



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

عدد رنگی سازگار گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

استاد مشاور

آقای سید رضا موسوی

دانشجو

فاطمه مرادی

۱۳۹۳

تقدیم بہ

وجود مقدسی کہ بہ امید دیدارش ہر صبح را شام و ہر شب را طلوع می بخشیم، ہانکہ نام زیبایش
طراوت جانہا و نگاہ پر مہرش نسیم رحمت و زندگی است۔

حضرت حجہ بن الحسن عسکری، امام زمان عجل اللہ تعالیٰ فرجہ الشریف

پیش‌کشی است ناقابل تقدیم به

انسان‌های شریفی که شب زنده‌داری‌هایشان، وجودم بخشد و نفس‌هایشان رنگ زندگیم کشید،

پدر
چ

استوارترین اراده‌ای که نگاهش اعتماد به نفسم و لبخندش امیدبخش لحظات تنهایی‌ام

ومادر

صاحب مهربانترین نگاه‌ها، همان که مادر بوده تا ما باشیم و مادر هست تا نفس بکشیم و مادر می ماند تا ما بمانیم

و برادرهای عزیز و خواهرنازنینم

که وجودشان شادی بخش و مایه دلگرمی من است

سپاس گزارى... .

نخستين سپاس و ستايش از آن خداوندى است كه بنده كوچكش را در دىاى بيكران انديشه، قطره اى ساخت تا وسعت آن را از ديچه انديشه هاى ناب آموزگارانى بزرگ به تماشا نشيند.

لذا اکنون كه در سايه سار بنده نوازی هايش پايان نامه حاضر به انجام رسيده است، بر حسب وظيفه و از باب "من لم يشكر المنعم من المخلوقين لم يشكر الله عز وجل" از پدر و مادر عزيزم... اين دو معلم بزرگوارم... كه همواره بر كوتاهى و درشتى من، قلم عنوكشيده و در تمام عرصه هاى زندگى يار و ياورى بى چشم داشت براى من بوده اند سپاس گويم. بر خود لازم مى دانم از جناب آقاى دكتر ميثم عليشاهى كه ايشان علاوه بر هدايت و راهبنامى موثر و دلسوزانه من در انجام پايان نامه، براى اينجانب نداد و الكوى مناسبى از يك استاد مجرب دانش فنى و در عين حال متكى به اخلاقيات در راه تعليم و راهبنامى دانشجويان بوده اند و زحمت راهبنامى اين پايان نامه را بر عهده گرفتند تقدير و تشكر نمايم. همچنين از استاد مشاور جناب آقاى سيد رضا موسوى كه در مدت انجام اين پايان نامه بار، نمود هاى ارزنده خویش راه كشى پيشرفت اينجانب بوده اند سپاس گزارى كنم و از استاذ فرزانه و دلسوز، آقاى دكتر نادر جعفرى را دو دكتر صادق رحيمى شهرباف كه زحمت داورى اين پايان نامه را متقبل شدند، كمال تشكر و قدردانى را نمايم، باشد كه اين خرد ترين، بخشى از زحمات آنان را پاس كويد.

همچنين از دوست نازنينم خانم الهه شريفى به خاطر حمايت هايشان تشكر مى كنم كه كمك و همكارى ايشان نيز همواره راه كشى من بوده است. در خاتمه سپاسگزارم از تمام كسانى كه با همرايشان در اين مسير يارى رسانم بوده اند.

تعمدنامه

اینجانب فاطمه مرادی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان عدد رنگی سازگار گراف ها ، تحت راهنمایی دکتر میثم علیشاهی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه مرادی
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

برای یک رنگ‌آمیزی یالی داده شده با رنگ‌های $\{1, 2, \dots, k\}$ ، یک رنگ‌آمیزی راسی از گراف G با رنگ‌های $\{1, 2, \dots, k\}$ را سازگار با رنگ‌آمیزی یالی می‌گوییم هرگاه برای هر یال از G ، رنگ‌های ظاهر شده روی دو سر آن و رنگ خود یال یکسان نباشند. به کوچکترین k ای که برای هر رنگ‌آمیزی یالی با k -رنگ $\{1, 2, \dots, k\}$ یک رنگ‌آمیزی سازگار با این رنگ‌آمیزی یالی و با استفاده از رنگهای $\{1, 2, \dots, k\}$ وجود دارد عدد رنگی سازگار G ، $\chi_{ad}(G)$ ، می‌گوییم. در این پایان نامه به بیان نتایج درباره عدد رنگی سازگار گراف‌ها می‌پردازیم، همچنین عدد رنگی سازگار لیستی گراف‌ها را معرفی می‌کنیم و نتایجی در این زمینه را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: رنگ‌آمیزی سازگار، رنگ‌آمیزی لیستی سازگار، عدد رنگی سازگار، عدد انتخابی سازگار

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. فاطمه مرادی، ”رنگ آمیزی سازگار گراف ها”، دومین همایش ملی پژوهش های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک، تهران ۱۳۹۳

۲. فاطمه مرادی، ”رنگ آمیزی لیستی سازگار گراف های مسطح”، دومین همایش ملی پژوهش های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک، تهران ۱۳۹۳

پیشگفتار

رنگ‌آمیزی گراف‌ها از مفاهیم اساسی و بنیادینی است که در نظریه گراف مطرح می‌شود. این مبحث از نظریه گراف در زمره‌ی مباحث بسیار جذاب بوده و سال‌ها است که به‌طور جدی مورد استقبال محققان و دانشمندان قرار گرفته است و تا کنون مساله‌های بسیار جالبی مطرح و حل شده‌اند. در حال حاضر مساله‌های باز فراوانی در این نظریه وجود دارد که بزرگان ریاضی را به چالش کشیده است. رنگ‌آمیزی‌های مختلفی برای گراف‌ها تعریف شده است که در هر نوع رنگ‌آمیزی به راس‌ها، یال‌ها و یا هر دو، رنگ‌هایی با ویژگی خاص تخصیص داده می‌شود.

در این پایان‌نامه ما رنگ‌آمیزی سازگار و رنگ‌آمیزی لیستی سازگار را در برخی از گراف‌ها مورد توجه قرار می‌دهیم. بخش عمده‌ای از این پایان‌نامه به رنگ‌آمیزی سازگار اختصاص داده شده است. آنچه پس از مطالعه توانسته‌ایم بازنویسی نماییم چهار فصلی است که در این نوشتار آورده‌ایم.

در فصل اول تعریف‌های ساده و در عین حال بنیادی نظریه گراف مطرح شده است.

در فصل دوم به بیان رنگ‌آمیزی سازگار گراف‌ها پرداخته‌ایم. این مفهوم در سال ۲۰۰۸ توسط هل^۱ و ژو^۲ [۷] مطرح شد. در این فصل به توصیف k -رنگ‌آمیزی سازگار برای گراف دلخواه G می‌پردازیم و عدد رنگی سازگار گراف را تعریف می‌کنیم به این صورت که عدد رنگی سازگار گراف G کوچکترین عدد صحیح k است که برای هر k -رنگ‌آمیزی یالی G ، یک k -رنگ‌آمیزی راسی وجود داشته باشد به‌طوری‌که هیچ رنگی به‌طور همزمان روی یک یال و دو سر آن ظاهر نشده باشد. بدیهی است که هر رنگ‌آمیزی راسی مجاز با هر رنگ‌آمیزی یالی سازگار است. در نتیجه عدد رنگی سازگار هر گراف از عدد رنگی آن بزرگتر نیست. در مورد گراف‌های کامل به نظر می‌رسد که عدد رنگی سازگار، حدود ریشه دوم عدد رنگی راسی باشد از طرفی دیگر گراف‌هایی با کمر و عدد رنگی به دلخواه بزرگ هستند که عدد رنگی سازگار و عدد رنگی راسی آن‌ها با هم یکسان‌اند، که در ادامه فصل به تفصیل در مورد آن‌ها صحبت خواهد شد.

در فصل سوم به مطالعه رنگ‌آمیزی لیستی سازگار گراف‌های مسطح پرداخته‌ایم در این فصل پس از معرفی L -رنگ‌آمیزی سازگار و گراف k -انتخاب‌پذیر سازگار و همچنین عدد انتخابی سازگار، به اثبات این‌که گراف‌های فاقد K_5 -کهاد، ۴-انتخاب‌پذیر سازگار هستند، خواهیم پرداخت همچنین نشان خواهیم داد که گراف‌های مسطح فاقد مثلث ۳-رنگ‌پذیر سازگار می‌باشند در صورتی که نتیجه منفی برای گراف‌های مسطح فاقد ۴-دور، گراف‌های فاقد ۵-دور و گراف‌های مسطح فاقد مثلث با فاصله t ($t \geq 0$) بدست می‌آید. مرجع این فصل [۳] است.

در فصل چهارم این پایان‌نامه که مبنای آن [۶] است به بیان عدد رنگی سازگار حاصل ضرب گراف‌ها و بررسی رابطه بین عدد رنگی سازگار یک گراف و توان‌های (رسته‌ای و دکارتی) آن گراف پرداخته می‌شود.

^۱ Pavol Hell

^۲ Xuding Zhu

فهرست مطالب

د	لیست تصاویر
ذ	لیست جداول
۱	۱ تعریف‌های مقدماتی
۱	۱.۱ تعریف‌ها و قضیه‌ها
۱۵	۲ عدد رنگی سازگار
۱۵	۱.۲ مقدمه
۱۵	۲.۲ عدد رنگی سازگار
۱۶	۳.۲ گراف‌ها با عدد رنگی سازگار کوچک
۱۷	۴.۲ دوچرخه فرد-یالی و K_4 فرد-یالی
۲۲	۵.۲ گراف‌های با عدد رنگی سازگار بزرگ
۲۲	۱.۵.۲ مقدمه
۲۵	۲.۵.۲ کمر بزرگ
۲۸	۳.۵.۲ محدوده درجات و گراف‌های مسطح
۲۹	۴.۵.۲ گراف‌های کامل
۳۱	۳ رنگ‌آمیزی لیستی سازگار گراف‌های مسطح
۳۱	۱.۳ مقدمه
۳۲	۲.۳ گراف‌های فاقد K_5 - کهاد
۳۶	۳.۳ گراف‌های مسطح فاقد مثلث
۳۸	۴.۳ گراف‌های مسطح فاقد مثلث با فاصله K
۴۴	۵.۳ گراف‌های مسطح فاقد ۴-دور
۴۶	۶.۳ گراف‌های مسطح فاقد ۵-دور
۴۹	۴ عدد رنگی سازگار حاصل ضرب گراف‌ها
۴۹	۱.۴ مقدمه

۵۵		مربع‌های لاتین	۲۰۴
۶۰		حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها	۳۰۴
۶۴		آ جدول نمادها	
۶۶		مراجع	
۶۸		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

لیست تصاویر

۲		گراف G	۱.۱
۲		گراف G	۲.۱
۳		گراف N_4	۳.۱
۳		گراف‌های ساده	۴.۱
۴		گراف پترسن	۵.۱
۴		(الف) گراف متناهی و (ب) گراف نامتناهی	۶.۱
۵		گراف‌های K_4 و K_5	۷.۱
۵		گراف دوبخشی	۸.۱
۵		گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$	۹.۱
۶		گراف G	۱۰.۱
۸		گراف G و زیرگراف‌های G	۱۱.۱
۹		حذف و انقباض	۱۲.۱
۹		(الف) یک گراف همبند و (ب) یک گراف ناهمبند با سه مولفه	۱۳.۱
۱۰		(الف) یک تطابق ماکزیمم (ب) یک تطابق کامل	۱۴.۱
۱۰		خوشه	۱۵.۱
۱۱		(الف) یک مجموعه مستقل راسی و (ب) یک مجموعه راسی ماکزیمم	۱۶.۱
۱۱		(الف) مجموعه مستقل یالی (ب) مجموعه مستقل یالی ماکزیمم	۱۷.۱
۱۲		گراف G	۱۸.۱
۱۳		یک گراف ۳-رنگی	۱۹.۱
۱۴		(الف) گراف مسطح G (ب) یک نشان دادن مسطح G	۲۰.۱
۱۸		دوچرخه فرد-یالی	۱.۲
۱۸		K_4 فرد-یالی	۲.۲
۱۹		دوچرخه فرد-یالی با مسیر زوج	۳.۲
۲۰		دوچرخه فرد-یالی با مسیر فرد	۴.۲
۲۲		گراف‌های G_3 و G_4 ، با رنگ‌آمیزی یالی F_2 و F_3	۵.۲
۲۴		گراف‌های G'_3 و G'_4 ، با رنگ‌آمیزی یالی F_2 و F_3	۶.۲

۳۲		G و کهای از آن	۱.۳
۳۳		G	۲.۳
۳۹		H_k	۳.۳
۴۰		H_1	۴.۳
۴۰		H_2	۵.۳
۴۲		G_i	۶.۳
۴۲		$H(a, b)$	۷.۳
۴۳		Y'	۸.۳
۴۴		X'	۹.۳
۴۵		$H(a, b, c)$	۱۰.۳
۴۶		گرافهای مسطح فاقد ۴-دور	۱۱.۳
۴۷		$H_1(a)$ (الف) و $H_2(a, b)$ (ب)	۱۲.۳

لیست جداول

۶۴		جدول نمادها	آ.۱
۶۵		جدول نمادها	آ.۲

فصل ۱

تعریف‌های مقدماتی

۱.۱ تعریف‌ها و قضیه‌ها

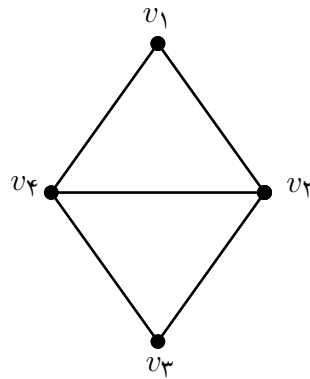
در این فصل برخی از تعریف‌ها و مفاهیم اولیه و همچنین قضیه‌هایی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را بیان می‌کنیم. هدف این فصل، ایجاد یک زمینه شهودی (به کمک مثال‌های ساده) برای مطالبی است که در فصل‌های بعد به طور رسمی‌تر ارائه خواهد شد. قابل توجه است که گراف‌های مورد بحث در سراسر این پایان‌نامه، گراف‌های ساده هستند، ساده از این نظر که بین هر دو راس تنها یک یال وجود دارد. در ادامه، گراف ساده به طور دقیق تعریف می‌شود. آنچه از تعریف‌هایی که بدون ذکر منبع آورده شده از [۲] گرفته شده است.

تعریف ۱.۱.۱. گراف G^1 ، یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ است که از یک مجموعه متناهی ناتهی $V(G)$ شامل راس‌ها، یک مجموعه متناهی $E(G)$ (مجزای از $V(G)$) شامل یال‌ها و یک تابع وقوع Ψ_G^2 تشکیل شده است که به هر یال G ، یک زوج نامرتب از راس‌های G را (که الزاما متمایز نیستند) نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v دو راس باشند به طوری که $\Psi_G(e) = uv$ ، در این صورت گفته می‌شود که e ، راس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است، دو راس u و v دو سر یال e نامیده می‌شوند. معمولا گراف $G = (V(G), E(G), \Psi(G))$ را به طور خلاصه با $(V(G), E(G))$ یا $G(V, E)$ نشان می‌دهند. تعداد یال‌های گراف G با $|E(G)|$ و تعداد راس‌های آن با $|V(G)|$ نشان داده می‌شود. اگر $\{u, v\}$ یالی از گراف دلخواه G باشد به طور خلاصه آن را با uv نشان می‌دهند. اگر $uv \in E(G)$ ، آن‌گاه u و v مجاور هستند. به عنوان مثال در شکل ۱.۱، مجموعه $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ مجموعه راس‌ها و $\{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$ مجموعه یال‌های گراف G هستند.

در طی این پایان‌نامه G نشان‌دهنده یک گراف ساده است. همچنین زمانی که فقط یک گراف مورد بحث است معمولا این گراف را با G نشان می‌دهیم سپس حرف G را از نمادهای مربوط به آن حذف می‌کنیم به عنوان مثال به جای $V(G)$ و $E(G)$ به طور ساده می‌نویسیم: V و E .

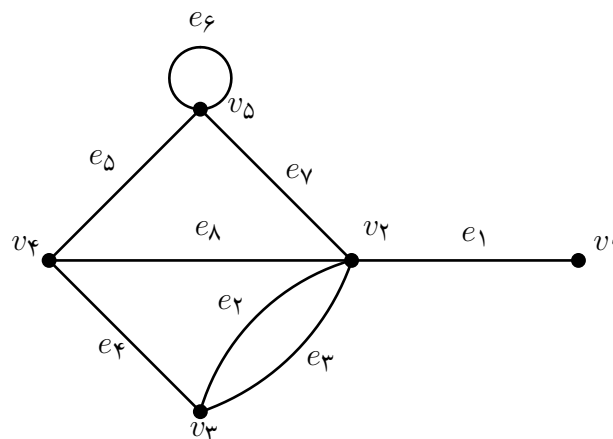
¹Graph

²Incidence function



شکل ۱.۱: گراف G

تعریف ۲.۱.۱. یک یال با دو سر یکسان طوقه^۳، و یک یال با دو سر متمایز، یال پیوندی^۴ نامیده می‌شود. دو یا چند یال پیوندی با دو سر یکسان، یال‌های چندگانه^۵ (موازی) را تشکیل می‌دهند در شکل ۲.۱ طوقه e_6 و یال‌های پیوندی هستند و $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8$ تشکیل یال‌های چندگانه می‌دهند.



شکل ۲.۱: گراف G

تعریف ۳.۱.۱. گرافی که یک راس داشته باشد، بدیهی^۶ و سایر گراف‌ها را غیر بدیهی^۷ می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. گرافی را که مجموعه یال آن تهی باشد یک گراف تهی^۸ می‌نامند. گراف تهی با n راس را با N_n نشان می‌دهند. در شکل ۳.۱ مشاهده می‌شود.

^۳Loop

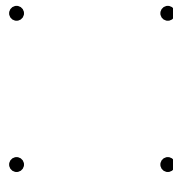
^۴Link

^۵Multiple edges

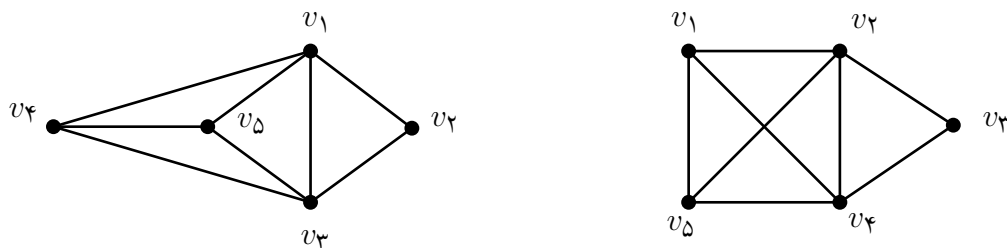
^۶Trivial graph

^۷Nontrivial graph

^۸Empty graph

شکل ۳.۱: گراف N_4

تعریف ۵.۱.۱. گراف ساده^۹ گرافی است که فاقد طوقه و یال چندگانه است. گراف شکل ۲.۱ ساده نیست در صورتی که گراف‌های شکل ۴.۱ ساده‌اند. قسمت اعظم نظریه گراف، بر روی مطالعه گراف‌های ساده متمرکز است.



شکل ۴.۱: گراف‌های ساده

تعریف ۶.۱.۱. درجه^{۱۰} راس v در گراف G که با $deg_G(v)$ یا $d_G(v)$ نشان داده می‌شود، برابر تعداد یال‌های واقع بر v است. در این تعریف هر طوقه به‌عنوان دو یال شمرده می‌شود. کمترین و بیشترین درجه راس‌های G به‌ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۷.۱.۱. [۲] در هر گراف G داریم: $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E|$

تعریف ۸.۱.۱. راسی که درجه آن فرد باشد راس فرد^{۱۱} و راسی که درجه‌ی آن زوج باشد راس زوج^{۱۲} نامیده می‌شود.

نتیجه ۹.۱.۱. [۲] در هر گراف، تعداد راس‌های فرد، زوج است.

