
& 0.053x_1 + 0.0209x_2 + d_3^- - d_3^+ = -4.7449 \\
& 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\
& 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\
& 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\
& 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\
& 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\
& 9.5x_1 + 9.5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}$$

مقدار بهین این مسأله پس از حل ۶.۱۱۲۹۵ می‌باشد. اکنون مسأله را با اولویت سوم حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\min \quad & d_3^- + d_3^+ \\
s.t. \quad & -0.1278x_1 - 0.0157x_2 - 0.1914x_3 + d_1^- - d_1^+ + 30.3197 = 7.96637 \\
& 0.0429x_1 + 0.0199x_2 + d_2^- - d_2^+ + 3.1857 = 6.11295 \\
& 0.053x_1 + 0.0209x_2 + d_3^- - d_3^+ = -4.7449 \\
& 12x_1 + 17x_2 \leq 1400 \\
& 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 1000 \\
& 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 \leq 1750 \\
& 6x_1 + 16x_3 \leq 1325 \\
& 12x_2 + 7x_3 \leq 900 \\
& 9.5x_1 + 9.5x_2 + 4x_3 \geq 1075 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}$$

مقدار بهین این مسأله ۸.۱۷۸۴۹ و جواب این مسأله به‌صورت زیر است:

$$x_1 = 45.22077, \quad x_2 = 49.61184, \quad x_3 = 43.52256. \tag{۵۴.۳}$$

ما می‌توانیم جواب مسأله را تحت متر L_1 نتیجه بگیریم. در حقیقت مقدار مد هر یک از هدف‌ها به‌صورت زیر است.

$$f_1 = 7983.8673, \quad f_2 = 10057.32684, \quad f_3 = 9355.89525.$$

برای به‌دست آوردن مقدار مد، کافیست مقادیر به‌دست آمده از رابطه (۵۴.۳) را در هریک از توابع هدف مسأله (۴۴.۳) قرار دهیم سپس a_2 مقدار مد را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال برای تابع سوم داریم:

$$\begin{aligned}
& (10, 25, 70)x_1 + 100x_2 + 75x_3 = \\
& (10, 25, 70) \times 45.22077 + 100 \times 49.61184 + 75 \times 43.52256 = \\
& (8677.5837, 9355.89525, 11390.8299) \Rightarrow f^L_{3_{\alpha=1}} = 9355.89525.
\end{aligned}$$

با توجه به جدول ۱.۳ مشاهده می‌کنیم که تابع هدف سوم نزدیک به نقطه ایده‌آل است اما دو تابع هدف اول به مراتب خیلی دورتر از نقطه ایده‌آل هستند.

فصل ۴

روشی برای حل مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی

۱.۴ مقدمه

در این فصل یک روش جدید بر اساس نزدیک‌ترین بازه تقریبی عملگرها برای یک مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه با توابع هدف فازی مقدار ارائه می‌دهیم. ابتدا شرایط بهینگی کروش-کاهن-تاکر را برای یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه بازه‌ای مقدار ارائه می‌دهیم. برای این منظور از gH-مشتق‌پذیری توابع بازه‌ای مقدار استفاده می‌کنیم. در روش ارائه شده دو الگوریتم نقش مهمی دارند. الگوریتم اول نزدیک‌ترین بازه تقریبی، که تقریبی از یک عدد فازی است را می‌دهد و الگوریتم دوم با استفاده از شرایط کروش-کاهن-تاکر یک جواب بهینه پارتو برای مسأله برنامه‌ریزی بازه‌ای مقدار و یک جواب رضایت بخش برای مسأله فازی مقدار ارائه می‌دهد. مطالب این فصل از مراجع [۳۸، ۲۵] می‌باشد.

۲.۴ تعاریف و قضایای اولیه

۱.۲.۴ بازه‌های حقیقی

در این فصل فضای اعداد فازی از $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم ϕ نمایش کلاسی از همه بازه‌های بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد. یعنی

$$\phi = \{[a,b] | a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}.$$

برای $A \in \phi$، بازه بسته A را به‌صورت $A = [a^L, a^U]$ نمایش می‌دهیم که a^L و a^U به‌ترتیب کران‌های پایین و بالای A هستند. فرض کنید $A = [a^L, a^U]$ و $B = [b^L, b^U]$ در ϕ باشند داریم:

الف. $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = [a^L + b^L, a^U + b^U]$

ب. $-A = \{-a : a \in A\} = [-a^U, -a^L]$

بنابراین می‌بینیم که
$$A - B = A + (-B) = [a^L - b^U, a^U - b^L]$$

و

$$kA = \{ka : a \in A\} = \begin{cases} [ka^L, ka^U], & k \geq ۰, \\ [ka^U, ka^L], & k < ۰, \end{cases}$$

که در آن k یک عدد حقیقی است.

فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}^n$ و $B \subseteq \mathbb{R}^n$. متر هاسدورف بین A و B به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\}$$

که در آن $\|.\|$ نرم اقلیدسی[۱] تعریف شده به‌صورت
$$\|x\| = \sqrt{x_۱^۲ + \ldots + x_n^۲},$$

برای هر $x = (x_۱, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ است. اگر $A = [a^L, a^U]$ و $B = [b^L, b^U]$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند می‌بینیم که
$$d_H(A, B) = \max\{|a^L - b^L|, |a^U - b^U|\}. \qquad (۱.۴)$$

برای اثبات رابطه (۱.۴) فرض می‌کنیم A و B دو بازه مجزا باشند (برای حالت‌های دیگر نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود) پس داریم:
$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\| = \sup_{a \in A} \|a - b^L\| = \|a^L - b^L\| = |a^L - b^L|$$

و

$$\sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| = \sup_{b \in B} \|a^U - b\| = \|a^U - b^U\| = |a^U - b^U|$$

در نتیجه
$$d_H(A, B) = \max\{|a^L - b^L|, |a^U - b^U|\}.$$

متر تعریف شده در $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ به‌صورت زیر است
$$d_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sup d_H(\tilde{a}_\alpha, \tilde{b}_\alpha), \quad \forall\, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}),$$

که در آن d_H نمایش متر هاسدورف است. اکنون به معرفی مفهوم فاصله هاکاهارای تعمیم یافته (gH– فاصله) بین دو بازه حقیقی مقدار می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۴. برای هر $A, B \in \phi$ فاصله هاکاهارای تعمیم یافته[۲] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$A \ominus_{gH} B = C \Longleftrightarrow \begin{cases} A = B + C & \text{یا} \\ B = A + (-۱)C. \end{cases} \qquad (۲.۴)$$

---

[۱] Euclidean norm

[۲] Generalized Hukuhara difference

gH-فاصله خواص بسیاری دارد به عنوان مثال $A \ominus_{gH} A = \{0\}$. به‌علاوه اگر $A = [a,b]$ و $B = [c,d]$ آن‌گاه

$$A \ominus_{gH} B = \big[\min(a-c, b-d), \max(a-c, b-d)\big].$$

در ادامه به معرفی دو رابطه مرتب تعریف شده روی ϕ می‌پردازیم.

تعریف ۲.۲.۴. فرض کنید $A = [a^L, a^U]$ و $B = [b^L, b^U]$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند.

الف. $A \preceq_{LU} B$ اگر و تنها اگر $a^L \le b^L$ و $a^U \le b^U$.

ب. $A \prec_{LU} B$ اگر و تنها اگر $A \preceq_{LU} B$ و $A \neq B$. به‌طور معادل $A \prec_{LU} B$ اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} a^L < & b^L \\ a^U \le & b^U \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^L \le & b^L \\ a^U < & b^U \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^L < & b^L \\ a^U < & b^U \end{cases}$$

یعنی A کوچکتر از B یا B بزرگتر از A است.

منظور از رابطه $\preceq_{LU}$ در تعریف فوق در یک مسأله مینیمم‌سازی، اولویت تصمیم‌گیرنده برای کم‌تر کردن مینیمم هزینه و ماکزیمم هزینه است. بنابراین اگر $A \preceq_{LU} B$ در این‌صورت A به B ترجیح داده می‌شود و اگر مسأله ماکزیمم‌سازی باشد منظور از رابطه $\preceq_{LU}$ حداکثر کردن مینیمم سود و ماکزیمم سود می‌باشد بنابراین اگر $A \preceq_{LU} B$ در این‌صورت B به A ترجیح داده می‌شود.
مشاهده می‌کنیم که $\preceq_{LU}$ روی ϕ یک رابطه جزئا مرتب است. کافی است نشان دهیم $\preceq_{LU}$ در همه خاصیت‌های تعریف ۷.۷.۱ صدق می‌کند.
خاصیت اول. فرض می‌کنیم A یک بازه بسته در ϕ باشد پس $A = [a^L, a^U]$.

$$\forall A \in \phi \;\; A \preceq_{LU} A \Longleftrightarrow a^L \le a^L \quad \text{و} \quad a^U \le a^U$$

باتوجه به این‌که a^L و a^U اعداد حقیقی هستند رابطه فوق برقرار است.
خاصیت دوم. فرض می‌کنیم $A, B \in \phi$ و $A \preceq_{LU} B$ و $B \preceq_{LU} A$ داریم:

$$A \preceq_{LU} B \Longrightarrow a^L \le b^L \quad \text{و} \quad a^U \le b^U \tag{۳.۴}$$

و

$$B \preceq_{LU} A \Longrightarrow b^L \le a^L \quad \text{و} \quad b^U \le a^U \tag{۴.۴}$$

با توجه به رابطه‌های (۳.۴) و (۴.۴)، $a^L = b^L$ و $a^U = b^U$ لذا $A = B$.

تعریف ۳.۲.۴. بردار $A = (A_1, \ldots, A_r)$ یک بردار بازه‌ای مقدار است اگر برای هر A_k، $k = 1, \ldots, r$ داشته باشیم $A_k = [a_k^L, a_k^U]$.

