دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

جواب‌های کارای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی

سمیه باقری

استاد راهنما

دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر مریم قرآنی

۱۳۹۴

تقدیم به:

پدر بزرگوارم، اسوه صداقت و شرافت

مادر مهربانم، مظهر صبر و محبت

سپاس گزاری...

سپاس بیکران پروردگار بی‌همتا را که مرا به طریق علم و دانش رهنمون ساخت و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخر نمود و خوشه چيني از خرمن علم را روزیم ساخت. پس از شکر و ستایش خدای متعال، سپاسگزاری و امتنان قلبی خود را نسبت به استاد راهنمای ارجمندم جناب آقاي دکتر مهرداد غزنوی، الگوی علم و اخلاق، که در این راه راهنمای من بودند ابراز میدارم. از استاد مشاور گرامیم خانم دکتر مریم قرآنی کمال تشکر را دارم. از اساتید داور محترم، آقایان دکتر جعفر فتحعلی و دکتر محمد هادی نوری اسکندری به دلیل مطالعه دقیق پایان نامه و شرکت در جلسه دفاعیه تشکر میکنم. همچنین از آقاي دکتر مهدی قوتمند که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع اینجانب حضور داشتند تشکر می‌نمایم. و در نهایت از پدر و مادر و سایر اعضاي خانواده به خاطر لطف و محبت و تشویق‌هایشان کمال تشکر را دارم.

سمیه باقری
۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **سمیه باقری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **جواب‌های کارای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی** ، تحت راهنمایی **دکتر مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سمیه باقری
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیم کارایی ضعیف و کارایی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه را توضیح می‌دهیم و یک روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی پیشنهاد می‌کنیم. سپس مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه با پارامترهای فازی را بررسی می‌کنیم و مفهوم جواب کارای معمولی را بر اساس مفاهیم امکان‌پذیری و لزوم برای اعداد فازی گسترش می‌دهیم. از چهار اندیس برای رتبه‌بندی دو عدد فازی استفاده کرده و چهار نوع جواب کارا تعریف کرده و روابط بین آن‌ها را بیان می‌کنیم. از سری تیلور برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی استفاده می‌کنیم. در روش پیشنهاد شده به هر هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه فازی، یک تابع عضویت نسبت داده می‌شود و توابع عضویت با کمک سری تیلور تغییر شکل می‌دهند و به فرم خطی در می‌آیند. بنابراین مسئله به مسئله تک‌هدفه تبدیل می‌شود. مثال‌های کاربردی و مثال‌های عددی کارایی روش پیشنهاد شده را نشان می‌دهند. با کمک تعبیر هندسی، یک روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی ضعیف ارائه می‌شود. همچنین، برای تست کارایی یک جواب شدنی یک روش برنامه‌ریزی خطی داریم. نهایتاً، روش مجموعه فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه را توضیح می‌دهیم. در این روش، یک مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی معادل با مسئله چندهدفه غیر فازی به‌دست می‌آید و مسئله برنامه‌ریزی تک‌هدفه معادل آن حل می‌شود. این روش رابطه بین مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه و مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی. تابع عضویت. روش سری تیلور. جواب کارا.

فهرست مطالب

فصل ۱

مبانی نظری اعداد فازی

۱.۱ مقدمه

بهینه سازی چندهدفه، یکی از مهمترین مدل‌هایی است که تصمیم‌گیرنده در برخورد با معیارهای مختلف از آن استفاده می‌کند. مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، کاربردهای عملی فراوانی در زمینه‌های مختلف از جمله مهندسی، صنعت و اقتصاد دارند. یک مسئله بهینه سازی چندهدفه معمولاً چند جواب کارا دارد که تعداد این جواب‌ها می‌توانند متناهی یا بی‌نهایت باشند. یک جواب کارا از مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، جواب شدنی است که بهبود در یک هدف، حداقل منجر به بدتر شدن وضعیت در یک هدف دیگر خواهد شد.

مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با کمک روش‌هایی به مسئله تک‌هدفه متناظر با مسئله چندهدفه تبدیل شده و با استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی تک‌هدفه حل می‌شوند و جواب‌های بهینه برای مسئله تک‌هدفه به دست می‌آیند. رابطه بین جواب‌های بهینه مسئله تک‌هدفه و جواب‌های کارای مسئله بهینه‌سازی چندهدفه از اهمیت زیادی برخوردار است. در این پایان نامه هدف پیدا کردن جواب‌های کارای مسائل بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی است.

در فصل اول، ابتدا به بیان نمادها، تعاریف و قضایایی که در طول پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌شود، پرداخته و اعداد فازی را به تفصیل شرح می‌دهیم و با مثال‌هایی، ادعای خود را در مورد حساب بازه‌ای اعداد فازی بررسی می‌کنیم. این فصل به ۶ بخش اصلی تقسیم می‌شود یعنی، تعاریف پایه‌ای و مجموعه عملیات نظری، $\alpha-$برش‌ها و خاصیت آن‌ها، روابط فازی، مجموعه‌های فازی محدب، نرم‌های مثلثی ($t-$ نرمها). اکثر مطالب این فصل از مراجع [۸، ۴۶، ۴۷، ۴۹] استخراج شده است.

در فصل دوم، ابتدا به معرفی مسائل بهینه سازی چندهدفه پرداخته، سپس با کمک یک تعبیر هندسی، روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی مسائل بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه را ارائه می‌دهیم. در ادامه فصل به الگوریتم متناسب با این روش، جهت یافتن جواب‌های کارای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه اشاره می‌کنیم و نحوه اجرای گام‌های این الگوریتم را بیان می‌کنیم.

با اجرای الگوریتم روی یک مثال این فصل به پایان می‌رسد. برای ارائه مطالب این فصل از مراجع [۲، ۴۱، ۳۷، ۲۳] استفاده شده است.

در فصل سوم، به مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی که ضرایب صورت و مخرج کسرهای هدف و نیز ضرایب در مجموعه محدودیت‌ها پارامترهای فازی هستند، می‌پردازیم. با استفاده از چهار شاخص برای رتبه‌بندی دو عدد فازی، جواب‌های $\alpha-$شدنی و $\gamma-$کارا را تعریف کرده و در ادامه فصل نشان می‌دهیم که با استفاده از جواب‌های کارای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه، می‌توان به نقاط کارای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی رسید. اکثر مطالب این فصل از مراجع [۳۱، ۳۰، ۴، ۲۴] اتخاذ شده‌اند.

در فصل چهارم، مسائل بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی مورد بحث بوده و به ارائه روش سری تیلور برای حل این‌گونه مسائل می‌پردازیم. برای هر هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه یک سطح ایده‌ال در نظر گرفته و به هر هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه یک تابع عضویت نسبت می‌دهیم و این توابع عضویت با استفاده از سری تیلور تغییر شکل می‌دهند و به فرم خطی در می‌آیند. با استفاده از روش مجموع وزین مسئله چندهدفه فازی به مسئله تک‌هدفه تبدیل می‌شود. از جواب بهینه مسئله تک‌هدفه شروع کرده با کمک یک روش برنامه‌ریزی خطی و الگوریتم متناسب با آن، به جواب کارای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی می‌رسیم. با آوردن مثال‌هایی در پایان این فصل و اجرای الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی به کارایی روش سری تیلور برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی می‌رسیم. مطالب این فصل از مراجع [۴۰، ۴۷، ۲۶] تهیه شده است.

در فصل پنجم، روش مجموعه فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه پیشنهاد می‌شود که در این روش به صورت و مخرج کسرهای توابع هدف تابع عضویت نسبت می‌دهیم و با کمک روش مجموع وزین به یک مسئله تک‌هدفه می‌رسیم. با استفاده از قضیه‌ای نشان می‌دهیم که جواب بهینه مسئله تک‌هدفه، جواب کارای مسئله چندهدفه است. این روش رابطه فصل دوم و سوم را نشان می‌دهد. یعنی هر جواب کارای مسئله چندهدفه یک جواب کارای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی است. با اجرای روش ذکر شده روی یک مثال این فصل به پایان می‌رسد. برای ارائه مطالب این فصل از مراجع [۲۱، ۱۲، ۴۴، ۴۵] استفاده شده است.

۲.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه مجموعه فازی

نظریه مجموعه فازی برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت مورد استفاده قرار می‌گیرد و قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی که نادقیق و مبهم هستند را به صورت ریاضی مدل‌سازی کند. در این بخش به تشریح برخی از مفاهیم و تعاریف اولیه مجموعه‌های فازی خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۲.۱. (مجموعه فازی) یک زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X، توسط تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [\circ, ۱]$ مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد.

نکته: یک زیر مجموعه قطعی یا معمولی A از X به عنوان یک مجموعه فازی در X با تابع عضویت به صورت تابع مشخصه زیر است:

$$\mu_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} \circ & x \notin A \\ ۱ & x \in A. \end{cases}$$

گاهی اوقات مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X بوسیله لیست جفت‌های مرتب $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ نشان داده می‌شود، که عناصر با درجه صفر معمولاً لیست نمی‌شوند. بنابراین مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X همچنین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X, \mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [\circ, ۱]\}$$

تعریف ۲.۲.۱. (ارتفاع) فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی در X باشد ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A}$ ($h(\tilde{A})$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تعریف ۳.۲.۱. (نرمال بودن) یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال است اگر و تنها اگر درجه عضویت حداقل یک عضو آن یک باشد. به عبارت دیگر مجموعه فازی $\tilde{A}$، نرمال است اگر و تنها اگر ارتفاع آن واحد باشد. به مجموعه فازی که ارتفاع آن کمتر از یک باشد، مجموعه فازی غیر نرمال، گفته می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. (تکیه‌گاه) تکیه‌گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ای قطعی است که آن را با $S(\tilde{A})$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \circ\}.$$

۳.۱ α−برش و خاصیت‌های آن

در ادامه مجموعه‌های قطعی α−برش که برای مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X داده شده‌اند، معرفی می‌شوند. این مجموعه‌های قطعی نقش مهمی در مطالعه تئوری مجموعه‌های فازی دارند، زیرا هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X به طور منحصر به فرد می‌تواند بوسیله یک خانواده از چنان مجموعه‌هایی نشان داده شود. مفهوم α−برش‌ها در مطالعه حساب فازی کاربرد فراوان دارد.

تعریف ۱.۳.۱. (α−برش) مجموعه قطعی A_α، متشکل از تمام عناصری از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α، باشد که $\alpha \in (\circ, ۱]$، مجموعه $\alpha-$ برش $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

نکته: با توجه به تعریف $\alpha-$ برش برای هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ بدیهی است که به ازای هر $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$ اگر $\alpha_1 \leq \alpha_2$ آنگاه $A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$.

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنید تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، $\mu_{\tilde{A}}(x)$ است. همچنین فرض کنید A_α، $\alpha-$برش از $\tilde{A}$ و $\chi_{A_\alpha}(x)$ تابع مشخصه از مجموعه قطعی A_α به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ باشد آنگاه*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = Sup_{\alpha\in(0,1]}(\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x)), x \in X.$$

برهان. چون $\chi_{A_\alpha}(x)$ تابع مشخصه مجموعه قطعی A_α است، اگر $x \in A_\alpha$ باشد مقدار ۱ می‌گیرد و اگر $x \notin A_\alpha$ مقدار صفر می‌گیرد. بنابراین آن‌ها را با تعریف $\alpha-$برش ترکیب می‌کنیم، داریم:

$$x \in A_\alpha \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \Rightarrow \chi_{A_\alpha}(x) = 1$$

و

$$x \notin A_\alpha \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha \Rightarrow \chi_{A_\alpha}(x) = 0$$

هم اکنون داریم:

$$\begin{aligned}
\sup(\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x)) &= [\sup_{\alpha\in(0,\mu_{\tilde{A}}(x)]}(\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x))] \vee [\sup_{\alpha\in(\mu_{\tilde{A}}(x),1]}(\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x))] \\
&= [\sup_{\alpha\in(0,\mu_{\tilde{A}}(x)]}(\alpha \wedge 1)] \vee [\sup_{\alpha\in(\mu_{\tilde{A}}(x),1]}(\alpha \wedge 0)] \\
&= \sup_{\alpha\in(0,\mu_{\tilde{A}}(x)]} \alpha \\
&= \mu_{\tilde{A}}(x).
\end{aligned}$$

□

تعریف ۳.۳.۱. (عدد فازی) مجموعه فازی $\tilde{A}$ بر روی مجموعه مرجع $X \subseteq \mathbb{R}$ را عدد فازی می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق نمایند:

۱- $\tilde{A}$مجموعه‌ای نرمال باشد یعنی $x \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که $\mu_A(x) = 1$.

۲- به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، A_α بازه‌ی بسته باشد.

۳- تکیه‌گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فشرده باشد.

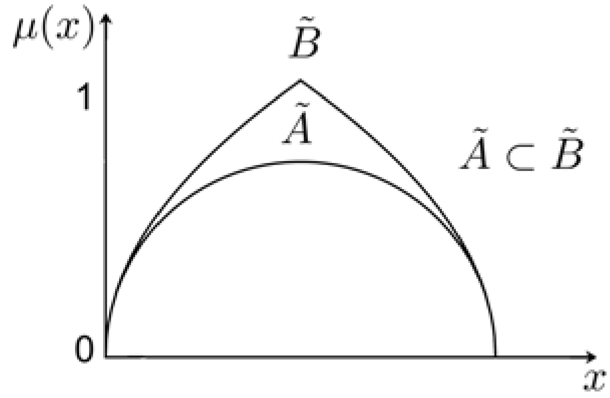
۴- $\mu_A(.)$ از بالا نیمه پیوسته باشد.

۵- $\tilde{A}$ محدب باشد.

تعریف ۴.۳.۱. (مجموعه فازی تهی) اگر به ازای هر $x \in X$ تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ صفر باشد آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ تهی است.

تعریف ۵.۳.۱. (شمول[۱]) فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی باشند. آنگاه گوییم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ برای هر $x \in X$ (شکل ۱.۱).

[1] Inclusion

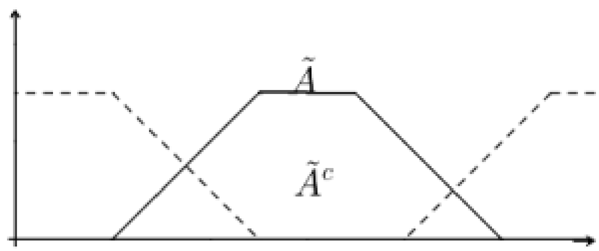


شکل ۱.۱: زیر مجموعه $\tilde{A} \subset \tilde{B}$

تعریف ۶.۳.۱. (تساوی) دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را برابر گویند اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$

تعریف ۷.۳.۱. (متمم گیری) متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$، با نماد $\tilde{A}^c$ مجموعه فازی است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x)$$



شکل ۲.۱: نمودار تابع عضویت متمم یک مجموعه فازی

تعریف ۸.۳.۱. (اجتماع استاندارد) اجتماع استاندارد دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه فازی $\tilde{C}$ است به طوری که تابع عضویت آن به صورت زیر است.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

تعریف ۹.۳.۱. (اشتراک استاندارد) اشتراک استاندارد دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه فازی $\tilde{D}$ است به طوری که تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

نکته: به علت شرکت پذیری عملگرهای min و max تعاریف اجتماع و اشتراک می‌توانند برای هر تعداد متناهی از مجموعه‌های فازی در یک روش واضح گسترش یابند و خصوصیات قطعی روی مجموعه‌های فازی را به صورت زیر داریم:

۱) $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$

۲) $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$

۳) $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$

۴) $(\tilde{A} \cup \tilde{B})' = \tilde{A}' \cap \tilde{B}'$

۵) $(\tilde{A} \cap \tilde{B})' = \tilde{A}' \cup \tilde{B}'$

۶) $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$

۷) $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$.

دو خاصیت زیر از مجموعه های قطعی برای مجموعه‌های فازی برقرار نیست.

۱) $\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \phi$

۲) $\tilde{A} \cup \tilde{A}' = X$

۴.۱ مجموعه‌های فازی محدب

مفهوم تحدب مجموعه‌های قطعی در $\mathbb{R}^n$ نقش مهمی در برنامه‌ریزی ریاضی قطعی بازی می‌کند. اینجا مفهوم تحدب را به مجموعه‌های فازی در $\mathbb{R}^n$ گسترش می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۱. (محدب بودن) مجموعه فازی $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^n$ را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha \in [0,1]$، مجموعه $\alpha-$برش آن مجموعه‌ای محدب باشد.

قضیه زیر را به عنوان تعریف معادل برای مجموعه فازی محدب داریم:

قضیه ۲.۴.۱. *مجموعه فازی* $\tilde{A}$ *در* $\mathbb{R}^n$ *محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *و* $\lambda \in [0,1]$ *داشته باشیم:*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \qquad (۱.۱)$$

برهان. فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه فازی محدب با تعریف ۱.۴.۱ باشد. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید $\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x_1) \leq \mu_{\tilde{A}}(x_2)$. آنگاه $x_1 \in A_\alpha$ و $x_2 \in A_\alpha$ و همچنین بواسطه‌ی محدب بودن A_α، $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ بنابراین

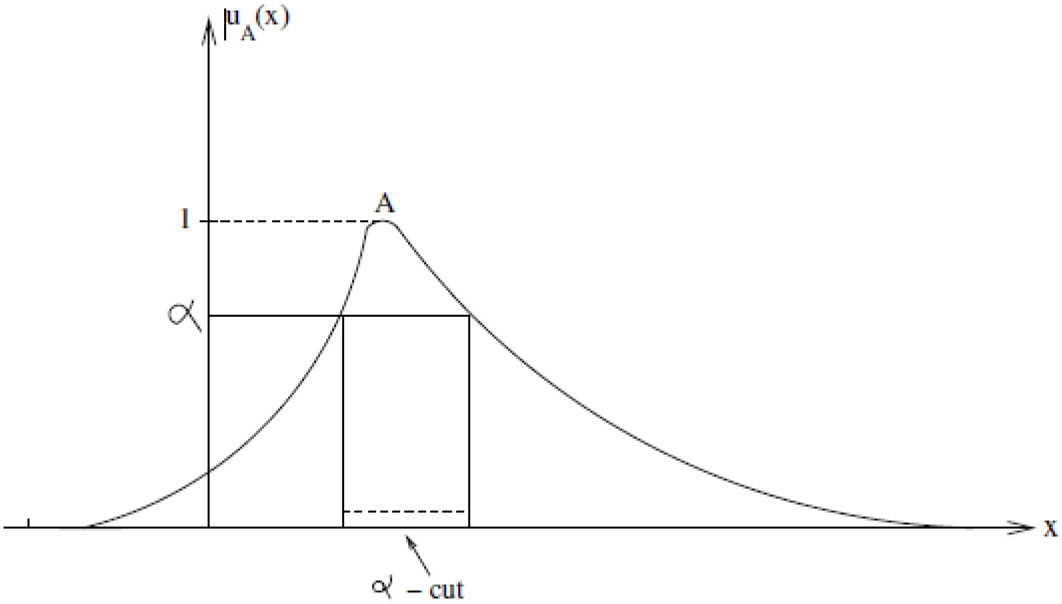
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)).$$

برعکس، اگر تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ از مجموعه فازی $\tilde{A}$ در نابرابری (۱.۱) صدق کند آنگاه قرار می‌دهیم $\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x_1)$،$A_\alpha$ به صورت مجموعه همه نقاط x_2 در نظر گرفته می‌شود به طوری که $\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \alpha = \mu_{\tilde{A}}(x_1)$. بنابراین برای هر $x_1, x_2 \in A_\alpha$،

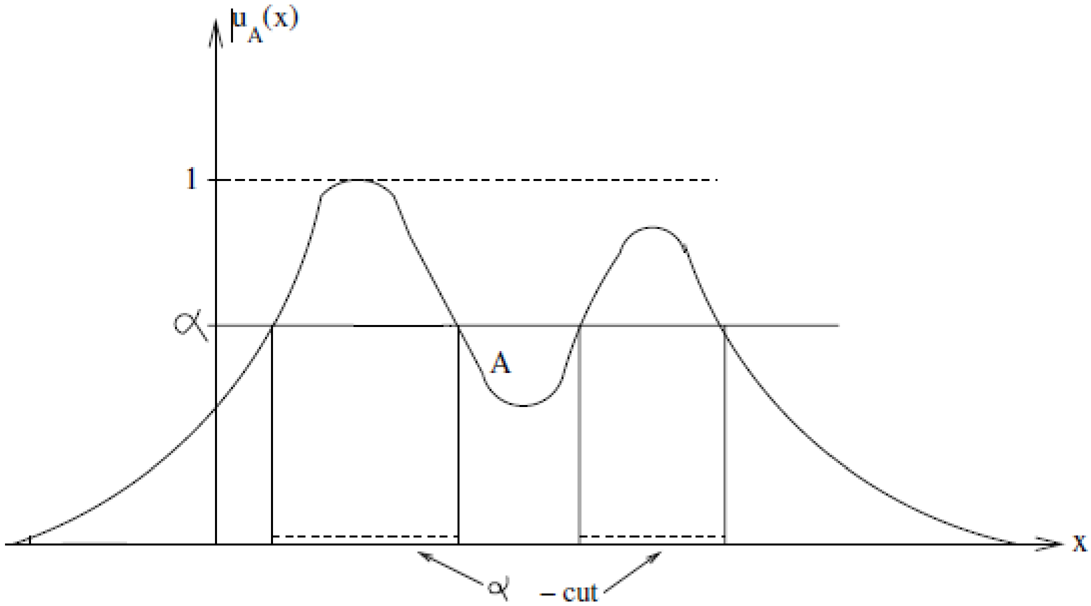
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)) = \mu_{\tilde{A}}(x_1) = \alpha,$$

که نتیجه می‌دهد $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$. بنابراین A_α برای هر $\alpha \in (0, 1]$، مجموعه‌ای محدب است. □

شکل‌های ۳.۱ و ۴.۱ به ترتیب مجموعه فازی محدب و همچنین مجموعه فازی غیر محدب را نشان می‌دهند.

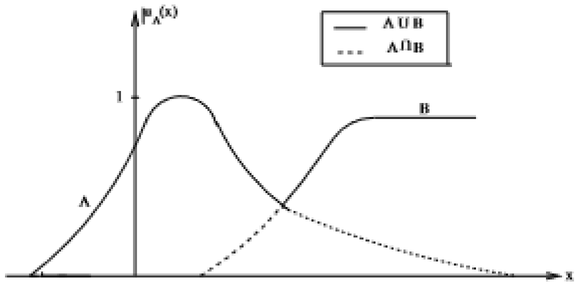


شکل ۳.۱: مجموعه فازی محدب



شکل ۴.۱: مجموعه فازی غیر محدب

نکته: اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی محدب در $\mathbb{R}^n$ باشند آن‌گاه اشتراک آنها نیز محدب است. اما اجتماع $\tilde{A}$ و$\tilde{B}$ ضرورتاً محدب نیست و این مطلب را در شکل ۵.۱ شرح می‌دهیم.



شکل ۵.۱: $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ مجموعه فازی محدب است اما $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ مجموعه فازی محدب نیست.

تعریف ۳.۴.۱. (کراندار بودن) مجموعه فازی $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^n$ مجموعه فازی محدب کراندار نامیده می‌شود اگر $\alpha-$برش‌های آن یعنی، A_αها به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$، مجموعه‌های کراندار قطعی باشند.

۵.۱ حساب بازه‌ای

فهمیدن اساس حساب بازه‌ای به آموختن روابط در حساب بازه‌ای نیازمند است. به عبارت دیگر دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ چگونه جمع و تفریق و ضرب و تقسیم می‌شوند.
فرض کنید $\tilde{A} = [a_1, a_2]$ و $\tilde{B} = [b_1, b_2]$ دو بازه‌ی بسته در $\mathbb{R}$ باشند، تعاریف زیر را داریم:

تعریف ۱.۵.۱. (جمع و تفریق) اگر $x \in [a_1, a_2]$ و $y \in [b_1, b_2]$ آن‌گاه $x + y \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ و $x - y \in [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$. بنابراین جمع $\tilde{A}$و $\tilde{B}$ بوسیله $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ نشان داده می‌شود:
$$\tilde{A}(+)\tilde{B} = [a_1, a_2](+)[b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$
شبیه به آن، تفریق $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ بوسیله $\tilde{A}(-)\tilde{B}$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\tilde{A}(-)\tilde{B} = [a_1, a_2](-)[b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1].$$

تعریف ۲.۵.۱. (تصویر یک بازه) اگر $x \in [a_1, a_2]$ آن‌گاه تصویر آن به صورت $-x \in [-a_2, -a_1]$ است. بنابراین تصویر $\tilde{A}$ بوسیله $\overline{\tilde{A}}$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر می‌باشد:
$$\overline{\tilde{A}} = \overline{[a_1, a_2]} = [-a_2, -a_1].$$

تعریف ۳.۵.۱. (ضرب(.)) ضرب دو بازه بسته $\tilde{A} = [a_1, a_2]$ و $\tilde{B} = [b_1, b_2]$ از $\mathbb{R}$ بوسیله $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\tilde{A}(.)\tilde{B} = [a_1, a_2](.)[b_1, b_2]$$
$$= [min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)].$$
اگر بازه‌ها در $\mathbb{R}_+$ (خط اعداد حقیقی نامنفی) باشند، فرمول ضرب شکل ساده زیر را دارد:
$$\tilde{A}(.)\tilde{B} = [a_1b_1, a_2b_2].$$

تعریف ۴.۵.۱. (ضرب اسکالر و معکوس) فرض کنید $\tilde{A} = [a_1, a_2]$ بازه‌ی بسته در $\mathbb{R}_+$ باشد و $k \in \mathbb{R}_+$. اسکالر k را به صورت بازه‌ی بسته $[k, k]$ در نظر می‌گیریم. ضرب اسکالر $k.\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k.\tilde{A} = [k, k](.)[a_1, a_2] = [ka_1, ka_2].$$

همچنین، برای $\tilde{A} = [a_1, a_2]$ در $\mathbb{R}_+$ اگر $x \in [a_1, a_2]$ و $0 \notin [a_1, a_2]$ آن‌گاه $(\frac{1}{x}) \in [\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}]$. بنابراین معکوس $\tilde{A}$ بوسیله $\tilde{A}^{-1}$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}^{-1} = [a_1, a_2]^{-1} = [\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}]$$

در صورتی که $0 \notin [a_1, a_2]$.

تعریف ۵.۵.۱. (تقسیم(:)) تقسیم دو بازه بسته $\tilde{A} = [a_1, a_2]$ و $\tilde{B} = [b_1, b_2]$ از $\mathbb{R}$ بوسیله $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ نشان داده می‌شود و به صورت ضرب $[a_1, a_2]$ در $[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}]$ تعریف می‌شود در صورتی که $0 \notin [b_1, b_2]$. بنابراین

$$\begin{aligned}\tilde{A}(:)\tilde{B} &= [a_1, a_2](:)[b_1, b_2] = [a_1, a_2](.)[\frac{1}{b_2}.\frac{1}{b_1}]\\ &= [min(\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}), max(\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1})].\end{aligned}$$

در حالتی که بازه‌ها در $\mathbb{R}_+$ هستند و $0 \notin [b_1, b_2]$ این فرمول برای تقسیم به صورت ساده زیر است:

$$\tilde{A}(:)\tilde{B} = [\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}].$$

تقسیم بر اسکالر $k > 0$ همچنین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}(:)k = [a_1, a_2](.)[\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] = [\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}].$$

تعریف ۶.۵.۱. (عملگرهای $max(\vee)$ و $min(\wedge)$) فرض کنید $\tilde{A} = [a_1, a_2]$ و $\tilde{B} = [b_1, b_2]$ دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ باشند. آنگاه عملگرهای $max(\vee)$ و $min(\wedge)$ روی $\tilde{A}$و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A}(\vee)\tilde{B} = [a_1, a_2](\vee)[b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2],$$

$$\tilde{A}(\wedge)\tilde{B} = [a_1, a_2](\wedge)[b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2].$$

ملاحظه ۷.۵.۱. $\tilde{A}(+)\overline{\tilde{A}} = [a_1, a_2](+)[-a_2, -a_1] \neq [0, 0] \equiv 0$. *در صورتی‌که* $\tilde{A} = [a_1, a_2]$ *در* $\mathbb{R}_+$ *است و* $0 \notin [a_1, a_2]$

$$\tilde{A}(.)\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}(.)\tilde{A} \neq [1, 1] \equiv 1.$$

تعریف ۸.۵.۱. به ازای $\forall z \in X$، عملیات ریاضی برای اعداد فازی $\tilde{A}$ و$\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}(+)\tilde{B}}(z) &= \sup_{z=x+y} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)),\\
\mu_{\tilde{A}(-)\tilde{B}}(z) &= \sup_{z=x-y} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)),\\
\mu_{\tilde{A}(.)\tilde{B}}(z) &= \sup_{z=xy} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)),\\
\mu_{\tilde{A}(:)\tilde{B}}(z) &= \sup_{z=\frac{x}{y}} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)), y \neq ۰.
\end{aligned}$$

مثال ۹.۵.۱. فرض کنید A و B دو عدد فازی باشند که توابع عضویت آن‌ها به فرم زیر است:

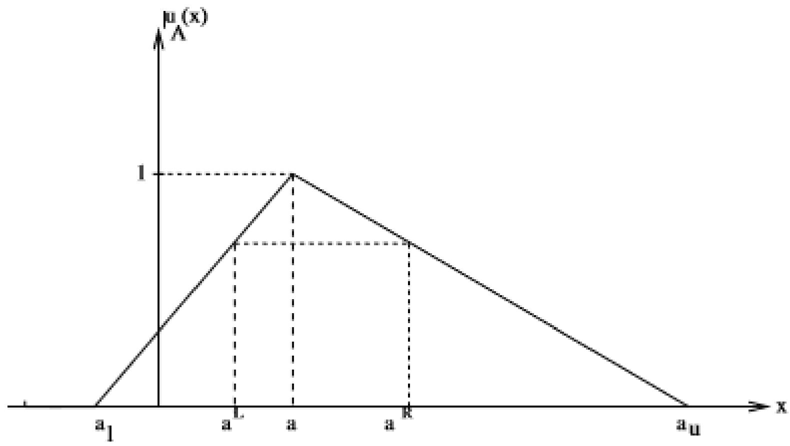
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-(x-m)^۲}, \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = e^{-(x-n)^۲}.$$

آن‌گاه تابع عضویت $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ به ازای هر z به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}(+)\tilde{B}}(z) &= \sup_{z=x+y} min(e^{-(x-m)^۲}, e^{-(y-n)^۲})\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^۱} min(e^{-(x-m)^۲}, e^{-(z-x-n)^۲})\\
&= e^{-(z-m-n)^۲}
\end{aligned}$$

تعریف ۱۰.۵.۱. (عدد فازی مثلثی) عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$، تعریف شده روی $\mathbb{R}$ به صورت $\tilde{A} = (a_l, a, a_u)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۶.۱)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۰ & x < a_l, x > a_u,\\ \frac{x-a_l}{a-a_l} & a_l \le x \le a,\\ \frac{a_u-x}{a_u-a} & a < x \le a_u. \end{cases}$$



شکل ۶.۱: عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a_l, a, a_u)$

به علاوه $\alpha-$برش عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = [a_l, a, a_u]$، بازه‌ی بسته‌ی زیر است.

$$A_\alpha = [a^L_\alpha, a^R_\alpha] = [(a-a_l)\alpha + a_l, -(a_u-a)\alpha + a_u], \quad \alpha \in (۰, ۱].$$

فرض کنید $\tilde{A}=(a_l,a,a_u)$ و $\tilde{B}=(b_l,b,b_u)$ دو عدد فازی مثلثی باشند. از $\alpha-$برش‌های A_α و B_α برای هر $\alpha\in(۰,۱]$ استفاده می‌کنیم تا $\tilde{A}*\tilde{B}$ را که $*$ یکی از عملگرهای $(+)$ و $(-)$ و $(.)$ و $(:)$ و $\vee$ و $\wedge$ است را محاسبه کنیم که محاسبات به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(+)\tilde{B} &= (a_l+b_l,a+b,a_u+b_u),\\ -\tilde{A} &= (-a_u,-a,-a_l),\\ k\tilde{A} &= (ka_l,ka,ka_u),k>۰,\\ \tilde{A}-\tilde{B} &= (a_l-b_u,a-b,a_u-b_l).\end{aligned}$$

مثال ۱.۵.۱۱. فرض کنید $\tilde{A}=(-۳,۲,۴)$ و $\tilde{B}=(-۱,۰,۵)$ دو عدد فازی مثلثی باشند. با استفاده از فرمول برای جمع و تفریق اعداد فازی داریم:

$$\tilde{A}(+)\tilde{B}=(-۳,۲,۴)(+)(-۱,۰,۵)=(-۴,۲,۹),$$

و

$$\tilde{A}(-)\tilde{B}=(-۳,۲,۴)(-)(-۱,۰,۵)=(-۸,۲,۵).$$

از $\alpha-$برش‌های A_α و B_α استفاده کرده و نشان می‌دهیم که $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ عدد فازی مثلثی است. به همین منظور A_α و B_α را برای اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ارزیابی می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}A_\alpha=[a^L_\alpha,a^R_\alpha] &= [(a-a_l)\alpha+a_l,-(a_u-a)\alpha+a_u],\alpha\in(۰,۱]\\ &= [(۲+۳)\alpha-۳,-(۲\alpha)+۴]\\ &= [۵\alpha-۳,-۲\alpha+۴],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_\alpha=[b^L_\alpha,b^R_\alpha] &= [(b-b_l)\alpha+b_l,-(b_u-b)\alpha+b_u],\alpha\in(۰,۱]\\ &= [\alpha-۱,-۵\alpha+۵].\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}A_\alpha(+)B_\alpha &= [۵\alpha-۳,-۲\alpha+۴](+)[\alpha-۱,-۵\alpha+۵]\\ &= [۶\alpha-۴,-۷\alpha+۹]=[c^L_\alpha,c^R_\alpha]\end{aligned}$$

برای مشخص کردن تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}(+)\tilde{B}}(x)$ از $\tilde{A}(+)\tilde{B}$، باید حدود $x\in\mathbb{R}$ که مجموعه‌های $\alpha-$برش در آن معتبر است را پیدا کنیم. به این ترتیب از c^L_α،

$$x=۶\alpha-۴\Longrightarrow\alpha=\frac{(x+۴)}{۶},$$

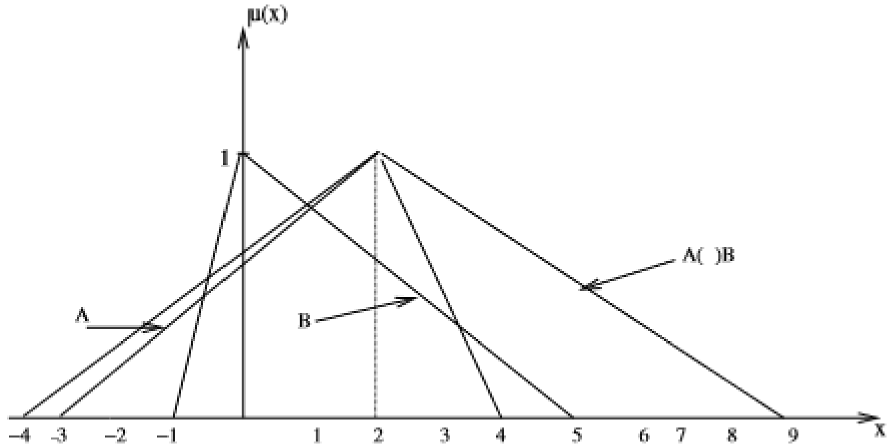
و از c^R_α،

$$x=-۷\alpha+۹\Longrightarrow\alpha=\frac{(۹-x)}{۷}.$$

علاوه بر این α برای $x=۲$ برابر یک می‌شود. بنابراین تابع عضویت $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}(+)\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x<-۴ \text{ یا } x>۹,\\ \frac{(x+۴)}{۶} & -۴\le x\le ۲,\\ \frac{(-x+۹)}{۷} & ۲<x\le ۹.\end{cases}$$

عدد فازی مثلثی $\tilde{A}(+)\tilde{B}=(-۴,۲,۹)$ در شکل ۱.۷ نشان داده شده است.



شکل ۷.۱: عدد فازی مثلثی $\tilde{A}(+)\tilde{B}$

تذکر: $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ و $-\tilde{A}$ و $k\tilde{A}$ و $\tilde{A}(-)\tilde{B}$ اعداد فازی مثلثی‌اند، اما $\tilde{A}^{-۱}$ و $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ و $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ و $\tilde{A}(\vee)\tilde{B}$ و $\tilde{A}(\wedge)\tilde{B}$ ممکن است عدد فازی مثلثی نباشند.