تعریف ۱۰.۱.۱. گرافی که درجه تمام راس‌های آن با هم برابر باشند گراف منتظم^{۱۳} نامیده می‌شود. اگر درجه هر راس k باشد، گراف را k -منتظم می‌نامند. مثال معروفی از گراف‌های ۳-منتظم، گراف پترسن^{۱۴} است که در شکل ۵.۱ مشاهده می‌شود. در نظر داشته باشید هر گراف تهی، منتظم از درجه

^۹Simple graph

^{۱۰}Degree

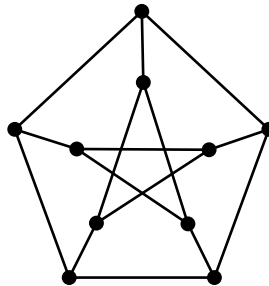
^{۱۱}Odd vertex

^{۱۲}Even vertex

^{۱۳}Regular graph

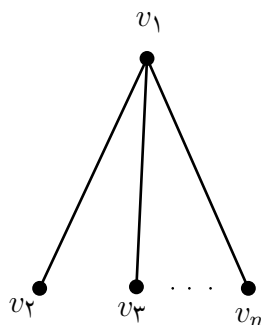
^{۱۴}Petersen graph

صفر و هر گراف کامل K_n ، منتظم از درجه $n - 1$ است. همچنین ملاحظه کنید که اگر G ، n راس داشته باشد و منتظم از درجه k باشد، آنگاه G دارای $\frac{1}{2}kn$ یال است.

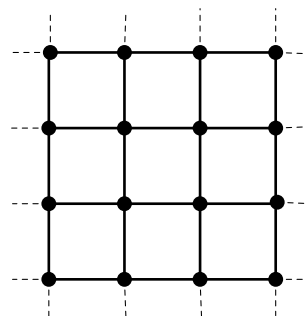


شکل ۵.۱: گراف پترسن

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر مجموعه راس‌ها و مجموعه یال‌های یک گراف، متناهی باشند گراف مذکور را **متناهی**^{۱۵} می‌نامند در غیر این صورت گراف **نامتناهی**^{۱۶} است. شکل زیر نمونه‌ای از یک گراف متناهی و یک گراف نامتناهی را نشان می‌دهد. (شکل ۶.۱)



(الف)



(ب)

شکل ۶.۱: (الف) گراف متناهی و (ب) گراف نامتناهی

تعریف ۱۲.۱.۱. گراف ساده‌ای که هر دو راس متمایز آن مجاور باشند، **گراف کامل**^{۱۷} نامیده می‌شود. گراف کامل n راسی با K_n نمایش داده می‌شود. K_4 و K_5 در شکل ۷.۱ نشان داده شده است.

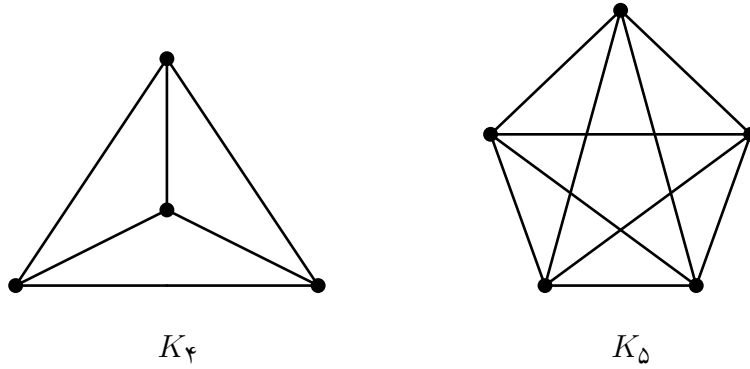
تعریف ۱۳.۱.۱. **گراف دو بخشی**^{۱۸} گرافی است که می‌توان مجموعه راس‌های آن را به دو زیر مجموعه‌ی X و Y چنان افراز کرد که یک سر تمام یال‌های آن در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. (شکل ۸.۱)

^{۱۵}Finite graph

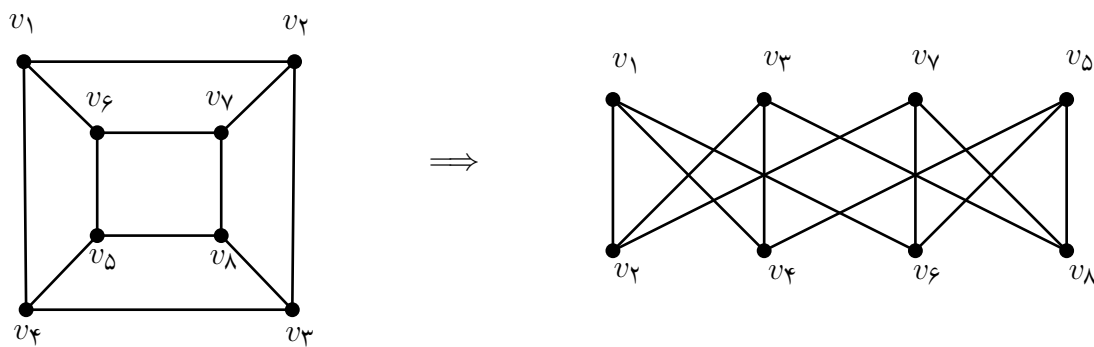
^{۱۶}Infinite graph

^{۱۷}Complete graph

^{۱۸}Bipartite graph

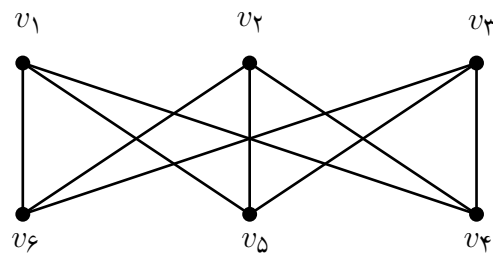


شکل ۷.۱: گراف‌های K_4 و K_5



شکل ۸.۱: گراف دوبخشی

تعریف ۱۴.۱.۱. گراف دو بخشی کامل^{۱۹}، یک گراف دو بخشی با بخش‌های X و Y است که در آن هر راس X ، به هر راس Y وصل شده است. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ ، گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۹.۱: گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$

تعریف ۱۵.۱.۱. گرافی که بتوان مجموعه راس‌های آن را به k زیرمجموعه غیر تهی افراز کرد به طوری که هیچ یالی دو سرش در یک زیرمجموعه نباشد، گراف k -بخشی^{۲۰} نامیده می‌شود.

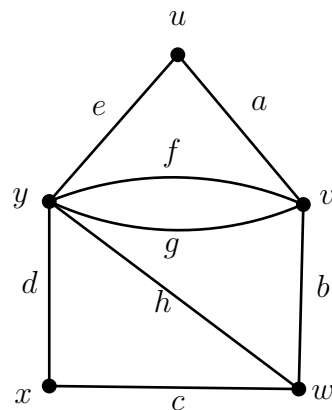
^{۱۹}Complete bipartite graph

^{۲۰} K -partite graph

تعریف ۱۶.۱.۱. یک گراف، k -بخشی کامل^{۲۱} است که در آن، هر راس به تمام راس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیر یکسان با آن قرار دارند، وصل شده است.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک گشت^{۲۲} از G ، دنباله ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ است به طوری که جملات آن یک در میان شامل راس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای هر $1 \leq i \leq k$ ، $v_i v_{i-1}$ دو سر e_i باشند. در این صورت می‌گوییم W ، یک گشت از v_0 تا v_k یا به عبارت دیگر یک (v_0, v_k) -گشت است. راس‌های v_0 و v_k به ترتیب ابتدا و انتهای W و $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ راس‌های داخلی آن نامیده می‌شوند. همچنین عدد صحیح k را طول W می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۱.۱. اگر یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ در گشت W متمایز باشند، W یک گذر^{۲۳} نامیده می‌شود. اگر علاوه بر یال‌ها، راس‌های $v_0, v_1, \dots, v_k$ نیز متمایز باشند، W یک مسیر^{۲۴} نامیده می‌شود. تعداد یال‌های مسیر، معرف طول مسیر است. مسیر n راسی با P_n نمایش داده می‌شود. در شکل ۱۰.۱ یک گشت، یک گذر و یک مسیر در یک گراف مشخص شده‌اند.



گشت : $uavfyfvgyhwbv$

گذر : $wcxdyhwbugy$

مسیر : $xcwhyueuav$

شکل ۱۰.۱: گراف G

تعریف ۱۹.۱.۱. دور^{۲۵} گرافی است که از یک مسیر با مجاور کردن دو راس انتهایی به‌دست می‌آید. دور n راسی با C_n نمایش داده می‌شود. تعداد یال‌های دور، معرف طول یال است. یک دور با طول k را k -دور می‌نامیم. یک k -دور را بسته به این‌که k زوج یا فرد باشد یک دور زوج^{۲۶} یا دور فرد^{۲۷} می‌نامیم.

به‌طور معمول C_3 مثلث^{۲۸}، C_4 چهار ضلعی، C_5 پنج ضلعی و به همین ترتیب C_n ، n ضلعی نامیده می‌شود.

^{۲۱}Complete k -partite graph

^{۲۲}Walk

^{۲۳}Trail

^{۲۴}Path

^{۲۵}Cycle

^{۲۶}Even cycle

^{۲۷}Odd cycle

^{۲۸}Triangle

قضیه ۲۰.۱.۱. [۲] یک گراف، دو بخشی است اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱. کمر G ، طول کوتاه‌ترین دور در G است. اگر G هیچ دوری نداشته باشد، کمر G طبق تعریف بی‌نهایت خواهد بود.

تعریف ۲۲.۱.۱. گراف H را زیرگراف G می‌گوییم، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و Ψ_H از محدود کردن Ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد. با فرض آن‌که H زیرگرافی از G است، H را زیرگراف سره‌ی G می‌گوییم هرگاه $V(H) \neq V(G)$.

تعریف ۲۳.۱.۱. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را یک زیرگراف فراگیر G از G خواهیم نامید.

تعریف ۲۴.۱.۱. گراف $G = (V, E)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید V' ، زیرمجموعه ناتهی از V باشد. زیرگرافی از G که مجموعه راس‌های آن V' و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه یال‌هایی از G باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است، زیرگراف القا شده‌ی V' توسط V' نامیده شده و با $G[V']$ نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوییم $G[V']$ زیرگراف القایی G است. زیرگراف القایی $G[V \setminus V']$ ، زیرگرافی است که با حذف راس‌های V' و یال‌های واقع بر آن‌ها، از G به دست می‌آید. اگر $V' = \{v\}$ ، به جای $G - \{v\}$ می‌نویسیم $G - v$. فرض کنیم افرازی از راس‌های V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \dots, V_w$ وجود دارد که در آن دو راس u و v مجاور هستند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به مجموعه V_i یکسانی باشند. در این صورت زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ مولفه‌های G نامیده می‌شوند.

تعریف ۲۵.۱.۱. گراف $G = (V, E)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که E' یک زیرمجموعه ناتهی از E باشد. زیرگرافی از G که مجموعه راس‌های آن، برابر مجموعه راس‌های دو سر یال‌های E' و مجموعه یال‌هایش برابر E' باشد، زیرگراف القا شده توسط E' نامیده شده، با $G[E']$ نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوییم $G[E']$ زیرگراف القایی یالی G است. زیرگراف فراگیری از G که مجموعه یال‌های آن $E \setminus E'$ باشد را می‌توان با حذف یال‌های E' از G به دست آورد به طور مشابه گرافی که با افزودن مجموعه یال‌های E' به G به دست می‌آید، با $G + E'$ نمایش داده می‌شود. اگر $E = \{e\}$ ، به جای $G - \{e\}$ و $G + \{e\}$ می‌نویسیم $G - e$ و $G + e$. انواع مختلف زیرگراف‌ها در شکل ۱۱.۱ نشان داده شده‌اند.

تعریف ۲۶.۱.۱. راس v از گراف G ، راس برشی^{۳۳} است اگر E بتواند به زیرمجموعه ناتهی E_1 و E_2 افراز شود به طوری که $G[E_1]$ و $G[E_2]$ تنها در راس v مشترک باشند.

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر e یالی از گراف G باشد منظور از حذف در گراف G که با $G - e$ نشان داده می‌شود، گراف حاصل از حذف یال e از G است، در حالت کلی اگر F مجموعه‌ای از یال‌های G باشد،

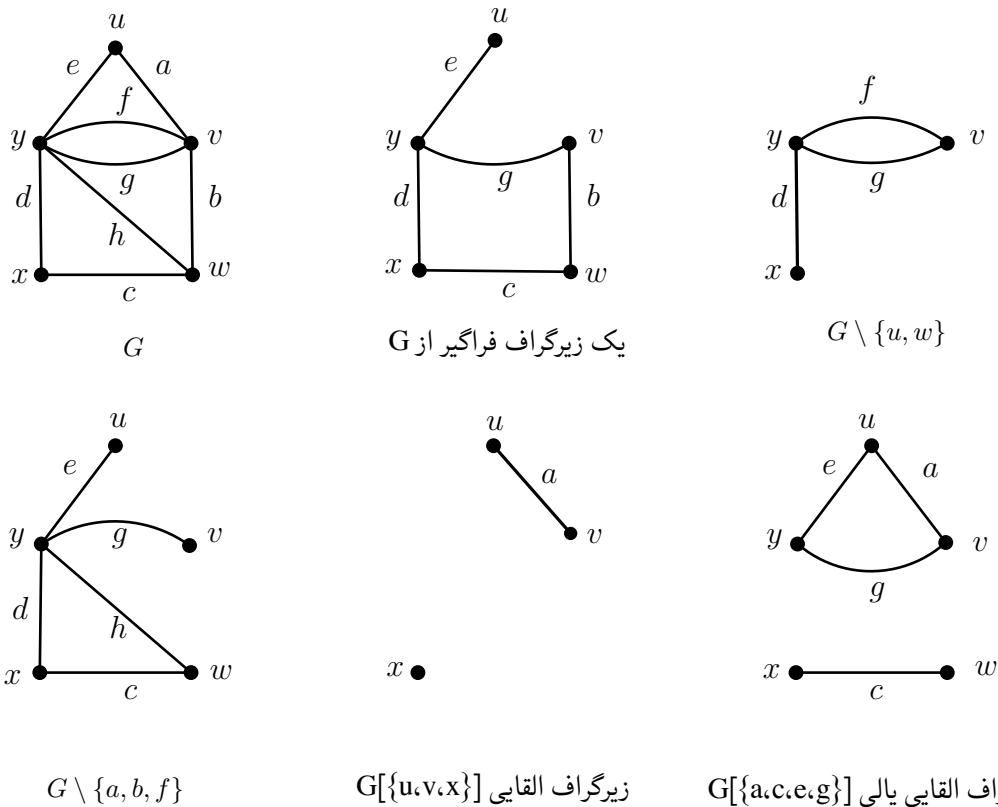
^{۲۹}Girth

^{۳۰}Subgraph

^{۳۱}Spanning subgraph

^{۳۲}Component

^{۳۳}Cut-vertex



شکل ۱۱.۱: گراف G و زیرگراف‌های G

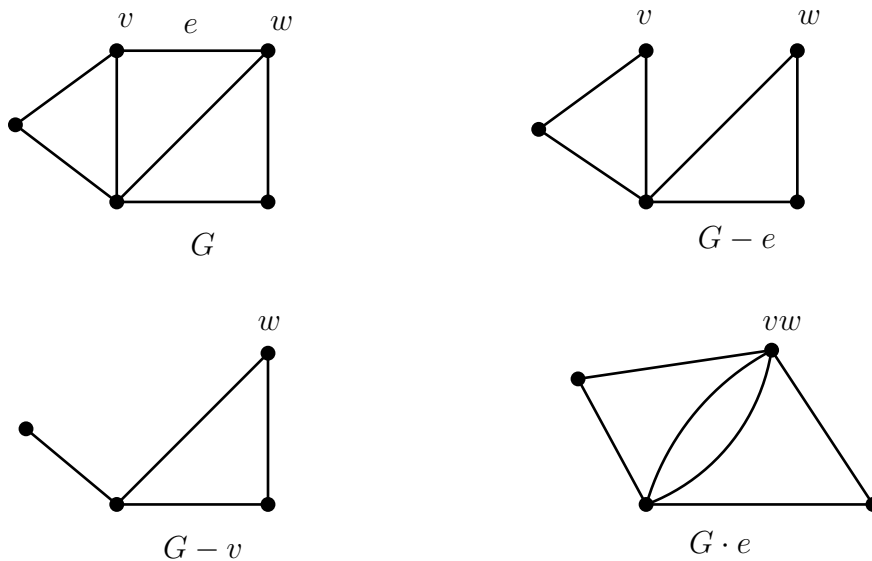
گراف حاصل از حذف یال‌های F را با $G \setminus F$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب اگر v راسی از G باشد، منظور از $G - v$ گراف حاصل از حذف راس v و یال‌های گذرنده از v است. در حالت کلی‌تر اگر S یک مجموعه از راس‌های G باشد، $G \setminus S$ نشانگر گراف حاصل از حذف راس‌های واقع در S و تمام یال‌هایی است که از آن راس‌ها می‌گذرند. همچنین $G \cdot e$ معرف گراف حاصل از انقباض^{۳۴} یال e است. یعنی e را حذف کنیم و دو انتهای آن، v و w را یک راس بگیریم که بر یال‌هایی (غیر از e) واقع است که قبلاً از v و w گذر کرده‌اند. در این صورت یک انقباض G به صورت گرافی تعریف می‌شود که از انقباض چنین یال‌هایی به دست آمده باشد. ملاحظه می‌کنید K_5 ، حاصل انقباض گراف پترسن است (با انقباض پنج یالی که پنج ضلعی داخلی را به بیرونی وصل می‌کنند). در این صورت می‌گوییم که گراف پترسن به صورت K_5 منقبض شده است. برخی حذف‌ها و انقباض‌ها در شکل ۱۲.۱ نشان داده شده است.

تعریف ۲۸.۱.۱. گراف $G(V, E)$ همبند^{۳۵} است، اگر برای هر افزاز مجموعه راس‌های V به دو زیرمجموعه غیرتهی X و Y ، یالی با یک سر در X و یک سر در Y موجود باشد، در غیر این صورت گراف G ناهمبند^{۳۶} است. (شکل ۱۳.۱). بدیهی است که هر گراف ناهمبند متناهی را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند ماکزیمال با مجموعه راس‌های مجزا در نظر گرفت.

^{۳۴}Contraction

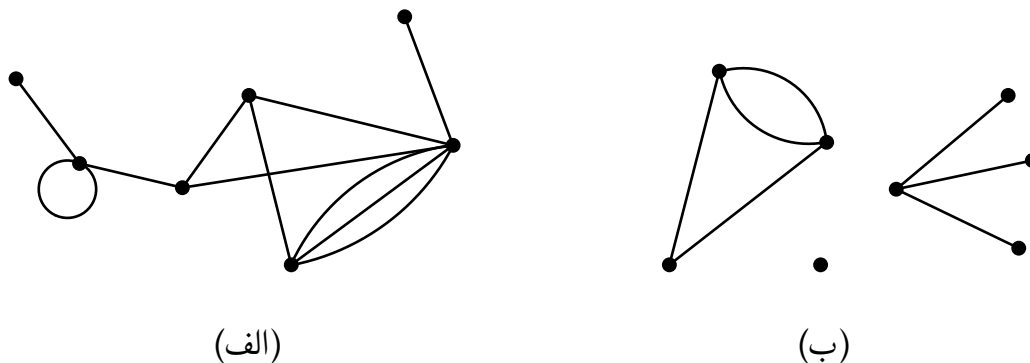
^{۳۵}Connected graph

^{۳۶}Disconnected graph



شکل ۱۲.۱: حذف و انقباض

در این صورت هر یک از این گراف‌های همبند را یک مولفه گراف G می‌نامند.



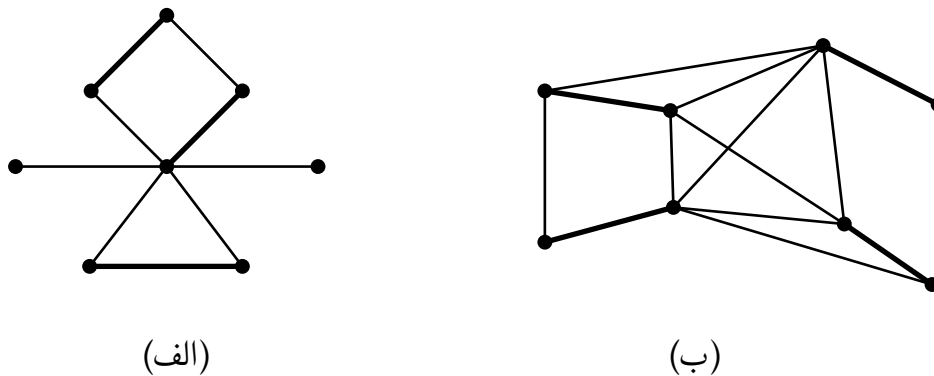
شکل ۱۳.۱: (الف) یک گراف همبند و (ب) یک گراف ناهمبند با سه مولفه

تعریف ۲۹.۱.۱. زیرمجموعه M از E یک تطابق^{۳۷} در G نامیده می‌شود، اگر هیچ دو تایی از عضوهای آن (یال‌های پیوندی) در G مجاور نباشند اگر یالی از M مجاور راس v باشد می‌گوییم M راس v را اشباع کرده و v را نیز M -اشباع می‌نامیم. اگر هر راس G ، M -اشباع باشد تطابق M کامل^{۳۸} است. M یک تطابق ماکزیمم^{۳۹} است، اگر هیچ تطابق M' با شرط $|M'| > |M|$ در G وجود نداشته باشد. به وضوح هر تطابق کامل، ماکزیمم نیز هست. تطابق‌های کامل و ماکزیمم در گراف شکل ۱۴.۱ مشخص شده‌اند.