تعریف ۴.۲.۴. فرض کنید $A = (A_1, \ldots, A_r)$ و $B = (B_1, \ldots, B_r)$ دو بردار بازه‌ای مقدار باشند.

الف. $A \preceq_{LU} B$ اگر و تنها اگر $A_k \preceq_{LU} B_k$ برای $k = 1, \ldots, r$.

ب. $A \prec_{LU} B$ اگر وتنها اگر $A_k \preceq_{LU} B_k$ برای $k = 1, \ldots, r$ و حداقل یک اندیس h وجود داشته باشد به‌طوری‌که $A_h \prec_{LU} B_h$.

فرض کنید $A = [a^L, a^U]$ یک بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشد. مرکز و عرض[۳] این بازه را به‌صورت

$$a^C = \frac{۱}{۲}(a^L + a^U) \quad \text{و} \quad a^S = (a^U - a^L)$$

محاسبه می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۴. فرض کنید $A = [a^L, a^U]$ و $B = [b^L, b^U]$ دو بازه بسته باشند.

الف . $A \preceq_{LS} B$ اگر و تنها اگر $a^L \leq b^L$ و $a^S \leq b^S$.

ب . $A \succeq_{LS} B$ اگر وتنها اگر $a^U \geq b^U$ و $a^S \leq b^S$.

از آن‌جاکه عرض یک بازه را می‌توان به‌عنوان عدم قطعیت، خطر و یا واریانس (اختلاف) در نظر گرفت، بنابراین یک بازه با عرض کم‌تر (یعنی خطای کمتر) و کران بالای بزرگ‌تر (کران پایین کوچک‌تر) برای یک مسأله ماکزیمم‌سازی (مینیمم‌سازی) مناسب‌تر است.

تعریف ۶.۲.۴. فرض کنید $A = (A_۱, \ldots, A_r)$ و $B = (B_۱, \ldots, B_r)$ دو بردار بازه‌ای مقدار باشند.

الف . $A \preceq_{LS} B$ اگر و تنها اگر $A_k \preceq_{LS} B_k$ برای $k = ۱, \ldots, r$.

ب . $A \prec_{LS} B$ اگر وتنها اگر $A_k \preceq_{LS} B_k$ برای $k = ۱, \ldots, r$ و حداقل یک اندیس h وجود داشته باشد به‌طوری‌که $A_h \prec_{LS} B_h$.

ج . $A \succeq_{LS} B$ اگر و تنها اگر $A_k \succeq_{LS} B_k$ برای $k = ۱, \ldots, r$.

د . $A \succ_{LS} B$ اگر وتنها اگر $A_k \succeq_{LS} B_k$ برای $k = ۱, \ldots, r$ و حداقل یک اندیس h وجود داشته باشد به‌طوری‌که $A_h \succ_{LS} B_h$.

قضیه ۷.۲.۴. *اگر $A \preceq_{LS} B$ آن‌گاه $A \preceq_{LU} B$.*

برهان. با استفاده از تعریف ۲.۲.۴ و ۵.۲.۴ داریم:

$$\begin{aligned} A \preceq_{LS} B &\iff a^L \leq b^L, a^S \leq b^S \\ &\iff a^L \leq b^L, a^U - a^L \leq b^U - b^L \\ &\implies a^L \leq b^L, a^U \leq b^U \\ &\iff A \preceq_{LU} B \end{aligned}$$

□

[۳] Width

۲.۲.۴ برخی از خواص توابع بازه‌ای مقدار

در این بخش برخی از خواص توابع بازه‌ای مقدار را بیان می‌کنیم برای اطلاعات بیشتر به مراجع [۳، ۱۱، ۳۸] ارجاع می‌دهیم.

تابع $F : \mathbb{R}^n \to \phi$ تعریف شده روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با برد ϕ یک تابع بازه‌ای مقدار نامیده می‌شود. تابع بازه‌ای مقدار F را می‌توانیم به‌صورت $F(x) = [f^L(x), f^U(x)]$ بنویسیم، که f^L و f^U توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ هستند و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ در خاصیت $f^L(x) \leq f^U(x)$ صدق می‌کنند.

تحدب

تعریف ۸.۲.۴. فرض کنید X یک زیرمجموعه محدب ناتهی از $\mathbb{R}^n$ و F تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی X باشد.

الف . گوییم F در x^*، LU-محدب است اگر برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داشته باشیم

$$F\big(\lambda x^* + (۱ - \lambda)x\big) \preceq_{LU} \lambda F(x^*) + (۱ - \lambda)F(x)$$

الف . گوییم F در x^*، LS-محدب است اگر برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داشته باشیم

$$F\big(\lambda x^* + (۱ - \lambda)x\big) \preceq_{LS} \lambda F(x^*) + (۱ - \lambda)F(x)$$

قضیه ۹.۲.۴. *فرض کنید X یک زیرمجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ و F یک تابع بازه‌ای مقدار روی X باشد. در این‌صورت نتایج زیر را داریم:*

الف. F در x^* LU-محدب است اگر و تنها اگر f^L و f^U در x^* محدب باشند.

ب. F در x^* LS-محدب است اگر و تنها اگر f^L و f^U در x^* محدب باشند.

ج. اگر F در x^* LS-محدب باشد آن‌گاه F در x^* LU-محدب است.

برهان. الف . فرض می‌کنیم f در x^*، LU-محدب باشد پس برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in (۰, ۱)$ داریم:

$$F\big(\lambda x^* + (۱ - \lambda)x\big) \preceq_{LU} \lambda F(x^*) + (۱ - \lambda)F(x)$$

از طرفی F یک تابع بازه‌ای مقدار است یعنی $F = [f^L, f^U]$ لذا طبق تعریف ۲.۲.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
& F\big(\lambda x^* + (۱ - \lambda)x\big) \preceq_{LU} \lambda F(x^*) + (۱ - \lambda)F(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & f^L\big(\lambda x^* + (۱ - \lambda)x\big) \leq \lambda f^L(x^*) + (۱ - \lambda)f^L(x) \\
& f^U\big(\lambda x^* + (۱ - \lambda)x\big) \leq \lambda f^U(x^*) + (۱ - \lambda)f^U(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & f^L \text{ و } f^U \text{ در } x^* \text{ محدب باشند.}
\end{aligned}$$

ب . مشابه قسمت الف ثابت می‌شود.

ج. با توجه به قسمت الف و ب واضح است.

□

حد و پیوستگی

تعریف ۱۰.۲.۴. فرض کنید F یک تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ و $A = [a^L, a^U]$ یک بازه در $\mathbb{R}$ باشند. برای $c \in \mathbb{R}^n$، $\lim_{x\to c} F(x) = A$ اگر برای هر $\epsilon > 0$، وجود داشته باشد $\delta > 0$ به‌طوری‌که برای $\|x - c\| < \delta$ داشته باشیم $d_H(F(x), A) < \epsilon$.

قضیه ۱۱.۲.۴. *فرض کنید F یک تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ و $A = [a^L, a^U]$ یک بازه در $\mathbb{R}$ باشند. $\lim_{x\to c} F(x) = A$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to c} f^L(x) = a^L$ و $\lim_{x\to c} f^U(x) = a^U$.*

برهان. با توجه به رابطه (۱.۴) و تعریف ۱۰.۲.۴ ثابت می‌کنیم. چون F یک تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ است پس $F = [f^L, f^U]$، هم‌چنین A یک بازه در $\mathbb{R}$ است پس $A = [a^L, a^U]$ لذا داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} F(x) = A &\iff \forall\epsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; s.t \;\; \|x - c\| < \delta \quad d_H(F(x), A) < \epsilon \\
&\iff \forall\epsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; s.t \;\; \|x - c\| < \delta \\
&\qquad \max\{|f^L(x) - a^L|, |f^U(x) - a^U|\} < \epsilon \\
&\iff \forall\epsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; s.t \;\; \|x - c\| < \delta \\
&\qquad |f^L(x) - a^L| < \epsilon \;\; \text{و} \;\; |f^U(x) - a^U| < \epsilon \\
&\iff \lim_{x\to c} f^L(x) = a^L \;\; \text{و} \;\; \lim_{x\to c} f^U(x) = a^U.
\end{aligned}$$

□

حال فرض کنید تابع بازه‌ای مقدار F روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد. به‌طور مشابه حد چپ و حد راست آن به‌ترتیب به‌صورت $\lim_{x\to c^-} F(x)$ و $\lim_{x\to c^+} F(x)$ تعریف می‌شود. هم‌چنین
$\lim_{x\to c^-} F(x) = A$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to c^-} f^L(x) = a^L$ و $\lim_{x\to c^-} f^U(x) = a^U$.
$\lim_{x\to c^+} F(x) = A$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to c^+} f^L(x) = a^L$ و $\lim_{x\to c^+} f^U(x) = a^U$.

تعریف ۱۲.۲.۴. فرض کنید F تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ باشد. گوییم F در $c \in \mathbb{R}^n$ پیوسته است اگر $\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$ یا به‌طور معادل گوییم F در x_0 پیوسته است اگر برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به‌طوری‌که $\|x - x_0\| < \delta$ نتیجه دهد $d_H(F(x), F(x_0)) < \epsilon$.

