دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

استاد مشاور

سید رضا موسوی

دانشجو

معصومه ولی‌زاده مقدم

۱۳۹۳

خدایا بندگانت شکر نعمت‌های تو کنند
و من شکر بودن تو،
چراکه نعمت،
بودن توست...

تقدیم به
"پدر فداکار، مادر عزیز و همسر مهربانم..."

سپاس گزاری...

سپاس و ستایش خدای را سزاست که آدمیان را اندیشیدن و تفکر آموخت تا به سرانگشت معرفت، اسرار هستی را یک به یک پرده بردارند. خداوندی که هر پرسشی را پاسخی ختم نمود و ذهن پویای بشر را مشتاق یافتن این پاسخ‌ها قرار داد. پروردگاری که در سایه رحمت بی‌پایانش توانستم گامی دیگر بردارم و وجود خویش را به زینت علم بیارایم. باشد که به خود آیم، شاکر باشم، اندیشه‌ای کنم و طریقی گزینم.

اکنون که خداوند متعال بر بنده حقیر خود منت نهاده و از سر لطف و کرم مرا لایق فراگیری علم قرار داده، چنانچه این مختصر تلاشم شایسته ارزشی باشد، شایسته‌تر آن است که زحمات استاد بزرگوارم آقای دکتر میثم علیشاهی را ارج نهم که در سایه راهنمایی‌های عالمانه ایشان، سعی و تلاش بی حد و حصرشان، دلسوزی‌های صبورانه و همکاری‌های بی دریغشان، این بار گران به منزل نمی‌رسید.

بر خود لازم می‌دانم از استاد صبور جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند تشکر کنم. از محضر اساتید محترم داور آقای دکتر نادر جعفری راد و آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف و نیز از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی آقای دکتر علیرضا ناظمی و سایر اساتید بزرگوار گروه ریاضی کاربردی تشکر می‌کنم.

معصومه ولی زاده مقدم

۱۳۹۳

تعهد نامه

اینجانب **معصومه ولی زاده مقدم** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر میثم علیشاهی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

معصومه ولی زاده مقدم
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یک k-رنگ‌آمیزی پویا برای گراف G، یک k-رنگ‌آمیزی مجاز از G است، به‌طوری‌که برای هر راس $v \in V(G)$ که درجه آن حداقل ۲ است، حداقل دو رنگ متفاوت در همسایگی راس v ظاهر شده باشد. کوچکترین عدد صحیح k به‌طوری‌که، یک k-رنگ‌آمیزی پویا از گراف G وجود داشته باشد عدد رنگی پویای G گویند و با $\chi_2(G)$ نمایش می‌دهند. عدد رنگی و عدد رنگی پویای یک گراف می‌توانند دارای اختلاف به اندازه دلخواه بزرگ باشند.

مونت گومری [1] در رساله دکتری خود مساله رنگ‌آمیزی پویا را معرفی کرد، همچنین حدس زد که اختلاف عدد رنگی پویا و عدد رنگی گراف‌های منتظم حداکثر ۲ است. این حدس توسط افراد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. علیشاهی نشان داد اختلاف عدد رنگی پویا و عدد رنگی یک گراف k-منتظم به‌صورت $O(lnk)$ است. همچنین او یک کران بالا برای عدد رنگی پویای گراف‌های منتظم براساس عدد رنگی خود گراف و عدد استقلال توان دوم آن گراف معرفی کرد.

در این پایانامه سعی می‌کنیم به ارتباط بین عدد رنگی و عدد رنگی پویای گراف‌ها در حالت خاص بپردازیم. همچنین کران بالای عدد رنگی پویای بعضی از گراف‌ها را مشخص می‌کنیم، علاوه بر آن عدد رنگی پویای انتخابی (لیستی) را معرفی کرده و برخی از نتایج آن‌را را بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: عدد رنگی پویا، رنگ‌آمیزی ابرگراف‌ها، مجموعه احاطه‌گر کلی، عدد رنگی پویای انتخابی (لیستی)، گراف‌های زیرتقسیم

[1] B. Montgomery

مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. معصومه ولی‌زاده مقدم "رنگ‌آمیزی پویای انتخابی گراف‌ها" ،دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک تهران، بهمن ۱۳۹۳.

۲. فاطمه شاه‌حسینی، معصومه ولی‌زاده مقدم "b-رنگ‌آمیزی گراف‌ها" ،دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک تهران، بهمن ۱۳۹۳.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف ومقدمات

۱.۱ مقدمه

رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها برای اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط مونت گومری [۱] تعریف شد و خواص آن مورد مطالعه قرار گرفت.
فرض H یک ابرگراف باشد. به‌ازای عدد صحیح $l \geq ۱$، مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,l\}$ را با $[l]$ نشان می‌دهند. یک l-رنگ‌آمیزی مجاز از ابرگراف H، با تابع $c : V(H) \longrightarrow [l]$ مشخص می‌شود که در آن هیچ ابریال تک رنگی در H وجود ندارد. گوییم ابرگراف H، t-رنگ‌پذیر است، اگر یک t-رنگ‌آمیزی مجاز از آن وجود داشته باشد. برای ابرگراف H، کوچکترین عدد صحیح t به‌طوری‌که H، t-رنگ‌پذیر باشد را عدد رنگی H گویند و با $\chi(G)$ نمایش می‌دهند. توجه داشته باشید ابرگراف H یک گراف ساده است اگر و تنها اگر برای هر $e \in E(H)$، داشته باشیم $|e| = ۲$.
یک l-رنگ‌آمیزی راسی مجاز از گراف G، یک l-رنگ‌آمیزی پویا است، اگر برای هر راس $v \in V(G)$ که درجه آن حداقل دو است، حداقل دو رنگ متفاوت در همسایگی راس v ظاهر شده باشد [۱۷].
به‌عبارت دیگر این رنگ‌آمیزی به این صورت است که ضمن برقراری خاصیت رنگ‌آمیزی مجاز در گراف باید در همسایه‌های هر راس با درجه حداقل ۲، حداقل دو رنگ متمایز ظاهر شود.
کوچکترین عدد صحیح l به‌طوری‌که، یک l-رنگ‌آمیزی پویا از گراف G وجود داشته باشد، عدد رنگی پویای G نام دارد و آن‌را با نماد $\chi_۲(G)$ نمایش می‌دهند.
مونت گومری به همراه استادش هونگ [۲] و همکاران تا به‌حال چندین مقاله در این موضوع ارائه داده‌اند.
همچنین در رساله دکتری وی مطالبی در رابطه با مقایسه‌ی عدد رنگی و عدد رنگی پویای گراف‌ها، تعیین کران بالای عدد رنگی پویای گراف‌ها و ...آورده شده است.
همچنین در تعمیم قضیه‌ی بروکس، [۳] قضیه‌ای مشابه را در رنگ‌آمیزی پویای گراف‌ها ثابت کردند،

---
[۱] B. Montgomery
[۲] Hong-Jian Lai
[۳] Brooks Theorem

که اگر G گرافی همبند با $\Delta \geq ۳$ آنگاه $\chi_{۲}(G) \leq ۴$ به‌جز $G = C_{۵}$، زیرا $\chi_{۲}(C_{۵}) = ۵$ و اگر $\Delta \geq ۴$ آنگاه $\chi_{۲}(G) \leq \Delta + ۱$ [۱۵]. به‌علاوه ثابت کردند که اختلاف بین عدد رنگی و عدد رنگی پویا می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ باشد. همچنین ایشان حدس زدند که به ازای هر گراف منتظم G، همواره $\chi_{۲}(G) - \chi(G) \leq ۲$ [۱۷].

در فصل ۱، مقدمه و تعاریفی که در کل پایانامه مورد نیاز است گرد آوری شده است.

در فصل ۲، ثابت می‌کنیم که برای هر گراف k-منتظم G، $\chi_{۲}(G) \leq \chi(G) + \lfloor ۱۴/۰۶ \ln k \rfloor + ۱$. همچنین ثابت می‌کنیم برای هر گراف k-متنظم G با $\chi(G) \geq ۴$، $\chi_{۲}(G) \leq \chi(G) + \alpha(G^{۲})$. به‌علاوه نشان می‌دهیم برای هر گراف k-منتظم بدون مربع G ، $\chi_{۲}(G) - \chi(G) \leq ۲\lceil ۴ \ln k + ۱ \rceil$. در انتها نشان می‌دهیم به‌ازای هر n، گراف منتظم G با عدد رنگی n موجود است به‌طوری‌که، $\chi_{۲}(G) - \chi(G) \geq ۱$ این نتیجه پاسخی منفی به حدس احدی و همکاران [۱] است.

در فصل ۳، این فصل از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول، ابتدا به‌ازای هر عدد طبیعی n، $ch_{۲}(C_n)$ را مشخص می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم اگر G گرافی که مولفه یکریخت با $C_{۵}$ ندارد و $\Delta(G) \geq ۳$ آنگاه $ch_{۲}(G) \leq \Delta(G) + ۱$.

در بخش دوم همین فصل، حدس اکبری و همکاران [۲] مبنی بر این‌که برای هر گراف G، $ch_{۲}(G) = \max(ch(G), \chi_{۲}(G))$، ابتدا با دادن یک مثال از گراف دوبخشی مسطح کوچک G با $ch(G) = \chi_{۲}(G) = ۳$ و $ch_{۲}(G) = ۴$، سپس با ساختن گراف دوبخشی G_k به‌ازای $k \geq ۵$ به‌طوری‌که $ch(G_k) = \chi_{۲}(G_k) = ۳$ و $ch_{۲}(G) \geq k$ را رد می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. فرض G یک گراف با رنگ‌آمیزی راسی c باشد. مجموعه‌ی راس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های G را به ترتیب با $V(G)$ و $E(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین برای هر راس $v \in V(G)$؛ درجه راس v در گراف G، مجموعه‌ی همسایه‌های راس v در G و رنگ راس v را به‌ترتیب با $d_G(v)$، $N_G(v)$ و $c(v)$ نشان می‌دهیم. بنابراین برای هر راس $v \in V(G)$ منظور از $c(N(v))$ مجموعه‌ی تمام رنگ‌های ظاهر شده در همسایه های راس v است.

تعریف ۲.۲.۱. همسایگی باز راس v در G، $N_G(v)$، مجموعه‌ای متشکل از تمام راس‌هایی از G است که با راس v مجاورند. در واقع $N(v) = N(v, G) = N_G(v) = \{w \in V(G) | uw \in E(G)\}$
همچنین همسایگی بسته راس v در G، $N[v]$، به‌صورت $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌شود. برای مجموعه‌ای چون S که $S \subseteq V(G)$، همسایگی باز S را تعریف می‌کنیم:

$$N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$$

و همچنین همسایه بسته S را تعریف می‌کنیم:

$$N[S] = N[S, G] = N(S) \cup \{S\}$$

تعریف ۳.۲.۱. اگر درجه تمام راس‌های گراف G مساوی باشد، در این‌صورت گراف G منتظم خوانده می‌شود. اگر $\Delta(G) = \delta(G) = n$، در این‌صورت G را n-منتظم گویند.

تعریف ۴.۲.۱. برای گراف $G = (V(G), E(G))$، یک زیرگراف عبارت است از، گراف $H = (V(H), E(H))$ به‌طوری‌که، $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر $V(H) = V(G)$ در این‌صورت، H یک زیرگراف فراگیر از G نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی V باشد. زیرگراف G را که مجموعه راس‌هایش S و مجموعه یال‌هایش، زیرمجموعه‌ای از یال‌های G باشد که هر دو انتهایش در S قرار دارد، زیرگراف القا شده به‌وسیله S نامیده و با $G[S]$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۶.۲.۱. گراف دوبخشی گرافی است که مجموعه راس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هر راس X، به هر راس Y وصل شده باشد گراف دوبخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ آنگاه گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش داده می‌شود. گراف k-بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه راس‌های آن‌را به k-زیرمجموعه طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد. گراف k-بخشی کامل، یک گراف k-بخشی است که در آن، هر راس یک بخش به تمام راس‌هایی که در بخش‌های دیگر قرار دارند، وصل شده باشد.

تعریف ۷.۲.۱. گراف G همبند نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو راس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد. (یا یک (u, v)-مسیر موجود باشد)

تعریف ۸.۲.۱. گراف H یک مولفه همبند گراف G است، اگر H یک زیرگراف همبند G باشد و هیچ زیرگراف همبندی از G، H را به عنوان زیرگراف سره در بر نگیرد. در واقع هر گراف به‌صورت اجتماع مولفه‌های همبند خود است.

در ریاضیات و علوم کامپیوتر همبندی یکی از مفاهیم اولیه نظریه گراف است. در نظریه گراف هر گراف ساده دارای یک یا بیشتر مولفه همبند [۴] است.

تعریف ۹.۲.۱. یک گراف جهت‌دار را قویا همبند گوییم، اگر به‌ازای هر دو راس u و v یک مسیر جهت‌دار از u به v و یک مسیر جهت‌دار از v به u وجود داشته باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. برای دو راس u و v در $V(G)$ منظور از $d_G(u, v)$، طول کوتاهترین مسیر بین دو راس u و v تعریف می‌کنیم. اگر بین دو راس u و v هیچ مسیری وجود نداشته باشد، آنگاه $d_G(u, v) = +\infty$.

تعریف ۱۱.۲.۱. توان k-ام گراف ساده G که آن‌را با G^k نشان می‌دهیم، گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $\{uv | d_G(u, v) \leq k\}$. معمولا $G^۲$ را مربع گراف G می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. ابرگراف [۵] یک تعمیم از گراف است که در آن ابریال [۶] به هر تعداد از راس‌ها متصل است. در واقع ابریال مجموعه غیر تهی از زیرمجموعه‌های راس‌های گراف می‌باشد.

[۴] Connected component

[۵] Hypergraph

[۶] Hyperedge

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض H یک ابرگراف باشد. برای عدد صحیح $l \geq 1$، یک l-رنگ‌آمیزی مجاز از ابرگراف H با تابع $c : V(H) \longrightarrow [l]$ مشخص می‌شود که در آن هیچ ابریال تک رنگی در H وجود ندارد. گوییم ابرگراف H، t-رنگ‌پذیر است اگر یک t-رنگ‌آمیزی مجاز از آن وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۴. کوچکترین عدد صحیح l به‌طوری‌که ابرگراف H، l-رنگ‌پذیر باشد، عدد رنگی [۷] ابرگراف H می‌نامند و با $\chi(H)$ نشان می‌دهند.

توجه داشته باشید گراف G، یک ابرگراف است، هرگاه برای هر $e \in E(G)$ داشته باشیم $|e| = 2$.

تعریف ۱.۲.۱۵. یک l-رنگ‌آمیزی راسی مجاز از گراف G، یک l-رنگ‌آمیزی پویا [۸] است، هرگاه برای هر راس $v \in V(G)$ که درجه آن حداقل ۲ است، حداقل دو رنگ متفاوت در همسایگی راس v ظاهر شده باشد [۱۷].

تعریف ۱.۲.۱۶. کوچکترین عدد صحیح l به‌طوری‌که، یک l-رنگ‌آمیزی پویا از G وجود داشته باشد عدد رنگی پویا [۹] G می‌نامند و با $\chi_2(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید l یک عدد صحیح مثبت باشد. یک l-لیست‌دهی L به راس‌های G، عبارت است از، نسبت دادن مجموعه‌های l-عضوی از رنگ‌ها به هر راس گراف G.
بنابراین یک L-رنگ‌آمیزی، یک رنگ‌آمیزی مجاز c است، اگر برای هر $v \in V(G)$، $c(v) \in L(v)$.

تعریف ۱.۲.۱۸. گراف G، l-لیست رنگ‌پذیر [۱۰] است، اگر برای هر l-لیست نسبت داده شده‌ی L، به راس‌های گراف G، یک L-رنگ‌آمیزی مجاز وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹. کوچکترین عدد طبیعی l، به‌طوری‌که برای هر l-لیست‌دهی به راس‌های گراف G، بتوان گراف G را به‌طور لیستی رنگ‌آمیزی مجاز کرد، عدد رنگی انتخابی [۱۱] G نامند و با $ch(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۲۰. کوچکترین عدد طبیعی l، به‌طوری‌که برای هر l-لیست‌دهی به راس‌های گراف G، بتوان گراف G را به‌طور لیستی رنگ‌آمیزی پویا کرد، عدد رنگی پویای انتخابی [۱۲] G نامند و با $ch_2(G)$ نشان می‌دهند.

بنابراین عدد رنگی پویای انتخابی گراف‌ها، یک تعمیم از عدد رنگی پویا و عدد رنگی انتخابی است.
از آنجایی‌که هر رنگ‌آمیزی پویای انتخابی یک رنگ‌آمیزی پویا است، بنابراین $\chi_2(G) \leq ch_2(G)$.

[۷] Chromatic number
[۸] Dynamic Coloring
[۹] Dynamic chromatic number
[۱۰] l-list colorable
[۱۱] The list chromatic number
[۱۲] The list dynamic chromatic number

تعریف ۲۱.۲.۱. مجموعه $T \subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌گر [۱۳] (معمولی) برای G می‌نامیم، اگر هر راس $v \in V(G) \setminus T$ حداقل یک همسایه در T داشته باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. مجموعه احاطه‌گر T را مینیمم می‌نامیم، اگر هیچ مجموعه‌ی احاطه‌گر T' با خاصیت $T' \subseteq V(G)$ و $|T'| < |T|$ موجود نباشد. اندازه مجموعه احاطه‌گر مینیمم از G را عدد احاطه‌گری G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. مجموعه احاطه‌گر مینیمم از G را یک γ-مجموعه برای G می‌نامیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. مجموعه $T \subseteq V(G)$ را مجموعه احاطه‌گر کلی [۱۴] می‌نامیم، اگر هر راس $v \in V(G)$ حداقل یک همسایه در T داشته باشد.

تعریف ۲۴.۲.۱. مجموعه $T \subsetneq V(G)$ را احاطه‌گر دوتایی [۱۵] می‌نامیم، هرگاه T و متمم آن $V(G) \setminus T$ هر دو مجموعه‌های احاطه‌گر کلی باشند [۵].

تعریف ۲۵.۲.۱. مجموعه $S \subseteq V(G)$ را مجموعه مستقل می‌نامیم، هرگاه هیچ دو راسی در S با یکدیگر مجاور نباشند. اندازه بزرگترین مجموعه مستقل گراف G را عدد استقلال G می‌نامیم و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۲.۱. اگر G گرافی با عدد رنگی n باشد. هر n-رنگ‌آمیزی از گراف G، مجموعه راس‌های $(V(G))$ را به n-مجموعه مستقل افراز می‌کند. گوییم گراف یکتا n-رنگ‌پذیر است، اگر $\chi(G) = n$ و یک افراز منحصر به‌فرد از مجموعه راس‌های $(V(G))$ به n-مجموعه مستقل وجود داشته باشد.

گزاره ۲۷.۲.۱. اگر گراف‌های G و H یکریخت باشند $(G \cong H)$ در این‌صورت خواهیم داشت:

۱. $|V(G)| = |V(H)|$،

۲. $|E(G)| = |E(H)|$،

اما عکس رابطه برقرار نیست.

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید H یک گراف باشد. گوییم گراف G مولفه‌ی مانند H دارد، اگر گراف G یک مولفه یکریخت با H داشته باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱. گراف k-بحرانی گرافی است که:

۱. عدد رنگی آن برابر k باشد،

۲. هر زیرگراف القایی از آن عدد رنگی کمتری نسبت به k داشته باشد.

[۱۳] Dominating set

[۱۴] Total dominating set

[۱۵] Double total dominating set

تعریف ۳۰.۲.۱. ضرب دکارتی [۱۶] $(G\square H)$

اگر H و G دو گراف باشد، حاصل‌ضرب دکارتی این دو گراف که با $G\square H$ نمایش داده می‌شود، گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G)\times V(H)$ به‌طوری‌که، راس $(u_۱,v_۱)$ مجاور راس $(u_۲,v_۲)$ است اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

۱. $u_۱=u_۲$ و $v_۱v_۲\in E(H)$.

۲. $v_۱=v_۲$ و $u_۱u_۲\in E(G)$.

تعریف ۳۱.۲.۱. ضرب رسته‌ای [۱۷] $(G\times H)$

اگر H و G دو گراف باشد، حاصل‌ضرب رسته‌ای یا تانسور این دو گراف که با $G\times H$ نمایش داده می‌شود، گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G)\times V(H)$ به‌طوری‌که $(u_۱,v_۱)$ مجاور راس $(u_۲,v_۲)$ است اگر و فقط اگر $u_۱$ مجاور $u_۲$ و $v_۱$ مجاور $v_۲$ باشد.

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض m و n دو عدد صحیح باشد، گراف کنسر [۱۸] با $KG(m,n)$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ی راس‌ها، مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های n-عضوی از مجموعه $\{۱,۲,\dots,m\}$ که با $\binom{[m]}{n}$ نشان داده می‌شود. دو راس A و B در گراف مجاورند اگر و فقط اگر $A\cap B=\emptyset$. عدد رنگی گراف کنسر $\chi(KG(m,n))=m-۲n+۲$، در ۱۹۵۵ توسط کنسر [۱۹] حدس زده شد [۱۳] و توسط لواژ [۲۰] در ۱۹۷۸ ثابت شد [۱۹].

- تعداد راس‌های گراف کنسر: $\binom{m}{n}$،
- تعداد یال‌ها: $\frac{\binom{m}{n}\binom{m-۱}{n}}{۲}$،
- و اینکه گراف کنسر $\binom{m-n}{n}$-منتظم است.

تعریف ۳۳.۲.۱. گراف مثلث-آزاد، گرافی بدون جهت است که هیچ سه راس آن تشکیل مثلث نمی‌دهند.