^{۳۷}Matching

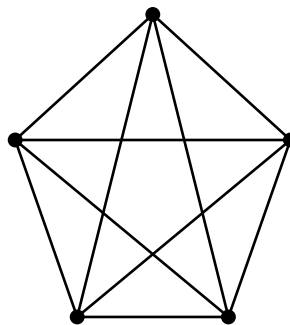
^{۳۸}Perfect matching

^{۳۹}Maximum matching



شکل ۱.۴: (الف) یک تطابق ماکزیمم (ب) یک تطابق کامل

تعریف ۳۰.۱.۱. یک خوشه^{۴۰} از گراف ساده G ، زیرمجموعه‌ای مانند S از V است به طوری که $G[S]$ کامل باشد. اندازه بزرگترین خوشه گراف G ، عدد خوشه‌ای G نامیده شده و با $w(G)$ نشان داده می‌شود. گراف نمایش داده شده در شکل ۱۵.۱ خود یک خوشه است و $w(G) = ۵$ است.



شکل ۱.۵: خوشه

تعریف ۳۱.۱.۱. زیرمجموعه S از راس‌های گراف G را که هیچ دو راس آن در G مجاور نباشند، یک مجموعه مستقل^{۴۱} G می‌نامیم. می‌گوییم مجموعه مستقل S ، ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S| < |S'|$ وجود نداشته باشد. نمونه‌هایی از مجموعه‌های مستقل در شکل ۱۶.۱ نشان داده شده‌اند.

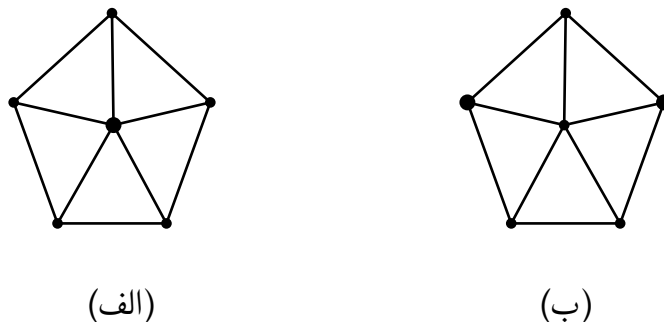
تعداد راس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم G ، عدد استقلال راسی^{۴۲} G نامیده می‌شود و با $\alpha(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. به طور مشابه مجموعه مستقل یالی، مجموعه‌ای از یال‌های پیوندی است که هیچ دوتای آن‌ها مجاور نباشند، که همان تطابق است. تعداد یال‌ها در یک تطابق ماکزیمم G را با $\alpha'(G)$

^{۴۰} Clique

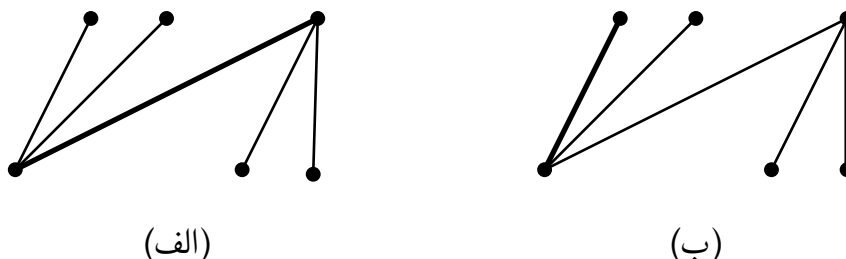
^{۴۱} Independent set

^{۴۲} Vertex independence number



شکل ۱۶.۱: (الف) یک مجموعه مستقل راسی و (ب) یک مجموعه راسی ماکزیمم

نمایش می‌دهیم که عدد استقلال یالی^{۴۳} نامیده می‌شود. در شکل زیر مجموعه مستقل یالی و مجموعه مستقل یالی ماکزیمم آن نشان داده شده است.



شکل ۱۷.۱: (الف) مجموعه مستقل یالی و (ب) مجموعه مستقل یالی ماکزیمم

تعریف ۳۳.۱.۱. با فرض این که G و H دو گراف باشند یک همریختی^{۴۴} مانند g از گراف G به H ، تابعی مانند $g : V(G) \rightarrow V(H)$ می‌باشد به طوری که اگر $uv \in E(G)$ آنگاه $g(u)g(v) \in E(H)$. در این صورت گوییم دو گراف G و H همریخت هستند. مجموعه همه همریختی‌های از G به H را با $Hom(G, H)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۴.۱.۱. دو گراف G و H یکریخت^{۴۵} هستند هرگاه تابع یک به یک و پوشای f تعریف شده به صورت $f : V(G) \rightarrow V(H)$ بین مجموعه‌ی راس‌های دو گراف G و H وجود داشته باشد به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در این صورت f را یک یکریختی^{۴۶} از G به H می‌نامیم.

تعریف ۳۵.۱.۱. یکریختی $f : V(G) \rightarrow V(G)$ را یک خودریختی^{۴۷} روی G نامیم. مجموعه همه خودریختی‌های روی G ، ناتهی و البته متناهی می‌باشد زیرا تعداد راس‌ها، متناهی است.

^{۴۳}Edge independence number

^{۴۴}Homomorphism

^{۴۵}Isomorphis

^{۴۶}Isomorphism

^{۴۷}Automorphism

تعریف ۳۶.۱.۱. هر تابع یک به یک و پوشا مانند $f: V(G) \rightarrow V(G)$ را یک جایگشت^{۴۸} می‌نامیم.

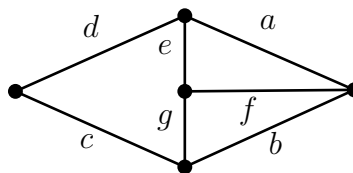
تعریف ۳۷.۱.۱. [۴] گراف کنسر^{۴۹}، گرافی است که آن را با $KG(m, n)$ نشان می‌دهیم و $m \geq 2n$ ، به طوری که مجموعه راس‌های آن را زیرمجموعه‌های n عضوی از مجموعه ثابت $\{1, 2, \dots, m\}$ تشکیل می‌دهند، یعنی تعداد راس‌های آن $\binom{m}{n}$ است و دو راس آن با هم مجاورند، اگر مجموعه‌های n عضوی متناظر آن‌ها هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند. همچنین تعداد یال‌های گراف $KG(m, n)$ که یک گراف $(\binom{m-n}{n})$ -منتظم می‌باشد برابر است با:

$$|E(K(G(m, n)))| = \frac{\binom{m}{n} \binom{m-n}{n}}{2} \quad (1.1)$$

گراف کامل K_m را می‌توان به صورت گراف کنسر $KG(m, 1)$ نشان داد.

تعریف ۳۸.۱.۱. یک k -رنگ آمیزی یالی f از گراف بدون طوقه G عبارت است از تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به یال‌های G . اگر در رنگ آمیزی f هیچ دو یال مجاوری هم رنگ نباشند آن را یک رنگ آمیزی مجاز^{۵۰} می‌نامیم.

یک k -رنگ آمیزی یالی را می‌توان به عنوان افراز $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ از E در نظر گرفت که در آن E_i برابر مجموعه‌ای از یال‌های E است که دارای رنگ i هستند در این صورت یک k -رنگ آمیزی یالی مجاز، یک k -رنگ آمیزی یالی $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ است که در آن هر زیرمجموعه E_i یک تطابق است. گراف شکل ۱۸.۱ دارای ۴-رنگ آمیزی یالی مجاز $(\{a, g\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d\})$ است.



شکل ۱۸.۱: گراف G

اگر G دارای یک k -رنگ آمیزی یالی مجاز باشد آن را k -رنگ پذیر یالی^{۵۱} می‌نامند.

تعریف ۳۹.۱.۱. یک k -رنگ آمیزی راسی G عبارت است از تخصیص این k رنگ $1, 2, \dots, k$ به راس‌های G . اگر هیچ دو راس مجاور دارای رنگ یکسان نباشند، رنگ آمیزی را مجاز^{۵۲} می‌نامیم. بنابراین یک k -رنگ آمیزی راسی مجاز از گراف بدون طوقه G ، عبارت است از افرازی مانند $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ از V به k مجموعه مستقل که راس‌های واقع در هر V_i دارای رنگ یکسان هستند. اگر G دارای یک k -رنگ آمیزی راسی مجاز باشد آن گاه G ، k -رنگ پذیر راسی^{۵۳} نامیده می‌شود. برای راحتی کار،

^{۴۸}Permutation

^{۴۹}Kneser graph

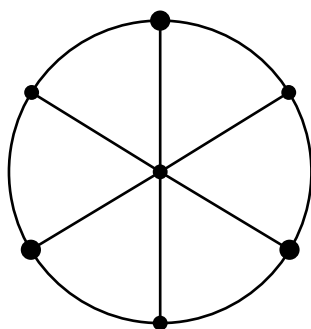
^{۵۰}Proper coloring

^{۵۱} K -edge colorable graph

^{۵۲}Proper

^{۵۳} K -vertex colorable

یک رنگ‌آمیزی مجاز را به‌طور ساده، یک رنگ‌آمیزی و k -رنگ‌آمیزی راسی مجاز را k -رنگ‌آمیزی می‌نامیم. همچنین k -رنگ‌پذیر راسی را به اختصار k -رنگ‌پذیر^{۵۴} می‌گوییم. در بحث رنگ‌آمیزی، فقط به گراف‌های ساده خواهیم پرداخت. یک گراف ساده، ۱-رنگ‌پذیر است اگر و تنها اگر تهی باشد و ۲-رنگ‌پذیر است اگر و تنها اگر دو بخشی باشد. عدد رنگی^{۵۵} $\chi(G)$ ، کوچک‌ترین k ای است که به ازای آن G ، k -رنگ‌پذیر است. اگر $\chi(G) = k$ ، در این صورت G را k -رنگی^{۵۶} می‌نامیم. یک گراف ۳-رنگی در شکل ۱۹.۱ نشان داده شده است. این گراف دارای یک ۳-رنگ‌آمیزی است و چون گراف دو بخشی نیست بنابراین نمی‌تواند ۲-رنگ‌پذیر باشد.



شکل ۱۹.۱: یک گراف ۳-رنگی

تعریف ۴۰.۱.۱. گرافی را قابل نشانیدن^{۵۷} در صفحه و یا سطح می‌نامیم، اگر بتوان آن را به گونه‌ای رسم کرد که هر یال آن، تنها در راس‌های دو سر خود با یال‌های دیگر برخورد داشته باشد. این طریقه رسم گراف سطح^{۵۸} G ، یک نشانیدن سطح^{۵۹} G نامیده می‌شود که از این گراف به‌عنوان گراف سطح شده^{۶۰} یاد می‌شود. شکل ۲۰.۱ یک نشانیدن سطح از گراف سطح ۱۷.الف را نشان می‌دهد.

قضیه زیر که یکی از معروف‌ترین نتایج کلاسیک مبحث رنگ‌آمیزی است توسط بروکس در سال ۱۹۴۱ بیان و اثبات شد.

قضیه ۴۱.۱.۱. [۲] اگر G یک گراف ساده همبند باشد که نه دور فرد و نه گراف کامل است آنگاه:

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

^{۵۴} K -colorable

^{۵۵} Chromatic number

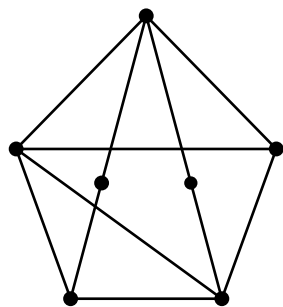
^{۵۶} K -chromatic

^{۵۷} Embedding

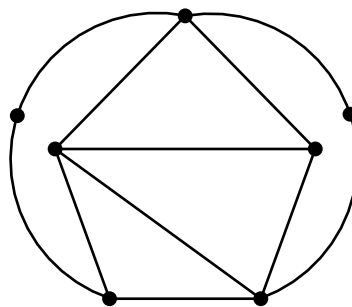
^{۵۸} Planar graph

^{۵۹} Planar embedding

^{۶۰} Plane graph



(الف)



(ب)

شکل ۲۰.۱: (الف) گراف مسطح G (ب) یک نشاندن مسطح G

فصل ۲

عدد رنگی سازگار

۱.۲ مقدمه

در این فصل به توصیف k -رنگ آمیزی سازگار برای گراف دلخواه G می پردازیم و نشان می دهیم که عدد رنگی سازگار نمی تواند از عدد رنگی تجاوز کند. در ادامه مطالبی از گراف هایی با عدد رنگی سازگار و گراف هایی که عدد رنگی سازگار آنها حداکثر دو است آورده خواهد شد همچنین به معرفی دو چرخه فرد-یالی و k -فرد-یالی می پردازیم و از آنها در اثبات قضیه ای که در ادامه ذکر شده بهره خواهیم برد.

۲.۲ عدد رنگی سازگار

مجموعه همه راس ها و همه یال های گراف G به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k, \quad E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$$

که با نگاشت متناظر $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ و $F : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ مشخص شده اند (که $f(v) = i$ اگر و تنها اگر $v \in V_i$ و $F(uv) = j$ اگر و تنها اگر $uv \in E_j$) با توجه به مطالب ذکر شده رنگ آمیزی سازگار به صورت زیر تعریف می شود:

اگر F یک k -رنگ آمیزی یالی از G باشد گوییم یک k -رنگ آمیزی راسی f سازگار با F وجود دارد، هرگاه برای هر یال $uv \in E(G)$ این یال تک رنگ نباشد به عبارت دیگر $f(u) = f(v) = F(uv)$ برقرار نباشد.

تعریف ۱.۲.۲. گراف G ، k -رنگ پذیر سازگار^۱ است اگر برای هر k -رنگ آمیزی یالی F از G یک k -رنگ آمیزی راسی f از G سازگار با F وجود داشته باشد.

^۱Adaptably K -colorable

تعریف ۲.۲.۲. کوچکترین عدد صحیح k به طوری که G ، k -رنگ پذیر سازگار باشد، عدد رنگی سازگار^۲ گراف G نامیده می شود که با نماد $\chi_{ad}(G)$ نشان داده می شود.

توجه داشته باشید که یک k -رنگ آمیزی راسی مجاز G با همه k -رنگ آمیزی های یالی سازگار است زیرا در رنگ آمیزی مجاز هر دو راسی که با هم مجاورند از رنگ یکسان نیستند بنابراین رنگ یال اتصالی بین این دو راس از هر رنگی باشد، رنگ آمیزی سازگار خواهد شد.

گزاره ۳.۲.۲. برای هر گراف G ، $\chi_{ad}(G) \leq \chi(G)$.

برهان. رنگ آمیزی راسی دلخواهی را در نظر می گیریم. راس ها را به صورت مجاز رنگ آمیزی می کنیم در این صورت هیچ دو راس واقع بر یک یال، همرنگ نخواهد شد یعنی همواره با χ رنگ می توان رنگ آمیزی را انجام داد و رنگ آمیزی سازگار نیز مساوی با این عدد یا کمتر از آن است زیرا هر رنگ آمیزی یالی را که در نظر بگیریم اگر راس ها را با χ رنگ به صورت مجاز رنگ آمیزی کنیم همواره رنگ آمیزی که بدست می آید نسبت به رنگ آمیزی یالی داده شده سازگار است. $\square$

۳.۲ گراف ها با عدد رنگی سازگار کوچک

در این بخش گراف های ۲-رنگ پذیر سازگار را توصیف می کنیم. به طور بدیهی $\chi_{ad}(G) = 1$ است اگر و تنها اگر G گراف بدون یال باشد در این صورت $\chi(G) = 1$ خواهد شد. برای گراف های با عدد رنگی سازگار دو، از گزاره زیر استفاده می شود.

گزاره ۱.۳.۲. فرض کنید E' زیر مجموعه ای از یال های G باشد. اگر $\chi(G - E') > |E'|$ آنگاه $\chi_{ad}(G) \leq \chi(G - E')$.

برهان. فرض کنید $\chi(G - E') = k$. یک k -رنگ آمیزی راسی مجاز c را از $G - E'$ در نظر می گیریم به طوری که مجموعه راس های $V(G) = V(G - E')$ به مجموعه راس های $V_1, V_2, \dots, V_k$ افراز شده است. خاصیت این افراز به گونه ای است که هیچ یالی از گراف $G - E'$ درون این بخش ها قرار ندارد ولی ممکن است یال هایی از گراف G داخل این بخش ها باشند زیرا رنگ آمیزی راسی دلخواه برای گراف $G - E'$ مجاز در نظر گرفته شده و می دانیم که در رنگ آمیزی مجاز، دو راس انتهایی یک یال نمی تواند همرنگ باشد، حال یک رنگ آمیزی یالی دلخواه F از گراف G را در نظر می گیریم، با تغییر رنگ های C نشان می دهیم که یک رنگ آمیزی راسی f سازگار با F وجود دارد.

یک رنگ آمیزی راسی در نظر می گیریم، مساله ای که پیش می آید به این صورت است که اگر یالی واقع در یکی از مجموعه های V_i رنگ $F(e)$ بگیرد کلاس V_i نمی تواند رنگ $F(e)$ داشته باشد، در صورت پذیرش رنگ $F(e)$ رنگ آمیزی سازگار نمی شود. پس هر یالی که در یکی از مجموعه های V_i باشد یک رنگ را برای آن مجموعه، ممنوع می کند. حال فرض کنید E'' مجموعه یال هایی در E' باشند که درون مجموعه های $V_1, \dots, V_k$ قرار دارند در واقع این یال ها همان یال هایی هستند که ایجاد مشکل می کنند.

^۲Adaptable chromatic number

بنا به فرض می‌دانیم $|E'| < k$ بنابراین $|E''| \leq k - 1$ و هر یال $e \in E''$ رنگ $F(e)$ را برای یکی از مجموعه‌های V_i ممنوع می‌کند. فرض کنید C_i مجموعه رنگ‌های مجاز برای مجموعه V_i باشد. همچنین فرض کنید کلاس V_1 رنگ ۱، کلاس V_2 رنگ ۲، ... و کلاس V_k رنگ k داشته باشد. اگر جای رنگ‌ها را عوض کنیم رنگ‌آمیزی هم چنان مجاز است زیرا داخل این کلاس‌ها یالی از $G - E'$ وجود ندارد، ادعا این است که $C_1, \dots, C_k$ دارای SDR ^۳ است. (یعنی رنگ‌های متمایز در C_i ها وجود داشته باشند. در واقع گوئیم $C_1, \dots, C_k$ دارای SDR است اگر $x_1, \dots, x_k$ های متمایز چنان وجود داشته باشد که $x_i \in C_i$.) اگر $C_1, \dots, C_k$ دارای SDR نباشد بنابراین در شرط هال^۴ صدق نمی‌کنند. حال اگر $C_1, \dots, C_k$ دارای SDR نباشند داریم:

$$\exists L \subseteq \{1, 2, \dots, k\} \quad , \quad L \neq \emptyset \quad , \quad |\bigcup_{i \in L} C_i| \leq L - 1$$

پس رنگ‌های مجاز برای C_1 حداکثر $L - 1$ عضو دارد.

⋮

رنگ‌های مجاز برای C_L حداکثر $L - 1$ عضو دارد.

بنابراین نتیجه می‌شود رنگ‌های غیر مجاز برای C_1 ، C_L ، $k - (L - 1)$ عضو دارد و

⋮

رنگ‌های غیر مجاز برای C_L ، C_1 ، $k - (L - 1)$ عضو دارد.

بنابراین حداقل $k - (L - 1)$ یال در C_1 داریم زیرا هر یال یک رنگ غیر مجاز ایجاب می‌کند.