قضیه ۱۳.۲.۴. *تابع بازه‌ای مقدار F تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ در $c \in \mathbb{R}^n$ پیوسته است اگر و تنها اگر f^L و f^U در c پیوسته باشند.*

برهان. F تابعی بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ است پس $F(x) = [f^L(x), f^U(x)]$.

$$
\begin{aligned}
F \text{ در } c \in \mathbb{R}^n \text{ پیوسته است} &\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad \|x - c\| < \delta \quad d_H(F(x), F(c)) < \epsilon \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad \|x - c\| < \delta \\
&\qquad \max\{|f^L(x) - f(c)|, |f^U(x) - f(c)|\} < \epsilon \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad \|x - c\| < \delta \\
&\qquad |f^L(x) - f(c)| < \epsilon \text{ و } |f^U(x) - f(c)| < \epsilon \\
&\iff \lim_{x \to c} f^L(x) = f(c) \text{ و } \lim_{x \to c} f^U(x) = f(c).
\end{aligned}
$$

□

gH-مشتق‌پذیری

تعریف ۱۴.۲.۴. گوییم تابع $f(x)$ در x_0 مشتق‌پذیر است اگر $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ موجود و متناهی باشد.

تعریف ۱۵.۲.۴. فرض کنید f تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ و
$$x_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in X$$
یک ثابت باشد.

- الف . گوییم f در x_0 به‌طور ضعیف پیوسته مشتق‌پذیر است اگر همه مشتق‌های جزئی $(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}), ..., (\dfrac{\partial f}{\partial x_n})$ در x_0 وجود داشته باشند و در x_0 پیوسته باشند.
- ب . گوییم f در x_0، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است اگر همه مشتق‌های جزئی $(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}), ..., (\dfrac{\partial f}{\partial x_n})$ روی برخی از همسایگی‌های x_0 وجود داشته باشند و در x_0 پیوسته باشند.

تعریف ۱۶.۲.۴. فرض کنید F تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ و
$$x_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in X$$
یک ثابت باشد.

- الف . گوییم F در x_0 به‌طور ضعیف پیوسته مشتق‌پذیر است اگر توابع حقیقی مقدار f^L و f^U در x_0 به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند (که این نتیجه می‌دهد همه مشتق‌های جزئی f^L و f^U در x_0 وجود داشته باشند و در x_0 پیوسته باشند).
- ب . گوییم F در x_0، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است اگر همه مشتق‌های جزئی $(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}), ..., (\dfrac{\partial F}{\partial x_n})$ روی برخی از همسایگی‌های x_0 وجود داشته باشند و در x_0 (به مفهوم تابع بازه‌ای مقدار) پیوسته باشند.

تعریف ۱۷.۲.۴. فرض کنید A یک بازه حقیقی باشد. gH-مشتق تابع بازه‌ای مقدار $F : A \longrightarrow \phi$ در $a_\circ$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F'(a_\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{F(a_\circ + h) \ominus_{gH} F(a_\circ)}{h}, \qquad (۵.۴)$$

اگر $F'(a_\circ) \in \phi$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که در رابطه (۵.۴) صدق کند آن‌گاه گوییم تابع F در $a_\circ$، gH-مشتق‌پذیر است. اگر F در هر نقطه $a_\circ \in A$، gH-مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه گوییم F روی A، gH-مشتق‌پذیر است.

حالت کلی تعریف gH-مشتق برای توابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر می‌باشد.

تعریف ۱۸.۲.۴. فرض کنید F تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ و

$$x_\circ = (x_1^{(\circ)}, \dots, x_n^{(\circ)}) \in X$$

یک عنصر ثابت باشد.
تابع بازه‌ای مقدار h_i را به‌صورت $h_i(x_i) = F(x_1^{(\circ)}, \dots, x_{i-1}^{(\circ)}, x_i^{(\circ)}, x_{i-1}^{(\circ)}, \dots, x_n^{(\circ)})$ در نظر می‌گیریم.
اگر h_i در $x_i^{(\circ)}$، gH-مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه گوییم F در $x_i^{(\circ)}$، i-امین gH-مشتق جزئی دارد که با $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{gH}(x^{(\circ)})$ نمایش می‌دهیم و $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{gH}(x^{(\circ)}) = h_i'(x_i^{(\circ)})$.
هم‌چنین گوییم F در $x_i^{(\circ)}$، به‌طور پیوسته gH-مشتق‌پذیر است اگر همه gH-مشتق‌های جزئی

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{gH}(x^{(\circ)}), \dots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_{gH}(x^{(\circ)})$$

روی برخی همسایگی‌های $x^{(\circ)}$ وجود داشته باشند و در $x^{(\circ)}$ پیوسته باشند.

قضیه ۱۹.۲.۴. *[۳] فرض کنید F یک تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $X \subset \mathbb{R}^n$ باشد. اگر F در $x_\circ$ به‌طور پیوسته gH-مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $f^L + f^U$ در $x_\circ$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است.*

قضیه ۲۰.۲.۴. *[۳۴] فرض کنید F تابع بازه‌ای مقدار تعریف شده روی $X \subset \mathbb{R}^n$ و $F(x) = [f^L, f^U]$ باشد. در این‌صورت F در $x_\circ$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر f^L و f^U در $x_\circ$ به مفهوم عادی مشتق‌پذیر باشند.*

۳.۴ نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از یک عدد فازی

تعریف ۱.۳.۴. تقریب بازه‌ای یک عدد فازی، عملگر

$$C : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \phi$$

است به‌طوری‌که برای $\tilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

۱) $C(\tilde{a}) \subset supp\tilde{a}$

۲) $core(\tilde{a}) \subset C(\tilde{a})$

۳) $\forall\, \epsilon > ۰,\ \exists\, \delta > ۰,\ d_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}(\tilde{a}, \tilde{b}) < \delta \Rightarrow d_H\big(C(\tilde{a}), C(\tilde{b})\big) < \epsilon$

تعریف ۲.۳.۴. نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای[۴] از یک عدد فازی $\tilde{a}$، نسبت به متر $d_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$، یک تقریب بازه‌ای از $\tilde{a}$ به فرم $C_d(\tilde{a})$ است که مینیمم می‌کند $d_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}(\tilde{a}, C(\tilde{a}))$ را برای هر C متعلق به فضای عملگرهای تقریبی یک عدد فازی.

این به این معنی است که برای هر تقریب بازه‌ای $C(\tilde{a})$ از $\tilde{a}$ داریم:

$$d_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}(C_d(\tilde{a}), \tilde{a}) \leq d_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}(C(\tilde{a}), \tilde{a}).$$

ملاحظه ۳.۳.۴. *در تعریف بالا یک بازه $[a, b]$ به‌عنوان یک عدد فازی $\tilde{a}$ در نظرگرفته شده است که تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:*

$$u_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} ۱ & x \in [a, b] \\ ۰ & x \in o.w. \end{cases}$$

قضیه ۴.۳.۴. *تعریف می‌کنیم*

$$\begin{aligned} f^L :\ & [۰, ۱] \to \mathbb{R} \\ & \alpha \to f^L(\alpha) \ = \tilde{a}_L(\alpha) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f^U :\ & [۰, ۱] \to \mathbb{R} \\ & \alpha \to f^U(\alpha) \ = \tilde{a}_U(\alpha) \end{aligned}$$

در این‌صورت

$$C_d(\tilde{a}) = \left[\int_۰^۱ f^L(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \int_۰^۱ f^U(\alpha)\mathrm{d}\alpha \right],$$

این نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از عدد فازی $\tilde{a}$ نسبت به متر d نامیده می‌شود.

برهان. فرض می‌کنیم $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد و $[\tilde{a}_L(\alpha), \tilde{a}_U(\alpha)]$ مجموعه α-برش آن باشد.
فرض می‌کنیم

$$C_d(\tilde{a}) = [C_L, C_U]$$

یعنی

$$\big(C_d(\tilde{a})\big)_\alpha = [C_L, C_U], \quad \forall\, \alpha \in (۰, ۱],$$

پس

$$d(\tilde{a}, C_d(\tilde{a})) = \sqrt{\int_۰^۱ \big(\tilde{a}_L(\alpha) - C_L\big)^۲ \mathrm{d}\alpha + \int_۰^۱ \big(\tilde{a}_U(\alpha) - C_U\big)^۲ \mathrm{d}\alpha},$$

[۴] Nearest interval approximation

با توجه به این‌که d یک تابع پیوسته است برای مینیمم کردن $d(\tilde{a}, C_d(\tilde{a}))$ کافی است تابع $D(C_L, C_U) = (d^۲(\tilde{a}, C_d(\tilde{a})))$ را مینیمم کنیم. برای این منظور مشتقات جزئی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(C_L, C_U)}{\partial C_L} &= -۲\int_۰^۱ \big(\tilde{a}_L(\alpha) - C_L\big)\mathrm{d}\alpha \\ &= -۲\int_۰^۱ \tilde{a}_L(\alpha)\mathrm{d}\alpha + ۲C_L\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(C_L, C_U)}{\partial C_U} &= -۲\int_۰^۱ \big(\tilde{a}_U(\alpha) - C_U\big)\mathrm{d}\alpha \\ &= -۲\int_۰^۱ \tilde{a}_U(\alpha)\mathrm{d}\alpha + ۲C_U\end{aligned}$$

سپس باید دستگاه زیر را حل کنیم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial D(C_L, C_U)}{\partial C_L} = ۰ \quad \Rightarrow C_L = \int_۰^۱ \tilde{a}_L(\alpha)\mathrm{d}\alpha \quad (۱)\\[2mm] \dfrac{\partial D(C_L, C_U)}{\partial C_U} = ۰ \quad \Rightarrow C_U = \int_۰^۱ \tilde{a}_U(\alpha)\mathrm{d}\alpha \quad (۲)\end{cases}$$

به‌علاوه چون

$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial D^۲(C_L, C_U)}{\partial C_L^۲} & \dfrac{\partial D^۲(C_L, C_U)}{\partial C_U \partial C_L}\\[2mm] \dfrac{\partial D^۲(C_L, C_U)}{\partial C_L \partial C_U} & \dfrac{\partial D^۲(C_L, C_U)}{\partial C_U^۲}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲\end{bmatrix} = ۴ > ۰$$

و

$$\frac{\partial D^۲(C_L, C_U)}{\partial C_L^۲} = ۲ > ۰$$

یعنی ماتریس هسین آن معین مثبت است پس تابع محدب است و لذا C_L و C_U به ترتیب در رابطه‌های (۱) و (۲) مینیمم $D(C_L, C_U)$ و در نتیجه مینیمم $d\big(\tilde{a}, C_d(\tilde{a})\big)$ هستند. بنابراین بازه

$$C_d(\tilde{a}) = \left[\int_۰^۱ \tilde{a}_L(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \int_۰^۱ \tilde{a}_U(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]$$

نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از عدد فازی $\tilde{a}$ نسبت به متر d است. □

۱.۳.۴ الگوریتم پیدا کردن نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از یک عدد فازی

الگوریتم ۱:

۱. آغاز.