مثال ۱۲.۵.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (۲,۳,۵)$ و $\tilde{B} = (۱,۴,۸)$ دو عدد فازی مثلثی در $\mathbb{R}_+$ باشند. همان طورکه قبلاً اشاره شد و همچنین در این مثال دیده می‌شود، به طورکلی حاصل $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ ممکن است یک عدد فازی مثلثی نباشد. با استفاده از $\alpha-$برش‌های A_α و B_α، $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ را محاسبه می‌کنیم، داریم:

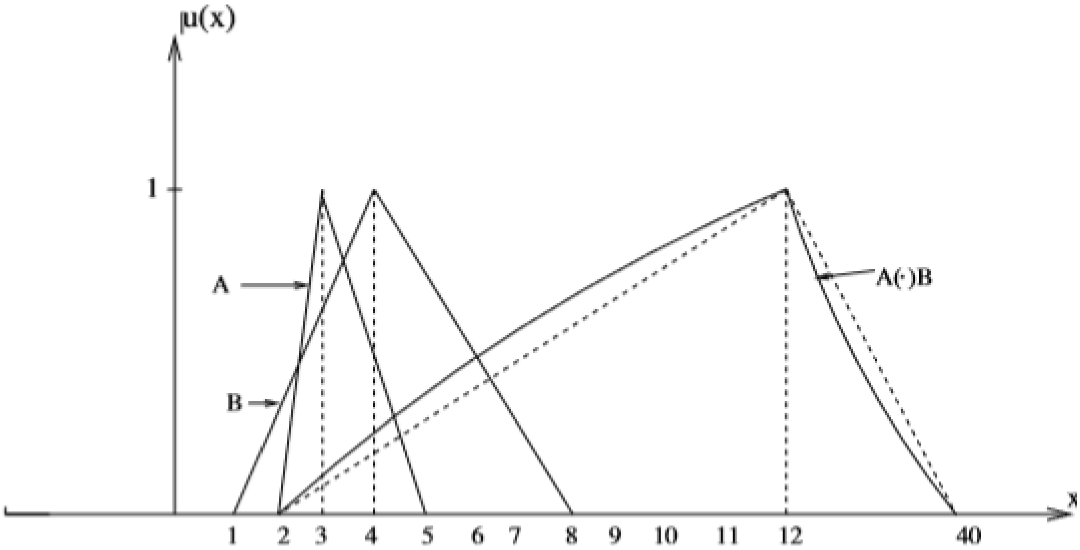
$$A_\alpha = [\alpha + ۲, -۲\alpha + ۵],\ B_\alpha = [۳\alpha + ۱, -۴\alpha + ۸].$$

$$\begin{aligned} A_\alpha(.)B_\alpha &= [(\alpha+۲)(۳\alpha+۱), (-۲\alpha+۵)(-۴\alpha+۸)] \\ &= [۳\alpha^۲ + ۷\alpha + ۲, ۸\alpha^۲ - ۳۶\alpha + ۴۰] = [c^L_\alpha, c^R_\alpha]. \end{aligned}$$

برای $\alpha = ۰$، $A_۰(.)B_۰ = [۲,۴۰]$ و برای $\alpha = ۱$، $A_۱(.)B_۱ = [۱۲,۱۲] = ۱۲$. بنابراین تابع عضویت $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ برای $x = ۱۲$ مقدار یک می‌گیرد و برای $x < ۲$ و همچنین برای $x > ۴۰$ برابر صفر است. بین ۲ و ۱۲، و همچنین بین ۱۲ و ۴۰، قطعه‌های تابع عضویت خط مستقیم نیست، سهمی است. با وجود این عبارت درجه دوم در $A_\alpha(.)B_\alpha$، می‌توان عبارت دقیق برای این قطعه‌های سهموی به دست آورد. برای به دست آوردن معادله قطعه‌های سهموی نیاز است حدود $x \in \mathbb{R}_+$ را پیدا کنیم که مجموعه‌های $\alpha-$برش در آن معتبر است. برای پیدا کردن حدود $x \in \mathbb{R}_+$ از c^L_α استفاده کرده و معادله $x = ۳\alpha^۲ + ۷\alpha + ۲$ را حل می‌کنیم و قرار می‌دهیم $۳\alpha^۲ + ۷\alpha + (۲ - x) = ۰$، داریم $\alpha = \frac{-۷ \mp \sqrt{۲۵ + ۱۲x}}{۶}$. تنها علامت + را در نظر می‌گیریم زیرا در $x = ۱۲$، $\alpha = ۱$ است و α نمی‌تواند منفی باشد. به طور مشابه برای c^R_α، معادله $x = ۸\alpha^۲ - ۳۶\alpha + ۴۰$ را حل کرده و قرار می‌دهیم $۸\alpha^۲ - ۳۶\alpha + (۴۰ - x) = ۰$ و داریم $\alpha = \frac{۹ - \sqrt{۱ + ۲x}}{۴}$. بنابراین تابع عضویت $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{A}(.)\tilde{B}}(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۲ \text{ یا } x > ۴۰, \\ \frac{(-۷ + \sqrt{۲۵ + ۱۲x})}{۶} & ۲ \le x \le ۱۲, \\ \frac{۹ - \sqrt{۱ + ۲x}}{۴} & ۱۲ < x \le ۴۰. \end{cases}$$

واضح است که تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی نیست. این مطلب در نمودار زیر مشاهده می‌شود. گاهی، اعداد فازی $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ و $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ و $\tilde{A}^{-1}$ و $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ و $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ که لزوماً عدد فازی مثلثی نیستند،



شکل ۸.۱: $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ عدد فازی مثلثی نیست.

توسط عدد فازی مثلثی مناسب تقریب زده می‌شوند. عدد فازی مثلثی به دست آمده تقریب مثلثی از عدد فازی داده شده نامیده می‌شود. تقریب مثلثی از $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ در این مثال عدد فازی مثلثی $(۲, ۱۲, ۴۰)$ است.

تعریف ۱۳.۵.۱. (عدد فازی ذوزنقه‌ای) عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ به صورت $\tilde{A} = (a_l, \underline{a}, \overline{a}, a_u)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۹.۱)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰ & x < a_l, x > a_u \\ \frac{x-a_l}{\underline{a}-a_l} & a_l \leq x < \underline{a} \\ ۱ & \underline{a} \leq x \leq \overline{a} \\ \frac{a_u-x}{a_u-\overline{a}} & \overline{a} \leq x \leq a_u. \end{cases}$$

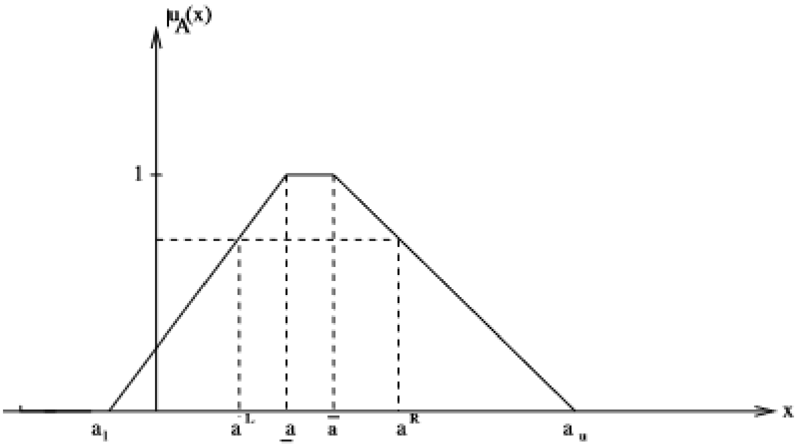
علاوه بر این $\alpha-$برش عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_l, \underline{a}, \overline{a}, a_u)$ بازه بسته‌ی زیر است.

$$A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^R] = [(\underline{a} - a_l)\alpha + a_l, -(a_u - \overline{a})\alpha + a_u], \alpha \in (۰, ۱].$$

نشان می‌دهیم که چگونه بازه‌ی بسته A_α به دست می‌آید. طبق تعریف ۱.۳.۱، مجموعه $\alpha-$برش از مجموعه فازی $\tilde{A}$ مجموعه قطعی A_α است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

بنابراین مقدار تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای برای $a_l \leq x < \underline{a}$ طبق تعریف $\alpha-$برش باید بزرگتر مساوی α باشد بنابراین قرار می‌دهیم $\frac{x-a_l}{\underline{a}-a_l} \geq \alpha$ و حدود x را محاسبه می‌کنیم، لذا $x \geq (\underline{a}-a_l)\alpha+a_l$



شکل ۹.۱: عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_l, \underline{a}, \overline{a}, a_u)$

به این ترتیب نقطه راسی چپ بازه‌ی بسته‌ی $\alpha-$برش از عدد فازی ذوزنقه‌ای به دست می‌آید و همچنین برای $a_u \leq x \leq \overline{a}$ تابع عضویت باید بزرگتر مساوی α باشد. به عبارت دیگر $\alpha \geq \frac{a_u - x}{a_u - \overline{a}}$. حدود x را محاسبه می‌کنیم، لذا $x \leq -(a_u - \overline{a})\alpha + a_u$ و نقطه راسی راست بازه‌ی بسته‌ی $\alpha-$برش از عدد فازی ذوزنقه‌ای به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$A_\alpha = [a^L_\alpha, a^R_\alpha] = [(\underline{a} - a_l)\alpha + a_l, -(a_u - \overline{a})\alpha + a_u], \alpha \in (\circ, ۱].$$

فرض کنید $\tilde{A} = (a_l, \underline{a}, \overline{a}, a_u)$ و $\tilde{B} = (b_l, \underline{b}, \overline{b}, b_u)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. آن‌گاه از $\alpha-$برش‌ها برش‌های A_α وB_α استفاده می‌کنیم تا $\tilde{A} * \tilde{B}$ را که $*$ یکی از عملگرهای $(+)$ و $(-)$ و $(.)$ و $(:)$ و $\vee$ و $\wedge$ است را محاسبه کنیم. محاسبات به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(+)\tilde{B} &= (a_l + b_l, \underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}, a_u + b_u), \\
-\tilde{A} &= (-a_u, -\overline{a}, -\underline{a}, -a_l), \\
\tilde{A}(-)\tilde{B} &= (a_l - b_u, \underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}, a_u - b_l), \\
k\tilde{A} &= (ka_l, k\underline{a}, k\overline{a}, ka_u), k > \circ
\end{aligned}$$

توجه شود که $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ و $-\tilde{A}$ و $\tilde{A}(-)\tilde{B}$ و $k\tilde{A}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای هستند، اما $\tilde{A}^{-۱}$ و $\tilde{A}(.)\tilde{B}$ و $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ و $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ و $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ لزوماً اعداد فازی ذوزنقه‌ای نیستند.

توجه شود که برای اعداد فازی تعاریف مختلفی ارائه شده است. به عنوان مثال تعریف ۱۴.۵.۱ توسط دبایز و پراد [۲] آورده شده است، که معادل همان تعریف عدد فازی ذوزنقه‌ای است.

[۲] Dubios and Prade

تعریف ۱۴.۵.۱. [۸] عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{a}$ زیر مجموعه‌ای فازی روی خط اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، به طوری که تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}}(a)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) نگاشتی پیوسته از $\mathbb{R}^{۱} \longrightarrow [۰,۱]$ است.

(۲) برای هر $a \in (-\infty, a_{۱}]$، داریم $\mu_{\tilde{a}}(a) = ۰$.

(۳) در بازه‌ی $(a_{۱}, a_{۲})$ پیوسته و صعودی اکید است.

(۴)برای هر $a \in [a_{۲}, a_{۳}]$، $\mu_{\tilde{a}}(a) = ۱$.

(۵) در بازه‌ی $(a_{۳}, a_{۴})$ پیوسته و نزولی اکید است.

(۶) برای هر $a \in [a_{۴}, +\infty)$، $\mu_{\tilde{a}}(a) = ۰$.

۶.۱ تحدب

تحدب نقش مهمی در تئوری مسائل برنامه‌ریزی کسری چندهدفه دارد. به عنوان مثال قضیه‌ها، دوگان، شرایط بهینه و همگرایی الگوریتم‌ها. انواع مختلف تعمیم تحدب به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۶.۱. (تابع محدب) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب باشد و $f : X \to \mathbb{R}$. آنگاه تابع f محدب است اگر به ازای هر $x, u \in X$ و به ازای هر $۰ \leq \delta \leq ۱$،

$$f(\delta x + (۱-\delta)u) \leq \delta f(x) + (۱-\delta) f(u).$$

تعریف ۲.۶.۱. (تابع شبه محدب) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب باشد و $f : X \to \mathbb{R}$. آنگاه تابع f روی X، تابع شبه محدب است اگر به ازای هر $x, u \in X$ و به ازای هر $۰ \leq \delta \leq ۱$،

$$f(\delta x + (۱-\delta)u) \leq max\{f(x), f(u)\}.$$

تعریف ۳.۶.۱. (تابع شبه محدب اکید) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب باشد و $f : X \to \mathbb{R}$. آنگاه تابع f روی X، تابع شبه محدب اکید است اگر به ازای هر $x, u \in X$ با $x \neq u$ و به ازای هر $۰ \leq \delta \leq ۱$،

$$f(\delta x + (۱-\delta)u) \leq f(u).$$

تعریف ۴.۶.۱. (تابع محدب نما) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب باشد و $f : X \to \mathbb{R}$. آنگاه تابع f روی X، تابع محدب نما است اگر تابع f مشتق پذیر باشد و به ازای هر $x, u \in X$ داشته باشیم:

$$\nabla f(u)^T (x-u) \geq ۰ \Rightarrow f(x) \geq f(u).$$

تعریف ۵.۶.۱. (تابع محدب نما اکید) فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب باشد و $f : X \to \mathbb{R}$. آنگاه تابع f روی X، تابع محدب نما اکید است اگر تابع f مشتق پذیر باشد و به ازای هر $x, u \in X$

$$\nabla f(u)^T (x-u) \geq ۰ \Rightarrow f(x) > f(u).$$

فصل ۲

برنامه‌ریزی کسری چندهدفه

۱.۲ مقدمه

برنامه ریزی کسری نسبت بین توابع فیزیکی و (یا) اقتصادی مانند هزینه/حجم و هزینه/زمان و هزینه/سود را بررسی می‌کند، به طوری که کارایی یک سیستم ماکزیمم شود. هنگامی که چندین تابع هدف متناقض وجود دارد، جواب بهینه برای یک تابع، ضرورتاً برای توابع دیگر بهینه نیست، بنابراین جواب غیر تسلطی و کارا را به دست می‌آوریم. یعنی جوابی که هیچ یک از مولفه‌هایش نمی‌توانند بهبود یابند، مگر اینکه حداقل یکی از مولفه‌هایش بدتر شود.
محاسبات مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه زیاد است بنابراین آنها به مسائل خطی‌کسری تک‌هدفه تبدیل می‌شوند. عمده مطالب این فصل از مراجع [۲۰، ۴۰، ۳۴] است.
مسئله برنامه ریزی خطی‌کسری چندهدفه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} & max \left(\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}, \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}, \cdots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)} \right) \\ & s.t. \;\; x \in X. \end{aligned} \qquad (۱.۲)$$

که در آن

۱) مجموعه $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq ۰\}$ محدب و کراندار است، A ماتریس محدودیت‌ها $m \times n$ است، x متغیر تصمیم، بردار n بعدی است و $b \in \mathbb{R}^m$ است.

۲) $p \geq ۲$

۳) $f_i(x) = (c_i)^T x + c_{i.n+۱}, g_i(x) = (d_i)^T x + d_{i.n+۱} \qquad \forall i = ۱, \ldots, p$

۴) $c_i, d_i \in \mathbb{R}^n, c_{i.n+۱}, d_{i.n+۱} \in \mathbb{R}, \qquad \forall i = ۱, \ldots, p$

۵) $(d_i)^T x + d_{i.n+۱} > ۰, \qquad \forall x \in X \qquad \forall i = ۱, \ldots, p$

هدف مسئله max سازی (۱.۲) پیدا کردن جواب‌های کارا، کارای ضعیف و کارای سره می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲. نقطه $x^* \in X$ کارای ضعیف برای مسئله (۱.۲) است، اگر و فقط اگر هیچ $x \in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \qquad \forall i = ۱, \dots, p$$

تعریف ۲.۱.۲. نقطه $x^* \in X$ کارا برای مسئله (۱.۲) است، اگر و فقط اگر هیچ $x \in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \geq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \qquad \forall i = ۱, \dots, p$$

و برای حداقل یک j بزرگتر اکید باشد یعنی $\frac{f_j(x)}{g_j(x)} > \frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)}$.

مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۱.۲) را در نظر بگیرید. متناظر با مسئله (۱.۲) مسئله چندهدفه خطی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$max \quad F(x) = (F_۱(x), \dots, F_p(x)) \tag{۲.۲}$$

$$x \in X \subseteq \mathbb{R}^n,$$

که در آن $F_i(x) = f_i(x) - v_i g_i(x)$ و $v_i \geq ۰$ به ازای هر $i = ۱, \dots, p$ پارامترهای ثابت هستند.

تعریف ۳.۱.۲. (جفرن)[۱] نقطه $x^* \in X$ کارای سره برای مسئله (۱.۲) است اگر x^* کارا باشد و برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با $\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} < \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$، عدد مثبت M و اندیس $i \neq j$ای با $\frac{f_j(x)}{g_j(x)} < \frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \leq M(\frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)} - \frac{f_j(x)}{g_j(x)}).$$

تعریف ۴.۱.۲. مسائل برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۱.۲) و چندهدفه (۲.۲) محدب نامیده می‌شوند هرگاه X مجموعه‌ای محدب باشد و $f_i(x)$ به ازای هر $i = ۱, \dots, p$ توابعی مقعر و $g_i(x)$ به ازای هر $i = ۱, \dots, p$ توابعی محدب باشند.

در ادامه، فرض می‌کنیم $g_i(x) > ۰ \quad \forall \ i = ۱, \dots, p, \quad \forall x \in X$.

قضیه ۵.۱.۲. *نقطه $x^* \in X$ جواب کارای (۱.۲) است اگر و فقط اگر جواب کارای (۲.۲) با $F(x^*) = ۰$ و $v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$ $(i = ۱, \dots, p)$ باشد.*

برهان. فرض کنید $x^* \in X$ جواب کارای (۱.۲) باشد. آنگاه وجود ندارد $x \in X$ به طوری که

$$\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \leq \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \quad \forall i = ۱, \dots, p.$$

فرض کنید $\forall i = ۱, \dots, p$ $v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$. از نابرابری بالا نتیجه می‌گیریم $x \in X$ وجود ندارد به طوری که

$$۰ \leq f_i(x) - v_i g_i(x) = F_i(x) \quad \forall i = ۱, \dots, p.$$

[۱] Geoffrion

از این که

$$\circ = f_i(x^*) - v_i g_i(x^*) = F_i(x^*), \quad i = ۱, \dots, p$$

می‌بینیم که وجود ندارد $x \in X$ به طوری که $F_i(x^*) \leq F_i(x)\ \forall i = ۱, \dots, p$. بنابراین x^* جواب کارا برای (۲.۲) با $F(x^*) = \circ$ است.

برعکس فرض کنید x^* جواب کارا (۲.۲) با $F(x^*) = \circ$ باشد. اگر x^* جواب کارای (۱.۲) نباشد $\overline{x} \in X$ وجود دارد به طوری که

$$v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \leq \frac{f_i(\overline{x})}{g_i(\overline{x})}, \ i = ۱, \dots, p$$

با یک نامساوی اکید.

بنابراین $F_i(\overline{x}) = f_i(\overline{x}) - v_i g_i(\overline{x}) \geq \circ$ برای $i = ۱, \dots, p$ و برای حداقل یک j، $F_j(\overline{x}) = f_j(\overline{x}) - v_j g_j(\overline{x}) > \circ$ و این متناقض است با این که $F(x^*) = \circ$، جواب کارای (۲.۲) است. بنابراین، اثبات کامل است. □

برای گسترش، فرض کنید اعداد حقیقی $k > \circ$ و $K > \circ$ چنان باشند که $k < g_i(x) < K$ برای هر i. تعریف جواب کارای سره برای مسئله (۱.۲) را در نظر می‌گیریم و توجه داریم که جواب کارای x^* از مسئله (۱.۲) کارای سره است اگر برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} < \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$، عدد مثبت M و اندیس jای با $\frac{f_j(x)}{g_j(x)} > \frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \leq M(\frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)} - \frac{f_j(x)}{g_j(x)}).$$

دوباره این نامساوی‌ها را باز نویسی می‌کنیم.

جواب کارای $x^* \in X$ کارای سره‌ی (۱.۲) است، اگر برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با

$$f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x) > \circ \tag{۳.۲}$$

عدد مثبت $\tilde{M}$ و اندیس jای با

$$f_j(x)g_j(x^*) - f_j(x^*)g_j(x) < \circ \tag{۴.۲}$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x)}{g_i(x^*)} \leq \tilde{M}\frac{f_j(x^*)g_j(x) - f_j(x)g_j(x^*)}{g_j(x^*)}. \tag{۵.۲}$$

و $\tilde{M} = M\frac{K}{k}$.

در ارتباط با جواب کارای سره قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۶.۱.۲. *نقطه x^* جواب کارای سره برای مسئله (۱.۲) است اگر و فقط اگر جواب کارای سره مسئله (۲.۲) با $F(x^*) = \circ$ و $v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$ $(i = ۱, \dots, p)$ باشد.*

برهان. فرض کنید x^* جواب کارای سره برای مسئله (۱.۲) باشد. طبق قضیه ۵.۱.۲، x^* جواب کارای (۲.۲) با $F(x^*) = ۰$ است. حال x^* جواب کارای سره مسئله (۲.۲) است اگر و فقط اگر برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با

$$F_i(x) - F_i(x^*) > ۰ \tag{۶.۲}$$

عدد مثبت M و اندیس‌ jای با

$$F_j(x) - F_j(x^*) < ۰ \tag{۷.۲}$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$F_i(x) - F_i(x^*) \leq M(F_j(x^*) - F_j(x)). \tag{۸.۲}$$

حال اگر قرار دهیم $F_i(x^*) = ۰$ و $F_i(x) = f_i(x) - v_i g_i(x)$ با $v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$ برای $i = ۱, \ldots, p$، نتیجه می‌گیریم x^* کارای سره (۲.۲) است اگر و فقط اگر برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با

$$f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x) > ۰ \tag{۹.۲}$$

عدد مثبت M و اندیس‌ jای با

$$f_j(x)g_j(x^*) - f_j(x^*)g_j(x) < ۰ \tag{۱۰.۲}$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x)}{g_i(x^*)} \leq M\frac{f_j(x^*)g_j(x) - f_j(x)g_j(x^*)}{g_j(x^*)}. \tag{۱۱.۲}$$

با فرض $\tilde{M} = M$، روابط (۱۱.۲)-(۹.۲) همان روابط (۵.۲)-(۳.۲) است که فرضیه را ضمانت می‌کند. در نتیجه x^* کارای سره (۲.۲) است.
برعکس، فرض کنید x^* جواب کارای سره (۲.۲) با $F(x^*) = ۰$ است. آنگاه بنا به تعریف، روابط (۸.۲)-(۶.۲) را داریم. از این روابط (۱۱.۲)-(۹.۲) را نتیجه می‌گیریم که روابط (۵.۲)-(۳.۲) با $\tilde{M} = M$ هستند. در نتیجه x^* کارای سره (۱.۲) است. □

۲.۲ روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی در مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری تک‌هدفه و چندهدفه

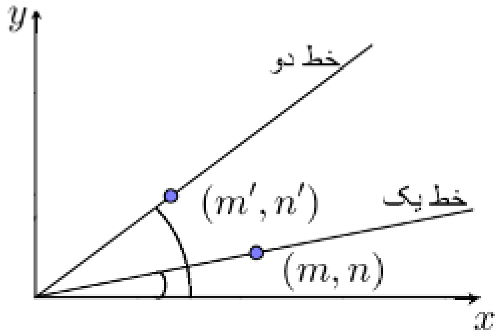
مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری تک‌هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} max & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{cx+c_{n+۱}}{dx+d_{n+۱}} \\ s.t. & x \in X = \{x | Ax \leq b, x \geq ۰\} \end{array} \tag{۱۲.۲}$$

که در آن X یک مجموعه کراندار و ناتهی است. در این فصل برای تست کارایی و کارایی ضعیف در مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه از یک تعبیر هندسی ساده و روش برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌کنیم.

۱.۲.۲ روش برنامه‌ریزی خطی برای تست بهینگی در مسائل برنامه‌ریزی خطی کسری تک‌هدفه

فرض کنید $(m,n) \in \mathbb{R}^2_+$ و $m > 0$ و $n > 0$ داده شده‌اند. همچنین، فرض کنید که $y = \frac{n}{m}x$ یک خط راست باشد که از نقطه (m,n) و مبدا می‌گذرد. نقطه $(m',n') \in \mathbb{R}^2$ با $m' > 0$ و $n' > 0$ بالای خط $y = \frac{n}{m}x$ است اگر و فقط اگر شیب خط عبوری از (m',n') و مبدا بزرگتر از $\frac{n}{m}$ باشد. در واقع باید $\frac{n'}{m'} > \frac{n}{m}$. این مطلب در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.



شکل ۱.۲: شیب خط دو بزرگتر از خط یک است و لذا (m',n') بالای خط یک است.

قضیه ۱.۱.۲.۲. *اگر m، n، m' و n' اعداد حقیقی و مثبت باشند، آن‌گاه*

$$\frac{n'}{m'} > \frac{n}{m} \Longleftrightarrow \exists\theta, \quad \exists d^-, \quad \exists d^+ \ \ s.t.$$
$$(\theta \in \mathbb{R}^{\geq 0}, d^-, d^+ \in \mathbb{R}^{\geq 0}, n' - d^+ = n\theta, \ \ m' + d^- = m\theta, \ \ d^- + d^+ > 0).$$

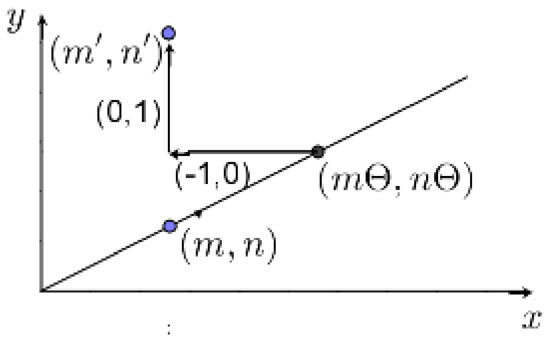
برهان.

$$\frac{n'}{m'} > \frac{n}{m} \Longleftrightarrow \frac{n'}{n} > \frac{m'}{m} \Longleftrightarrow \exists\theta(\theta \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \frac{n'}{n} > \theta > \frac{m'}{m})$$
$$\Longleftrightarrow \exists\theta(\theta \in \mathbb{R}^{\geq 0}, n' > n\theta, m' < m\theta)$$
$$\Longleftrightarrow \exists\theta, \ \exists d^-, \ \exists d^+,$$
$$(\theta \in \mathbb{R}^{\geq 0}, d^-, d^+ \in \mathbb{R}^{\geq 0}, n' - d^+ = n\theta, m' + d^- = m\theta, d^- + d^+ > 0).$$

□

بنابراین $\frac{n'}{m'} > \frac{n}{m}$ معادل است با این که در جهت (m,n) به اندازه‌ی طول گام $\theta \geq 0$ حرکت کرده و به $(m\theta, n\theta)$ برسیم، سپس در جهت $(-1,0)$ به اندازه طول گام d^- حرکت کرده تا به $(m\theta - d^-, n\theta)$ برسیم و همچنین از آن نقطه در جهت $(0,1)$ به اندازه طول گام d^+ حرکت کرده تا به $(m\theta - d^-, n\theta + d^+) = (m',n')$ برسیم. این مطلب در شکل ۲.۲ نشان داده شده است.

تعبیر هندسی بالا را برای تست بهینگی در بهینه‌سازی خطی‌کسری به کار می‌بریم. برای هر جواب شدنی x، $(dx + d_{n+1}, cx + c_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ را تعریف می‌کنیم. بنابراین x یک جواب بهینه است



شکل ۲.۲: تجزیه و تحلیل حرکت از (m,n) به (m',n') با $\frac{n'}{m'} > \frac{n}{m}$.

اگر و فقط اگر جواب شدنی دیگری وجود نداشته باشد که بالای خط راستی قرار بگیرد که از مبدا و $(dx + d_{n+1}, cx + c_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$عبور می‌کند. اما این فقط زمانی درست است که برای هر $x \in X$، داشته باشیم $cx + c_{n+1} > 0$ و $dx + d_{n+1} > 0$. از فرض بهینه‌سازی خطی‌کسری برای هر $x \in X$ داریم $dx + d_{n+1} > 0$، اما صورت کسر ممکن است برای بعضی جواب‌های شدنی منفی باشد. برای برطرف کردن این مشکل به صورت زیر عمل می‌کنیم.

مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری (۱۲.۲) را در نظر بگیرید. مسئله زیر را به طور معادل داریم:

$$\begin{array}{ll} max & \frac{cx+c_{n+1}}{dx+d_{n+1}} + M \\ s.t. & x \in X \end{array} \tag{۱۳.۲}$$

که در آن M یک عدد ثابت است. مسئله (۱۳.۲) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{array}{ll} max & \frac{cx+c_{n+1}+M(dx+d_{n+1})}{dx+d_{n+1}} \\ s.t. & x \in X. \end{array} \tag{۱۴.۲}$$

برای هر $x \in X$ داریم $dx + d_{n+1} > 0$. بنابراین $\overline{M} > 0$ای وجود دارد به طوری که برای هر $M > \overline{M}$ $cx + c_{n+1} + M(dx + d_{n+1}) > 0$. بنابراین برای حل (۱۲.۲) می‌توانیم (۱۴.۲) را حل کنیم، که صورت کسر در تابع هدف برای همه $M > \overline{M}$ در ناحیه شدنی X مثبت است. اکنون بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید برای هر $x \in X$ داریم $cx + c_{n+1} > 0$. می‌دانیم $\overline{x} \in X$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری (۱۲.۲) نیست اگر و فقط اگر $\widehat{x} \in X$ وجود داشته باشد به طوری که، $\frac{c\widehat{x}+c_{n+1}}{d\widehat{x}+d_{n+1}} > \frac{c\overline{x}+c_{n+1}}{d\overline{x}+d_{n+1}}$. بنا به قضیه ۱.۲.۲ این معادل است با

$$\exists\theta\ \exists d^-\ \exists d^+, \theta \in \mathbb{R}^{\geq 0}, d^-, d^+ \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$c\widehat{x} + c_{n+1} - d^+ = (c\overline{x} + c_{n+1})\theta, d\widehat{x} + d_{n+1} + d^- = (d\overline{x} + d_{n+1})\theta, d^- + d^+ > 0).$$

از بحث بالا استفاده می‌کنیم و یک روش برنامه‌ریزی خطی را پیشنهاد می‌کنیم به طوری که بهینگی مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری را توسط قضیه ۲.۲.۲ تست می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۲. *$X \ni x^*$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری (۱۲.۲) است اگر و فقط اگر مقدار بهینه تابع هدف مسئله زیر صفر باشد:*

$$f^*_{t.} = max \quad (d^- + d^+)$$
$$s.t. \begin{cases} cx + c_{n+1} - d^+ = f(x^*)\theta \\ dx + d_{n+1} + d^- = g(x^*)\theta \\ f(x^*) = cx^* + c_{n+1} \\ g(x^*) = dx^* + d_{n+1} \\ Ax \leq b, x \geq 0 \\ \theta \geq 0, d^- \geq 0, d^+ \geq 0. \end{cases} \qquad (۱۵.۲)$$

برهان. فرض کنید S ناحیه شدنی مسئله (۱۵.۲) باشد و $f^*_{t.}$ مقدار بهینه تابع هدف. ابتدا فرض کنید که $x^* \in X$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری (۱۲.۲) نیست. بنابراین

$$\exists \overline{x} \in X, \frac{c\overline{x} + c_{n+1}}{d\overline{x} + d_{n+1}} > \frac{cx^* + c_{n+1}}{dx^* + d_{n+1}} = \frac{f(x^*)}{g(x^*)} \Rightarrow \exists \overline{x}(\overline{x} \in X, \frac{c\overline{x} + c_{n+1}}{f(x^*)} > \frac{d\overline{x} + d_{n+1}}{g(x^*)})$$

$$\xrightarrow{\text{از قضیه ۱.۲.۲}} \quad \exists\theta\ \exists d^- \exists d^+, \overline{x} \in S, \theta \in \mathbb{R}^{\geq 0}, d^-, d^+ \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$c\overline{x} + c_{n+1} - d^+ = f(x^*)\theta, d\overline{x} + d_{n+1} + d^- = g(x^*)\theta, d^- + d^+ > 0$$

$$\Rightarrow (\overline{x}, \theta, d^-, d^+) \in S, d^- + d^+ > 0 \Rightarrow f^*_{t.} > 0.$$

برعکس، فرض کنید مقدار بهینه مسئله (۱۵.۲) غیر صفر است. همچنین فرض کنید $(\overline{x}, \overline{\theta}, \overline{d}^-, \overline{d}^+)$ جواب بهینه مسئله (۱۵.۲) با $f^*_{t.} = (\overline{d}^- + \overline{d}^+) > 0$ باشد. بنابراین $c\overline{x} + c_{n+1} - \overline{d}^+ = f(x^*)\overline{\theta}$ و $d\overline{x} + d_{n+1} + \overline{d}^- = g(x^*)\overline{\theta}$ و حداقل یکی از $\overline{d}^+$ و $\overline{d}^-$ مثبت است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $\overline{d}^+ > 0$. بنابراین $c\overline{x} + c_{n+1} > f(x^*)\overline{\theta}$ و $d\overline{x} + d_{n+1} \leq g(x^*)\overline{\theta}$.

اگر $\overline{\theta} = 0$ آن‌گاه $d\overline{x} + d_{n+1} \leq 0$ و $\overline{x} \in X$ و این با فرض در تناقض است. بنابراین $\overline{\theta} > 0$ و

$$c\overline{x} + c_{n+1} > f(x^*)\overline{\theta} > 0, \quad \frac{1}{d\overline{x} + d_{n+1}} \geq \frac{1}{g(x^*)\overline{\theta}} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{c\overline{x} + c_{n+1}}{d\overline{x} + d_{n+1}} > \frac{f(x^*)}{g(x^*)} = \frac{cx^* + c_{n+1}}{dx^* + d_{n+1}}, \quad \overline{x} \in X$$

بنابراین x^* جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری (۱۲.۲) نیست و اثبات کامل است. □

۲.۲.۲ روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی در مسائل برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه

اکنون بحث فوق را برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه توسعه می‌دهیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم برای هر $x \in X$ و $i = 1, \dots, p$ داریم $c_i x + c_{i.n+1} > 0$. می‌توانیم تعبیر هندسی از بهینگی در مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری را برای هر تابع هدف در مسئله برنامه‌ریزی

خطی‌کسری چندهدفه به کار ببریم. با کمک تعریف کارایی ضعیف، $\overline{x} \in X$ جواب کارای ضعیف نیست اگر و فقط اگر $\widehat{x} \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{c_i\widehat{x} + c_{i.n+1}}{d_i\widehat{x} + d_{i.n+1}} > \frac{c_i\overline{x} + c_{i.n+1}}{d_i\overline{x} + d_{i.n+1}}, \quad i = 1, \ldots, p,$$

و این معادل است با این که نقطه $(d_i\widehat{x} + d_{i.n+1}, c_i\widehat{x} + c_{i.n+1})$ بالای خط راستی قرار دارد که از مبدا و نقطه‌ی $(d_i\overline{x} + d_{i.n+1}, c_i\overline{x} + c_{i.n+1}),\ i = 1, \ldots, p$ می‌گذرد. طبق آنچه که در بالا گفته شد، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳.۲.۲. *$x^* \in X$ جواب کارای ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است اگر و فقط اگر مقدار بهینه مسئله زیر صفر باشد.*

$$f^*_{twe} = Max_{i=1,\ldots,p} min\{d_i^- + d_i^+\}$$

$$s.t. \begin{cases} c_ix + c_{i.n+1} - d_i^+ = f_i(x^*)\theta_i, & i = 1, \ldots, p \\ d_ix + d_{i.n+1} + d_i^- = g_i(x^*)\theta_i, & i = 1, \ldots, p \\ c_ix^* + c_{i.n+1} = f_i(x^*), & i = 1, \ldots, p \\ d_ix^* + d_{i.n+1} = g_i(x^*) & i = 1, \ldots, p \\ d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0, \quad \theta_i \geq 0, & i = 1, \ldots, p \\ x \in X. \end{cases} \tag{۱۶.۲}$$

برهان. اثبات شبیه قضیه ۲.۲.۲ است. □

این قضیه بیان می‌کند که $x^* \in X$ جواب کارای ضعیف است اگر و فقط اگر $\overline{x} \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که $(d_i\overline{x}+d_{i.n+1}, c_i\overline{x}+c_{i.n+1}),\ i = 1, \ldots, p$ بالای خط $y = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}x,\ i = 1, \ldots, p$ قرار بگیرد.

اگر در مسئله (۱۶.۲) قرار دهیم $t = min_{i=1,\ldots,p}\{d_i^- + d_i^+\} \geq 0$، در این صورت مسئله به فرم برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود.

$$f^*_{twe} = max\ t$$

$$s.t. \begin{cases} 0 \leq t \leq d_i^- + d_i^+ & i = 1, \ldots, p \\ c_ix + c_{i.n+1} - d_i^+ = f_i(x^*)\theta_i, & i = 1, \ldots, p \\ d_ix + d_{i.n+1} + d_i^- = g_i(x^*)\theta_i, & i = 1, \ldots, p \\ c_ix^* + c_{i.n+1} = f_i(x^*), & i = 1, \ldots, p \\ d_ix^* + d_{i.n+1} = g_i(x^*) & i = 1, \ldots, p \\ d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0, \quad \theta_i \geq 0, & i = 1, \ldots, p \\ x \in X. \end{cases} \tag{۱۷.۲}$$

می‌دانیم که مجموعه جواب‌های کارا زیر مجموعه‌ای از مجموعه جواب‌های کارا ضعیف است. هنگامی که یک جواب، کارای ضعیف است می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا آن جواب کارا است یا خیر. قضیه زیر به ما کمک می‌کند تا کارایی یک نقطه را بررسی کنیم.