⋮

همچنین حداقل $k - (L - 1)$ یال در C_L داریم

بنابراین $L(k - (L - 1)) \geq k$ ، ولی این متناقض با این فرض است که $|E''| \leq k - 1$ یا $|E'| < k$ توجه داشته باشید که در نامساوی بالا $k \geq L$ است. بنابراین یک رنگ‌آمیزی f سازگار با F وجود دارد. $\square$

یک نتیجه از گزاره ۱.۳.۲ نشان می‌دهد که عدد رنگی سازگار گراف G با حداقل دو یال، حداکثر برابر کوچکترین عدد رنگی بدست آمده از گرافی است که با حذف یک یال از G بدست می‌آید. بنابراین اگر حذف بعضی یال‌های G ، یک گراف دو بخشی ایجاد کند آنگاه آن گراف ۲-رنگ‌پذیر سازگار است. به نظر می‌رسد که این شرط، شرطی لازم برای گراف همبند G است که ۲-رنگ‌پذیر سازگار باشد.

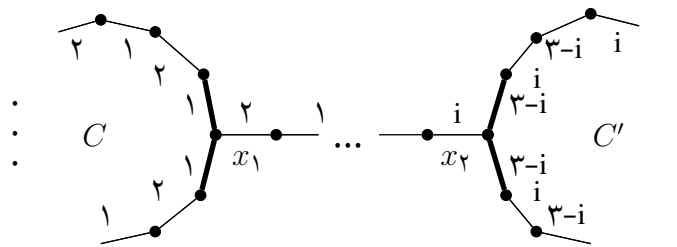
۴.۲ دوچرخه فرد-یالی و K_4 فرد-یالی

تعریف ۱.۴.۲. یک دوچرخه یالی اجتماعی از دو دور است که توسط مسیری به هم وصل شده‌اند. این مسیر ممکن است طول صفر داشته باشد یعنی $x_1 = x_2$. دورها و مسیر مستلزم این هستند که یال مجزا باشند در صورتی که راس‌ها ممکن است همدیگر را قطع کنند. اگر دو دور C و C' که در شکل

^۳Systems of distinct representatives

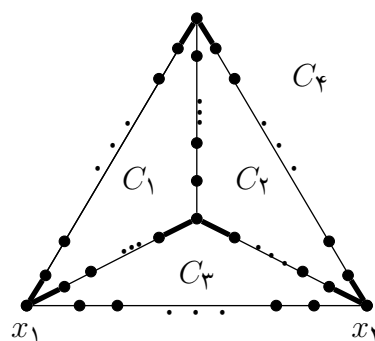
^۴Hall's theorem

نشان داده است فرد باشند آنگاه دوچرخه یالی، فرد^۵ است.



شکل ۱.۲: دوچرخه فرد-یالی

تعریف ۲.۴.۲. یک K_4 یالی، اجتماعی از چهار مسیر است. این مسیرها مستلزم این هستند که یال مجزا باشند اما راسها ممکن است همدیگر را قطع کنند. اگر چهار دور C_1, C_2, C_3, C_4 که در شکل ۲.۲ نشان داده شده است، همگی فرد باشند آنگاه K_4 یالی، فرد^۶ است و مطابق با شکل، دور C_4 مرزی از ناحیه خارجی است.



شکل ۲.۲: K_4 فرد-یالی

قضیه ۳.۴.۲. برای گراف همبند G عبارات زیر معادلند:

(۱) G ، ۲-رنگ پذیر سازگار است.

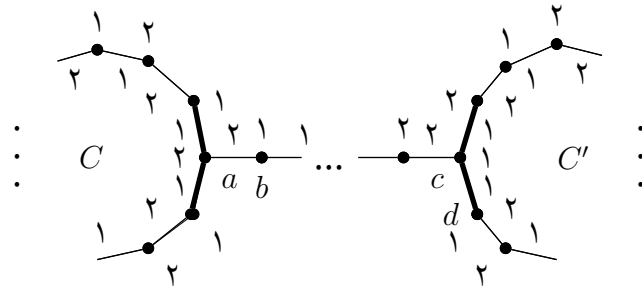
(۲) G ، دوچرخه فرد-یالی یا K_4 فرد-یالی ندارد.

(۳) یال e وجود دارد به طوری که $G - e$ دوبخشی است.

^۵odd edge-bicycle

^۶Odd edge - K_4

فرض می‌کنیم دو دور C_1 و C' فرد و مسیر بین آنها نیز فرد باشد. در این صورت مطابق شکل ۴.۲ اگر راس a را با رنگ ۲ رنگ‌آمیزی کنیم راس c رنگ ۱ را می‌پذیرد. حال رنگ‌آمیزی روی دور C' به این صورت انجام می‌گیرد که راس‌ها به‌طور یک‌درمیان با ۱ و ۲ در جهت ساعتگرد رنگ‌آمیزی می‌شوند پس راس d رنگ ۱ را خواهد گرفت که این بار نیز تناقض ایجاد می‌شود.



شکل ۴.۲: دوچرخه فرد-یالی با مسیر فرد

در مورد K_4 فرد-یالی نیز مشابه دوچرخه فرد-یالی است. اگر برای K_4 فرد-یالی رنگ‌آمیزی یالی F را در نظر بگیریم آنگاه رنگ‌آمیزی راسی سازگار با F وجود نخواهد داشت.

$$3 \Rightarrow 1$$

فرض کنید یال e وجود دارد به‌طوری‌که $G - e$ دو بخشی است. این حالت با استفاده از گزاره ۱.۳.۲ نتیجه می‌شود این گزاره بیان می‌کند که: اگر E' زیر مجموعه‌ای از یال‌های G وجود داشته باشد به‌طوری‌که $|E'| > \chi(G - E')$ آنگاه $\chi(G - E') \leq \chi_{ad}(G)$. اگر قرار دهید $E' = \{e\}$ در این صورت:

$$2 = \chi(G - \{e\}) > |\{e\}| = 1$$

$$\Rightarrow \chi_{ad}(G) \leq \chi(G - e) = 2$$

$$\Rightarrow \chi_{ad}(G) \leq 2$$

می‌دانیم گرافی دارای عدد رنگی ۲ است اگر و تنها اگر دو بخشی باشد بنابراین از آنجایی که G دارای حداقل یک یال است پس $\chi_{ad}(G) \geq 2$ و تساوی نیز برقرار می‌شود.

$$2 \Rightarrow 3$$

فرض کنید G دوچرخه فرد-یالی و K_4 فرد-یالی ندارد، نشان می‌دهیم که دو دور یال مجزا وجود ندارد. می‌دانیم G همبند است، عدم وجود دوچرخه فرد-یالی دلالت می‌کند که G ، دو دور فرد یال مجزا ندارد یعنی هر دو دور فرد متقاطعند. از اشتراک دو دور در یک یال نمی‌توان نتیجه گرفت که همگی دورها یک یال مشترک دارند پس فرض کنید یالی که در همه دورهای فرد صدق کند وجود ندارد.

برای دو دور فرد C_1 و C_2 از G ، یک بخش از $C_1 \cap C_2$ ، زیرمجموعه ماکسیمالی از $C_1 \cap C_2$ است. (یعنی یک بخش، مسیر ماکسیمال یا در واقع طولانی‌ترین مسیر یا بیشترین تعداد یال ممکن می‌باشد که باعث ایجاد یک مسیر بین C_1 و C_2 می‌شود.) دو دور فرد C_1 و C_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که $C_1 \cap C_2$ ، مینیم تعداد بخش‌ها را داشته باشد. ممکن است دو دور C_1 و C_2 دارای دو بخش باشد که در این صورت مینیم این دو بخش را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $C_1 \cap C_2$ دقیقاً یک بخش دارد. فرض کنید چنین نباشد و p_1 و p_2 دو بخش متوالی $C_1 \cap C_2$ است. دو راس انتهایی از p_i را a_i و b_i می‌نامیم همچنین فرض کنید Q_i مسیری از C_i باشد که b_1 را به a_2 وصل می‌کند و R_i مسیری از C_i باشد که b_2 را به a_1 وصل می‌کند.

اگر طول‌های Q_1 و Q_2 زوجیت متفاوت داشته باشند، آنگاه طول‌های R_1 و R_2 نیز زوجیت یکسان ندارند. در این مورد $Q_1 \cup Q_2$ و $R_1 \cup R_2$ دو گشت بسته فرد یال مجزا هستند، بنابراین G دو دور فرد یال مجزا دارد که مغایر با فرض است. پس Q_1 و Q_2 زوجیت یکسان دارند. فرض کنید C'_2 از C_2 با جایگزینی Q_2 با Q_1 بدست آید، آنگاه $C_1 \cap C'_2$ بخش‌های کمتری از $C_1 \cap C_2$ خواهد داشت که مغایر با انتخاب C_1 و C_2 است.

با توجه به این‌که R_1 و R_2 نیز زوجیت یکسان دارند با جایگزینی R_2 با R_1 و استدلالی مشابه بالا به تناقض می‌رسیم. دو دور C_1 و C_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که $C_1 \cap C_2$ یک بخش داشته باشند و در میان همه جفت دوره‌های فردی که متقاطع‌اند و تنها یک بخش دارند $|C_1 \cap C_2|$ مینیم باشد. فرض کنید $p = C_1 \cap C_2$ ، آنگاه $(C_1 \cup C_2) \setminus p$ یک دور زوج است. اگر e یالی از p باشد، بنابه فرض $G - e$ یک دور فرد C_3 دارد. علاوه بر این C_3 هر دو دور C_1 و C_2 را قطع می‌کند زیرا در غیر این صورت دو دور یال مجزا داریم که تناقض است.

با توجه به مطالب ذکر شده‌ی بالا، اگر $C_1 \cap C_3$ بیش از یک بخش داشته باشد آنگاه می‌توانیم یک زیر مجموعه Q_3 از C_3 را با یک زیر مجموعه Q_1 از C_1 جایگزین کنیم تا دور فرد دیگری با نام C'_3 بدست آوریم به طوری که $C_1 \cap C'_3$ بخش‌های کمتری از $C_1 \cap C_3$ دارد. علاوه بر این ممکن است فرض کنیم $Q_1 \notin e$ پس نتیجه می‌گیریم که $C_1 \cap C_3$ فقط یک بخش p' دارد. به طور مشابه اگر $C_2 \cap C_3$ بیش از یک بخش داشته باشد آنگاه می‌توانیم یک زیر مجموعه Q_3 از C_3 را با یک زیرمجموعه Q_2 از C_2 جایگزین کنیم تا دور فرد دیگری با نام C'_3 بدست آوریم به طوری که $C_2 \cap C'_3$ بخش‌های کمتری از $C_2 \cap C_3$ دارد پس فرض می‌کنیم که $C_2 \cap C_3$ فقط یک بخش p'' دارد.

اگر $p \cap p' \neq \emptyset$ آنگاه با توجه به این‌که $p \cap p' \subseteq C_2$ است و $C_2 \cap C_3$ تنها یک بخش دارد پس $p \cap p' \subseteq C_2 \cap C_3$. در این صورت این‌که $C_1 \cap C_3 \subseteq p - e$ یا $C_2 \cap C_3 \subseteq p - e$ متناقض با انتخاب C_1 و C_2 است. بنابراین فرض می‌کنیم $p \cap p' = \emptyset$ و به طور مشابه $p \cap p'' = \emptyset$. حال $C_3 \setminus C_1 \setminus C_2$ شامل دو مسیر به نام‌های B_1 و B_2 است که C_1 و C_2 را به هم وصل می‌کند. همچنین C_3 یک دور فرد است بنابراین هر دو $C_1 \cup C_2 \cup B_1$ یا $C_1 \cup C_2 \cup B_2$ یک K_4 فرد-یالی است ولی از ابتدا فرض بر این بود که دو دور یال مجزا وجود ندارد در صورتی‌که در K_4 فرد-یالی دو دور یال مجزا وجود دارد. $\square$

نتیجه ۴.۴.۲. یک گراف G ، ۲-رنگ‌پذیر سازگار است اگر و تنها اگر هر مولفه از G با حذف یک یال دو بخشی شود.

۵.۲ گراف‌های با عدد رنگی سازگار بزرگ

۱.۵.۲ مقدمه

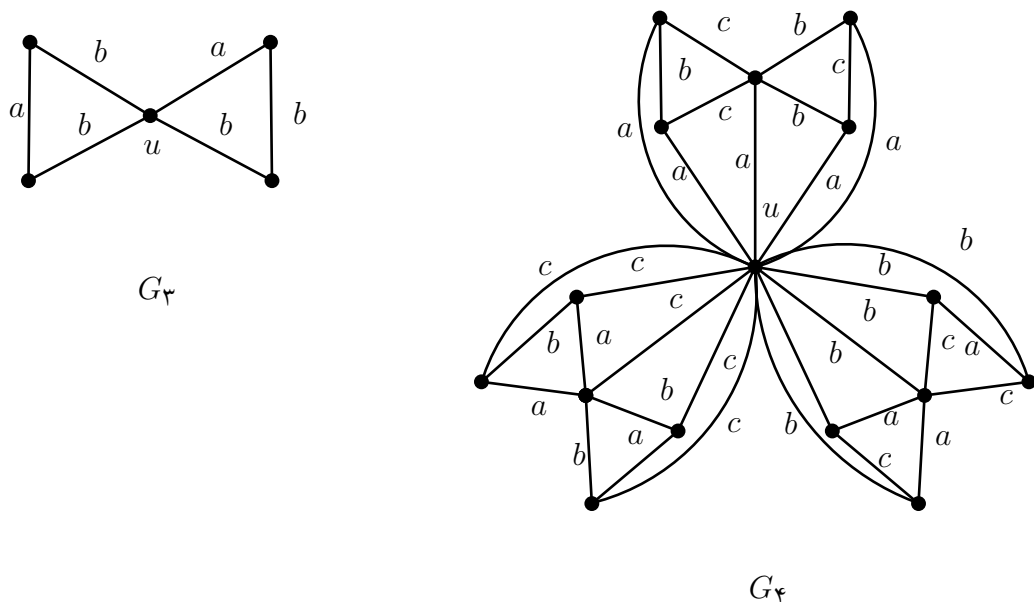
در این بخش در ابتدا ساختار معینی از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم به طوری که عدد رنگی سازگار و عدد رنگی معمولی آن‌ها یکسان و به دلخواه بزرگ است سپس با استفاده از گراف G_k ، گراف G'_k را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان رنگ‌آمیزی یالی F_k از G_{k+1} را به رنگ‌آمیزی یالی F'_k از G'_{k+1} گسترش داد. همچنین تعریفی از $G \cdot G_k$ ارائه خواهیم داد و در ضمن، قضیه‌ای را نشان می‌دهیم که گراف‌هایی با کمر و عدد رنگی به دلخواه بزرگ وجود دارند به طوری که عدد رنگی سازگار و عدد رنگی راسی آن‌ها یکسان است و در انتهای این بخش در مورد عدد رنگی سازگار گراف‌های کامل قضیه‌هایی مشابه ویژگی‌های مشهور عدد رنگی راسی، آورده شده است.

قضیه ۱.۵.۲. به ازای هر عدد طبیعی k ، گرافی مانند G_k وجود دارد به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\chi_{ad}(G_k) = \chi(G_k) = k$$

برهان. باید به ازای هر $k \geq 1$ نشان دهیم گراف G_k وجود دارد به طوری که رابطه زیر برقرار باشد $\chi_{ad}(G_k) = \chi(G_k) = k$. برای حالات $k = 1, 2$ فرض می‌کنیم $G_k = K_k$ ، در این مورد به روشنی رابطه $\chi_{ad}(K_k) = \chi(K_k) = k$ برقرار است.

فرض کنید G_k ساخته شده است. برای ساخت G_{k+1} ، k نسخه $G_k^1, \dots, G_k^k$ از G_k را در نظر می‌گیریم و همگی را به یک راس جدید مانند u وصل می‌کنیم به طوری که u با تمام راس‌های هر نسخه از G_k مجاور است. در شکل ۵.۲، G_3 و G_4 را مشاهده می‌کنید. با توجه به تعریف روشن است که



شکل ۵.۲: گراف‌های G_3 و G_4 ، با رنگ‌آمیزی یالی F_3 و F_4

$\chi(G_{k+1}) = \chi(G_k) + 1 = k + 1$. در ساختار G_{k+1} ، همگی G_k ‌ها به راسی مانند u وصل‌اند، پس

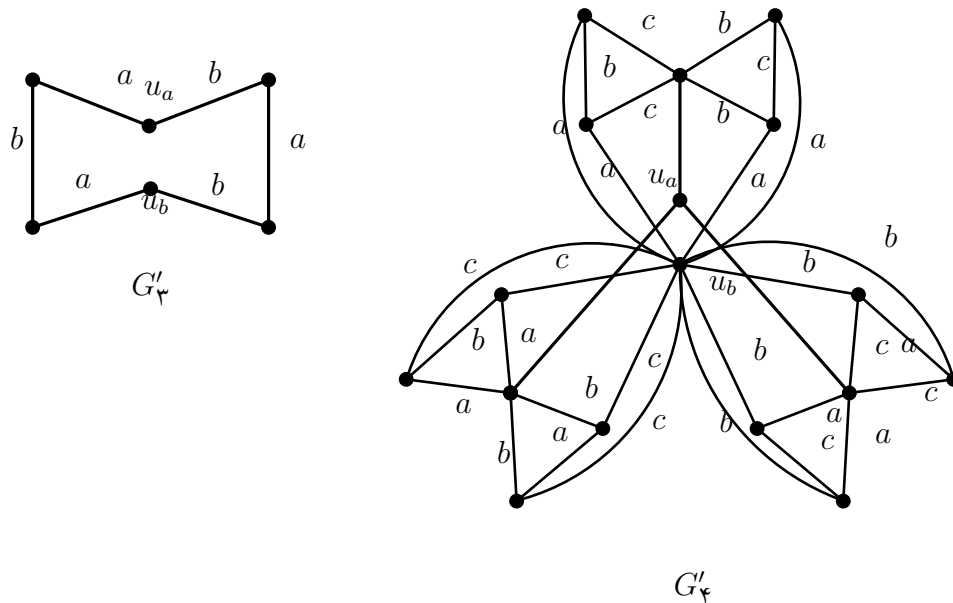
عدد رنگی G_{k+1} از عدد رنگی G_k نتیجه خواهد شد بنابراین عدد رنگی G_{k+1} برابر با $k+1$ خواهد شد. حال می‌خواهیم نشان دهیم که عدد رنگی سازگار G_{k+1} نیز $k+1$ است یعنی $\chi_{ad}(G_{k+1}) = k+1$. برای این کار به‌طور بازگشتی یک k -رنگ‌آمیزی یالی F_k از G_{k+1} تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که رنگ‌آمیزی راسی سازگار ندارد به عبارت دیگر G_{k+1} را نتوان با k رنگ به‌طور سازگار رنگ‌آمیزی کرد. بدیهی است که ۱-رنگ‌آمیزی یالی $F_1 = K_2$ از G_2 این خاصیت را دارد یعنی K_2 را با ۱-رنگ‌آمیزی نمی‌توان به‌طور سازگار رنگ‌آمیزی کرد. حال فرض کنید G_k یک $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی یالی F_{k-1} را می‌پذیرد به‌طوری‌که رنگ‌آمیزی راسی سازگار ندارد سپس قضیه را برای F_k ثابت می‌کنیم. رنگ‌آمیزی G_{k+1} به این صورت است که یال‌های خروجی از راس مرکزی u متصل به همه راس‌های G_k^i رنگ i می‌گیرد و یال‌های درون کپی‌های G_k^i برای $i = 1, 2, \dots, k$ مطابق با رنگ‌آمیزی F_{k-1} رنگ‌آمیزی می‌شود به غیر از همه یال‌های با رنگ i در F_{k-1} که با رنگ k جابه‌جا می‌شوند توجه کنید که G_k^k بدون هیچ تغییری مطابق با F_{k-1} رنگ شده است.

حال نشان می‌دهیم این گراف یک k -رنگ‌آمیزی سازگار با رنگ‌آمیزی یالی F_k ندارد به عبارت دیگر می‌خواهیم نشان دهیم که برای رنگ‌آمیزی سازگار به $k+1$ رنگ نیاز داریم. با توجه به فرض استقرا می‌دانیم، برای هر کدام از G_k^i ها یک F_{k-1} رنگ‌آمیزی یالی وجود دارد به‌طوری‌که رنگ‌آمیزی سازگار با آن وجود ندارد اما در اینجا با توجه به این‌که درون G_k^i ها رنگ i را با k جابه‌جا کردیم پس رنگ‌آمیزی سازگار با F_{k-1} رنگ‌آمیزی یالی وجود دارد که تناقض با فرض استقرا است. $\square$

تعریف ۲.۵.۲. فرض کنید G_k گراف ساخته شده بالا با $k \geq 3$ باشد. به‌روشنی u راس جامع یکتا در G_k است. G'_k به این صورت ساخته می‌شود که راس u از گراف G_k ، به دو راس u_a و u_b به شرح زیر تجزیه می‌شود و یال‌های مجاور u در G_k را بین u_a و u_b توزیع می‌کنیم. اگر $k \geq 4$ باشد، u_a فقط با راس جامع یکتای هر کدام از G_{k-1}^i ها که $i = 1, 2, \dots, k-1$ و u_b با بقیه راس‌های G_{k-1}^i ها مجاور است. برای $k=3$ ، u_a و u_b با یک راس از هر $G'_3 = K_2$ مجاور است. حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان رنگ‌آمیزی یالی F_k از G_{k+1} را به رنگ‌آمیزی یالی F'_k از G'_{k+1} گسترش داد.