۲. $u_{\tilde{a}}(x)$ را بخوان.

۳. قرار بده $\inf\{x \in \mathbb{R} |\ u_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\} = \tilde{a}_L(\alpha)$ و $\sup\{x \in \mathbb{R} |\ u_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\} = \tilde{a}_U(\alpha)$ که در آن α یک پارامتر بین صفر و یک است.

۴. تعریف کنید $f^L(\alpha)=\tilde{a}_L(\alpha)$ و $f^U(\alpha)=\tilde{a}_U(\alpha)$.

۵. پیدا کنید $N^L_{\tilde{a}}=\int_0^1 f^L(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ و $N^U_{\tilde{a}}=\int_0^1 f^U(\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

۶. قرار دهید $C_d(\tilde{a})=\left[N^L_{\tilde{a}},N^U_{\tilde{a}}\right]$.

۷. چاپ کن $C_d(\tilde{a})$.

۸. توقف.

۴.۴ پیدا کردن یک جواب رضایت بخش برای مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه با توابع هدف فازی مقدار

۱.۴.۴ فرمول بندی مسأله

مسأله برنامه‌ریزی به شکل زیر را در نظر بگیرید.

$$(P1)\begin{cases} min\ \left(\tilde{f}_1(x),\ldots,\tilde{f}_k(x)\right) \\ s.t. \\ x\in X=\{x\in\mathbb{R}^n|\ g_i(x)\leq 0,\quad i=1,\ldots,m\} \end{cases} \tag{۶.۴}$$

که در آن $\tilde{f}_j$ برای $j=1,\ldots,k$ توابعی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ و g_i برای $i=1,\ldots,m$ توابعی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ هستند.

این مدل در برنامه‌های کاربردی مختلف از جمله منابع مدیریت آب [۹]، مسائل برنامه‌ریزی تولید [۱۶]، برنامه‌ریزی تولید و نگهداری نیروگاه [۱۰] مورد استفاده قرار می‌گیرند.

بدون کاستن از کلیت در این حالت فرض کردیم محدودیت‌های مسأله قطعی باشند. در حقیقت متون و مقالاتی وجود دارند که محدودیت‌های فازی را به محدودیت‌های قطعی تبدیل می‌کند به عنوان مثال مراجع [۲۴، ۷] را ببینید.

مسأله (۶.۴) یک مسأله با چندین تابع هدف فازی است بنابراین یک جواب بهینه قطعی برای آن وجود ندارد و ما باید به دنبال یک جواب رضایت بخش برای آن باشیم. علاوه بر این روش‌های موجود برای حالت‌های قطعی مانند روش مجموع وزن‌دار را نمی‌توانیم استفاده کنیم مگر این‌که آن‌ها را متناسب با مسائل فازی بیان کنیم. در این‌جا مسأله اصلی، تبدیل به شرایط قطعی با استفاده از تبدیلات تقریبی است.

از مفهوم ''نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از یک عدد فازی'' برای به‌دست آوردن تقریبی مناسب برای مسأله (۶.۴) استفاده می‌کنیم.

یک جواب از مسأله قطعی به‌دست آمده، به عنوان یک جواب رضایت بخش برای مسأله فازی (۶.۴) در نظر می‌گیریم. قابل توجه است که ساختار مسأله قطعی به‌دست آمده از مسأله (۶.۴)، از لحاظ خطی یا غیرخطی بودن همان ساختار مسأله (۶.۴) است. تنها یک تفاوت بین ساختار مسأله (۶.۴) و مسأله

به‌دست آمده از آن وجود دارد و آن این است که پارامترهای مسأله (۶.۴) فازی هستند در حالی که پارامترهای تبدیل یافته آن بازه‌ای مقدارند.

۲.۴.۴ جانشین قطعی $(P۱)$

برای پیدا کردن یک جواب برای مسأله (۶.۴) آن‌را با مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه بازه‌ای زیر تقریب می‌زنیم

$$(P۲)\begin{cases} min & \big(F_۱(x),\dots,F_k(x)\big) \\ s.t. & x\in X \end{cases} \qquad (۷.۴)$$

که در آن $F_i(x)=[f_i^L(x),f_i^U(x)]$ نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای[۵] از $f_i(x)$ است. به یاد داشته باشید که نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای C_d دارای خواص زیر است:

الف. $C_d(\tilde{a})\subset supp\tilde{a}$

ب. $core(\tilde{a})\subset C_d(\tilde{a})$

ج. C_d عملگر پیوسته است.

علاوه بر این علت نارضایتی از عملگرهای غیرفازی‌سازی که یک عدد فازی را به عدد حقیقی تبدیل می‌کنند این است که منجر به از دست دادن اطلاعات زیادی می‌شود. هم‌چنین عملگر بهینه (NIA) به مفهوم نزدیک‌ترین فاصله تقریبی از یک عدد فازی است.

۳.۴.۴ مفهوم جواب‌های بهینه پارتو

بهینگی پارتو برای $(P۲)$

در ادامه به معرفی مفهوم بهینگی پارتو برای مسأله (۷.۴) می‌پردازیم. همان‌طور که انتظار داریم این مفهوم به رابطه مرتب تعریف شده روی ϕ بستگی دارد.

تعریف ۱.۴.۴. گوییم $x^*\in X$ یک جواب LU-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است اگر وجود نداشته باشد هیچ $x\in X$ به‌طوری‌که برای هر $i=۱,\dots,k$، $F_i(x)\leq_{LU}F_i(x^*)$ و حداقل برای یک اندیس مانند $h\in\{۱,\dots,k\}$، $F_h(x)<_{LU}F_h(x^*)$.

تعریف ۲.۴.۴. گوییم $x^*\in X$ یک جواب LS-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است اگر وجود نداشته باشد هیچ $x\in X$ به‌طوری‌که برای هر $i=۱,\dots,k$، $F_i(x)\leq_{LS}F_i(x^*)$ و حداقل برای یک اندیس مانند $h\in\{۱,\dots,k\}$، $F_h(x)<_{LU}F_h(x^*)$.

قضیه ۳.۴.۴. *اگر x^* یک جواب LU-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) باشد آن‌گاه یک جواب LS-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است.*

---
[5] NIA

برهان. فرض می‌کنیم x^* یک جواب LU-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) باشد اما جواب LS-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) نباشد.

پس وجود دارد $x \in X$ به‌طوری‌که برای هر $i = 1, \ldots, k$، $F_i(x) \leq_{LS} F_i(x^*)$ و حداقل برای یک اندیس مانند $h \in \{1, \ldots, k\}$، $F_h(x) <_{LS} F_h(x^*)$. لذا با توجه به قضیه ۷.۲.۴ وجود دارد $x \in X$ به‌طوری‌که برای هر $i = 1, \ldots, k$، $F_i(x) \leq_{LU} F_i(x^*)$ و حداقل برای یک اندیس مانند $h \in \{1, \ldots, k\}$، $F_h(x) <_{LU} F_h(x^*)$ که این با LU-بهینه پارتو بودن x^* برای مسأله (۷.۴) تناقض دارد پس فرض خلف باطل و x^* جواب LS-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است. □

تعریف ۴.۴.۴. الف. گوییم $x^* \in X$ یک جواب LU-رضایت بخش[۶] از مسأله (۶.۴) است اگر یک جواب LU-بهینه پارتو از مسأله (۷.۴) باشد.

ب. گوییم $x^* \in X$ یک جواب LS-رضایت بخش از مسأله (۶.۴) است اگر یک جواب LS-بهینه پارتو از مسأله (۷.۴) باشد.

قضیه ۵.۴.۴. *اگر x^* یک جواب LU-رضایت بخش از مسأله (۶.۴) باشد آن‌گاه یک جواب LS-رضایت بخش از مسأله (۶.۴) است.*

برهان. فرض می‌کنیم x^* یک جواب LU-رضایت بخش از مسأله (۶.۴) باشد پس طبق تعریف ۴.۴.۴ یک جواب LU-بهینه پارتو از مسأله (۷.۴) است لذا طبق قضیه ۳.۴.۴، x^* یک جواب LS-بهینه پارتو از مسأله (۷.۴) است پس طبق تعریف ۴.۴.۴ یک جواب LS-رضایت بخش از مسأله (۶.۴) است. □

۴.۴.۴ شرایط بهینگی کروش-کاهن-تاکر برای جواب‌های بهینه پارتو

ابتدا شرایط بهینگی کروش-کاهن-تاکر را برای مسأله بهینه‌سازی قطعی معرفی می‌کنیم برای اطلاعات بیشتر به [۶] ارجاع می‌دهیم. فرض کنید f و g_i، $i = 1, \ldots, n$، توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ باشند. مسأله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} (P) \qquad & min \quad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \\ & s.t \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

فرض کنید توابع محدودیت g_i برای هر $i = 1, \ldots, n$، روی $\mathbb{R}^n$ محدب باشند در این‌صورت مجموعه شدنی $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_i(x) \leq 0 \ \ i = 1, \ldots, n\}$ یک زیرمجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ است.