قضیه ۴.۲.۲. *فرض کنید $x^* \in X$ یک جواب کارای ضعیف در مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه (۱.۲) باشد. آن‌گاه x^* یک جواب کارا است اگر و فقط اگر مقدار بهینه مسئله زیر صفر باشد.*

$$f^*_{tse} = \ max \sum_{i=1}^{p} d_i^- + d_i^+$$

$$s.t. \begin{cases} c_i x + c_{i.n+1} - d_i^+ = f_i(x^*)\theta_i, & i = 1, \ldots, p \\ d_i x + d_{i.n+1} + d_i^- = g_i(x^*)\theta_i, & i = 1, \ldots, p \\ d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0, \quad \theta_i \geq 0, & i = 1, \ldots, p \\ x \in X. \end{cases} \tag{۱۸.۲}$$

برهان. فرض کنید x^* یک جواب کارا نباشد بنابراین $\overline{x} \in X$ وجود دارد به طوری که $\frac{c_i\overline{x}+c_{i.n+1}}{d_i\overline{x}+d_{i.n+1}} \geq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} = \frac{c_i x^*+c_{i.n+1}}{d_i x^*+d_{i.n+1}},\ i = 1, \ldots, p$ و حداقل برای یک i نابرابری اکید برقرار است. چون x^* کارای ضعیف است برای حداقل یک i تساوی برقرار است. فرض کنید برای $i = 1, \ldots, i_1,\ \ 1 \leq i_1 \leq p$ نامساوی اکید برقرار باشد و برای $i = i_1 + 1, \ldots, p$ تساوی برقرار باشد. داریم:

$$\frac{c_i\overline{x} + c_{i.n+1}}{d_i\overline{x} + d_{i.n+1}} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \quad i = 1, \ldots, i_1,$$

$$\xrightarrow{\text{از قضیه (۱.۲.۲)}} \ \exists \overline{x} \ \ \exists\theta_i \ \exists d_i^- \ \ \exists d_i^+, \ \ \theta_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, d_i^-, d_i^+ \in \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$(c_i\overline{x}+c_{i.n+1}-d_i^+ = f_i(x^*)\theta_i, d_i\overline{x}+d_{i.n+1}+d_i^- = g_i(x^*)\theta_i, d_i^- + d_i^+ > 0), \quad i = 1, \ldots, i_1, \tag{۱۹.۲}$$

همچنین،

$$\frac{c_i\overline{x} + c_{i.n+1}}{d_i\overline{x} + d_{i.n+1}} = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}, \qquad i = i_1 + 1, \ldots, p$$

$$\Rightarrow \theta_i = \frac{c_i\overline{x} + c_{i.n+1}}{f_i(x^*)} = \frac{d_i\overline{x} + d_{i.n+1}}{g_i(x^*)}, \qquad i = i_1 + 1, \ldots, p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_i\overline{x} + c_{i.n+1} = f_i(x^*)\theta_i \\ d_i\overline{x} + d_{i.n+1} = g_i(x^*)\theta_i \end{cases} \qquad i = i_1, \ldots, p \tag{۲۰.۲}$$

از (۱۹.۲) و (۲۰.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$(\overline{x}, \theta_1, \ldots, \theta_{i_1}, \theta_{i_1+1}, \ldots, \theta_i, d_1^-, d_1^+, \ldots, d_{i_1}^-, d_{i_1}^+, d_{i_1+1}^-, d_{i_1+1}^+, \ldots, d_p^-, d_p^+)$$

یک جواب شدنی برای مسئله (۱۸.۲) است. بنابراین $f^*_{tse} > 0$.

برعکس فرض کنید که مقدار بهینه مسئله (۱۸.۲) صفر نباشد. همچنین فرض کنید،

$$(\overline{x}, \overline{\theta_1}, \ldots, \overline{\theta_p}, \overline{d_1}^-, \overline{d_1}^+, \ldots, \overline{d_p}^-, \overline{d_p}^+)$$

جواب بهینه مسئله (۱۸.۲) باشد و

$$f^*_{tse} = \sum_{i=1}^{p} \overline{d}_i^- + \overline{d}_i^+ > 0$$

بنابراین $i \in \{1, \ldots, p\}$ وجود دارد به طوری که $\overline{d}_i^- + \overline{d}_i^+ > 0$. فرض کنید برای $i = \ell$ داشته باشیم $\overline{d}_\ell^- + \overline{d}_\ell^+ > 0$. بنابراین $d_\ell\overline{x} + d_{\ell.n+1} \leq g_\ell(x^*)\overline{\theta}_\ell$ و $c_\ell\overline{x} + c_{\ell.n+1} \geq f_\ell(x^*)\theta_\ell$ و یکی از این

نابرابری‌ها اکید است. لذا $\frac{f_\ell(x^*)}{g_\ell(x^*)} > \frac{c_\ell\overline{x}+c_{\ell.n+1}}{d_\ell\overline{x}+d_{\ell.n+1}}$ و برای iهای دیگر $\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \geq \frac{c_i\overline{x}+c_{i.n+1}}{d_i\overline{x}+d_{i.n+1}}$. در نتیجه x^* جواب کارا نیست و اثبات کامل است. □

قضیه ۴.۲.۲ بیان می‌کند که $x^* \in X$ کارا است اگر و فقط اگر $\overline{x} \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که برای هر i، $(d_i\overline{x}+d_{i.n+1}, c_i\overline{x}+c_{i.n+1}),\ i = 1, \dots, p$ بالا یا روی خط $y = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}x,\ i = 1, \dots, p$ قرار گیرد و برای حداقل یک i، $(d_i\overline{x} + d_{i.n+1}, c_i\overline{x} + c_{i.n+1}),\ i = 1, \dots, p$ بالای خط $y = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}x,\ i = 1, \dots, p$ قرار گیرد.

۳.۲ الگوریتمی برای پیدا کردن نقاط کارا

در این بخش الگوریتمی را بیان می‌کنیم که با کمک روش برنامه‌ریزی خطی از یک نقطه شدنی شروع کرده و نقطه کارای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه را می‌یابد. از قضیه ۳.۲.۲ استفاده می‌کنیم تا الگوریتم زیر را برای پیدا کردن جواب کارای ضعیف مسئله (۱.۲) فرمول‌بندی کنیم.

الگوریتم ۱:

گام ۱: یک جواب شدنی x° از مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه انتخاب کنید و قرار دهید $x^* = x^\circ$ و $k = 1$.

گام ۲: مسئله (۱۷.۲) را حل کنید. فرض کنید $(x^k, t^k, \theta^k, d^{k+}, d^{k-})$ جواب بهینه باشد.

گام ۳: اگر $t^k = 0$ آن‌گاه توقف کنید. x^k جواب کارای ضعیف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است. در غیر اینصورت قرار دهید $k = k + 1$ و $x^* = x^k$ و به مرحله ۲ بروید.

قضیه ۱.۳.۲. *دنباله $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ که توسط الگوریتم ۱ تولید می‌شود به جواب کارای ضعیف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه همگرا است.*

برهان. فرض کنید $\overline{x}_i$ جواب بهینه $i = 1, \dots, p$ $\quad max_{x\in X} \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ در مسئله (۱.۲) باشد. واضح است که هر x^k که در مرحله ۲ به دست می‌آید جواب شدنی مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است. علاوه بر این، به علت مثبت بودن d_i^{k+} و d_i^{k-} برای $i = 1, \dots, p$، در مقایسه با مقادیر به دست آمده برای x^{k-1}، x^k مقادیر صورت کسرها را افزایش می‌دهد و مقادیر همه‌ی مخرج کسرهای توابع هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه را کاهش می‌دهد. به عبارت دیگر

$$c_ix^1 + c_{i.n+1} \leq c_ix^2 + c_{i.n+1} \leq \dots \leq c_ix^k + c_{i.n+1} \leq \dots, \quad i = 1, \dots, p, \tag{۲۱.۲}$$

و

$$d_ix^1 + d_{i.n+1} \geq d_ix^2 + d_{i.n+1} \geq \dots \geq d_ix^k + d_{i.n+1} \geq \dots \quad i = 1, \dots, p. \tag{۲۲.۲}$$

بنابراین

$$\frac{f_i(x^1)}{g_i(x^1)} \leq \frac{f_i(x^2)}{g_i(x^2)} \leq \dots \leq \frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)} \leq \dots \leq \frac{f_i(\overline{x}_i)}{g_i(\overline{x}_i)} \quad i = 1, \dots, p. \tag{۲۳.۲}$$

ابتدا فرض کنید که حداقل یک برابری در دنباله نابرابری‌ها نشان داده شده در (۲۳.۲) وجود دارد. به طور دلخواه فرض می‌کنیم $\frac{f_{i_\circ}(x^{k_\circ})}{g_{i_\circ}(x^{k_\circ})} = \frac{f_{i_\circ}(x^{k_\circ-1})}{g_{i_\circ}(x^{k_\circ-1})}$. در نتیجه با حل (۱۷.۲) با $x^* = x^{k_\circ-1}$ نتیجه می‌گیریم $t^{k_\circ} = \circ, d_{i_\circ}^{k_\circ-} = d_{i_\circ}^{k_\circ+} = \circ$. لذا طبق قضیه ۳.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $x^{k_\circ}$ جواب کارای ضعیف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است.

حال فرض کنید که همه‌ی نابرابری‌ها در (۲۳.۲) اکید هستند. اثبات را به وسیله‌ی تقریبی با درجه دقت داده شده، کامل می‌کنیم. به علت نامساوی‌های (۲۳.۲) - (۲۱.۲) دنباله‌های $(f_i(x^k))_{k=\text{۱},\ldots,\infty}$ و $(g_i(x^k))_{k=\text{۱},\ldots,\infty}$ و $(\frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)})_{k=\text{۱},\ldots,\infty}$ برای هر $i = \text{۱},\ldots,p$ یکنوا هستند. همچنین این دنباله‌ها، بواسطه‌ی کرانداری مجموعه شدنی X از مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه کراندار هستند و همه‌ی صورت‌ها و مخرج‌ها روی مجموعه شدنی X مثبت اکید هستند. در نتیجه هر سه دنباله همگرا هستند. در نتیجه داریم:

$$\forall\, i = \text{۱},\ldots,p, \quad \forall\, \varepsilon > \circ, \quad \exists\, n_i(\varepsilon) \in N : \quad |\frac{f_i(x^{k+\text{۱}})}{g_i(x^{k+\text{۱}})} - \frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)}| < \varepsilon, \quad \forall\, k > n_i(\varepsilon)$$

قرار می‌دهیم:

$$N(\varepsilon) = max\{n_\text{۱}(\varepsilon), n_\text{۲}(\varepsilon), \ldots, n_p(\varepsilon)\}$$

داریم:

$$\forall\, i = \text{۱},\ldots,p, \quad \forall\, \varepsilon > \circ \quad \forall\, k > N(\varepsilon) \quad |\frac{f_i(x^{k+\text{۱}})}{g_i(x^{k+\text{۱}})} - \frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)}| < \varepsilon.$$

مسئله (۱۷.۲) را با $x^* = x^k$ حل می‌کنیم. $(x^{k+\text{۱}}, t^{k+\text{۱}}, \theta^{k+\text{۱}}, d^{(k+\text{۱})+}, d^{(k+\text{۱})-})$ به عنوان جواب بهینه به دست می‌آوریم. فرض کنیم اندیس $i_\circ$ چنان باشد که $t^{k+\text{۱}} = d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})+} + d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-}$ از

$$\frac{f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})}{g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})} - \frac{f_{i_\circ}(x^k)}{g_{i_\circ}(x^k)} = \frac{f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})}{g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})} - \frac{f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}}) - d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})+}}{g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}}) + d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-}}$$

$$= \frac{f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-} + g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})+}}{g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})(g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}}) + d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-})}$$

داریم:

$$\forall\, \varepsilon > \circ \quad \forall\, k > N(\varepsilon) \quad \left|\frac{f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-} + g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})+}}{g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})(g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}}) + d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-})}\right| < \varepsilon.$$

به علاوه، چون مجموعه شدنی X کراندار است، دنباله‌های $f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})$ و $g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})$ روی مجموعه شدنی X کراندار هستند. همچنین فرض کردیم، دنباله $g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})$ مثبت اکید باشد و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم دنباله $f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})$ مثبت اکید باشد. (اگر دنباله $f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})$ منفی باشد برای حل این مشکل از مسئله (۱۳.۲) استفاده می‌کنیم). برای k به اندازه کافی بزرگ، $\frac{f_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-}}{g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})(g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})+d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-})}$ و $\frac{d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})+}}{g_{i_\circ}(x^{k+\text{۱}})+d_{i_\circ}^{(k+\text{۱})-}}$ نزدیک به صفر هستند. بنابراین $d_{i_\circ}^{k-}$ و $d_{i_\circ}^{k+}$ (و دنباله t^k) نزدیک به صفر هستند. در نتیجه x^k جواب کارای ضعیف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه (۱.۲) با درجه دقت دلخواه است. □

یک ساختار مشابه برای به دست آوردن جواب کارا مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه داریم. در قضیه زیر، نشان می‌دهیم که شرط کارای ضعیف بودن $x^* \in X$ در قضیه ۴.۲.۲ لازم نیست.

قضیه ۲.۳.۲. *فرض کنید $x^* \in X$ جواب شدنی دلخواه مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه (۱.۲) باشد. آن‌گاه x^* جواب کارا است اگر و فقط اگر مقدار بهینه مسئله (۱۸.۲) صفر باشد.*

برهان. فرض کنید x^* جواب کارا مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است. برهان خلف، فرض کنید مقدار بهینه مسئله (۱۸.۲) صفر نباشد. لذا وجود دارد $(\tilde{x}, \tilde{\theta}, \tilde{d}^+, \tilde{d}^-)$ که جواب بهینه مسئله (۱۸.۲) است با حداقل یک اندیس $i_\circ$ به طوری که $\tilde{d}^+_{i_\circ} + \tilde{d}^-_{i_\circ} > \circ$. بنابراین داریم $\frac{f_{i_\circ}(\tilde{x})}{g_{i_\circ}(\tilde{x})} > \frac{f_{i_\circ}(x^*)}{g_{i_\circ}(x^*)}$ و $\frac{f_i(\tilde{x})}{g_i(\tilde{x})} \geq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$ برای هر $i = ۱, \ldots, p$ و این با کارا بودن x^* در تناقض است.
بر عکس، فرض کنید مقدار بهینه مسئله (۱۸.۲) صفر باشد. برهان خلف، فرض کنید x^* جواب کارای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه نباشد. لذا $\tilde{x} \in X$ وجود دارد به طوری که $\frac{f_i(\tilde{x})}{g_i(\tilde{x})} \geq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$ برای هر $i = ۱, \ldots, p$ و برای حداقل یک اندیس $i_\circ$، $\frac{f_i(\tilde{x})}{g_i(\tilde{x})} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$. این یعنی وجود دارد $(\tilde{x}, \tilde{\theta}, \tilde{d}^+, \tilde{d}^-)$ که جواب شدنی مسئله (۱۸.۲) است به طوری که $\sum(\tilde{d}^+_i + \tilde{d}^-_i) > \circ$. این متناقض است با این ادعا که مقدار بهینه مسئله (۱۸.۲) صفر است. $\square$

فرض کنید x° جواب شدنی دلخواه مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه باشد. از قضیه ۲.۳.۲ استفاده می‌کنیم تا الگوریتم ۲ را برای جواب کارا مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فرمول‌بندی کنیم.

الگوریتم ۲

گام ۱: قرار می‌دهیم $x^* = x^\circ$ و $k = ۱$

گام ۲: مسئله (۱۸.۲) را حل کنید و فرض کنید $(x^k, \theta^K, d^{k+}, d^{k-})$ جواب بهینه باشد. قرار دهید $t^k = \sum_{i=۱}^{p}(d_i^{k-} + d_i^{k+})$.

گام ۳: اگر $t^k = \circ$ آنگاه توقف کنید. x^k جواب کارا مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است. در غیر این صورت قرار دهید $x^* = x^k$ و $k = k + ۱$ و به مرحله ۲ بروید.

قضیه ۳.۳.۲. *دنباله $x^۱, x^۲, \ldots, x^k, \ldots$ که بوسیله الگوریتم ۲ تولید می‌شود به جواب کارا مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه همگرا است.*

برهان. اثبات شبیه قضیه ۱.۳.۲ است. همان مراحل اثبات قضیه ۱.۳.۲ را ادامه می‌دهیم و داریم:

$$\circ < \frac{f_i(x^۱)}{g_i(x^۱)} \leq \frac{f_i(x^۲)}{g_i(x^۲)} \leq \ldots \leq \frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)} \leq \ldots \leq \frac{f_i(\overline{x_i})}{g_i(\overline{x_i})}, \quad i = ۱, \ldots, p,$$

به طوری که $\overline{x_i}$ جواب بهینه $max_{x\in X}\frac{f_i(x)}{g_i(x)},\ i = ۱, \ldots, p$ است. دنباله $(\frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)})_{k\to\infty}$ یکنوا و کراندار است، بنابراین همگراست. در نتیجه:

$$\forall\, i = ۱, \ldots, p, \quad \forall\, \varepsilon > \circ, \quad \exists\, n_i(\varepsilon) \in N: \quad |\frac{f_i(x^{k+۱})}{g_i(x^{k+۱})} - \frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)}| < \varepsilon, \quad \forall\, k > n_i(\varepsilon).$$

قرار می‌دهیم،

$$N(\varepsilon) = max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon), \dots, n_p(\varepsilon)\}$$

داریم:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, i = 1, \dots, p, \quad |\frac{f_i(x^{k+1})}{g_i(x^{k+1})} - \frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)}| < \varepsilon, \quad \forall\, k > N(\varepsilon).$$

مسئله (۱۸.۲) را با $x^* = x^k$ حل می‌کنیم و $(x^{k+1}, \theta^{k+1}, d^{(k+1)+}, d^{(k+1)-})$ را به عنوان جواب بهینه به دست می‌آوریم. از

$$\frac{f_i(x^{k+1})}{g_i(x^{k+1})} - \frac{f_i(x^k)}{g_i(x^k)} = \frac{f_i(x^{k+1})}{g_i(x^{k+1})} - \frac{f_i(x^{k+1}) - d_i^{(k+1)+}}{g_i(x^{k+1}) + d^{(k+1)-}}$$

$$= \frac{f_i(x^{k+1})d_i^{(k+1)-} + g_i(x^{k+1})d_i^{(k+1)+}}{g_i(x^{k+1})(g_i(x^{k+1}) + d_i^{(k+1)-})}$$

داریم:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, p, \quad |\frac{f_i(x^{k+1})d_i^{(k+1)-} + g_i(x^{k+1})d_i^{(k+1)+}}{g_i(x^{k+1})(g_i(x^{k+1}) + d_i^{(k+1)-})}| < \varepsilon \quad \forall\, k > N(\varepsilon).$$

به علاوه، از این که دنباله‌های $f_i(x^{k+1})$ و $g_i(x^{k+1})$ برای هر $i = 1, \dots, p$ روی مجموعه شدنی X مثبت اکید و کراندار می‌باشند، نتیجه می‌گیریم برای k به اندازه کافی بزرگ $\frac{f_i(x^{k+1})d_i^{(k+1)-}}{g_i(x^{k+1})(g_i(x^{k+1})+d_i^{(k+1)-})}$ و $\frac{d_i^{(k+1)+}}{g_i(x^{k+1})+d_i^{(k+1)-}}$ نزدیک به صفر هستند. بنابراین، همه‌ی d_i^{k-} و d_i^{k+} و در نتیجه $\sum_{i=1}^{p} d_i^{k+} + d_i^{k-}$ نزدیک صفر قرار می‌گیرند و در نتیجه بنا به قضیه ۲.۳.۲ x^k جواب کارا برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه با درجه دقت دلخواه است. □

مثال ۴.۳.۲. مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری دو هدفه زیر را در نظر بگیرید، با کمک روش برنامه‌ریزی خطی (الگوریتم۲) جواب کارا مسئله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
& max(\tfrac{x_1-4}{-x_2+3}, \tfrac{-x_1+4}{x_2+1}) \\
& s.t. -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\
& \quad x_1 \leq 6 \\
& \quad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

نحوه اجرای الگوریتم ۲ به صورت زیر است:

مرحله ۱: قرار می‌دهیم $(x_1^*, x_2^*) = (6, 0) = x^0$ و $k = 1$

مرحله ۲: مسئله تک‌هدفه زیر را حل می‌کنیم:

$$max \sum_{i=1}^{2} d_i^- + d_i^+$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 - 4 - d_1^+ = (x_1^* - 4)\theta_1, \\ -x_2 + 3 + d_1^- = (-x_2^* + 3)\theta_1, \\ -x_1 + 4 - d_2^+ = (-x_1^* + 4)\theta_2, \\ x_2 + 1 + d_2^- = (x_2^* + 1)\theta_2, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ x_1 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0, \theta_1, \theta_2 \geq 0. \end{cases}$$

و جواب (۲ و ۶) را به دست می‌آوریم که به ازای آن مقدار بهینه مسئله تک‌هدفه صفر است.
مرحله۳: پس توقف می‌کنیم، $x^* = (6, 2)$ یک جواب کارای مسئله دوهدفه است.

فصل ۳

مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی

۱.۳ مقدمه

مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & max\ \left(\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}, \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)}\right) \\ & s.t. \quad x \in X(A,\tilde{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq \tilde{b}, x \geq ۰\}, \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

که در آن A ماتریس $m \times n$ و $\tilde{b}$ بردار m بعدی از پارامترهای فازی است. بردار پارامترهای فازی $\tilde{b}$ در مسئله (۱.۳) بردار اعداد فازی است، که تابع عضویت آن $\mu_{\tilde{b}}(b)$ است.
در ادامه، تعریف مجموعه $\alpha-$برش از بردار فازی $\tilde{b} = [\tilde{b_۱}, \tilde{b_۲}, \dots, \tilde{b_m}]$ را داریم. عمده مطالب این فصل از مراجع [۳۱، ۲۹] است.

تعریف ۱.۱.۳. مجموعه $\alpha-$برش از بردار پارامتر فازی $\tilde{b}$ در مسئله (۱.۳) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_\alpha(\tilde{b}) = \{b \in \mathbb{R}^m | \mu_{\tilde{b}}(b) \geq \alpha\}.$$

با کمک تعریف $\alpha-$برش، مسئله چندهدفه فازی (۱.۳) را می‌توان به فرم غیر فازی زیر نوشت.

$$\begin{aligned} & max\ \left(\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}, \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)}\right) \\ & s.t. \quad x \in X(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq ۰, b \in L_\alpha(\tilde{b})\}. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

مسئله (۲.۳) می‌تواند به شکل زیر فرموله شود.

$$\begin{aligned} & max\ F(x) = (F_۱(x), F_۲(x), \dots, F_p(x)) \\ & s.t. \quad x \in X(A,b) \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

به طوری که

$$F_i(x) = f_i(x) - v_i g_i(x), \quad i = ۱, \ldots, p$$

که در آن $v_i > ۰$ پارامترهای ثابت هستند. براساس تعریف ۱.۱.۳ مفهوم جواب α–کارا از مسئله (۳.۳) را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۳. (جواب α–کارا برای مسئله (۲.۳)) نقطه $x^* \in X(A,b)$ را یک جواب α– کارا برای مسئله (۳.۳) گوییم هرگاه $x \in X(A,b)$ وجود نداشته باشد به طوری که $F_i(x) \geq F_i(x^*)$ به ازای هر $i = ۱, \ldots, p$ با نابرابری اکید حداقل برای یک i.

فرض کنید $X(A,b)$ مجموعه جواب‌های شدنی مسئله (۲.۳) و (۳.۳) را نشان دهد. همچنین برای هر $x \in X(A,b)$، توابع f_i و $-g_i$ مقعر باشند و $X(A,b)$ مجموعه محدب باشد. در نتیجه واضح است که F_i محدب است.

قضیه ۳.۱.۳. *نقطه‌ی $x^* \in X(A,b)$ جواب α–کارا برای مسئله (۲.۳) است اگر و فقط اگر x^* جواب α–کارا برای مسئله (۳.۳) با $F(x^*) = ۰$ و $v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$ باشد.*

برهان. فرض کنید $x^* \in X(A,b)$ یک جواب α–کارا برای مسئله (۲.۳) باشد آن‌گاه $x \in X(A,b)$ وجود ندارد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \geq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \quad \forall i = ۱, \ldots, p.$$

فرض کنید $v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \quad i = ۱, \ldots, p$ از نابرابری بالا نتیجه می‌گیریم $x \in X(A,b)$ وجود ندارد به طوری که

$$۰ \leq f_i(x) - v_i g_i(x) = F_i(x) \quad \forall i = ۱, \ldots, p.$$

از این که

$$۰ = f_i(x^*) - v_i g_i(x^*) = F_i(x^*), \quad i = ۱, \ldots, p$$

می‌بینیم که $x \in X(A,b)$ وجود ندارد به طوری که $F_i(x^*) \leq F_i(x) \quad i = ۱, \ldots, p$. بنابراین x^* جواب α–کارا برای مسئله (۳.۳) با $F(x^*) = ۰$ است.

برعکس، فرض کنید x^* جواب α–کارا مسئله (۳.۳) با $F_i(x^*) = ۰ = f_i(x^*) - v_i g_i(x^*)$ و $v_i = \frac{f_i(x^*}{g_i(x^*)}$ باشد. و این یعنی $x \in X(A,b)$ وجود ندارد به طوری که

$$۰ = F_i(x^*) \leq F_i(x) = f_i(x) - v_i g_i(x), \quad \forall i = ۱, \ldots, p.$$

لذا $x \in X$ وجود ندارد به طوری که

$$\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} = v_i \leq \frac{f_i(x)}{g_i(x)}, \quad \forall i = ۱, \ldots, p$$

بنابراین x^* جواب α–کارا برای مسئله (۲.۳) است. □

فرض کنید $k > ۰$ و $K > ۰$ چنان باشند که $k < g_i(x) < K$ برای هر i. با به کار بردن تعریف جفرن از کارایی سره برای مسئله (۲.۳) توجه داریم که x^* جواب α–کارای سره است اگر برای هر اندیس

i و هر عدد حقیقی x با $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} < \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$، عدد مثبت M و اندیس jای با $\frac{f_j(x)}{g_j(x)} > \frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \leq M[\frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)} - \frac{f_j(x)}{g_j(x)}].$$

یا به عبارت دیگر، جواب α–کارای x^* برای مسئله (۲.۳) جواب α–کارای سره است اگر برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با $f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x) > \circ$، عدد مثبت $\tilde{M}$ و اندیس jای با $f_j(x)g_j(x^*) - f_j(x^*)g_j(x) < \circ$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x)}{g_i(x^*)} \leq \tilde{M}\frac{f_j(x^*)g_j(x) - f_j(x)g_j(x^*)}{g_j(x^*)}.$$

و $\tilde{M} = M\frac{K}{k}$. در ارتباط با α–کارایی سره برای مسائل (۲.۳) و (۳.۳) قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۳. *نقطه $x^* \in X(A,b)$ جواب α–کارای سره برای (۲.۳) است اگر و فقط اگر x^* جواب α–کارای سره برای (۳.۳) با $F_i(x^*) = \circ$ و $v_i = \frac{f_i(x^*}{g_i(x^*)}$ به ازای هر $i = ۱, \ldots, p$ باشد.*

برهان. فرض کنید x^* جواب α–کارای سره برای (۲.۳) است. از قضیه ۳.۱.۳ نتیجه می‌گیریم که x^* α–کارا برای (۳.۳) است با $F(x^*) = \circ$. x^* جواب α–کارای سره برای (۳.۳) است اگر برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با

$$F_i(x) - F_i(x^*) > \circ \tag{۴.۳}$$

عدد مثبت M و اندیس jای با

$$F_j(x) - F_j(x^*) < \circ \tag{۵.۳}$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$F_i(x) - F_i(x^*) \leq M(F_j(x^*) - F_j(x)). \tag{۶.۳}$$

حال اگر قرار دهیم $F_i(x^*) = \circ$ و $F_i(x) = f_i(x) - v_i g_i(x)$ با $i = ۱, \ldots, p$ $\quad v_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$ نتیجه می‌گیریم x^* کارای سره (۳.۳) است اگر و فقط اگر برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی x با

$$f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x) > \circ \tag{۷.۳}$$

عدد مثبت M و اندیس jای با

$$f_j(x)g_j(x^*) - f_j(x^*)g_j(x) < \circ \tag{۸.۳}$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x)}{g_i(x^*)} \leq M\frac{f_i(x^*)g_i(x) - f_j(x)g_j(x^*)}{g_j(x^*)}. \tag{۹.۳}$$

با فرض $\tilde{M} = M$، روابط (۹.۳)-(۷.۳) همان روابط (۵.۲)-(۳.۲) است که فرضیه را ضمانت می‌کند. در نتیجه x^* کارای سره (۳.۳) است.

برعکس، فرض کنید x^* جواب α–کارای سره (۳.۳) با $F(x^*) = \circ$ باشد. آن‌گاه روابط (۶.۳)-(۴.۳)

برای هر i و هر $x \in X(A,b)$ برقرار است. در نتیجه می‌توانیم روابط (۳.۹)-(۳.۷) را نتیجه بگیریم که همان روابط (۲.۵)-(۲.۳) با $\tilde{M} = M$ هستند. □

۳.۲ جواب‌های کارا برای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه با پارامترهای فازی

چون در مسائل بهینه سازی واقعی، ضرائب استفاده شده در کسرهای یک مسئله کسری چندهدفه دقیق و قطعی نیستند از مسئله خطی‌کسری چندهدفه با پارامترهای فازی استفاده می‌کنیم. چهار نوع نقطه‌ی کارا برای مسائل فازی تعریف کرده و رابطه آن‌ها را با نقاط کارای مسائل خطی‌کسری چندهدفه غیرفازی بررسی می‌کنیم.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه با پارامترهای فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&max\left(\frac{\tilde{c}_1x+\tilde{c}_{1.n+1}}{\tilde{d}_1x+\tilde{d}_{1.n+1}},\dots,\frac{\tilde{c}_px+\tilde{c}_{p.n+1}}{\tilde{d}_px+\tilde{d}_{p.n+1}}\right)\\
&s.t. \\
&\quad x\in\tilde{X}=\{x\in\mathbb{R}^n|\tilde{a}_jx\le\tilde{b}_j, j=1,\dots,m; x\ge 0\}.
\end{aligned} \tag{۳.۱۰}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_i &= [\tilde{c}_{i1},\dots,\tilde{c}_{in}], \qquad i=1,\dots,p,\\
\tilde{d}_i &= [\tilde{d}_{i1},\dots,\tilde{d}_{in}], \qquad i=1,\dots,p,\\
\tilde{a}_j &= [\tilde{a}_{j1},\dots,\tilde{a}_{jn}], \qquad j=1,\dots,m.
\end{aligned}
$$

توجه شود که $\forall\ i,j,l$ $\tilde{a}_{jl}$، $\tilde{b}_j$ ، $\tilde{c}_{il}$ و $\tilde{d}_{il}$ پارامترهای فازی هستند. فرض می‌شود که پارامترهای فازی، اعداد فازی هستند که تابع عضویت آنها با $\mu_{\tilde{a}_{jl}}(a_{jl}), \mu_{\tilde{b}_j}(b_j), \mu_{\tilde{c}_{il}}(c_{il}), \mu_{\tilde{d}_{il}}(d_{il})$ نشان داده می‌شود.

در مسائل خطی‌کسری چندهدفه معمولی فرض می‌شود که برای هر جواب شدنی، مخرج کسرها مثبت است. در این فصل نیز ما فرض می‌کنیم که در مسائل خطی کسری چندهدفه فازی برای هر $\alpha \in [0,1]$ مجموعه $\alpha-$برش مخرج توابع هدف $(\tilde{d}_ix+\tilde{d}_{i.n+1}, i=1,\dots,p)$ مثبت است.

هنگام بررسی این مسائل به عنوان مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه معمولی تعمیم یافته کاملاً طبیعی است که سوال زیر مطرح شود:

اولاً، شدنی بودن برای m محدودیت $\tilde{X}=\{x\in\mathbb{R}^n|\tilde{a}_jx\le\tilde{b}_j, j=1,\dots,m; x\ge 0\}$ شامل اعداد فازی را چگونه تعریف کنیم؟

دوماً، مفهوم کارایی برای p تابع هدف $\left(\frac{\tilde{c}_1x+\tilde{c}_{1.n+1}}{\tilde{d}_1x+\tilde{d}_{1.n+1}},\dots,\frac{\tilde{c}_px+\tilde{c}_{p.n+1}}{\tilde{d}_px+\tilde{d}_{p.n+1}}\right)$ شامل اعداد فازی را چگونه تعریف کنیم؟

در این صورت به منظور پاسخ به دو سوال فوق دبایز و پراد چهار شاخص برای مقایسه دو عدد فازی $\tilde{m}$ و $\tilde{n}$ معرفی کرده‌اند.

۳.۳ مقایسه دو عدد فازی

چهار شاخص برای رتبه‌بندی دو عدد فازی توسط دبایز[1] [۱۰] و دبایز و پراد[2] [۹] پیشنهاد شده است.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید $\tilde{m}$ و $\tilde{n}$ دو عدد فازی باشند. چهار شاخص[3] برای مقایسه دو عدد فازی تعریف می‌کنیم:

الف.

$$Pos(\tilde{m} \geqslant \tilde{n}) = sup\left\{min(\mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(v)) | u \geq v\right\},$$

ب.

$$Pos(\tilde{m} > \tilde{n}) = sup_u\left\{inf_v\left\{min(\mu_{\tilde{m}}(u), ۱ - \mu_{\tilde{n}}(v)) | u \leq v\right\}\right\},$$

ج.

$$Nes(\tilde{m} \geq \tilde{n}) = inf_u\left\{sup_v\left\{max(۱ - \mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(v)) | u \geq v\right\}\right\},$$

د.

$$Nes(\tilde{m} > \tilde{n}) = inf\left\{max(۱ - \mu_{\tilde{m}}(u), ۱ - \mu_{\tilde{n}}(v)) | u \leq v\right\},$$

که $\mu_{\tilde{m}}(u)$، تابع عضویت $\tilde{m}$ و $\mu_{\tilde{n}}(v)$ تابع عضویت $\tilde{n}$ است.

در حالتی‌که درجه عضویت این چهار شاخص بزرگتر یا مساوی α باشد، این شرایط می‌توانند با کمک مجموعه‌های $\alpha-$برش $[m_\alpha^L, m_\alpha^R]$ و $[n_\alpha^L, n_\alpha^R]$ از اعداد فازی $\tilde{m}$ و $\tilde{n}$ به عنوان قیدهای معمولی بیان شوند. توجه شود که در $[m_\alpha^L, m_\alpha^R]$ و $[n_\alpha^L, n_\alpha^R]$، m_α^R و m_α^L، n_α^R و n_α^L به ترتیب نقاط راسی راست و چپ مجموعه‌های $\alpha-$برش $\tilde{m}$ و $\tilde{n}$ هستند. بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲.۳.۳ *[۳۱]*

$$\begin{aligned}
Pos(\tilde{m} \geq \tilde{n}) \geq \alpha \qquad &\longleftrightarrow \qquad m_\alpha^R \geq n_\alpha^L,\\
Pos(\tilde{m} > \tilde{n}) \geq \alpha \qquad &\longleftrightarrow \qquad m_\alpha^R \geq n_{۱-\alpha}^R,\\
Nes(\tilde{m} \geq \tilde{n}) \geq \alpha \qquad &\longleftrightarrow \qquad m_{۱-\alpha}^L \geq n_\alpha^L,\\
Nes(\tilde{m} > \tilde{n}) \geq \alpha \qquad &\longleftrightarrow \qquad m_{۱-\alpha}^L \geq n_{۱-\alpha}^R.
\end{aligned}$$

تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}}(a)$ برای هر عدد فازی $\tilde{a}$ دارای ویژگی‌هایی است که در تعریف ۱۴.۵.۱ آمده است.

نتیجه ۳.۳.۳. *[۳۱] فرض کنید توابع عضویت دو عدد فازی $\tilde{m}$ و $\tilde{n}$ در شرایط (۱) تا (۶) تعریف ۱۴.۵.۱ صدق کنند و $f : \mathbb{R}^۱ \times \mathbb{R}^۱ \longrightarrow \mathbb{R}^۱$ پیوسته باشد. آنگاه برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$،*

$$[f(\tilde{m}, \tilde{n})]_\alpha = f(m_\alpha, n_\alpha),$$

[1] Dubois

[2] Dubois and Prade

[3] indices

که در آن m_α و n_α مجموعه‌های $\alpha-$برش از اعداد فازی $\tilde{m}$ و $\tilde{n}$ هستند یعنی:

$$n_\alpha = [n^L_\alpha, n^R_\alpha], m_\alpha = [m^L_\alpha, m^R_\alpha].$$

در ادامه، با استفاده از چهار شاخص مقایسه اعداد فازی، مفاهیم جواب شدنی و جواب کارا را برای مسائل خطی‌کسری چندهدفه تعریف می‌کنیم.

۱.۳.۳ انواع تعریف جواب شدنی

فرض کنید مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه را داریم که فقط ضرایب مجموعه محدودیت‌ها، پارامترهای فازی هستند یعنی:

$$\begin{aligned} &max\ (\frac{f(x)}{g(x)}) = \Big(\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}, \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}, \dots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)}\Big) \\ &\tilde{X} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n | \quad \tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j, \quad j = ۱, \dots, m; \quad x \geq ۰\Big\} \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

ساکاوا[۴] و یانو[۵] [۳۰] چهار نوع جواب شدنی ($\alpha-$شدنی) برای مجموعه محدودیت‌های با پارامترهای فازی تعریف می‌کنند.

تعریف ۴.۳.۳. (α-شدنی)

الف: $x \in \mathbb{R}^n$، α-شدنی بسیار ضعیف $(\alpha - VWF)$ برای (۱۱.۳) است، اگر و فقط اگر

$$x \in X_{VWF}(\alpha) = \Big\{x \geq ۰ | \quad Pos(\tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j) \geq \alpha, \quad j = ۱, \dots, m\Big\}. \tag{۱۲.۳}$$

ب: $x \in \mathbb{R}^n$، α-شدنی نیمه ضعیف $(\alpha - MWF)$ برای (۱۱.۳) است، اگر و فقط اگر

$$x \in X_{MWF}(\alpha) = \Big\{x \geq ۰ | \quad Pos(\tilde{a}_j x < \tilde{b}_j) \geq \alpha, \quad j = ۱, \dots, m\Big\}. \tag{۱۳.۳}$$

ج: $x \in \mathbb{R}^n$، α-نیمه شدنی قوی $(\alpha - MSF)$ برای (۱۱.۳) است، اگر و فقط اگر

$$x \in X_{MSF}(\alpha) = \Big\{x \geq ۰ | \quad Nes(\tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j) \geq \alpha, \quad j = ۱, \dots, m\Big\}. \tag{۱۴.۳}$$

د: $x \in \mathbb{R}^n$، α-شدنی قوی $(\alpha - VSF)$ برای (۱۱.۳) است، اگر و فقط اگر

$$x \in X_{VSF}(\alpha) = \Big\{x \geq ۰ | \quad Nes(\tilde{a}_j x < \tilde{b}_j) \geq \alpha, \quad j = ۱, \dots, m\Big\}. \tag{۱۵.۳}$$

با استفاده از قضیه ۲.۳.۳، به آسانی می‌توان قضیه ۵.۳.۳ را نتیجه گرفت.