لم ۳.۵.۲. فرض کنیم $k \geq 2$. گراف G'_{k+1} دارای این خاصیت است که برای هر جفت از رنگ‌های مجزای $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ یک رنگ‌آمیزی راسی f با $f(u_a) = i$ و $f(u_b) = j$ وجود دارد به‌طوری‌که با F'_k سازگار است. به عبارت دیگر رنگ‌آمیزی راسی سازگار با F'_k که u_a و u_b رنگ یکسان داشته باشند، وجود ندارد.

برهان. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\chi(G'_{k+1}) \leq k$. به عبارت دیگر کافی است نشان دهیم G'_{k+1} با k رنگ، می‌توانیم به‌طور مجاز رنگ‌آمیزی کنیم. با استفاده از رنگ‌آمیزی F_k که در قضیه قبل به‌طور کامل شرح داده شد به اثبات لم می‌پردازیم. G'_3 را با دو رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. زیرا G'_3 دوری زوج است و دورهای زوج با دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شوند. در حالت کلی فرض می‌کنیم G'_i را می‌توان با $i-1$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد نشان می‌دهیم که G'_{i+1} با i رنگ، قابل رنگ‌آمیزی است. G'_{i+1} به این صورت ساخته می‌شود که دو راس وجود دارد که به راس‌های G_i های مرحله قبل به نحوی



شکل ۶.۲: گراف‌های G'_3 و G'_4 ، با رنگ‌آمیزی یالی F_3 و F_4

که در تعریف بالا آورده شده وصل هستند به هر دو راس جدید رنگ i می‌دهیم با توجه به این که این دو راس مجاور نیستند مشکلی ایجاد نمی‌شود و G_i ها نیز با $i - 1$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شوند پس در نهایت G'_{i+1} با i رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. بنابراین G'_{k+1} ، رنگ‌پذیر سازگار است. یعنی گراف G'_{k+1} را به‌طور مجاز با k رنگ می‌توانیم رنگ کنیم. حال بدون توجه به رنگ‌های روی یال‌ها، گراف سازگار است زیرا دو سر هر یال، رنگی متفاوت دارد. از طرفی G_k را با $k - 1$ رنگ نمی‌توان به‌طور سازگار رنگ کرد پس حداقل عدد رنگی سازگار G'_{k+1} ، k است یعنی $\chi_{ad}(G'_{k+1}) \geq k$. از طرف دیگر G'_{k+1} ، k رنگ‌پذیر سازگار است پس $\chi_{ad}(G'_{k+1}) = k$. به عبارت دیگر عدد رنگی سازگار G'_{k+1} دقیقاً k است. با این حال اگر f یک رنگ‌آمیزی سازگار با F' باشد به طوری که رنگ راس‌های u_a و u_b یکسان باشند آنگاه با فرض $f(u) = f(u_a)$ یعنی با اختصاص دادن رنگ راس u_a (که همان رنگ راس u_b است) به راس u در گراف G_{k+1} یک رنگ‌آمیزی سازگار با F_k برای G_{k+1} به دست می‌آید که با قضیه ۱.۵.۲ در تناقض است. حال با توجه به این که گراف G'_k متقارن است پس جابه‌جایی رنگ‌ها مشکلی در سازگاری ایجاد نمی‌کند پس برای u_a و u_b می‌توان هر دو رنگ مجزایی را قرار داد. بنابراین نگاشت $f: \{u_a, u_b\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ را می‌توان به یک رنگ‌آمیزی از G'_{k+1} سازگار با F'_k گسترش داد اگر و فقط اگر $f(u_a) \neq f(u_b)$.

تعریف ۴.۵.۲. گراف G و یالی از آن مانند $e = xy$ را در نظر می‌گیریم. گوییم یک کپی G'_k جایگزین یال e شده است هرگاه یال e را حذف کنیم و یک کپی از G'_k را به جای یال e قرار دهیم، x و y را به ترتیب متناظر u_b و u_a در نظر می‌گیریم. برای گراف دلخواه G اگر هر یال را با یک کپی G'_k جایگزین کنیم گرافی که بدست می‌آید با $G \cdot G_k$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۵.۲. $\chi(G) \leq k - 1$ اگر و تنها اگر $\chi_{ad}(G \cdot G_k) \leq k - 1$

برهان. حالت اول، حالتی است که G ، $k-1$ -رنگ پذیر باشد، با توجه به این که G'_k حداکثر با $k-1$ رنگ، رنگ آمیزی می شود پس می توانیم این $(k-1)$ -رنگ آمیزی را تبدیل به یک رنگ آمیزی برای $G \cdot G_k$ کنیم در نتیجه $\chi(G \cdot G_k) \leq k-1$ و با توجه به این که $\chi_{ad}(G \cdot G_k) \leq \chi(G \cdot G_k)$ پس خواهیم داشت $\chi_{ad}(G \cdot G_k) \leq \chi(G \cdot G_k) \leq k-1$. حالت بعد، حالتی است که G ، $k-1$ رنگ پذیر نباشد، اگر F یک $(k-1)$ -رنگ آمیزی یالی از $\chi(G \cdot G_k)$ باشد به طوری که این رنگ آمیزی اجتماعی از $(k-1)$ -رنگ آمیزی های یالی F_{k-1} ، از کپی های G'_k باشد، آنگاه در هر $(k-1)$ -رنگ آمیزی راسی از $\chi(G \cdot G_k)$ یک کپی از G'_k وجود دارد که u_a و u_b رنگ یکسان i را به خود می گیرند، زیرا با توجه به ساختار گراف $G \cdot G_k$ می دانیم که راس های این گراف مجموعه راس های گراف G به علاوه یک سری از راس های اضافی دیگر است، همه این راس ها را با حداکثر $k-1$ رنگ، رنگ آمیزی کردیم حال اگر راس های غیر از راس های G را کنار بگذاریم و تنها راس های G را در نظر بگیریم در این صورت یک رنگ آمیزی با $k-1$ رنگ برای راس های G داریم، پس حتماً دو راس مجاور در G وجود دارد که رنگ یکسان دارند. زیرا G ، $k-1$ -رنگ پذیر نیست حال در گراف $G \cdot G_k$ این دو راسی که به هم وصل هستند را با یک کپی G'_k جایگزین می کنیم به طوری که یک سرش u_a و سر دیگر آن u_b است بنابراین با توجه به لم ۳.۵.۲ هیچ رنگ آمیزی راسی از کپی های G'_k سازگار با F_{k-1} وجود ندارد و در نتیجه رنگ آمیزی سازگار با F نیست. $\square$

۲.۵.۲ کمر بزرگ

در این قضیه می خواهیم گرافی مانند G با کمر بزرگ و عدد رنگی سازگار بزرگ بسازیم به طوری که داشته باشیم $\chi_{ad}(G) = \chi(G)$.

قضیه ۶.۵.۲. برای هر دو عدد صحیح $k, g \geq 3$ گراف G^* با کمر حداقل g وجود دارد به طوری که $\chi_{ad}(G^*) = \chi(G^*) = k$.

برهان. در این قضیه دو عدد صحیح k و g داده شده است نشان می دهیم گرافی وجود دارد که عدد رنگی سازگار آن برابر با k باشد اما کمر گراف بزرگتر مساوی g است به عبارت دیگر گراف دارای کمر و عدد رنگی سازگار بزرگ است. گراف k -بخشی کامل $K_{n,n,\dots,n}$ را در نظر می گیریم در این گراف هر بخش n راس دارد یعنی هر کدام از V_i ها به صورت $\{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n}\}$ هستند. راس های $K_{n,n,\dots,n}$ به مجموعه های $V_1, V_2, \dots, V_k$ افراز شده اند پس مجموعه راس های گراف k -بخشی کامل به صورت $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ است. حال یک زیر گراف تصادفی با نام G از این گراف k -بخشی کامل می سازیم به گونه ای که هر یالی از $K_{n,n,\dots,n}$ با احتمال $p = \frac{1}{n^{1-\epsilon}}$ متعلق به G است و با احتمال $1-p$ متعلق به G نیست. سپس یال های گراف G به طور تصادفی، مستقل و یکنواخت با رنگ های $\{1, 2, \dots, k\}$ رنگ می شود. در مقیاس کوچک تر اگر گراف G به صورت یک گراف با سه راس و سه یال باشد احتمال این که این گراف تشکیل شود p^3 است زیرا برای تشکیل شدن این گراف حضور هر سه یال نیز الزامی است یعنی باید اولین یال حضور داشته باشد، دومین یال نیز حضور داشته باشد و سومین یال نیز در گراف ظاهر شود، که احتمال حضور هر سه یال، p است بنابراین احتمال تشکیل

این گراف $p \times p \times p = p^3$ خواهد شد. حال احتمال تشکیل گراف دلخواه با L یال به صورت L -تعداد کل یالها $p^L(1-p)$ است. به عنوان مثال در گراف معرفی شده قبلی با سه راس و سه یال اگر یکی از یالها را حذف کنیم با احتمال $p^2(1-p)^{3-2}$ گراف ساخته می شود. گراف ساخته شده G گرافی تصادفی است، در این گراف تعدادی یال وجود دارد که رنگ های $\{1, 2, \dots, k-1\}$ را به طور تصادفی، مستقل و با احتمال یکسان به این یالها نسبت می دهیم. پیشامد A به این صورت تعریف می شود:

$i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ، $i \neq j$ ، یک رنگ $t \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ و مجموعه های $U \subseteq V_i$ و $W \subseteq V_j$ با $|U| = |W| = \lceil \frac{n}{\sqrt{k}} \rceil$ وجود دارند به طوری که هیچ یالی از رنگ t بین U و W نیست.

احتمال پیشامد A به صورت $p(A) \leq k^3 n^{\frac{n}{\sqrt{k}}} (1 - \frac{p}{k})^{\frac{n}{\sqrt{k}}} = O(e^{-n^\epsilon})$ است، که در آن n به اندازه کافی بزرگ است و e^{-n^ϵ} به سمت صفر میل می کند بنابراین $p(A)$ کمتر از $\frac{1}{p}$ است یا به عبارت دیگر $p(A^c) > \frac{1}{p}$. فرض کنید i, j ثابت هستند، با توجه به پیشامد A رنگ t نباید بین یالها ظاهر شود انتخاب یک i, j از کل i, j ها $\binom{k}{2}$ است، همچنین برای اینکه یالی رنگ t بگیرد حداکثر $k-1$ حالت وجود دارد پس $\binom{k}{2}(k-1) \leq k^3$. حال می خواهیم تعداد کل یالهای بین U و W را شمارش کنیم برای این کار گراف دو بخشی با بخش های U و W را در نظر می گیریم به طوری که $|U| = |W| = \lceil \frac{n}{\sqrt{k}} \rceil$. در گراف دو بخشی کامل از هر راس U به هر راس W یک یال وجود دارد بنابراین تعداد یالهای این گراف برابر حاصل ضرب تعداد راسهای U در تعداد راسهای W خواهد شد، یعنی $\frac{n}{\sqrt{k}} \times \frac{n}{\sqrt{k}} = \frac{n^2}{k}$. پس در گراف اصلی که گراف k -بخشی کامل است به تعداد $\frac{n^2}{\sqrt{k}^4}$ یال بین دو بخش U و W وجود دارد. حال می خواهیم احتمالی را محاسبه کنیم که یالی بین U و W ظاهر شود ولی از رنگ t نباشد. برای این که بین این یالها رنگ t حضور نداشته باشد باید یالی که انتخاب می کنیم رنگ t نداشته باشد بنابراین این یال یا باید انتخاب نشود و یا یال انتخابی از رنگ t نباشد. احتمال این که یالی ظاهر نشود $1-p$ است و احتمال حضور یک یال نیز p می باشد. بعد از این که یالی با احتمال p انتخاب شد با احتمال $\frac{1}{k-1}$ رنگ t به این یال اختصاص داده می شود پس با احتمال $1 - \frac{1}{k-1}$ این یال رنگ t نمی گیرد. بنابراین

$$p(1 - \frac{1}{k-1}) + (1-p) = 1 - \frac{p}{k-1} < 1 - \frac{p}{k}$$

پیشامد $A_{i,j,t}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ، $i \neq j$ ، و $t \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ و $U \subseteq V_i$ و $W \subseteq V_j$ و $|U| = |W| = \lceil \frac{n}{\sqrt{k}} \rceil$ وجود دارد به طوری که هیچ یالی از رنگ t وجود ندارد.

$$\bigcup A_{i,j,t} = A \Rightarrow p(A) = p(\bigcup A_{i,j,t}) \leq \sum p(A_{i,j,t})$$

با توجه به این که احتمال همه ی پیشامدهای $A_{i,j,t}$ یکسانند پس احتمال یکی از پیشامدها را محاسبه می کنیم و در تعداد آنها ضرب می کنیم. برای U و W که $U \subseteq V_i$ و $W \subseteq V_j$ با $|U| = |W| = \lceil \frac{n}{\sqrt{k}} \rceil$ ، احتمال این که هیچ یالی بین U و W از رنگ t نباشد را محاسبه می کنیم. قبلا نشان دادیم که احتمال این که یک یال با رنگ t ظاهر نشود $1 - \frac{p}{k}$ است بنابراین تعداد کل یالهایی که این خاصیت را دارند $(1 - \frac{p}{k})^{\lceil \frac{n}{\sqrt{k}} \rceil}$ است ولی با توجه به این که $\frac{n^2}{\sqrt{k}^4} \leq \lceil \frac{n^2}{\sqrt{k}^4} \rceil$ قرار می دهیم $(1 - \frac{p}{k})^{\frac{n^2}{\sqrt{k}^4}}$. حال تعداد انتخاب هایی که برای U وجود دارد $(\frac{n}{\sqrt{k}})$ است، همچنین تعداد انتخاب هایی که برای W وجود دارد نیز

$\left(\frac{n}{\sqrt{k}}\right)$ است بنابراین

$$p(A_{i,j,t}) \leq \binom{n}{\frac{n}{\sqrt{k}}} \binom{n}{\frac{n}{\sqrt{k}}} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^{\frac{n}{\sqrt{k}}}$$

می‌دانیم

$$\binom{n}{t} \leq n^t \Rightarrow \binom{n}{\frac{n}{\sqrt{k}}} \leq n^{\frac{n}{\sqrt{k}}}$$

پس

$$\begin{aligned} p(A) = p\left(\bigcup A_{i,j,t}\right) &\leq \binom{k}{2} (k-1) \cdot n^{\frac{n}{\sqrt{k}}} \cdot n^{\frac{n}{\sqrt{k}}} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^{\frac{n}{\sqrt{k}}} \\ &\leq k^2 \cdot n^{\frac{n}{\sqrt{k}}} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^{\frac{n}{\sqrt{k}}} = O(e^{-n^\epsilon}) \end{aligned}$$

هدف این است که در گراف تصادفی ساخته شده G ، در نهایت گرافی بدست آوریم که کمرش بزرگتر یا مساوی g باشد. حال ممکن است G تعدادی دور از طول کمتر از g داشته باشد به طوری که میانگین تعداد دورهای با طول کمتر یا مساوی $g-1$ حداکثر $\sum_{l=3}^{g-1} (kn)^l l! p^l$ است. در بیان درستی این عبارت، p^l احتمال این است که دوری به طول l اتفاق بیفتد، در تایید $(kn)^l$ می‌توان چنین بیان کرد که:

باید از یکی از بخش‌ها (که n راس دارد) راسی انتخاب کنیم، پس با احتمال kn یک راس از یک بخش انتخاب می‌شود. بار دیگر برای انتخاب یک راس از یک بخش kn حالت داریم بنابراین تعداد کل انتخاب‌ها $(kn)^l$ است. در تایید $l!$ نیز می‌توان بیان کرد که: یک دور را می‌توانیم به $l!$ طریق بسازیم به این صورت که l راس داریم، این l راس را به طور مرتب در کنار هم می‌چینیم تا دوری تشکیل شود برای راسی که راس در ابتدای دور قرار می‌گیرد l حالت وجود دارد، برای راس بعدی، $l-1$ حالت وجود دارد، ... و برای آخرین راس یک حالت وجود دارد بنابراین $l!$ حالت خواهیم داشت. پس تعداد دورهای به طول l در گراف $K_{n,n,\dots,n}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{l=3}^{g-1} (kn)^l l! p^l &\leq (g-1)! \sum_{l=3}^{g-1} (knp)^l \\ &= \frac{(knp)^g - (knp)^3}{(knp) - 1} = \frac{(kn^\epsilon)^g - (kn^\epsilon)^3}{kn^3 - 1} \\ &\simeq \frac{n^{\epsilon g}}{n^\epsilon} = O(n^{\epsilon g}) \end{aligned}$$

زمانی که n به اندازه کافی بزرگ باشد توان‌های بزرگ صورت و مخرج به صورت $\frac{n^{\epsilon g}}{n^\epsilon}$ خواهد بود و در نتیجه زمانی که n به سمت ∞ میل می‌کند می‌توان ϵ را آنقدر کوچک در نظر گرفت که اگر در g ضرب شود $\epsilon g < 1$. در این صورت n به توان یک عدد کمتر از ۱ زمانی که n به اندازه کافی بزرگ شود $\frac{1}{4}n \ll n^{\epsilon g}$. نتیجه می‌گیریم با احتمال بیشتر از $\frac{1}{4}$ گراف تصادفی کمتر از $\frac{n}{4}$ دور از طول کمتر از g دارد یعنی $p(X < \frac{n}{4}) > \frac{1}{4}$ با توجه به قانون احتمال می‌دانیم که $p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A \cup B) \leq 1$ از آنجایی که $p(X < \frac{n}{4}) > \frac{1}{4}$ و $p(A^c) > \frac{1}{4}$ پس اجتماع این دو احتمال از یک بیشتر خواهد شد

بنابراین اشتراک دو احتمال ناتهی است و با احتمال مثبت اتفاق می‌افتد در نتیجه با احتمال مثبت گراف تصادفی G کمتر از $\frac{n}{4}$ دور از طول کمتر از g دارد و همچنین A اتفاق نمی‌افتد. به طور خاص زیر گراف G' از $K_{n,n,\dots,n}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند وجود دارد.

(۱) G' حداکثر $\frac{n}{4}$ دور از طول کمتر از g دارد.

(۲) برای هر $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ($i \neq j$) و برای هر $t \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ و هر مجموعه $U \subseteq V_i$ و $W \subseteq V_j$ با $|U| = |W| = \lceil \frac{n}{4k^2} \rceil$ یالی از رنگ t بین U و W وجود دارد.

فرض کنید G^* گرافی است که با حذف $\frac{n}{4}$ از راس‌های هر V_i در گراف G' بدست می‌آید بنابراین در G^* دوری به طول کمتر از g وجود ندارد. رنگ آمیزی یالی F از G^* القا شده توسط G' را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که G^* رنگ آمیزی سازگار با F ندارد. فرض کنید چنین چیزی برقرار نباشد یعنی G^* رنگ آمیزی سازگار با F داشته باشد پس G^* یک رنگ آمیزی f دارد که با $(k-1)$ -رنگ آمیزی یالی F سازگار است پس یکی از کلاس‌های رنگی با نام $f^{-1}(t)$ از اندازه $|f^{-1}(t)| \geq k \frac{n}{4(k-1)}$ است. این دلالت بر این موضوع دارد که دو اندیس مجزای $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ وجود دارند به طوری که $|f^{-1}(t) \cap V_i| \geq \frac{n}{4k^2}$ و $|f^{-1}(t) \cap V_j| \geq \frac{n}{4k^2}$. اما با توجه به خاصیت دوم، یال $e \in E_t$ بین دو راس $f^{-1}(t)$ وجود دارد که متناقض با فرض سازگاری f با F است. بنابراین $\chi_{ad}(G^*) \geq k$. با توجه به این که G^* به وضوح k -رنگ پذیر است پس $\chi(G^*) = k$ و هر k -رنگ آمیزی راسی مجاز یک k -رنگ آمیزی سازگار است بنابراین G^* ، k -رنگ پذیر سازگار است یعنی $\chi_{ad}(G^*) \leq k$ پس $\chi_{ad}(G^*) = k$ و $\chi(G^*) = k$. $\square$

۳.۵.۲ محدوده درجات و گراف‌های سطح

مشابه عدد رنگی معمولی، عدد رنگی سازگار گراف نیز کرانی بر حسب درجه ماکسیمم راس‌ها (Δ) دارد با این تفاوت که کران عدد رنگی بنابر قضیه بروکس برابر با $\Delta + 1$ است ولی کران عدد رنگی سازگار در حدود $3\sqrt{\Delta}$ می‌باشد. در قضیه بروکس گفته می‌شود که رابطه‌ای بین درجه ماکسیمم گراف و عدد رنگی آن وجود دارد، مطابق با این قضیه در یک گراف همبند، در صورتی که هر راس حداکثر Δ همسایه داشته باشد، راس‌ها می‌تواند با تنها Δ رنگ، رنگ آمیزی شوند، غیر از دو مورد گراف‌های کامل و گراف‌های دوری از طول فرد که به $\Delta + 1$ رنگ نیاز دارند.