قضیه ۶.۴.۴. *مسأله بهینه‌سازی غیرخطی (۸.۴) را در نظر بگیرید. فرض کنید ناحیه شدنی آن (یعنی S) مجموعه‌ای محدب و f روی S محدب باشد در این‌صورت هر نقطه مینیمم موضعی مسأله یک جواب بهینه (مینیمم سراسری) برای آن است.*

[۶] Satisficing

برهان. به برهان خلف فرض می‌کنیم نقطه‌ای مینیمم موضعی مانند $\bar{x} \in S$ موجود باشد که جواب بهینه مسأله یعنی مینیمم سراسری f نباشد. در این‌صورت نقطه‌ای مانند $x \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x) < f(\bar{x})$. چون S محدب است پس به ازای هر $\alpha \in (۰, ۱)$ داریم:

$$\hat{x} = \alpha\bar{x} + (۱ - \alpha)x \in S$$

و چون f روی S محدب است داریم:

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &\leq \alpha f(\bar{x}) + (۱ - \alpha)f(x) \\ &< \alpha f(\bar{x}) + (۱ - \alpha)f(\bar{x}) = f(\bar{x}) \end{aligned}$$

بنابراین اگر α به قدر کافی به یک نزدیک انتخاب شود $\hat{x}$ به قدر کافی به $\bar{x}$ نزدیک خواهد بود و $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$ لذا $\bar{x}$ نمی‌تواند نقطه مینیمم موضعی f باشد. این تناقض حکم را ثابت می‌کند. □

قضیه ۷.۴.۴. *[۱۸] فرض کنید توابع محدودیت $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ برای هر $i = ۱, \ldots, m$ روی $\mathbb{R}^n$ محدب باشند. فرض کنید $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad g_i(x) \leq ۰ \quad i = ۱, \ldots, n\}$ یک مجموعه شدنی و نقطه $x^* \in X$. فرض کنید تابع هدف $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ در x^* محدب و f و g_i، $i = ۱, \ldots, m$ در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند. اگر ضرایب (لاگرانژ) $\mathbb{R} \ni \mu_i \geq ۰$ برای $i = ۱, \ldots, m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که*

الف. $\nabla f(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$

ب. $\mu_i g_i(x^*) = ۰$ *برای هر* $i = ۱, \ldots, m$

در این‌صورت x^* جواب بهینه مسأله (۸.۴) است.

اکنون مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه با توابع هدف قطعی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &min \quad f(x) = \big(f_۱(x), \ldots, f_r(x)\big) \\ &s.t \quad g_i(x) \leq ۰ \quad i = ۱, \ldots, m, \end{aligned} \qquad (۹.۴)$$

که در آن توابع محدودیت حقیقی مقدار $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ برای $i = ۱, \ldots, m$ روی $\mathbb{R}^n$ محدب هستند. شرایط بهینگی کروش-کاهن-تاکر برای این مسأله به‌صورت زیر است.

قضیه ۸.۴.۴. *فرض کنید توابع محدودیت حقیقی مقدار $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ برای $i = ۱, \ldots, m$ روی $\mathbb{R}^n$ محدب و در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند. فرض کنید*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad g_i(x) \leq ۰ \quad i = ۱, \ldots, n\}$$

مجموعه شدنی و $x^* \in X$ باشند. فرض کنید $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ برای $k = ۱, \ldots, r$ روی $\mathbb{R}^n$ محدب و در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند. در این‌صورت اگر ضرایب (لاگرانژ) $\mathbb{R} \ni \lambda_k > ۰$ برای $k = ۱, \ldots, r$ و $\mathbb{R} \ni \mu_i \geq ۰$ برای $i = ۱, \ldots, m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

۱. $\sum_{k=۱}^{r} \lambda_k \nabla f_k(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = ۰$

۲. $\mu_i g_i(x^*) = 0$ *برای هر* $i = 1, \ldots, m$

در این‌صورت x^* *یک جواب بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه (۹.۴) است.*

برهان. برای اثبات ابتدا تابع حقیقی مقدار $\bar{f}(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{f}(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_r f_r(x), \tag{۱۰.۴}$$

طبق فرض توابع f_k برای $k = 1, \ldots, r$ در x^* به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر و محدب‌اند لذا تابع حقیقی $\bar{f}(x)$ در x^* محدب و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است. از آن‌جاکه

$$\bigtriangledown \bar{f}(x) = \lambda_1 \bigtriangledown f_1(x) + \lambda_2 \bigtriangledown f_2(x) + \cdots + \lambda_r \bigtriangledown f_r(x), \tag{۱۱.۴}$$

طبق شرط ۱ و ۲ و قضیه ۷.۴.۴ مشاهده می‌کنیم که x^* یک جواب بهینه از تابع هدف حقیقی $\bar{f}(x^*)$ با محدودیت‌های مسأله (۹.۴) است یعنی

$$\bar{f}(x^*) \leq \bar{f}(\bar{x}), \qquad \forall \bar{x}(\neq x^*) \in X.$$

حال با برهان خلف فرض می‌کنیم x^* جواب بهینه پارتو برای مسأله (۹.۴) نباشد. پس عنصر $\bar{x} \in X$ و اندیس $h \in \{1, \ldots, r\}$ وجود دارند به‌طوری‌که $f_h(\bar{x}) < f_h(x^*)$. بنابراین از رابطه (۱۰.۴) و مفهوم رابطه $<$ و این‌که $\lambda_k > 0$ برای $k = 1, \ldots, r$ می‌بینیم که $\bar{f}(\bar{x}) < \bar{f}(x^*)$ که با $\bar{f}(x^*) \leq \bar{f}(\bar{x})$ تناقض دارد. این نشان می‌دهد که x^* یک جواب بهینه پارتو برای مسأله (۹.۴) است. □

در ادامه شرایط بهینگی کروش-کاهن-تاکر را برای جواب‌های بهینه پارتو مسأله (۷.۴) بیان می‌کنیم. این شرایط بر پایه gH-مشتق‌پذیری توابع بازه‌ای مقدار است.

قضیه ۹.۴.۴. *مسأله (۷.۴) را در نظر بگیرید و فرض کنید توابع* $F_i : \mathbb{R}^n \to \phi$ *برای* $i = 1, \ldots, k$ *محدب و در* x^* *به‌طور پیوسته* gH*-مشتق‌پذیر باشند. اگر* $f_i^L + f_i^U$ *برای* $i = 1, \ldots, k$ *توابعی محدب باشند و اگر ضرایب* $\lambda_i^* > 0$ *برای* $i = 1, \ldots, k$ *و* $\mu_j^* \geq 0$ *برای* $j = 1, \ldots, m$ *وجود داشته باشند به‌طوری‌که*

الف. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \bigtriangledown (f_i^L + f_i^U)(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \bigtriangledown g_j(x^*) = 0$

ب. $\mu_j^* g_j(x^*) = 0$ *برای هر* $j \in \{1, \ldots, m\}$

در این‌صورت x^* *یک جواب* LU*-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است.*

برهان. توابع حقیقی مقدار $h_i(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_i(x) = \lambda_i^*(f_i^L + f_i^U)(x), \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

چون طبق فرض $F_i(x)$ برای $i = 1, \ldots, k$ توابعی محدب هستند پس طبق قضیه ۹.۲.۴، f_i^L و f_i^U و در نتیجه $f_i^L + f_i^U$ برای هر i محدب هستند. بنابراین توابع h_i برای هر $i = 1, \ldots, m$ محدب هستند. از آن‌جا که F_i برای هر $i = 1, \ldots, k$ در x^*، gH-مشتق‌پذیرند با استفاده از قضیه ۱۳.۲.۴، h_i برای

$i=1,\ldots,k$ در x^* مشتق‌پذیرند. چون $\bigtriangledown h_i(x^*) = \lambda_i^* \bigtriangledown (f_i^L + f_i^U)(x^*)$ با استفاده از شرایط الف و ب داریم:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \bigtriangledown h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \bigtriangledown g_j(x^*) = 0$$

و

$$\mu_j^* g_j(x^*) = 0, \quad \forall j \in \{1,\ldots,m\},$$

پس طبق شرایط بهینگی کروش-کاهن-تاکر برای مسأله چندهدفه حقیقی مقدار، x^* یک جواب بهینه پارتو برای مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه زیر است:

$$(P3)\begin{cases} min & (h_1(x),\ldots,h_k(x)) \\ s.t. & x \in X. \end{cases} \tag{۱۲.۴}$$

حال فرض می‌کنیم x^* جواب LU-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) نباشد. در این‌صورت وجود دارد $x \in X$ به‌طوری‌که $F_i(x) \leq_{LU} F_i(x^*)$ برای هر $i=1,\ldots,k$ و حداقل برای یک اندیس مانند $h \in \{1,\ldots,m\}$، $F_h(x) < F_h(x^*)$. این معادل است با این‌که، وجود دارد $x \in X$ به‌طوری‌که برای هر i یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

$$\begin{cases} f_i^L(\bar{x}) < & f_i^L(x^*) \\ f_i^U(\bar{x}) \leq & f_i^U(x^*) \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} f_i^L(\bar{x}) \leq & f_i^L(x^*) \\ f_i^U(\bar{x}) < & f_i^U(x^*) \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} f_i^L(\bar{x}) < & f_i^L(x^*) \\ f_i^U(\bar{x}) < & f_i^U(x^*) \end{cases}$$

و این یعنی $h_i(x) < h_i(x^*)$ که با بهینه پارتو بودن x^* برای مسأله (۱۲.۴) تناقض دارد لذا فرض خلف باطل و x^* جواب LU-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است. □

نتیجه ۱۰.۴.۴. *با فرضیات قضیه ۹.۴.۴، x^* یک جواب LS-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است.*

برهان. طبق قضیه ۹.۴.۴، x^* یک جواب LU-بهینه پارتو از مسأله (۷.۴) است و طبق قضیه ۳.۴.۴ هر جواب LU-بهینه پارتو از مسأله (۷.۴) یک جواب LS-بهینه پارتو برای مسأله (۷.۴) است. □

نتیجه ۱۱.۴.۴. *با فرضیات قضیه ۹.۴.۴، x^* یک جواب LU-رضایت بخش و LS-رضایت بخش از مسأله (۶.۴) است.*

برهان. طبق قضیه ۹.۴.۴، x^* یک جواب LU-بهینه پارتو از مسأله (۷.۴) است پس طبق تعریف ۴.۴.۴، x^* یک جواب LU-رضایت بخش از مسأله (۶.۴) است. برای LS-رضایت بخش نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود. □

۵.۴.۴ الگوریتمی برای پیدا کردن جواب رضایت بخش برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی $P1$

با استفاده از الگوریتم زیر یک جواب رضایت بخش برای مسأله $P1$ پیدا می‌کنیم.