---

[۴] Sakawa

[۵] Yano

قضیه ۵.۳.۳. *[۳۱]:*

الف.

$$X_{VWF}(\alpha) = \{x \geq \circ | \quad a^L_{j\alpha}x \leq b^R_{j\alpha}, \quad j = ۱, \ldots, m\},$$

ب.

$$X_{MWF}(\alpha) = \{x \geq \circ | \quad a^R_{j(۱-\alpha)}x \leq b^R_{j\alpha}, \quad j = ۱, \ldots, m\},$$

ج.

$$X_{MSF}(\alpha) = \{x \geq \circ | \quad a^L_{j\alpha}x \leq b^L_{j(۱-\alpha)}, \quad j = ۱, \ldots, m\},$$

د.

$$X_{VSF}(\alpha) = \{x \geq \circ | \quad a^R_{j(۱-\alpha)}x \leq b^L_{j(۱-\alpha)}, \quad j = ۱, \ldots, m\},$$

که در آن

$$a^L_{j\alpha} = [a^L_{j۱\alpha}, \ldots, a^L_{jn\alpha}], \quad j = ۱, \ldots, m$$

و

$$a^R_{j\alpha} = [a^R_{j۱\alpha}, \ldots, a^R_{jn\alpha}], \quad j = ۱, \ldots, m$$

و $a^L_{jl\alpha}$، $a^R_{jl\alpha}$ و $b^L_{j\alpha}$، $b^R_{j\alpha}$ کران‌های پایین و بالای مجموعه‌های $\alpha-$برش از اعداد فازی $\tilde{a}_{jl}$ و $\tilde{b}_j$ هستند.

از خواص $Pos(.)$ و $Nes(.)$ روابط زیر را بین $X_{VWF}(\alpha)$، $X_{MWF}(\alpha)$، $X_{MSF}(\alpha)$ و $X_{VSF}(\alpha)$ نتیجه می‌گیریم:

$$X_{MWF}(\alpha) \cup X_{MSF}(\alpha) \subset X_{VWF}(\alpha) \tag{۱۶.۳}$$

و

$$X_{VSF}(\alpha) \subset X_{MWF}(\alpha) \cap X_{MSF}(\alpha) \tag{۱۷.۳}$$

دو رابطه (۱۶.۳) و (۱۷.۳) از خواص زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} Pos(\tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j) &\geq max\left\{Pos(\tilde{a}_j x < \tilde{b}_j), Nes(\tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j)\right\} \\ Nes(\tilde{a}_j x < \tilde{b}_j) &\leq min\left\{Pos(\tilde{a}_j x < \tilde{b}_j), Nes(\tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j)\right\} \end{aligned}$$

رابطه (۱۶.۳) بیان می‌کند اگر xای $\alpha-$شدنی نیمه ضعیف باشد، αشدنی بسیار ضعیف است و اگر xای $\alpha-$نیمه شدنی قوی باشد، αشدنی بسیار ضعیف است.

۲.۳.۳ جواب γ-کارا

برای بررسی مسائل برنامه ریزی خطی کسری چندهدفه با پارامترهای فازی، مفهوم جواب کارای معمولی را گسترش می‌دهیم. مسائل برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه را که فقط پارامترهای صورت و مخرج توابع هدف اعداد فازی هستند، را در نظر می‌گیریم یعنی:

$$max\left(\frac{\tilde{c}_{1}x+\tilde{c}_{1.n+1}}{\tilde{d}_{1}x+\tilde{d}_{1.n+1}},\dots,\frac{\tilde{c}_{p}x+\tilde{c}_{p.n+1}}{\tilde{d}_{p}x+\tilde{d}_{p.n+1}}\right) \quad (۱۸.۳)$$
$$\text{s.t.}$$
$$x\in X=\{x\in\mathbb{R}^n|a_jx\leq b_j, j=1,\dots,m; x\geq 0\}.$$

با کمک روابط تعریف ۱.۳.۳، تعریف زیر را برای γ–کارایی خواهیم داشت:

تعریف ۶.۳.۳. جواب γ-کارا

(۱) نقطه $x^*\in X$ را γ–کارا بسیار ضعیف گویند اگر و فقط اگر $x\in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$Pos\left\{\frac{\tilde{c}_{i}x+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x+\tilde{d}_{i.n+1}}\leq\frac{\tilde{c}_{i}x^*+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x^*+\tilde{d}_{i.n+1}}\right\}\leq\gamma,\qquad i=1,\dots,p,$$

و برای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

(۲) نقطه $x^*\in X$ را γ–کارا نیمه ضعیف گویند اگر و فقط اگر $x\in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$Pos\left\{\frac{\tilde{c}_{i}x+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x+\tilde{d}_{i.n+1}}<\frac{\tilde{c}_{i}x^*+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x^*+\tilde{d}_{i.n+1}}\right\}\leq\gamma,\qquad i=1,\dots,p,$$

وبرای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

(۳) نقطه $x^*\in X$ را γ–نیمه کارا گویند اگر و فقط اگر $x\in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$Nes\left\{\frac{\tilde{c}_{i}+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x+\tilde{d}_{i.n+1}}\leq\frac{\tilde{c}_{i}x^*+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x^*+\tilde{d}_{i.n+1}}\right\}\leq\gamma,\qquad i=1,\dots,p,$$

وبرای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

(۴) نقطه $x^*\in X$ را γ–بسیار کارا گویند اگر و فقط اگر $x\in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$Nes\left\{\frac{\tilde{c}_{i}x+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x+\tilde{d}_{i.n+1}}<\frac{\tilde{c}_{i}x^*+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x^*+\tilde{d}_{i.n+1}}\right\}\leq\gamma,\qquad i=1,\dots,p,$$

و برای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

با کمک مجموعه γ–برش تابع هدف $(\frac{\tilde{c}_{i}x+\tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_{i}x+\tilde{d}_{i.n+1}})$ و نتیجه ۳.۳.۳ فرم صریح جواب γ–کارا به دست می‌آید، بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۷.۳.۳. *جواب γ-کارا [۳۱]:*

فرض کنید

$$c_{i\gamma}^L=[c_{i1\gamma}^L,\dots,c_{in\gamma}^L],\qquad i=1,\dots,p,$$
$$c_{i\gamma}^R=[c_{i1\gamma}^R,\dots,c_{in\gamma}^R],\qquad i=1,\dots,p,$$
$$d_{i\gamma}^L=[d_{i1\gamma}^L,\dots,d_{in\gamma}^L],\qquad i=1,\dots,p,$$
$$d_{i\gamma}^R=[d_{i1\gamma}^R,\dots,d_{in\gamma}^R],\qquad i=1,\dots,p,$$

و$c^L_{il\gamma}$ ، $c^R_{il\gamma}$ ، $d^L_{il\gamma}$، $d^R_{il\gamma}$ کران‌های پایین و بالای مجموعه $\gamma-$برش از اعداد فازی $\tilde{c}_{il}$ و $\tilde{d}_{il}$ است. آن‌گاه،

(الف). نقطه $x^* \in X$ را γ-کارای بسیار ضعیف گویند اگر و فقط اگر $x \in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$\frac{c^L_{i\gamma}x + c^L_{i.n+1,\gamma}}{d^R_{i\gamma}x + d^R_{i.n+1,\gamma}} \geq \frac{c^R_{i\gamma}x^* + c^R_{i.n+1,\gamma}}{d^L_{i\gamma}x^* + d^L_{i.n+1.\gamma}}, \qquad i = 1, \dots, p, \qquad (۱۹.۳)$$

وبرای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

(ب). نقطه $x^* \in X$ را γ-کارای نیمه ضعیف گویند اگر و فقط اگر $x \in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$\frac{c^R_{i,1-\gamma}x + c^R_{i.n+1,1-\gamma}}{d^L_{i,1-\gamma}x + d^L_{i.n+1,1-\gamma}} \geq \frac{c^R_{i\gamma}x^* + c^R_{i.n+1,\gamma}}{d^L_{i\gamma}x^* + d^L_{i.n+1,\gamma}} \qquad i = 1, \dots, p, \qquad (۲۰.۳)$$

و برای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

(ج). نقطه $x^* \in X$ را γ-نیمه کارا گویند اگر و فقط اگر $x \in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$\frac{c^L_{i\gamma}x + c^L_{i.n+1,\gamma}}{d^R_{i\gamma}x + d^R_{i.n+1,\gamma}} \geq \frac{c^L_{i,1-\gamma}x^* + c^L_{i.n+1,1-\gamma}}{d^R_{i,1-\gamma}x^* + d^R_{i.n+1,1-\gamma}} \qquad i = 1, \dots, p, \qquad (۲۱.۳)$$

وبرای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

(د). نقطه $x^* \in X$ را γ-بسیارکارا گویند اگر و فقط اگر $x \in X$ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$\frac{c^R_{i,1-\gamma}x + c^R_{i,n+1,1-\gamma}}{d^L_{i,1-\gamma}x + d^L_{i,n+1,1-\gamma}} \geq \frac{c^L_{i,1-\gamma}x^* + c^L_{i.n+1,1-\gamma}}{d^R_{i,1-\gamma}x^* + d^R_{i.n+1,1-\gamma}} \qquad i = 1, \dots, p, \qquad (۲۲.۳)$$

وبرای حداقل یک i بزرگتر اکید باشد.

برهان. (الف).

از تعریف ۶.۳.۳ قسمت (۱) $x \in X$ای وجود ندارد به‌طوری‌که

$$Pos\{\frac{\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i.n+1}} \leq \frac{\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i.n+1}}{\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i.n+1}}\} \leq \gamma \qquad i = 1, \dots, p, \qquad \Longleftrightarrow$$

$$sup\{min(\mu_{\frac{(\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i.n+1})}{(\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i.n+1})}}(u_i), \mu_{\frac{(\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i.n+1})}{(\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i.n+1})}}(v_i)) | u_i \geq v_i\} \leq \gamma, \qquad \Longleftrightarrow$$

$$sup_{u_i \in R^1}\{min(\mu_{\frac{(\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i.n+1})}{(\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i,n+1})}}(u_i), \mu_{\frac{(\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i.n+1})}{(\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i.n+1})}}(u_i))\} \leq \gamma, \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\mu_{\frac{(\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i.n+1})}{(\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i.n+1})}}(u_i) \leq \gamma \text{ یا } \mu_{\frac{\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i.n+1})}{\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i.n+1})}}(u_i) \leq \gamma \qquad \text{برای هر } u_i \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-\infty, \frac{c^L_{i\gamma}x^* + c^L_{i.n+1.\gamma}}{d^R_{i\gamma}x + d^R_{i.n+1.\gamma}}] \cup [\frac{c^R_{i\gamma}x^* + c^R_{i.n+1.\gamma}}{d^L_{i\gamma}x + d^L_{i.n+1.\gamma}}, +\infty) \cup (-\infty, \frac{c^L_{i\gamma}x + c^L_{i.n+1.\gamma}}{d^R_{i\gamma}x + d^R_{i.n+1.\gamma}}] = R^1 \qquad \Longleftrightarrow$$

(۱۹.۳) □

اثبات قسمت‌های دیگر نیز مشابه قسمت (۱) است.

مشابه روابط (۱۶.۳) و (۱۷.۳) برای جواب $\alpha-$شدنی، با استفاده از خواص $Pos(.)$ و $Nes(.)$ روابط مابین مجموعه‌های جواب $\gamma-$کارا $X_{VWP}(\gamma)$ و $X_{MWP}(\gamma)$ و $X_{MSP}(\gamma)$ و $X_{VSP}(\gamma)$ را به صورت زیر داریم، که $X_{VWP}(\gamma)$ و $X_{MWP}(\gamma)$ و $X_{MSP}(\gamma)$ و $X_{VSP}(\gamma)$ به ترتیب مجموعه‌های جواب $\gamma-$کارا بسیار ضعیف و $\gamma-$کارا نیمه ضعیف و $\gamma-$نیمه کارا و $\gamma-$بسیار کارا می‌باشند.

$$X_{MWP}(\gamma) \cup X_{MSP}(\gamma) \subset X_{VWP}(\gamma), \tag{۲۳.۳}$$

$$X_{VSP}(\gamma) \subset X_{MWP}(\gamma) \cap X_{MSP}(\gamma). \tag{۲۴.۳}$$

رابطه (۲۳.۳) بیان می‌کند اگر xای $\gamma-$کارای نیمه ضعیف باشد، $\gamma-$کارای بسیار ضعیف است و اگر xای $\gamma-$نیمه کارا باشد، $\gamma-$کارای بسیار ضعیف است.

۴.۳ جواب γ-کارا و جواب کارا

مفهوم $\alpha-$شدنی و $\gamma-$کارایی را با تنظیم آستانه‌های فازی α و γ با استفاده از چهار شاخص برای مقایسه دو عدد فازی معرفی کردیم. این آستانه‌های α و γ می‌توانند به عنوان درجه عضویت شدنی و کارایی تفسیر شوند. چهار تعریف $\alpha-$شدنی بودن به عنوان مجموعه قیدهای خطی وابسته به آستانه فازی α تفسیر می‌شوند. از طرف دیگر، به نظر می‌رسد درک مفاهیم $\gamma-$کارایی به طور مستقیم مشکل‌تر است، زیرا در قیدهای (۱۹.۳)-(۲۲.۳) ضرایب راست و چپ متفاوت هستند. بنابراین، در این بخش روابط بین چهار نوع مفاهیم $\gamma-$کارایی و مفهوم جواب کارای معمولی را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱.۴.۳. *فرض کنید $\underline{P}$، $\overline{P}$، $\underline{Q}$ و $\overline{Q}$ ماتریس‌های با بعد $p \times (n+۱)$ باشند که (i,j)امین عنصر $\underline{p}_{ij}$، $\overline{p}_{ij}$، $\underline{q}_{ij}$ و $\overline{q}_{ij}$ در رابطه*

$$\underline{p}_{ij} \leq \overline{p}_{ij}, \qquad i = ۱, \ldots, p, \qquad j = ۱, \ldots, n+۱, \tag{۲۵.۳}$$

$$\underline{q}_{ij} \leq \overline{q}_{ij}, \qquad i = ۱, \ldots, p, \qquad j = ۱, \ldots, n+۱, \tag{۲۶.۳}$$

صدق کنند.

برای این ماتریس‌ها دو زیر مجموعه از مجموعه محدودیت‌های $X \subseteq R^n$ را تعریف می‌کنیم:

$$X_۱ = \left\{ x^* \in X | \nexists x \in X \quad s.t. \quad \frac{\underline{P}x}{\overline{\overline{Q}}x} \geq \frac{\overline{P}x^*}{\underline{Q}x^*} \right\},$$

و

$$X_۲ = \left\{ x^* \in X | \nexists x \in X \quad s.t. \quad \frac{\overline{P}x}{\underline{Q}x} \geq \frac{\underline{P}x^*}{\overline{\overline{Q}}x^*} \right\}$$

که $\frac{\overline{P}x}{\underline{Q}x}$ و $\frac{\underline{P}x}{\overline{\overline{Q}}x}$ بردارهای ستونی p بعدی هستند که iامین عنصر آن‌ها، به ترتیب

$$\frac{\sum_{j=۱}^{n} \overline{p}_{ij} x_j + \overline{p}_{i.n+۱}}{\sum_{j=۱}^{n} \underline{q}_{ij} x_j + \underline{q}_{i.n+۱}},$$

و

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \underline{p}_{ij} x_j + \underline{p}_{i.n+1}}{\sum_{j=1}^{n} \overline{q}_{ij} x_j + \overline{q}_{i.n+1}}$$

می‌باشد.

همچنین فرض کنید Q, P دو ماتریس با بعد $p \times (n+1)$ باشد که (i,j)امین عنصر آن‌ها در روابط زیر صدق کنند:

$$p_{ij} \in [\underline{p}_{ij}, \overline{p}_{ij}], \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

و

$$q_{ij} \in [\underline{q}_{ij}, \overline{q}_{ij}], \quad i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

برای ماتریس‌های Q و P زیر مجموعه‌ای از مجموعه محدودیت‌های $X \subseteq R^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_3(\frac{P}{Q}) = \left\{ x^* \in X | \nexists x \in X \quad s.t. \quad \frac{Px}{Qx} \geq \frac{Px^*}{Qx^*} \right\}$$

قضیه ۲.۴.۳. *فرض کنید برای هر $Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ و هر $x \in X$ داشته باشیم $Qx > 0$. آن‌گاه روابط زیر برقرارند:*

(الف) $X_1 \supset \cup_{p \in [\underline{P}, \overline{P}]} \cup_{Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]} X_3(\frac{P}{Q})$

(ب) $X_2 \subset \cap_{P \in [\underline{P}, \overline{P}]} \cap_{Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]} X_3(\frac{P}{Q})$.

برهان. (الف). با برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید $x^* \in \cup_P \cup_Q X_3(\frac{P}{Q})$. اگر $x^* \notin X_1$، از تعریف X_1 نتیجه می‌گیریم $x \in X$ای وجود دارد به طوری که $\frac{\underline{P}x}{\overline{Q}x} \geq \frac{\overline{P}x^*}{\underline{Q}x^*}$. همچنین از این که $x \geq 0$، $x^* \geq 0$، $Qx > 0$ و از روابط (۲۵.۳) و (۲۶.۳) برای هر $P \in [\underline{P}, \overline{P}]$ و $Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ داریم،

$$\frac{Px}{Qx} \geq \frac{\underline{P}x}{\overline{Q}x} \geq \frac{\overline{P}x^*}{\underline{Q}x^*} \geq \frac{Px^*}{Qx^*}.$$

که نتیجه می‌شود $x^* \notin X_3(\frac{P}{Q})$ و این یک تناقض است.

(ب). همچنین با برهان خلف (ب) را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $x^* \in X_2$.اگر $x^* \notin \cap_P \cap_Q X_3(\frac{P}{Q})$، از تعریف $X_3(\frac{P}{Q})$ نتیجه می‌گیریم $x \in X$ای وجود دارد به طوری که $\frac{Px}{Qx} \geq \frac{Px^*}{Qx^*}$. همچنین از این که $x \geq 0$، $x^* \geq 0$، $Qx > 0$ و از روابط (۲۵.۳) و (۲۶.۳)، برای هر $P \in [\underline{P}, \overline{P}]$ و $Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ داریم،

$$\frac{\overline{P}x}{\underline{Q}x} \geq \frac{Px}{Qx} \geq \frac{Px^*}{Qx^*} \geq \frac{\underline{P}x^*}{\overline{Q}x^*}.$$

که نتیجه می‌شود $x^* \notin X_2$ و این یک تناقض است. $\square$

توجه شود که روابط زیر همواره برقرار است:

$$c^L_{i\gamma} \leq c^R_{i\gamma} \qquad d^L_{i\gamma} \leq d^R_{i\gamma} \qquad (0 \leq \gamma \leq 1), \tag{۲۷.۳}$$

$$c^R_{i(1-\gamma)} \leq c^R_{i\gamma}, \qquad d^L_{i(1-\gamma)} \geq d^L_{i\gamma} \qquad (0 \leq \gamma \leq 0.5), \tag{۲۸.۳}$$

$$c^R_{i(1-\gamma)} \geq c^R_{i\gamma}, \qquad d^L_{i(1-\gamma)} \leq d^L_{i\gamma} \qquad (0.5 \leq \gamma \leq 1), \tag{۲۹.۳}$$

$$c^L_{i\gamma} \leq c^L_{i(1-\gamma)}, \qquad d^R_{i\gamma} \geq d^R_{i(1-\gamma)} \qquad (0 \leq \gamma \leq 0.5), \tag{۳۰.۳}$$

$$c^L_{i\gamma} \geq c^L_{i(1-\gamma)}, \qquad d^R_{i\gamma} \leq d^R_{i(1-\gamma)} \qquad (0.5 \leq \gamma \leq 1), \tag{۳۱.۳}$$

$$c^L_{i(1-\gamma)} \leq c^R_{i(1-\gamma)}, \quad d^L_{i(1-\gamma)} \leq d^R_{i(1-\gamma)} \quad (0 \leq \gamma \leq 1). \tag{۳۲.۳}$$

از روابط (۳۲.۳)-(۲۷.۳) و نتیجه ۱.۴.۳ ، قضیه زیر را داریم که رابطه بین ۴ نوع γ-کارا تعریف شده و جواب کارا را بررسی می‌کند.

قضیه ۳.۴.۳.

$$X_{VWP}(\gamma) \supset \cup_{P \in P_1(\gamma)} \cup_{Q \in Q_1(\gamma)} X^P(\frac{P}{Q}) \qquad (0 \leq \gamma \leq 1), \tag{۳۳.۳}$$

$$X_{MWP}(\gamma) \supset \cup_{P \in P_2(\gamma)} \cup_{Q \in Q_2(\gamma)} X^P(\frac{P}{Q}) \qquad (0 \leq \gamma \leq 0.5), \tag{۳۴.۳}$$

$$X_{MWP}(\gamma) \subset \cap_{P \in P_2(\gamma)} \cap_{Q \in Q_2(\gamma)} X^P(\frac{P}{Q}) \qquad (0.5 \leq \gamma \leq 1), \tag{۳۵.۳}$$

$$X_{MSP}(\gamma) \supset \cup_{P \in P_3(\gamma)} \cup_{Q \in Q_3(\gamma)} X^P(\frac{P}{Q}) \qquad (0 \leq \gamma \leq 0.5), \tag{۳۶.۳}$$

$$X_{MSP}(\gamma) \subset \cap_{P \in P_3(\gamma)} \cap_{Q \in Q_3(\gamma)} X^P(\frac{P}{Q}) \qquad (0.5 \leq \gamma \leq 1), \tag{۳۷.۳}$$

$$X_{VSP}(\gamma) \subset \cap_{P \in P_4(\gamma)} \cap_{Q \in Q_4(\gamma)} X^P(\frac{P}{Q}) \qquad (0 \leq \gamma \leq 1), \tag{۳۸.۳}$$

که درآن $P_1(\gamma)$ ، $P_2(\gamma)$ ، $P_3(\gamma)$ ، $P_4(\gamma)$ ، $Q_1(\gamma)$ ، $Q_2(\gamma)$ ، $Q_3(\gamma)$ و $Q_4(\gamma)$ مجموعه‌ای از ماتریس‌های P و Q هستند که (i, j)امین عنصر آنها به صورت زیر می‌باشد:

(۱) در (۳۳.۳)، (i, j)امین عنصر از ماتریس‌های $P \in P_1(\gamma)$ و $Q \in Q_1(\gamma)$ به ترتیب $P_{ij} \in [c^L_{ij\gamma}, c^R_{ij\gamma}]$ و $q_{ij} \in [d^L_{ij\gamma}, d^R_{ij\gamma}]$ می‌باشند.

(۲) در (۳۴.۳) و (۳۵.۳)، (i, j) امین عنصر از ماتریس‌های $P \in P_2(\gamma)$ و $Q \in Q_2(\gamma)$

به ترتیب $p_{ij} \in [c^R_{ij(1-\gamma)}, c^R_{ij\gamma}]$ و $q_{ij} \in [d^L_{ij\gamma}, d^L_{ij(1-\gamma)}]$ می‌باشند که درآن $0 \leq \gamma \leq 0.5$.

و

به ترتیب $p_{ij} \in [c^R_{ij\gamma}, c^R_{ij(1-\gamma)}]$ و $q_{ij} \in [d^L_{ij(1-\gamma)}, d^L_{ij\gamma}]$ می‌باشند که درآن $0.5 \leq \gamma \leq 1$.

(۳) در (۳۶.۳) و (۳۷.۳)، (i, j)امین عنصر از ماتریس‌های $P \in P_3(\gamma)$ و $Q \in Q_3(\gamma)$

به ترتیب $p_{ij} \in [c^L_{ij\gamma}, c^L_{ij(1-\gamma)}]$ و $q_{ij} \in [d^R_{ij(1-\gamma)}, d^R_{ij\gamma}]$ می‌باشند که درآن $0 \leq \gamma \leq 0.5$.

و

به ترتیب $p_{ij} \in [c^L_{ij(1-\gamma)}, c^L_{ij\gamma}]$ *و* $q_{ij} \in [d^R_{ij\gamma}, d^R_{ij(1-\gamma)}]$ *می‌باشند که در آن* $0.5 \leq \gamma \leq 1$.

(۴) در(۳۸.۳)، (i,j)*امین عنصر از ماتریس‌های* $P \in P_4(\gamma)$ *و* $Q \in Q_4(\gamma)$ *به ترتیب*

$p_{ij} \in [c^L_{ij(1-\gamma)}, c^R_{ij(1-\gamma)}]$ *و* $q_{ij} \in [d^L_{ij(1-\gamma)}, d^R_{ij(1-\gamma)}]$ *می‌باشند.*

به علاوه، $X^P(\frac{P}{Q})$ *مجموعه جواب‌های کارای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه معمولی زیر است:*

$$\begin{array}{l} max\ \frac{Px}{Qx} \\ s.t.\ \ x \in X \end{array}$$

برهان. اثبات (۳۳.۳) در قضیه ۳.۴.۳:
از رابطه (۱۹.۳) در قضیه ۷.۳.۳ داریم:

$$X_{VWP}(\gamma) = \left\{ x^* \in X | \nexists x \in X \quad s.t. \quad \frac{c^L_{i\gamma}x + c^L_{i.n+1.\gamma}}{d^R_{i\gamma}x + d^R_{i.n+1.\gamma}} \geq \frac{c^R_{i\gamma}x^* + c^R_{i.n+1.\gamma}}{d^L_{i\gamma}x^* + d^L_{i.n+1.\gamma}}, \quad i = 1, \ldots, p \right\}$$

همچنین با توجه به تعریف $X^P(\frac{P}{Q})$ داریم

$$X^P(\frac{P}{Q}) = \{x^* \in X | \nexists x \in X \quad s.t. \quad \frac{Px}{Qx} \geq \frac{Px^*}{Qx^*}\}$$

با جایگزاری $X_{VWP}(\gamma)$ و $X^P(\frac{P}{Q})$ به جای X_1 و $X_3(\frac{P}{Q})$ به ترتیب، در رابطه (الف) قضیه ۲.۴.۳

مستقیما(۳۳.۳) ثابت می‌شود. □

اثبات بقیه روابط نیز مشابه قسمت فوق است.

از بین انواع جواب γ–کارا، زیر مجموعه‌ی $X_{VWP}(\gamma)$ به آسانی به دست می‌آید، زیرا $X_{VWP}(\gamma)$ شامل اجتماع مجموعه‌های جواب کارا معمولی $X^P(\frac{P}{Q})$ برای هر ماتریس $(P,Q) \in (P_1(\gamma), Q_1(\gamma))$ است. بر عکس، بسته به مقدار γ، مجموعه‌های $X_{MWP}(\gamma)$، $X_{MSP}(\gamma)$ و $X_{VSP}(\gamma)$ ممکن است در اشتراک مجموعه‌های جواب کارا معمولی $X^P(\frac{P}{Q})$ باشند یا نباشند. علاوه بر این، ممکن است اشتراک مجموعه جواب‌های کارا معمولی $X^P(\frac{P}{Q})$ تهی باشد. بنابراین، این احتمال وجود دارد که عناصر $X_{MWP}(\gamma)$، $X_{MSP}(\gamma)$ و $X_{VSP}(\gamma)$ را به سختی به صورت عددی به دست آوریم. به این دلیل، جواب‌های بهینه γ–کارا بسیار ضعیف ($X_{VWP}(\gamma)$)، به عنوان تعمیمی کلی از جواب‌های کارا برای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه که فقط پارامترهای صورت و مخرج توابع هدف اعداد فازی هستند، توصیه می‌شود.

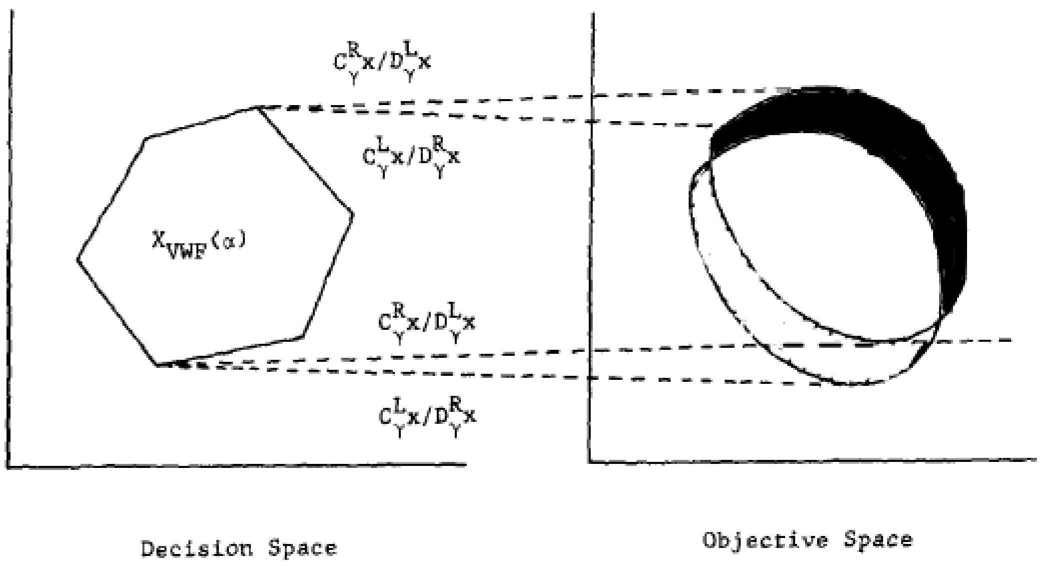
۵.۳ جواب‌های (α,γ)-کارا

اکنون با ترکیب جواب شدنی و جواب کارا که تاکنون پیشنهاد شده است، مفهوم جواب جدید برای مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه با پارامترهای فازی را معرفی می‌کنیم.
با توجه به این که γ−کارا بسیار ضعیف خواص بهتری نسبت به دیگر مفاهیم جواب γ−کارا دارد، در ادامه روی مفهوم (α,γ)−کارای بسیار ضعیف تمرکز می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۳. نقطه α−شدنی بسیار ضعیف x^*، جواب $(\alpha-\gamma)$−کارای بسیار ضعیف است اگر و فقط اگر هیچ نقطه α−شدنی بسیار ضعیف x وجود نداشته باشد به طوری که

$$Pos\left\{\frac{\tilde{c}_i x+\tilde{c}_{i.n+۱}}{\tilde{d}_i x+\tilde{d}_{i.n+۱}} \leq \frac{\tilde{c}_i x^*+\tilde{c}_{i.n+۱}}{\tilde{d}_i x^*+\tilde{d}_{i.n+۱}}\right\} \leq \gamma \qquad i=۱,\ldots,p$$

در شکل ۱.۳ قسمت سایه تصویر فضای تصمیم $X_{VW}(\alpha,\gamma)$ به فضای هدف با کمک نگاشت $\frac{c^R_{i\gamma}x+c^R_{i.n+۱\gamma}}{d^L_{i\gamma}x+d^L_{i.n+۱\gamma}}$ است.
$X_{VW}(\alpha,\gamma)$ شامل مجموعه‌های جواب کارای $X^P_\alpha(\frac{C^R_\gamma}{D^L_\gamma})$ و $X^P_\alpha(\frac{C^L_\gamma}{D^R_\gamma})$ متناظر با دو نوع مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه زیر است:



شکل ۱.۳: مجموعه جواب بهینه (α,γ)−کارا بسیار ضعیف $X_{VW}(\alpha,\gamma)$.

$$\begin{array}{lc} max & (\frac{c^R_{۱\gamma}x+c^R_{۱n+۱\gamma}}{d^L_{۱\gamma}x+d^L_{۱n+۱\gamma}},\ldots,\frac{c^R_{p\gamma}x+c^R_{p.n+۱\gamma}}{d^L_{p\gamma}x+d^L_{p.n+۱\gamma}}) \\ s.t. & x\in X_{VWF}(\alpha). \end{array} \qquad (۳۹.۳)$$

$$\begin{array}{lc} max & (\frac{c^L_{۱\gamma}x+c^L_{۱n+۱\gamma}}{d^R_{۱\gamma}x+d^R_{۱n+۱\gamma}},\ldots,\frac{c^L_{p\gamma}x+c^L_{p.n+۱\gamma}}{d^R_{p\gamma}x+d^R_{p.n+۱\gamma}}) \\ s.t. & x\in X_{VWF}(\alpha) \end{array} \qquad (۴۰.۳)$$

در شکل ۱.۳، $X_\alpha^P(\frac{C_\gamma^R}{D_\gamma^L})$ و $X_\alpha^P(\frac{C_\gamma^L}{D_\gamma^R})$ به ترتیب به عنوان مجموعه‌های خوش‌بینانه ترین جواب و بدبینانه ترین جواب از $X_{VW}(\alpha,\gamma)$ تعبیر می‌شود.

مثال ۲.۵.۳. برای درک مفاهیم مختلف γ-کارایی، مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری دوهدفه با پارامترهای فازی زیر را در نظر بگیرید،

$$
\begin{array}{ll}
max & \left(\frac{-x_1+\tilde{c}_1}{-x_2+\tilde{d}_1}, \frac{x_1+\tilde{c}_2}{-x_2+\tilde{d}_2}\right)\\
s.t. & x_1+2x_2=11\\
 & 3\le x_1\le 9\\
 & 1\le x_2\le 4
\end{array}
$$

که در آن $\tilde{c}_1$، $\tilde{c}_2$، $\tilde{d}_1$ و $\tilde{d}_2$ پارامترهای فازی با توابع عضویت زیر می‌باشند:

$$
\begin{array}{lll}
\mu_{\tilde{c}_1} & = & max(1-\frac{|x-13.5|}{3},0)\\
\mu_{\tilde{c}_2} & = & max(1-\frac{|x+3|}{2},0)\\
\mu_{\tilde{d}_1} & = & max(1-\frac{|x-6|}{2},0)\\
\mu_{\tilde{d}_2} & = & max(1-|x-9.5|,0).
\end{array}
$$

حل: با استفاده از توابع عضویت فوق برای $\gamma=0.5$ می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$
\begin{array}{llll}
c_{1,0.5}^L=12, & c_{1,0.5}^R=15, & c_{2,0.5}^L=-4, & c_{2,0.5}^R=-2,\\
d_{1,0.5}^L=5, & d_{1,0.5}^R=7, & d_{2,0.5}^L=9, & d_{2,0.5}^R=10.
\end{array}
$$

فرض کنید $\gamma=0.5$. واضح است که $x^*=(x_1^*,x_2^*)=(5,3)$ یک جواب γ-کارای بسیار ضعیف است زیرا $x\in X$ای وجود ندارد به طوری که،

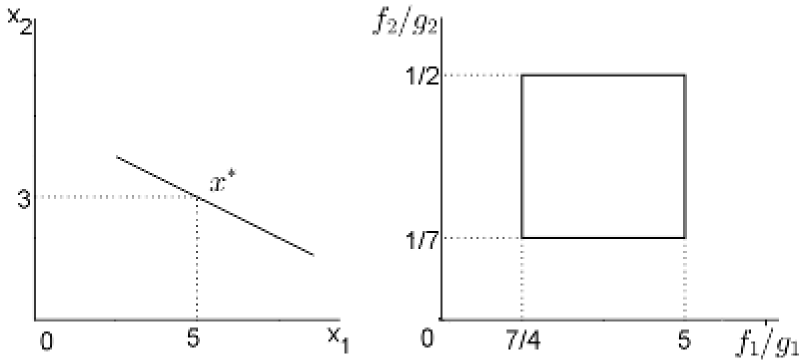
$$
\begin{array}{l}
\frac{-x_1+c_{1,0.5}^L}{-x_2+d_{1,0.5}^R}\ge\frac{-x_1^*+c_{1,0.5}^R}{-x_2^*+d_{1,0.5}^L}=5,\\
\frac{x_1+c_{2,0.5}^L}{-x_2+d_{2,0.5}^R}\ge\frac{x_1^*+c_{2,0.5}^R}{-x_2^*+d_{2,0.5}^L}=\frac{1}{2},
\end{array}
$$

با بزرگتری اکید برای حداقل یک i،

برای $\gamma=0.5$، نگاشت نقطه به مجموعه

$$
(\frac{f_1^*}{g_1^*},\frac{f_2^*}{g_2^*})=(\frac{-x_1^*+c_{1,0.5}}{-x_2^*+d_{1,0.5}},\frac{x_1^*+c_{2,0.5}}{-x_2^*+d_{2,0.5}}).
$$

جواب γ-کارای بسیار ضعیف $x^*=(5,3)$ در فضای تصمیم را به مجموعه جواب‌های γ-کارای بسیار ضعیف در فضای هدف تصویر می‌کند. این مطلب در شکل ۲.۳ نشان داده شده است.
توجه کنید که نگاشت نقطه به مجموعه به درجه پارامتر فازی γ بستگی دارد. یعنی اگر مقدار γ از ۰.۵ به ۰.۷۵ تغییر کند، آنگاه نگاشت نقطه به مجموعه زیر را داریم،



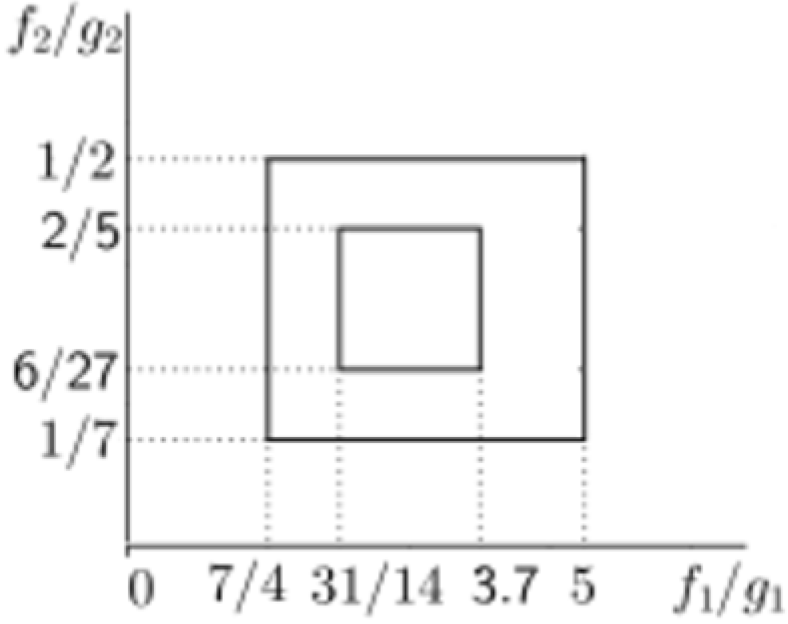
شکل ۲.۳: تصویر $x^* = (۵,۳)$ برای $\gamma = ۰.۵$.

$$(\frac{f_۱^*}{g_۱^*}, \frac{f_۲^*}{g_۲^*}) = \left(\frac{-x_۱^* + c_{۱,۰.۷۵}}{-x_۲^* + d_{۱,۰.۷۵}}, \frac{x_۱^* + c_{۲,۰.۷۵}}{-x_۲^* + d_{۲,۰.۷۵}}\right),$$

که در آن

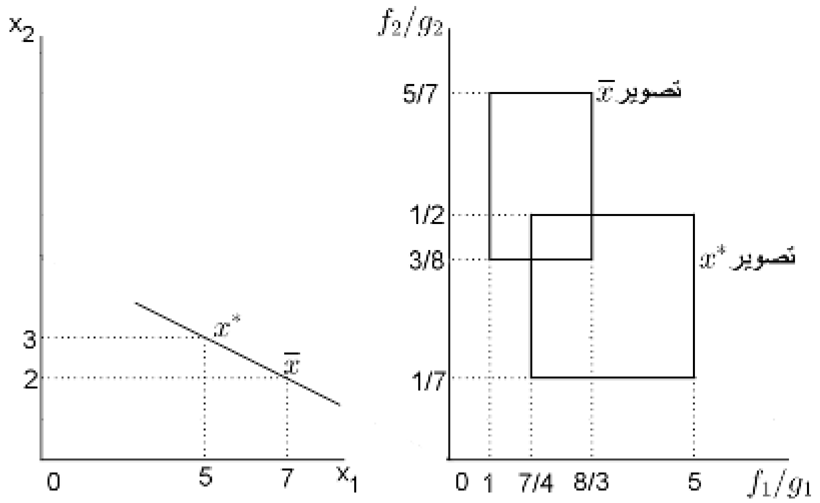
$$\begin{array}{ll} c_{۱,۰.۷۵} \in [۱۲.۷۵, ۱۴.۲۵], & c_{۲,۰.۷۵} \in [-۳.۵, -۲.۵], \\ d_{۱,۰.۷۵} \in [۵.۵, ۶.۵], & d_{۲,۰.۷۵} \in [۹.۲۵, ۹.۷۵]. \end{array}$$

شکل ۳.۳ را ببینید از شکل ۳.۳ می‌بینیم که با افزایش درجه γ، مجموعه جواب‌های γ–کارا بسیار ضعیف در فضای هدف باریک‌تر می‌شود. علاوه بر این، برای $\gamma = ۰.۵$ جواب γ–کارا بسیار ضعیف



شکل ۳.۳: تصویر $x^* = (۵,۳)$ برای $\gamma = ۰.۷۵$.