قضیه ۷.۵.۲. برای هر گراف G با درجه ماکسیمم Δ داریم: $\chi_{ad}(G) \leq \lceil \sqrt{e(2\Delta - 1)} \rceil$ (منظور از e پایه لگاریتم طبیعی است).

برهان. فرض کنیم $k = \lceil \sqrt{e(2\Delta - 1)} \rceil$. اگر G یک گراف و F یک k -رنگ آمیزی یالی از G باشد با استفاده از لم لواژ نشان می‌دهیم که یک k -رنگ آمیزی راسی سازگار با F وجود دارد. مجموعه همه k -رنگ آمیزی‌های راسی G را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که A_{e_1} نشان‌دهنده پیشامدی باشد که e_1 یال تک‌رنگ است (یعنی رنگ آمیزی سازگار وجود ندارد). احتمال این پیشامد $\frac{1}{k^2}$ می‌باشد. به عبارت دیگر $P_r(A_{e_1}) = \frac{1}{k^2}$.

علاوه بر این اگر یال‌های e_1 و e_2 با هم تقاطع نداشته باشند پیشامدهای A_{e_1} و A_{e_2} مستقل‌اند. بنابراین هر A_{e_1} وابسته به $2(\Delta - 1)$ پیشامد دیگر است. با توجه به لم لواژ^۷ [۱] پیشامد A_i از همه پیشامدها مستقل است جز در Δ تا از آنها، در اینجا هر پیشامد A_{e_1} جز در یکی با بقیه وابستگی دارد یعنی با حداکثر $\Delta - 1$ تا وابسته است. برای A_{e_2} نیز وضعیت مشابهی برقرار است بنابراین هر پیشامد A_{e_1} حداکثر با $2(\Delta - 1)$ پیشامد دیگر وابسته است پس با توجه به لم لواژ داریم:

$$e \frac{1}{k^2} (2\Delta - 1) \leq 1 \implies e(2\Delta - 1) \leq k^2 \implies \sqrt{e(2\Delta - 1)} \leq k$$

که متناقض با $k = \lceil \sqrt{e(2\Delta - 1)} \rceil$ است.

در نتیجه هیچ‌کدام از A_{e_1} ها رخ نمی‌دهند یعنی یال تکرنگ e_1 وجود ندارد. به عبارت دیگر یک رنگ‌آمیزی راسی f وجود دارد به‌طوری‌که هیچ‌کدام از پیشامدهای A_{e_1} رخ نمی‌دهند یعنی f با F سازگار است. $\square$

تعریف ۸.۵.۲. فرض کنید $A_1, \dots, A_n$ پیشامدهایی در یک فضای احتمالاتی دلخواه باشند فرض کنید هر پیشامد A_i از همه پیشامدهای دیگر مستقل است به‌جز حداکثر با d تا از آن‌ها، و برای همه A_i ها، $P_r(A_i) \leq p$ و اگر شرایط خاصی روی p و d وجود داشته باشد آنگاه

$$P_r(\cap_{i=1}^n \overline{A_i}) = \prod_{i=1}^n P_r(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^n (1 - P_r(A_i)) > 0$$

و رابطه $ep(d+1) \leq 1$ برقرار است.

قضیه ۹.۵.۲. برای هر گراف مسطح G ، $\chi_{ad}(G) \leq 4$ است و گراف‌های مسطح G با $\chi_{ad}(G) = 4$ موجوداند.

برهان. قسمت اول نتیجه‌ای از قضیه چهار رنگ^۸ است و قسمت دوم از قضیه ۱۰.۵.۲ حاصل می‌شود. $\square$ برای $k = 4$ گراف G_k مسطح است، که در شکل ۵.۲ نشان داده شد.

تعریف ۱۰.۵.۲. (قضیه چهار رنگ). هر گراف مسطح ۴ رنگ‌پذیر است.

۴.۵.۲ گراف‌های کامل

رنگ‌آمیزی سازگار گراف‌های کامل پارامتری جالب است. برای $n > 2$ داریم $\chi_{ad}(K_n) < \chi(K_n)$ در حقیقت بنابر قضیه ۷.۵.۲ برای عدد ثابت $c < 3$ داریم $\chi_{ad}(K_n) \leq c\sqrt{n}$.

نتیجه ۱۱.۵.۲. برای هر عدد n داریم $\chi_{ad}(K_n) \leq \lceil \sqrt{e(2n-3)} \rceil$.

برهان. بنابه قضیه ۷.۵.۲ برای هر گراف G با ماکسیمم درجه Δ داریم: $\chi_{ad}(G) \leq \lceil \sqrt{e(2\Delta-1)} \rceil$ در گراف‌های کامل K_n ، درجه ماکسیمم برابر با $n-1$ است پس

$$\chi_{ad}(G) \leq \lceil \sqrt{e(2(n-1)-1)} \rceil = \lceil \sqrt{e(2n-3)} \rceil$$

$\square$

^۷Lovasz Local Lemma

^۸Four- color theorem

قضیه ۱۲.۵.۲. $\chi_{ad}(K_{2^n}) > n$.

برهان. برای $n \geq 1$ ، فرض کنید K_{2^n} گراف کاملی باشد به طوری که راس‌های آن n تایی مرتب از صفر و یک‌ها است یعنی $V(G) = \{x = (x_1 x_2 \dots x_n) : x_i \in \{0, 1\}\}$ ، حال یک n -رنگ آمیزی یالی F_n از K_{2^n} تعریف می‌کنیم که در آن رنگ آمیزی هر یال به این صورت است که هر دو راس از هر دو سریال شامل n تایی‌های مرتب از صفر و یک می‌باشد اولین نقطه‌ای که این n تایی‌ها با هم فرق می‌کنند رنگ یال مورد نظر خواهد شد به عبارت دیگر یال xy با رنگ t رنگ آمیزی خواهد شد، اگر $x_i = y_i$ برای $x_t \neq y_t, i = 1, 2, \dots, t-1$.

با استقرا روی n باید نشان دهیم که K_{2^n} رنگ آمیزی سازگار با F_n ندارد. برای $n = 1$ واضح است. برای $n \geq 2$ فرض می‌کنیم که رنگ آمیزی f_n سازگار با F_n وجود دارد. برای هر $(n-1)$ تایی مرتب از صفر و یک‌ها حداقل یکی از راس‌های w^0 و w^1 رنگ n نمی‌پذیرند در واقع w^0 و w^1 ، n تایی‌هایی مرتب از صفر و یک‌ها هستند و یالی که w^0 و w^1 را به هم متصل می‌کند رنگ n را پذیرفته است پس اگر w^0 و w^1 هر دو همزمان رنگ n بپذیرند در این صورت رنگ آمیزی سازگار وجود نخواهد داشت بنابراین حداقل یکی از این راس‌ها رنگ n را نمی‌پذیرند. حال فرض کنید اگر w^0 با رنگ n ، رنگ آمیزی نشده باشد $i_w = 0$ و در بقیه حالت‌ها $i_w = 1$ بنابراین مجموعه

$\{w^1 : n-1 \text{ تایی مرتب از صفر و یک‌ها می‌باشد} : wi_w\} = X$ شامل یک کپی از $K_{2^{n-1}}$ با $n-1$ رنگ آمیزی یالی F_{n-1} است. بنابراین رنگ آمیزی f_n شامل یک $n-1$ رنگ آمیزی از $K_{2^{n-1}}$ سازگار با F_{n-1} است که تناقض است. $\square$

با توجه به این که پارامترها صعودی هستند اگر H یک زیر گراف G باشد آنگاه $\chi_{ad}(G) \geq \chi_{ad}(H)$.

نتیجه ۱۳.۵.۲. $\chi_{ad}(K_n) \geq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

برای مقادیر کوچک n ، کران پایین عبارت بالا دست یافتنی است. با توجه به تحقیقات انجام شده نشان داده شده است که اگر $n \leq 10$ باشد آنگاه $\chi_{ad}(K_n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. بنابراین برای مقادیر بزرگ n ، با استفاده از رنگ آمیزی تصادفی یال‌ها می‌توان نشان داد و نتیجه گرفت که $\chi_{ad}(K_n) \geq c\sqrt{n/\log n}$ بنابراین کران بالای نتیجه ۱۳.۵.۲ دور از واقعیت نیست و داریم:

$$\sqrt{n/\log n} \leq \chi_{ad}(K_n) \leq c\sqrt{n}.$$

فصل ۳

رنگ آمیزی لیستی سازگار گراف های مسطح

۱.۳ مقدمه

در این فصل، به مطالعه رنگ آمیزی لیستی سازگار گراف های ساده می پردازیم و عدد انتخابی سازگار را معرفی می کنیم. همچنین نشان می دهیم که گراف های فاقد K_5 -کها، ۴-انتخاب پذیر سازگار هستند. در ادامه نشان خواهیم داد که گراف های مسطح فاقد مثلث، ۳-انتخاب پذیر سازگار هستند اما این نتیجه در مورد گراف های مسطح فاقد ۴-دور و گراف های مسطح فاقد ۵-دور و همچنین گراف های مسطح فاقد مثلث با فاصله k ($k \geq 0$) برقرار نیست.

فرض کنید G گرافی ساده (که در آن طوقه و یال چند گانه وجود ندارد) و $F : E(G) \rightarrow N$ یک رنگ آمیزی یالی از این گراف باشد. یک k -رنگ آمیزی $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ از راس های G با رنگ آمیزی F سازگار است اگر برای هر $uv \in E(G)$ ، رابطه $c(v) \neq F(uv)$ یا $c(v) \neq c(u)$ برقرار باشد، به عبارت دیگر روی یک یال و دو راس انتهایی آن رنگ یکسان ظاهر نشود. اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد به طوری که برای هر رنگ آمیزی یالی F از G ، یک k -رنگ آمیزی راسی از G سازگار با F وجود داشته باشد گوییم G ، k -رنگ پذیر سازگار است.

کوچکترین عدد صحیح k به طوری که G ، k -رنگ پذیر سازگار باشد، عدد رنگی سازگار G نامیده می شود و با نماد $\chi_{ad}(G)$ نشان داده می شود.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید $L : V(G) \rightarrow \mathbb{N}^2$ لیست سازگاری به راس های G و F یک رنگ آمیزی یالی این گراف باشد گوییم رنگ آمیزی c از G ، سازگار با F یک L -رنگ آمیزی سازگار^۱ با F ، است اگر برای هر راس $v \in V(G)$ ، داشته باشیم $c(v) \in L(v)$.

تعریف ۲.۱.۳. اگر برای هر رنگ آمیزی یالی F از G و هر لیست واگذاری L با $|L(v)| \geq k$ که در آن $v \in V(G)$ است (برای همه v ها) یک L -رنگ آمیزی از G سازگار با F وجود داشته باشد گوییم G ، k -انتخاب پذیر سازگار^۲ است.

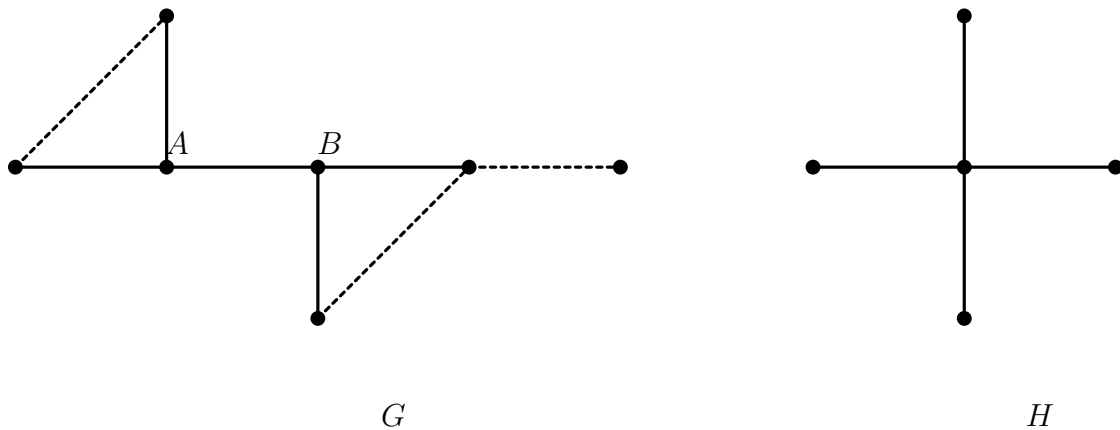
^۱ L - coloring adapted

^۲ Adaptably k - choosable

تعریف ۳.۱.۳. کوچکترین عدد صحیح k به طوری که G ، k -انتخاب پذیر سازگار باشد عدد انتخابی سازگار^۳ گراف G نامیده می شود و با نماد $ch_{ad}(G)$ نشان داده می شود.

با توجه به این که یک k -رنگ آمیزی راسی مجاز از گراف G با هر رنگ آمیزی یالی G سازگار است بنابراین روشن است که برای هر گراف G ، $\chi_{ad}(G) \leq \chi(G)$ و $ch_{ad}(G) \leq ch(G)$ که $\chi(G)$ و $ch(G)$ به ترتیب عدد رنگی معمولی G و عدد انتخابی معمولی G می باشند.

تعریف ۴.۱.۳. گراف H یک کهاد^۴ از G نامیده می شود اگر یک کپی از H را بتوان به کمک انقباض یال ها و یا حذف راس ها و یال های G به دست آورد. کهاد یک گراف، یکتا نیست و یک گراف ممکن است بیش از یک کهاد داشته باشد به طور مثال گراف کامل K_5 و گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ هر دو کهادهایی از گراف پترسن هستند. در شکل زیر H ، کهادی G است که با حذف یال هایی که به صورت نقطه چین در شکل نشان داده شده و انقباض دو راس A و B بدست آمده است.



شکل ۱.۳: G و کهادی از آن

تعریف ۵.۱.۳. گراف G را فاقد H -کهاد می نامند که در آن H ای که کهاد باشد وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر با هیچ عملیات حذف راس ها و انقباض یال ها نتوان به H به عنوان یک کهاد از G دست یافت.

۲.۳ گراف های فاقد K_5 - کهاد

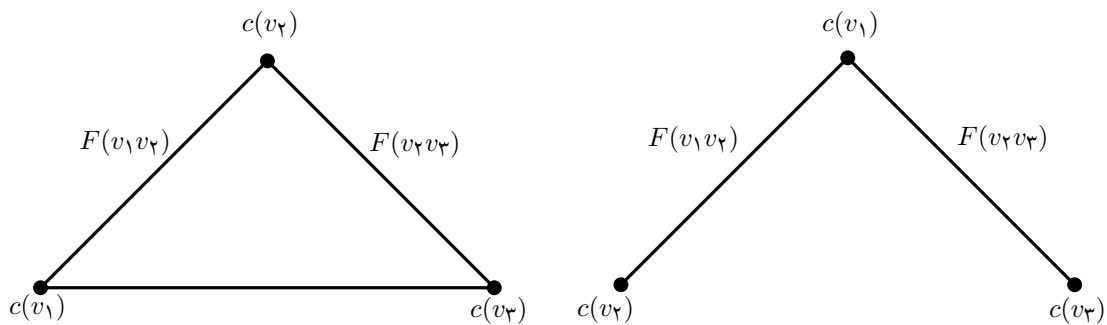
لم ۱.۲.۳. فرض کنید G گراف مسطحی باشد که یال های آن رنگ آمیزی شده است و k تایی C به صورت $C = (v_1, \dots, v_k)$ وجه خارجی G است. همچنین ϕ رنگ آمیزی سازگار از راس های v_1 و v_2 می باشد، همین طور فرض کنید هر راس $v \in C$ که مجزا از راس های v_1 و v_2 است، یک لیست رنگی $L(v)$ از

^۳Adaptable choice number

^۴Minor

اندازه حداقل سه دارد و هر راس $v \in V(G) \setminus C$ یک لیست رنگی $L(v)$ از اندازه حداقل چهار دارد، آنگاه رنگ‌آمیزی ϕ را می‌توان به یک L -رنگ‌آمیزی سازگار از G گسترش داد.

برهان. این لم را با استقرا روی تعداد راس‌ها، $|V(G)|$ ، ثابت می‌کنیم. اگر $|V(G)| = 3$ باشد حکم بدیهی است. با توجه به فرض، یال‌های گراف مسطح G رنگ‌آمیزی شده است و همچنین راس‌های v_1 و v_2 به ترتیب رنگ‌های $c(v_1)$ و $c(v_2)$ دارند و یال بین راس‌های v_1 و v_2 رنگ $F(v_1v_2)$ دارد با توجه به این که روی یال v_1v_2 رنگ‌آمیزی به صورت سازگار تعریف شده است پس یا رنگ راس‌های v_1 و v_2 متفاوت است و یا این که رنگ این دو راس یکسانند و با یال میانی متفاوت هستند یعنی برای $v_1v_2 \in E(G)$ ، $c(v_1) \neq c(v_2)$ یا $c(v_1) \neq F(v_1v_2)$. برای راس سوم دو حالت داریم در حالتی که گراف ناهمبند است، رنگ راس v_3 هر چه باشد رنگ‌آمیزی به طور سازگار باقی می‌ماند اما در حالتی که گراف همبند است راس سوم ممکن است به یکی از راس‌ها یا به هر دو آن‌ها وصل باشد. با توجه به این که راس سوم نیز روی وجه خارجی گراف قرار دارد پس در لیست رنگی آن حداقل سه رنگ وجود دارد. در این حالت ممکن است از این سه رنگ یکی در راس v_1 و یکی در راس v_2 استفاده شده باشد و یا یک رنگ برای هر دو راس v_1 و v_2 استفاده شده باشد. در این دو حالت برای راس v_3 ، حداقل یک یا دو رنگ باقی می‌ماند که برای آن به کار می‌بریم و به این ترتیب رنگ‌آمیزی ϕ را به یک L -رنگ‌آمیزی سازگار برای کل گراف گسترش می‌دهیم. حال قضیه را در حالتی که $|V(G)| \geq 4$ ثابت می‌کنیم و فرض



$$L(v_3) = \{a, b, c\}$$

$$c(v_3) \in L(v_3) \setminus \{c(v_1), c(v_2)\} \neq \emptyset$$

$$c(v_1) \neq c(v_2)$$

$$c(v_3) \in L(v_3) \setminus \{c(v_2)\}$$

$$c(v_1) = c(v_2)$$

شکل ۲.۳: G

می‌کنیم این قضیه برای گراف‌های کوچکتر برقرار است.

تعریف ۲.۲.۳. گراف مسطح خارجی گرافی است که بتوان آن را به طور مسطح طوری در صفحه ترسیم کرد که هر راس آن راسی از وجه بی‌کران باشد.

با توجه به این که زیر گراف G_C از G ، القا شده توسط C یک گراف مسطح خارجی است بنابراین

با توجه به گزاره ای از وست^۵ [۱۲] که می دانیم هر گراف ساده مسطح شده خارجی دارای راسی از درجه حداکثر دو است پس G_C شامل دو راس v_i و v_j از درجه حداکثر دو می باشد به طوری که در G_C مجاور نیستند و هیچکدام از آن ها راس برشی G_C نیست یعنی اگر یکی از آن ها را از گراف G_C حذف کنیم ناهمبندی ایجاد نمی شود.