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض کنید f یک رنگ‌آمیزی از گراف G باشد، راس $v\in V(G)$ را یک راس بد [۲۱] می‌نامیم، اگر $deg(v)\geq ۲$ و تمام راس‌ها $N(v)$ در رنگ‌آمیزی f به‌طور مشابه رنگ شوند.

تعریف ۳۵.۲.۱. گراف ساده G که تهی و کامل نیست را گراف قویا منتظم [۲۲] با پارامترهای (v,k,λ,μ) می‌نامند اگر:

---

[۱۶] Cartesian product

[۱۷] Categorical product

[۱۸] Kneser graph

[۱۹] Kneser

[۲۰] Lovász

[۲۱] Bad vertices

[۲۲] Strongly regular

- $|V(G)| = v$،
- G گرافی k-منتظم باشد،
- هر دو راس مجاور در G، λ- همسایه مشترک دارند،
- هر دو راس غیر مجاور در G، μ- همسایه مشترک دارند.

تعریف ۳۶.۲.۱. فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. مجموعه S_A نشان دهنده تمام جایگشت‌ها از $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ است. توجه کنید که هر جایگشت $\sigma = x_1 x_2 \ldots x_n \in S_A$ را می‌توان به صورت یک ترتیب کلی $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ در نظر گرفت و برعکس.

تعریف ۳۷.۲.۱. فرض کنید $T = \{xi_1, xi_2, \ldots, xi_k\}$، که در آن $i_1 < i_2 < \ldots, i_k$. تحدید جایگشت σ روی اعضای T با $\sigma|_T$ نمایش می‌دهند، عبارت است از یک ترتیب کلی $xi_1 < xi_2 < \ldots < xi_t$ روی T.

تعریف ۳۸.۲.۱. فرض G یک گراف باشد. همچنین فرض کنید $\sigma \in S_{V(G)}$ و $T \subseteq V(G)$، برای هر $u \in T$، $n_\sigma(u, T)$ موقعیت [۲۳] u در ترتیب $\sigma|_T$ است. به‌عبارت دیگر در اگر $\sigma|_T = x_1 x_2 \ldots x_k$ و $u = x_i$ آنگاه $n_\sigma(u, T) = i$.

تعریف ۳۹.۲.۱. برای گراف G و $\sigma \in S_{V(G)}$، $I_\sigma^2 = \{u \in V(G) | n_\sigma(u, N[u]) \leq 2\}$.
به‌عبارت دیگر برای هر راس $u \in V(G)$ موقعیت u در $N[u]$ در مکان اول یا مکان دوم قرار دارد.

تعریف ۴۰.۲.۱. گراف همبند فاقد دور را درخت گویند و هر گرافی که فاقد دور باشد جنگل می‌نامند.

تعریف ۴۱.۲.۱. برای گراف G، گراف زیرتقسیم [۲۴] از G، گرافی است که از تقسیم هر یال G حاصل می‌شود، که عبارت است از قرار دادن یک مسیر به طول دو به جای هر یال. گراف حاصل را با $G^\star$ نمایش می‌دهند. راس‌های جدید را راس‌های میانی گراف $G^\star$ و دیگر راس‌ها را راس‌های اصلی نامند.

احتمال

حال موضوع احتمال را به اختصار بیان می‌کنیم.

تعریف ۴۲.۲.۱. مجموعه نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم و معمولا با Ω نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۳.۲.۱. هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد گوییم. اگر نتیجه‌ی آزمایش تصادفی عضوی در مجموعه A باشد گوییم پیشامد رخ داده است.

تعریف ۴۴.۲.۱. دو پیشامد A و B را مستقل گوییم، هرگاه $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$

[۲۳] Position

[۲۴] Incidence graph

تعریف ۴۵.۲.۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $p \in [۰, ۱]$ عددی ثابت باشد، گراف تصادفی $G(n, p)$ یک فضای احتمالاتی روی مجموعه تمام گراف‌ها با مجموعه راس‌های $\{۱, ۲, \dots, n\}$ به‌وسیله $Pr(\{i, j\} \in G) = p$ با پیشامدهای به‌طور همزمان مستقل تعیین می‌شود. در این مدل از گراف‌های تصادفی، راس‌های گراف ثابت بوده و تصادفی بودن گراف به واسطه‌ی وجود پارامتر p است که در بازه‌ی $[۰, ۱]$ تغییر می‌کند. برای مشخصه‌ی p تقریبا تمام گراف‌ها در $G(n, p)$ دارای این مشخصه هستند، اگر $\lim_{n\to\infty} Pr(G \in p) = ۱$.

فصل ۲

رنگ‌آمیزی پویای گراف‌های منتظم

۱.۲ مقدمه

یک l-رنگ‌آمیزی راسی مجاز از گراف G، یک l-رنگ‌آمیزی پویا است، اگر در همسایگی هر راس از درجه حداقل دو، حداقل دو رنگ متفاوت وجود داشته باشد. به‌عبارت دیگر برای هر راس $v \in V(G)$، گوییم مشخصه یا ویژگی پویا در راس v نگه داشته می‌شود، اگر $|c(N(v))| \geq ۲$.
کوچکترین عدد طبیعی l، به‌طوری‌که یک l-رنگ‌آمیزی پویا از G وجود داشته باشد عدد رنگی پویا گویند و با $\chi_۲(G)$ نمایش می‌دهند [۱۷]. چون هر رنگ‌آمیزی پویا یک رنگ‌آمیزی مجاز است، بنابراین $\chi(G) \leq \chi_۲(G)$.
مونت گومری [۱] نشان داد، اختلاف بین عدد رنگی و عدد پویای رنگی می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ باشد. با این وجود، حدس زد این اختلاف برای گراف‌های منتظم حداکثر دو است [۱۷].
در این فصل ثابت می‌کنیم:

۱) برای هر گراف k-منتظم G، $\chi_۲(G) \leq \chi(G) + \lfloor ۱۴/۰۶ \ln k \rfloor + ۱$.

۲) برای هر گراف k-منتظم G با $\chi(G) \geq ۴$، $\chi_۲(G) \leq \chi(G) + \alpha(G^۲)$.

۳) برای هر گراف k-منتظم بدون مربع G، $\chi_۲(G) - \chi(G) \leq ۲\lceil ۴ \ln k + ۱ \rceil$.

۴) به‌ازای هر n، گراف منتظم G با عدد رنگی n موجود است به‌طوری‌که، $\chi_۲(G) - \chi(G) \geq ۱$.
این نتیجه پاسخی منفی به حدس احدی و همکاران [۱] است.

[۱] Montgomery

۲.۲ چند نامساوی، لم و قضیه که در اثبات‌های آتی به آن‌ها نیازمندیم.

نامساوی چرنف [۲] : اگر متغییر تصادفی X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، آنگاه:

$$Pr(|X-np|>t) \leq ۲e^{\frac{-t^۲}{۳np}} \qquad ۰<t<np$$

(لم موضعی لواژ[۳] [۸])

فرض کنید $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ خانواده‌ای از پیشامدهای تصادفی باشند. اگر A_iها مستقل از هم باشند و برای هر i، رابطه $Pr(A_i) < ۱$ برقرار باشد، آنگاه حالتی وجود دارد که در آن، هیچ‌یک از پیشامدها روی نمی‌دهند. از سوی دیگر، اگر A_iها وابسته به هم باشند، به‌سادگی نمی‌توان حرفی در مورد احتمال وقوع هم‌زمان همه A_iها زد. اما در برخی مسائل، با خانواده‌ای از پیشامدها مواجه می‌شویم که به نوعی، تقریبا مستقل‌اند. تقریبا به این معنا که هر کدام از پیشامدها از همه فرایندهای دیگر، به‌جز تعداد محدودی، مستقل است در این مورد چه می‌توان گفت؟

در ۱۹۷۶ لواژ [۴] و اردیش [۵] با ارائه لم موسوم به لم موضعی لواژ، پاسخی مثبت برای سوال فوق یافتند. بعدها صورت‌های گوناگونی برای این لم، توسط افراد مختلفی ارائه شد.

لم ۱.۲.۲. فرض کنیم $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ خانواده‌ای از پیشامدهای تصادفی باشند و عدد p، با این خاصیت باشد که برای هر i، $Pr(A_i) \leq p$. همچنین فرض کنید هر پیشامد A_i، به غیر از d پیشامد از سایر پیشامدها به‌طور همزمان مستقل باشد. در این‌صورت اگر $ep(d+۱) \leq ۱$ (e مبنای لگاریتم طبیعی است) آنگاه $Pr(\cap_{i=۱}^{n} \bar{A}_i) > ۰$. بنابراین با احتمال مثبت هیچ‌کدام از A_iها رخ نمی‌دهند.

قضیه ۲.۲.۲. ([۱۶]) فرض کنید H یک ابرگراف باشد، به‌طوری‌که هر ابریال شامل حداقل k راس و حداکثر d تقاطع با ابریال‌های دیگر باشد، اگر $e(d+۲) \leq ۲^k$ (e مبنای لگاریتم طبیعی است) آنگاه ابرگراف H، ۲-رنگ‌پذیر است.

قضیه ۳.۲.۲. اگر G گرافی همبند، غیر از گراف کامل و دور فرد باشد، آنگاه $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

گزاره ۴.۲.۲. اگر هر راس با درجه بزرگتر از یک در مثلث قرار داشته باشد، آنگاه $\chi(G) = \chi_۲(G)$.

برهان. اگر یک راس در مثلث قرار داشته باشد، آنگاه دو همسایه مجاور دارد. لذا در هر رنگ‌آمیزی از گراف G طبق شرایط مجاورت به‌طور متفاوت رنگ می‌شوند، بنابراین در همسایگی هر راس از درجه حداقل دو، حداقل دو رنگ متفاوت وجود دارد. از این‌رو هر رنگ‌آمیزی مجاز از گراف G یک رنگ‌آمیزی پویا از G است. در نتیجه $\chi(G) = \chi_۲(G)$ □

---

[۲] Chernoff inequality

[۳] The lovasz local lemma

[۴] Lovaz

[۵] Erdos

قضیه ۵.۲.۲. [۵] فرض کنید ثابت $\circ \leq p \leq ۱$ است. تقریبا در تمام گراف‌ها در $G(n,p)$ عدد رنگی و عدد رنگی پویا با هم برابر است.

برهان. نشان می‌دهیم تقریبا برای تمام گراف‌ها $G \in G(n,p)$، هر راس $v \in V(G)$ در یک مثلث قرار دارد. گراف کامل K_n با راس‌های $V(K_n) = [n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید v راسی دلخواه در $V(G)$ باشد. تعداد $\lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor$ مثلث یال مجزا در گراف کامل K_n که همه آن‌ها در راس v اشتراک دارند در نظر بگیرید، توجه کنید هیچ راسی غیر از v در بیشتر از یک مثلث وجود ندارد. چون هر مثلث سه یال دارد، بنابراین احتمال وجود مثلث طبق سه یال $p.p.p = p^۳$ و احتمال اینکه مثلث وجود نداشته باشد $(۱ - p^۳)$ است. حال اگر A_v را پیشامدی که هیچ‌کدام از مثلث‌های یال مجزا در G نباشد در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{n-۲}{۲} \leq \lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor \\
&(۱ - P^۳)^{\lfloor \frac{n-۱}{۲} \rfloor} \leq (۱ - P^۳)^{\frac{n-۲}{۲}} \\
&p_r(A_v) \leq (۱ - P^۳)^{\frac{n-۲}{۲}} \\
&Pr(\cup_{v \in V(G)} A_v) \leq \sum_{v \in V(G)} p_r(A_v) = n(۱ - P^۳)^{\frac{n-۲}{۲}} \longrightarrow \circ
\end{aligned}$$

□

در [۱۷] نشان داده شده، به‌ازای هر $t \geq ۲$ خانواده‌ای از گراف‌های t-رنگ‌پذیر وجود دارند، به‌طوری‌که بین عدد رنگی و عدد رنگی پویای آن‌ها اختلاف وجود دارد.
لم بعدی بیان می‌کند اگر اختلاف بین ماکزیمم درجه $\Delta(G)$ و مینیمم درجه$\delta(G)$ اندک باشد، آنگاه اختلاف بین عدد رنگی $\chi(G)$ وعدد رنگی پویا $\chi_۲(G)$ ناچیز است.

لم ۶.۲.۲. [۵] فرض کنید G یک گراف به‌طوری‌که، $e(\Delta^۲(G) - \Delta(G) + ۲) \leq ۲^{\delta(G)}$، ($e$ مبنای لگاریتم طبیعی است)، در این‌صورت $\chi_۲(G) \leq ۲\chi(G)$.

برهان. فرض کنید H ابرگرافی که مجموعه راس‌های آن همان مجموعه راس‌های گراف G و ابریال‌های آن به‌صورت $E(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{N(v) | v \in V(G)\}$ تعریف می‌شود.
برای هر $f \in E(H)$، $\delta(G) \leq |f| \leq \Delta(G)$ و $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. بنابراین f حداکثر $\Delta(G)(\Delta(G) - ۱)$ تقاطع با ابریال‌های دیگر دارد. زیرا هر ابریال (طبق تعریف) همه راس‌های آن همسایه یک راس می‌باشد، بنابراین یک ابریال، ابریال دیگر را در صورتی قطع می‌کند هرگاه راس‌های آن همسایه راس دیگر باشد. لذا به تعداد همسایه‌هایی که از این راس‌ها می‌توان ساخت، ابریال‌ها همدیگر را قطع می‌کنند. بنابه قضیه ۲.۲.۲، اگر $d = \Delta(G)(\Delta(G) - ۱)$ و $k = \Delta(G)$ آنگاه ابرگراف H، ۲-رنگ‌پذیر است.

اگر f یک ۲-رنگ‌آمیزی از H و c یک $\chi(G)$- رنگ‌آمیزی از G باشد، آنگاه $h=(f,c)$ یک ۲$\chi(G)$-رنگ‌آمیزی پویا از G است. □

لم ۷.۲.۲. فرض کنید G یک گراف باشد.

۱. اگر $e(\Delta^{2}(G)-\Delta(G)+2)\leq 2^{\delta(G)}$ و یک مجموعه احاطه‌گر کلی $T\subsetneq V(G)$ وجود داشته باشد، آنگاه $\chi_{2}(G)\leq\chi(G[V\backslash T])+2\chi(G[T])$.

۲. اگر G یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی $T\subseteq V(G)$ داشته باشد، آنگاه

$$\chi_{2}(G)\leq\chi(G[V\backslash T])+\chi(G[T])$$

برهان. فرض کنید $\chi(G[T])=s$

۱. فرض کنید H ابرگرافی با مجموعه راس‌های T و مجموعه ابریال‌هایی که به صورت:
$E(H)\overset{\text{def}}{=}\{N(u)|N(u)\subseteq T,u\in V(G)\}$ تعریف می‌شود. به‌ازای هر $f\in E(H)$، f حداکثر $\Delta(G)(\Delta(G)-1)$ تقاطع با ابریال‌های دیگر دارد. لذا بنابه قضیه ۲.۲.۲، ابرگراف H، ۲-رنگ‌پذیر است. فرض کنید c یک s-رنگ‌آمیزی از $G[T]$ و f یک ۲-رنگ‌آمیزی از H باشد، بنابراین $(c,f)\overset{\text{def}}{=}h'$ یک ۲s-رنگ‌آمیزی از $G[T]$ می‌باشد. رنگ‌آمیزی h از G که محدودیت آن از h به T مشابه h' است را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که راس‌های $G[V\setminus T]$ با رنگ‌هایی غیر از رنگ‌هایی که در h' استفاده می‌شود رنگ می‌شوند. لذا برای هر راس $v\in V(G)$ از درجه حداقل ۲، حداقل دو رنگ متفاوت در همسایگی راس v وجود دارد. بنابراین h یک رنگ‌آمیزی پویا از G است.

۲ . فرض کنید f یک $\chi(G[T])$-رنگ‌آمیزی از $G[T]$ با رنگ‌های $1,2,\ldots,\chi(G[T])$ و g یک $G[V\setminus T]$-رنگ‌آمیزی از $G[V\setminus T]$ با رنگ‌های $s+1,s+2,\ldots,s+\chi[V\setminus T]$ باشد. اکنون فرض کنید،

$$h(u)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases} f(u) & u\in T\\ g(u) & u\in V(G)\setminus T\end{cases}$$

بنابراین برای هر راس $u\in V(G)$ همسایه‌های u در T و در $V(G)\setminus T$ قرار دارند که به‌طور متمایز رنگ شده‌اند. از این‌رو برای هر راس $u\in V(G)$ از درجه حداقل ۲، حداقل دو رنگ متمایز در همسایگی u وجود دارد. بنابراین h یک رنگ‌آمیزی پویا از G است.

□

نتیجه ۸.۲.۲. فرض کنید G گرافی k-بحرانی باشد. اگر $e(\Delta(G)^{2}-\Delta(G)+1)\leq 2^{\delta(G)}$ آنگاه $\chi_{2}(G)\leq 2k-2$.

برهان. فرض کنید H ابرگرافی که مجموعه راس‌های آن همان مجموعه راس‌های گراف G و مجموعه ابریال‌های آن به صورت $E(H)\overset{\text{def}}{=}\{N(v)|v\in V(G)\}$ تعریف می‌شود. برای هر $f\in E(H)$،

$\Delta(G) \leq |f| \leq \delta(G)$ و $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. بنابه قضیه ۲.۲.۲، H، ۲-رنگ‌پذیر است. یک ۲-رنگ‌آمیزی از ابرگراف H با دو رنگ قرمز و آبی را در نظر بگیرید. فرض کنید $T \subset V(G)$ مجموعه همه راس‌های آبی باشد. بنابه تعریف ابرگراف H، برای هر راس $v \in V(G)$ همسایه‌های v در T و در $V(G)\backslash T$ قرار دارند. به‌عبارت دیگر برای هر راس $v \in V(G)$، $deg_T(v) > ۰$ و $deg_{V(G)\backslash T}(v) > ۰$.
بنابراین T یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی در G است. چون G گرافی k-بحرانی است و هر زیرمجموعه از آن عدد رنگی کمتری از k دارد در این‌صورت:

- $\chi(G[T]) < \chi(G)$،
- $\chi(G[V(G) \setminus T]) < \chi(G)$.

بنابه قسمت دوم لم ۷.۲.۲، $\chi_۲(G) \leq (k-۱) + (k-۱) = ۲k - ۲$.

□

لم ۹.۲.۲. [۵] برای گراف G فرض کنید $H(G)$، ابرگرافی که مجموعه راس‌های آن همان مجموعه راس‌های گراف G و ابریال‌های آن به‌صورت $E(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{N(v)|v \in V(G)\}$ تعریف می‌شود. G دارای یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی است اگر و فقط اگر $H(G)$، ۲-رنگ‌پذیر باشد.

برهان. $\Longleftarrow$ فرض کنید G دارای یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی $T \subseteq V(G)$ است. بنابراین راس‌هایی که در مجموعه T قرار دارند را آبی و راس‌هایی که خارج از مجموعه T قرار دارند را قرمز در نظر می‌گیریم. تمام راس‌های یک ابریال نمی‌تواند در مجموعه T باشد، چون هر راسی را که در نظر بگیریم باید هم در T و هم در $V \setminus T$ همسایه داشته باشد، بنابراین در یک ابریال هم راس قرمز و هم راس آبی وجود دارد، در نتیجه H، ۲-رنگ‌پذیر است.
$\Longrightarrow$ فرض کنید ابرگراف H، ۲-رنگ‌پذیر است. یک دو رنگ‌آمیزی با دو رنگ قرمز و آبی را برای H در نظر می‌گیریم. فرض کنید $T \subseteq V(G)$ مجموعه همه راس‌های آبی باشد. بنابر تعریف ابرگراف H، برای هر راس $v \in V(G)$ همسایه‌های v در T و در $V(G) \setminus T$ قرار دارند. به‌عبارت دیگر برای هر راس $v \in V(G)$، $deg_T(v) > ۰$ و $deg_{V(G)\backslash T}(v) > ۰$. بنابراین T یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی در G است.

□

حدس ۱۰.۲.۲. [۱۷] برای هر گراف منتظم G، همواره $\chi_۲(G) - \chi(G) \leq ۲$.

در گراف کنسر $KG(m,n)$، اگر $m \geq ۳n$، می‌توان ۳ زیرمجموعه n-عضوی $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ را به عنوان راس‌های گراف پیدا نمود که با هم اشتراک ندارند. طبق این‌که در گراف کنسر $KG(m,n)$ دو راس مجاورند اگر و فقط اگر با هم اشتراک نداشته باشند، پس این راس‌ها تشکیل مثلث می‌دهند. بنابراین اگر راسی در مثلث قرار داشته باشد، آنگاه دو همسایه مجاور دارد که در هر رنگ‌آمیزی از گراف طبق شرایط مجاورت به‌طور متفاوت رنگ می‌شوند. در این‌صورت هر رنگ‌آمیزی مجاز از گراف یک رنگ‌آمیزی پویا است. در نتیجه $\chi(KG(m,n)) = \chi_۲(KG(m,n))$.

هنگامی‌که $m = ۲n + t < ۳n$، گراف کنسر $KG(m,n)$ گرافی بدون مثلث (مثلث–آزاد) است بنابراین عدد رنگی آن : $\chi(KG(m,n)) = m - ۲n + ۲ = ۲n + t - ۲n + ۲ = t + ۲$ است.

فرض $T = \{A \in V(KG(m,n)) | A \subseteq \{t+۱, t+۲, \ldots, m\}\}$. می‌توان بررسی کرد که زیرگراف القایی $G[T]$ دور فرد ندارد($G[T]$ گرافی دو بخشی) و T مجموعه احاطه‌گر کلی است. توجه کنید $c(B) \overset{\text{def}}{=} minB$، یک t–رنگ‌آمیزی از زیرگراف القایی $V(KG(m,n)) \setminus T$ است. طبق لم ۷.۲.۲، $\chi_۲(KG(m,n)) \leq t + ۲\chi G[T]$، لذا $\chi_۲(KG(m,n)) \leq t + ۴ = \chi(KG(m,n)) + ۲$. بنابراین گراف کنسر $KG(m,n)$ در حدس ۱۰.۲.۲، صدق می‌کند.