دیگر $\overline{x} = (\overline{x_۱}, \overline{x_۲}) = (۷,۲)$ همراه با $x^* = (۵,۳)$ نه فقط در فضای تصمیم بلکه در فضای هدف از طریق نگاشت نقطه به مجموعه در شکل ۴.۳ نشان داده شده است.



شکل ۴.۳: تصویر $\overline{x} = (۷,۲)$ برای $\gamma = ۰.۵$ با $x^* = (۵,۳)$.

فصل ۴

روش سری تیلور برای برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی

۱.۴ مقدمه

در این فصل به هر هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی تابع عضویتی نسبت داده می‌شود و توابع عضویت با استفاده از سری تیلور مرتبه اول تغییر شکل می‌دهند و به فرم خطی درمی‌آیند. با کمک روش اسکالرسازی مجموع وزین، مسئله چندهدفه به یک مسئله تک‌هدفه تبدیل می‌شود. کارایی روش پیشنهاد شده به طور تجربی بوسیله‌ی دو مسئله کاربردی و مثال‌هایی تصدیق می‌شود. عمده مطالب این فصل از مرجع [۴۲] است.
مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه

$$\begin{aligned} & max\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \cdots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)}\right) \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

را در نظر بگیرید، اگر یک سطح ایده آل به هر هدف برنامه‌ریزی کسری چندهدفه نسبت داده شود آن‌گاه این هدف‌های فازی، هدف‌های فازی ایده‌آل نامیده می‌شوند. برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & Find \quad x \\ & s.t. \begin{cases} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \tilde{\geq} w_i, & i = 1, \ldots, p \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m \end{cases} \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

به طوری که w_i سطح ایده‌آل iامین تابع هدف $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ می‌باشد و $\tilde{\geq}$ فازی بودن سطح ایده‌آل را نشان می‌دهد. $\tilde{\geq}$ اساسا به عنوان ”بیشتر از“ تعریف می‌شود [۴۷]. علامت $\tilde{\geq}$ یعنی $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ باید ماکزیمم شود. یک تابع عضویت باید برای هر هدف فازی تعریف شود.

تابع عضویت برای هر محدودیت فازی $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\tilde{\geq}w_i, i=1,\dots,p$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
آن‌گاه $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\tilde{\geq}w_i$

$$\mu\Big(\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\Big)=\mu_i(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_i(x)}{g_i(x)}\geq w_i,\\ \frac{\frac{f_i(x)}{g_i(x)}-\underline{t_i}}{w_i-\underline{t_i}} & \underline{t_i}\leq\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\leq w_i,\\ 0 & \frac{f_i(x)}{g_i(x)}\leq\underline{t_i}\end{cases}$$

به طوری که $\underline{t_i}$ برای iامین هدف فازی حد پایین دامنه تغییرات $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ است.
مسئله (۲.۴) به مسئله چندهدفه قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&max\ (\mu_1(x),\dots,\mu_p(x))\\&s.t.\ Ax\leq b,\ x\geq 0\end{aligned}\qquad(3.4)$$

۲.۴ خطی‌سازی تابع عضویت با روش سری تیلور

در مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۲.۴)، در ابتدا توابع عضویت مربوط به هر هدف با استفاده از سری تیلور تغییر شکل می‌دهند و به فرم چندجمله‌ای خطی در می‌آیند. در ادامه، بواسطه حل مدل فازی که فقط یک تابع هدف دارد، مقادیر دلخواه برای متغیرهای مدل به دست می‌آید.

روش پیشنهاد شده در سه مرحله بیان می‌شود:

مرحله۱: مقدار $x_i^*=(x_{i1}^*,x_{i2}^*,\dots,x_{in}^*)$ را که iامین تابع عضویت $\mu_i(x)$ مربوط به iامین هدف $i=1,2,\dots,p$ $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$، را ماکزیمم می‌کند را تعیین کنید.

مرحله ۲: با استفاده از سری تیلور مرتبه اول، توابع عضویت را تغییر شکل دهید.

$$\mu_i(x)\cong\overline{\mu_i(x)}=\mu_i(x_i^*)+[(x_1-x_{i1}^*)\frac{\partial\mu_i(x_i^*)}{\partial x_1}+(x_2-x_{i2}^*)\frac{\partial\mu_i(x_i^*)}{\partial x_2}+\dots+(x_n-x_{in}^*)\frac{\partial\mu_i(x_i^*)}{\partial x_n}],$$

$$\mu_i(x)\cong\overline{\mu_i(x)}=\mu_i(x_i^*)+\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_{ij}^*)\frac{\partial\mu_i(x_i^*)}{\partial x_j}\qquad i=1,\dots,p.\qquad(4.4)$$

مرحله ۳: با تبدیل مسئله برنامه‌ریزی به مسئله برنامه‌ریزی تک‌هدفه و حل آن جواب بهینه $x^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$ را به دست می‌آوریم. توجه داریم که مسئله با فرض این که وزن هدف‌ها برابر است حل می‌شود [۱۷] .

قرار می‌دهیم:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{p}\left[\mu_i(x_i^*)+\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_{ij}^*)\frac{\partial\mu_i(x_i^*)}{\partial x_j}\right]\qquad(5.4)$$

مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه فازی (۳.۴) به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی تبدیل می‌شود که این مدل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&max \quad \sum_{i=1}^{p}\left[\mu_i(x_i^*)+\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_{ij}^*)\frac{\partial\mu_i(x_i^*)}{\partial x_j}\right]\\&s.t.\begin{cases}Ax\leq b\\x\geq 0, A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m\end{cases}\end{aligned} \tag{۶.۴}$$

که در آن

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1 & \frac{f_i(x)}{g_i(x)}\geq w_i,\\ \frac{\frac{f_i(x)}{g_i(x)}-t_i}{w_i-\underline{t_i}} & \underline{t_i}\leq\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\leq w_i,\\ 0 & \frac{f_i(x)}{g_i(x)}\leq\underline{t_i}\end{cases}$$

بنابراین مدلی جدید که با برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه فازی معادل است را به دست آوردیم.

۳.۴ مسئله‌های کاربردی و مثال‌های عددی

در این بخش کارایی روش پیشنهاد شده را با حل مثال‌های عددی نشان می‌دهیم. ابتدا، روش پیشنهاد شده در مسئله کاربردی ۱ (مسئله برنامه‌ریزی تولید) و مثال عددی ۱ مورد استفاده قرار می‌گیرد. مسئله برنامه‌ریزی تولید فقط دو هدف دارد در حالی که مثال عددی ۱ متغیرها و توابع هدف بیشتری دارد. بنابراین کارایی روش ذکر شده وقتی‌که تعداد توابع هدف و متغیرها افزایش می‌یابند آزمایش خواهد شد.

استفاده از توابع عضویت خطی ساده مانند قطعه‌ای ساده و مثلثی و ذوزنقه‌ای و غیره نمی‌تواند ساختار کسری مسئله را تغییر دهد. در این بخش از سری تیلور برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی استفاده می‌کنیم. توابع عضویت می‌توانند بوسیله‌ی سری تیلور مرتبه اول تغییر شکل پیدا کنند. در مسئله کاربردی ۱ توابع عضویت به صورت خطی قطعه‌ای ساده و مثلثی تعریف می‌شوند و تاثیر انواع مجزای توابع عضویت روی جواب به دست آمده تجزیه و تحلیل می‌شود.

۱.۳.۴ مسئله کاربردی ۱ (مسئله برنامه‌ریزی تولید)

فرض کنید یک شرکت دو محصول p_1 و p_2 تولید می‌کند. فرض می‌کنیم افزایش قیمت و تقاضای سرمایه مورد نیاز، متناسب با فعالیت‌ها مجزاست. به علاوه بدون توجه به مسئله برنامه‌ریزی تولید تعیین شده، تقاضای سرمایه ثابت به مبلغ ۴۰۰۰ دلار وجود دارد. شرکت تصمیم می‌گیرد که موجودی بیشتر از ۱۰ درصد کل محصول را در جهت ایجاد اطمینان داشته باشد. در هنگام بررسی چون میزان تقاضا غیر قطعی است ممکن است تقاضا از تولید بیشتر باشد در نتیجه باید موجودی جهت ایمنی وجود داشته باشد. اگر واقعا تقاضا بیشتر باشد، مدیریت شرکت بوسیله محدودیت‌ها موجودی را تعیین می‌کند. که به ترتیب برای هر محصول ۱۰ درصد و ۵ درصد کل مقدار هر محصول می‌باشد. ۲ دلار هزینه ثابت برای موجودی دو محصول p_1 و p_2 وجود دارد. جدول ۱.۴ داده‌ها برای هر محصول را که ثابت هستند را نشان می‌دهد.

جدول ۱.۴: داده‌ها برای تولید

	تقاضای هر واحد از محصول		ظرفیت موجود
	$p_۱$	$p_۲$	
	۲	۱	ماده خام (واحد کیفیت): ۲۵۰
	۵	۴	ماشین (ساعت): ۵۰۰
	۴۰	۵۵	سرمایه (دلار): ۱۶۰۰۰
	۱۲	۱۳	سود هر واحد (دلار)
	۱.۵	۱.۶	هزینه هر واحد موجودی (دلار)

شرکت در نظر دارد به طور همزمان سودآوری سرمایه به کار رفته و نسبت گردش مالی موجودی را ماکزیمم کند. هنگامی‌که مقادیر تولید $p_۱$ و $p_۲$ به ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ هستند و مقادیر موجودی به ترتیب $y_۱$ و $y_۲$ هستند، آنگاه برنامه‌ریزی کسری چندهدفه مسئله بالا به صورت زیر است:

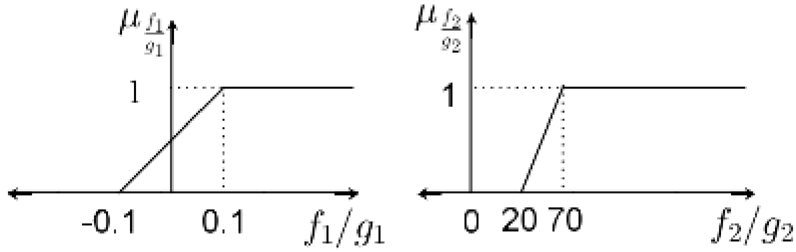
$$\begin{array}{ll} max & \frac{۱۲x_۱+۱۳x_۲}{۴۰x_۱+۵۵x_۲+۴۰۰۰} \\ max & \frac{۱۲x_۱+۱۳x_۲}{۱.۵y_۱+۱.۶y_۲+۲} \\ s.t. & ۲x_۱+x_۲ \leq ۲۵۰ \\ & ۵x_۱+۴x_۲ \leq ۵۰۰ \\ & ۴۵x_۱+۳۰x_۲ \leq ۱۲۰۰۰ \\ & ۰.۱(x_۱+x_۲) \leq y_۱+y_۲ \\ & ۰.۱x_۱ \leq y_۱ \\ & ۰.۰۵x_۲ \leq y_۲ \\ & x_۱ \geq y_۱ \\ & x_۲ \geq y_۲ \\ & x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \geq ۰ \end{array} \tag{۷.۴}$$

مدیریت شرکت انتظار دارد که سودآوری سرمایه به کار گرفته شده‌اش بیشتر از ۰.۱ باشد و نسبت گردش مالی‌اش بیشتر از ۷۰ باشد. به عبارت دیگر سطح ایده‌آل فازی دو تابع هدف به ترتیب $(۰.۱, ۷۰)$ می‌باشد. حدود دامنه تغییرات دو تابع هدف فازی ایده‌آل به ترتیب $(-۰.۱, ۲۰)$ است. بنابراین دوباره مسئله را باز نویسی می‌کنیم. بنابراین جواب بهینه x را طوری می‌یابیم که در توابع هدف فازی زیر صدق

کند:

$$
\begin{aligned}
max \quad & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{12x_1+13x_2}{40x_1+55x_2+4000} \tilde{\geq} 0.1 \\
max \quad & \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{12x_1+13x_2}{1.5y_1+1.6y_2+2} \tilde{\geq} 70 \\
s.t. \quad & 2x_1 + x_2 \leq 250 \\
& 5x_1 + 4x_2 \leq 500 \\
& 45x_1 + 30x_2 \leq 12000 \\
& 0.1(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2 \\
& 0.1x_1 \leq y_1 \\
& 0.05x_2 \leq y_2 \\
& x_1 \geq y_1 \\
& x_2 \geq y_2 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{8.4}
$$

ابتدا توابع عضویت به صورت خطی قطعه‌ای ساده تعریف می‌شوند (شکل ۱.۴ را ببینید).



شکل ۱.۴: تابع عضویت تعریف شده به صورت خطی قطعه‌ای ساده

توابع عضویت هدف‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$
\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \geq w_1, \\ \frac{\frac{f_1(x)}{g_1(x)} - \underline{t_1}}{w_1 - \underline{t_1}} & \underline{t_1} \leq \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq w_1, \\ 0 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq \underline{t_1} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \geq 0.1, \\ \frac{\frac{12x_1+13x_2}{40x_1+55x_2+1000} - (-0.1)}{0.1-(-0.1)} & -0.1 \leq \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq 0.1 \\ 0 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq -0.1, \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 1 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \geq 0.1 \\ \frac{16x_1+18.5x_2+400}{8x_1+11x_2+800} & -0.1 \leq \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq 0.1 \\ 0 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq -0.1, \end{cases} \tag{9.4}
$$

به همین ترتیب تابع عضویت برای $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ به صورت زیر است:

$$
\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \geq 70, \\ \frac{12x_1+13x_2-30y_1-32y_2-40}{75y_1+80y_2+100} & 20 \leq \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \leq 70, \\ 0 & \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \leq 20. \end{cases} \tag{10.4}
$$

اگر مسئله برای هر تابع عضویت به طور جداگانه حل شود مقادیر بهینه $\mu_1^*(0,50)$ و $\mu_2^*(2.564, 46.153, 2.564, 2.307)$ به دست می‌آیند. μ_1^* نشان می‌دهد که فقط محصول p_2 تولید می‌شود. توابع عضویت با استفاده از سری تیلور مرتبه اول به صورت زیر تغییر شکل می‌دهند:

با قرار دادن مقدار بهینه $(x_1^*, x_2^*) = (0,50)$ در تابع عضویت رابطه (۹.۴) مقدار $\mu_1(0,50)$ به دست می‌آید.
از رابطه (۹.۴) نسبت به x_1 مشتق جزئی می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial \mu_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{16 \times [8x_1^* + 11x_2^* + 800] - 8[16x_1^* + 18.5x_2^* + 400]}{(8x_1^* + 11x_2^* + 800)^2} = 0.006$$

و از رابطه (۹.۴) نسبت به x_2 مشتق جزئی می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial \mu_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = \frac{18.5 \times [8x_1^* + 11x_2^* + 800] - 11[16x_1^* + 18.5x_2^* + 400]}{(8x_1^* + 11x_2^* + 800)^2} = 0.005$$

و لذا

$$\mu_1(x) \cong \overline{\mu_1(x)} = \mu_1(0,50) + \left[(x_1 - 0)\frac{\partial \mu_1(0,50)}{\partial x_1} + (x_2 - 50)\frac{\partial \mu_1(0,50)}{\partial x_2}\right]$$

$$\Longrightarrow \mu_1(x) \cong \overline{\mu_1(x)} = 0.006x_1 + 0.005x_2 + 0.73, \qquad (11.4)$$

و

$$\begin{aligned}&\mu_2(x) \cong \overline{\mu_2(x)} = \mu_2(2.564, 46.153, 2.564, 2.307)+\\ &[(x_1 - 2.564)\tfrac{\partial \mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial x_1} + (x_2 - 46.153)\tfrac{\partial \mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial x_2}+\\ &(y_1 - 2.564)\tfrac{\partial \mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial y_1} + (y_2 - 2.307)\tfrac{\partial \mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial y_2}]\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mu_2(x) \cong \overline{\mu_2(x)} = 0.025x_1 + 0.027x_2 - 0.208y_1 - 0.221y_2 + 0.653. \quad (12.4)$$

هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه فازی با افزودن (۱۱.۴) به (۱۲.۴) به دست می‌آید.
یعنی داریم:

$$p(x) = \overline{\mu_1(x)} + \overline{\mu_2(x)} = 0.031x_1 + 0.032x_2 - 0.208y_1 - 0.221y_2 + 1.383. \quad (13.4)$$

بنابراین فرم معادل مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه فازی را به دست می‌آوریم.

$$max \;\; p(x) = \overline{\mu_۱(x)} + \overline{\mu_۲(x)} = ۰.۰۳۱x_۱ + ۰.۰۳۲x_۲ - ۰.۲۰۸y_۱ - ۰.۲۲۱y_۲ + ۱.۳۸۳$$

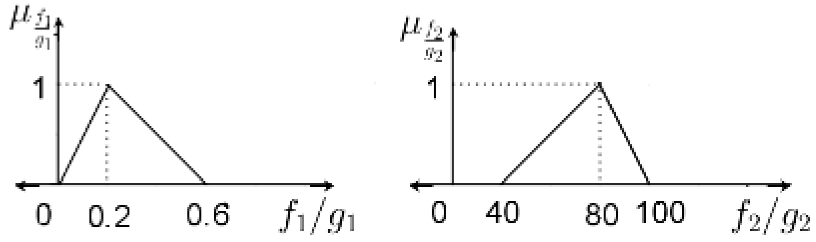
$$s.t. \begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \leq ۲۵۰ \\ ۵x_۱ + ۴x_۲ \leq ۵۰۰ \\ ۴۵x_۱ + ۳۰x_۲ \leq ۱۲۰۰۰ \\ ۰.۱(x_۱ + x_۲) \leq y_۱ + y_۲ \\ ۰.۱x_۱ \leq y_۱ \\ ۰.۰۵x_۲ \leq y_۲ \\ x_۱ \geq y_۱ \\ x_۲ \geq y_۲ \\ x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \geq ۰. \end{cases} \qquad (۱۴.۴)$$

بعد از حل مسئله جواب را به صورت زیر داریم:

$$x_۱ = ۶.۴۹۳, \quad x_۲ = ۱۱۶.۸۸۳, \quad y_۱ = ۶.۴۹۳, \quad y_۲ = ۵.۸۴۴,$$
$$\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = ۰.۱۴, \quad \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = ۷۵.۷۴$$

و مقدار توابع عضویت جواب $\mu_۱ = ۱$ و $\mu_۲ = ۱$ می‌باشد. وقتی‌که توابع عضویت که به هر هدف مسئله وابسته است معادل با یک می‌شود، مدیریت شرکت به هدف ایده‌آل خود می‌رسد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که روش ذکر شده بسیار کارا و ساده و پایدار است.

فرض کنید توابع عضویت به صورت مثلثی در نظر گرفته شوند (شکل۲.۴را ببینید). توابع عضویت مثلثی به سه پارامتر عددی (a, b, c) وابسته هستند. فرض می‌کنیم که $\frac{f_۱}{g_۱}$ وابسته به سه پارامتر عددی (۰.۶، ۰.۲، ۰) است و به صورت $\frac{f_۱}{g_۱}(x_۱, x_۲; ۰, ۰.۲, ۰.۶)$ نوشته می‌شود و $\frac{f_۲}{g_۲}$ وابسته به سه پارامتر عددی (۱۰۰، ۸۰، ۴۰) است و به صورت $\frac{f_۲}{g_۲}(x_۱, x_۲, y_۱, y_۲; ۴۰, ۸۰, ۱۰۰)$ نوشته می‌شود.
توابع عضویت هدف‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:



شکل ۲.۴: تابع عضویت تعریف شده به‌صورت مثلثی

$$\mu_۱(x) = \begin{cases} ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \geq c_۱ \\ \frac{c_۱ - \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}}{c_۱ - b_۱} & b_۱ \leq \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq c_۱ \\ \frac{\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} - a_۱}{b_۱ - a_۱} & a_۱ \leq \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq b_۱ \\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq a_۱ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \geq ۰.۶, \\ \frac{۱۲x_۱ + ۲۰x_۲ + ۲۴۰۰}{۱۶x_۱ + ۲۲x_۲ + ۱۶۰۰} & ۰.۲ \leq \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq ۰.۶, \\ \frac{۱۲x_۱ + ۱۳x_۲}{۸x_۱ + ۱۱x_۲ + ۸۰۰} & ۰ \leq \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq ۰.۲, \\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq ۰. \end{cases}$$
(۱۵.۴)

به همین ترتیب تابع عضویت دیگر به صورت زیر است:

$$\mu_2(x)=\begin{cases} 0 & \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\geq 100,\\ \frac{150y_1+160y_2-12x_1-13x_2+200}{30y_1+32y_2+40} & 80\leq\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\leq 100,\\ \frac{12x_1+13x_2-60y_1-64y_2-80}{60y_1+64y_2+80} & 40\leq\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\leq 80,\\ 0 & \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\leq 40. \end{cases} \tag{۱۶.۴}$$

اگر

$$\mu_1(x)=max(min(\frac{12x_1+20x_2+2400}{6x_1+22x_2+1600},\frac{12x_1+13x_2}{8x_1+11x_2+800}),0) \tag{۱۷.۴}$$

و

$$\mu_2(x)=max(min(\frac{150y_1+160y_2-12x_1-13x_2+200}{30y_1+32y_2+40},$$
$$\frac{12x_1+13x_2-60y_1-64y_2-80}{60y_1+64y_2+80}),0)$$

آن‌گاه $\mu_1^*(0,50)$ و $\mu_2^*(2.564,46.153,2.564,2.307)$ به دست می‌آیند.
توابع عضویت بواسطه‌ی استفاده از سری تیلور مرتبه اول تغییر شکل می‌دهند.
در رابطه (۱۷.۴)، $\mu_1(0,50)=0.48$ است و از ضابطه سوم تابع عضویت رابطه‌ی (۱۵.۴) نسبت به x_1 مشتق جزئی می‌گیریم، که در آن $(x_1^*,x_2^*)=(0,50)$ است، لذا داریم:

$$\frac{\partial\mu_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}=\frac{12\times[8x_1^*+11x_2^*+800]-8[12x_1^*+13x_2^*]}{(8x_1^*+11x_2^*+800)^2}=0.006$$

و از ضابطه سوم تابع عضویت رابطه‌ی (۱۵.۴) نسبت به x_2 مشتق جزئی می‌گیریم که در آن $(x_1^*,x_2^*)=(0,50)$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial\mu_1(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}=\frac{13\times[8x_1^*+11x_2^*+800]-11[12x_1^*+13x_2^*]}{(8x_1^*+11x_2^*+800)^2}=0.005$$

لذا

$$\mu_1(x)\cong\overline{\mu_1(x)}=\mu_1(0,50)+[(x_1-0)\frac{\partial\mu_1(0,50)}{\partial x_1}+(x_2-50)\frac{\partial\mu_1(0,50)}{\partial x_2}]\Longrightarrow$$

$$\mu_1(x)\cong\overline{\mu_1(x)}=0.006x_1+0.005x_2+0.23, \tag{۱۸.۴}$$

و

$$\mu_2(x)\cong\overline{\mu_2(x)}=\mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)+$$
$$[(x_1-2.564)\frac{\partial\mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial x_1}+(x_2-46.153)\frac{\partial\mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial x_2}+$$
$$(y_1-2.564)\frac{\partial\mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial y_1}+(y_2-2.307)\frac{\partial\mu_2(2.564,46.153,2.564,2.307)}{\partial y_2}]$$

$$\mu_2(x) \cong \overline{\mu_2(x)} = 0.031x_1 + 0.034x_2 - 0.26y_1 - 0.277y_2 + 0.31. \qquad (۱۹.۴)$$

هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه فازی با افزودن (۱۸.۴) به (۱۹.۴) به دست می‌آید.

$$p(x) = \overline{\mu_1(x)} + \overline{\mu_2(x)} = 0.037x_1 + 0.039x_2 - 0.26y_1 - 0.277y_2 + 0.54. \qquad (۲۰.۴)$$

بنابراین مسئله تک‌هدفه معادل مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$max \;\; p(x) = \overline{\mu_1(x)} + \overline{\mu_2(x)} = 0.037x_1 + 0.039x_2 - 0.26y_1 - 0.277y_2 + 0.54$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 250 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 500 \\ 45x_1 + 30x_2 \leq 12000 \\ 0.1(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2 \\ 0.1x_1 \leq y_1 \\ 0.05x_2 \leq y_2 \\ x_1 \geq y_1 \\ x_2 \geq y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (۲۱.۴)$$

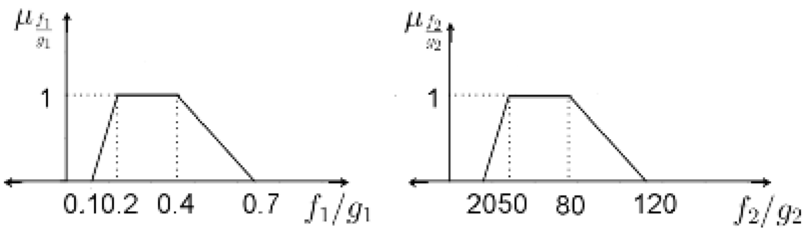
بعد از حل مسئله جواب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = 6.493, \quad x_2 = 116.883, \quad y_1 = 6.493, \quad y_2 = 5.844,$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0.14, \quad \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 75.74$$

و مقدار توابع عضویت برابر است با $\mu_1 = 0.75$ و $\mu_2 = 0.89$. هر چند توابع عضویت مثلثی هستند اما باز هم روش ذکر شده کارا، ساده و پایدار است.
فرض کنید توابع عضویت به صورت ذوزنقه‌ای در نظر گرفته شوند (شکل ۳.۴را ببینید). فرض کنیم توابع عضویت ذوزنقه‌ای به ۴ پارامتر عددی (a, b, c, d) وابسته هستند. $\frac{f_1}{g_1}$ وابسته به ۴ پارامتر عددی $(0.1, 0.2, 0.4, 0.7)$ است و به صورت $\frac{f_1}{g_1}(x_1, x_2, 0.1, 0.2, 0.4, 0.7)$ نوشته می‌شود و $\frac{f_2}{g_2}$ وابسته به چهار پارامتر عددی $(20, 50, 80, 120)$ است و به صورت $\frac{f_2}{g_2}(x_1, x_2, y_1, y_2, 20, 50, 80, 120)$ نوشته می‌شود.

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0 & \frac{f_1}{g_1} \geq d_1 \\ \frac{d_1 - \frac{f_1}{g_1}}{d_1 - c_1} & c_1 \leq \frac{f_1}{g_1} \leq d_1 \\ 1 & b_1 \leq \frac{f_1}{g_1} \leq c_1 \\ \frac{\frac{f_1}{g_1} - a_1}{b_1 - a_1} & a_1 \leq \frac{f_1}{g_1} \leq b_1 \\ 0 & \frac{f_1}{g_1} \leq a_1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \frac{f_1}{g_1} \geq 0.7 \\ \frac{16x_1 + 25.5x_2 + 2800}{12x_1 + 16.5x_2 + 1200} & 0.4 \leq \frac{f_1}{g_1} \leq 0.7 \\ 1 & 0.2 \leq \frac{f_1}{g_1} \leq 0.4 \\ \frac{12x_1 + 13x_2}{8x_1 + 11x_2 + 800} & 0.1 \leq \frac{f_1}{g_1} \leq 0.2 \\ 0 & \frac{f_1}{g_1} \leq 0.1 \end{cases}$$



شکل ۳.۴: توابع عضویت تعریف شده به صورت ذوزنقه‌ای

به همین ترتیب تابع عضویت دیگر به شکل زیر است:

$$\mu_۲(x)=\begin{cases} ۰ & \frac{f_۲}{g_۲}\geq ۱۲۰\\ \frac{۱۸۰y_۱+۱۹۲y_۲-۱۲x_۱-۱۳x_۲+۲۴۰}{۶۰y_۱+۶۴y_۲+۸۰} & ۸۰\leq\frac{f_۲}{g_۲}\leq ۱۲۰\\ ۱ & ۵۰\leq\frac{f_۲}{g_۲}\leq ۸۰\\ \frac{۱۲x_۱+۱۳x_۲-۳۰y_۱-۳۲y_۲-۴۰}{۷۵y_۱+۸۰y_۲+۱۰۰} & ۲۰\leq\frac{f_۲}{g_۲}\leq ۵۰,\\ ۰ & \frac{f_۲}{g_۲}\leq ۲۰ \end{cases}$$

اگر

$$\mu_۱(x)=max(min(\frac{۱۶x_۱+۲۵.۵x_۲+۲۸۰۰}{۱۲x_۱+۱۶.۵x_۲+۱۲۰۰},۱,\frac{۱۲x_۱+۱۳x_۲}{۸x_۱+۱۱x_۲+۸۰۰}),۰)$$

و

$$\mu_۲(x)=max(min(\frac{۱۸۰y_۱+۱۹۲y_۲-۱۲x_۱-۱۳x_۲+۲۴۰}{۶۰y_۱+۶۴y_۲+۸۰},۱,$$
$$\frac{۱۲x_۱+۱۳x_۲-۳۰y_۱-۳۲y_۲-۴۰}{۷۵y_۱+۸۰y_۲+۱۰۰}),۰)$$

آن‌گاه $\mu_۱^*(۰,۵۰)$ و $\mu_۲^*(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)$ به دست می‌آیند.
توابع عضویت بواسطه‌ی استفاده از سری تیلور مرتبه اول تغییر شکل می‌دهند.

$$\mu_۱(x)\cong\overline{\mu_۱(x)}=\mu_۱(۰,۵۰)+[(x_۱-۰)\frac{\partial\mu_۱(۰,۵۰)}{\partial x_۱}+(x_۲-۵۰)\frac{\partial\mu_۱(۰,۵۰)}{\partial x_۲}]$$
$$\Longrightarrow\mu_۱(x)\cong\overline{\mu_۱(x)}=۰.۰۰۶x_۱+۰.۰۰۵x_۲+۰.۲۳, \qquad (۲۲.۴)$$

و

$$\mu_۲(x)\cong\overline{\mu_۲(x)}=\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)+[(x_۱-۲.۵۶۴)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial x_۱}+$$
$$(x_۲-۴۶.۱۵۳)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial x_۲}+$$
$$(y_۱-۲.۵۶۴)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial y_۱}+(y_۲-۲.۳۰۷)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial y_۲}]$$
$$\Longrightarrow\mu_۲(x)\cong\overline{\mu_۲(x)}=۰.۰۲۵x_۱+۰.۰۲۷x_۲-۰.۲۰۸y_۱-۰.۲۲۱y_۲-۰.۴۱. \qquad (۲۳.۴)$$

هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی با افزودن (۲۲.۴) به (۲۳.۴) به دست می‌آید.
بنابراین داریم:

$$p(x) = \overline{\mu_1(x)} + \overline{\mu_2(x)} = 0.505x_1 + 0.032x_2 - 0.208y_1 - 0.221y_2 - 0.18.$$

بنابراین مسئله تک‌هدفه معادل مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری چندهدفه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$max \;\; p(x) = \overline{\mu_1(x)} + \overline{\mu_2(x)} = 0.505x_1 + 0.032x_2 - 0.208y_1 - 0.221y_2 - 0.18$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 250 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 500 \\ 45x_1 + 30x_2 \leq 12000 \\ 0.1(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2 \\ 0.1x_1 \leq y_1 \\ 0.05x_2 \leq y_2 \\ x_1 \geq y_1 \\ x_2 \geq y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases} \tag{24.4}$$

بعد از حل مسئله جواب بهینه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 10, \quad y_2 = 0,$$
$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0.15, \quad \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 70.58$$

و مقادیر توابع عضویت برابر است با $\mu_1 = 0.75$ و $\mu_2 = 1$. با وجود این‌که توابع عضویت به صورت ذوزنقه‌ای تعریف می‌شوند، هنوز روش جواب پیشنهاد شده کارا است.

جدول ۲.۴ نتایج بدست آمده برای دو تعریف توابع عضویت در مسئله کاربردی ۱ را نشان می‌دهد. جدول نشان می‌دهد با وجود این حقیقت که توابع عضویت در انواع مجزا، تعریف می‌شوند روش پیشنهاد شده بسیار کارا است.

اکنون اثر تغییرات در پارامترها را روی نمایش جواب امتحان می‌کنیم. ابتدا، برای توابع عضویت خطی قطعه‌ای ساده، سطح ایده‌آل فازی و حدود تغییرات دو هدف فازی در مسئله کاربردی ۱ فرض شد به ترتیب $(0.1, 70)$ و $(-0.1, 20)$ باشد. اکنون فرض می‌کنیم سطح ایده‌آل فازی و حدود تغییرات دو هدف فازی در مسئله کاربردی ۱ به ترتیب، $(0.2, 60)$ و $(-0.2, 30)$ باشد (شکل۴.۴را ببینید).

توابع عضویت هدف‌ها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \geq 0.2, \\ \frac{\frac{12x_1+13x_2}{40x_1+55x_2+1000} - (-0.2)}{0.2-(-0.2)} & -0.2 \leq \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq 0.2, \\ 0 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq -0.2, \end{cases}$$

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \geq 0.2, \\ \frac{20x_1+24x_2+800}{16x_1+22x_2+1600} & -0.2 \leq \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq 0.2, \\ 0 & \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \leq -0.2. \end{cases}$$

جدول ۲.۴: نتیجه به دست آمده برای دو تابع عضویت تعریف شده

نتیجه	تعریف توابع عضویت		
	قطعه‌ای ساده	مثلثی	ذوزنقه‌ای
$\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}$	۰.۱۴	۰.۱۴	۰.۱۵
$\frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}$	۷۵.۷۴	۷۵.۷۴	۷۰.۵۸
$\mu_۱$	۱.۰	۰.۷۵	۰.۷۵
$\mu_۲$	۱.۰	۰.۸۹	۱.۰

به همین ترتیب تابع عضویت دیگر به شکل زیر است:

$$\mu_۲(x)=\begin{cases} ۱ & \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}\geq ۶۰,\\ \frac{۱۲x_۱+۱۳x_۲-۴۵y_۱-۴۸y_۲-۶۰}{۴۵y_۱+۴۸y_۲+۱۰۰} & ۳۰\leq \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}\leq ۶۰,\\ ۰ & \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}\leq ۳۰. \end{cases}$$

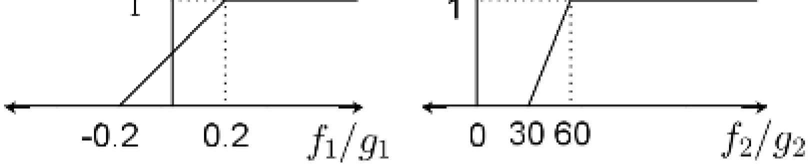
اگر مسئله برای هر تابع عضویت جداگانه حل شود $\mu_۱^*(۰,۵۰)$ و $\mu_۲^*(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)$ به دست می‌آید. توابع عضویت بواسطه‌ی استفاده از سری تیلور مرتبه اول به صورت زیر تغییر شکل می‌دهد.

$$\mu_۱(x)\cong\overline{\mu_۱(x)}=\mu_۱(۰,۵۰)+[(x_۱-۰)\frac{\partial\mu_۱(۰,۵۰)}{\partial x_۱}+(x_۲-۵۰)\frac{\partial\mu_۱(۰,۵۰)}{\partial x_۲}]$$
$$\Longrightarrow \mu_۱(x)\cong\overline{\mu_۱(x)}=۰.۰۰۳x_۱+۰.۰۰۲x_۲+۰.۶۴, \qquad (۲۵.۴)$$

و

$$\mu_۲(x)\cong\overline{\mu_۲(x)}=\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)+[(x_۱-۲.۵۶۴)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial x_۱}+$$
$$(x_۲-۴۶.۱۵۳)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial x_۲}+$$
$$(y_۱-۲.۵۶۴)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial y_۱}+(y_۲-۲.۳۰۷)\frac{\partial\mu_۲(۲.۵۶۴,۴۶.۱۵۳,۲.۵۶۴,۲.۳۰۷)}{\partial y_۲}]$$

$$\Longrightarrow \mu_۲(x)\cong\overline{\mu_۲(x)}=۰.۰۲۵x_۱+۰.۰۲۷x_۲-۰.۲۰۸y_۱+۰.۲۲۱y_۲-۰.۵۵. \qquad (۲۶.۴)$$



شکل ۴.۴: توابع عضویت تعریف شده به صورت خطی قطعه‌ای ساده

هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی از افزودن (۲۵.۴) به (۲۶.۴) به دست می‌آید.

$$p(x) = \overline{\mu_1(x)} + \overline{\mu_2(x)} = 0.028x_1 + 0.029x_2 - 0.208y_1 - 0.221y_2 + 0.09. \quad (۲۷.۴)$$

بنابراین مسئله تک‌هدفه معادل مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$max \;\; p(x) = \overline{\mu_1(x)} + \overline{\mu_2(x)} = 0.028x_1 + 0.029x_2 - 0.208y_1 - 0.221y_2 + 0.09$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 250 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 500 \\ 45x_1 + 30x_2 \leq 12000 \\ 0.1(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2 \\ 0.1x_1 \leq y_1 \\ 0.05x_2 \leq y_2 \\ x_1 \geq y_1 \\ x_2 \geq y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases} \quad (۲۸.۴)$$

بعداز حل مسئله جواب بهینه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = 6.493, \quad x_2 = 116.883, \quad y_1 = 6.493, \quad y_2 = 5.844,$$
$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0.14, \quad \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 75.74$$

آن‌گاه مقادیر عضویت به صورت $\mu_1 = 0.87$ و $\mu_2 = 1$ به دست می‌آیند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که با وجود اینکه پارامترها تغییر می‌کنند روش پیشنهاد شده هنوز کارا است. جدول ۳.۴ اثر تغییر پارامترها را روی نمایش جواب نشان می‌دهد.