الگوریتم۲:

- ورودی: m و k.
- توابع هدف : $\tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_k(x)$
- توابع محدودیت : $g_1(x), \ldots, g_m(x)$

الف: پیدا کردن نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از $\tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_k(x)$:

مرحله ۱) قرار دهید $l = 1$

مرحله ۲) تا زمانی که از حلقه خارج شوید ادامه دهید
اگر $l \leq k$ با ورودی $\tilde{f}_l(x)$ برو به الگوریتم۱ و f_l^L و f_l^U را پیدا کنید. در غیر این‌صورت از حلقه خارج شوید و به مرحله ۳ بروید.

ب: پیدا کردن یک جواب رضایت بخش برای $(P1)$.

مرحله ۳) مقادیر $\lambda_i^* > 0$ را برای $i = 1, \ldots, k$ ثابت در نظر بگیرید.

مرحله ۴) $\mu_j^* \geq 0$ برای $j = 1, \ldots, m$ را طوری انتخاب کنید که سیستم (S) شدنی باشد.

$$(S)\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \bigtriangledown (f_i^L + f_i^U)(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \bigtriangledown g_j(x) = 0 \\ \mu_j^* g_j(x) = 0 \quad j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

مرحله ۵) سیستم (S) را حل کنید فرض کنید x^* جواب آن باشد. برو به مرحله ۷.

مرحله ۶) اگر چنین $\{\mu_j^*\}_j$ وجود نداشت برو به مرحله ۸.

مرحله ۷) x^* یک جواب رضایت بخش از $(P1)$ است.

مرحله ۸) $(P1)$ جواب رضایت بخش ندارد.

مرحله ۹) توقف.

۵.۴ مثال کاربردی

در این بخش یک مثال عددی را با استفاده از این روش ارائه می‌دهیم.
مسأله چندهدفه فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} min \quad & (\tilde{c}_1^1 x_1 + \tilde{c}_2^1 x_2, \tilde{c}_1^2 x_1 + \tilde{c}_2^2 x_2) \\ s.t. \quad & -x_1 - x_2 \leq -6 \\ & -2x_1 - x_2 \leq -9 \end{aligned} \qquad (13.4)$$

که در آن $\tilde{c}_j^l$ برای $j = 1, 2$ و $l = 1, 2$ اعداد فازی با تابع عضویت به‌صورت زیر هستند:

$$\mu_{\tilde{c}_1^1}(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \in [0/5, 1] \\ -2x + 3 & x \in [1, 1/5] \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{c}_2^1}(x)=\begin{cases} 5x-9 & x\in[1.8,2] \\ -x+3 & x\in[2,3] \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{c}_1^2}(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x\in[0,2] \\ -x+3 & x\in[2,3] \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{c}_2^2}(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x\in[1,3] \\ 0 & o.w \end{cases}$$

با استفاده از الگوریتم۱ نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از اعداد فازی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:
نزدیک‌ترین تقریب بازه‌ای از $\tilde{c}_1^1$:

* $\mu_{\tilde{c}_1^1}$ را بخوان.

$$2x-1\geq\alpha \;\;\rightarrow\;\; x\geq\frac{\alpha+1}{2}$$
$$-2x+3\geq\alpha \;\;\rightarrow\;\; x\leq\frac{3-\alpha}{2}$$

* قرار دهید

$$\inf\{x\in\mathbb{R}|\;\mu_{\tilde{c}_1^1}\geq\alpha\}=\tilde{c}_\alpha^L=\frac{\alpha+1}{2}$$
$$\sup\{x\in\mathbb{R}|\;\mu_{\tilde{c}_1^1}\geq\alpha\}=\tilde{c}_\alpha^U=\frac{3-\alpha}{2}$$

که در آن α یک پارامتر بین صفر و یک است.

* تعریف کنید: $f^L(\alpha)=\tilde{c}_\alpha^L$ و $f^U(\alpha)=\tilde{c}_\alpha^U$.

* پیدا کنید:

$$N_{\tilde{c}_1^1}^L=\int_0^1 f^L(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\frac{\alpha+1}{2}\mathrm{d}\alpha=0.75$$
$$N_{\tilde{c}_1^1}^U=\int_0^1 f^U(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\frac{3-\alpha}{2}\mathrm{d}\alpha=1.25$$

* قرار دهید:

$$C_d(\tilde{c}_1^1)=[N_{\tilde{c}_1^1}^L,N_{\tilde{c}_1^1}^U]=[0.75,1.25]$$

به همین ترتیب برای $\tilde{c}_2^1$ و $\tilde{c}_1^2$ و $\tilde{c}_2^2$ داریم:

$$C_d(\tilde{c}_2^1)=[N^L_{\tilde{c}_2^1},N^U_{\tilde{c}_2^1}]=[\int_0^1\frac{\alpha+9}{5}\mathrm{d}\alpha,\int_0^1(3-\alpha)\mathrm{d}\alpha]=[1/9,2/5],$$
$$C_d(\tilde{c}_1^2)=[N^L_{\tilde{c}_1^2},N^U_{\tilde{c}_1^2}]=[\int_0^1 2\alpha\mathrm{d}\alpha,\int_0^1(3-\alpha)\mathrm{d}\alpha]=[1,2/5],$$
$$C_d(\tilde{c}_2^2)=[N^L_{\tilde{c}_2^2},N^U_{\tilde{c}_2^2}]=[\int_0^1 \alpha\mathrm{d}\alpha,\int_0^1(3-2\alpha)\mathrm{d}\alpha]=[0/5,2],$$

لازم به ذکر است که این بازه شامل کانون و پشتیبان عدد فازی متناظر است.
حال سیستم (S) را برای مسأله (۱۳.۴) به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{cases}\lambda_1\left[\begin{pmatrix}0/75\\1/9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/25\\2/5\end{pmatrix}\right]+\lambda_2\left[\begin{pmatrix}1\\0/5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/5\\2\end{pmatrix}\right]+\mu_1\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=0\\ \mu_1(-x_1-x_2+6)=0\\ \mu_2(-2x_1-x_2+9)=0\\ \lambda_1>0,\lambda_2>0,\mu_1\geq 0,\mu_2\geq 0\end{cases}\tag{14.4}$$

بنابراین اگر پیدا کنیم $\lambda_1^*,\lambda_2^*>0$ و $\mu_1^*,\mu_2^*\geq 0$ و $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ به‌طوری‌که $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\mu_1^*,\mu_2^*,x_1^*,x_2^*)$ در سیستم (۱۴.۴) صدق کند در این‌صورت طبق نتیجه ۱۱.۴.۴، (x_1^*,x_2^*) یک جواب رضایت بخش از مسأله (۱۳.۴) است.

برای $\lambda_1^*=\lambda_2^*=1$ معادله (۱۴.۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mu_1+\mu_2=0/75+1/25+1+2/5=5/5$$
$$2\mu_1+\mu_2=1/9+2/5+2=6/9$$

که نتیجه می‌دهد: $\mu_1^*=1/4>0$ و $\mu_2^*=4/1>0$

حال این مقادیر را در برابری دوم و سوم از معادله (۱۴.۴) قرار می‌دهیم داریم:

$$\begin{matrix}x_1+x_2=6\\2x_1+x_2=9\end{matrix}\Rightarrow x^*=(3,3)$$

می‌بینیم که بردار $(1,1,1/4,4/1,3,3)$ یک جواب از معادله (۱۴.۴) است. بنابراین $x^*=(3,3)$ یک جواب رضایت بخش از مسأله (۱۳.۴) است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای آتی