قضیه ۱۱.۲.۲. [۱۷] اگر G گرافی k–منتظم دوبخشی، $k \geq ۳$ و $n < ۲^k$ باشد، آنگاه $\chi_۲(G) \leq ۴$.

قضیه فوق به تمام گراف‌های دوبخشی منتظم گسترش پیدا کرده است [۵].

توجه داشته باشید هنگامی‌که G گرافی k–منتظم و $k \geq ۷$ طبق لم ۶.۲.۲، $\chi_۲(G) \leq ۲\chi(G)$.

لم ۱۲.۲.۲. [۲۰] برای هر ابرگراف k–یکنواخت و k–منتظم H، اگر $k \geq ۴$ آنگاه ابرگراف H، ۲–رنگ‌پذیر است.

فرض کنید G یک گراف و $T \subseteq V(G)$ باشد. همچنین فرض کنید $H_G(T)$ ابرگرافی که مجموعه راس‌های آن $\cup_{v \in T} N(v)$ و مجموعه ابریال‌های آن به‌صورت $E(H_G(T)) \overset{\text{def}}{=} \{N(v) | v \in T\}$ تعریف می‌شود.

برای هر $f \in E(H_G(T))$ ، $\delta(G) \leq |f| \leq \Delta(G)$ و $\Delta(H_G(T)) \leq \Delta(G)$. بنابراین f حداکثر $\Delta(G)(\Delta(G) - ۱)$ تقاطع با ابریال‌های دیگر دارد. بنابه قضیه ۲.۲.۲، $H_G(T)$، ۲–رنگ‌پذیر است.

قضیه ۱۳.۲.۲. برای هر گراف k–منتظم با $k \geq ۴$، اگر $e(\Delta(G)^۲ - \Delta(G) + ۲) \leq ۲^{\delta(G)}$، آنگاه $H_G(T)$، ۲–رنگ‌پذیر است.

نتیجه ۱۴.۲.۲. برای هر گراف k–منتظم G، $\chi_۲(G) \leq ۲\chi(G)$.

برهان. فرض کنید $k \geq ۴$. تعریف کنید H ابرگرافی که مجموعه راس‌های آن همان راس‌های گراف G باشد که ابریال‌های آن به‌صورت $E(H) \overset{\text{def}}{=} \{N(v) | v \in V(G)\}$ تعریف می‌شود. بنابه اثبات لم ۶.۲.۲، کافی است نشان دهیم H، ۲–رنگ‌پذیر است.

فرض H، ابرگرافی k–یکنواخت و $\Delta(H) \leq k$. می‌توان ابرگراف $H' \supseteq H$، را طوری ساخت که k–یکنواخت و k–منتظم باشد:

اگر $\delta(H) = k$، بنابراین $H = H'$. زیرا طبق فرض ابرگراف H، k–یکنواخت و $\Delta(H) \leq k$ است. از طرفی چون $\delta(H) = k$ بنابراین $\delta(H) = \Delta(H) = k$. پس H، نیز گرافی k–منتظم است.

فرض می‌کنیم H^i ساخته شده و $k - \delta(H^i) = t > ۰$. ابرگراف H^* که از k–کپی جدا از هم H^i است در نظر بگیرید، برای هر راس $v \in H^i$ با درجه کمتر از k یال f را که شامل تمام k–کپی v در H^* است در نظر بگیرید، یال‌های جدید را به H^* اضافه کنید، ابرگراف جدید $H^{i+۱}$ بدست می‌آید. توجه کنید $k - \delta(H^{i+۱}) = t - ۱$. بنابراین H' در مراحل متناهی ساخته می‌شود. H' یک گراف k–یکنواخت و

k-منتظم است، لذا H'، ۲-رنگ‌پذیر است. بنابراین هر ابرگراف k-یکنواخت H $(k \geq ۴)$، با ماکزیمم درجه حداکثر k، ۲-رنگ پذیر است.
اگر $k \leq ۳$ سه حالت وجود دارد:

۱. اگر $k = ۱$ آنگاه $۴ \leq ۲$.

۲. اگر $k = ۲$ آنگاه گراف دور است، در این‌صورت اگر دور فرد باشد، آنگاه $\chi_۲(G) \leq ۵ \leq ۲\chi(G) = ۶$. و اگر دور زوج باشد $\chi_۲(G) \leq ۴ \leq ۲\chi(G) = ۲$.

۳. اگر $k = ۳$. در [۱۵] ثابت شده است که اگر $\Delta \geq ۳$، آنگاه $\chi_۲(G) \leq ۴$ به‌جز $G = C_۵$. لذا در این حالت $k = \Delta = ۳$، پس گراف $G \neq C_۵$ است. توجه کنید $\chi(G) \geq ۲$، بنابراین $\chi_۲(G) \leq ۴ \leq ۲\chi(G)$.

□

۳.۲ تعیین کران عدد رنگی پویای گراف‌های منتظم

در این قضیه با استفاده از لم موضعی لواژ ۲.۲، کران بالای عدد رنگی پویای گراف k-منتظم G را براساس k و $\chi(G)$ تعیین می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۲. [۵] برای هر گراف منتظم G، $\chi_۲(G) \leq \chi(G) + \lfloor ۱۴/۰۶ Lnk \rfloor + ۱$.

برهان. قرار دهید $p = ۷/۰۳\frac{Lnk}{k}$. مجموعه تصادفی T را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که، هر راس u با احتمال p به طور تصادفی و مستقل در T قرار دارد. فرض کنید برای هر راس u، متغیر تصادفی X_u تعداد همسایه‌های u در مجموعه‌ی T باشد. بنابراین X_u متغییر تصادفی دو جمله‌ای است. بنابه تعریف نامساوی چرنف ۲.۲، داریم:

$$Pr(|X_u - E(X_u)| > \lambda) \leq ۲e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_u)}} \quad , ۰ < \lambda < E(X_u)$$

بنابراین $E(X_u) = kp = ۷/۰۳ Lnk$.
برای هر راس u، A_u را پیشامدی که در آن $|X_u - ۷/۰۳Lnk| > \lambda$ است تعریف می‌کنیم. بنابه تعریف نامساوی چرنف ۲.۲، داریم:

$$Pr(A_u) \leq ۲e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_u)}}$$

برای هر پیشامد u، پیشامد A_u از تمام پیشامدهای A_v به‌طور همزمان مستقل است به‌جز حداکثر $k^۲$- از آن‌ها. بنابراین برای $k \geq ۱۳۹$ داریم:

$$۲۱/۰۹Lnk(۱ + Ln۲ + Ln(k^۲ + ۱)) < ۴۹/۴۲۰۹(Lnk)^۲$$

فرض $k \geq ۱۳۹$ و با در نظر گرفتن λ داریم:

$$۲۱/۰۹Lnk(۱ + Ln۲ + Ln(k^۲ + ۱)) \leq \lambda^۲ < ۴۹/۴۲۰۹(Lnk)^۲$$

با در نظر گرفتن نامساوی‌های قبل داریم:

$$۲e(k^۲+۱)e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_u)}} \leq ۱$$

با در نظر گرفتن لم موضعی لواژ ۲.۲، که در آن $d=k^۲$ و $p=۲e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_u)}}$، مجموعه $T\subseteq V(G)$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $v\in V(G)$، پیشامد A_v رخ نداده است. لذا مجموعه $T\subseteq V(G)$ چنان وجود دارد، که برای هر راس $v\in V(G)$،

$$|deg_T(v)-۷٫۰۳Lnk| \leq \lambda \qquad ۰<\lambda<۷٫۰۳Lnk$$

بنابراین برای هر راس $v\in V(G)$، $۰<deg_T(v)<۱۴٫۰۶Lnk$. طبق این استنباط هر راس $u\in V(G)$ در T و $V(G)\setminus T$ همسایه دارد. لذا $deg_T(u)>۰$ و $deg_{V(G)\setminus T}(u)>۰$. بنابراین T یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی است. توجه کنید $\Delta(G[T])\leq ۱۴٫۰۶Lnk$، لذا $\chi(G[T])\leq \lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱$. بنابه قسمت دوم لم ۷.۲.۲، داریم:

$$\chi_۲(G)\leq\chi(G[V\setminus T])+\chi(G[T])\leq\chi(G)+\lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱$$

برای کامل شدن اثبات نشان می‌دهیم برای هر گراف k-منتظم G به‌طوری‌که $k\leq ۱۳۸$ داریم:

$$\chi_۲(G)\leq\chi(G)+\lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱$$

با استفاده از نتیجه ۱۴.۲.۲، $\chi_۲(G)\leq ۲\chi(G)$. بنابراین اگر $\chi(G)\leq\lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱$، آنگاه با اضافه کردن $\chi(G)$ داریم:

$$۲\chi(G)\leq\chi(G)+\lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱$$

و اثبات کامل است.

اکنون فرض کنید $\chi(G)>\lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱$. توجه کنید طبق قضیه بروکس [۶] ۳.۲.۲ و قضیه‌ای که در [۱۵] ثابت شده است و بیان می‌کند برای هر گراف همبند G، $\chi_۲(G)\leq\Delta(G)+۱$، به‌جز $G=C_۵$، زیرا $\chi_۲(C_۵)=۵$.

برای $k\leq ۱۳۸$ داریم:

$$\chi_۲(G)\leq ۲\lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱<\chi(G)+\lfloor ۱۴٫۰۶Lnk\rfloor+۱$$

□

قضیه ۲.۳.۲. [۵] برای هر $c>۶$ تابع آستانه‌ای $n(c)$ وجود دارد به‌طوری‌که، اگر G گرافی k-منتظم با $k\geq n(c)$، آنگاه G یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی با ماکزیمم درجه حداکثر $۲cLnk$ دارد. به عنوان مثال، اگر $c=۷٫۰۳$ در این‌صورت $n(c)\leq ۱۳۹$.

برهان. فرض G گرافی k-منتظم باشد. اگر ثابت $c>۶$ را انتخاب کرده و قرار دهیم $p=c\frac{Lnk}{k}$. مجموعه‌ی تصادفی T را به‌طوری‌که هر راس $u\in V(G)$ در T با احتمال p به طور تصادفی و مستقل در آن قرار دارد در نظر می‌گیریم. برای هر راس u متغییر تصادفی X_u تعداد همسایه‌های u در T است. بنابراین X_u متغییر تصادفی دو جمله‌ای است. بنابه تعریف نامساوی چرنف ۲.۲، داریم:

$$Pr(|X_u-E(X_u)|>\lambda)\leq ۲e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_u)}} \quad ,۰<\lambda<E(X_u)$$

[۶] Brooks theorem

$$E(X_u) = kp = cLnk$$

برای هر راس u، A_u پیشامدی که در آن $|X_u - cLnk| > \lambda$ است تعریف می‌کنیم. با استفاده از تعریف نامساوی چرنف ۲.۲، داریم:

$$Pr(A_u) \leq ۲e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_u)}}$$

برای هر راس u، پیشامد A_u از تمام پیشامدهای A_v به‌طور همزمان مستقل است به‌جز حداکثر $k^۲$- از آن‌ها. بنابراین هنگامی‌که آستانه $n(c)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $k \geq n(c)$ داریم:

$$۳cLnk(۱ + Ln۲ + Ln(k^۲ + ۱)) < c^۲(Lnk)^۲$$

با فرض $k \geq n(c)$ و با در نظر گرفتن λ به‌طوری که:

$$۳cLnk(۱ + Ln۲ + Ln(k^۲ + ۱)) \leq \lambda^۲ < c^۲(Lnk)^۲$$

$$۲e(k^۲ + ۱)e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_u}} \leq ۱$$

طبق لم موضعی لواژ ۲.۲، مجموعه $T \subseteq V(G)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $v \in V(G)$، پیشامد A_v رخ نمی‌دهد. بنابراین مجموعه $T \subseteq V(G)$ چنان وجود دارد که برای هر $v \in V(G)$،

$$|deg_T(v) - cLnk| \leq \lambda \qquad ۰ < \lambda < cLnk$$

لذا برای هر راس $v \in V(G)$، $۰ < deg_T(v) < ۲cLnk$. در این‌صورت هر راس $u \in V(G)$ در T و $V(G) \setminus T$ همسایه دارد. از این‌رو $(deg_T(u) > ۰)$ و $(deg_{V(G)\setminus T}(u) > ۰)$. در نتیجه T یک مجموعه احاطه‌گر دوتایی است.

□

قضیه ۳.۳.۲. [۵] فرض ثابت $c > ۶$. تابع آستانه‌ای $n(c)$ وجود دارد به‌طوری‌که، هر ابرگراف k-یکنواخت H با ماکزیمم درجه حداکثر k و $k \geq n(c)$ یک ۲-رنگ‌آمیزی با رنگ‌های قرمز و آبی دارد. به‌طوری‌که، تعداد راس‌های آبی در هر ابریال حداکثر $۲cLnk$ است.

برهان. قرار دهید ثابت $c > ۶$. فرض کنید H ابرگرافی k-یکنواخت با ماکزیمم درجه حداکثر k باشد. مجموعه تصادفی $T \subseteq V(H)$ را در نظر بگیرید. به‌طوری‌که، هر راس u با احتمال $p = c\frac{Lnk}{k}$ به‌طور تصادفی و مستقل در T قرار دارد. رنگ راس‌های موجود در T را آبی و رنگ راس‌های موجود در $V(H) \setminus T$ را قرمز فرض می‌کنیم. برای هر ابریال f، متغییر تصادفی X_f، تعداد راس‌های آبی یعنی تعداد راس‌هایی از f که در T وجود دارد تعریف می‌کنیم. بنابراین X_f متغییر تصادفی دو جمله‌ای است. زیرا اگر $f = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_k\}$ و $X_f = \Sigma_{i=۱}^{k} X_{v_i}$ در این‌صورت:

$$X_{v_i} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ۱ & \text{اگر } v_i \text{ آبی باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

بنابه تعریف نامساوی چرنف ۲.۲، داریم:

$$Pr(|X_f - E(X_f)| > \lambda) \leq ۲e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_f)}} \quad , ۰ < \lambda < E(X_f)$$

$$E(X_f) = cLnk$$

برای ابریال f، A_f پیشامدی که در آن $|X_f - cLnk| > \lambda$ است، تعریف می‌کنیم. بنابه تعریف نامساوی چرنف ۲.۲، داریم:

$$Pr(A_f) \leq ۲e^{\frac{-\lambda^۲}{۳E(X_f)}}$$

برای هر ابریال f، پیشامد A_f از تمام پیشامدهای $A_{f'}$ به‌طور همزمان مستقل است به‌جز حداکثر $k^۲$-از آن‌ها. اگر $c > ۶$ و $p = c\frac{Lnk}{k}$ در این‌صورت آستانه $n(c)$ وجود دارد. هنگامی‌که $k \geq n(c)$:

$$۳cLnk(۱ + Ln۲ + Ln(k^۲ + ۱)) < c^۲(Lnk)^۲$$

اگر $k \geq n(c)$، با در نظر گرفتن λ داریم:

$$۳cLnk(۱ + Ln۲ + Ln(k^۲ + ۱)) \leq \lambda^۲ < c^۲(Lnk)^۲$$

طبق لم موضعی لواژ ۲.۲، مجموعه $T \subseteq V(H)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in E(H)$، پیشامد A_f رخ نمی‌دهد. بنابراین مجموعه $T \subseteq V(H)$ چنان وجود دارد که برای هر $f \in E(H)$، $۰ < |f \cap T| < ۲cLnk$. این به این معنی است که هر ابریال f حداقل یک راس آبی دارد و حداکثر $۲cLnk$ راس آن آبی است. برای k به اندازه کافی بزرگ $k < ۲cLnk$. لذا این رنگ‌آمیزی یک ۲-رنگ‌آمیزی مجاز برای ابرگراف H است که در شرایط قضیه صدق می‌کند.

$\square$

۱.۳.۲ ارتباط با عدد استقلال

رابطه‌ی بین عدد استقلال و عدد رنگی پویای گراف‌ها در [۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

لم ۴.۳.۲. ([۴]) فرض کنید G گرافی همبند و c یک $\chi(G)$- رنگ‌آمیزی از گراف G باشد. علاوه بر آن فرض کنید H زیرگرافی ناتهی از G باشد. آنگاه یک $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی f از G وجود دارد، به‌طوری‌که:

۱. اگر $v \in V(H)$ آنگاه $f(v) = c(v)$،

۲. برای هر راس $v \in V(G) \setminus V(H)$ یک مسیر $v_۰, v_۱, \ldots, v_m$ وجود دارد به‌طوری‌که $v_۰ = v$ و v_m در H قرار دارد و $f(v_{i+۱}) - f(v_i) = ۱(\mod \chi(G))$ برای $i = ۰, ۱, \ldots, m - ۱$.

این لم به رنگ‌آمیزی دوری تعمیم داده شده است [۶].

قضیه ۵.۳.۲. [۱] برای هر گراف G با $\chi(G) \geq ۶$، یک $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی از گراف G وجود دارد به‌طوری‌که مجموعه‌ی همه راس‌های بد در G مستقل‌اند.

در قضیه بعدی، این نتیجه را برای تمام گراف‌ها با $\chi(G) \geq ۴$ ثابت می‌کنیم، همچنین در قسمت دوم قضیه، کران بالای عدد رنگی پویای گراف G را بر حسب عدد رنگی گراف G و عدد استقلال توان دوم گراف $G^۲$ مشخص می‌کنیم. همچنین $l(G)$ و $l_M(G)$ را مجموعه مستقل و مجموعه مستقل ماکسیمال در نظر می‌گیریم.

قضیه ۶.۳.۲. [۲۱]

(۱) برای هر گراف مانند G با $\chi(G) \geq 4$، $\chi_2(G) \leq \chi(G) + \gamma(G)$،

(۲) اگر G گرافی k-منتظم با $\chi(G) \geq 4$ باشد، آنگاه $\chi_2(G) \leq \chi(G) + \alpha(G^2)$.

برهان. فرض کنید uv یالی از گراف G باشد. همچنین فرض کنید c یک $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی از آن باشد، به‌طوری‌که، $c(u) = 1$ و $c(v) = 3$. فرض کنید H زیرگراف القایی روی یال uv و f یک رنگ‌آمیزی از G بنابه لم ۴.۳.۲، باشد. طبق لم ۴.۳.۲، اگر $x \in V(H)$، آنگاه $f(x) = c(x)$. بنابراین $f(u) = 1$ و $f(v) = 3$. فرض S مجموعه‌ی همه‌ی راس‌های بد باشد. ادعا می‌کنیم S یک مجموعه مستقل در G است. بنابراین فرض (فرض محال) می‌کنیم این ادعا برقرار نباشد، ۴ مورد را در نظر می‌گیریم:

۱. $\{u, v\} \subseteq S$. چون u و v هر دو راس بد هستند و $uv \in E(G)$، بنابراین همسایه‌های این دو راس به‌طور مشابه رنگ می‌شوند، لذا تمام راس‌ها در $N(v)$ رنگ ۱ و تمام راس‌ها در $N(u)$ رنگ ۳ را در رنگ‌آمیزی f دریافت می‌کنند. بنابراین یک مسیر افزایشی بنابه لم ۴.۳.۲، به‌طوری‌که $f(v_{i+1}) - f(v_i) = 1(\mod \chi(G))$ برای $i = 0, 1, \ldots, m-1$ وجود ندارد.

۲. راس $x \neq v$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\{u, x\} \subseteq S$ و یال $ux \in E(G)$. چون $v \in N(u)$ و $u \in N(x)$، لذا تمام راس‌ها در $N(u)$ و $N(x)$ در رنگ‌آمیزی f به‌ترتیب رنگ ۳ و رنگ ۱ را دریافت می‌کنند. بنابراین یک مسیر افزایشی $v_0, v_1, \ldots, v_m$ در G به‌طوری‌که، $v_0 = x$، $v_m \in V(H)$ بنابه لم ۴.۳.۲، به‌طوری‌که $f(v_{i+1}) - f(v_i) = 1(\mod \chi(G))$ برای $i = 0, 1, \ldots, m-1$. وجود ندارد، زیرا تمام همسایه‌های x رنگ ۱ و راس x رنگ ۳ را دریافت می‌کند.

۳. راس $u \neq y$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\{v, y\} \subseteq S$ و $vy \in E(G)$. چون $u \in N(v)$ و $v \in N(y)$، لذا تمام راس‌ها در $N(v)$ و $N(y)$ در رنگ‌آمیزی f به‌ترتیب رنگ ۱ و ۳ را دریافت می‌کنند. بنابراین یک مسیر افزایشی $v_0, v_1, \ldots, v_m$ در G به‌طوری‌که، $v_0 = y$، $v_m \in V(H)$ بنابه لم ۴.۳.۲، به‌طوری‌که $f(v_{i+1}) - f(v_i) = 1(\mod \chi(G))$ برای $i = 0, 1, \ldots, m-1$ وجود ندارد، زیرا تمام همسایه‌های y رنگ ۳ و راس y رنگ ۱ را دریافت می‌کند.

۴. دو راس x و y در $S \setminus \{u, v\}$ وجود دارد، به‌طوری‌که $xy \in E(G)$. بنابه لم ۴.۳.۲، چون $f(v_{i+1}) - f(v_i) = 1(\mod \chi(G))$ برای $i = 0, 1, \ldots, m-1$. لذا باید حداقل دو راس $z \in N(x)$ و $z' \in N(y)$ موجود باشد به‌طوری‌که، $f(z) = f(x) + 1(\mod (\chi(G))$ و $f(z') = f(y) + 1(\mod (\chi(G))$ برای $i = 0, 1, \ldots, m-1$. از آنجایی‌که x و y هر دو راس بد هستند، لذا همسایه‌های آن‌ها به‌طور مشابه در رنگ‌آمیزی f رنگ می‌شوند. چون راس y مجاور راس x است، بنابراین تمام راس‌ها در $N(x)$ همرنگ $f(y)$ و تمام راس‌ها در $N(y)$ همرنگ $f(x)$ است. بنابراین $f(z) = f(y)(\mod (\chi(G))$ و
$f(z') = f(x)(\mod (\chi(G))$. لذا $\chi(G) = 2$ که با $\chi_2(G) \geq 4$ تناقض دارد.