با توجه به این که G_C زیر گراف القایی G است پس اگر v_i و v_j برای گراف G_C راس برشی نباشد آنگاه برای G نیز راس برشی نخواهد شد و همچنین روی وتری از C قرار نمی گیرند. v_i و v_j از درجه ای دو هستند ولی اگر روی وتری از C قرار گیرند آنگاه درجه آن ها بیشتر از دو خواهد شد و تناقض ایجاد می شود. یکی از راس ها (به نام v_i) مجزا از v_1 و v_2 است به این دلیل که از فرض لم می دانیم v_1 و v_2 مجاورند و از تعریف گراف مسطح خارجی نیز می دانیم v_i و v_j غیر مجاورند. حال فرض کنید v_i همان v_1 باشد در این صورت v_j بنا به مطالب ذکر شده نمی تواند v_2 باشد.

در ادامه فرض کنید $\alpha \in L(v_i)$ رنگی متمایز از رنگ یال های $v_i v_{i+1}$ و $v_i v_{i-1}$ باشد. همسایه های راس v_i دو دسته اند یک سری روی وجه خارجی C قرار دارند و یک سری از آنها روی وجه خارجی C قرار ندارند، از لیست رنگی همسایه های v_i که روی وجه خارجی C قرار ندارند α را حذف می کنیم. با توجه به این که این راس ها، روی وجه خارجی قرار ندارند پس بنا به فرض لیست رنگی آنها حداقل چهار رنگ دارد، حال که رنگ α از آنها حذف شد پس لیست رنگی آنها حداقل سه رنگ بیشتر ندارد. جایگاه این راس ها در گراف $G \setminus v_i$ راس های واقع بر وجه خارجی هستند و لیست رنگی آنها حداقل شامل سه رنگ است این گراف یک راس v_1 و یک راس v_2 دارد که رنگ آن ها معلوم است پس بنا به فرض استقرا می توان $G \setminus v_i$ را رنگ آمیزی کرد حال با واگذاری رنگ α به راس v_i یک L -رنگ آمیزی سازگار به دست می آید زیرا رنگ راس v_i با یال های $v_i v_{i+1}$ و $v_i v_{i-1}$ یکسان نیست همچنین α را هم از لیست رنگی همسایه های غیر از v_{i-1} و v_{i+1} حذف کردیم پس این راس ها و راس v_i رنگ غیر یکسان دارند و سایر راس ها نیز با توجه به فرض استقرا رنگ شده بودند، پس در نهایت یک L -رنگ آمیزی سازگار برای G بدست می آوریم. $\square$

لم ۳.۲.۳. فرض کنید G گراف مسطحی باشد که یال های آن رنگ آمیزی شده است. هر راس v از G یک لیست رنگی $L(v)$ از اندازه حداقل چهار دارد و H زیرگرافی از G است که با K_2 یا K_3 یکرخت می باشد. همچنین فرض کنید ϕ یک L -رنگ آمیزی سازگار H باشد، آنگاه می توان ϕ را به یک L -رنگ آمیزی سازگار G گسترش داد.

برهان. فرض کنید G مثال نقضی با مینیم مرتبه (مینیم درجه راس ها) باشد یعنی گراف هایی وجود دارند که این لم برای آن ها برقرار نیست. بین تمامی این گراف ها، گرافی را انتخاب می کنیم که کمترین تعداد راس ممکن را دارد. اگر H با K_2 یکرخت باشد آنگاه وجهی واقع بر H در نظر می گیریم به طوری که وجه خارجی باشد. با به کار بردن لم قبل برای این نشان دادن مسطح از G به نتیجه مطلوب این قضیه می رسیم. به عبارت دیگر وجهی از گراف G را در نظر می گیریم که برای گراف H وجه خارجی باشد. بنا به فرض می دانیم ϕ یک L -رنگ آمیزی سازگار H است پس با توجه به این که تمامی فرض های لم قبل برقرار است، با به کار بردن آن برای این لم می توان ϕ را به یک L -رنگ آمیزی سازگار از G گسترش داد.

^۵West

در بخش دیگری از این لم به اثبات آن برای گراف H زمانی که H با K_3 یکرخت است، می‌پردازیم. پس فرض کنید که H با K_3 یکرخت باشد و $V(H) = \{u, v, w\}$. اکنون دو حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. حالت اول زمانی رخ می‌دهد که H به‌عنوان یک گراف جداساز در G قرار می‌گیرد یعنی گراف $H \simeq K_3$ باعث ایجاد دو زیر گراف G_1 و G_2 می‌شود به‌طوری‌که G_1 توسط راس‌های H و راس‌های درون H و G_2 توسط راس‌های H و راس‌های خارج H القا شده است. پس می‌توان هر کدام از این دو گراف را با یک L -رنگ‌آمیزی سازگار، رنگ‌آمیزی کرد یعنی برای G_1 می‌توان یک L -رنگ‌آمیزی سازگار و برای G_2 نیز می‌توان یک L -رنگ‌آمیزی سازگار تعریف کرد، در این صورت می‌توان این L -رنگ‌آمیزی سازگار گراف‌های G_1 و G_2 را به یک L -رنگ‌آمیزی سازگار برای G گسترش داد. در حالت دوم فرض کنید H گراف جداساز نباشد. همچنین فرض کنید H مرز وجه خارجی گراف G باشد. بنابراین K_3 وجه خارجی G خواهد شد یعنی $C = (u, v, w)$ که C وجه خارجی در گراف G است. حال گراف $G' = G - w$ را در نظر بگیرید و لیست رنگی این گراف را چنین فرض کنید که برای هر راس x مجاور با w البته غیر از u, v ، $L'(x) = L(x) \setminus \{\phi(w)\}$ و برای راس‌های دیگری که متمایز از u, v هستند $L'(x) = L(x)$. زمانی که از لیست رنگی همسایه‌های w که روی وجه خارجی قرار ندارند $\phi(w)$ را حذف می‌کنیم، لیست رنگی آنها حداقل سه رنگ بیشتر ندارد زیرا قبلاً در لیست رنگی آنها حداقل چهار رنگ وجود داشت. این راس‌ها در گراف $G' = G - w$ روی وجه خارجی قرار دارند. پس بنابه لم ۱.۲.۳ برای این گراف یک L -رنگ‌آمیزی سازگار وجود دارد و می‌توان این گراف را رنگ‌آمیزی کرد حال با دادن رنگ $\phi(w)$ به راس w یک L -رنگ‌آمیزی سازگار برای G بدست می‌آید زیرا ما از لیست رنگی همسایه‌های w غیر از u, v رنگ $\phi(w)$ را حذف کردیم پس برای هر رنگ‌آمیزی یالی، یک L -رنگ‌آمیزی سازگار برای گراف G خواهیم داشت. $\square$

لم ۴.۲.۳. فرض کنید G گراف فاقد K_5 -کهاد، ماکسیمال یالی باشد. فرض کنید که هر راس v از G یک لیست رنگ‌آمیزی $L(v)$ از اندازه حداقل چهار دارد. اگر H زیرگرافی از G یکرخت با K_2 و K_3 و ϕ یک L -رنگ‌آمیزی سازگار H باشد آنگاه ϕ را می‌توان به یک L -رنگ‌آمیزی G گسترش داد.

برهان. فرض کنید G مثال نقضی با مینیم مرتبه (مینیم درجه راس‌ها) باشد یعنی گراف‌هایی وجود دارند که این لم برای آن‌ها برقرار نیست، بین تمامی این گراف‌ها، گرافی را انتخاب می‌کنیم که کمترین تعداد راس ممکن را دارد. گراف‌هایی که در نظر گرفتیم، به گونه‌ای هستند که لم برای آن‌ها برقرار نیست یعنی اگر شرایط لم حاکم باشد و ϕ یک L -رنگ‌آمیزی سازگار H باشد آنگاه ϕ را نمی‌توان به یک L -رنگ‌آمیزی سازگار برای G گسترش داد.

حالتی که در این لم به وضوح دیده می‌شود این است که اگر گراف G گراف مسطحی باشد و در شرایط لم صدق کند با توجه به لم قبل نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. واضح است که G با گراف وگنر^۶ یکرخت نیست، فرض کنید چنین نباشد می‌دانیم این گراف، گرافی ۳-منتظم است در این صورت اگر با توجه به فرض‌های موجود در لم، به هر راس یک لیست رنگ‌آمیزی از اندازه حداقل چهار اختصاص دهیم آنگاه L -رنگ‌آمیزی سازگار از یک یال (K_2) را می‌توان به یک L -رنگ‌آمیزی سازگار برای کل گراف وگنر گسترش داد که تناقض است. بنابراین G با گراف وگنر یکرخت نیست.

^۶Wagner

همچنین اگر G ، مثلث بندی مسطح باشد آنگاه نتیجه مطلوب بلافاصله از لم قبل نتیجه می شود و برای G یک L -رنگ آمیزی سازگار خواهیم داشت که تناقض است. بنابراین ممکن است فرض کنیم G نه مثلث بندی مسطح و نه گراف وگنر باشد. با توجه به قضیه وگنر [۱۱]، $G = G_1 \cup G_2$ به طوری که G_1 و G_2 زیرگراف های سره از G هستند به طوری که $G_1 \cap G_2$ یکریخت با K_2 یا K_3 است. به روشنی $H \subseteq G_1$ یا $H \subseteq G_2$ ، بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $H \subseteq G_2$ ، با به کار بردن فرض استقرا روی G_1 ، ϕ را می توان به یک L -رنگ آمیزی سازگار G_1 القا می کند. با به کار بردن فرض استقرا روی G_2 ، ϕ را می توان به یک L -رنگ آمیزی سازگار روی G_2 گسترش داد که یک L -رنگ آمیزی سازگار $G_1 \cap G_2$ را القا می کند. اجتماع این L -رنگ آمیزی های سازگار G_1 و G_2 یک L -رنگ آمیزی سازگار برای $G_1 \cup G_2 = G$ خواهد بود. $\square$

قضیه ی زیر نتیجه ای از لم ۴.۲.۳ است:

قضیه ۵.۲.۳. هر گراف فاقد K_5 -کهاد، ۴-انتخاب پذیر سازگار است.

۳.۳ گراف های مسطح فاقد مثلث

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید G گراف ساده مسطح و فاقد مثلث^۲ است که یال های آن رنگ آمیزی شده باشد و $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ وجه خارجی گراف باشد. فرض کنید L ، یک لیست واگذاری است که به هر راس x یک مجموعه $L(x)$ با سه رنگ مجاز اختصاص می دهد با این تفاوت که برخی از راس های روی C تنها دو رنگ مجاز دارند اما هر یال G ، حداقل یک راس انتهایی x دارد به طوری که سه رنگ مجاز دارد آنگاه G ، L -رنگ پذیر سازگار است.

برهان. فرض می کنیم G همبند است. قضیه را با به کار بردن استقرا روی تعداد راس ها ثابت می کنیم. اگر $|V(G)| \leq 4$ ، باشد حکم بدیهی است.

فرض کنید $|V(G)| \geq 5$ است. مسیر $P(v_i, x, v_j)$ ، v_i و v_j را به هم متصل می کند. در صورتی که اگر $v_i, v_j \in C$ ، $x \notin C$ و $|L(v_i)| + |L(v_j)| = 5$ باشد آنگاه $P(v_i, x, v_j)$ یک وتر طولانی نامیده می شود. فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعه وترها^۸، و ترهای طولانی^۹ و راس های برشی C باشد. فرض کنید $P \in \mathcal{P}$ وتر (v_i, v_j) و یا وتر طولانی (v_i, x, v_j) متصل بین v_i و v_j باشد. با استفاده از دو مولفه همبندی A_P و B_P از $C - \{v_i, v_j\}$ نشان می دهیم. فرض می کنیم که $|A_P| \leq |B_P|$ است. اگر $P \in \mathcal{P}$ راس برشی از C باشد با استفاده از A_P که کوچکترین مولفه همبندی $C - P$ است قضیه را نشان می دهیم.

فرض کنید $P^* \in \mathcal{P}$ وتر، وتر طولانی یا راس برشی باشد به طوری که $|A_{P^*}|$ مینیمم است.

^۲Triangle-free planar graph

^۸Chord

^۹Long chord

ادعا ۲.۳.۳. A_{P^*} شامل راس v_t است که راس برشی نیست همچنین $|L(v_t)| = 3$ و v_t در هیچ وتر یا وتر طولانی C واقع نمی‌باشد.

ادعا را در سه گام ثابت می‌کنیم:

گام اول

نخست مشاهده می‌شود که A_{P^*} شامل راس برشی نیست زیرا اگر A_{P^*} شامل راس برشی باشد آنگاه دو مولفه همبندی کوچکتر از A_{P^*} وجود دارد که با فرض این که P^* ، مینیمال است در تناقض خواهد بود. حال فرض می‌کنیم P^* شامل یک تک راس برشی v باشد. در این صورت A_{P^*} شامل حداقل دو راس مجاور v_i و v_{i+1} است که هیچ‌کدام از آن‌ها در وتر یا وتر طولانی قرار نمی‌گیرند زیرا اگر v_i و v_{i+1} روی یک وتر واقع شوند با حذف وتر، دو مولفه همبندی کوچکتر از A_{P^*} ، ایجاد می‌شود که با فرض این که P^* مینیمال است در تناقض است، همچنین اگر v_i و v_{i+1} روی یک وتر طولانی نیز قرار گیرند وضعیت مشابهی پیش می‌آید و با حذف این وتر طولانی دو مولفه همبندی کوچکتر از A_{P^*} ایجاد می‌شود که با مینیمال بودن P^* در تناقض است. بنابه فرض می‌دانیم که هر یال حداقل یکی از راس‌های انتهایی اش لیست رنگ‌آمیزی از اندازه سه دارد بنابراین $t \in \{i, i+1\}$ وجود دارد به طوری که $|L(v_t)| = 3$ است.

گام دوم

فرض کنید $P^* = (v_i, x, v_j)$ وتر طولانی است و $|L(v_j)| = 2$ و $A_{P^*} = (v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1})$. آنگاه با توجه به فرض قضیه که هر یال حداقل در یکی از راس‌های انتهایی اش لیست رنگ‌آمیزی از اندازه سه دارد پس $|L(v_{j-1})| = 3$ ، زیرا در غیر این صورت، اگر $|L(v_{j-1})| = 2$ آنگاه با فرض قضیه تناقض ایجاد می‌شود زیرا $v_j v_{j-1}$ یالی از G است که هر دو راس انتهایی آن با لیست رنگ‌آمیزی از اندازه دو خواهد شد که تناقض آشکاری با فرض قضیه دارد. در ادامه با توجه به این که گراف G ، فاقد مثلث است، راس v_{j-1} با x مجاور نخواهد شد زیرا می‌دانیم v_{j-1} با v_j مجاور است و از تعریف وتر طولانی نیز می‌دانیم که v_j با x مجاور است. حال اگر v_{j-1} با x مجاور شود در این صورت سه راس x ، v_j و v_{j-1} تشکیل یک مثلث می‌دهند که متناقض با فرض قضیه است. از طرفی اگر v_{j-1} روی یک وتر یا یک وتر طولانی P' قرار گیرد آنگاه با حذف این وتر یا وتر طولانی از گراف، مولفه کوچکتر A_{P^*} را خواهیم داشت یعنی $A_{P'} \subset A_{P^*}$. بنابراین $|A_{P'}| < |A_{P^*}|$ که با انتخاب P^* در تناقض است.

گام سوم

فرض کنید $P^* = (v_i, v_j)$ یک وتر است و $A_{P^*} = (v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1})$. با توجه به این که G فاقد مثلث است $v_{i+1} \neq v_{j-1}$. زیرا می‌دانیم که v_i و v_{i+1} و همچنین v_j و v_{j-1} دو به دو راس‌های مجاور هستند. حال اگر $v_{i+1} = v_{j-1}$ باشد مثلث ایجاد می‌شود که تناقض است. با توجه به این که هر

یال G حداقل یک راس انتهایی x دارد که دارای سه رنگ مجاز است پس $t \in \{i+1, i+2\}$ وجود دارد به طوری که مشابه با استدلال گام قبل، v_t در هیچ وتر یا وتر طولانی از C قرار ندارد. به این ترتیب در سه گام ادعا را ثابت کردیم.

حال در ادامه روند اثبات فرض می کنیم $v_t \in C$ راسی باشد که راس برشی نیست همچنین $|L(v_t)| = 3$ و v_t در هیچ وتر یا وتر طولانی از C قرار ندارد. فرض کنید $\alpha \in L(v_t)$ رنگی متمایز با رنگ دو یال $v_{t-1}v_t$ و v_tv_{t+1} باشد. اگر راس v_t را از G حذف کنیم گراف حاصل G' نامیده می شود پس $G' = G - v_t$ ، همچنین فرض کنید L' لیست واگذاری G' باشد. $L'(x)$ در دو حالت تعریف می شود زمانی که x یک همسایه v_t مجزا از v_{t-1} و v_{t+1} باشد، $L'(x) = L(x) - \{\alpha\}$ و در بقیه حالات $L'(x) = L(x)$. پس $L'(x)$ برای راس داخلی x از G' شامل سه رنگ مجاز است و با توجه به این که v_t روی هیچ وتر قرار ندارد، هر راس x روی وجه خارجی G' ، شامل حداقل دو رنگ مجاز است. در غیر این صورت یعنی اگر v_t روی وتر قرار گیرد باید از لیست رنگی راس x واقع بر وجه خارجی، کم شود. بنابه فرض می دانیم برخی از راس های روی وجه خارجی در لیست رنگی خود دو رنگ دارند اگر راس x چنین راسی باشد، زمانی که α را از لیست رنگی آن حذف کنیم تنها یک رنگ باقی می ماند و این مغایر با فرض است و در نتیجه از لیست رنگی راس های روی مرز، رنگی کم نمی شود که منجر شود به این که لیست شان دارای یک رنگ شود. علاوه بر این، با توجه به این که v_t روی هیچ وتر طولانی از C نیز قرار ندارد، پس هر یالی از G' حداقل یک راس انتهایی x با سه رنگ مجاز دارد در غیر این صورت اگر فرض کنیم v_t روی یک وتر طولانی از C قرار دارد آنگاه راسی که روی وجه خارجی قرار می گیرد ممکن است در لیست رنگی خود دو رنگ مجاز داشته باشد و راس میانی نیز که یکی از همسایه های v_t غیر از v_{t-1} و v_{t+1} بود نیز، با توجه به فرض های گفته شده در قضیه، در لیست رنگی خود دو رنگ دارد. بنابراین یالی ایجاد می شود که دو راس انتهایی آن لیست رنگی با دو رنگ دارد و متناقض با فرض قضیه خواهد شد. پس بنابه استقرا G' در شرایط قضیه صدق می کند، در نتیجه L' -رنگ پذیر سازگار است. حال هر L' -رنگ آمیزی سازگار G' را می توان به یک L -رنگ آمیزی سازگار G گسترش داد که این کار با رنگ آمیزی راس v_t با رنگ α صورت می پذیرد. با رنگ آمیزی راس v_t با α تمامی شرایط قضیه برای این که G, L -رنگ پذیر سازگار شود فراهم است. با توجه به این که رنگ α متمایز با رنگ یال های $v_{t-1}v_t$ و v_tv_{t+1} است پس این یال ها در سازگاری مشکلی ایجاد نمی کنند. با توجه به این که رنگ α از لیست رنگ آمیزی راس های همسایه v_t غیر از v_{t-1} و v_{t+1} حذف شده بنابراین این یال ها نیز در سازگاری مشکل ساز نخواهد بود بنابراین G, L -رنگ پذیر سازگار خواهند شد. $\square$

قضیه ی زیر نتیجه ای از قضیه ی ۱.۳.۳ است:

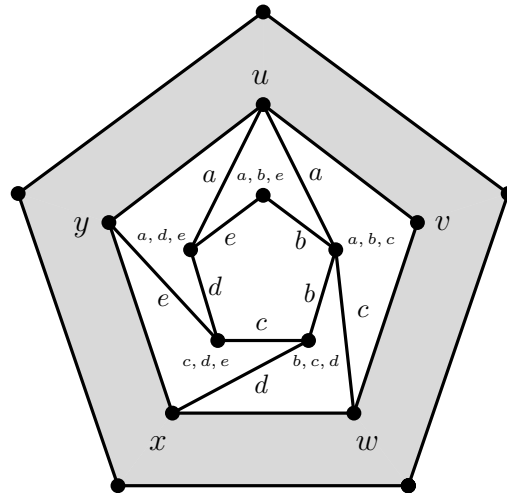
قضیه ۳.۳.۳. هر گراف مسطح فاقد مثلث، ۳-انتخاب پذیر سازگار است.