جدول ۳.۴: تاثیر تغییر پارامترها روی نمایش جواب

هدف	سطح ایده‌آل	حداکثر تغییرات	مقدار تابع عضویت
$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$	-1.0	1.0	1.0
	-2.0	2.0	1.0
$\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$	20	70	0.87
	30	80	1.0

۲.۳.۴ مثال عددی ۱

مسئله بهینه‌سازی با سه هدف کسری متناقض را به صورت زیر در نظر بگیرید:

جدول ۴.۴: سطوح آرمانی و دامنه تغییرات

توابع هدف	سطح آرمانی	حداکثر تغییرات
هدف اول	-۱.۰	۱.۰
هدف دوم	-۱.۰	۲.۰
هدف سوم	-۰.۵	۱.۲

$$\begin{array}{ll} min & \frac{-(x_{۱۱}+x_{۱۲})}{x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳}+x_{۲۴}} \tilde{\leq} -۱ \\ min & \frac{-(x_{۲۱}+x_{۲۲})}{x_{۲۳}+x_{۲۴}} \tilde{\leq} -۱ \\ min & \frac{-۵۰}{x_{۱۱}+x_{۱۲}} \tilde{\leq} -۰.۵ \end{array}$$

$$s.t. \begin{cases} x_{۱۱}+x_{۱۲}=x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳}+x_{۲۴} \\ x_{۱۱}+x_{۱۲} \geq ۳۰۰ \\ ۲۰۰ \geq x_{۱۱} \geq ۱۰۰ \\ x_{۱۲} \leq ۲۵۰ \\ x_{۲۱}+x_{۲۲} \geq ۲۰۰ \\ x_{۲۱} \geq ۵۰ \\ ۱۰۰ \geq x_{۲۳} \geq ۵۰ \\ ۱۲۰ \geq x_{۲۴} \geq ۷۵ \\ x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}, x_{۲۴} \geq ۰. \end{cases}$$

$\tilde{\leq}$ فازی بودن سطح ایده‌آل را نشان می‌دهد. $\tilde{\leq}$ اساساً به عنوان کمتر از تعریف می‌شود [۴۷]. علامت $\tilde{\leq}$ یعنی $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ باید مینیمم شود. تابع عضویت برای هر هدف فازی به صورت زیر تعریف می‌شود: $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \tilde{\leq} w_i$ آن‌گاه

$$\mu_i(x)=\begin{cases} ۱ & \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leq w_i, \\ \frac{\overline{t_i}-\frac{f_i(x)}{g_i(x)}}{\overline{t_i}-w_i} & w_i \leq \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leq \overline{t_i}, \\ ۰ & \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \geq \overline{t_i} \end{cases} \qquad (۲۹.۴)$$

به طوری که $\overline{t_i}$ برای iامین هدف فازی حدود بالا دامنه تغییرات است.

توابع عضویت بواسطه‌ی استفاده از سری تیلور مرتبه اول، به صورت زیر در می‌آیند:

$$\overline{\mu_۱(x)} = ۰.۰۰۳x_{۱۱}+۰.۰۰۳x_{۱۲}-۰.۰۰۳x_{۲۱}-۰.۰۰۳x_{۲۲}-x_۰.۰۰۳-x_{۲۳}-۰.۰۰۳x_{۲۴}+۱ \qquad (۳۰.۴)$$

$$\overline{\mu_۲(x)} = ۰.۰۰۱۵x_{۲۱}+۰.۰۰۱۵x_{۲۲}-۰.۰۰۱۲x_{۲۳}-۰.۰۰۱۲x_{۲۴}+۰.۷۱۴ \qquad (۳۱.۴)$$

$$\overline{\mu_۳(x)} = -۰.۰۰۰۱x_{۱۱}-۰.۰۰۰۱x_{۱۲}+۰.۸۱۵. \qquad (۳۲.۴)$$

به عنوان نمونه برای محاسبه $\overline{\mu_{۳}(x)}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:
مقدار بهینه هدف سوم مثال عددی ۱ را روی مجموعه شدنی به دست می‌آوریم، بنابراین داریم:

$$x^* = (x^*_{۱۱}, x^*_{۱۲}, x^*_{۲۱}, x^*_{۲۲}, x^*_{۲۳}, x^*_{۲۴}) = (۲۰۰, ۲۵۰, ۳۲۵, ۰, ۵۰, ۷۵)$$

حال ضابطه تابع عضویت $\mu_{۳}(x)$ را محاسبه می‌کنیم لذا داریم:

$$\mu_{۳}(x) = \begin{cases} ۱ & \frac{f_{۳}(x)}{g_{۳}(x)} \leq -۰.۵ \\ \frac{۵۰+۱.۲x_{۱۱}+۱.۲x_{۱۲}}{۱.۷x_{۱۱}+۱.۷x_{۱۲}} & -۰.۵ \leq \frac{f_{۳}(x)}{g_{۳}(x)} \leq ۱.۲ \\ ۰ & \frac{f_{۳}(x)}{g_{۳}(x)} \geq ۱.۲ \end{cases} \qquad (۳۳.۴)$$

از ضابطه دوم رابطه (۳۳.۴) نسبت به $x_{۱۱}$ مشتق جزئی می‌گیریم، داریم:

$$\frac{\partial \mu_{۳}(x^*)}{\partial x_{۱۱}} = \frac{۱.۲[۱.۷x^*_{۱۱} + ۱.۷x^*_{۱۲}] - ۱.۷[۵۰ + ۱.۲x^*_{۱۱} + ۱.۲x^*_{۱۲}]}{(۱.۷x^*_{۱۱} + ۱.۷x^*_{۱۲})^{۲}} = -۰.۰۰۰۱$$

از ضابطه دوم رابطه (۳۳.۴) نسبت به $x_{۱۲}$ مشتق جزئی می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial \mu_{۳}(x^*)}{\partial x_{۱۲}} = \frac{۱.۲[۱.۷x^*_{۱۱} + ۱.۷x^*_{۱۲}] - ۱.۷[۵۰ + ۱.۲x^*_{۱۱} + ۱.۲x^*_{۱۲}]}{(۱.۷x^*_{۱۱} + ۱.۷x^*_{۱۲})^{۲}} = -۰.۰۰۰۱$$

و

$$\mu_{۳}(x^*) = \frac{۵۰ + ۱.۲ \times ۲۰۰ + ۱.۲ \times ۲۵۰}{۱.۷ \times ۲۰۰ + ۱.۷ \times ۲۵۰} = ۰.۷۷۱$$

بنابراین،

$$\overline{\mu}_{۳}(x) = ۰.۷۷۱ + (x_{۱۱} - ۲۰۰)[-۰.۰۰۰۱] + (x_{۱۲} - ۲۵۰)[-۰.۰۰۰۱]$$

$$= -۰.۰۰۰۱x_{۱۱} - ۰.۰۰۰۱x_{۱۲} + ۰.۸۱۵$$

بنابراین مسئله تک‌هدفه معادل با مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$min \;\; p(x) = \overline{\mu_{۱}(x)} + \overline{\mu_{۲}(x)} + \overline{\mu_{۳}(x)} = ۰.۰۰۲۹(x_{۱۱} + x_{۱۲}) - $$
$$۰.۰۰۱۵(x_{۲۱} + x_{۲۲}) - ۰.۰۰۴۲(x_{۲۳} + x_{۲۴}) + ۲.۵۲۹$$

$$s.t. \begin{cases} x_{۱۱} + x_{۱۲} = x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} + x_{۲۴} \\ x_{۱۱} + x_{۱۲} \geq ۳۰۰ \\ ۲۰۰ \geq x_{۱۱} \geq ۱۰۰ \\ x_{۱۲} \leq ۲۵۰ \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} \geq ۲۰۰ \\ x_{۲۱} \geq ۵۰ \\ ۱۰۰ \geq x_{۲۳} \geq ۵۰ \\ ۱۲۰ \geq x_{۲۴} \geq ۷۵ \\ x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}, x_{۲۴} \geq ۰. \end{cases} \qquad (۳۴.۴)$$

بعد از حل مسئله جواب بهینه به صورت زیر است.

$$x_{۱۱} = ۲۰۰, x_{۱۲} = ۲۵۰, x_{۲۱} = ۱۷۵,$$

$$x_{22} = 150, x_{23} = 50, x_{24} = 75,$$
$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = -1, \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = -\frac{13}{5}, \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = -\frac{1}{9}$$

ومقادیر عضویت به صورت زیر می‌باشند.

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0.77$$

مقادیر توابع عضویت هر دو هدف $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ و $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ نشان می‌دهد که به ترتیب ۱۰۰ درصد برآورده می‌شوند اما هدف $\frac{f_3(x)}{g_3(x)}$، ۷۷ درصد برآورده می‌شود.

جدول ۵.۴ خلاصه نتایج مسئله کاربردی ۱ و مثال عددی ۱ را نشان می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که هر چند تعداد توابع هدف و متغیرها افزایش پیدا می‌کند اما روش ذکر شده هنوز کارا است.

جدول ۵.۴: نتایج مثال‌های کاربردی

مقدار تابع عضویت هدف‌ها	هدف	تعداد هدف‌ها	تعداد متغیرها	مسئله
۱.۰۰	۱	۲	۴	مثال کاربردی ۱
۱.۰	۲			
۱.۰۰	۱	۳	۶	مثال عددی ۱
۱.۰۰	۲			
۰.۷۷	۳			

اکنون، روش جواب پیشنهاد شده را در دو مثال عددی به کار می‌بریم.

۳.۳.۴ مثال عددی۲

مسئله دوهدفه خطی‌کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$max \quad \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{x_1 - 4}{-x_2 + 3}$$
$$max \quad \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{-x_1 + 4}{x_2 + 1}$$
$$s.t. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

اگر سطح ایده‌آل فازی هدف‌ها به ترتیب (۴ و ۲) باشد جواب بهینه x را در حالتی که در اهداف فازی زیر صدق می‌کند به دست می‌آوریم.

$$\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}=\frac{x_۱-۴}{-x_۲+۳}\tilde{\geq}۲$$
$$\frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}=\frac{-x_۱+۴}{x_۲+۱}\tilde{\geq}۴$$
$$s.t.\begin{cases}-x_۱+۳x_۲\leq ۰\\ x_۱\leq ۶\\ x_۱,x_۲\geq ۰.\end{cases}$$

فرض می‌کنیم حدود دامنه تغییرات دو هدف فازی ایده‌آل به ترتیب (۲- و ۱-) است. توابع عضویت هدف‌ها بصورت زیر می‌باشد.

$$\mu_۱(x)=\begin{cases}۱ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\geq w_۱,\\ \frac{\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}-\underline{t_۱}}{w_۱-\underline{t_۱}} & \underline{t_۱}\leq\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\leq w_۱,\\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\leq\underline{t_۱}\end{cases}=\begin{cases}۱ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\geq ۲,\\ \frac{\frac{x_۱-۴}{-x_۲+۳}-(-۱)}{۲-(-۱)} & -۱\leq\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\leq ۲\\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\leq -۱,\end{cases}$$

$$\mu_۱(x)=\begin{cases}۱ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\geq ۲,\\ \frac{x_۱-x_۲-۱}{-۳x_۲+۹} & -۱\leq\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\leq ۲\\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\leq -۱,\end{cases}\tag{۳۵.۴}$$

و

$$\mu_۲(x)=\begin{cases}۱ & \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}\geq ۴,\\ \frac{-x_۱+۲x_۲+۶}{۶(x_۲+۱)} & -۲\leq\frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}\leq ۴\\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}\leq -۲.\end{cases}\tag{۳۶.۴}$$

اگر مسئله برای هر هدف به صورت جداگانه حل شود به ترتیب $(۶,۲)$ و $(۰,۰)$ را به دست خواهیم آورد. توابع عضویت بواسطه‌ی استفاده از بسط سری تیلور مرتبه اول به صورت زیر تغییر شکل می‌دهند.

$$\mu_۱(x)\cong\overline{\mu_۱(x)}=\mu_۱(۶,۰)+[(x_۱-۶)\frac{\partial\mu_۱(۶,۲)}{\partial x_۱}+(x_۲-۲)\frac{\partial\mu_۱(۶,۲)}{\partial x_۲}],$$
$$\mu_۱(x)\cong\overline{\mu_۱(x)}=۰.۳۳x_۱+۰.۶۷x_۲-۲.۳۳,\tag{۳۷.۴}$$

و

$$\mu_۲(x)\cong\overline{\mu_۲(x)}=\mu_۲(۰,۰)+[(x_۱-۰)\frac{\partial\mu_۲(۰,۰)}{\partial x_۱}+(x_۲-۰)\frac{\partial\mu_۲(۰,۰)}{\partial x_۲}],$$
$$\mu_۲(x)\cong\overline{\mu_۲(x)}=-۰.۱۴x_۱-۰.۵۷x_۲+۱.\tag{۳۸.۴}$$

مجموع (۳۷.۴) و (۳۸.۴) تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه قطعی است. بنابراین داریم:

$$p(x)=\overline{\mu_۱(x)}+\overline{\mu_۲(x)}=۰.۱۹x_۱+۰.۱۰x_۲-۱.۳۳$$

در نتیجه شکل نهایی مسئله تک‌هدفه معادل مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$p(x) = \overline{\mu_۱(x)} + \overline{\mu_۲(x)} = ۰.۱۹x_۱ + ۰.۱۰x_۲ - ۱.۳۳$$

$$s.t. \begin{cases} -x_۱ + ۳x_۲ \leq ۰ \\ x_۱ \leq ۶ \\ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{cases}$$

بعد از حل مسئله بالا جواب بهینه به صورت زیر است:

$$x_۱ = ۶, \qquad x_۲ = ۲$$

$$\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = ۲, \qquad \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = -\frac{۲}{۳}$$

و توابع عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_۱ = ۱, \;\; \mu_۲ = ۰.۲۲$$

مقادیر توابع عضویت هدف‌های $\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}$ و $\frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}$ برای به دست آوردن جواب بهینه $x_۱ = ۶$ و $x_۲ = ۲$ نشان می‌دهد که هدف‌های $\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}$ و $\frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}$ به ترتیب ۱۰۰ درصد و ۲۲ درصد برآورده می‌شوند.

۴.۳.۴ مثال عددی ۳

در این مثال مجموعه محدودیت‌ها همان محدودیت‌های مثال قبلی است اما هدف‌های مسئله تغییر یافته‌اند.

$$Max \qquad \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = \frac{x_۱ - ۴}{-x_۲ + ۳} \qquad , \qquad Min \qquad \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = \frac{-x_۱ + ۴}{x_۲ + ۱}$$

سطح ایده‌آل فازی هدف‌ها به ترتیب (۱ و ۲) هستند. بنابراین مسئله دوباره طراحی شده است. هدف‌های فازی مسئله به صورت زیر می‌باشند.

$$\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = \frac{x_۱ - ۴}{-x_۲ + ۳} \tilde{\geq} ۲ \qquad , \qquad \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = \frac{-x_۱ + ۴}{x_۲ + ۱} \tilde{\leq} ۱$$

حدود دامنه تغییرات هدف‌های فازی به ترتیب (۲ و ۰) هستند. بنابراین مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه به صورت مسئله تک‌هدفه زیر تغییر شکل می‌دهند.

$$max \;\; p(x) = \overline{\mu_۱(x)} + \overline{\mu_۲(x)} = -۰.۵x_۱ + ۳x_۲ + ۶$$

$$s.t. \begin{cases} -x_۱ + ۳x_۲ \leq ۰ \\ x_۱ \leq ۶ \\ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{cases}$$

بعد از حل مسئله جواب بهینه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$x_۱ = ۶, \qquad x_۲ = ۲$$

$$\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = ۲, \qquad \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = -\frac{۲}{۳}$$

و توابع عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_۱ = ۱, \quad \mu_۲ = ۱$$

مقادیر تابع عضویت نشان می‌دهند که هر دو هدف $\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}$ و $\frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}$ ۱۰۰ درصد برای جواب $x_۱ = ۶$ و $x_۲ = ۲$ برآورده می‌شوند.

در جدول ۶.۴ نتایج مثال‌های عددی ۲ و ۳ خلاصه شده است.

جدول ۶.۴: نتایج مثال‌های عددی ۲ و ۳

مسئله	تعداد هدف	شماره هدف	هدف	مقدار تابع عضویت هدف
مثال عددی ۲	۲	۱	ماکزیمم	۱.۰۰
		۲	ماکزیمم	۰.۲۲
مثال عددی ۳	۲	۱	ماکزیمم	۱.۰۰
		۲	مینیمم	۱.۰۰

فصل ۵

خطی‌سازی تابع عضویت مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی

در فصل قبل روش سری تیلور را برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه ارائه دادیم. در این فصل تعدادی از مشکلات روش سری تیلور را معرفی کرده و سعی در بهبود آن‌ها داریم. عمده مطالب این فصل از مراجع [۳۹، ۳۳، ۳۲] است.

۱.۵ بهبودی بر روش سری تیلور

مشکلات روش سری تیلور برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی

۱) یک چندجمله‌ای تیلور مرتبه kام معمولا از یک تابع مشتق پذیر مرتبه kام تقریب خوبی می‌دهد. اما فقط اطراف یک نقطه داده شده، نه روی تمام دامنه . بنابراین، برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, p$ تابع $\overline{\mu_i}$ تابع μ_i را اطراف جواب بهینه‌اش تقریب می‌زند. اما مسئله تک‌هدفه $P(x)$ در (۵.۴) نمی‌تواند μ_i را اطراف جواب بهینه‌اش به درستی تقریب بزند.
۲) توابع $\overline{\mu_i}$ نمی‌توانند تابع عضویت نامیده شوند زیرا مقدارشان لزوماً در بازه [۱ و ۰] نیست. یک راه بهبود بخشیدن روش قبلی، این است که توابع $\overline{\mu_i}$ را نرمال کرده به طوری که روی مجموعه شدنی X مثبت و کوچکتر یا مساوی یک شوند و در عین حال خطی بودن و موقعیت نقطه ماکزیمم خود را حفظ کنند.
۳) از نظر ریاضی اولاً، مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی که از توابع عضویت μ_i استفاده می‌کند با مسئله قطعی تک‌هدفه که بوسیله مجموع توابع $\overline{\mu_i}$ به دست می‌آید، معادل نیست. (مسئله (۱.۵) و شکل ۱.۵ را ببینید). ثانیاً، حل مسئله تک‌هدفه به جای مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی تنها یک روش توافقی است، نه یک روشی که یک مدل معادل پیشنهاد می‌کند، تا به جای مدل اولیه حل شود. یک نیاز اساسی دراین مرحله این است که جواب بهینه مسئله تک‌هدفه امتحان شود آیا

جواب کارای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است یا خیر.
با آگاهی از نقاط ضعف تقریب سری تیلور که در بالا ارائه شد، یک روش بهبود یافته برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه بیان می‌کنیم.
گام ۱: (برای نمونه [؟] را ببینید) جواب‌های حداکثری مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه را تعیین کنید. یعنی x_i^* را به گونه‌ای بیابید که $\frac{f_i(x_i^*)}{g_i(x_i^*)} = max_{x\in X} \frac{f_i(x)}{g_i(x)},\ i = 1, \ldots, p$.
سطح ایده ال $t_i,\ i = 1, \ldots, p$ و حدود دامنه تغییرات $w_i,\ i = 1, \ldots, p$ را مشخص کنید. هدف‌های فازی را با توابع عضویت $\mu_i,\ i = 1, \ldots, p$ تعریف کنید.
گام ۲: توابع عضویت خطی کسری $\mu_i,\ i = 1, \ldots, p$ را بوسیله توابع خطی $\overline{\mu_i},\ i = 1, \ldots, p$ تقریب بزنید.
گام ۳: توابع $\overline{\mu_i}$ را برای $i = 1, \ldots, p$ نرمال کنید و قرار دهید:

$$\widehat{\mu_i} = \frac{\overline{\mu_i}(x) - a_i}{b_i - a_i}, \quad x \in X, \quad i = 1, \ldots, p$$

که a_i و b_i به ترتیب مینیمم و ماکزیمم مقدار $\overline{\mu_i}(x),\ i = 1, \ldots, p$ روی مجموعه شدنی X است.
گام ۴: مجموع توابع $\widehat{\mu_i},\ i = 1, \ldots, p$ را در نظر گرفته و از روش مجموع وزین استفاده می‌کنیم و مسئله قطعی تک‌هدفه $max_{x\in X} \sum_{i=1}^{p} \widehat{\mu_i}(x)$ را حل کنید.
گام ۵: با کمک الگوریتم ۲ از فصل ۲ آزمایش کنید آیا جواب بهینه که در مرحله ۴ بدست می‌آید، جواب کارا برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است یا خیر.

۲.۵ مسئله‌های کاربردی و مثال‌های عددی

در این بخش مسئله‌های کاربردی و مثال‌های عددی می‌آوریم تا نشان دهیم که روش بهبود یافته که در بخش قبلی پیشنهاد کردیم موثر است.

مثال ۱.۲.۵. مسئله کاربردی ۱ در زمینه برنامه‌ریزی تولید، مربوط به فصل چهارم را به صورت زیر

داریم:

$$\begin{array}{ll} max & \frac{12x_1+13x_2}{40x_1+55x_2+4000} \\ max & \frac{12x_1+13x_2}{1.5y_1+1.6y_2+2} \\ s.t. & 2x_1+x_2 \leq 250 \\ & 5x_1+4x_2 \leq 500 \\ & 45x_1+30x_2 \leq 12000 \\ & 0.1(x_1+x_2) \leq y_1+y_2 \\ & 0.1x_1 \leq y_1 \\ & 0.05x_2 \leq y_2 \\ & x_1 \geq y_1 \\ & x_2 \geq y_2 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

سطح‌های آرمانی برای توابع هدف (۷۰ و ۰.۱) هستند و دامنه تغییرات (۲۰ و ۰.۱−) می‌باشند.

در فصل چهارم جواب $(6.493, 116.883, 6.493, 5.844)$ را به دست آوردیم. چون،
$\frac{f_1}{g_1}(6.493, 116.883, 6.493, 5.844) = 0.14$ و
$\frac{f_2}{g_2}(6.493, 116.883, 6.493, 5.844) = 75.74$، هر دو آرمان برآورده می‌شوند. با وجود این که جواب بهینه مسئله تک‌هدفه، هر دو آرمان را برآورده می‌سازد و مقدار تابع عضویت برای هر دو هدف برابر یک می‌شود، جواب بهینه مسئله تک‌هدفه یک جواب کارا برای مسئله چندهدفه نیست. زیرا حل مسئله تک‌هدفه به جای مسئله چندهدفه یک روش معادل نیست که به جای مدل اولیه حل شود بلکه یک روش توافقی است و این از مشکلات روش سری تیلور است. لذا از الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی استفاده کرده و از جواب بهینه مسئله تک‌هدفه شروع می‌کنیم و به جواب کارای مسئله چندهدفه می‌رسیم که هر دو آرمان را برآورده می‌سازد و مقدار توابع عضویت به ازای آن برای هر دو هدف برابر یک می‌شود.

الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی جواب بهینه $(6.493, 116.883, 6.493, 5.844)$ به صورت زیر است:

گام ۱: قرار می‌دهیم $x^* = (6.493, 116.883, 6.493, 5.844)$ و $k = 1$

گام ۲: مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم و جواب بهینه (x^k, d^{k+}, d^{k-}) را به دست می‌آوریم و قرار می‌دهیم $t^k = \sum_{i=1}^{p} d_i^{k+} + d_i^{k-}$

$$max \sum_{i=1}^{2} d_i^- + d_i^+$$

$$s.t. \begin{cases} 12x_1 + 13x_2 - d_1^+ = (12x_1^* + 13x_2^*)\theta_1, \\ 40x_1 + 55x_2 + 4000 + d_1^- = (40x_1^* + 55x_2^* + 4000)\theta_1, \\ 12x_1 + 13x_2 - d_2^+ = (12x_1^* + 13x_2^*)\theta_2, \\ 1.5y_1 + 1.6y_2 + 2 + d_2^- = (1.5y_1^* + 1.6y_2^* + 2)\theta_2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 250, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 500, \\ 45x_1 + 30x_2 \leq 12000, \\ 0.1(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2, \\ 0.1x_1 \leq y_1, \\ 0.05x_2 \leq y_2, \\ x_1 \geq y_1, \\ x_2 \geq y_2, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0, \theta_1, \theta_2 \geq 0. \end{cases}$$

گام ۳: تا زمانی که t^k برابر صفر نشده قرار می‌دهیم $x^* = x^k$ و $k = k + 1$ و به گام ۲ می‌رویم. بعد از یک بار اجرای روش تکراری $t^1 = 0$ می‌شود و $x^1 = (6.493, 116.883, 6.493, 5.844)$ به دست می‌آید. پس توقف می‌کنیم. طبق آنچه که در الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی فصل دوم گفتیم x^1 جواب کارا است.

مثال ۲.۲.۵. مثال عددی ۱، مربوط به فصل چهارم را به صورت زیر داریم:

$$min \quad \left(\frac{-(x_{۱۱}+x_{۱۲})}{x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳}+x_{۲۴}}, \frac{-(x_{۲۱}+x_{۲۲})}{x_{۲۳}+x_{۲۴}}, \frac{-۵۰}{x_{۱۱}+x_{۱۲}}\right)$$

$$s.t. \begin{cases} x_{۱۱}+x_{۱۲}=x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳}+x_{۲۴} \\ x_{۱۱}+x_{۱۲} \geq ۳۰۰ \\ ۲۰۰ \geq x_{۱۱} \geq ۱۰۰ \\ x_{۱۲} \leq ۲۵۰ \\ x_{۲۱}+x_{۲۲} \geq ۲۰۰ \\ x_{۲۱} \geq ۵۰ \\ ۱۰۰ \geq x_{۲۳} \geq ۵۰ \\ ۱۲۰ \geq x_{۲۴} \geq ۷۵ \\ x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}, x_{۲۴} \geq ۰. \end{cases}$$

سطح‌های آرمانی برای توابع هدف (۰.۵- و ۱- و ۱-) هستند و حدود دامنه تغییرات (۱.۲ و ۲ و ۱) می‌باشند.
در فصل چهارم جواب بهینه $x^*=(۲۰۰, ۲۵۰, ۱۷۵, ۱۵۰, ۵۰, ۷۵)$ را به دست آوردیم.
چون $\frac{f_۱(x^*)}{g_۱(x^*)}=-۱$ و $\frac{f_۲(x^*)}{g_۲(x^*)}=-۲.۶$ و $\frac{f_۳(x^*)}{g_۳(x^*)}=-۰.۱۱۱$ جواب، دو هدف اول را ۱۰۰ درصد برآورده می‌کند و هدف سوم را ۷۷ درصد برآورده می‌کند. با وجود این که جواب بهینه مسئله تک‌هدفه، دو هدف اول را ۱۰۰ در صد برآورده می‌سازد و هدف سوم را ۷۷ درصد برآورده می‌کند، جواب بهینه مسئله تک‌هدفه یک جواب کارا برای مسئله چندهدفه نیست. زیرا حل مسئله تک‌هدفه به جای مسئله چندهدفه یک روش معادل نیست که به جای مدل اولیه حل شود بلکه یک روش توافقی است و این از مشکلات روش سری تیلور است. لذا از الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی استفاده کرده و از جواب بهینه مسئله تک‌هدفه شروع می‌کنیم و به جواب کارای مسئله چندهدفه می‌رسیم به طوری که مقدار هر سه تابع هدف بهبود می‌یابد.
الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی جواب بهینه $(۲۰۰, ۲۵۰, ۱۷۵, ۱۵۰, ۵۰, ۷۵)$ به صورت زیر است:
گام ۱: قرار می‌دهیم $x^*=(۲۰۰, ۲۵۰, ۱۷۵, ۱۵۰, ۵۰, ۷۵)$ و $k=۱$
گام ۲: مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم و جواب بهینه (x^k, d^{k+}, d^{k-}) را به دست می‌آوریم و قرار می‌دهیم $t^k=\sum_{i=۱}^{p} d_i^{k+}+d_i^{k-}$

$$max \sum_{i=۱}^{۲} d_i^- + d_i^+$$

$$s.t. \begin{cases} -(x_{۱۱} + x_{۱۲}) - d_۱^+ = -(x_{۱۱}^* + x_{۱۲}^*)\theta_۱, \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} + x_{۲۴} + d_۱^- = (x_{۲۱}^* + x_{۲۲}^* + x_{۲۳}^* + x_{۲۴}^*)\theta_۱, \\ -(x_{۲۱} + x_{۲۲}) - d_۲^+ = -(x_{۲۱}^* + x_{۲۲}^*)\theta_۲, \\ x_{۲۳} + x_{۲۴} + d_۲^- = (x_{۲۳}^* + x_{۲۴}^*)\theta_۲, \\ -۵۰ - d_۳^+ = -۵۰\theta_۳, \\ x_{۱۱} + x_{۱۲} + d_۳^- = (x_{۱۱}^* + x_{۱۲}^*)\theta_۳, \\ x_{۱۱} + x_{۱۲} = x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} + x_{۲۴}, \\ x_{۱۱} + x_{۱۲} \geq ۳۰۰, \\ ۲۰۰ \geq x_{۱۱} \geq ۱۰۰, \\ x_{۱۲} \leq ۲۵۰, \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} \geq ۲۰۰, \\ x_{۲۱} \geq ۵۰, \\ ۱۰۰ \geq x_{۲۳} \geq ۵۰, \\ ۱۲۰ \geq x_{۲۴} \geq ۷۵, \\ x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}, x_{۲۴} \geq ۰. \end{cases}$$

گام ۳: تا زمانی که t^k برابر صفر نشده قرار می‌دهیم $x^* = x^k$ و $k = k + ۱$ و به گام ۲ می‌رویم. بعد از اجرای روش تکراری $t^k = ۰$ می‌شود و $x^k = (۲۰۰, ۱۲۵, ۲۰۰, ۰, ۵۰, ۷۵)$ به دست می‌آید. پس توقف می‌کنیم. طبق آنچه که در الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی فصل دوم گفتیم x^k جواب کارا است.

x^k را در هدف اول قرار می‌دهیم لذا داریم $\frac{-(۲۰۰+۱۲۵)}{۲۰۰+۰+۵۰+۷۵} = -۱$

و x^k را در هدف دوم قرار می‌دهیم بنابراین داریم $\frac{-(۲۰۰+۰)}{۵۰+۷۵} = -۱.۶$

و x^k را در هدف سوم قرار می‌دهیم بنابراین داریم $\frac{-۵۰}{۲۰۰+۱۲۵} = -۰.۱۵۳۸$

در این صورت مشاهده می‌شود که مقادیر هر سه هدف بهبود یافته‌اند.

جواب کارای $x^k = (۲۰۰, ۱۲۵, ۲۰۰, ۰, ۵۰, ۷۵)$ را در ضابطه تابع عضویت (۴.۳۳) قرار می‌دهیم لذا داریم:

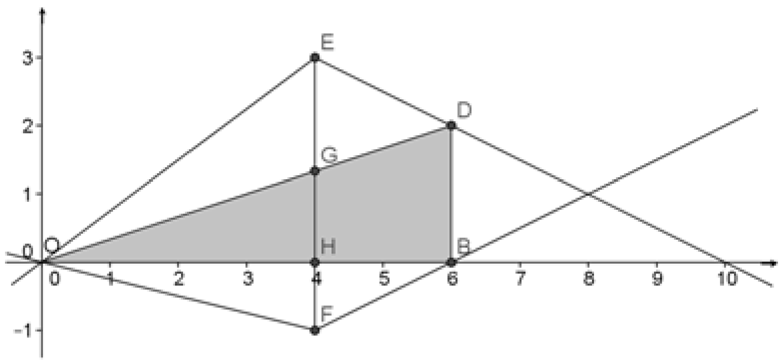
$$\mu_۳(x) = \frac{۵۰ + ۱.۲ \times ۲۰۰ + ۱.۲ \times ۱۲۵}{۱.۷ \times ۲۰۰ + ۱.۷ \times ۱۲۵} = ۰.۸۰$$

بنابراین رضایت‌مندی از هدف سوم تا ۸۰ درصد افزایش یافته است.

مثال ۳.۲.۵. مثال عددی ۲ از فصل چهارم را می‌آوریم تا روش جدید را توصیف کنیم.

$$\begin{aligned} &max \;\; \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = \frac{x_۱ - ۴}{-x_۲ + ۳} \\ &max \;\; \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = \frac{-x_۱ + ۴}{x_۲ + ۱} \\ &s.t. \begin{cases} -x_۱ + ۳x_۲ \leq ۰ \\ x_۱ \leq ۶ \\ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{cases} \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

سطح‌های آرمانی برای توابع هدف (۴ و ۲) است و حدود دامنه تغییرات (۲− و ۱−) است. مجموعه



شکل ۱.۵: مجموعه‌های شدنی و مجموعه‌های جواب‌های کارا مسائل (۱.۵)-(۵.۵)

شدنی و مجموعه جواب‌های کارا مسئله (۱.۵) در شکل ۱.۵ به ترتیب بوسیله‌ی مثلث $[OBD]$ و خط $[OHGD]$، توصیف می‌شوند. توابع عضویت مربوط به هر هدف به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mu_۱(x) = \begin{cases} ۱ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \geq ۲, \\ \frac{x_۱ - x_۲ - ۱}{-۳x_۲ + ۹} & -۱ \leq \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq ۲ \\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq -۱, \end{cases} \tag{۲.۵}$$

و

$$\mu_۲(x) = \begin{cases} ۱ & \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} \geq ۴, \\ \frac{-x_۱ + ۲x_۲ + ۶}{۶(x_۲ + ۱)} & -۲ \leq \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} \leq ۴ \\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq -۲. \end{cases} \tag{۳.۵}$$

بنابراین مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی متناظر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &max \; \mu_۱(x) = \frac{x_۱ - x_۲ - ۱}{۳(-x_۲ + ۳)} \\ &max \; \mu_۲(x) = \frac{-x_۱ + ۲x_۲ + ۶}{۶(x_۲ + ۱)} \\ &s.t. \\ &-x_۱ + ۳x_۲ \leq ۰ \\ &x_۱ \leq ۶ \\ &x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{aligned} \tag{۴.۵}$$

از قضیه ۱.۳.۵ نتیجه می‌گیریم مجموعه جواب‌های کارا مسئله (۴.۵) همان مجموعه جواب‌های کارای مسئله (۱.۵) است. مطابق با روش قبل مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه زیر باید ساخته شود:

$$\begin{aligned} &max\ \ \widehat{\mu_1}(x) = \quad \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{7}{3} \\ &max\ \ \widehat{\mu_2}(x) = \quad -\tfrac{1}{6}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + 1 \\ &s.t.\ \ x \in X. \end{aligned} \tag{۵.۵}$$

در شکل ۱.۵، مجموعه جواب‌های کارا مسئله (۵.۵) خط $[OBD]$ است. بنابراین، مسائل (۴.۵) و (۵.۵) نمی‌توانند معادل در نظر گرفته شوند.

به علاوه، $\overline{\mu_1}(x) = \frac{1}{10}(x_1 + 2x_2)$ و $\overline{\mu_2}(x) = \frac{1}{14}(-x_1 - 4x_2 + 14)$ به ترتیب نرمال شده $\widehat{\mu_1}$ و $\widehat{\mu_2}$ هستند. از روش مجموع وزن‌دار با وزن‌های برابر استفاده می‌کنیم. مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه زیر تولید می‌شود:

$$max\ P(x) = \frac{1}{35}(x_1 - 3x_2 + 35)$$

$$s.t. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

جواب بهینه این مسئله (۰ و ۶) است. این جواب یک جواب کارا برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه نیست. بنابراین، مرحله ضمانت کارایی نیاز است. الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی برای تست کارایی جواب بهینه $(6, 0)$ به صورت زیر است:

گام ۱: قرار می‌دهیم $x^* = (6, 0)$ و $k = 1$

گام ۲: مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم و جواب بهینه (x^k, d^{k+}, d^{k-}) را به دست می‌آوریم و قرار می‌دهیم $t^k = \sum_{i=1}^{p} d_i^{k+} + d_i^{k-}$

$$max \sum_{i=1}^{2} d_i^- + d_i^+$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 - 4 - d_1^+ = (x_1^* - 4)\theta_1, \\ -x_2 + 3 + d_1^- = (-x_2^* + 3)\theta_1, \\ -x_1 + 4 - d_2^+ = (-x_1^* + 4)\theta_2, \\ x_2 + 1 + d_2^- = (x_2^* + 1)\theta_2, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ x_1 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, \theta_1, \theta_2 \geq 0. \end{cases}$$

گام ۳: تا زمانی که t^k برابر صفر نشده قرار می‌دهیم $x^* = x^k$ و $k = k + 1$ و به گام ۲ می‌رویم. بعد از اجرای روش تکراری $t^k = 0$ می‌شود و $x^k = (6, 2)$ به دست می‌آید. پس توقف می‌کنیم. طبق آنچه که در الگوریتم روش برنامه‌ریزی خطی فصل دوم گفتیم $x^k = (6, 2)$ جواب کارا است.

مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه

$$\begin{aligned} & max \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \cdots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)} \right) \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{۶.۵}$$

را در نظر بگیرید، اگر یک سطح ایده آل به هر هدف برنامه‌ریزی کسری چندهدفه نسبت داده شود آن‌گاه این هدف‌های فازی، هدف‌های فازی ایده‌آل نامیده می‌شوند. برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} & Find \quad x \\ & s.t. \begin{cases} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \tilde{\geq} w_i, & i = 1, \ldots, p \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \end{cases} \end{aligned} \tag{۷.۵}$$

تابع عضویت برای هدف فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:
اگر $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \tilde{\geq} w_i$ آن‌گاه

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \geq w_i, \\ \frac{\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \underline{t_i}}{w_i - \underline{t_i}} & \underline{t_i} \leq \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leq w_i, \\ 0 & \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leq \underline{t_i} \end{cases}$$

همچنین مسئله بهینه سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۷.۵) معادل با مسئله زیر است:

$$\begin{aligned} & max \quad (\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_p(x)) \\ & s.t. \quad x \in X. \end{aligned} \tag{۸.۵}$$

۳.۵ شرایط کارایی ضعیف

در این بخش، شرایط لازم و کافی برای جواب کارای فازی از مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۸.۵) را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۵. *x^* جواب کارا برای مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه قطعی (۶.۵) است اگر و فقط اگر x^* جواب کارای فازی برای مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۸.۵) باشد.*

برهان. فرض کنید نقطه شدنی $x \in X$ وجود دارد به طوری که برای $i \in \{1, \ldots, p\}$

$$\begin{aligned} & \mu_i(x) > \mu_i(x^*) \\ & \Longrightarrow \frac{\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \underline{t_i}}{w_i - \underline{t_i}} > \frac{\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} - \underline{t_i}}{w_i - \underline{t_i}} \\ & \Longrightarrow \frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \underline{t_i} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} - \underline{t_i} \\ & \Longrightarrow \frac{f_i(x)}{g_i(x)} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \end{aligned}$$

و این با کارایی x^* برای مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه (۶.۵) متناقض است.
برعکس، فرض کنید $x \in X$ و سطوح آرمانی $(w_i, \underline{t_i})$ $\quad i = 1, \ldots, p$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{array}{l} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} = w_i \\ \Longrightarrow \frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \underline{t_i} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} - \underline{t_i} = w_i - \underline{t_i} \\ \Longrightarrow \frac{\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \underline{t_i}}{w_i - \underline{t_i}} > \frac{\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} - \underline{t_i}}{w_i - \underline{t_i}} \\ \Longrightarrow \mu_i(x) > \mu_i(x^*) \end{array}$$

که این تناقض است. □

با کمک ایده اسکالرسازی جفرن [۱۴] می‌توان خصوصیات جواب‌های مسائل بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه را بررسی کرد. مسئله اسکالرسازی وزین متناظر با مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۸.۵) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{l} max \quad \sum_{i=1}^{p} w_i \mu_i(x) \\ s.t. \quad x \in X \\ \sum_{i=1}^{p} w_i = 1. \end{array} \tag{۹.۵}$$

قضیه ۲.۳.۵. *اگر x^* جواب بهینه برای مسئله اسکالرسازی وزین (۹.۵) باشد، آن‌گاه x^* جواب کارای فازی برای مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۸.۵) است.*

برهان. با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید x^* جواب کارای فازی برای مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۸.۵) نباشد در این صورت $x \in X$ای وجود دارد به طوری که

$$\mu_i(x) \geq \mu_i(x^*) \quad i = 1, \ldots, p$$

و برای حداقل یک j بزرگتر اکید است. لذا وجود دارد $w \in W$ به طوری که

$$w_i \mu_i(x) \geq w_i \mu_i(x^*) \quad i = 1, \ldots, p$$

و برای حداقل یک j بزرگتر اکید است بنابراین

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \mu_i(x) > \sum_{i=1}^{p} w_i \mu_i(x^*) \quad i = 1, \ldots, p$$

و این با بهینگی x^* برای مسئله اسکالرسازی وزین در تناقض است. □

قضیه ۳.۳.۵. *[۱۳] فرض کنید X مجموعه‌ای محدب باشد و $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ برای $i = 1, \ldots, p$ توابعی محدب باشند. در این صورت اگر سیستم $h_i(x) < 0$ برای $i = 1, \ldots, p$ و $x \in X$ جواب نداشته باشد آن‌گاه وجود دارد $w_i \geq 0 (i = 1, \ldots, p)$ با $\sum_{i=1}^{p} w_i = 1$ به طوری که برای هر $x \in X$ داریم:*

$$\sum_{i=1}^{p} w_i h_i(x) \geq 0$$

قضیه ۴.۳.۵. *اگر x^* جواب کارای فازی برای مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی (۸.۵) باشد، آن‌گاه $w \in W$ وجود دارد، به طوری که x^* جواب بهینه برای مسئله اسکالر سازی وزین (۹.۵) است.*

برهان. فرض کنید x^* یک جواب کارا برای مسئله بهینه‌سازی خطی کسری چندهدفه (۸.۵) باشد. پس سیستم $\mu_i(x) > \mu_i(x^*)$ یا به طور معادل $h_i(x) = \mu_i(x^*) - \mu_i(x) < 0$ برای $i = 1, \ldots, p$ جواب ندارد. لذا طبق لم فارکاس

$$\exists w_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{p} w_i = 1 \;\; s.t. \;\; \forall x \in X \; \sum_{i=1}^{p} w_i h_i(x) \geq 0$$

پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{p} w_i \mu_i(x^*) - \sum_{i=1}^{p} w_i \mu_i(x) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} w_i \mu_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^{p} w_i \mu_i(x)$$

یعنی x^* جواب بهینه برای مسئله مجموع وزین است. $\square$

قضیه ۵.۳.۵. *اگر $x^* \in X$ جواب کارای ضعیف مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۶.۵) باشد. فرض کنید $(\mu_1, \ldots, \mu_p, h_j)$ برداری $(p+m)$ بعدی روی $\mathbb{R}^{p+m}$ باشد. آنگاه $(\overline{\lambda_i}, \overline{v_j}) \in \mathbb{R}^{p+m}$ با $(\overline{\lambda_i}, \overline{v_j}) \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} = 1$ وجود دارد به طوری‌که، $\eta_j \geq 0$ و به ازای هر $x \in X$ روابط زیر برقرار است.*

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} \mu_i(x) + \overline{v_j}^T h_j(x) \geq \overline{v_j}^T h_j(x^*) \\ &\eta_j^T h_j(x^*) \geq \overline{v_j}^T h_j(x) \end{aligned} \qquad (۱۰.۵)$$

به علاوه

$$\overline{v_j} h_j(x^*) = 0, i = 1, \ldots, p, j = 1, \ldots, m.$$

برهان. اگر x^* جواب کارای ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۶.۵) باشد آنگاه از قضیه ۱.۳.۵، x^* جواب کارای ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه فازی (۸.۵) است، بنابراین سیستم

$$\begin{aligned} &\mu_i(x) > 1, \quad i = 1, \ldots, p \\ &h_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

در X جواب ندارد، بنابراین سیستم زیر

$$\begin{aligned} &\mu_i(x) > 1, \quad i = 1, \ldots, p \\ &h_j(x) > 0, \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

در X جواب ندارد. بنابراین، بواسطه قضیه مینکوفسکی-فارکاس تعمیم یافته، $(\overline{\lambda_i}, \overline{v_j}) \in \mathbb{R}^{P+m}$ با $\overline{\lambda_i}, \overline{v_j} \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} = 1$ وجود دارد به طوری که، به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} \mu_i(x) + \overline{v_j}^T h_j(x) \leq 1 \qquad (۱۱.۵)$$

در رابطه (۱۱.۵)، اگر قرار دهیم $x = x^*$ داریم $\overline{v_j}^T h_j(x^*) \leq 0$ زیرا $\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} \mu_i(x) \leq 1$. اما از این که x^* جواب شدنی است داریم $\overline{v_j}^T h_j(x^*) \geq 0$. بنابراین،

$$\overline{v_j}^T h_j(x^*) = 0 \qquad (۱۲.۵)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۱۱.۵) و (۱۲.۵)، به ازای هر $x \in X$ نامساوی زیر درست است،

$$\overline{v_j}^T h_j(x^*) = 0 \leq \sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}\mu_i(x) + \overline{v_j}^T h_j(x) \leq 1 \tag{۱۳.۵}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۳.۵) داریم

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}\mu_i(x) + \overline{v_j}^T h_j(x) \geq \overline{v_j}^T h_j(x^*) \tag{۱۴.۵}$$

چون به ازای هر $\eta_j \geq 0$، $\eta_j h_j(x^*) \geq 0$، با توجه به رابطه (۱۲.۵) داریم

$$\eta_j^T h_j(x^*) \geq \overline{v_j}^T h_j(x).$$

□

قضیه ۶.۳.۵ (شرط کافی). *فرض کنید جواب شدنی x^* در رابطه (۱۰.۵) صدق می‌کند، $\overline{v_j} \geq 0$ و $\overline{\lambda_i} \geq 0$. آنگاه x^* جواب کارای ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه است.*

برهان. با توجه به رابطه (۱۰.۵) به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}\mu_i(x) + \overline{v_j}^T h_j(x) \leq \sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}\mu_i(x^*) \tag{۱۵.۵}$$

همچنین $\overline{v_j}^T h_j(x) \geq 0$، بنابراین به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}\mu_i(x) \leq \sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}\mu_i(x^*)$$

آنگاه x^* جواب بهینه برای مسئله وزن‌دار با $\overline{\lambda_i} \in W$ است. بنابراین، بواسطه قضیه ۲.۳.۵، x^* جواب کارای فازی ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه فازی (۸.۵) است و همچنین با توجه به قضیه ۱.۳.۵، x^* جواب کارای ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۶.۵) است. □

اکنون شرایط لازم و کافی متفاوت بعدی برای جواب‌های بهینه تحت فرض مشتق‌پذیری اثبات می‌شوند. فرض کنید $\mu_i(x) : X \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, 1], i = 1, \ldots, p$ و $h_j : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, j = 1, \ldots, m$ روی X توابعی مشتق پذیر باشند. همچنین فرض کنید $\nabla\mu_i(x^*) \in \mathbb{R}^n$ بردار گرادیان و $\nabla h_j(x^*) \in M^{m\times n}$ ماتریسی است که سطرهای آن بردار گرادیان هر یک از اجزای h_j باشند.

قضیه ۷.۳.۵ (شرط لازم). *اگر x^* جواب کارای ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۶.۵) باشد، آنگاه $(\overline{\lambda_i}, \overline{v_j}) \in \mathbb{R}^{p+m}$ و $\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} = 1$ با $(\overline{\lambda_i}, \overline{v_j}) \geq 0$ وجود دارد به طوری که،*

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}\nabla\mu_i(x^*) + \overline{v_j}\nabla h_j(x^*) \leq 1 \tag{۱۶.۵}$$

$$\eta_j h_j(x^*) = 0. \tag{۱۷.۵}$$

برهان. برای این که به روابط (۱۶.۵) و (۱۷.۵) برسیم ثابت می‌کنیم $\overline{\lambda_i} \geq ۰, i = ۱, \ldots, p$ و $v_j \geq ۰$ به ازای هر $j \in J(x^*) = \{۱, \ldots, m | h_j(x^*) = ۰\}$ وجود دارد به طوری که،

$$\sum_{i=۱}^{p} \overline{\lambda_i} \nabla \mu_i(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \overline{v_j} \nabla h_j(x^*) \leq ۱. \tag{۱۸.۵}$$

فرض کنید $\overline{\lambda_i}$ و $\overline{v_j}$ وجود ندارد که در رابطه (۱۸.۵) صدق کنند، آنگاه سیستم

$$(\nabla \mu_i(x^*))^T u > ۱, \nabla h_j(x^*)^T u \geq ۰, j \in J(x^*),$$

در $u \in \mathbb{R}^n$ جواب دارد. بنابراین، $u \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که

$$\nabla \mu_i(x^*)^T u > ۱, i = ۱, \ldots, p$$

$$\lim_{h_j \to ۰} \frac{\mu_i(x^* + h_j u) - \mu_i(x^*)}{h_j} > ۱, j = ۱, \ldots, m$$

آنگاه به ازای هر $h_{j_۰}, i = ۱, \ldots, p$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_i(x^* + h_j u) - \mu_i(x^*) > ۱$$

فرض کنید $h_{j_۰} = min\{h^i_{j_۰} : i = ۱, \ldots, p\}$ به ازای هر $i = ۱, \ldots, p$ داریم

$$\mu_i(x^* + h_{j_۰} u) - \mu_i(x^*) > ۱.$$

از طرف دیگر، فرض کنید $J_۱ = \{j \in J(x^*) | \nabla h_j(x^*)^T u > ۰\}$. با استفاده از بحث قبلی داریم $J_۱$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $j_۱ \in J_۱$،

$$\begin{aligned} & h_j(x^* + h_{j_۱} u) - h_j(x^*) \\ & = h_j(x^* + h_{j_۱} u) > ۰. \end{aligned} \tag{۱۹.۵}$$

فرض کنید $J_۲ = \{j \in J(x^*) | \nabla h_j(x^*)^T u = ۰\}$. به ازای هر $\epsilon \geq ۰$، $h_{j_۲}$ وجود دارد به طوری که

$$h_j(x^* + h_{j_۲} u) - h_j(x^*) \geq \epsilon \tag{۲۰.۵}$$

$$\Rightarrow h_j(x^* + h_{j_۲} u) \geq \epsilon$$

$$\Rightarrow h_j(x^* + h_{j_۲} u) \geq ۰.$$

اگر $j \notin J(x^*)$، آنگاه $h_j(x^*) > ۰$ و بنابراین

$$\lim_{h \to ۰} h_j(x^* + h_j u) > ۰,$$

که در آن $h = h_{j_۰}, h_{j_۱}, h_{j_۲}, h_{j_۳}, \ldots$ برای $h_{j_۳}$ مناسب به ازای هر $j \notin J(x^*)$، داریم

$$h_j(x^* + h_{j_۳} u) \geq ۰ \tag{۲۱.۵}$$

قرار می‌دهیم $s = x^* + \overline{h}_j u$، که در آن $\overline{h}_j = min\{h_{j_۰}, h_{j_۱}, h_{j_۲}, h_{j_۳}\}$ و با توجه به روابط ۱۹.۵، ۲۰.۵ و ۲۱.۵ داریم، s جواب شدنی برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۶.۵) است. □

قضیه ۸.۳.۵ (شرط کافی). *اگر x^* جواب کارای ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی کسری چندهدفه (۶.۵) باشد و در x^* شرایط محدودیت شرطی کان-تاکر[۱] برقرار باشد. آنگاه $\overline{\lambda_i}, \overline{v_j} \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} = 1$ وجود دارد به طوری که*

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} \nabla \mu_i(x^*) + \overline{v_j} \nabla h_j(x^*) \leq 1, \tag{۲۲.۵}$$

$$\eta_j^T h_j(x^*) = 0 \quad i = \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, m$$

برهان. فرض کنید سیستم زیر جواب ندارد:

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i} \nabla \mu_i(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \overline{v_j} \nabla h_j(x^*) \leq 1,$$

با $\overline{\lambda_i} \geq 0$، $\overline{\lambda_i} \in \mathbb{R}^k$ و به ازای هر $j \in J(x^*)$، $\overline{v_j} \geq 0$. بنابراین $u \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که

$$\nabla \mu_i(x^*)^T u > 1, i = \ldots, p$$

$$\nabla h_j(x^*)^T u > 0, j \in J(x^*). \tag{۲۳.۵}$$

بنابراین با توجه به محدودیت شرطی کان-تاکر در x^* تابع برداری $n-$بعدی (e) روی $[0, 1]$ تعریف می‌شود به طوری که به ازای هر $e(\tau) \in X, 0 \leq \tau \leq 1$ و $e(0) = x^*$ و تابع e در $\tau = 0$ مشتق پذیر است و $\frac{[de(0)]}{d\tau} = \epsilon u$ برای بعضی $\epsilon > 0$. بنابراین

$$\epsilon(\nabla \mu_i(x^*))^T u > 0, i = 1, \ldots, p$$

$$\Rightarrow \epsilon(\nabla \mu_i(e(0)))u > 1, i = 1, \ldots, p$$

بنابراین

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\mu_i(e(\tau)) - \mu_i(x^*)}{\tau} > 1,$$

بنابراین، τ_0 وجود دارد به طوری که به ازای هر $\tau_0 \leq \tau$ داریم

$$\mu_i(e(\tau)) > \mu_i(x^*),$$

و $e(\tau)$ به ازای هر $\tau \in [0, 1]$ جواب شدنی است. بنابراین نامساوی بالا با جواب کارای ضعیف فازی بودن x^* و همچنین جواب کارای ضعیف بودن x^* متناقض است. □

۴.۵ خطی سازی تابع عضویت با استفاده از واقعیت $\mu_i(x) \leq 1$

روش دیگر برای خطی‌سازی هر تابع عضویت $\mu_i(x)$ این است که از واقعیت $\mu_i(x) \leq 1$ استفاده کنیم. مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه (۶.۵) را در نظر بگیرید. جواب کارای فازی توسط مسئله اسکالرسازی وزین (۹.۵) در گام‌های زیر محاسبه می‌شود به طوری که در شرایط جواب کارای ضعیف فازی صدق می‌کند.

[۱] Kuhn-Tucker constraint qualification

الگوریتمی برای پیدا کردن جواب‌های کارا:

گام ۱: مسئله را به فرم (۷.۵) در نظر بگیرید.

گام ۲: سطوح آرمانی w_i و حدود دامنه تغییرات $\underline{t_i}$ را برای هر هدف $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ تعیین کنید.

گام ۳: تابع عضویت $\mu_i(x)$ را برای هر هدف فازی به دست آورید.

گام ۴: هر تابع عضویت را با استفاده از این واقعیت که $\mu_i(x) \leq ۱$ است به فرم خطی تبدیل کنید.

گام ۵: مسئله اسکالر سازی وزین (۹.۵) را با استفاده از w_i مناسب به دست آورید.

گام ۶: مسئله اسکالرسازی وزین (۹.۵) را حل کنید. جواب مسئله اسکالرسازی وزین (۹.۵) جواب کارای فازی است که در شرایط جواب کارای ضعیف فازی صدق می‌کند.

گام ۷: توقف کنید.

مثال ۱.۴.۵. مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه زیر برای $i = ۲$، $n = ۲$ و $m = ۳$ در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
& max \ \ (\tfrac{-۳x_۱+۲x_۲}{x_۱+x_۲+۳}, \tfrac{۷x_۱+x_۲}{۵x_۱+۲x_۲+۱}) \\
& s.t. \ \ x_۱ - x_۲ \geq ۱ \\
& \qquad ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۵ \\
& \qquad x_۱ \geq ۳ \\
& \qquad x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۲۴.۵}
$$

مشاهده می‌کنیم که برای هر x در ناحیه شدنی $\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} < ۰$ و $\frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} \geq ۰$. $max\ \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = -۰.۶۱$، $max\ \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = ۱.۳۶$، $min\ \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} = -۲.۱۴$ و $min\ \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} = ۱.۱۵$. اگر سطوح آرمانی فازی برای دو هدف $(-۰.۶۱, ۱.۳۶)$ باشد و حدود دامنه تغییرات برای آن‌ها $(-۲.۱۴, ۱.۱۵)$ باشد، آن‌گاه x که در هدف‌های ایده‌ال

$$\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \gtrapprox -۰.۶۱ \quad , \quad \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} \gtrapprox ۱.۳۶$$

صدق می‌کند را می‌یابیم.

$$
\mu_۱(x) = \begin{cases} ۱ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \geq -۰{,}۶۱, \\ \frac{\frac{-۳x_۱+۲x_۲}{x_۱+x_۲+۳}+۲.۱۴}{۱.۵۳} & -۲.۱۴ \leq \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq -۰.۶۱, \\ ۰ & \frac{f_۱(x)}{g_۱(x)} \leq -۲.۱۴. \end{cases}
\tag{۲۵.۵}
$$

$$
\mu_۲(x) = \begin{cases} ۱ & \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} \geq ۱.۳۶, \\ \frac{\frac{۷x_۱+x_۲}{۵x_۱+۲x_۲+۱}-۱.۱۵}{۰.۲۱} & ۱.۱۵ \leq \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} \leq ۱.۳۶, \\ ۰ & \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)} \leq ۱.۱۵. \end{cases}
\tag{۲۶.۵}
$$

برای خطی‌سازی توابع عضویت تعریف شده در (۲۵.۵) و (۲۶.۵) از این واقعیت که $\mu_i(x) \leq ۱$استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\frac{-۳x_۱+۲x_۲}{x_۱+x_۲+۳} + ۲.۱۴}{۱.۵۳} \leq ۱,$$

$$\frac{\frac{۷x_۱+x_۲}{۵x_۱+۲x_۲+۱}-۱.۱۵}{۰.۲۱}\leq ۱$$

آن‌گاه مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی به مسئله بهینه‌سازی خطی چندهدفه فازی (۲۷.۵) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & max\ \ (-۲.۳۹x_۱+۲.۶۱x_۲+۱.۸۳, ۰.۲۰x_۱-۱.۷۲x_۲-۱.۳۶)\\ & s.t.\ \ x_۱-x_۲\geq ۱\\ & \qquad ۲x_۱+۳x_۲\leq ۱۵\\ & \qquad x_۱\geq ۳\\ & \qquad x_۱,x_۲\geq ۰. \end{aligned} \tag{۲۷.۵}$$

مسئله اسکالرسازی وزین را برای $w_۱=۰.۵$ ، $w_۲=۰.۵$ استفاده کرده و مسئله به مسئله بهینه‌سازی خطی تک‌هدفه (۲۸.۵) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} & max\ \ -۱.۰۹۵x_۱+۰.۴۴۵x_۲+۰.۲۳۵\\ & s.t.\ \ x_۱-x_۲\geq ۱\\ & \qquad ۲x_۱+۳x_۲\leq ۱۵\\ & \qquad x_۱\geq ۳\\ & \qquad x_۱,x_۲\geq ۰. \end{aligned} \tag{۲۸.۵}$$

جواب بهینه $(x_۱^*,x_۲^*)=(۳,۲)$، $\frac{f_۱(x^*)}{g_۱(x^*)}=-۰.۶۲۵$، $\frac{f_۲(x^*)}{g_۲(x^*)}=۱.۱۵$، $\mu_۱=۰.۹۹$ و $\mu_۲=۰$. با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی فصل دوم نشان می‌دهیم $(x_۱^*,x_۲^*)=(۳,۲)$ جواب کارا برای مسئله چندهدفه است. روش برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است:

$$max\sum_{i=۱}^{۲}d_i^-+d_i^+$$

$$s.t.\begin{cases} -۳x_۱+۲x_۲-d_۱^+=(-۳x_۱^*+۲x_۲^*)\theta_۱\\ x_۱+x_۲+۳+d_۱^-=(x_۱^*+x_۲^*+۳)\theta_۱\\ ۷x_۱+x_۲-d_۲^+=(۷x_۱^*+x_۲^*)\theta_۲\\ ۵x_۱+۲x_۲+۱+d_۲^-=(۵x_۱^*+۲x_۲^*+۱)\theta_۲\\ x_۱-x_۲\geq ۱\\ ۲x_۱+۳x_۲\leq ۱۵\\ x_۱\geq ۳\\ x_۱,x_۲\geq ۰, d_۱^+,d_۱^-,d_۲^+,d_۲^-\geq ۰,\theta_۱,\theta_۲>۰. \end{cases}$$

بنابراین به ازای $(x_۱^*,x_۲^*)=(۳,۲)$ مقدار بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی صفر می‌شود. بنابراین طبق آنچه که در فصل دوم گفته شد $(x_۱^*,x_۲^*)=(۳,۲)$ جواب کارا برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه است. براساس قضیه ۱.۳.۵، $(x_۱^*,x_۲^*)=(۳,۲)$ جواب کارای فازی برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی است. به علاوه این جواب همه‌ی شرایط کارایی فازی ضعیف را تصدیق می‌کند.

اگر مثال ۱.۴.۵ را با روش سری تیلور حل کنیم، نقاط $(۳.۶, ۲.۶)$ و $(۷.۵, ۰)$ برای اهداف به دست می‌آیند. سپس،

$$\overline{\mu_۱}(x) = ۰.۱۷۰x_۱ + ۰.۱۸۵x_۲ - ۰.۰۹۲,$$

$$\overline{\mu_۲}(x) = ۰.۰۲۲x_۱ - ۰.۲۱۴x_۲ + ۰.۸۵۲.$$

و مسئله تک‌هدفه حاصل در روش سری تیلور به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &max \;\; p(x) = ۰.۱۹۲x_۱ - ۰.۰۲۹x_۲ + ۰.۷۶ \\ &s.t. \;\; x_۱ - x_۲ \geq ۱ \\ &\qquad ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۵ \\ &\qquad x_۱ \geq ۳ \\ &\qquad x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۲۹.۵}$$

با $(x_۱^*, x_۲^*) = (۷.۵, ۰)$، $\frac{f_۱(x^*)}{g_۱(x^*)} = -۲.۱۴۳$، $\frac{f_۲(x^*)}{g_۲(x^*)} = ۱.۳۶۴$، $\mu_۱ = ۰$ و $\mu_۲ = ۱$. بنابراین وقتی دو روش به کار رفته برای حل مثال ۱.۴.۵ را با هم مقایسه کرده، مشاهده می‌کنیم که برای بهتر شدن درجه عضویت یک هدف، درجه عضویت هدف دیگر بدتر می‌شود. متناسب با خواسته تصمیم‌گیرنده از بین دو روش، روش مناسب را انتخاب می‌کنیم.

۵.۵ سری تیلور و شرایط کان-تاکر برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه دو سطحی فازی

فرض کنید بردار متغیرهای تصمیم $x = (x_۱, x_۲)$ باشد. که در آن $x_۱ \in \mathbb{R}^{n_۱}$، $x_۲ \in \mathbb{R}^{n_۲}$، $n = n_۱ + n_۲$. علاوه بر این، فرض کنید

$$\frac{F_i(x_۱, x_۲)}{G_i(x_۱, x_۲)} : \;\; \mathbb{R}^{n_۱} \times \mathbb{R}^{n_۲} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}, \;\; i = ۱, ۲$$

توابع هدف هستند. بنابراین مسئله ماکزیمم‌سازی خطی‌کسری چندهدفه به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\begin{aligned} &max_{x_۱} \;\; \tfrac{F_۱(x_۱,x_۲)}{G_۱(x_۱,x_۲)} \\ &max_{x_۲} \;\; \tfrac{F_۲(x_۱,x_۲)}{G_۲(x_۱,x_۲)} \\ &s.t. \;\; x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n | \;\; A_۱x_۱ + A_۲x_۲ \leq b, \;\; x \geq ۰, \;\; b \in \mathbb{R}^m\} \neq \phi \end{aligned} \tag{۳۰.۵}$$

که در آن

$$\frac{F_۱(x_۱, x_۲)}{G_۱(x_۱, x_۲)} = \Big(\frac{f_{۱۱}(x_۱, x_۲)}{g_{۱۱}(x_۱, x_۲)}, \ldots, \frac{f_{۱m_۱}(x_۱, x_۲)}{g_{۱m_۱}(x_۱, x_۲)}\Big)$$

و

$$\frac{F_۲(x_۱, x_۲)}{G_۲(x_۱, x_۲)} = \Big(\frac{f_{۲۱}(x_۱, x_۲)}{g_{۲۱}(x_۱, x_۲)}, \ldots, \frac{f_{۲m_۲}(x_۱, x_۲)}{g_{۲m_۲}(x_۱, x_۲)}\Big)$$

و

$$\frac{f_{ij}(x_۱, x_۲)}{g_{ij}(x_۱, x_۲)} = \frac{c_{ij}x + c_{i.j.n+۱}}{d_{ij}x + d_{i.j.n+۱}}$$

است. برای $i=1$ داریم $j=1,\ldots,m_1$ و برای $i=2$ داریم $j=1,\ldots,m_2$ و در آن
(۱) $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ و $x_2\in\mathbb{R}^{n_2}$
(۲) X مجموعه‌ای محدب است.
(۳) m_1 تعداد توابع اولین سطح است.
(۴) m_2 تعداد توابع دومین سطح است.
(۵) m تعداد محدودیت‌ها است.
(۶) A_i ماتریس $m\times n_i$ برای $i=1,2$ است.
(۷) $c_{ij},d_{ij}\in\mathbb{R}^n$ و $d_{ij}x+d_{i.j.n+1}>0$ برای $\forall\, x\in X$.
(۸) $c_{i.j.n+1},d_{i.j.n+1}$ اعداد ثابت هستند.

۱.۵.۵ مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی

اگر یک سطح آرمانی به هر هدف مسئله نسبت داده شود، آن‌گاه هر هدف فازی مسئله یک هدف ایده‌ال نامیده می‌شود. مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه فازی دو سطحی به صورت زیر است:

$$\begin{array}{l}
Find\ \ x_1\\
s.t.\\
\frac{f_{1j}(x_1,x_2)}{g_{1j}(x_1,x_2)}\lesssim w_{1j}\quad \left(\frac{f_{1j}(x_1,x_2)}{g_{1j}(x_1,x_2)}\gtrsim w_{1j}\right),\ \ j=1,\ldots,m_1\\
\frac{f_{2j}(x_1,x_2)}{g_{2j}(x_1,x_2)}\lesssim w_{2j}\quad \left(\frac{f_{2j}(x_1,x_2)}{g_{2j}(x_1,x_2)}\gtrsim w_{2j}\right),\ \ j=1,\ldots,m_2\\
\qquad A_1x_1+A_2x_2\le b\\
\qquad x_1,x_2\ge 0,\ \ x_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ \ x_2\in\mathbb{R}^{n_2},\ \ A_1\in\mathbb{R}^{m\times n_1},\ \ A_2\in\mathbb{R}^{m\times n_2},\ \ b\in\mathbb{R}^m.
\end{array} \tag{۳۱.۵}$$

که در آن x_2 سطح دوم را حل می‌کند و w_{1j} سطح آرمانی اولین سطح هدف و w_{2j} سطح آرمانی دومین سطح هدف است. $\lesssim$ و $\gtrsim$ فازی بودن سطوح آرمانی را نشان می‌دهند. $\lesssim$ اساساً به عنوان کوچکتر از و $\gtrsim$ به عنوان بزرگتر از تعریف می‌شوند. $\lesssim$ یعنی $\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}$ مینیمم شود و $\gtrsim$ یعنی $\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}$ ماکزیمم شود. برای هر هدف فازی یک تابع عضویت تعریف می‌شود. تابع عضویت برای $i=1,2$ و $j=1,\ldots,m_i$ به صورت زیر است:

اگر $\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\gtrsim w_{ij}$ آن‌گاه

$$\mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x)}{g_{ij}(x)}\right)=\begin{cases}1 & \frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\ge w_{ij}\\ \frac{\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}-\underline{t_{ij}}}{w_{ij}-\underline{t_{ij}}} & \underline{t_{ij}}\le\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\le w_{ij}\\ 0 & \frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\le\underline{t_{ij}}\end{cases} \tag{۳۲.۵}$$

اگر $\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\lesssim w_{ij}$ آن‌گاه

$$\mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x)}{g_{ij}(x)}\right)=\begin{cases}1 & \frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\le w_{ij}\\ \frac{\overline{t_{ij}}-\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}}{\overline{t_{ij}}-w_{ij}} & w_{ij}\le\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\le\overline{t_{ij}}\\ 0 & \frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)}\ge\overline{t_{ij}}\end{cases} \tag{۳۳.۵}$$

که در آن $\overline{t_{ij}}$ و $\underline{t_{ij}}$ به ترتیب، حدود تغییرات بالایی و پایینی برای هر هدف فازی هستند. حال روش سری تیلور با استفاده از شرایط کان-تاکر را توضیح می‌دهیم.

در مسائل بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی، توابع عضویت به هر هدف نسبت داده می‌شود. سپس توابع عضویت خطی‌کسری بوسیله سری تیلور تغییر شکل می‌دهند و به یک چندجمله‌ای خطی تبدیل می‌شوند. سپس مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی با استفاده از شرایط کان-تاکر می‌تواند به مسئله تک‌هدفه تبدیل شود. روش پیشنهاد شده در چهار مرحله توضیح داده می‌شود.

مرحله ۱. $x_{ij}^* = (x_{ij}^{1*}, x_{ij}^{2*})$ را برای $i = 1, 2$ و $j = 1, \dots, m_i$ تعیین کنید که مقدار ماکزیمم هر هدف $\frac{f_{ij}(x_1,x_2)}{g_{ij}(x_1,x_2)} \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, m_i$ است.

مرحله۲. توابع عضویت را با استفاده از سری چندجمله‌ای تیلور مرتبه اول تبدیل کنید:

$$\mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x)}{g_{ij}(x)}\right) \cong \overline{\mu}_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x)}{g_{ij}(x)}\right) = \mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x_{ij}^*)}{g_{ij}(x_{ij}^*)}\right) + (x_1 - x_{ij}^{1*})\frac{\partial \mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x_{ij}^*)}{g_{ij}(x_{ij}^*)}\right)}{\partial x_1} + (x_2 - x_{ij}^{2*})\frac{\partial \mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x_{ij}^*)}{g_{ij}(x_{ij}^*)}\right)}{\partial x_2} \tag{۳۴.۵}$$

$$\mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x)}{g_{ij}(x)}\right) \cong \overline{\mu}_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x)}{g_{ij}(x)}\right) = \mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x_{ij}^*)}{g_{ij}(x_{ij}^*)}\right) + \sum_{k=1}^{2}(x_k - x_{ij}^{k*})\frac{\partial \mu_{\frac{f_{ij}}{g_{ij}}}\left(\frac{f_{ij}(x_{ij}^*)}{g_{ij}(x_{ij}^*)}\right)}{\partial x_k}$$

مرحله۳. توابع عضویت اولین سطح را به هم اضافه کنید. توجه کنید که مسئله با فرض وزن‌های برابر برای اولین سطح حل می‌شود. قرار دهید

$$p(x) = \sum_{j=1}^{m_1}\left(\mu_{\frac{f_{1j}}{g_{1j}}}\left(\frac{f_{1j}(x_{1j}^*)}{g_{1j}(x_{1j}^*)}\right) + \sum_{k=1}^{2}(x_k - x_{1j}^{k*})\frac{\partial \mu_{\frac{f_{1j}}{g_{1j}}}\left(\frac{f_{1j}(x_{1j}^*)}{g_{1j}(x_{1j}^*)}\right)}{\partial x_k}\right) \tag{۳۵.۵}$$

مرحله۴. سپس شرایط کان-تاکر برای سطح دوم مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &wA_2 - v = \textstyle\sum_{j=1}^{m_2} \frac{\partial \mu_{\frac{f_{2j}}{g_{2j}}}\left(\frac{f_{2j}(x_{2j}^*)}{g_{2j}(x_{2j}^*)}\right)}{\partial x_2} \\ &wu = 0, \quad x_2 v = 0. \end{aligned}$$

$x^* = (x_1^*, x_2^*)$ را با حل مسئله تک‌هدفه به دست آورید.