بنابراین S(مجموعه همه راس‌های بد) یک مجموعه مستقل در G است. فرض D کوچکترین مجموعه احاطه‌گر برای گراف G باشد. هر راسی که در مجموعه S قرار داشته باشد در مجموعه D همسایه دارد،

چون D یک مجموعه احاطه‌گر است. بنابراین اگر رنگ راس‌های موجود در D را تغییر دهیم یک رنگ‌آمیزی پویا برای G حاصل می‌شود.
فرض $D_1 = S \cap D$ و $D_2 = D \setminus S$. تمام راس‌ها در D_2 را با استفاده از $|D_2|$ رنگ متمایز جدید دوباره رنگ می‌کنیم. برای هر راس $w \in D_1$، یک راس $x(w) \in N(w)$ را انتخاب و تمام این راس‌ها را در D'_1 قرار می‌دهیم. فرض کنید که $D'_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$. دوباره راس‌های D'_1 را با $|D'_1|$ رنگ متمایز جدید رنگ می‌کنیم. ثابت می‌کنیم این رنگ‌آمیزی جدید یک رنگ‌آمیزی پویا برای G است.
برای راس دلخواه v دو حالت را در نظر می‌گیریم. اگر راس v خارج از مجموعه S باشد، در رنگ‌آمیزی قبل حداقل دو رنگ متمایز در همسایگی‌اش وجود دارد، بنابراین راس‌هایی که خارج از مجموعه S قرار دارند جز راس‌های خوب می‌باشند، لذا بعد از رنگ‌آمیزی جدید تعداد رنگ‌های بیشتری نیز در همسایگی آن‌ها وجود دارد، در نتیجه این راس‌ها باز هم راس خوب هستند. از آنجایی‌که راس‌های بد مجموعه S در D_1 یا خارج از D_1 قرار دارند، بنابراین برای راس دلخواه v در مجموعه S دو حالت وجود دارد. اگر راس v خارج از D_1 باشد، حتما در مجموعه D همسایه دارد. از طرفی چون در رنگ‌آمیزی جدید تمام راس‌های موجود در مجموعه D با رنگ‌های متمایز جدید رنگ‌آمیزی شده‌اند، لذا در همسایگی این راس رنگ جدید اضافه می‌شود، بنابراین راس v دیگر راس بد نیست. اگر راس دلخواه v در مجموعه D_1 قرار داشته باشد، چون D مجموعه احاطه‌گر است، بنابراین در مجموعه D همسایه ندارند. لذا همسایه‌های آن خارج از D قرار دارند. از این‌رو راس v، راس خوب است. بنابراین حداکثر تعداد $|D| = |D_2| + |D_1|$ رنگ جدید استفاده شده است. به‌عبارت دیگر این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی پویا برای G با حداکثر $\chi(G) + |D|$ رنگ است.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، فرض کنید G گرافی k-منتظم با $\chi(G) \geq ۴$ باشد. رنگ‌آمیزی f و مجموعه مستقل S که شامل تمام راس‌های بد است، در قسمت قبل را در نظر بگیرید. $G^2[S]$ یعنی زیرگراف القایی از گراف G^2 روی راس‌های S، دارای مولفه‌های $G_1^2, G_2^2, \ldots, G_n^2$ است. در گراف G^2 دو راس مجاورند، اگر دو راس همسایه مشترک داشته باشند. وقتی دو راس بد با هم مجاور و همسایه مشترک داشته باشند، بنابراین تمام همسایه‌های این دو راس همرنگ هستند. به‌عبارت دیگر دو راس $x, y \in S$ در گراف G^2 مجاورند، اگر و فقط اگر $N_G(x) \cap N_G(y) \neq \emptyset$. زیرا S یک مجموعه مستقل و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$، تمام راس‌ها در G_i^2 راس بد می‌باشند، پس تمام راس‌ها در $N_i = \cup_{x \in V(G_i^2)} N_G(x)$ در رنگ‌آمیزی f به‌طور مشابه رنگ می‌شوند.
برای هر $۱ \leq i \leq n$، فرض کنید H_i ابرگرافی با مجموعه راس‌های N_i و مجموعه ابریال‌هایی که به‌صورت $E(H_i) \stackrel{\text{def}}{=} \{N(x) | x \in V(G_i^2)\}$ تعریف می‌شود. چون G گرافی k-منتظم و $\Delta \leq k$، بنابراین H_i ابرگرافی k-یکنواخت با $\Delta(H_i) \leq k$ است. از طرفی با توجه به $\chi(G) \geq ۴$ دو حالت وجود دارد، $k \geq ۴$ یا $G = K_4$.

۱. اگر $G = K_4$، آنگاه $\chi(K_4) = ۴$. چون عدد استقلال گراف‌های کامل یک است، بنابراین $\chi_2(G) = ۴ \leq \chi(G) + \alpha(G^2) = ۵$.

۲. اگر G گرافی کامل نباشد، بنابه قضیه بروکس ۳.۲.۲، $۴ \leq \chi(G) \leq \Delta(G) = k$. بنابراین طبق لم ۱۲.۲.۲، ابرگراف H_i، ۲-رنگ‌پذیر است. برای هر $۱ \leq i \leq n$ فرض (X_i^1, X_i^2) یک

۲-رنگ‌آمیزی از ابرگراف H_i باشد. f'' را یک رنگ‌آمیزی از گراف G معرفی می‌کنیم به‌طوری‌که، f'' و f دارای مقادیر یکسان روی $V(G) \setminus \cup X_i^1$ هستند و برای هر $1 \leq i \leq n$، f'' روی راس‌های X_i^1 مقدار ثابت $i+\chi(G)$ را دارد. بنابراین برای هر راس $x \in V(G)$ از درجه حداقل دو، حداقل دو رنگ متمایز در همسایگی آن وجود دارد. بنابراین f'' یک $\chi(G)+n$-رنگ‌آمیزی پویا از گراف G است، که در آن $n \leq \alpha(G^2)$ می‌باشد.

□

اثبات قسمت دوم قضیه ۶.۳.۲، به ۲-رنگ‌پذیری ابرگراف H_i نیاز دارد. اگر برخی از فرضیه‌ها این ویژگی را ثابت کنند، در این‌صورت باقی مانده اثبات هنوز هم کار می‌کند. بنابراین نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۷.۳.۲. اگر G یک گراف به‌طوری‌که $\chi(G) \geq 4$ و $e(\Delta(G)^2 - \Delta(G) + 2) \leq 2^{\delta(G)}$ در این‌صورت $\chi_2(G) \leq \chi(G) + \alpha(G^2)$.

برهان. بنابه اثبات قسمت دوم قضیه ۶.۳.۲، چون $\chi(G) \geq 4$، بنابراین برای هر گراف G، یک رنگ‌آمیزی وجود دارد، به‌طوری‌که مجموعه راس‌های بد مستقل‌اند، طبق این رنگ‌آمیزی ابرگراف H_i را با مجموعه راس‌های $N_i = \cup_{x\in V(G_i^2)} N_G(x)$ و مجموعه ابریال‌های $E(H_i) \stackrel{\text{def}}{=} \{N(x) | x \in V(G_i^2)\}$ تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. چون $e(\Delta(G)^2 - \Delta(G) + 1) \leq 2^{\delta(G)}$، لذا بنابه قضیه ۲.۲.۲، ابرگراف H_i، ۲-رنگ‌پذیر است. با اثباتی مشابه اثبات ارائه شده در قسمت دوم قضیه ۶.۳.۲، برهان تمام است. □

ملاحظه ۸.۳.۲. توجه داشته باشید در برهان قضیه ۶.۳.۲، نشان دادیم، برای هر گراف k-منتظم G با $\chi(G) \geq 4$ همواره $\chi_2(G) \leq \chi(G) + com(G^2[S])$ برقرار است. به‌طوری‌که $com(G^2[S])$ تعداد مولفه‌های همبند $G^2[S]$ و S مجموعه مستقل ارائه شده در اثبات قضیه ۲.۲.۲، است. بنابراین برای هر گراف G با $\chi(G) \geq 4$ و $e(\Delta(G)^2 - \Delta(G) + 1) \leq 2^{\delta(G)}$ (در گراف k-منتظم با $k \geq 4$)، بنابه قضیه ۲.۲.۲، $\chi_2(G) \leq \chi(G) + \max_{I\in l(G)} com(G^2[I])$.

قضیه ۹.۳.۲. [۳] اگر G گرافی قویا منتظم به‌جز C_5 و $K_{m,m}$ باشد، آنگاه $\chi_2(G) - \chi(G) \leq 1$.

ملاحظه ۱۰.۳.۲. توجه داشته باشید برای گراف G با قطر ۲، گراف G^2 گرافی کامل است. چون عدد استقلال گراف‌های کامل یک است، لذا $\alpha(G^2) = 1$. بنابراین قسمت دوم قضیه ۶.۳.۲، به خانواده‌ی بزرگی از گراف‌های منتظم، یعنی هر گراف قویا منتظم با قطر ۲ تعمیم داده می‌شود. اما با توجه به قسمت دوم قضیه ۶.۳.۲، اگر G گرافی k-منتظم با قطر ۲ و $\chi(G) \geq 4$ آنگاه $\chi_2(G) - \chi(G) \leq 1$. زیرا طبق قسمت دوم قضیه ۶.۳.۲، اگر G گرافی k-منتظم با $\chi(G) \geq 4$ آنگاه $\chi_2(G) \leq \chi(G)+\alpha(G^2)$. از طرفی برای هر گراف G با قطر ۲، گراف G^2 گرافی کامل است، چون عدد استقلال گراف‌های کامل یک است، بنابراین $\chi_2(G) - \chi(G) \leq 1$.

نتیجه ۱۱.۳.۲. اگر G گرافی با قطر ۲ به‌طوری‌که $\chi(G) \geq 4$ و $e(\Delta(G)^2 - \Delta(G) + 1) \leq 2^{\delta(G)}$ (در گراف k-منتظم با $k \geq 4$) آنگاه $\chi_2(G) - \chi(G) \leq 1$.

برهان. طبق نتیجه ۷.۳.۲، اگر $\chi(G) \geq ۴$ و $e(\Delta(G)^۲ - \Delta(G) + ۱) \leq ۲^{\delta(G)}$ آنگاه $\chi_۲(G) \leq \chi(G) + \alpha(G^۲)$. چون قطر گراف ۲ است، پس $G^۲$ گرافی کامل است، لذا $\alpha(G^۲) = ۱$.
بنابراین $\chi_۲(G) - \chi(G) \leq ۱$. □

ملاحظه ۱۲.۳.۲. توجه داشته باشید که در برهان قضیه ۶.۳.۲، فرض کردیم که $\chi(G) \geq ۴$، زیرا با استفاده از لم ۴.۳.۲، می‌خواستیم یک رنگ‌آمیزی مانند f را بدست آوریم به‌طوری‌که، تمام راس‌های بد مربوط به این رنگ‌آمیزی، مجموعه‌ای مستقل را در گراف G تشکیل دهند. در ابتدا ثابت کردیم اگر یک t-رنگ‌آمیزی f از G وجود داشته باشد، به‌طوری‌که مجموعه همه راس‌های بد (S) مربوط به رنگ‌آمیزی f مستقل باشند، آنگاه $\chi_۲(G) \leq t + \gamma(G)$ و اگر G گرافی k-منتظم با $k \geq ۴$، آنگاه $\chi_۲(G) \leq t + com(G^۲[S])$.

اکنون فرض کنید G یک گراف به‌طوری‌که، $e(\Delta(G)^۲ - \Delta(G) + ۱) \leq ۲^{\delta(G)}$ (در گراف منتظم با $k \geq ۴$) و I یک مجموعه مستقل ماکسیمال دلخواه در G باشد. یک t-رنگ‌آمیزی بهینه c از گراف G را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که I یک کلاس رنگ در این رنگ‌آمیزی باشد (t کوچکترین عدد ممکن است) چون I یک مجموعه مستقل ماکسیمال است، بنابراین هر راس $V(G) \setminus I$ همسایه‌ای در I دارد.
ابرگراف H را با مجموعه راس‌های $V(H) = I$ و مجموعه ابریال‌هایی که به‌صورت $E(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{N(v) \mid v \in V(G)$ و $N(v) \subseteq I\}$ تعریف می‌شود را در نظر بگیرید.
چون $e(\Delta(G)^۲ - \Delta(G) + ۱) \leq ۲^{\delta(G)}$ (در گراف k-منتظم با $k \geq ۴$) بنابراین ابرگراف H، ۲-رنگ‌پذیر است. فرض (X, Y) یک ۲-رنگ‌آمیزی از H باشد. تمام راس‌های Y را با $t + ۱$ رنگ جدید دوباره رنگ‌آمیزی می‌کنیم تا یک $t + ۱$-رنگ‌آمیزی جدید f از G حاصل شود. چون I بزرگترین مجموعه مستقل ماکسیمال است، لذا مجموعه راس‌های بد S مربوط به رنگ‌آمیزی f زیرمجموعه‌ی I می‌باشد. بنابراین S نیز مجموعه‌ای مستقل است. با اثباتی مشابه برهان ارائه شده در قسمت دوم قضیه۶.۳.۲، داریم: $\chi_۲(G) \leq t + ۱ + com(G^۲[S])$ که $t \leq \chi(G) + ۱$ است. بنابراین

$$\chi_۲(G) \leq t + ۱ + com(G^۲[S]) \leq \chi(G) + ۲ + max_{P \subseteq I} com(G^۲[P]).$$

فرض $lM(G)$ خانواده تمام مجموعه‌های مستقل ماکسیمال در G باشد. چون I یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال دلخواه در G بود، $\chi_۲(G) \leq \chi(G) + \min_{I \in lM(G)} \max_{P \subseteq I} com(G^۲[P]) + ۲$.

بنابه ملاحظه ۱۲.۳.۲، اگر یک $\chi(G)$-رنگ آمیزی c از G را در نظر بگیریم به‌طوری‌که، کلاس رنگ $v_۱$ (تمام راس‌ها با رنگ ۱)مجموعه‌ای مستقل ماکسیمال در $G(t = \chi(G))$ باشد، آنگاه $\chi_۲(G) \leq \chi(G) + \gamma(G) + ۱$.

نتیجه ۱۳.۳.۲. فرض G یک گراف به‌طوری‌که $e(\Delta(G)^۲ - \Delta(G) + ۱) \leq ۲^{\delta(G)}$(یک گراف k-منتظم با $k \geq ۴$) در این‌صورت $\chi_۲(G) \leq \chi(G) + \alpha(G^۲) + ۱$.

برهان. چون شرط $\chi(G) \geq ۴$ را نداریم باید یک $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی از گراف پیدا کنیم که مجموعه راس‌های بد، مجموعه‌ای مستقل را تشکیل دهند. یک رنگ‌آمیزی مانند f را در نظر می‌گیریم و کلاس رنگ ۱ را ماکسیمال می‌کنیم. این کلاس را I می‌نامیم، هر راس $V(G) \setminus I$ همسایه‌ای در I دارد، I

یک مجموعه مستقل ماکسیمال است. ابرگراف H را با مجموعه راس‌های $V(H) = I$ و مجموعه ابریال‌های $E(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{N(v)|v \in V(G), N(v) \subseteq I\}$ را در نظر می‌گیریم. بنابه قضیه ۲.۲.۲ و با توجه به رابطه $e(\Delta(G)^{۲} - \Delta(G) + ۱) \leq ۲^{\delta(G)}$ ابرگراف H، ۲-رنگ‌پذیر است.

□

۲.۳.۲ کران $\log k$

لم ۱۴.۳.۲. [۲۱] فرض کنید G یک گراف باشد، برای هر جایگشت $\sigma \in S_{V(G)}$ زیرگراف القایی روی راس‌های $I^{۲}_{\sigma}$ یک جنگل است.

برهان. برای اینکه $I^{۲}_{\sigma}$ جنگل باشد، بنابه تعریف جنگل باید فاقد دور باشد. فرض (فرض خلف): $C = x_۱x_۲ \dots x_nx_۱$ یک دور در گراف G باشد و همچنین $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\} \subseteq I^{۲}_{\sigma}$. بدون اینکه از کلیت کاسته شود فرض می‌کنیم در ترتیب σ، $x_۱$ قبل از $x_۲$ آمده است، بنابراین $n_{\sigma}(x_۲, N[x_۲]) \geq ۲$. از طرفی چون $x_۲ \in I^{۲}_{\sigma}$ لذا $n_{\sigma}(x_۲, N[x_۲]) = ۲$، این بدان معناست که $x_۲$ قبل از تمام راس‌های $N(x_۲) \setminus \{x_۱\}$ آمده است. در نهایت چون $x_۱ \in N[x_۲]$ قبل از $x_۲$ آمده و $x_۲$ در $I^{۲}_{\sigma}$ قرار دارد، پس $x_۳$ بعد از $x_۲$ درجایگشت σ آمده است، در نتیجه $x_۳ \in N(x_۲) \setminus \{x_۱\}$. بنابراین با ادامه دادن تا انتها $x_{n-۱}$ قبل از x_n آمده است. از طرفی چون $x_۱$ و $x_{n-۱}$ هر دو در ترتیب σ قبل از x_n آمده‌اند. لذا $n_{\sigma}(x_n, N[x_n]) \geq ۳$. چون x_n در ترتیب σ در مکان اول و دوم نیامده است، بنابراین $x_n \neq I^{۲}_{\sigma}$ که با فرض($x_۱, x_۲, \dots, x_n \in \sigma$) تناقض دارد. □

قضیه ۱۵.۳.۲. فرض کنید G گرافی k-منتظم به‌طوری‌که شامل مربع القایی $(C_۴)$ نمی‌باشد، در این‌صورت برای هر $k \geq ۳۵$، $\chi_۲(G) - \chi(G) \leq ۲\lceil ۴Lnk + ۱\rceil$

برهان. فرض کنید $U \subseteq V(G)$ شامل تمام راس‌هایی است که در مثلث قرار نمی‌گیرند(زیرا همسایه‌های هر راس که در مثلث قرار دارد در نظر بگیریم با هم مجاورند، بنابراین در هر رنگ‌آمیزی بنابه شرایط مجاورت به‌طور متمایز رنگ می‌شوند، لذا در هر رنگ‌آمیزی راس بد نداریم، بنابراین همه‌ی راس‌ها خوب هستند). چون G شامل $(C_۴)$ نمی‌باشد، لذا در G هیچ دو راسی همسایه مشترک ندارد (زیرا $C_۴$ ساخته می‌شود).

l-جایگشت $\sigma_۱, \sigma_۲, \dots, \sigma_l \in S_{V(G)}$ را به‌طور تصادفی (تکراری هم باشد)، یکنواخت و مستقل را انتخاب می‌کنیم. برای هر راس $u \in U$ دو پیشامد تعریف می‌کنیم:

- B_u پیشامدی که

$$\forall x \in N(u) \quad s.t \quad \forall i \in ۱ \leq i \leq l \quad n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) \geq ۲$$

به عبارت دیگر پیشامد B_u به این معناست که به‌ازای انتخاب هر $x \in N(u)$، x در بین همسایه‌های خود به‌جز u در ترتیب σ_i در مکان اول و دوم نیامده است. یعنی x در مکان دوم به بعد قرار دارد. به‌عبارت دیگر به جز u، یک همسایه از x وجود دارد که قبل از x در ترتیب σ_i، قرار دارد. بنابراین x حداقل در مکان سوم به بعد برای تمام σها آمده است.

- C_u پیشامدی که

$$\forall x \in N(u) \quad s.t \quad \exists i \in ۱ \leq i \leq l \quad , n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) \leq ۲$$

به‌عبارت دیگر x در بین همسایه‌های خود به‌جز u در یکی از σ_i حداکثر در مکان دوم قرار گیرد.

اگر $\bar{B_u}$ اتفاق بیافتد داریم:

$$\exists x \in N(u) \quad s.t \quad \exists i ۱ \leq i \leq l \quad , n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) < ۲$$

یا

$$n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) \leq ۱$$

حال اگر u را اضافه کنیم: $n_{\sigma_i}(x, N[x]) \leq ۲$. بنابراین طبق تعریف $I^۲_{\sigma_i}$، $x \in I^۲_{\sigma_i}$، پس $x \in N(u)$ و $x \in I^۲_{\sigma_i}$. بنابراین $N(u) \cap (\cup_{i=۱}^{l} I^۲_{\sigma_i}) \neq \emptyset$.

حال اگر پیشامد $\bar{C_u}$ رخ دهد:

$$\exists x \in N(u) \quad s.t \quad \forall i \in ۱ \leq i \leq l \quad , n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) > ۲$$

بنابراین: $n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) \geq ۳$ لذا $n_{\sigma_i}(x, N[x]) > ۳$

$$\Longrightarrow \forall i \in ۱ \leq i \leq l \quad x \notin I^۲_{\sigma_i} \longrightarrow x \notin \cup_{i=۱}^{l} I^۲_{\sigma_i} \longrightarrow N(u) \nsubseteq (\cup_{i=۱}^{l} I^۲_{\sigma_i})$$

زیرا $x \in N(u)$ ولی $x \notin (\cup_{i=۱}^{l} I^۲_{\sigma_i})$.

حال فرض کنید $A_u = B_u \cup C_u$. چون مربع القایی ($c_۴$) نداریم و راس‌ها در مثلث قرار ندارند، بنابراین هیچ‌یک از راس‌ها همسایه مشترک ندارند.