نتیجه‌گیری

وابستگی شدید میزان سود و زیان در سرمایه گذاری‌ها در شرایط واقعی که پارامترها و عوامل مختلف شامل عدم قطعیت هستند، موجب بروز عدم اطمینان مالی و پیچیدگی‌های فراوانی در تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران شده است. بنابراین سرمایه‌گذاران همواره برای به‌دست آوردن بازده بیشتر به دنبال روش‌های کاراتر برای مواجهه با عدم قطعیت می‌باشند. پژوهشگران روش‌های گوناگونی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی و تولید همه و یا حداقل قسمتی از مجموعه کارا ارائه داده‌اند. از آنجا که مفهوم جواب‌ها توسط محققان مختلف، متفاوت است این روش‌ها قابل مقایسه نیستند. هدف ما در این پایان‌نامه بررسی برخی از روش‌های حل این‌گونه مسائل است. به‌عنوان مثال روش‌های اسکالرسازی بر اساس مفهوم مخروط‌های محدب و تابع محاطی، روش مجموع وزین، روش مینیمم فاصله فازی و روش تقریب بازه‌ای. در روش‌های اسکالرسازی بر اساس مفهوم مخروط محدب و تابع محاطی از دو مخروط متفاوت استفاده کرده‌ایم که مخروط‌های تعریف شده باید با درون ناتهی باشند. با استفاده از مخروط اول مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی به یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه قطعی متناهی تبدیل می‌شود که می‌توان آن‌را با روش‌هایی که قبلا آموخته‌ایم حل کرد. حال اگر از مخروط دوم برای حل مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی استفاده کنیم در نهایت به یک مسأله برنامه‌ریزی نیمه نامتناهی می‌رسیم که با روش‌های معمولی قابل حل نیستند. در روش مجموع وزین ابتدا با استفاده از تابع محاطی و تابع غیرفازی‌سازی مسأله را به یک مسأله چندهدفه معمولی تبدیل می‌کنیم سپس با استفاده از روش مجموع وزین برای مسائل چندهدفه معمولی مسأله را به یک مسأله تک‌هدفه تبدیل می‌کنیم که با روش سیمپلکس قابل حل است در این روش به ناتهی بودن درون مخروط‌های تعریف شده نیازی نداریم. روش مینیمم سازی فاصله فازی شامل دو مرحله است ابتدا یک مینیمم فاصله فازی را با حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به‌دست می‌آوریم. سپس نشان می‌دهیم این مینیمم فاصله فازی دارای کیفیت و خطای مناسب‌تری نسبت به مدل‌هایی است که بر اساس فاصله معمولی هستند. ویژگی دیگر این روش این است که به ما اجازه می‌دهد اطلاعات فراهم شده توسط پارامترهای فازی را تا نزدیکی پایان فرآیند جواب حفظ کنیم. در روش تقریب بازه‌ای که در فصل آخر به آن اشاره شده مسأله فازی را با یک مسأله بازه‌ای مقدار تقریب می‌زنیم و رابطه بین جواب‌های بهین مسأله بازه‌ای و جواب‌های رضایت بخش مسأله فازی را بیان می‌کنیم.

پیشنهادات

- ارائه روش‌های اسکالرسازی بر اساس مخروط‌های شبه محدب
- استفاده از متر L_1 و L_∞ به‌طور همزمان در روش مینیمم فاصله فازی
- استفاده از تابع محاطی برای حل مسأله چندهدفه فازی در روش تقریب بازه‌ای
- پیدا کردن جواب کارای اکید برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه فازی با استفاده از روش‌های ارائه شده
- بررسی کاربرد روش‌های ارائه شده در زنجیره تأمین
- به‌کار بردن روش‌های ارائه شده برای اعداد فازی نوع ۲

مراجع

[1] Apostol, T. M. (1964). Mathematical analysis. Reading: Addison-Wesley Publishing Company.

[2] Arenas, M. M., Bilbao, A., Uría, M. V. R., Jimenez, M. (1998). A theory of possibility approach to the solution of a fuzzy linear programming. In Applied Decision Analysis (pp. 147-157). Springer Netherlands.

[3] Aubin, J. P., Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analysis. Systems and Control: Foundations and Applications, vol. 2.

[4] Bardossy, A. (1984). Mathematics of composite programming. Working Paper, Tiszadata, Mikó u. 1. 1012, Budapest, Hungary.

[5] Bardossy, A., Bogardi, I. (1983). Network design for the spatial estimation of environmental variables. Applied Mathematics and Computation, 12(4), 339-365.

[6] Bazara, M. S., and Shetty, C. M. (1979). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, Atlanta, Georgia: John Wily Sons.

[7] Bhaskar, T., Sundararajan, R., Krishnan, P. G. (2009). A fuzzy mathematical programming approach for cross-sell optimization in retail banking. Journal of the Operational Research Society, 60(5), 717-727.

[8] Blasco, F., Cuchillo-Ibáñez, E., Morón, M. A., Romero, C. (1999). On the monotonicity of the compromise set in multicriteria problems. Journal of optimization theory and applications, 102(1), 69-82.

[9] Bravo, M., Gonzalez, I. (2009). Applying stochastic goal programming: a case study on water use planning. European Journal of Operational Research, 196(3), 1123-1129.

[10] Canto, S. P. (2008). Application of Benders' decomposition to power plant preventive maintenance scheduling. European journal of operational research, 184(2), 759-777.

[11] Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., and Jiménez-Gamero, M. D. (2011). Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions. Information Sciences, 181(11), 2177-2188.

[12] Cochrane, J. L., Zeleny, M. (1973). Multiple criteria decision making. Univ of South Carolina Pr.

[13] Delgado, M., Vila, M. A., Voxman, W. (1998). A fuzziness measure for fuzzy numbers: applications. Fuzzy Sets and Systems, 94(2), 205-216.

[14] Delgado, M., Vila, M. A., Voxman, W. (1998). On a canonical representation of fuzzy numbers. Fuzzy sets and systems, 93(1), 125-135.

[15] Ehrgott, M. (2006). Multicriteria optimization. Springer Science Business Media.

[16] Escudero, L. F., Kamesam, P. V., King, A. J., Wets, R. J. (1993). Production planning via scenario modelling. Annals of Operations Research, 43(6), 309-335.

[17] Hettich, R., Kortanek, K. O. (1993). Semi-infinite programming: theory, methods, and applications. SIAM review, 35(3), 380-429.

[18] Horst, R., Pardalos, P. M., Van Thoai, N. (2000). Introduction to global optimization. Springer Science and Business Media.

[19] Ishibuchi, H., Tanaka, H. (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. European Journal of Operational Research, 48(2), 219-225.

[20] Jahn, J. (1986). Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces. Frankfurt, West Germany: Lang.

[21] Kaleva, O. (1990). The calculus of fuzzy valued functions. Applied Mathematics Letters, 3(2), 55-59.

[22] Klir, G. J., Folger, T. A. Fuzzy sets, uncertainty, and information. Hall1988.

[23] Klir, G. J., Folger, T. A. (1988). Fuzzy sets, uncertainty, and information.

[24] Luhandjula, M. K. (1989). Fuzzy optimization: an appraisal. Fuzzy sets and systems, 30(3), 257-282.

[25] Luhandjula, M. K., Rangoaga, M. J. (2014). An approach for solving a fuzzy multiobjective programming problem. European Journal of Operational Research, 232(2), 249-255.

[26] Miettinen, K. M., Optimization, N. L. M. O. (1999). Kluwer Academic Publisher.

[27] Negoita, C. V., Ralescu, D. A. (1975). Applications of fuzzy sets to systems analysis. New York: Wiley.

[28] Negoita, C., Zadeh, L., Zimmermann, H. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and systems, 1, 3-28.

[29] Pareto, V. (1974). De l'économie mathématique (pp. 179-180). Librairie Droz.

[30] Parra, M. A., Terol, A. B., Gladish, B. P., Urıa, M. R. (2005). Solving a multiobjective possibilistic problem through compromise programming. European Journal of Operational Research, 164(3), 748-759.

[31] Puri, M. L., Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 91(2), 552-558.

[32] Romero, C., Tamiz, M., Jones, D. F. (1998). Goal programming, compromise programming and reference point method formulations: linkages and utility interpretations. Journal of the Operational Research Society, 49(9), 986-991.

[33] Romero, C. (2001). Extended lexicographic goal programming: a unifying approach. Omega, 29(1), 63-71.

[34] Stefanini, L., and Bede, B. (2009). Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 71(3), 1311-1328.

[35] Terol, A. B. (2008). A new approach for multiobjective decision making based on fuzzy distance minimization. Mathematical and computer modelling, 47(9), 808-826.

[36] Wu, H. C. (2008). Solutions of Fuzzy Multiobjective Programming Problems Based on the Concept of Scalarization. Journal of optimization theory and applications, 139(2), 361-378.

[37] Wu, H. C. (2007). The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for the optimization problem with fuzzy-valued objective function. Mathematical Methods of Operations Research, 66(2), 203-224.

[38] Wu, H. C. (2009). The Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions. European Journal of Operational Research, 196(1), 49-60.

[39] Wu, H. C. (2008). Using the technique of scalarization to solve the multiobjective programming problems with fuzzy coefficients. Mathematical and Computer Modelling, 48(1), 232-248.

[40] Yu, P. L. Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions. 1985.

[41] Yu, P. L. (1973). A class of solutions for group decision problems. Management Science, 19(8), 936-946.

[42] Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. Information sciences, 8(3), 199-249.

[43] Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-II. Information sciences, 8(4), 301-357.

[44] Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. Information sciences, 9(1), 43-80.