مسئله بهینه‌سازی خطی‌کسری چندهدفه فازی به مدل ریاضی جدید تبدیل می‌شود. این مدل به صورت مسئله بهینه‌سازی (۳۶.۵) است.

$$\begin{aligned} &max \ \ p(x) \\ &s.t. \ \ A_1x_1 + A_2x_2 + u = b \\ &\qquad wA_2 - v = \textstyle\sum_{j=1}^{m_2} \frac{\partial \mu_{\frac{f_{2j}}{g_{2j}}}\left(\frac{f_{2j}(x_{2j}^*)}{g_{2j}(x_{2j}^*)}\right)}{\partial x_2} \\ &\qquad wu = 0, \quad x_2 v = 0 \\ &\qquad x_1, x_2, w, u, v \geq 0. \end{aligned} \tag{۳۶.۵}$$

در این مدل، یک متغیر صفر و یک، η و ξ، را به ترتیب برای هر محدودیت $wu = 0$ و $x_2 v = 0$ اضافه می‌کنیم. علاوه بر این، هر یک از این محدودیت‌ها بوسیله دو نامساوی خطی شامل η، ξ و M به ترتیب جاگزین می‌شوند. که M عدد ثابت مثبت به اندازه کافی بزرگ است. بنابراین مسئله تک‌هدفه با استفاده از شرایط کان–تاکر به مسئله (۳۷.۵) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
& max \;\; p(x) \\
& s.t. \;\; A_1x_1 + A_2x_2 + u = b \\
& \qquad wA_2 - v = \sum_{j=1}^{m_2} \frac{\partial \mu_{\frac{f_{2j}}{g_{2j}}}\left(\frac{f_{2j}(x^*_{2j})}{g_{2j}(x^*_{2j})}\right)}{\partial x_2} \\
& \qquad w \leq M\eta, \quad u \leq M(1-\eta) \\
& \qquad x_2 \leq M\xi, \quad v \leq M(1-\xi) \\
& \qquad \eta, \xi \in \{0, 1\} \\
& \qquad x_1, x_2, w, u, v \geq 0.
\end{aligned} \tag{۳۷.۵}$$

مثال ۱.۵.۵. مثال عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
& max_{x_1} \;\; \left(\frac{2x_1+x_2+2}{2x_2+1}, \frac{x_1}{x_1+x_2+1}\right) \\
& max_{x_2} \;\; \left(\frac{3x_1+2x_2-1}{-x_1+x_2+4}, \frac{-x_1+x_2+3}{x_1+5}\right) \\
& s.t. \;\; x_1 + x_2 \leq 4 \\
& \qquad x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
& \qquad 3x_1 + x_2 \geq 3 \\
& \qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{۳۸.۵}$$

که در آن

$$\frac{F_1(x_1,x_2)}{G_1(x_1,x_2)} = \left(\frac{2x_1+x_2+2}{2x_2+1}, \frac{x_1}{x_1+x_2+1}\right)$$

$$\frac{F_2(x_1,x_2)}{G_2(x_1,x_2)} = \left(\frac{3x_1+2x_2-1}{-x_1+x_2+4}, \frac{-x_1+x_2+3}{x_1+5}\right)$$

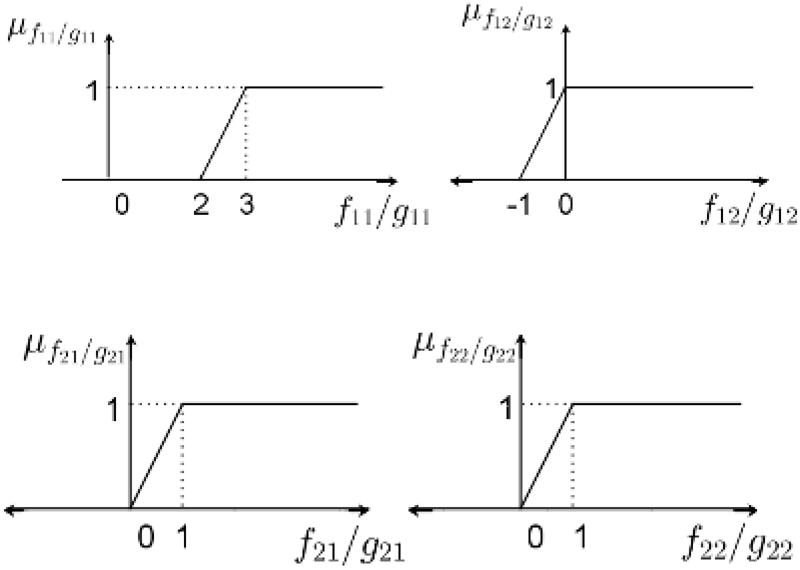
فرض کنید سطوح آرمانی فازی به ترتیب برای هدف‌ها $(3, 0, 1, 1)$ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
& Find \;\; x_1 \\
& s.t. \\
& \qquad \frac{f_{11}}{g_{11}} = \frac{2x_1+x_2+2}{2x_2+1} \gtrsim 3, \qquad \frac{f_{12}}{g_{12}} = \frac{x_1}{x_1+x_2+1} \gtrsim 0 \\
& \qquad \frac{f_{21}}{g_{21}} = \frac{3x_1+2x_2-1}{-x_1+x_2+4} \gtrsim 1, \qquad \frac{f_{22}}{g_{22}} = \frac{-x_1+x_2+3}{x_1+5} \gtrsim 1 \\
& \qquad x_1 + x_2 \leq 4 \\
& \qquad x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
& \qquad 3x_1 + x_2 \geq 3 \\
& \qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{۳۹.۵}$$

که در آن x_2 سطح دوم هدف را حل می‌کند. فرض کنید، حدود دامنه تغییرات به ترتیب، برای هدف‌ها $(0, 0, -1, 2)$ باشند. ابتدا، توابع عضویت به صورت خطی قطعه‌ای ساده تعریف می‌شوند (شکل ۲.۵

را ببینید). توابع عضویت برای هدف‌های مسئله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mu_{\frac{f_{11}}{g_{11}}}\left(\frac{f_{11}(x)}{g_{11}(x)}\right)=\begin{cases}1 & \frac{f_{11}(x_1,x_2)}{g_{11}(x_1,x_2)}\geq w_{11}\\ \frac{\frac{f_{11}(x_1,x_2)}{g_{11}(x_1,x_2)}-\underline{t_{11}}}{w_{11}-\underline{t_{11}}} & \underline{t_{11}}\leq\frac{f_{11}(x_1,x_2)}{g_{11}(x_1,x_2)}\leq w_{11}\\ 0 & \frac{f_{11}(x_1,x_2)}{g_{11}(x_1,x_2)}\leq\underline{t_{11}}\end{cases}=\begin{cases}1 & \frac{f_{11}(x_1,x_2)}{g_{11}(x_1,x_2)}\geq 3\\ \frac{2x_1-3x_2}{2x_2+1} & 2\leq\frac{f_{11}(x_1,x_2)}{g_{11}(x_1,x_2)}\leq 3\\ 0 & \frac{f_{11}(x_1,x_2)}{g_{11}(x_1,x_2)}\leq 2\end{cases}\tag{40.5}$$



شکل ۲.۵: توابع عضویت خطی قطعه‌ای ساده

به همین ترتیب، توابع عضویت دیگر به صورت زیر فرموله می‌شوند:

$$\mu_{\frac{f_{12}}{g_{12}}}\left(\frac{f_{12}(x)}{g_{12}(x)}\right)=\begin{cases}1 & \frac{f_{12}(x_1,x_2)}{g_{12}(x_1,x_2)}\geq 0\\ \frac{2x_1+x_2+1}{x_1+x_2+1} & -1\leq\frac{f_{12}(x_1,x_2)}{g_{12}(x_1,x_2)}\leq 0\\ 0 & \frac{f_{12}(x_1,x_2)}{g_{12}(x_1,x_2)}\leq -1\end{cases}\tag{41.5}$$

$$\mu_{\frac{f_{21}}{g_{21}}}\left(\frac{f_{21}(x)}{g_{21}(x)}\right)=\begin{cases}1 & \frac{f_{21}(x_1,x_2)}{g_{21}(x_1,x_2)}\geq 1\\ \frac{3x_1+2x_2-1}{-x_1+x_2+4} & 0\leq\frac{f_{21}(x_1,x_2)}{g_{21}(x_1,x_2)}\leq 1\\ 0 & \frac{f_{21}(x_1,x_2)}{g_{21}(x_1,x_2)}\leq 0\end{cases}\tag{42.5}$$

$$\mu_{\frac{f_{22}}{g_{22}}}\left(\frac{f_{22}(x)}{g_{22}(x)}\right)=\begin{cases}1 & \frac{f_{22}(x_1,x_2)}{g_{22}(x_1,x_2)}\geq 1\\ \frac{-x_1+x_2+3}{x_1+5} & 0\leq\frac{f_{22}(x_1,x_2)}{g_{22}(x_1,x_2)}\leq 1\\ 0 & \frac{f_{22}(x_1,x_2)}{g_{22}(x_1,x_2)}\leq 0\end{cases}\tag{43.5}$$

اگر مسئله برای هر تابع عضویت به طور جداگانه حل شود، آنگاه $\mu^*_{\frac{f_{11}}{g_{11}}}\left(\frac{f_{11}(1,0)}{g_{11}(1,0)}\right)$، $\mu^*_{\frac{f_{12}}{g_{12}}}\left(\frac{f_{12}(3,1)}{g_{12}(3,1)}\right)$، $\mu^*_{\frac{f_{21}}{g_{21}}}\left(\frac{f_{21}(3,1)}{g_{21}(3,1)}\right)$، $\mu^*_{\frac{f_{22}}{g_{22}}}\left(\frac{f_{22}(0,4)}{g_{22}(0,4)}\right)$، به دست می‌آیند. اکنون توابع عضویت با استفاده از سری چندجمله‌ای

تیلور مرتبه اول به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}}\left(\frac{f_{۱۱}(x)}{g_{۱۱}(x)}\right) &\cong \overline{\mu}_{\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}}\left(\frac{f_{۱۱}(x)}{g_{۱۱}(x)}\right) = \mu_{\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}}\left(\frac{f_{۱۱}(۱,۰)}{g_{۱۱}(۱,۰)}\right) + (x_۱ - ۱) \times \frac{\partial \mu_{\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}}\left(\frac{f_{۱۱}(۱,۰)}{g_{۱۱}(۱,۰)}\right)}{\partial x_۱} \\ &+ (x_۲ - ۰) \times \frac{\partial \mu_{\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}}\left(\frac{f_{۱۱}(۱,۰)}{g_{۱۱}(۱,۰)}\right)}{\partial x_۲} = ۲x_۱ - ۵x_۲.\end{aligned} \tag{۴۴.۵}$$

به همین ترتیب، توابع عضویت دیگر با استفاده از سری چندجمله‌ای تیلور مرتبه اول به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mu_{\frac{f_{۱۲}}{g_{۱۲}}}\left(\frac{f_{۱۲}(x)}{g_{۱۲}(x)}\right) = ۱.۵۲ + ۰.۰۸x_۱ - ۰.۱۲x_۲ \tag{۴۵.۵}$$

$$\mu_{\frac{f_{۲۱}}{g_{۲۱}}}\left(\frac{f_{۲۱}(x)}{g_{۲۱}(x)}\right) = ۵.۵ + ۴x_۱ - ۱.۵x_۲ \tag{۴۶.۵}$$

$$\mu_{\frac{f_{۲۲}}{g_{۲۲}}}\left(\frac{f_{۲۲}(x)}{g_{۲۲}(x)}\right) = ۰.۶ - ۰.۴۸x_۱ + ۰.۲x_۲ \tag{۴۷.۵}$$

$p(x)$ با اضافه کردن (۴۴.۵) به (۴۵.۵) به دست می‌آید.

$$p(x) = \mu_{\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}}\left(\frac{f_{۱۱}(x)}{g_{۱۱}(x)}\right) + \mu_{\frac{f_{۱۲}}{g_{۱۲}}}\left(\frac{f_{۱۲}(x)}{g_{۱۲}(x)}\right) = ۱.۵۲ + ۲.۰۸x_۱ - ۵.۱۲x_۲ \tag{۴۸.۵}$$

برای این که مسئله دو سطحی به یک مسئله تک‌هدفه تبدیل شود، شرایط کان-تاکر را برای سطح دوم به کار می‌بریم و شرایط کان-تاکر را به قیدهای مسئله اضافه می‌کنیم. بنابراین با استفاده از شرایط کان-تاکر برای سطح دوم مسئله داریم:

$$\begin{aligned} & max \;\; p(x) = ۱.۵۲ + ۲.۰۸x_۱ - ۵.۱۲x_۲ \\ & s.t. \;\; x_۱ + x_۲ + u_۱ = ۴ \\ & \qquad x_۱ - ۲x_۲ + u_۲ = ۱ \\ & \qquad ۳x_۱ + x_۲ - u_۳ = ۳ \\ & \qquad w_۱ - ۲w_۲ + w_۳ - v = -۱.۵ + ۰.۲ \\ & \qquad w \leq M\eta, \;\; u \leq M(۱ - \eta) \\ & \qquad x_۲ \leq M\xi, \;\; v \leq M(۱ - \xi) \\ & \qquad \eta, \xi \in \{۰, ۱\} \\ & \qquad x_۱, x_۲, w_i, u_i, v \geq ۰ \quad i = ۱, \ldots, ۳. \end{aligned} \tag{۴۹.۵}$$

مسئله را برای $M = ۱۰۰۰$ حل می‌کنیم و جواب $(x_۱^*, x_۲^*) = (۱, ۰)$ به دست می‌آید بنابراین داریم $\frac{f_{۱۱}(x_۱,x_۲)}{g_{۱۱}(x_۱,x_۲)} = ۴$، $\frac{f_{۱۲}(x_۱,x_۲)}{g_{۱۲}(x_۱,x_۲)} = ۰.۵$، $\frac{f_{۲۱}(x_۱,x_۲)}{g_{۲۱}(x_۱,x_۲)} = ۰.۶۷$، $\frac{f_{۲۲}(x_۱,x_۲)}{g_{۲۲}(x_۱,x_۲)} = ۰.۳۳$ و مقادیر عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_{\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}}\left(\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}\right) = ۱, \quad \mu_{\frac{f_{۱۲}}{g_{۱۲}}}\left(\frac{f_{۱۲}}{g_{۱۲}}\right) = ۱, \quad \mu_{\frac{f_{۲۱}}{g_{۲۱}}}\left(\frac{f_{۲۱}}{g_{۲۱}}\right) = ۰.۶۷, \quad \mu_{\frac{f_{۲۲}}{g_{۲۲}}}\left(\frac{f_{۲۲}}{g_{۲۲}}\right) = ۰.۳۳.$$

مقادیر توابع عضویت نشان می‌دهند که برای جواب $(x_۱^*, x_۲^*) = (۱, ۰)$، $\frac{f_{۱۱}}{g_{۱۱}}$ و $\frac{f_{۱۲}}{g_{۱۲}}$ صد در صد برآورده می‌شوند اما $\frac{f_{۲۱}}{g_{۲۱}}$، ۶۷ درصد برآورده می‌شود و $\frac{f_{۲۲}}{g_{۲۲}}$، ۳۳ درصد برآورده می‌شود.

فصل ۶

روش مجموعه فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه

۱.۶ روش لوهاندجولا

در روش لوهاندجولا[۱] توابع عضویت مربوط به صورت و مخرج کسرها را در نظر می‌گیریم و یک تابع عضویت وزن‌دار حاصل از آن‌ها را معرفی کرده و با کمک آن رابطه بین جواب‌های کارای مسائل خطی‌کسری چندهدفه فازی و غیرفازی را بررسی می‌کنیم. روش مجموعه فازی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه نسبت به حل مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه برتری دارد. زیرا مسئله تک‌هدفه به‌جای مسئله چندهدفه حل می‌شود. عمده مطالب این فصل از مرجع [۳۸] است.
مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه

$$\begin{aligned} & max\left(\frac{f_۱(x)}{g_۱(x)}, \frac{f_۲(x)}{g_۲(x)}, \cdots, \frac{f_p(x)}{g_p(x)}\right) \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{۱.۶}$$

را در نظر بگیرید، لوهاندجولا در [۲۱] توابع عضویت مربوط به صورت و مخرج کسرهای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چند هدفه را به صورت زیر فرموله می‌کند:

$$\mu_i^{f_i}(x) = \begin{cases} ۰ & if \quad f_i(x) < q_i, \\ \frac{f_i(x)-q_i}{f_i^۰-q_i} & if \quad q_i \leq f_i(x) \leq f_i^۰, \\ ۰ & if \quad f_i(x) > f_i^۰. \end{cases} \qquad \forall i = ۱, \ldots, p, \tag{۲.۶}$$

$$\mu_i^{g_i}(x) = \begin{cases} ۰ & if \quad g_i(x) > s_i, \\ \frac{s_i-g_i(x)}{s_i-g_i^۰} & if \quad g_i^۰ \leq g_i(x) \leq s_i, \\ ۰ & if \quad g_i(x) < g_i^۰, \end{cases} \qquad \forall i = ۱, \ldots, p, \tag{۳.۶}$$

[۱] Luhandjula

به طوری که f_i° و g_i° برای هر $i = 1, \ldots, p$ به ترتیب، بیشترین مقدار صورت کسر $f_i(x)$ و کمترین مقدار مخرج کسر $g_i(x)$ روی مجموعه X است و q_i و s_i آستانه قابل قبول برای $f_i(x)$ و $g_i(x)$ می‌باشند.

در ادامه، توابع عضویت مربوط به صورت و مخرج کسرها را در نظر می‌گیریم و یک تابع عضویت وزن‌دار حاصل از آن را معرفی کرده و با کمک آن رابطه بین جواب‌های کارای مسائل خطی‌کسری چندهدفه فازی و غیر فازی را بررسی می‌کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\mu_i(x) = w_i \mu_i^{f_i}(x) + w_i' \mu_i^{g_i}(x), \qquad \forall\, i = 1, \ldots, p \tag{۴.۶}$$

که در آن w_i و w_i' وزن‌هایی هستند که اهمیت نسبی توابع را نشان می‌دهند و توسط تصمیم گیرنده بر اساس ملاک و معیارهایی تعیین می‌شوند و در شرط $\sum_{i=1}^{p}(w_i + w_i') = 1$ صدق می‌کنند.

نکته: در ادامه فرض می‌کنیم:

$$\forall x^1, x^2 \in X, \quad if \quad \frac{f_i(x^1)}{g_i(x^1)} > \frac{f_i(x^2)}{g_i(x^2)} \quad then \quad \mu_i(x^1) > \mu_i(x^2) \quad \forall\, i = 1, \ldots, p. \tag{۵.۶}$$

با کمک فرض (۵.۶)، نشان می‌دهیم که جواب‌های بهینه مسئله اسکالرسازی زیر برای مسئله (۱.۶) کارا می‌باشد

$$max \qquad \sum_{i=1}^{p}(w_i \lambda_i + w_i' \eta_i)$$

$$s.t. \begin{cases} \lambda_i = \mu_i^{f_i}(x) \\ \eta_i = \mu_i^{g_i}(x) \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad i = 1, \ldots, p \\ 0 \leq \eta_i \leq 1 \quad i = 1, \ldots, p \\ Ax \leq b, \quad x \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{p}(w_i + w_i') = 1, \quad w_i, w_i' \geq 0 \end{cases} \tag{۶.۶}$$

درادامه شرایطی برای وزن‌های w_i و w_i' ارائه می‌دهیم که باعث می‌شوند $\mu_i(x) \quad \forall\, i = 1, \ldots, p$ در فرض (۵.۶) صدق کنند.

فرض کنیم:

$$\forall\, x^1, x^2 \in X, \quad \frac{f_i(x^1)}{g_i(x^1)} < \frac{f_i(x^2)}{g_i(x^2)} \Longrightarrow \mu_i(x^1) < \mu_i(x^2)$$

بنابراین:

$$\mu_i(x^1) < \mu_i(x^2)$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & w_i \mu_i^{f_i}(x^1) + w_i' \mu_i^{g_i}(x^1) < w_i \mu_i^{f_i}(x^2) + w_i' \mu_i^{g_i}(x^2) \\
\Longleftrightarrow \quad & w_i[\mu_i^{f_i}(x^1) - \mu_i^{f_i}(x^2)] < w_i'[\mu_i^{g_i}(x^2) - \mu_i^{g_i}(x^1)] \\
\Longleftrightarrow \quad & w_i[\tfrac{f_i(x^1)-q_i}{f_i^\circ - q_i} - \tfrac{f_i(x^2)-q_i}{f_i^\circ - q_i}] < w_i'[\tfrac{s_i - g_i(x^2)}{s_i - g_i^\circ} - \tfrac{s_i - g_i(x^1)}{s_i - g_i^\circ}] \\
\Longleftrightarrow \quad & w_i[\tfrac{f_i(x^1)-f_i(x^2)}{f_i^\circ - p_i}] < w_i'[\tfrac{g_i(x^1)-g_i(x^2)}{s_i - g_i^\circ}].
\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم:

$$k_i = \frac{s_i - g_i^\circ}{f_i^\circ - q_i}$$

داریم:

$$\frac{w_i'}{w_i} > k_i[\frac{f_i(x^۱) - f_i(x^۲)}{g_i(x^۱) - g_i(x^۲)}] \quad iff \quad g_i(x^۱) > g_i(x^۲)$$

و

$$\frac{w_i'}{w_i} < k_i[\frac{f_i(x^۱) - f_i(x^۲)}{g_i(x^۱) - g_i(x^۲)}] \quad iff \quad g_i(x^۱) < g_i(x^۲)$$

نتیجه می‌گیریم $\frac{w_i'}{w_i} < k_i\overline{A_i}$ و $\frac{w_i'}{w_i} > k_i\underline{A_i}$ که در آن

$$\overline{A_i} = min\{\frac{f_i(x^۱) - f_i(x^۲)}{g_i(x^۱) - g_i(x^۲)}|g_i(x^۱) < g_i(x^۲), \frac{f_i(x^۱)}{g_i(x^۱)} < \frac{f_i(x^۲)}{g_i(x^۲)}, x^۱, x^۲ \in X\}$$

و

$$\underline{A_i} = max\{\frac{f_i(x^۱) - f_i(x^۲)}{g_i(x^۱) - g_i(x^۲)}|g_i(x^۱) > g_i(x^۲), \frac{f_i(x^۱)}{g_i(x^۱)} < \frac{f_i(x^۲)}{g_i(x^۲)}, x^۱, x^۲ \in X\}.$$

بنابراین اگر $k_i\underline{A_i} < \frac{w_i'}{w_i} < k_i\overline{A_i}$ آنگاه فرضیه (۵.۶) برقرار است.

گزاره ۱.۱.۶. *فرض کنید رابطه (۵.۶) برقرار باشد. اگر x^* جواب بهینه برای مسئله (۶.۶) باشد آن‌گاه x^* جواب کارای ضعیف برای مسئله (۱.۶) است.*

برهان. گزاره فوق را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید x^* جواب بهینه برای مسئله (۶.۶) باشد اما جواب کارای ضعیف برای مسئله (۱.۶) نباشد. در این صورت $x \in X$ای وجود دارد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} > \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \qquad \forall\ i = ۱, \ldots, p$$

از فرضیه (۵.۶) نتیجه می‌گیریم $\mu_i(x) > \mu_i(x^*)$ برای هر $i = ۱, \ldots, p$. بنابراین داریم:

$$w_i\mu_i^{f_i}(x) + w_i'\mu_i^{g_i}(x) > w_i\mu_i^{f_i}(x^*) + w_i'\mu_i^{g_i}(x^*) \qquad \forall\ i = ۱, \ldots, p$$

لذا

$$\sum_{i=۱}^{p} w_i\mu_i^{f_i}(x) + w_i'\mu_i^{g_i}(x) > \sum_{i=۱}^{p} w_i\mu_i^{f_i}(x^*) + w_i'\mu_i^{g_i}(x^*)$$

که با فرض بهینگی x^* برای مسئله (۶.۶) متناقض است و اثبات کامل است. □

بدون نیاز به فرضیات بیشتر، به سادگی می‌توانیم ثابت کنیم حتی اگر x^* جواب منحصر به فرد برای مسئله (۶.۶) نباشد، آن‌گاه x^* جواب کارا برای مسئله (۱.۶) است.

گزاره ۲.۱.۶. *فرض کنید رابطه (۵.۶) برقرار باشد. اگر x^* جواب بهینه برای مسئله (۶.۶) باشد آن‌گاه x^* جواب کارا برای مسئله (۱.۶) است.*

برهان. فرض کنید x^* جواب بهینه برای مسئله (۶.۶) باشد اما جواب کارا برای مسئله (۱.۶) نباشد. بنابراین $x \in X$ای وجود دارد به طوری که

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \geq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \qquad \forall\, i = ۱, \ldots, p$$

و برای حداقل یک j داریم:

$$\frac{f_j(x)}{g_j(x)} > \frac{f_j(x^*)}{g_j(x^*)}$$

از فرض (۵.۶) نتیجه می‌گیریم که

$$\mu_i(x) \geq \mu_i(x^*), \quad \forall\, i = ۱, \ldots, p$$

برای یک اندیس j،

$$\mu_j(x) > \mu_j(x^*).$$

بنابراین داریم:

$$w_i \mu_i^{f_i}(x) + w_i' \mu_i^{g_i}(x) \geq w_i \mu_i^{f_i}(x^*) + w_i' \mu_i^{g_i}(x^*)$$

و

$$w_j \mu_j^{f_j}(x) + w_j' \mu_j^{g_j}(x) > w_j \mu_j^{f_j}(x^*) + w_j' \mu_j^{g_j}(x^*)$$

لذا:

$$\sum_{i=۱}^{p} w_i \mu_i^{f_i}(x) + w_i' \mu_i^{g_i}(x) > \sum_{i=۱}^{p} w_i \mu_i^{f_i}(x^*) + w_i' \mu_i^{g_i}(x^*)$$

که این با بهینگی x^* برای مسئله (۶.۶) متناقض است و لذا اثبات کامل است. □

مثال ۳.۱.۶. اکنون مسئله بهینه سازی خطی‌کسری دوهدفه زیر را با کمک نتایجی که در این فصل آورده شده است حل می‌کنیم:

$$max\left(\frac{x_۱ + x_۲ - ۱}{-x_۱ + ۲x_۲ + ۷}, \frac{۲x_۱ + x_۲ - ۲}{x_۲ + ۴}\right)$$

$$s.t. \begin{cases} -x_۱ + ۳x_۲ \leq ۰, \\ x_۱ \leq ۶, \\ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{cases}$$

با استفاده از روش مجموعه فازی به جای حل مسئله بهینه‌سازی فوق مسئله بهینه‌سازی (۶.۶) را حل کرده که در آن $\mu_i^{f_i}(x)$ و $\mu_i^{g_i}(x)$ همان روابط (۲.۶) و (۳.۶) است. داریم $(f_۱^\circ, g_۱^\circ) = (۷, ۱)$ و $(f_۲^\circ, g_۲^\circ) = (۱۲, ۴)$. فرض کنید $(q_۱, s_۱) = (۶, ۲)$ و $(q_۲, s_۲) = (۱۰, ۶)$. با جایگزاری در (۲.۶) و (۳.۶) داریم:

$$\mu_۱^{f_۱}(x) = \begin{cases} ۰ & x_۱ + x_۲ - ۱ < ۶, \\ -x_۱ - x_۲ + ۷ & ۶ \leq x_۱ + x_۲ - ۱ \leq ۷, \\ ۰ & x_۱ + x_۲ - ۱ > ۷. \end{cases}$$

$$\mu_{۲}^{f_{۲}}(x)=\begin{cases}۰ & ۲x_{۱}+x_{۲}-۲<۱۰,\\ \frac{۲x_{۱}+x_{۲}-۱۲}{۲} & ۱۰\leq ۲x_{۱}+x_{۲}-۲\leq ۱۲,\\ ۰ & ۲x_{۱}+x_{۲}-۲>۱۲.\end{cases}$$

$$\mu_{۱}^{g_{۱}}(x)=\begin{cases}۰ & -x_{۱}+۲x_{۲}+۷>۲,\\ x_{۱}-۲x_{۲}-۵ & ۱\leq -x_{۱}+۲x_{۲}+۷\leq ۲,\\ ۰ & -x_{۱}+۲x_{۲}+۷<۱.\end{cases}$$

$$\mu_{۲}^{g_{۲}}(x)=\begin{cases}۰ & x_{۲}+۴>۶,\\ \frac{-x_{۲}+۲}{۲} & ۴\leq x_{۲}+۴\leq ۶,\\ ۰ & x_{۲}+۴<۴.\end{cases}$$

و با جایگزاری در مسئله (۶.۶) و با حل مسئله تک هدفه جواب بهینه (۱ و ۶) با ضرایب وزن (۱ و ۰ و ۰ و ۰) به دست می‌آید.

ملاحظه ۴.۱.۶. *اثبات داده شده در [۱۲] بر پایه این واقعیت است که رابطه (۵.۶) برای هر $\mu_i^{f_i}$ و $\mu_i^{g_i}$ به طور جداگانه صدق می‌کند که نامساوی زیر را نتیجه می‌دهد.*

$$\sum_{i=۱}^{p}\mu_i^{f_i}(x)+\mu_i^{g_i}(x)>\sum_{i=۱}^{p}\mu_i^{f_i}(x^*)+\mu_i^{g_i}(x^*) \tag{۷.۶}$$

اما داتا[۲] در [۱۲] نوشت که رابطه (۷.۶) رابطه (۸.۶) را نتیجه می‌دهد.

$$\sum_{i=۱}^{p}w_i\mu_i^{f_i}(x)+w'_i\mu_i^{g_i}(x)>\sum_{i=۱}^{p}w_i\mu_i^{f_i}(x^*)+w'_i\mu_i^{g_i}(x^*) \tag{۸.۶}$$

که این نتیجه‌گیری نادرست است. نادرستی آن را با یک مثال عددی ساده نشان می‌دهیم:

$$۰.۱۵+۰.۲۵>۰.۰۳+۰.۳۵$$

در حالی که

$$۰.۲\times ۰.۱۵+۰.۸\times ۰.۲۵=۰.۲۳<۰.۳=۰.۲\times ۰.۰۳+۰.۸\times ۰.۳.$$

بنابراین حائز اهمیت است توجه کنیم که اساساً فرضیه (۵.۶) باید در تابع ترکیب $w_i\mu_i^{f_i}(x)+w'_i\mu_i^{g_i}(x)$ صدق کند و برای هر تابع $\mu_i^{f_i}(x)$ و $\mu_i^{g_i}(x)$ به طور جداگانه صدق نکند. و این باعث می‌شود که جواب بهینه مسئله خطی (۶.۶) جواب کارا برای مسئله برنامه‌ریزی خطی‌کسری چندهدفه باشد.

[۲] Dutta

مراجع

[1] *Benson, H. P. (1985). Note—finding certain weakly-efficient vertices in multiple objective linear fractional programming. management science, 31(2), 240-248.*

[2] *Bitran, G. R., Novaes, A. G. (1973). Linear programming with a fractional objective function. Operations Research, 21(1), 22-29.*

[3] *Caballero, R., Hernández, M. (2006). Restoration of efficiency in a goal programming problem with linear fractional criteria. European Journal of Operational Research, 172(1), 31-39.*

[4] *Charnes, A., Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly, 9(3-4), 181-186.*

[5] *Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429-444.*

[6] *Choo, E. U., Atkins, D. R. (1982). Bicriteria linear fractional programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 36(2), 203-220.*

[7] *Dubois, D. J. (1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications (Vol. 144). Academic Press.*

[8] *Dubois, D., Prade, H. (1978). Operations on fuzzy numbers. International Journal of Systems Science, 9(6), 613-626.*

[9] *Dubois, D., Prade, H. (1983). Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory. Information Sciences, 30(3), 183-224.*

[10] *Dubois, D., Prade, H. (1987). Linear programming with fuzzy data. Analysis of Fuzzy Information, 3, 241-263.*

[11] *Dutta, D., Rao, J. R., Tiwari, R. N. (1993). Fuzzy approaches for multiple criteria linear fractional optimization: a comment. Fuzzy Sets and Systems, 54(3), 347-349.*

[12] *Dutta, D., Tiwari, R. N., Rao, J. R. (1992). Multiple objective linear fractional programming—a fuzzy set theoretic approach. Fuzzy Sets and Systems, 52(1), 39-45.*

[13] Ehrgott, M. (2006). Multicriteria optimization. Springer Science and Business Media.

[14] Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22(3), 618-630.

[15] Guang-yuan, W., Zhong, Q. (1993). Linear programming with fuzzy random variable coefficients. Fuzzy Sets and Systems, 57(3), 295-311.

[16] Gupta, P., Bhatia, D. (2001). Sensitivity analysis in fuzzy multiobjective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets and Systems, 122(2), 229-236.

[17] Guzel, N., Sivri, M. (2005). Taylor series solution of multi objective linear fractional programming problem. Trakya University Journal Science, 6(2), 80-87.

[18] Kornbluth, J. S. H. (1986). On the use of multiple objective linear programming algorithms to solve problems with fractional objectives. European Journal of Operational Research, 23(1), 78-81.

[19] Kornbluth, J. S., Steuer, R. E. (1981). Multiple objective linear fractional programming. Management Science, 27(9), 1024-1039.

[20] Lotfi, F. H., Noora, A. A., Jahanshahloo, G. R., Khodabakhshi, M., Payan, A. (2010). A linear programming approach to test efficiency in multi-objective linear fractional programming problems. Applied Mathematical Modelling, 34(12), 4179-4183.

[21] Luhandjula, M. K. (1984). Fuzzy approaches for multiple objective linear fractional optimization. Fuzzy Sets and Systems, 13(1), 11-23.

[22] Metev, B., Gueorguieva, D. (2000). A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional programming problems. European Journal of Operational Research, 126(2), 386-390.

[23] Mohamed, R. H. (1997). The relationship between goal programming and fuzzy programming. Fuzzy Sets and Systems, 89(2), 215-222.

[24] Negoita, C., Zadeh, L., Zimmermann, H. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

[25] Nykowski, I., Zołkiewski, Z. (1985). A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem. European Journal of Operational Research, 19(1), 91-97.

[26] *Pal, B. B., Moitra, B. N., Maulik, U. (2003). A goal programming procedure for fuzzy multiobjective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets and Systems, 139(2), 395-405.*

[27] *Ravi, V., Reddy, P. J. (1998). Fuzzy linear fractional goal programming applied to refinery operations planning. Fuzzy Sets and Systems, 96(2), 173-182.*

[28] *Saad, O. M. (2007). On stability of proper efficient solutions in multiobjective fractional programming problems under fuzziness. Mathematical and Computer Modelling, 45(1), 221-231.*

[29] *Saad, O. M. (2006). Finding proper efficient solutions in fuzzy multiobjective fractional programming. Journal of Statistics and Management Systems, 9(2), 485-496.*

[30] *Sakawa, M., Yano, H. (1988). New solution concept for multiobjective linear programming problems with fuzzy parameters and its application. In Proceedings of the International Workshop on Fuzzy Systems Applications, Fukuoka, Japan (pp. 163-164).*

[31] *Sakawa, M., Yano, H.,Takahashi, J. (1992). Pareto optimality for multiobjective linear fractional programming problems with fuzzy parameters. Information Sciences, 63(1), 33-53.*

[32] *Saraj, M., Safaei, N. (2012). Fuzzy linear fractional bi-level multi-objective programming problems. International Journal of Applied Mathematical Research, 4, 643-658.*

[33] *Singh, P. (2014). Weakly fuzzy efficient conditions for multiobjective fractional programming problem. Journal of Intelligent, Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology, 26(3), 1383-1392.*

[34] *Singh, P. (2014). Weakly fuzzy efficient conditions for multiobjective fractional programming problem. Journal of Intelligent, Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology, 26(3), 1383-1392.*

[35] *Stancu-Minasian, I. M. (1984). Stochastic programming with multiple objective functions (Vol. 13). D Reidel Pub Co.*

[36] *Stancu-Minasian, I. M. (1997). Fractional programming. Springer.*

[37] *Stancu-Minasian, I. M. (1999). A fifth bibliography of fractional programming*. Optimization, 45(1-4), 343-367.*

[38] *Stancu-Minasian, I. M., Pop, B. (2003). On a fuzzy set approach to solving multiple objective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets and Systems, 134(3), 397-405.*

[39] *Stanojević, B. (2013). A note on 'Taylor series approach to fuzzy multiple objective linear fractional programming'. Information Sciences, 243, 95-99.*

[40] *Stanojević, B., Stanojević, M. (2013). On the efficiency test in multi-objective linear fractional programming problems by Lotfi et al. 2010. Applied Mathematical Modelling, 37(10), 7086-7093.*

[41] *Toksarı, M. D. (2008). Taylor series approach to fuzzy multiobjective linear fractional programming. Information Sciences, 178(4), 1189-1204.*

[42] *Toksarı, M. D. (2008). Taylor series approach to fuzzy multiobjective linear fractional programming. Information Sciences, 178(4), 1189-1204.*

[43] *Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. Information Sciences, 8(3), 199-249.*

[44] *Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. Information Sciences, 9(1), 43-80.*

[45] *Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II. Information Sciences, 8(4), 301-357.*

[46] *Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8(3), 338-353.*

[47] *Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy Sets and Systems, 1(1), 45-55.*

[48] *Zimmermann, H. J. (2001). Fuzzy set theory—and its applications. Springer Science, Business Media.*

[49] *Zimmermann, H. J. (2001). Fuzzy set theory—and its applications. Springer Science, Business Media.*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابرصفحه جداساز	*Separating hyperplain*
اشتراک	*Intersection*
اکیداً غالب	*Strictly dominated*
الگوریتم	*Algorithm*
اولیه	*Primal*
بیشینه	*Maximal*
برنامه‌ریزی خطی چندهدفه	*Multiobjective linear programming*
بهینه‌سازی دوهدفه	*Biobjective optimization*
تابع عضویت	*Membership function*
تابع مشتق پذیر	*Differentiable function*
تست کارایی	*Efficiency test*
تک‌هدفه	*Single objective*
جواب بهینه	*Optimal solution*
جواب شدنی	*Feasible solution*
جواب کارا	*Efficient solution*
جواب کارای ضعیف	*Weakly efficient solution*
جواب $\gamma-$کارا	$\gamma-$*efficient solution*
دامنه تغییرات	*Tolerance*
رتبه‌بندی	*Ranking*
روش‌های اسکالر سازی	*Scalarization techniques*
روش مجموع وزن‌دار	*Weighted sum method*
روش مجموعه فازی	*Fuzzy set method*
سری تیلور	*Taylor series*
به‌طور قطعه‌ای خطی	*Piecewise linear*
عدد فازی ذوزنقه‌ای	*Trapezoidal fuzzy number*

عدد فازی مثلثی .... *Triangular fuzzy number*

فضای تصمیم .... *Decision space*

فضای شدنی .... *Feasible space*

فضای هدف .... *Objective space*

کارایی سره .... *Proper efficiency*

کران‌دار .... *Bounded*

کمینه .... *Minimal*

محدب .... *Convex*

مقدار .... *Value*

مینیمم سازی .... *Minimization*

نرمال سازی .... *Normalization*

نقطه راسی .... *Exterme point*

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

الگوریتم	*Algoritm*
کران‌دار	*Bounded*
محدب	*Convex*
تابع مشتق پذیر	*Differentiable function*
تست کارایی	*Efficiency test*
تعمیم	*Extension*
نقطه راسی	*Exterme point*
جواب شدنی	*Feasible solution*
فضای شدنی	*Feasible space*
اشتراک	*Intersection*
برنامه‌ریزی خطی	*Linear programming*
بیشینه	*Maximal*
تابع عضویت	*Membership function*
کمینه	*Minimal*
مینیمم سازی	*Minimization*
برنامه‌ریزی خطی چندهدفه	*Multiobjective linear programming*
فضای هدف	*Objective space*
جواب بهینه	*Optimal solution*
اولیه	*Primal*
کارایی سره	*Proper efficiency*
رتبه‌بندی	*Ranking*
روش‌های اسکالرسازی	*Scalarization techniques*
ابر صفحه جداساز	*Separating hyperplane*
تک‌هدفه	*Single objective*
اکیداً غالب	*Strictly dominated*

Aabstract

In this thesis, we first explain weak efficiency and efficiency concepts for multiobjective linear fractional programming problems and a linear programming approach to test efficiency is proposed. Then, we focuse on multiobjective linear fractional programming problems whit fuzzy parameters and based on the concepts of possibility and necessity fo fuzzy numbers extend the ordinary pareto optimality concept. We Using four indices for ranking two fuzzy numbers, four types of efficient solutions are defined and the relationships among them are examined. Then, we use of Taylor series method for solving fuzzy multiobjective linear fractional programming problems. In the proposed approach, for each objective of the fuzzy multiobjective linear fractional programming problem a membership function is assosiated, and using Taylor series the membership functions are converted to linear form. the problem is reduced to a single objective. The practical applications and numerical exampels are used in order to show the efficiency of the proposed approach. By applying a geometrical interpretation, a linear programming approach is achived to test weak efficiency. Also, in order to test efficiency of a given feasible solution, a linear programming approach is proposed. finally, a fuzzy set approach to solve a multiple objective linear fractional programming problem is explained. In this method, a moltiobjective linear fuzzy fractional problem equivalent to the non fuzzy moltiobjective problem is obtained and the equivalent single objective programming problem is solved. This approach is shown the relation between multiobjective linear fractional programming problems and fuzzy multiobjective linear fractional programming problems.

Keywords: Fuzzy multiobjective linear fractional programming problem. Membership function. Taylor series approach. Efficient solution.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Efficient solutions of fuzzy multiple objective linear fractional programming problem

Somayeh Bagheri

Supervisor

Dr. Mehrdad Ghaznavi

Advisor

Dr Maryam Ghorani

December 2015