لذا $\forall x, y \in N(u)$ ، $(N(x) \setminus \{u\}) \cap (N(y) \setminus \{u\}) = \emptyset$. بنابراین پیشامد مرتبط با هر راس از دیگر راس‌ها مستقل است. چون پیشامدهای مستقل در هم ضرب می‌شوند، لذا پیشامد یک راس را بدست می‌آوریم تا پیشامد کل راس‌ها محاسبه شود. بنابر تعریف B_u داریم:

$$B_u : \forall x \in N(u) \quad s.t \quad \forall i \in \{۱, ۲, \dots, l\} \quad , n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) \geq ۲$$

برای یک راس اگر $\bar{B_u}$ رخ دهد داریم:

$$B_u : \exists x \in N(u) \quad s.t \quad \exists i \in \{۱, ۲, \dots, l\} \quad , n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) \leq ۱$$

$$\Longrightarrow \qquad n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) = ۱$$

پس x در مکان اول قرار دارد. چون هر راس $x \in N(u)$، k-همسایه دارد بنابراین احتمال اینکه راس x در یک جایگشتی در بین k-همسایه در مکان اول قرار بگیرد $\frac{۱}{k}$ است، به‌عبارت دیگر x با احتمال $\frac{۱}{k}$ در $\bar{B_u}$ رخ می‌دهد. حال اگر این احتمال رخ ندهد، یعنی x با احتمال $(۱ - \frac{۱}{k})$ در B_u رخ می‌دهد. برای k -راس مانند x از u این احتمال $(۱ - \frac{۱}{k})^k$ است. حال این احتمال برای l جایگشت، $(۱ - \frac{۱}{k})^{kl}$ است. بنابراین $Pr(B_u) = (۱ - \frac{۱}{k})^{kl}$.

حال احتمال C_u:

$$C_u : \forall x \in N(u) \quad s.t \quad \exists i \in \{۱, ۲, \dots, l\} \quad , n_{\sigma_i}(x, N[x] \setminus \{u\}) \leq ۲$$

ابتدا احتمال $\bar{C_u}$ را حساب می‌کنیم: برای x ثابت:

$$Pr(\exists i \in \{۱,۲,\dots,l\} \quad s.t \quad n_{\sigma_i}(x,N[x]\backslash\{u\} \leq ۲) = ۱-Pr(\forall i \quad n_{\sigma_i}(x,N[x]\backslash\{u\} \geq ۳)$$

$$= ۱ - \Pi_{i=۱}^{l}(n_{\sigma_i}(x,N[x]\setminus\{u\} \geq ۳) = ۱ - \Pi_{i=۱}^{l}(\frac{k-۲}{k})$$

برای x ثابت داریم:

$$= ۱ - (۱ - \frac{۲}{k})^{l}$$

برای هر x داریم:

$$= ۱ - (۱ - \frac{۲}{k})^{l})^{k}$$

در نتیجه

$$Pr(A_u) \leq Pr(B_u) + Pr(C_u) = (۱ - \frac{۱}{k})^{kl} + (۱ - (۱ - \frac{۲}{k})^{l})^{k}$$

فرض کنید که:

۱. $l = \lceil ۴lnk + ۱\rceil$

۲. $۱ - x \leq e^{-x}$

۳. $e^{-۱} \leq (۱ - \frac{۱}{x})^{x-۱}$

۴. $(۱ - \frac{۱}{k})^{k} \leq e^{-۱}$

بنابه رابطه (۴) داریم: $(۱ - \frac{۱}{k})^{kl} \leq e^{-l}$. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که $۱ - (۱ - \frac{۲}{k})^{l} \leq ۱ - e^{\frac{-۲l}{k-۲}}$، داریم:

$$(۱ - \frac{۲}{k})^{l} \geq e^{\frac{-۲l}{k-۲}}$$

بنابه رابطه (۳) داریم:

$$[(۱ - \frac{۱}{\frac{k}{۲}})^{\frac{k}{۲}-۱}]^{\frac{l}{\frac{k}{۲}-۱}} \geq e^{\frac{-l}{\frac{k}{۲}-۱}}$$

چون

$$(۱ - \frac{۱}{\frac{k}{۲}})^{\frac{k}{۲}-۱} \geq e^{-۱}$$

بنابراین با گرفتن مخرج مشترک داریم :

$$(۱ - \frac{۲}{k})^{l} \geq e^{\frac{-۲l}{k-۲}}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow Pr(A_u) \leq Pr(B_u) + Pr(C_u)\\
&\leq (۱ - \frac{۱}{k})^{kl} + (۱ - (۱ - \frac{۲}{k})^{l})^{k}\\
&\leq e^{-l} + (۱ - \frac{-۲l}{e^{k-۲}})^{k}\\
&\leq e^{-l} + e^{-ke^{\frac{-۲l}{k-۲}}}\\
&l = \lceil ۴Lnk + ۱ \rceil\\
&= e^{-\lceil ۴Lnk+۱ \rceil} + e^{-ke^{\frac{-۲l}{k-۲}}}\\
&\leq e^{-(۴Lnk+۱)} + e^{-ke^{\frac{-۲(۴Lnk+۲)}{k-۲}}}\\
&= \frac{۱}{ek^{۴}} + e^{-k(e^{(-۸Lnk-۴)})^{\frac{۱}{k-۲}}}\\
&\leq \frac{۱}{ek^{۴}} + e^{-k}(\frac{۱}{e^{۴}k^{۸}})^{\frac{۱}{k-۲}}\\
&\leq \frac{۱}{ek^{۴}} + e^{\frac{-۱}{۲}k}
\end{aligned}$$

اکنون ادعا می‌کنیم پیشامد A_u از تمام پیشامدهای A_v برای $d(u,v) > ۴$ به‌طور همزمان مستقل است. ابتدا توجه داشته باشید، اگر پیشامد A_u برای یک جایگشت انتخابی $(\sigma_۱, \sigma_۲, \ldots, \sigma_l)$ رخ دهد، آنگاه پیشامد A_u اطلاعاتی در مورد ترتیب راس‌ها در $N_۲(u) = \cup_{v\in N(u)} N[v]$ در هر جایگشت $\sigma_i|_{N_۲(u)}$ را می‌دهد.

به‌عبارت دیگر پیشامد A_u از پیشامد A_v مستقل است و با هم هیچ اشتراکی ندارند. بنابراین $d(u,v) \geq ۵$ یا $d(u,v) > ۴$.

فرض $S = \{v|d(u,v) > ۴\}$ و برای $F \subseteq S$، پیشامد $A = \cap_{x\in F} A_x$ رخ دهد. نشان می‌دهیم $Pr(A_u|A) = Pr(A_u)$، به‌عبارت دیگر همه راس‌هایی که در S هستند نسبت به A_u مستقل می‌باشند. فرض $T = \cup_{x\in F} N_۲(x)$، چون $S = \{v|d(u,v) > ۴\}$ بنابراین $T \cap N_۲(u) = \emptyset$. حال فرض کنید پیشامد $A = \cap_{x\in F} A_x$ رخ داده باشد، بنابراین یک سری اطلاعات در ترتیب کلی از $\sigma_i|_T$ داریم. چون $T \cap N_۲(u) = \emptyset$، $\sigma_i|_{N_۲(u)}$ می‌تواند هر ترتیب کلی از $S_{N_۲(u)}$با احتمال مساوی باشد. هر راسی که فاصله آن از u، یعنی $d(u,v) \geq ۵$ باشد مستقل است و راس‌هایی با فاصله $d(u,v) \leq ۴$ مستقل نمی‌باشد. بنابراین تعداد راس‌هایی با فاصله یک (Δ) و تعداد راس‌هایی با فاصله دو $\Delta(\Delta-۱)$ و تعداد راس‌هایی با فاصله سه $\Delta(\Delta-۱)^۲$ و تعداد راس‌هایی با فاصله چهار $\Delta(\Delta-۱)^۳$ مستقل نمی‌باشند. اگر $(\Delta = k)$:

$$\begin{aligned}
&\Delta + (\Delta-۱)\Delta + (\Delta-۱)^۲\Delta + (\Delta-۱)^۳\Delta\\
&= k + (k-۱)k + (k-۱)^۲k + (k-۱)^۳k = k^۴ - ۲k^۳ + ۲k^۲
\end{aligned}$$

پس پیشامد A_u از تمام پیشامدها مستقل است به‌جز حداکثر $k^۴ - ۲k^۳ + ۲k^۲$-از آن‌ها. بنابه لم موضعی لواژ ۲.۲، اگر $M = e(k^۴ - ۲k^۳ + ۲k^۲ + ۱)((۱-\frac{۱}{k})^{kl} + (۱-(۱-\frac{۲}{k})^l)^k) \leq ۱$

آنگاه با احتمال مثبت هیچ‌کدام از پیشامدهای A_u رخ نمی‌دهد. برای $k \geq ۵۵$ داریم:

$$\begin{aligned} M &\leq e(k^۴ - ۲k^۳ + ۲k^۲ + ۱) \times (\frac{۱}{ek^۴} + e^{-\frac{۱}{۲}k}) \\ &= (۱ - \frac{۲}{k} + \frac{۲}{k^۲} + \frac{۱}{k^۴}) + (k^۴ - ۲k^۳ + ۲k^۲ + ۱)e^{\frac{-k}{۲}+۱} \\ &\leq (۱ - \frac{۱}{k}) + k^۴ e^{\frac{-k+۲}{۲}} \\ &\leq ۱ \end{aligned}$$

همچنین برای $l = \lceil ۴Lnk + ۱ \rceil$ و $۳۳ \leq k \leq ۵۵$:

$$e(k^۴ - ۲k^۳ + ۲k^۲ + ۱)((۱ - \frac{۱}{k})^{kl} + (۱ - (۱ - \frac{۲}{k})^l)^k) \leq ۱$$

به‌عبارت دیگر طبق لم موضعی لواژ ۲.۲، برای $l = \lceil ۴Lnk + ۱ \rceil$ و$k \geq ۳۳$ چون پیشامدهای A_u مثبت است، بنابراین جایگشت‌های $\sigma_۱, \sigma_۲, \ldots, \sigma_l$ در این پیشامد وجود دارند به‌طوری‌که، پیشامد A_u برای هر $u \in U$ رخ نمی‌دهد. به‌عبارت دیگر $\cap_{u \in V} \bar{A}_u \neq \emptyset$.

پس وقتی پیشامد A_uرخ ندهد، پیشامدهای B_u و C_u هم رخ نمی‌دهد، بنابراین نتیجه می‌شود پیشامد $\bar{A}_u = \bar{B}_u \cap \bar{C}_u$رخ می‌دهد.

در این‌صورت $N(u) \cap (\cup_{۱ \leq i \leq l} I^۲_{\sigma_i}) \neq \emptyset$ و$N(u) \nsubseteq (\cup_{۱ \leq i \leq l} I^۲_{\sigma_i})$. اگر $T = \cup_{۱ \leq i \leq l} I^۲_{\sigma_i}$، آنگاه عدد رنگی زیرگراف القایی روی T، $G[T]$ طبق لم ۷.۲.۲، حداکثر $۲l$ خواهد بود، لذا $\chi(G[T]) \leq ۲l$. حال فرض کنید c یک $\chi(G[T])$-رنگ آمیزی از زیرگراف القایی $G[T]$ با رنگ‌های $\{۱, ۲, \ldots, ۲l\}$ باشد. اگر راس‌های $V(G) \setminus T$ را با $\chi(G)$-رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم. پس کل گراف را با $\chi(G) + ۲l$-رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. حال یک $\chi(G) + ۲l$-رنگ‌آمیزی f از G را در نظر بگیرید که محدودیت f به T مشابه c و $f(V(G) \setminus T) \subseteq \{۲l + ۱, ۲l + ۲, \ldots, ۲l + \chi(G)\}$. برای هر راس دلخواه $u \in V(G)$ می‌خواهیم ثابت کنیم این راس، راس بد نیست، دو حالت وجود دارد:

۱. راس u در مثلث قرار دارد، بنابراین $u \notin U$. چون پیشامد A_uرخ نداده، بنابراین $N(u) \cap (\cup_{۱ \leq i \leq l} I^۲_{\sigma_i}) \neq \emptyset$، (حتما u یک راس در مجموعه T دارد) و $N(u) \nsubseteq (\cup_{۱ \leq i \leq l} I^۲_{\sigma_i})$. به‌عبارت دیگر u در T و $V(G) \setminus T$ همسایه دارد، در این‌صورت چون f یک رنگ‌آمیزی مجاز است و راس‌های $N(u)$حداقل دو رنگ متمایز دریافت می‌کنند، بنابراین راس بد وجود ندارد.

۲. راس u در مثلث قرار ندارد، بنابراین $u \in U$. طبق انتخاب T، u در T و هم در $V(G) \setminus T$ همسایه دارد. چون رنگ راس‌های مجموعه T و $V(G) \setminus T$ با هم متمایز است، بنابراین $f(T) \cap f(V(G) \setminus T) = \emptyset$. به‌عبارت دیگر در همسایگی هر راس $u \in U$، از درجه حداقل دو، حداقل دو رنگ متفاوت وجود دارد. بنابراین f یک رنگ‌آمیزی پویا با حداکثر $\chi(G) + ۲l$-رنگ است.

□

قضیه ۱۶.۳.۲. [۱۱] اگر $\chi(G) > n$ آنگاه $G \times K_n$ یکتا n-رنگ‌پذیر است. یعنی عدد رنگی آن n است و فقط یک رنگ‌آمیزی یکتا در هر رنگ‌آمیزی برای آن وجود دارد.

حدس ۱۷.۳.۲. [۱] برای هر گراف منتظم G با $\chi(G) \geq ۴$، عدد رنگی و عدد رنگی پویا با هم است.

در این‌جا با آوردن مثالی حدس ارائه شده در ۱۷.۳.۲، را رد می‌کنیم.

گزاره ۱۸.۳.۲. برای هر عدد صحیح $n > ۱$، گراف‌های منتظمی با عدد رنگی n وجود دارند، به‌طوری‌که عدد رنگی پویای آن‌ها بیشتر از n است.

برهان. فرض کنید $G_۱$ گرافی d-منتظم با $\chi(G_۱) > n$ و $m = |V(G_۱)|$ قرار دهید. $G_۲ = G_۱ \square C_{(n-۱)(d+۲)+۱}$ و $G' = G_۲ \times K_n$، به‌طوری‌که $G_۲$ گرافی $(d+۲)$-منتظم است. چون گراف K_n، $(n-۱)$-منتظم است، بنابراین G' گرافی یکتا n-رنگ‌پذیر و $(n-۱)(d+۲)$-منتظم می‌باشد. یک n-رنگ‌آمیزی $(V_۱, V_۲, \dots, V_n)$ برای G' را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که برای $۱ \leq i \leq n$، $V_i = \{(g,i) | g \in V(G_۲)\}$ است. برای رنگ‌آمیزی گراف G' یا به‌عبارت دیگر افراز راس‌های G' به مجموعه‌های مستقل، که این مجموعه‌ها n-تا هستند، فقط می‌توان یک n-رنگ‌آمیزی ارائه داد. زیرا بنابه قضیه ۱۶.۳.۲، گراف G' یکتا n-رنگ پذیر است. بنابراین با وجود یک رنگ‌آمیزی از آن به دیگر رنگ‌آمیزی‌ها دسترسی داریم، از این‌رو در دیگر رنگ‌آمیزی‌ها فقط جای کلاس‌های رنگ با هم عوض می‌شود. مانند رنگ‌آمیزی مثلث یا گراف کامل. از طرفی چون V_iها با هم مجاور نیستند، بنابراین هر V_i مجموعه‌ای مستقل است.

در این‌صورت $|V_i| = |V(G')| = m((n-۱)(d+۲)+۱)$ می‌باشد که به $(n-۱)(d+۲)+۱$ قابل تقسیم است. حال برای $۱ \leq i \leq n$ مجموعه $(S^i_۱, S^i_۲, \dots, S^i_m)$ که افرازی از V_i است، به‌طوری‌که $|S^i_j| = (n-۱)(d+۲)+۱$ را در نظر بگیرید، برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$ راس جدید s_{ij} را به تمام راس‌ها در S^i_j وصل کنید تا گراف G ساخته شود. گراف G' گرافی $(n-۱)(d+۲)$-منتظم است. چون راس جدید s_{ij} به تمام راس‌های S^i_j وصل می‌شود، لذا درجه این راس‌ها یکی بیشتر می‌شود، از طرفی هر s_{ij} به یک S^j_i وصل می‌شود، لذا $deg(s_{ij}) = |S^j_i| = (d+۲)(n-۱)+۱$. بنابراین درجه راس‌های داخل (S^j_i) و خارج (s_{ij}) در G، $(d+۲)(n-۱)+۱$ است. پس G گرافی $(d+۲)(n-۱)+۱$-منتظم می‌باشد.

چون گراف G گراف G' را شامل می‌شود، بنابراین $\chi(G) \geq n$. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که $\chi(G) = n$. کافی است یک n-رنگ‌آمیزی برای G' ارائه کنیم. راس‌های داخل G'، V_iها مجموعه‌هایی مستقل هستند، بنابراین یک n-رنگ‌آمیزی برای آن‌ها وجود دارد. برای راس‌های خارج G' یعنی s_{ij} چون همه همسایه‌هایشان رنگ j دارند پس باید رنگ آن‌ها مخالف j باشد. طبق فرض قضیه $n > ۱$، بنابراین راس‌های خارج G' را هم می‌توان با n-رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، لذا $\chi(G) = n$. از طرفی می‌خواهیم ثابت کنیم $\chi_۲(G) > n$. (برهان خلف) فرض کنید $\chi_۲(G) = n$، همچنین فرض کنید c یک n-رنگ‌آمیزی پویا برای G باشد. حال اگر راس‌های اضافه شده (sij) را حذف کنیم یک n-رنگ‌آمیزی برای G' به‌وجود می‌آید. چون G' یکتا n-رنگ‌پذیر است، بنابراین رنگ‌آمیزی c، $V(G)$ را به $(V_۱, V_۲, \dots, V_n)$ مجموعه مستقل افراز می‌کند. به‌عبارت دیگر تمام راس‌ها در $V_۱$ در رنگ‌آمیزی c رنگ‌های مشابه دارند و تمام همسایه‌های $S^۱_۱$ در مجموعه $V_۱$ قرار دارند. این بدان معناست که c یک رنگ‌آمیزی پویا نیست. □

حدس ۱۹.۳.۲. برای هر گراف منتظم G، $\chi_2(G) - \chi(G) \le \lceil \frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \rceil + 1$ برقرار است.

اکنون با آوردن مثالی حدس ارائه شده در ۱۹.۳.۲، را رد می‌کنیم.
فرض کنید G_1 گرافی با $\chi(G_1) \ge 3$ و $|V(G_1)| = n$، به‌طوری‌که $n > 3\Delta(G_1) + 5$، یا به‌عبارت دیگر $\Delta(G_1) < \frac{n-5}{3}$. برای هر مجموعه دو عضوی $\{u, v\} \subseteq V(G_1)$ راس جدید X_{uv} را به راس‌های u و v وصل کنید. فرض کنید با این تغییر گراف G از گراف G_1 ساخته شود. در هر رنگ‌آمیزی پویا از G، هیچ دو راسی از G_1 نمی‌تواند همرنگ باشد، زیرا هر دو راس از G_1 همسایه یک راس هستند. بنابراین حداقل $n = |V(G_1)|$ رنگ نیاز داریم. در نتیجه $\chi_2(G) \ge n$. از طرفی
$\Delta(G) = \Delta(G_1) + (n-1) = \Delta(G_1) + n - 1$ و $\delta(G) = 2$. از این‌رو $\chi(G) = \chi(G_1)$، زیرا راس‌های جدیدی که اضافه شده‌اند هر کدام دو همسایه دارد. چون این همسایه‌ها مستقل هستند، بنابراین همرنگ می‌باشند، در نتیجه اگر حدس صحیح باشد:

$$\begin{aligned}\chi_2(G) - \chi(G) &\le \lceil \frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \rceil + 1 \\ &\le \lceil \frac{\Delta(G_1) + n - 1}{2} \rceil + 1\end{aligned}$$

از طرفی $\chi_2(G) - \chi(G) \ge n - \chi(G) = n - \chi(G_1)$. با توجه به قضیه بروکس ۳.۲.۲، $\chi(G_1) \le \Delta(G_1) + 1$ و فرض $\Delta(G_1) < \frac{n-5}{3}$، $\chi_2(G) - \chi(G) > n - \Delta(G_1) - 1$ که تناقض است.

فصل ۳

رنگ‌آمیزی پویای انتخابی گراف‌ها

۱.۳ مقدمه

ایده‌ی مربوط به تخصیص یک لیست از رنگ‌ها به راس‌ها گراف G و انتخاب رنگی از میان هر لیست برای هر راس، به‌طوری‌که برای گراف G، یک رنگ‌آمیزی داشته باشیم، اولین بار در ۱۹۷۶ توسط ویزینگ [۱] و سپس مستقلا در ۱۹۷۹ توسط اردیش، [۲] روبین [۳] و تیلور [۴] مطرح شد.
دو نوع رنگ‌آمیزی لیستی، راسی و یالی در این فصل مطرح شده است.
گراف G را در نظر بگیرید، برای هر راس $v \in V(G)$، $L(v)$ را لیستی از رنگ‌های موجود برای راس v تعریف کنید. رنگ‌آمیزی لیستی یک رنگ‌آمیزی انتخابی است که به هر راس مانند v یک رنگ دلخواه از لیست رنگ‌های آن راس ($L(v)$) متناظر می‌کند.
کوچکترین عدد طبیعی k، به‌طوری‌که برای هر k-لیست‌دهی به راس‌های G بتوان G را به‌طور لیستی رنگ‌آمیزی مجاز کرد، عدد رنگی انتخابی (عدد رنگی لیستی) گراف G گویند و آن‌را با $ch(G)$ نمایش می‌دهند.
کوچکترین عدد طبیعی k به‌طوری‌که، برای هر k-لیست‌دهی به راس‌های گراف G، بتوان G را به‌طور پویا رنگ‌آمیزی کرد، عدد رنگی پویای انتخابی (عدد رنگی پویای لیستی) گراف G گویند و آن‌را با $ch_۲(G)$ نمایش می‌دهند.
این فصل از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول ابتدا به‌ازای هر عدد طبیعی n، $ch_۲(C_n)$ را مشخص می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم، اگر G گرافی که مولفه یکریخت با $C_۵$ ندارد و $\Delta(G) \geq ۳$ آنگاه $ch_۲(G) \leq \Delta(G) + ۱$.
در بخش دوم همین فصل، حدس اکبری و همکاران [۲] مبنی بر این‌که برای هر گراف G، $ch_۲(G) = \max(ch(G), \chi_۲(G))$، ابتدا با دادن یک مثال از گراف دوبخشی مسطح کوچک G با

[۱] Vizing
[۲] Erdos
[۳] Rubin
[۴] Tylor

$ch(G) = \chi_۲(G) = ۳$ و $ch_۲(G) = ۴$ سپس با ساختن گراف دوبخشی G_k به‌ازای $k \geq ۵$ به‌طوری‌که $ch(G_k) = \chi_۲(G_k) = ۳$ و $ch_۲(G) \geq k$ را رد می‌کنیم.