[45] Zimmermann, H. J. (2001). Fuzzy set theory-and its applications. Springer Science Business Media.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابهام .... Ambiguity
اجتماع .... Union
ارتفاع .... Height
اسکالرسازی .... Scalarization
اشتراک .... Intersecting
ارزش .... Value
اصل گسترش .... Extention principle
ایده‌آل .... Ideal
آلفا-برش .... α-cut
بازه تقریبی .... Interval approximation
بده و بستان .... Trade-off
بردار تصمیم .... Decision vector
برنامه‌ریزی آرمانی .... Goal programming
برنامه‌ریزی توافقی .... Compromise programming
برنامه‌ریزی مرکب .... Composite programming
بستار .... Closure
بسته .... Close
بهینه پارتو .... Pareto optimal
بهینه پارتو ضعیف .... Weakly pareto optimal
بهینه پارتو قوی .... Strongly pareto optimal
بهینه کامل .... Complete optimal
بهینه‌سازی برداری .... Vector optimization
بهینه‌سازی چندهدفه .... Multiobjective optimization
بهینه‌سازی دوهدفه .... Biobjective optimization
پادمتقارن .... Antisymmetric

پایه .... Base
پشتیبان .... Support
پوشا .... Spanning
پیوسته .... Continuous
تابع بازه‌ای مقدار .... Interval value function
تابع جانشینی، تابع محاطی .... Embedding function
تابع خطی .... Linear function
تابع عضویت .... Membership function
تابع غیرفازی‌سازی، تابع دی‌فازی‌سازی .... Defuzzification function
تابع فازی .... Fuzzy function
تابع مشخصه .... Indicator function
ترتیب جزئی .... Partial order
تصمیم بهینه .... Optimum decision
تصمیم‌گیرنده .... Decision maker
تکه‌ای خطی .... Piecewise linear
ثابت نرمال‌ساز .... Normalization constant
جزئا مرتب .... Partial ordering
حساب بازه‌ای .... Arithmetic
حفظ ترتیب .... Order preserving
خطا .... Error
خوشتعریف .... Well defined
درجه عضویت .... Degree membership
درون .... Interior
درون نسبی .... Relative interior
دوسطحی .... Two level
روش مجموع وزین .... Weighted sum method
سطح آرمانی .... Aspiration level
سطح مطلوب .... Desired level
شبه درون .... Quasi interior
ضد ایده‌آل .... Anti ideal
ضرایب فازی .... Fuzzy multipliers
ضرب اسکالر .... Scalar multiplication

عدد فازی .... Fuzzy number
عدد فازی استاندارد .... Standard fuzzy number
عدد فازی کانونی .... Canonical fuzzy number
عدد فازی مثلثی .... Triangular fuzzy number
عدم قطعیت .... Uncertainty
عنصر ماکزیمال .... Maximal element
عنصر ماکزیمال ضعیف .... Weakly maximal element
عنصر ماکزیمال قوی .... Strongly maximal element
عنصر مینیمال .... Minimal element
عنصر مینیمال ضعیف .... Weakly minimal element
عنصر مینیمال قوی .... Strongly minimal element
غیرتسلطی .... Nondominated
فازی، ابهام .... Fuzzy
فاصله هاکاهارا .... Hakuhara difference
فاصله هاکاهارای تعمیم یافته .... Generalized Hakuhara difference
فضای برداری .... Vector space
فضای برداری حقیقی .... Real vector space
فضای توپولوژیکی .... Topological space
فضای حاصلضربی .... Product space
فضای نرم‌دار .... Normed space
قله .... Peak
گستره سراسری .... Global spread
ماتریس هسین .... Hessian matrix
مجموعه تراز .... Level set
مجموعه فازی .... Fuzzy set
مجموعه قطعی .... Crisp set
مجموعه کانون .... Core set
محدب .... Convex
مخروط .... Cone
مخروط ترتیبی .... Ordering cone
مخروط دوگان .... Dual cone
مخروط محدب .... Convex cone

مخروط نوک‌تیز .... Pointed cone
مد .... Mode
مرکز .... Center
مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی .... Fuzzy multiobjective programming problem
مسأله بهینه‌سازی برداری .... Vector optimization problem
مشتق پذیری .... Differentiability
معین مثبت .... Positive definite
مینیمم فاصله فازی .... Fuzzy distance minimization
نرم .... Soft
نرم .... Norm
نرمال شده .... Normal
نرم اقلیدسی .... Euclidean norm
نرم‌دار .... Normed
نقطه ترجیحی .... Preferential point
نقطه مطلوب .... Desired point
نگاشت .... Mapping
نوک‌تیز، رأسی .... Pointed
نیمه پیوسته بالایی .... Upper semicontinuous
نیمه نامتناهی .... Semi infinite
هاسدورف .... Hausdorff
هزینه .... Cost
همسان‌ریخت، یکریخت .... Homemorphism
هم‌بند .... Connected
یکنوا .... Monotonic
یکنوای صعودی .... Monotone increasing
یک به یک .... One to one

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

آلفا-برش .... α-cut

ابهام .... Ambiguity

ضد ایده‌آل .... Anti ideal

پادمتقارن .... Antisymmetric

حساب بازه‌ای .... Arithmetic

سطح آرمانی .... Aspiration level

پایه .... Base

بهینه‌سازی دوهدفه .... Biobjective optimization

مرکز .... Center

بسته .... Close

بستار .... Closure

بهینه کامل .... Complete optimal

برنامه‌ریزی مرکب .... Composite programming

برنامه‌ریزی توافقی .... Compromise programming

مخروط .... Cone

هم‌بند .... Connected

عدد فازی کانونی .... Canonical fuzzy number

محدب .... Convex

مخروط محدب .... Convex cone

پیوسته .... Continuous

مجموعه کانون .... Core set

هزینه .... Cost

مجموعه قطعی .... Crisp set

تصمیم‌گیرنده .... Decision maker

بردار تصمیم .... Decision vector

تابع غیرفازی‌سازی، تابع دی‌فازی‌سازی	Defuzzification function
سطح مطلوب	Desired level
نقطه مطلوب	Desired point
مشتق پذیری	Differentiability
مخروط دوگان	Dual cone
تابع جانشینی، تابع محاطی	Embedding function
خطا	Error
نرم اقلیدسی	Euclidean norm
اصل گسترش	Extention principle
فازی، ابهام	Fuzzy
مینیم فاصله فازی	Fuzzy distance minimization
تابع فازی	Fuzzy function
مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی	Fuzzy multiobjective programming problem
ضرایب فازی	Fuzzy multipliers
عدد فازی	Fuzzy number
مجموعه فازی	Fuzzy set
فاصله هاکاهارای تعمیم یافته	Generalized Hakuhara difference
گستره سراسری	Global spread
برنامه‌ریزی آرمانی	Goal programming
فاصله هاکاهارا	Hakuhara difference
هاسدورف	Hausdorff
ارتفاع	Height
ماتریس هسین	Hessian matrix
همسان‌ریخت، یکریخت	Homemorphism
ایده‌آل	Ideal
تابع مشخصه	Indicator function
درون	Interior
اشتراک	Intersecting
بازه تقریبی	Interval approximation
تابع بازه‌ای مقدار	Interval value function
مجموعه تراز	Level set
تابع خطی	Linear function

Mapping .... نگاشت
Maximal element .... عنصر ماکزیمال
Membership function .... تابع عضویت
Minimal element .... عنصر مینیمال
Mode .... مد
Monotone increasing .... یکنوای صعودی
Monotonic .... یکنوا
Multiobjective optimization .... بهینه‌سازی چندهدفه
Nondominated .... غیرتسلطی
Norm .... نرم
Normal .... نرمال شده
Normalization constant .... ثابت نرمال‌ساز
Normed space .... فضای نرم‌دار
Normed .... نرم‌دار
One to one .... یک به یک
Optimum decision .... تصمیم بهینه
Ordering cone .... مخروط ترتیبی
Order preserving .... حفظ ترتیب
Pareto optimal .... بهینه پارتو
Partial order .... ترتیب جزئی
Partial ordering .... جزئا مرتب
Peak .... قله
Piecewise linear .... تکه‌ای خطی
Pointed .... نوک‌تیز، رأسی
Pointed cone .... مخروط نوک‌تیز
Positive definite .... معین مثبت
Preferential point .... نقطه ترجیحی
Product space .... فضای حاصلضربی
Quasi interior .... شبه درون
Real vector space .... فضای برداری حقیقی
Relative interior .... درون نسبی
Scalarization .... اسکالرسازی

Scalar multiplication .... ضرب اسکالر
Semi infinite .... نیمه نامتناهی
Soft .... نرم
Spanning .... پوشا
Standard fuzzy number .... عدد فازی استاندارد
Strongly maximal element .... عنصر ماکزیمال قوی
Strongly minimal element .... عنصر مینیمال قوی
Strongly pareto optimal .... بهینه پارتو قوی
Support .... پشتیبان
Topological space .... فضای توپولوژیکی
Trade-off .... بده و بستان
Triangular fuzzy number .... عدد فازی مثلثی
Two level .... دوسطحی
Uncertainty .... عدم قطعیت
Union .... اجتماع
Upper semicontinuous .... نیمه پیوسته بالایی
Value .... ارزش
Vector optimization .... بهینه‌سازی برداری
Vector space .... فضای برداری
Weakly maximal element .... عنصر ماکزیمال ضعیف
Weakly minimal element .... عنصر مینیمال ضعیف
Weakly pareto optimal .... بهینه پارتو ضعیف
Weighted sum method .... روش مجموع وزین
Well defined .... خوشتعریف

Aabstract

In real conditions some situations may happen that single objective mathematical models can not express the demands of decision maker, and it reduces the effectiveness and desirability of the model's results. Also in real conditions, various parameters and factors are uncertain which cause great complexity in decision maxing. So, for solving these probable problems, fuzzy multiobjective optimization problems have been proposed. This thesis investigates some methods for solving fuzzy multiobjective optimization problems. One of the most widely used methods of solving these problems, is scalarization. At first, an scalarization method based on the concepts of convex cone and embeding function has been proposed. Then, the weighted sum method which is one of the most important scalarization techniques has been studied. Also, another method based on the distance minimization of the functions and ideal points has been considered. In this method the importance of functions has been considered for decision makers. Next, another method has been expressed based on Karush–Kuhn–Tucker optimization conditions for solving fuzzy multiobjective problems. In this method, using the interval valued multiobjective optimization a fuzzy multiobjective optimization problem has been approximated and then by applying two algorithms an efficient solution for interval valued multiobjective optimization problem and a satisficing solution for the fuzzy multiobjective optimization problem are obtained.

Keywords: Fuzzy multiobjective optimization, Fuzzy numbes, Pareto optimal solutions, Partial ordering, Convex cone

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Necessary and sufficient conditions for efficiency in fuzzy multiobjective optimization problems

Fateme Soleimani

Supervisor

Dr. Mehrdad Ghaznavi

Advisor

Dr. Maryam Ghorani

December 2015