۲.۳ محاسبه عدد رنگی پویای انتخابی

قضیه ۱.۲.۳. [۱۵، ۱۷] برای $n \geq ۳$:

$$\chi_۲(C_n) = \begin{cases} ۳ & n \equiv ۰ \pmod{۳} \\ ۴ & n \not\equiv ۰ \pmod{۳}, n \neq ۵ \\ ۵ & n = ۵ \end{cases}$$

قضیه ۲.۲.۳. [۱۵، ۱۷] فرض کنید P_n مسیری از مرتبه n باشد. برای هر $n \geq ۳$، $\chi_۲(P_n) = ۳$.

قضیه ۳.۲.۳. [۱۵] اگر G گرافی همبند با $\Delta(G) \leq ۳$، آنگاه $\chi_۲(G) \leq ۴$، به‌جز $G = C_۵$. زیرا $\chi_۲(C_۵) = ۵$. همچنین اگر $\Delta(G) \geq ۴$ آنگاه $\chi_۲(G) \leq \Delta(G) + ۱$.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر G گرافی همبند با $\Delta(G) \leq ۳$، آنگاه $ch_۲(G) \leq ۴$، به‌جز $G = C_۵$. زیرا $ch_۲(C_۵) = ۵$. همچنین اگر $\Delta(G) \geq ۴$، آنگاه $ch_۲(G) \leq \Delta(G) + ۱$.

قضیه ۴.۲.۳. اگر $n \geq ۳$ عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$ch_۲(C_n) = \begin{cases} ۳ & n \equiv ۰ \pmod{۳} \\ ۴ & n \not\equiv ۰ \pmod{۳}, n \neq ۵ \\ ۵ & n = ۵ \end{cases}$$

برهان. فرض کنید p عددی طبیعی باشد. در [۱۸] ثابت شده، اگر $G = C_n^p$ آنگاه $ch(G) = \chi(G)$، که C_n^p گرافی با مجموعه راس‌های $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ به‌طوری‌که، دو راس v_i و v_j مجاورند، اگر و فقط اگر $j \in \{i-p, \ldots, i-۱, i+۱, \ldots, i+p\} \pmod{n}$. بنابراین $ch(C_n^۲) = \chi(C_n^۲)$. برای هر $i = ۱, \ldots, n$، هر دو راس v_i و $v_{i+۲}$ در $C_n^۲$ مجاورند. بنابراین در هر رنگ‌آمیزی مجاز c از $C_n^۲$، $c(v_i) \neq c(v_{i+۲})$.

پس در همسایگی هر راس با درجه حداقل دو در C_n حداقل دو رنگ متمایز وجود دارد، از این‌رو هر رنگ‌آمیزی مجاز از $C_n^۲$ یک رنگ‌آمیزی پویا از C_n است، بنابراین $\chi(C_n^۲) = \chi_۲(C_n)$ و $ch(C_n^۲) = \chi_۲(C_n)$. ازطرفی چون $ch(C_n^۲) = \chi(C_n^۲)$. لذا $ch_۲(C_n) = \chi_۲(C_n)$. در نتیجه بنابه قضیه ۱.۲.۳، اثبات تمام است. □

بدیهی است که هر رنگ‌آمیزی پویای انتخابی گراف G یک رنگ‌آمیزی انتخابی و پویا از G است. به‌عبارت دیگر $ch_۲(G) \geq ch(G)$ و $ch_۲(G) \geq \chi_۲(G)$. لذا $ch_۲(G) \geq \max(ch(G), \chi_۲(G))$. بنابه قضیه ۱.۲.۳ و قضیه ۴.۲.۳، $ch_۲(C_n) = \chi_۲(C_n)$. همچنین برای گراف‌های کامل ($n \geq ۳$)، $ch_۲(G) = \chi_۲(G) = n$.

برای درخت $\chi_2(T)=3$. زیرا با سه رنگ می‌توان آن‌را رنگ‌آمیزی پویا کرد. فرض کنید(استقرا)، یک درخت داریم که یک راس v از درجه یک آن‌را حذف کرده‌ایم آیا راس‌های $T-v$ را می‌توان رنگ‌آمیزی پویا کرد؟ راس v' در گراف $T-v$ اگر بیشتر از یک همسایه داشته باشد آنگاه همسایه‌هایش رنگ‌های متمایزی دریافت کردند پس پویا هستند. اگر یک همسایه داشته باشد آنگاه رنگی متمایز از v' را به آن نسبت می‌دهیم، لذا $ch_2(T)\geq \max\{3,ch(G)\}$ در نتیجه $ch_2(T)\geq 3$. چون هر رنگ‌آمیزی پویای انتخابی یک رنگ‌آمیزی پویا است، در نتیجه، $3\geq 3 \longrightarrow ch_2(T)\geq \chi_2(T)$. حال می‌خواهیم ثابت کنیم $ch_2(T)=\chi_2(T)=3$.

فرض کنید(استقرا)، یک لیست سه عنصری را به راسی از درجه یک نسبت داده‌ایم. بنابراین برای راس v از درجه یک، $L(v)=3$. اگر این راس را حذف کنیم راس‌های $T-v$ را می‌توان رنگ‌آمیزی پویا کرد. ابتدا راس‌های با درجه یک را در نظر می‌گیریم این راس‌ها در رنگ‌آمیزی پویا محاسبه نمی‌شوند، چون درجه آن‌ها باید حداقل ۲ باشد. حال همسایه راس از درجه یک را در نظر می‌گیریم، اگر این راس بیشتر از یک همسایه داشته باشد چون رنگ‌آمیزی، رنگ‌آمیزی پویا است، پس دو رنگ متمایز در همسایگی آن وجود دارد. در نتیجه برای رنگ‌آمیزی راس v رنگی را متمایز با دو رنگ قبلی انتخاب می‌کنیم، بنابراین $ch_2(T)=3$.

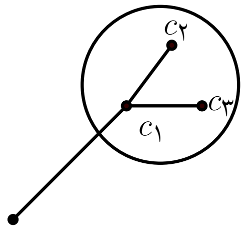
حدس ۳.۲.۵. اگر G یک گراف باشد، آنگاه $ch_2(G)=\max(ch(G),\chi_2(G))$.

قضیه ۳.۲.۶. [۲۱] فرض کنید ϵ یک ثابت مثبت است. اگر G گرافی k-منتظم باشد، آنگاه برای k به دلخواه بزرگ، $\chi_2(G)\leq ch_2(G)\leq \lceil (1+\epsilon)ch(G)\rceil$.

برهان. فرض کنید G گرافی کامل نیست و $ch(G)=l$. یک L-لیست‌دهی از گراف G را طوری در نظر بگیرید که برای هر راس $v\in V(G)$، $|L(v)|=m$، مقدار m در ادامه اثبات مشخص خواهد شد. برای هر راس از گراف G، $L'(v)\subseteq L(v)$ را به‌طور تصادفی و یکنواخت انتخاب می‌کنیم، به‌طوری‌که $|L'(v)|=l$.

حال پیشامد $B_v=\cap_{u\in N(v)}L'(u)\neq\emptyset$ را به‌عنوان پیشامد بد در نظر می‌گیریم، در این‌صورت: $Pr(B_v)\leq m(\frac{\binom{m-1}{l-1}}{\binom{m}{l}})^k=m(\frac{1}{m})^k$. می‌توان دید پیشامد B_v از تمام پیشامدهای B_u به‌طور همزمان مستقل است به‌جز حداکثر $k(k-1)$- از آن‌ها. بنابه لم موضعی لواژ ۲.۲، اگر m به اندازه کافی بزرگ باشد، به‌طوری‌که $ek^2m(\frac{1}{m})^k\leq 1$، آنگاه یک لیست‌دهی L' وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر راس $v\in V(G)$، $L'(v)\subseteq L(v), |L'(v)|=l, \cap_{u\in N(v)}L'(u)=\emptyset$. از طرفی $ek^2m(\frac{1}{m})^k\leq 1$ اگر و فقط اگر $l(elk^2)^{\frac{1}{k-1}}\leq m$. توجه داشته باشید که $l\leq k-1$. بنابراین $l(elk^2)^{\frac{1}{k-1}} \longrightarrow 1$. لذا آستانه $M(\epsilon)$ وجود دارد، به‌طوری‌که اگر $k\geq M(\epsilon)$، آنگاه $l(elk^2)^{\frac{1}{k-1}}<1+\epsilon$. چون $|L'(v)|=l$ و $ch(G)=l$، لذا گراف G را می‌توان براساس $|L'(v)|=l$ رنگ‌آمیزی مجاز کرد. از طرفی چون $\cap_{u\in N(v)}L'(u)=\emptyset$، لذا این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی پویای انتخابی است، بنابراین $ch_2(G)\leq m$. □

قضیه ۳.۲.۷. [۲] فرض کنید G گرافی باشد که مولفه C_5 ندارد و $\Delta(G)\leq 3$ است، در این‌صورت $ch_2(G)\leq 4$.



شکل ۱.۳: $G - v \neq C_۵$

برهان. برهان خلف: فرض کنید قضیه نادرست و (G, L) مثال نقض باشد. لذا L لیستی چهار عنصری است که به هر راس از گراف G واگذار می‌شود، به‌طوری‌که G را نمی‌توان با این لیست رنگ‌آمیزی پویا کرد. بنابراین G را مثال نقضی در نظر می‌گیریم که کمترین راس ممکن را دارد و ناهمبند است. به‌طوری‌که (G, L) دارای دو مولفه $(G_۱, L_۱)$ و $(G_۲, L_۲)$ است. بنابراین قضیه باید برای $(G_۱, L_۱)$ یا $(G_۲, L_۲)$ نادرست باشد، زیرا اگر برای هر دو صحیح باشد برای اجتماع آن‌ها نیز صحیح است. لذا فرض می‌کنیم برای یکی از آن‌ها، به عنوان مثال برای $(G_۱, L_۱)$ نادرست باشد. چون تعداد راس‌های $G_۱$ از مجموع تعداد راس‌های $G_۱$ و $G_۲$ کمتر است، بنابراین طبق قضیه $(G_۱, L_۱)$ کمترین راس ممکن را دارد و مثال نقض است. به‌عبارت دیگر چون G را گرافی در نظر گرفتیم که قضیه برای آن صادق نیست و کمترین راس ممکن را دارد، اگر G ناهمبند و قضیه هم برای $G_۱$ هم برای $G_۲$ برقرار باشد، آنگاه قضیه برای (G, L) برقرار است. بنابراین قضیه باید برای مولفه‌ی $G_۱$ یا مولفه‌ی $G_۲$ برقرار نباشد. پس هر کدام از مولفه‌های $G_۱$ یا $G_۲$ را در نظر بگیریم تعداد راس‌های آن‌ها از G کمتر است که تناقض است. پس G همبند و بیشتر از یک راس دارد. زیرا یک راس را می‌توان با لیستی با یک رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. □

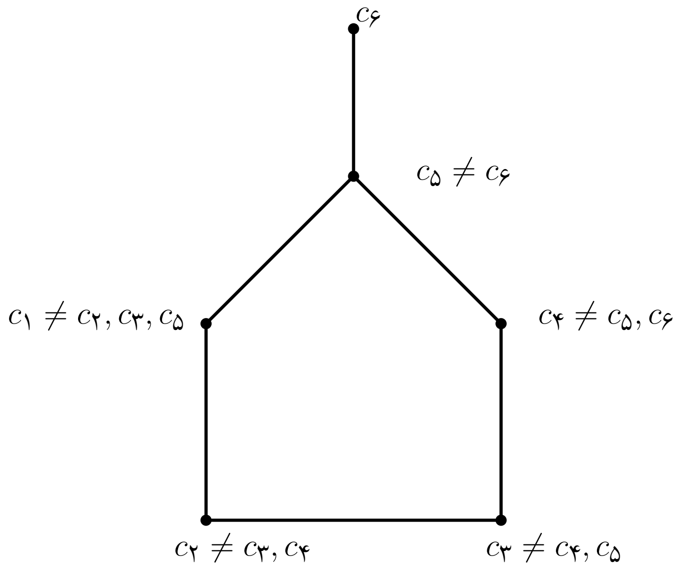
ادعا ۸.۲.۳. [۲] هر راس از گراف G (گرافی همبند که مولفه $C_۵$ ندارد) از درجه ۲ یا ۳ است و هیچ راسی از درجه ۲ در مثلث وجود ندارد.

برهان. اگر فرض نادرست باشد، بنابراین G دارای راسی از درجه یک یا راسی از درجه دو که در مثلث قرار دارد.
فرض v راسی از درجه یک باشد. وقتی این راس را حذف کنیم، چون G گرافی همبند است، لذا گراف $G - v$ نیز همبند خواهد بود. زیرا با حذف راس آویزان یا راس از درجه یک، گراف ناهمبند نمی‌شود. از طرفی چون G مثال نقض قضیه ۷.۲.۳، است، بنابراین با نسبت دادن یک لیست چهار عنصری به هر راس نمی‌توان رنگ‌آمیزی را به‌گونه‌ای انجام داد که این رنگ‌آمیزی پویا باشد. بنابراین برای گراف $G - v$ دو حالت وجود دارد.

۱. $G - v$ در شرط قضیه ۷.۲.۳، (مولفه $C_۵$ ندارد و $ch_۲(G - v) \leq ۴$) صدق می‌کند،

۲. $G - v$ مولفه $C_۵$ دارد.

اگر $G - v$ مولفه $C_۵$ نداشته باشد، چون $G - v$ همبند، $|G - v| < |G|$ و اینکه G مثال نقض

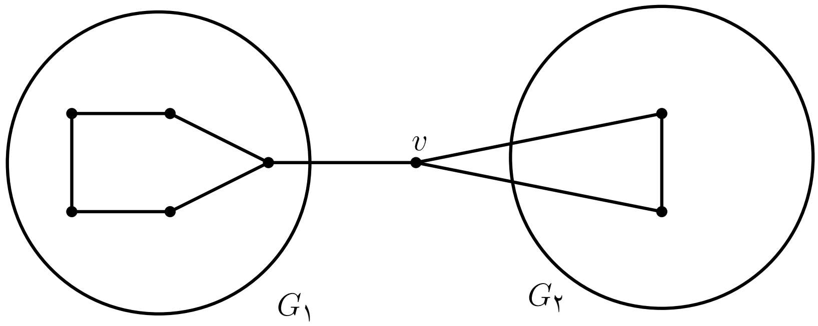


شکل ۲.۳: $G - v = C_5$

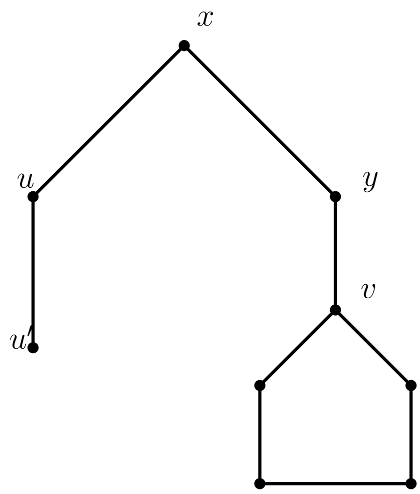
قضیه ۷.۲.۳، با کمترین راس ممکن است، از این‌رو $G - v$ مثال نقض قضیه ۷.۲.۳ نیست، لذا $G - v$ یک L-رنگ‌آمیزی پویا با مینیمال کردن G دارد. برای رنگ‌آمیزی راس v راس c_1 و یک همسایه از آن c_2 را در نظر می‌گیریم. بنابراین $c(v) \in L(v) - \{c_1, c_2\}$ این رنگ‌آمیزی، یک رنگ‌آمیزی مجاز و پویا است، شکل (۱.۳).

اگر $G - v = C_5$، آنگاه رنگ دلخواه c_6 را به راس v نسبت می‌دهیم و رنگ‌آمیزی را با واگذار کردن $c_5 \neq c_6$، $c_4 \neq c_5$، $c_3 \neq c_4, c_5$، $c_2 \neq c_3, c_4$، $c_1 \neq c_2, c_5, c_6$ ادامه می‌دهیم. یک رنگ‌آمیزی مجاز حاصل می‌شود که این رنگ‌آمیزی پویا نیست. لذا اگر $c_4 \neq c_5, c_6$ و $c_1 \neq c_2, c_3, c_5$، آنگاه یک رنگ‌آمیزی به‌وجود می‌آید که هم مجاز است و هم پویا، شکل (۲.۳)
حال اگر راس v داخل مثلث باشد، به‌عبارت دیگر راسی که دوتا از همسایه‌های آن با هم مجاورند، درجه این راس حداکثر ۳ است. زیرا بنابه قضیه ۷.۲.۳، $\Delta \leq 3$. اگر راس v را حذف کنیم دو مولفه G_1 و G_2 ساخته می‌شود. با توجه به فرض استقرا G_1 و G_2 را می‌توان با تعداد کمتری (۴رنگ) رنگ‌آمیزی کنیم به‌طوری‌که، رنگ‌آمیزی پویا باشد. به‌جز در حالتی که $G_1 = C_5$ یا $G_2 = C_5$. بنابراین اگر $G_1 = C_5$، آنگاه مولفه G_2 را می‌توان رنگ‌آمیزی پویا کرد. زیرا $G_2 \neq C_5$(چون مثلث دارد) و همچنین تعداد راس کمتری دارد. بنابراین ابتدا مولفه G_2 را رنگ‌آمیزی می‌کنیم، سپس رنگ دلخواه c_6 که مخالف دو راس مجاور در مولفه G_2 است به این راس نسبت می‌دهیم و مانند حالت قبل رنگ‌آمیزی را برای G_1 ادامه می‌دهیم، شکل (۳.۳).

در نهایت اگر پس از حذف راس v، $G_1, G_2 \neq C_5$ باشد، آنگاه رنگ‌آمیزی G_1 و G_2 مجاز و پویا است. پس راس v دو همسایه در G_1 و یک همسایه در G_2 دارد. بنابراین برای رنگ‌آمیزی راس v با نسبت دادن رنگی متمایز با رنگ سه راس قبلی یک رنگ‌آمیزی پویا با چهار رنگ حاصل می‌شود که تناقض است.



شکل ۳.۳: اگر پس از حذف راس v یکی از مولفه‌ها C_5 باشد.

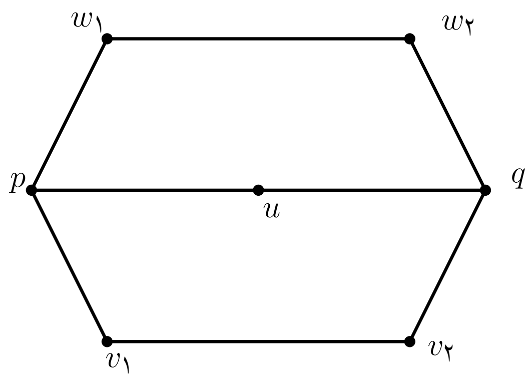


شکل ۴.۳: $G - x - y = C_5$

□

ادعا ۹.۲.۳. [۲] گراف G شامل دو راس مجاور از درجه دو نمی‌باشد.

برهان. فرض کنید G شامل دو راس x و y از درجه دو است که با هم مجاور می‌باشند. بنابه ادعای ۸.۲.۳، G مسیر نیست، زیرا مسیر دارای راس از درجه یک است. از طرفی با استفاده از قضیه ۴.۲.۳، G مولفه C_5 ندارد، پس دور ندارد و اگر دوری غیر از C_5 داشته باشد، آنگاه ۴ یا ۳ $= ch_2(G)$ است.
ابتدا فرض کنید بتوانیم x و y را انتخاب کنیم به‌طوری‌که، $G-x-y$ مولفه C_5 نداشته باشد. بنابه قضیه ۷.۲.۳، $ch_2(G-x-y) \leq 4$، پس با مینیمال کردن G، یک L-رنگ‌آمیزی پویا به وجود می‌آید.
بنابه ادعای ۸.۲.۳، هیچ دو راسی از درجه دو در مثلث قرار ندارند. لذا راس‌های x و y در مثلث قرار ندارند، بنابراین همسایه‌های آن‌ها به‌ترتیب u و v می‌باشد، به‌طوری‌که $u \neq v$.
اگر $d_G(v) = 2$، آنگاه (x,y) را از (y,v) قدیمی دوباره تعریف می‌کنیم، یعنی باز هم دو راس از درجه دو که با هم مجاورند. این‌کار را تکرار می‌کنیم تا $d_G(v) = 3$، زیرا گراف دور نیست. به‌عبارت دیگر تکرار را ادامه می‌دهیم تا راس v به مولفه‌ی C_5 متصل باشد، شکل(۴.۳). (اگر در این مورد $G-x-y$



شکل ۵.۳: $G-x-y=C_۵$

مولفه‌ی $C_۵$ مانند (C) داشته باشد آنگاه C دارای یک راس مانند v با درجه ۳ در G و چهار راس دیگر با درجه ۲ در G است. لذا می‌توان x و y را دوباره تعریف کرد، به‌طوری‌که y با یک راس مانند v در C مجاور باشد. بنابراین $G-x-y$ مولفه $C_۵$ ندارد) بنابه ادعای ۸.۲.۳، چون راس‌ها در گراف G، از درجه ۲ یا ۳ هستند و هیچ راسی از درجه یک در G وجود ندارد، بنابراین $d_G(u)\geq ۲$. فرض کنید $u'\in N(u)\setminus\{x\}$ (بنابه ادعای ۸.۲.۳، چون راس‌ها با درجه دو در مثلث قرار ندارد، بنابراین $u'=v$ اما $u'\neq y$. زیرا درغیر این‌صورت مثلث تشکیل می‌شود). اگر $c(x)\neq c(u),c(u'),c(v)$ و $c(y)\neq c(u),c(x),c(v)$ آنگاه، با رنگ‌آمیزی دو راس x و y یک L-رنگ‌آمیزی پویا ساخته می‌شود که تناقض است.

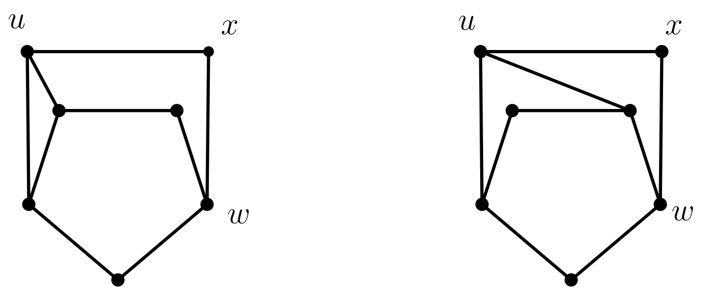
فرض کنید به‌ازای انتخاب هر زوج مرتب x,y از درجه دو، $G-x-y$ مولفه $C_۵$ داشته باشد، شکل(۵.۳). به سادگی می‌توان دید $|V(G)|=۷$ و گراف G با اتصال دو راس p و q به‌وسیله سه مسیر مجزا puq و $pv_۱v_۲q$ و $pw_۱w_۲q$ ساخته می‌شود. راس‌های p و $v_۱$ و $w_۱$ و q را با ۴ رنگ متمایز از لیست رنگ می‌کنیم. به‌طوری‌که $c(p)=c_۱$، $c(w_۱)=c_۲\neq c_۱$، $c(q)=c_۳\neq c_۱,c_۲$، $c(v_۱)=c_۴\neq c_۱,c_۲,c_۳$.

رنگ راس‌های $v_۲,w_۲,u$ را متمایز از رنگ راس‌های p,q انتخاب می‌کنیم.

لذا $c(v_۲)\neq c(v_۱)$، $c(w_۲)\neq c(w_۱)$، $c(u)\neq c(w_۲)$. حال اگر $c(w_۲)\neq c(w_۱),c(p),c(q)$ و $c(u)\neq c(p),c(q),c(w_۲)$ و $c(v_۲)\neq c(v_۱),c(p),c(q)$. در نتیجه یک L-رنگ‌آمیزی پویا برای G به‌وجود می‌آید که مثالی نقض برای برهان ادعای ۹.۲.۳، است. $\square$

ادعا ۱۰.۲.۳. [۲] G شامل راسی از درجه دو است.

برهان. فرض می‌کنیم که هر راس از گراف G از درجه ۳ باشد (فرض خلف). فرض $u\in V(G)$ و $N(u)=\{x,y,z\}$ ، $N(x)=\{u,w,w'\}$ و $H=G-u-x$. چون H حداکثر ۴ راس از درجه دو دارد و همچنین مولفه $C_۵$ را ندارد، بنابراین گراف H، یک L-رنگ‌آمیزی پویا با مینیمال کردن گراف G را دارد. اگر $c(w)=c(w')$، آنگاه راس u رنگی متمایز از رنگ راس‌های w,y,z و راس x رنگی متمایز از رنگ راس‌های u,y,w دریافت می‌کند. اگر $c(w)\neq c(w')$، آنگاه راس x رنگی متمایز از



شکل ۶.۳: گراف H هنگامی‌که مولفه C_5 دارد

رنگ راس‌های w, w', y و همچنین راس u رنگی متمایز از رنگ از سه همسایه خود x, y, z دریافت می‌کند. بنابراین در هر دو مورد یک L-رنگ‌آمیزی پویا از G به‌دست می‌آید که تناقض است. $\square$

از سه ادعای ۸.۲.۳، ۹.۲.۳، ۱۰.۲.۳، نتیجه می‌گیریم گراف G شامل دو راس مجاور x, y است به‌طوری‌که، $d_G(x) = ۲$ و $d_G(u) = ۳$. فرض کنید $N(u) = \{x, y, z\}$، $N(x) = \{u, w\}$ و $H = G - u - x$. اگر H مولفه C_5 داشته باشد، آنگاه بنابه ادعای ۹.۲.۳، y, z, w راس‌هایی هستند که در C_5 وجود دارند. زیرا اگر یکی از این راس‌ها در C_5 نباشد، C_5 که به وجود می‌آید دو راس درجه دو متصل به هم دارد که تناقض است. پس هر سه راس باید روی C_5 باشد. بنابراین G یکی از گراف‌های شکل (۶.۳) است.

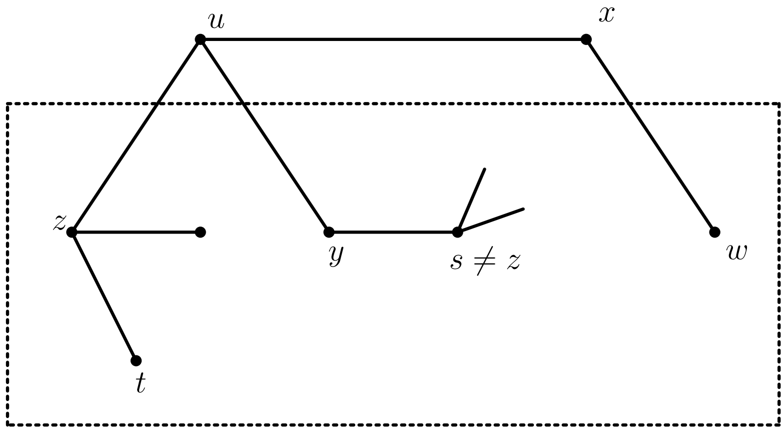
حال اگر دو راس x و w را به جای دو راس u و x در نظر بگیریم. گراف $H = G - x - w$ مولفه C_5 ندارد. پس همیشه می‌توان دو راس متصل به‌هم، از درجه دو و سه پیدا کرد، به‌طوری‌که با حذف این دو راس، در گراف باقی‌مانده مولفه C_5 وجود ندارد. چون مولفه C_5 به‌وجود نمی‌آید، بنابراین با توجه به مینیمال کردن گراف G، H، L-رنگ‌آمیزی پویا دارد.

توجه داشته باشید که $w \notin \{y, z\}$، زیرا بنابه ادعای ۸.۲.۳، هیچ راسی از درجه دو در مثلث وجود ندارد. بنابراین اگر $w = y$ یا $w = z$ آنگاه راس با درجه دو در مثلث قرار می‌گیرد که با ادعای ۸.۲.۳، تناقض دارد. پس $w \neq y$ و $w \neq z$. لذا بنابه ادعای ۹.۲.۳، $d_G(w) = ۳$ است.

اگر $d_G(y) = d_G(z) = ۳$ آنگاه $c(u) \neq c(w), c(y), c(z)$ و $c(x) \neq c(u), c(w), c(y)$ که یک L-رنگ‌آمیزی پویا برای G حاصل می‌شود، این تناقض نشان می‌دهد حداقل یکی از راس‌های y و z در G، به‌طور مثال y از درجه دو باشد، شکل (۷.۳). فرض $N(y) = \{s, u\}$، بنابه ادعای ۹.۲.۳، هیچ دو راسی از درجه دو با هم مجاور نیست، لذا $d_G(s) = ۳$. بنابه ادعای ۸.۲.۳، $s = w$ اما $s \neq z$، زیرا راس‌ها از درجه دو در مثلث وجود ندارند.

اگر $d_G(y) = d_G(z) = ۲$، آنگاه فرض می‌کنیم $N(z) = \{t, u\}$. بنابراین $c(u) \neq c(s), c(t), c(w)$ در صورت نیاز اگر $c(y) = c(u)$، y را دوباره رنگ‌آمیزی می‌کنیم. به‌طوری‌که:
$c(y) \neq c(u), c(s), c(p \in N(s) \setminus \{x, y\})$ و $c(z) \neq c(u), c(t), c(q \in N(t) \setminus \{x, z\})$ و در صورت نیاز $c(x) \neq c(y), c(u), c(w)$. در نتیجه یک L-رنگ‌آمیزی پویا برای G حاصل می‌شود که تناقض است.

اگر $d_G(z) = ۳$، آنگاه $c(u) \neq c(s), c(w), c(z)$ و در صورت نیاز



شکل ۷.۳: $deg(y) = ۲$

$c(x) \neq c(u), c(w), c(y)$ و $c(y) \neq c(u), c(s), c(p \in N(s) \setminus \{x, y\})$ بنابراین یک L-رنگ‌آمیزی پویا برای G به‌وجود می‌آید که تناقض است و این پایان برهان قضیه ۷.۲.۳، است.

قضیه ۱۱.۲.۳. [۲] اگر G گرافی با $\Delta(G) \geq ۴$، آنگاه $ch_۲(G) \leq \Delta(G) + ۱$.

برهان. فرض می‌کنیم قضیه نادرست و (G, L) مثال نقض باشد. به‌طوری‌که به هر راس G (G کمترین راس ممکن را دارد) یک لیست $(\Delta(G) + ۱)$-عنصری نسبت داده شده، در صورتی‌که نمی‌توان با این لیست گراف را رنگ‌آمیزی پویا کرد. فرض کنید $\delta(G) \leq ۱$، قرار دهید x راسی با درجه حداکثر یک، به‌طوری‌که $H = G - x$. برای گراف H، دو حالت وجود دارد:

۱) $\Delta(H) = ۳$

۲) $\Delta(H) \geq ۴$

در حالت اول با توجه به قضیه ۷.۲.۳، از آن‌جا که $H \neq C_۵$ $(\Delta(H) = ۳)$، لذا $ch_۲(H) \leq ۴$ است. فرض کنید $N_G(x) = \{y\}$ و قرار دهید $c(x) \neq c(y)$ که یک L-رنگ‌آمیزی پویای لیستی برای G حاصل می‌شود که تناقض است.
در حالت دوم اگر $\Delta(H) \geq ۴$ بنابه مینیمال کردن G، H را می‌توان با لیست L به‌صورت پویا رنگ آمیزی کرد. قرار دهید $c(x) \in L(x) \neq c(y)$. به‌طور کلی بنابه قضیه ۷.۲.۳ و مینیمال کردن G، یک $\Delta(G) + ۱$-رنگ‌پذیر پویا لیستی وجود دارد. لذا G راس درجه یک نمی‌تواند داشته باشد.
بنابراین ممکن است فرض کنیم $\delta(G) \geq ۲$. اگر راس $u \in V(G)$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $d(u) = ۲$ آنگاه $N(u) = \{x, y\}$. اگر $xy \notin E(G)$ آنگاه $H = (G - u) \cup \{xy\}$، در غیر این‌صورت $H = G - u$. پس $۳ \leq \Delta(H) \leq \Delta(G)$. زیرا در حالتی که راس u را حذف و یال xy را اضافه می‌کنیم درجه x و y در H هیچ تغییری نمی‌کند، بنابراین $\Delta(H) = \Delta(G)$. در حالتی که یال اضافه نمی‌شود با حذف راس u از درجه x و درجه y کم می‌شود. اگر x یا y همان راس‌ها با درجه $\Delta(G) \geq ۴$ باشند با حذف راس u درجه آن‌ها $\Delta(H) \geq ۳$ است. بنابراین برای گراف H با $\Delta + ۱$-لیست واگذار شده به هر راس آن دو حالت وجود دارد:

۱. $\Delta(H) \leq ۳$

۲. $\Delta(H) \geq ۴$

در حالت اول با توجه به قضیه‌های ۴.۲.۳ و ۷.۲.۳ و در حالت دوم با مینیمال کردن G گراف H $(\Delta(G)+1)$-رنگ‌پذیر پویای لیستی با رنگ‌آمیزی c را دارد. توجه داشته باشید چون $\delta(G) \geq ۲$، دو راس x' و y' وجود دارد به‌طوری‌که $xx', yy' \in E(G)$ و $x', y' \neq u$. زیرا اگر $x', y' = u$ آنگاه $\delta(G) \geq ۱$ که با فرض $\delta(G) \geq ۲$ تناقض دارد. چون $\Delta(G)+1 \geq ۵$ با در نظر گرفتن $c(u) \in L(u) \setminus \{c(x), c(y), c(x'), c(y')\}$ و بنابر شرایط مجاورت $c(x) \neq c(y)$ یک رنگ‌آمیزی پویا برای G حاصل می‌شود که تناقض است.

اکنون فرض کنید $\delta(G) \geq ۳$، $u, v \in V(G)$ و $uv \in E(G)$. همچنین فرض کنید $H = G-u-v$ بنابراین $۲ \leq \Delta(H) \leq \Delta(G)$. چون $|V(H)| < |V(G)|$ با توجه مینیمال کردن گراف G برای گراف H سه حالت وجود دارد:

۱. $\Delta(H) = ۲$

۲. $\Delta(H) = ۳$

۳. $\Delta(H) \geq ۴$

در حالت اول گراف H اجتماعی از دورها و مسیرها است، به‌عبارت دیگر مولفه‌های آن مسیر یا دور هستند. با توجه به قضیه ۴.۲.۳، $ch_۲(H) \leq ۵$.

در حالت دوم اگر گراف H مولفه $C_۵$ نداشته باشد، با توجه به قضیه ۷.۲.۳، $ch_۲(H) \leq ۴$. اگر H مولفه $C_۵$ داشته باشد آنگاه $ch_۲(H) \leq ۵$.

در حالت سوم با توجه به مینیمال کردن گراف G، H، $(\Delta(G)+1)$-رنگ‌پذیر پویای لیستی با رنگ‌آمیزی c دارد. بنابراین برای رنگ‌آمیزی دو راس u و v دو مورد را در نظر داشته باشید:

(۱) $|c(N_{G-v}(u))| = ۱$ یا $|c(N_{G-u}(v))| = ۱$.
بدون کاستن از کلیت فرض کنید $|c(N_{G-v}(u))| = ۱$. فرض کنید $|c(N_{G-v}(u))| = \{i\}$. ابتدا $c(v) \in L(v) \setminus (\{i\} \cup c(N_{G-u}(v)))$ و $c(u) \in L(u) \setminus \{i, c(y), c(v)\}$ به‌طوری‌که $y \in N_{G-u}(v)$.در نتیجه یک رنگ‌آمیزی پویا از G به‌وجود می‌آید که تناقض است.

(۲) $|c(N_{G-v}(u))| \geq ۲$ یا $|c(N_{G-u}(v))| \geq ۲$ در این مورد اگر $c(u) \in L(u) \setminus c(N_{G-v}(u))$ و $c(v) \in L(v) \setminus c(N_{G-u}(v))$ را انتخاب کنیم یک رنگ‌آمیزی پویا برای G حاصل می‌شود که تناقض است.

□

۳.۳ رنگ‌آمیزی پویای انتخابی گراف‌های دوبخشی

توجه داشته باشید که برای هر گراف G، هر رنگ‌آمیزی پویا از $G^\star$ یک رنگ‌آمیزی مجاز از G است. بنابراین $\chi_۲(G^\star) \geq \chi(G)$. همچنین چون هر رنگ‌آمیزی پویای انتخابی از $G^\star$ یک رنگ‌آمیزی انتخابی از G است. بنابراین $ch_۲(G^\star) \geq ch(G)$. به‌عبارت دیگر چون راس‌های میانی $G^\star$ از درجه دو هستند، همسایه‌های این راس‌ها (یعنی راس‌های انتهایی هر یال G) در هر رنگ‌آمیزی پویا از $G^\star$، باید رنگ‌های متمایزی دریافت کنند.

یک رنگ‌آمیزی (احتمالا غیر مجاز: چون ممکن است دو یال مجاور همرنگ باشد) از یال‌های گراف G را در نظر بگیرید. به‌طوری‌که، مجموعه یال‌های متصل به هر راس از درجه بیشتر از یک، شامل حداقل دو رنگ متمایز باشد.

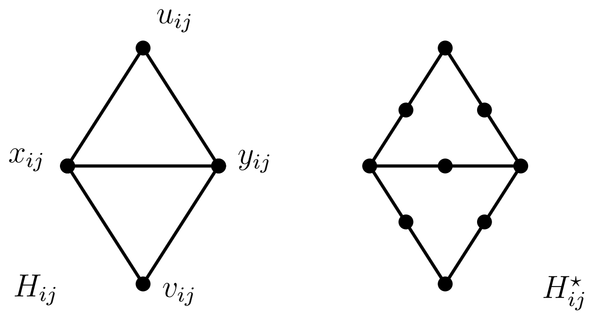
کوچکترین عدد طبیعی k به‌طوری‌که، برای هر k-لیست‌دهی به یال‌های گراف G، بتوان یال‌ها را طوری رنگ‌آمیزی کرد که برای هر راس $v \in V(G)$ از درجه بیشتر از یک، حداقل دو رنگ در یال‌های مجاور با آن راس ظاهر شود، عدد رنگی پویای یالی گویند و با $ch_۲^*(G)$ نمایش می‌دهند.

در این بخش حدس اکبری و همکاران [۲] مبنی بر این‌که برای هر گراف G، $ch_۲(G) = \max(ch(G), \chi_۲(G))$، ابتدا با دادن یک مثال از گراف دوبخشی مسطح کوچک G با $ch(G) = \chi_۲(G) = ۳$ و $ch_۲(G) = ۴$، سپس با ساختن گراف دوبخشی G_k به‌ازای $k \geq ۵$ به‌طوری‌که $ch(G_k) = \chi_۲(G_k) = ۳$ و $ch_۲(G) \geq k$ را رد می‌کنیم.

۱.۳.۳ محاسبه عدد رنگی پویای انتخابی گراف زیرتقسیم

لم ۱.۳.۳. [۱۰] برای هر گراف G، $ch_۲(G^\star) \leq max(ch(G), ch_۲^*(G) + ۲)$ و به‌طور دقیق $ch(G) \leq ch_۲(G^\star) \leq max\{۵, ch(G)\}$.

برهان. فرض کنید L، لیست‌هایی از رنگ‌های نسبت داده شده به راس‌های گراف زیرتقسیم $G^\star$ باشد. به‌طوری‌که برای هر راس اصلی u، $|L(u)| \geq ch(G)$، زیرا برای هر k-لیست‌دهی به راس‌های G، باید G را با آن لیست رنگ‌آمیزی مجاز کرد. به‌عبارت دیگر رنگ‌آمیزی انتخابی $ch(G)$، برابر با کوچکترین عدد طبیعی k، به طوری‌که برای هر k-لیست‌دهی به راس‌های گراف G، بتوان G را به‌طور لیستی رنگ‌آمیزی مجاز کرد. برای هر راس میانی v، $|L(v)| \geq ch_۲{}^*(G) + ۲$، زیرا راس‌های میانی از درجه دو هستند، به‌طوری‌که همسایه‌های این راس‌ها دو رنگ متمایز دریافت کرده‌اند (طبق رنگ‌آمیزی مجاز). فرض c یک رنگ‌آمیزی مجاز از گراف G، به‌طوری‌که برای هر راس $u \in G$، $c(u) \in L(u)$(چون طبق تعریف $ch(G)$، باید یک رنگ‌آمیزی مجاز وجود داشته باشد). برای هر راس میانی w از $G^\star$ با همسایه‌های u و v قرار دهید $L' = L(w) \setminus \{c(u), c(v)\}$. زیرا برای هر k-لیست‌دهی به راس‌ها باید یک رنگ‌آمیزی مجاز برای گراف $G^\star$ وجود داشته باشد. بنابه تعریف L و L' برای هر راس میانی u داریم: $|L'(u)| \geq ch_۲^*(G)$، زیرا راس‌های میانی، راس‌های مرتبط به یال‌هایی است که همرنگ نیستند. بنابراین می‌توان رنگ‌آمیزی c را به راس‌های میانی $G^\star$ تعمیم داد، به‌طوری‌که هر راس اصلی u مجاور دو راس میانی w و v است، به‌طوری‌که $c(v) \neq c(w)$. بنابراین c یک رنگ‌آمیزی پویای از $G^\star$ است،



شکل ۸.۳: $H_{ij}.$ و $H^{\star}_{ij}$

به‌طوری‌که برای هر راس v، $c(v) \in L(v)$.

حال باید ثابت کنیم برای هر گراف G، $ch_2^*(G) \leq 3$. یک لیست با ۳ رنگ را به هر یال G واگذار کنید. یک رنگ‌آمیزی حریصانه از یال‌های گراف G به صورت زیر دنبال کنید:

برای هر یال رنگ نشده uv، رنگی متفاوت از یکی از رنگ‌های موجود در یال‌های مرتبط با راس u و یکی از رنگ‌های موجود دریال‌های مرتبط با راس v را در نظر بگیرید(اگر رنگ موجود باشد، در غیر این‌صورت یک رنگ دلخواه از لیست نسبت داده شده به یال uv را در نظر بگیرید) چون لیست واگذار شده به یال uv شامل سه رنگ است، بنابراین یک رنگ‌آمیزی حاصل می‌شود به‌طوری‌که مجموعه یال‌های متصل به هر راس از درجه بیشتر از یک همرنگ نیستند. □

لم ۲.۳.۳. [۱۰] برای هر گراف G با $2 \leq \chi_2(G) \leq 3$، $\chi_2(G^{\star}) = 3$.

برهان. چون $\chi_2(G) \geq 2$، G شامل حداقل یک یال است، بنابراین $\chi_2(G^{\star}) \geq 3$. حال c را به عنوان یک ۳-رنگ‌آمیزی پویا از گراف G در نظر بگیرید. $c^{\star}$ را یک ۳-رنگ‌آمیزی پویا برای $G^{\star}$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

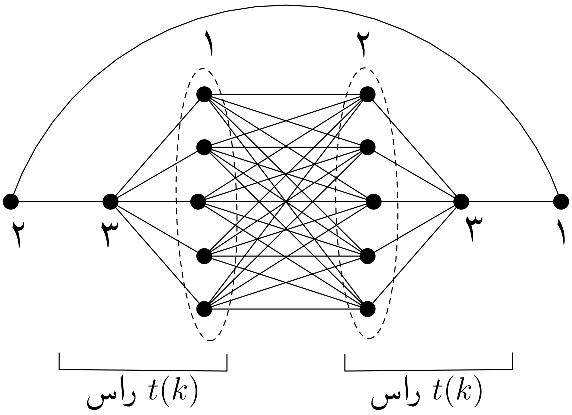
برای هر راس اصلی v از گراف $G^{\star}$ قرار دهید $c^{\star}(v) = c(v)$. برای هر راس میانی w که از تقسیم یال uv در گراف G به‌دست می‌آید قرار دهید $c^{\star}(w) = i$، به‌طوری‌که $\{i\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{c(u), c(v)\}$ (c یک رنگ‌آمیزی مجاز در گراف G است). بنابراین راس‌های میانی دارای دو همسایه با رنگ متمایز هستند، به‌عبارت دیگر هر راس میانی مجاور دو راس اصلی است که به‌طور متمایز رنگ شده‌اند. زیرا c یک رنگ‌آمیزی پویا برای گراف G تعریف شده است. همچنین هر راس اصلی مجاور دو راس میانی است که به‌طور متمایز رنگ‌آمیزی شده‌اند. زیرا بنابه تعریف رنگ‌آمیزی $c^{\star}$، راس‌های میانی مرتبط به یال‌های uv و uw همرنگ نیستند، به‌طوری‌که این دو راس همسایه راس اصلی u در گراف $G^{\star}$ می‌باشد. بنابراین در همسایگی هر راس اصلی دو راس میانی با رنگ متمایز وجود دارد. لذا $c^{\star}$ یک ۳-رنگ‌آمیزی پویا برای $G^{\star}$ است. □

در این‌جا با آوردن دو مثال حدس ۵.۲.۳ را رد می‌کنیم.

ابتدا با استفاده از لم ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳، یک گراف مسطح دوبخشی G (با ۶۵ راس) به‌طوری‌که $ch(G) = 3$ و $\chi_2(G) = 4$ و $ch_2(G) = 4$ را می‌سازیم،

گراف H_{ij} شکل (۸.۳) را در نظر بگیرید، مشاهده می‌شود اگر راس‌های u_{ij} و v_{ij} با رنگ‌های $i > ۱$ و $j > ۱$ به‌طوری‌که $i \neq j$ رنگ شوند، این رنگ‌آمیزی قابل گسترش به x_{ij} و y_{ij} نیست، اگر رنگ این راس‌ها از لیست $۱ij$ انتخاب شوند، زیرا راس‌های مجاور رنگ‌های مشابه دریافت می‌کنند. به‌عنوان مثال اگر $H_{۲۵}$ را بخواهیم لیست‌دهی کنیم، $u_{۲۵} = ۲$ و $v_{۲۵} = ۵$ و اگر x_{ij} و y_{ij} را طبق لیست $\{۱, ۲, ۵\}$ رنگ‌آمیزی کنیم، این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی مجاز نیست، زیرا راس‌های مجاور رنگ‌های مشابه دریافت می‌کنند.
۹ کپی از H_{ij} برای $(i, j) \in \{۲, ۳, ۴\} \times \{۵, ۶, ۷\}$ را در نظر بگیرید و تمام ۹ کپی از u_{ij} را در راس u^* و تمام ۹ کپی از v_{ij} را در راس v^* قرار دهید. گراف جدید را H نامگذاری کنید. اگر به v^* و u^* لیست‌های ۲۳۴ و ۴۵۶ نسبت دهیم و اگر به x_{ij} و y_{ij}، $(i, j) \in \{۲, ۳, ۴\} \times \{۵, ۶, ۷\}$ لیست $۱ij$ نسبت دهیم، آنگاه H با ۱۱ راس را نمی‌توان رنگ‌آمیزی مجاز کرد. به‌عبارت دیگر $ch(H) > ۳$. فرض کنید با این لیست بتوان H را رنگ‌آمیزی کنیم (فرض خلف)، همه کپی‌های H_{ij} در H قرار دارند. کپی را که $u^* = i$، $v^* = j$ و $x_{ij}, y_{ij} \in ۱ij$ را در نظر می‌گیریم. این کپی را نمی‌توان رنگ‌آمیزی مجاز کرد، زیرا به‌ازای انتخاب هر i و j، یک H_{ij} در گراف H قرار دارد، به‌طوری‌که راس‌های H_{ij} را نمی‌توان با لیست $۱ij$ رنگ‌آمیزی مجاز کرد. بنابراین گراف H، ۳-انتخاب‌پذیر نیست.
حال ثابت می‌کنیم که $ch(H) \leq ۴$. فرض کنید به هر راس H یک لیست چهار عنصری نسبت داده‌ایم. می‌خواهیم ثابت کنیم می‌توان این رنگ‌آمیزی را به راس‌های x_{ij} و y_{ij} گسترش داد. به عنوان مثال، اگر $v^* = \{a, b, c, d\}$ و $u^* = \{a, b, c, d\}$ و رنگ $u^* = a$ و $v^* = b$ را انتخاب کنیم، دو رنگ برای دو راس دیگر وجود دارد، بنابراین $x_{ij} = c$ و $y_{ij} = d$. این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی مجاز است، به‌طوری‌که برای هر H_{ij} برقرار است، لذا برای H نیز برقرار است. در نتیجه $ch(H) = ۴$.

قرار دهید $G = H^{\star}$. چون G دور فرد ندارد و یال‌ها همدیگر را قطع نکرده‌اند، بنابراین گراف G گرافی دوبخشی و مسطح (با ۶۵) است. بنابه نتیجه‌ای که در [۷] آمده است $ch(G) \leq ۳$. حال اگر به هر راس گراف G، لیست‌های دو عنصری نسبت دهیم، با توجه به مثالی که در [۸] آمده است، راس‌های مجاور رنگ‌های یکسانی دریافت می‌کنند. بنابراین گراف G، ۲-انتخاب‌پذیر نیست. در نتیجه $ch(G) = ۳$.
برای اثبات $\chi_۲(G) = ۳$، با استفاده از لم ۲.۳.۳، کافی است ثابت کنیم $\chi_۲(H) \leq ۳$. چون هر راس H در مثلث قرار دارد، لذا دو همسایه مجاور در مثلث دارد، بنابراین در هر رنگ‌آمیزی از گراف H، طبق شرایط مجاورت به‌طور متمایز رنگ می‌شود. پس هر رنگ‌آمیزی مجاز از H، یک رنگ‌آمیزی پویا است. در نتیجه $\chi(H) = \chi_۲(H)$. لذا گراف H، ۳-رنگ‌پذیر است، بنابراین $\chi_۲(G) = ۳$. چون هر رنگ‌آمیزی پویای انتخابی از گراف زیرتقسیم G، یک رنگ‌آمیزی انتخابی از H است، بنابراین $ch_۲(G) \geq ch(H)$، از طرفی چون $ch(H) = ۴$، لذا $ch_۲(G) \geq ۴$. به منظور نتیجه گیری کافی است ثابت کنیم $ch_۲(G) \leq ۴$. با استفاده از رنگ‌آمیزی مناسب از هر دور با ۴ راس $u_{ij}x_{ij}v_{ij}y_{ij}$ به‌طوری‌که، $(i, j) \in \{۲, ۳, ۴\} \times \{۵, ۶, ۷\}$ و نسبت دادن رنگ دلخواه به یال $x_{ij}y_{ij}$، یال‌های متصل به هر راس از درجه بیشتر از یک همرنگ نیستند، لذا $ch_۲^*(H) = ۲$ و بنابه لم ۱.۳.۳، $ch_۲(G) \leq ۴$. بنابراین G گرافی مسطح دوبخشی با ۶۵ راس، به‌طوری‌که، $ch(G) = \chi_۲(G) = ۳, ch_۲(G) = ۴$.



شکل ۹.۳: گراف H_k

گاتنر [۵] گراف مسطح H' را با ۷۵ راس و ۲۱۹ یال به‌طوری‌که، ۳-رنگ‌پذیر بود ولی ۴-انتخاب‌پذیر نبود ساخت [۱۲]. گراف زیرتقسیم $G' = H'^{\star}$، گرافی مسطح دوبخشی با ۲۹۴ راس است. بنابراین مانند قبل می‌توان نشان داد که $\chi_{۲}(G') = ch(G') = ۳$ و $ch_{۲}(G') = ۵$.

فرض کنید عدد طبیعی $k \geq ۵$ باشد. حال ایده‌ی پاراگراف قبلی را برای ساخت گراف دوبخشی G_k به‌طوری‌که $\chi_{۲}(G_k) = ch(G_k) = ۳$ و $ch_{۲}(G_k) \geq k$ را تعمیم می‌دهیم.

گراف $\bar{K}_{l,l}$ که از گراف دوبخشی کامل $K_{l,l}$ با حذف یک یال بدست آمده را در نظر بگیرید. برای هر $l \geq ۱$، $ch(\bar{K}_{l+۱,l+۱}) \leq ch(\bar{K}_{l,l}) + ۱$. برای اثبات فرض کنید به هر راس از گراف $\bar{K}_{l+۱,l+۱}$ لیستی با حداقل $ch(\bar{K}_{l,l}) + ۱ \geq ۲$ رنگ واگذار شده است، دو راس مجاور u و v با درجه $l + ۱$ در $\bar{K}_{l+۱,l+۱}$ را انتخاب کنید و به آن‌ها رنگ‌های متمایزی از لیست‌شان را واگذار کنید. حال رنگ راس u را از لیست رنگ‌های همسایه u و رنگ راس v را از لیست رنگ‌های همسایه v حذف کنید. چون به هر راس از گراف $\bar{K}_{l+۱,l+۱}$ لیستی با $ch(\bar{K}_{l,l}) + ۱$ رنگ نسبت داده شده، لذا با حذف رنگ دو راس u و v در لیست همسایه‌های آن‌ها، این راس‌ها دارای $ch(\bar{K}_{l,l})$ رنگ و راس‌هایی که با این دو راس همسایه نیستند دارای لیستی با $ch(\bar{K}_{l,l}) + ۱$ رنگ می‌باشد. بنابراین هر راس $\bar{K}_{l+۱,l+۱}$، دارای لیستی با اندازه حداقل $\bar{K}_{l,l}$ است. لذا با واگذار کردن لیست‌هایی با اندازه $\bar{K}_{l,l}$ به هر راس گراف $\bar{K}_{l,l}$ که از گراف $\bar{K}_{l+۱,l+۱}$ با حذف دو راس u و v به‌دست آمده رنگ‌آمیزی کامل می‌شود. اردیش [۶] و همکاران گراف‌های دوبخشی کاملی با عدد انتخابی به دلخواه بزرگ ساختند [۹]. ترکیب این نتیجه با اظهارات قبلی، تابع $t : k \mapsto \min\{l \mid ch(\bar{K_{l,l}}) = k\}$ که برای $k \geq ۲$ تعریف شده، حاصل می‌شود.

گراف دوبخشی H_k که در شکل (۹.۳) نمایش داده شده در نظر بگیرید. این گراف از گراف دوبخشی کامل $K_{l,l}$، $l = t(k)$، با حذف یالی بین دو راس و اضافه کردن یک مسیر به طول ۳ بین آن‌ها به‌وجود آمده است. رنگ‌آمیزی شرح داده شده در شکل (۹.۳) نشان می‌دهد که $\chi_{۲}(H_k) \leq ۳$. اگر $G_k = H_k^{\star}$ آنگاه بنابه لم ۲.۳.۳، $\chi_{۲}(G_k) = ۳$ است. اگر به راس‌های اصلی G_k رنگ‌های دلخواهی از لیست

[۵] Gutner

[۶] Erdos

را واگذار کنیم و به راس‌های میانی بنابه شرایط مجاورت رنگ‌های متمایزی از دو راس مجاورشان را واگذار کنیم بنابراین گراف G_k، ۳-انتخاب‌پذیر است. در نتیجه $\chi_۲(G_k) = ch(G_k) = ۳$.
اکنون ثابت می‌کنیم که $ch_۲(G_k) = k$. با استفاده از تعریف تابع، $ch(K_{\bar{l},l}) = k$. چون رنگ‌آمیزی از $K_{\bar{l},l}$ می‌تواند به H_k گسترش یابد، پس $ch(H_k) = k$. زیرا برای هر k-لیست‌دهی به راس‌های H_k، یک رنگ‌آمیزی مجاز از آن وجود دارد. از طرفی هر رنگ‌آمیزی پویای انتخابی از گراف زیرتقسیم G، یک رنگ‌آمیزی انتخابی از گراف H_k است. بنابراین $ch_۲(G_k) \geq k$. به عبارت دیگر چون راس‌های میانی از درجه دو هستند و همسایه‌های آن‌ها (راس‌های انتهایی هر یال) در هر رنگ‌آمیزی، رنگ‌های متمایزی دریافت می‌کنند.
بنابه لم ۱.۳.۳، $ch_۲(G) \leq \max(۵, ch(H_k)) \longrightarrow ch(G) \leq k$ در نتیجه G_k، گرافی دوبخشی است به‌طوری‌که، $\chi_۲(G_k) = ch(G_k) = ۳$ و $ch_۲(G_k) = k$ است.

مراجع

[1] Arash Ahadi, Saieed Akbari, Ali Dehghan, and Maryam Ghanbari, *On the difference between chromatic number and dynamic chromatic number of graphs*, Discrete Mathematics **312** (2012), no. 17, 2579–2583.

[2] Saieed Akbari, Maryam Ghanbari, and S Jahanbekam, *On the list dynamic coloring of graphs*, Discrete Applied Mathematics **157** (2009), no. 14, 3005–3007.

[3] Saieed Akbari, Maryam Ghanbari, and S Jahanbekam, *On the dynamic coloring of strongly regular graphs*, Ars Combinatoria **113** (2014), 205–210.

[4] Saieed Akbari, Vahid Liaghat, and Afshin Nikzad, *Colorful paths in vertex coloring of graphs*, Electron. J. Combin **18** (2011), no. 1.

[5] Meysam Alishahi, *On the dynamic coloring of graphs*, Discrete Applied Mathematics **159** (2011), no. 2, 152–156.

[6] Meysam Alishahi, Ali Taherkhani, and Carsten Thomassen, *Rainbow paths with prescribed ends*, The electronic journal of combinatorics **18** (2011), no. 1, P86.

[7] Noga Alon and Michael Tarsi, *Colorings and orientations of graphs*, Combinatorica **12** (1992), no. 2, 125–134.

[8] Paul Erdos and László Lovász, *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, Infinite and finite sets **10** (1975), 609–627.

[9] Paul Erdös, Arthur L Rubin, and Herbert Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer **26** (1979), 125–157.

[10] Louis Esperet, *Dynamic list coloring of bipartite graphs*, Discrete Applied Mathematics **158** (2010), 1963–1965.

[11] Christopher David Godsil, Gordon Royle, *Algebraic graph theory*, vol. 207, Springer New York, 2001.

[12] Shai Gutner, *The complexity of planar graph choosability*, Discrete Mathematics **159** (1996), no. 1, 119–130.

[13] Martin Kneser, *Ein satz über abelsche gruppen mit anwendungen auf die geometrie der zahlen*, Mathematische Zeitschrift **61** (1954), no. 1, 429–434.

[14] Hong-Jian Lai, Jianliang Lin, Bruce Montgomery, Taozhi Shui, and Suohai Fan, *Conditional colorings of graphs*, Discrete Mathematics **306** (2006), no. 16, 1997–2004.

[15] Hong-Jian Lai, Bruce Montgomery, and Hoifung Poon, *Upper bounds of dynamic chromatic number*, Ars Combinatoria **68** (2003), no. 3, 193–201.

[16] Colin McDiarmid, *Hypergraph colouring and the lovász local lemma*, Discrete Mathematics **167** (1997), 481–486.

[17] Bruce Montgomery, *Dynamic coloring of graphs*, Ph.D. thesis, West Virginia University, 2001.

[18] Anton Prowse and Douglas R Woodall, *Choosability of powers of circuits*, Graphs and Combinatorics **19** (2003), no. 1, 137–144.

[19] Karanbir S Sarkaria, *A generalized kneser conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **49** (1990), no. 2, 236–240.

[20] Carsten Thomassen, *The even cycle problem for directed graphs*, Journal of the American Mathematical Society **5** (1992), no. 2, 217–229.

[21] Meysam Alishahi, *Dynamic chromatic number of regular graphs*, Discrete Applied Mathematics **160** (2012), 2098–2013

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آستانه .... threshold
ابریال .... hyperedge
احتمال .... probability
افراز .... partition
بحرانی .... critical
پویا .... dynamice
پیشامد .... event
تک رنگ .... monochrome
تصادفی .... randm
جایگشت .... permutation
درجه .... degree
دور .... cycle
راس میانی .... middle vertex
رنگ‌پذیر .... colorable
زیرگراف .... subgraph
ضرب رسته‌ای .... categorical product
ضرب دکارتی .... cartesian product
عدد انتخابی .... choice number
عدد پویای انتخابی .... dynamic choice number
عدد رنگی .... color number
عدد رنگی پویا .... dynamic chromatic number
قطر .... diameter
کلاس‌های رنگی .... color classes
گراف کنزر .... kneser graph
گراف قویا منتظم .... strongly regular graph

گراف القایی .... induced graph
گراف زیرتقسیم .... incidence graph
گراف دوبخشی .... bipartit graph
گراف همبند .... connected graph
گسترش .... extend
لم موضعی لواژ .... lovasz local lemma
مولفه .... component
مجاور .... adjacent
متناهی .... infty
مثلث .... triangle
منتظم .... regular
مجاز .... proper
مشابه .... similar
مستقل .... independ
مجموعه احاطه‌گر کلی .... total dominating set
مجموعه احاطه‌گر دو تایی .... double dominating set
نامساوی چرنف .... inequality chernoff
نظریه گراف .... graph theoretic
نقض .... conter
نسبتا .... relatively
نتیجه .... corollary
نسبت .... assignmend
یکنواخت .... uniform
یال .... edge
وابسته .... dependent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

assignment	نسبت
at least	حداقل
at most	حداکثر
adjacent	مجاور
assignmend	نسبت
bipartit graph	گراف دوبخشی
bound	کران
claim	ادعا
cycle	دور
cartesian product	ضرب دکارتی
categorical product	ضرب رسته‌ای
critical	بحرانی
colorable	رنگ‌پذیر
color number	عدد رنگی
component	مولفه
corollary	نتیجه
connected graph	گراف همبند
conter	نقص
conjecture	حدس
color classes	کلاس‌های رنگی
dependent	وابسته
degree	درجه
dynamic chromatic number	عدد رنگی پویا
dynamic choice number	عدد پویای انتخابی
diameter	قطر

مجموعه احاطه‌گر دوتایی	double dominating set
پیشامد	event
یال	edge
گسترش	extent
نظریه گراف	graph theoretic
ابرگراف	hypergraph
ابریال	hyperedge
مستقل	independ
گراف زیرتقسیم	incidence graph
گراف القایی	induced graph
نامساوی چرنف	inequality chernoff
گراف کنزر	kneser graph
لم موضعی لواژ	lovasz local lemma
تک رنگ	monochrome
راس میانی	middle vertex
مجاز	proper
اثبات	proof
افراز	partition
جایگشت	permutation
نسبتا	relatively
منتظم	regular
تصادفی	random
مشابه	similar
گراف قویا منتظم	strongly regular graph
صدق کردن	satify
زیرگراف	subgraph
مجموعه احاطه‌گر کلی	total dominating set
مثلث	triangle
آستانه	Threshold
یکنواخت	uniform

نمایه

Aabstract

A k-dynamic coloring of a graph G is a proper coloring of G with k colors such that for every vertex $v \in V(G)$ of degree at least 2, the neighbors of v receive at least 2 colors. The dynamic chromatic number of a graph$G$, $\chi_2(G)$, is the least number k such that G admits a k-dynamic coloring. B. Montgomery in his Ph.D. Thesis intruduced dynamic chromatic number and conjectured that the difference between chromatic and dynamic chromatic number of regular graphs is at most 2. Recently, this conjecture has been studied in several papers. M. Alishahi proved that the difference between chromatic and dynamic chromatic number of a k-regular graphs is at most $O(\ln k)$. Also, He presented an upper bound for the dynamic chromatic number of a regular graph in terms of chromatic number of graph and independence number of second power of the graph.
In this thesis, we study the relationship between the chromatic number and dynamic chromatic number of graphs. Alos, we intrduce the list dynamic chromatic number of graphs and present some results about this parameter.

keywords: Dynamic chromatic number, Dynamic list chromatic number, Total dominating set, Hypergraph coloring, Incidence graph

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Dynamic Coloring Of Graphs

Supervisor
Dr. Meysam Alishahi

Advisor
Seyed Reza Mousavi

by

Masoomeh Valizadeh Moghadam

2015