۴.۳ گراف های مسطح فاقد مثلث با فاصله K

تعریف ۱.۴.۳. فاصله بین دو مثلث xyz و uvw برابر است با مینیمم فاصله بین یک راس از $\{x, y, z\}$ و یک راس از $\{u, v, w\}$. برای هر گراف، مینیمم فاصله ی بین دو مثلث را با نماد $d_t(G)$ نشان می دهیم.

اگر G شامل حداکثر یک مثلث باشد، $d_t(G) = \infty$ است.

در این بخش نشان خواهیم داد که برای هر عدد طبیعی k گراف مسطحی می‌سازیم به‌طوری‌که فاصله هر دو مثلث در این گراف حداقل $2k$ است ولی گراف، 3 -انتخاب پذیر سازگار نیست.



شکل ۳.۳: H_k

تعریف ۲.۴.۳. فاصله بین دو وجه $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ ، مینیمم فاصله بین یک راس از $\mathcal{F}_1$ و یک راس از $\mathcal{F}_2$ است.

تعریف ۳.۴.۳. به وجه شامل k راس، k -وجهی گفته می‌شود.

اکنون می‌خواهیم گراف مسطح H_i را به‌صورت استقرایی بسازیم به‌طوری‌که سه خاصیت زیر برای H_i برقرار است.

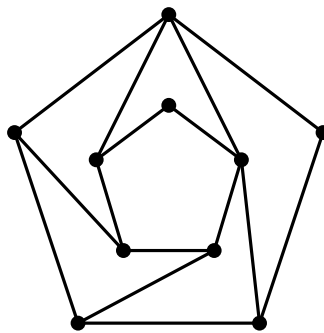
(a) گراف H_i فاقد مثلث است.

(b) H_i دقیقاً دارای دو، پنج وجهی است (وجه خارجی و وجهی که $\mathcal{F}_i$ نام دارد). به‌علاوه فاصله این دو وجه دقیقاً i است.

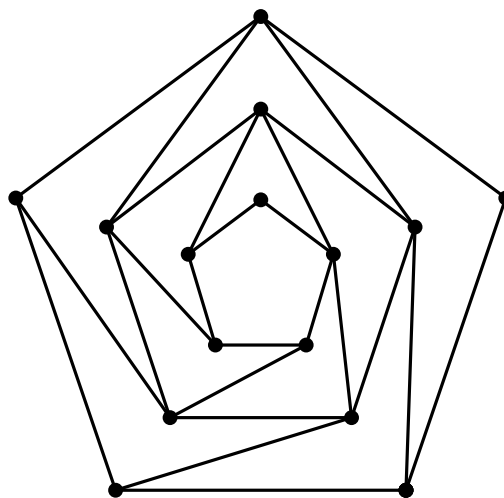
(c) فرض کنیم وجه خارجی با پنج رنگ مجزای a, b, c, d, e در جهت ساعتگرد رنگ شده است. آنگاه یک رنگ‌آمیزی یالی F_i از H_i و یک لیست واگذاری L_i با $|L_i(v)|$ برای هر راس v وجود دارد به‌طوری‌که v روی وجه خارجی قرار ندارد. همچنین H_i یک $-L_i$ رنگ‌آمیزی سازگار یکتا با F_i دارد که این رنگ‌آمیزی به این صورت است که $\mathcal{F}_i$ با رنگ‌های a, b, c, d, e در جهت ساعتگرد رنگ شده است.

فرض کنید H دوری به‌طول پنج باشد بنابراین باید سه خاصیت فوق برای H برقرار باشد. به‌وضوح H فاقد مثلث است زیرا دوری از طول پنج است. همچنین H دقیقاً دارای دو پنج وجهی است که

فاصله این دو پنج وجه از همدیگر دقیقاً صفر است زیرا وجه خارجی و وجه F_i دارای راس های بر هم منطبق هستند، بنابراین فاصله بین راس ها از یک دیگر صفر است. در مورد خاصیت سوم نیز با توجه به این که راس های وجه خارجی و F_i بر هم منطبق هستند بنابراین زمانی که وجه خارجی با پنج رنگ a, b, c, d, e در جهت ساعتگرد رنگ شده باشد آنگاه یک رنگ آمیزی یالی F برای H_0 و یک لیست واگذاری L با اندازه سه برای هر راس v وجود دارد که روی وجه خارجی قرار ندارد ولی چنین راس هایی وجود ندارند بنابراین این حالت نیز برقرار است. روند تشکیل گراف H_i به این صورت است که در هر مرحله گراف با استفاده از گراف مرحله قبل ساخته می شود. در مرحله اول H_0 ، دوری به طول پنج است. در مرحله بعد H_1 با استفاده از H_0 ساخته می شود بنابراین درون پنج وجهی H_0 یک پنج وجهی دیگر قرار می گیرد به طوری که شکل حاصل مطابق با شکل ۴.۳ خواهد شد.

شکل ۴.۳: H_1

همچنین در مرحله دوم H_2 از H_1 مطابق با شکل ۵.۳ ساخته می شود.

شکل ۵.۳: H_2

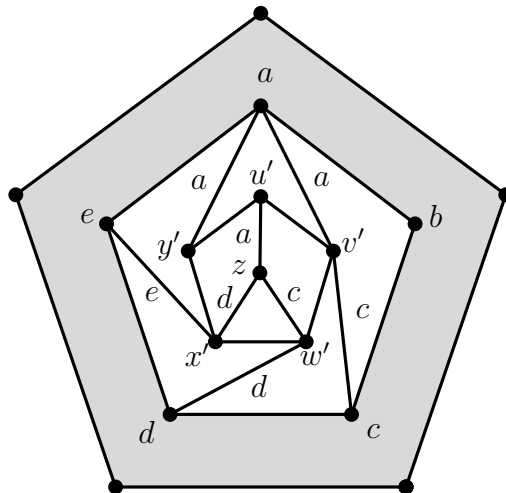
به همین ترتیب گراف H_i در i مرحله ساخته خواهد شد.

حال فرض کنید برای یک $i \geq 1$ ، H_{i-1} در سه خاصیت مذکور صدق کند. پنج رنگ a, b, c, d, e را در جهت ساعتگرد روی راس‌های وجه خارجی H_{i-1} ثابت در نظر بگیرید. بنا به خاصیت سوم یک رنگ‌آمیزی یالی F_{i-1} از H_{i-1} و یک لیست واگذاری L_{i-1} با لیستی از اندازه سه وجود دارد به‌طوری‌که H_{i-1} یک L_{i-1} -رنگ‌آمیزی سازگار منحصر به فرد با F_{i-1} دارد که در این رنگ‌آمیزی راس‌های u, v, w, x, y از پنج وجهی F_{i-1} با پنج رنگ a, b, c, d, e به ترتیب رنگ شده‌اند. فرض کنید H_i گراف به‌دست‌آمده از H_{i-1} با افزودن پنج راس جدید داخل وجه F_{i-1} باشد به‌طوری‌که در شکل ۳.۳ نشان داده شده است.

در گراف H_i همه یال‌های وجه بیرونی رنگ‌آمیزی شده‌اند جز یال‌های وجه درونی و یال‌های جدیدی که به شکل اضافه شده‌اند. این یال‌ها مطابق با شکل رنگ‌آمیزی شده‌اند. به راس‌های جدید اضافه شده به گراف H_{i-1} لیست‌هایی نسبت می‌دهیم. بنابراین گراف جدید ایجاد شده رنگ‌آمیزی یالی جدید و همچنین لیست واگذاری جدیدی دارد. نشان خواهیم داد که H_i در شرایط مذکور صدق می‌کند. در ادامه با توجه به این‌که راس u و w به ترتیب با رنگ‌های a و c و یال‌های uw' و $v'w$ نیز به ترتیب با رنگ‌های a و c رنگ‌آمیزی شده‌اند. بنابراین راس جدید v' باید با رنگ b رنگ‌آمیزی شود. در مورد راس جدید w' نیز وضعیت مشابه است با توجه به این‌که w' با v' و x و راس‌های v' و x به ترتیب با رنگ‌های b و d مجاور است و یال‌های $v'w'$ و xw' نیز به ترتیب با رنگ‌های b و d رنگ‌آمیزی شده‌اند، بنابراین راس جدید w' باید با رنگ c رنگ‌آمیزی شود. در مورد راس‌های x' ، y' و u' نیز استدلال به‌طور مشابه است. راس جدید x' که با w' و y مجاور است و با توجه به رنگ‌آمیزی یال‌های $x'w'$ و $x'y$ با رنگ‌های c و e ، راس x' باید با رنگ d رنگ‌آمیزی شود. در مورد راس y' که با x' و u مجاور است، با توجه به رنگ یال‌های $y'x'$ و $y'u$ که به ترتیب با رنگ‌های d و a رنگ‌آمیزی شده‌اند، این راس باید با رنگ e رنگ‌آمیزی شود. در پایان، راس جدید u' با y' و v' مجاور است و با توجه به رنگ یال‌های $u'v'$ و $y'u'$ که به ترتیب با e و a رنگ‌آمیزی شده‌اند، راس u' نیز باید با رنگ a رنگ‌آمیزی شود. پس گراف H_i همچنان گراف فاقد مثلث است و شامل تنها دو، پنج وجهی است، وجه خارجی و وجه دیگر که $F_i = u'v'w'x'y'$ است. علاوه بر این، این دو وجه دقیقاً با فاصله $i = i - 1 + 1$ از یکدیگر قرار دارند زیرا در قسمتی که با هاشور مشخص شده $i - 1$ مرحله طی کردیم. بنابراین فاصله وجه بیرونی با وجه F_{i-1} برابر $i - 1$ است و فاصله این وجه با وجه درونی نیز یک می‌باشد، که در نهایت منجر به این واقعیت می‌شود که فاصله دو وجه مورد نظر از همدیگر برابر i است. بنابراین گراف H_i در سه خاصیت a, b و c صدق می‌کند.

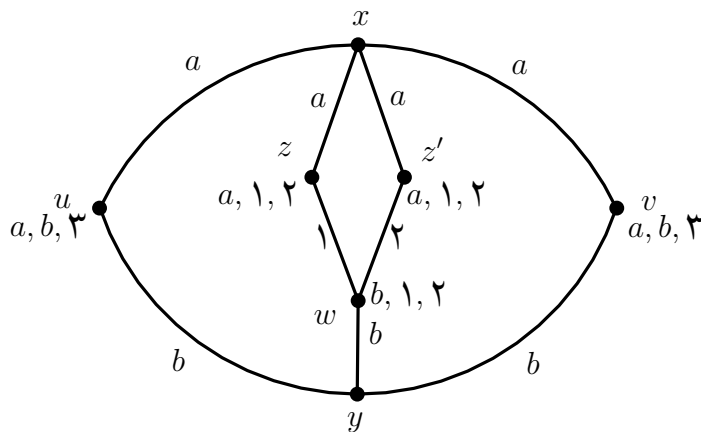
در ادامه گراف G_i معرفی می‌شود. این گراف با توجه به گراف H_i ساخته می‌شود به این ترتیب که یک راس z با درجه سه داخل وجه F_i اضافه می‌کنیم که در آن راس z با سه راس u' و w' و x' مجاور است. یال‌های zu' ، zw' و zx' را به ترتیب با رنگ‌های a, c و d رنگ‌آمیزی می‌کنیم همچنین به راس z لیست رنگ‌آمیزی $\{d, c, a\}$ را واگذار می‌نماییم. با توجه به شکل ۶.۳ مشاهده می‌شود که گراف G_i شامل یک مثلث $x'zw'$ است که با فاصله i از وجه خارجی قرار دارد.

با توجه به این‌که راس‌های u' ، w' و x' که در مرحله قبلی به ترتیب با رنگ‌های a, c و d رنگ شده‌اند و با اختصاص دادن رنگ‌های a, c و d به یال‌های zu' ، zw' و zx' ، با توجه به این‌که در لیست رنگ‌آمیزی



شکل ۶.۳: G_i

z رنگ های $\{d, c, a\}$ قرار دارند، اگر هر کدام از این سه رنگ a, b, c را به راس z اختصاص دهیم تناقض ایجاد می شود. پس رنگ آمیزی گراف H_i با رنگ های a, b, c, d, e که برای وجه بیرونی تعریف شد را نمی توان به یک رنگ آمیزی لیستی سازگار گراف G_i گسترش داد. در ادامه فرض کنیم $H(a, b)$ گرافی باشد که در شکل ۷.۳ نشان داده شده و یال های این گراف با یک رنگ آمیزی یالی رنگ شده است.



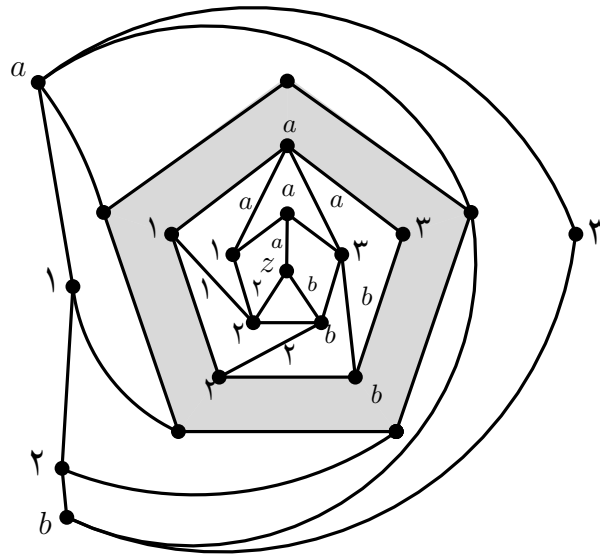
شکل ۷.۳: $H(a, b)$

فرض کنید x و y به ترتیب با a و b رنگ آمیزی شده اند و u و v باید با رنگ ۳ و w باید با رنگ ۱ یا ۲ رنگ آمیزی شوند. اگر w با رنگ ۱ رنگ آمیزی شود در این صورت راس های پنج وجهی $xzwyu$ با $a, 2, 1, b, 3$ رنگ آمیزی شده اند. در غیر این صورت یعنی اگر w با رنگ ۲ رنگ شود پنج وجهی $xvwywz'$ با $a, 3, b, 2, 1$ رنگ آمیزی می شود. حال می خواهیم گراف $G(a, b)$ را با توجه به گراف $H(a, b)$ به این صورت بسازیم که درون دو، پنج

وجهی گراف $H(a, b)$ ، دو عنصر G_k را متصل می‌کنیم به طوری که هر دو پنج وجهی، وجه خارجی برای گراف G_k باشند.

فرض کنیم رنگ‌آمیزی به این صورت است که پنج وجهی $X : xzwyu$ با رنگ‌های $a, ۲, ۱, b, ۳$ در جهت ساعتگرد و پنج وجهی $Y : xywz'$ نیز با رنگ‌های $a, ۳, b, ۲, ۱$ در جهت ساعتگرد رنگ‌آمیزی شده است و یک لیست رنگ‌آمیزی هم برای وجه‌های داخلی وجود دارد با توجه به لیست‌های رنگی که در وجه بیرونی به راس‌ها اختصاص داده شده است و با توجه به رنگ‌آمیزی یالی این گراف، اگر قرار باشد این رنگ‌آمیزی به یک رنگ‌آمیزی لیستی سازگار از $G(a, b)$ توسعه یابد باید رنگ‌آمیزی مورد نظر برای وجه‌های X و Y به همراه G_k درون آن‌ها به یک رنگ‌آمیزی لیستی سازگار منجر شود. رنگ‌آمیزی این دو وجه را بررسی می‌کنیم.

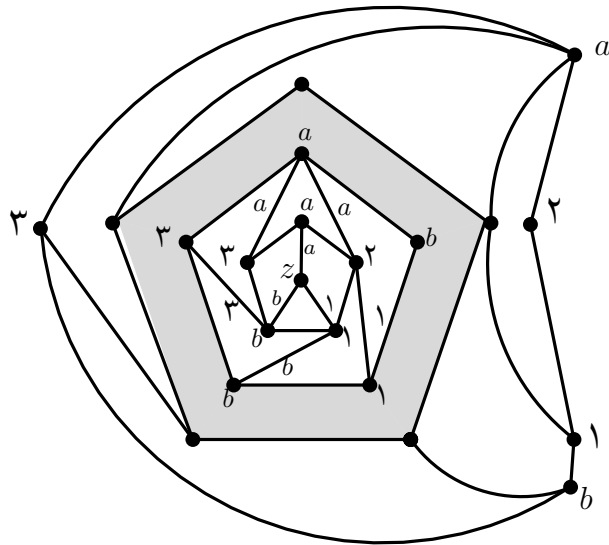
نشان می‌دهیم که با رنگ‌آمیزی وجه خارجی Y با رنگ‌های $a, ۳, b, ۲, ۱$ نمی‌توان به یک رنگ‌آمیزی لیستی سازگار برای Y' و در نهایت برای گراف $G(a, b)$ دست یافت که در آن بخشی از گراف $G(a, b)$ است که عنصر G_k درون وجه Y قرار گرفته است. همان‌طوری که در شکل ۸.۳ هم مشاهده می‌شود رنگ‌آمیزی وجه خارجی با رنگ‌های $a, ۳, b, ۲, ۱$ را نمی‌توان به یک رنگ‌آمیزی لیستی سازگار برای $G(a, b)$ گسترش داد زیرا با شروع رنگ‌آمیزی با این رنگ‌ها و ادامه رنگ‌آمیزی، زمانی که به رنگ‌آمیزی راس z می‌رسیم به این راس نمی‌توان هیچ‌کدام از رنگ‌های $a, b, ۲$ را اختصاص داد و با رنگ‌آمیزی z با هر کدام از این سه رنگ تناقض ایجاد خواهد شد.



شکل ۸.۳: Y'

در مورد رنگ‌آمیزی وجه X' با رنگ‌های $a, ۲, ۱, b, ۳$ نیز به همین نتیجه خواهیم رسید که در شکل ۹.۳ قابل مشاهده است.

پس این رنگ‌آمیزی را نمی‌توان به یک رنگ‌آمیزی لیستی سازگار $G(a, b)$ توسعه داد. نه‌کپی از $G(a, b)$ به صورت $\{۴, ۵, ۶\} \times \{۷, ۸, ۹\}$ در نظر گرفته می‌شود یعنی نه زوج مرتب،



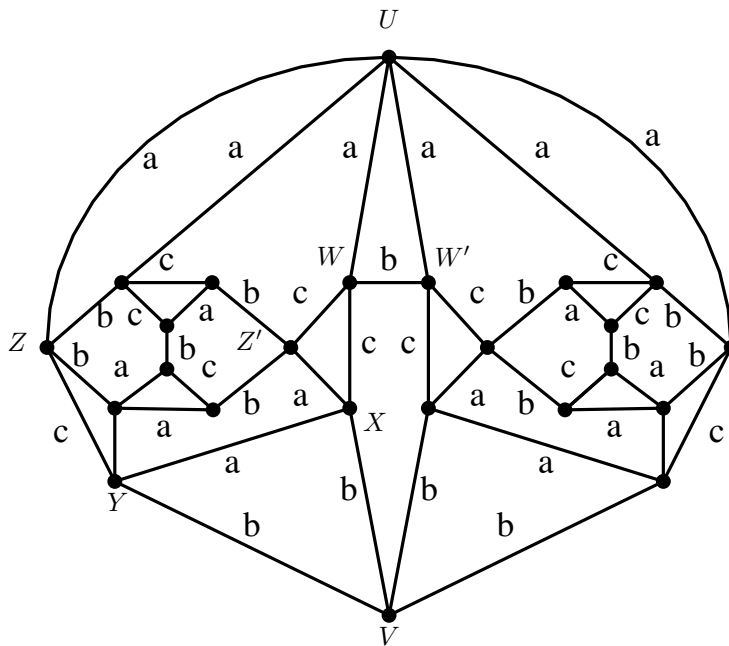
شکل ۹.۳: X'

زوج های $\{(4, 7), (4, 8), (4, 9), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8), (6, 9)\}$ خواهند بود. همه راس های x را در یک راس به نام x^* منقبض می کنیم همچنین همه راس های y را نیز در یک راس مانند y^* منقبض می کنیم. لیست رنگی $\{4, 5, 6\}$ را به x^* و لیست رنگی $\{7, 8, 9\}$ را به y^* نسبت می دهیم. فرض کنید در گراف حاصل یک رنگ آمیزی لیستی سازگار f وجود دارد در صورتی که هیچ رنگ آمیزی لیستی سازگار از کپی $G(f(x^*), f(y^*))$ وجود ندارد بنابراین تناقض ایجاد می شود. پس این گراف مسطح که در آن هر دو مثلث با فاصله حداقل $2k$ از هم قرار دارند، ۳-انتخاب پذیر سازگار نیست.

۵.۳ گراف های مسطح فاقد ۴-دور

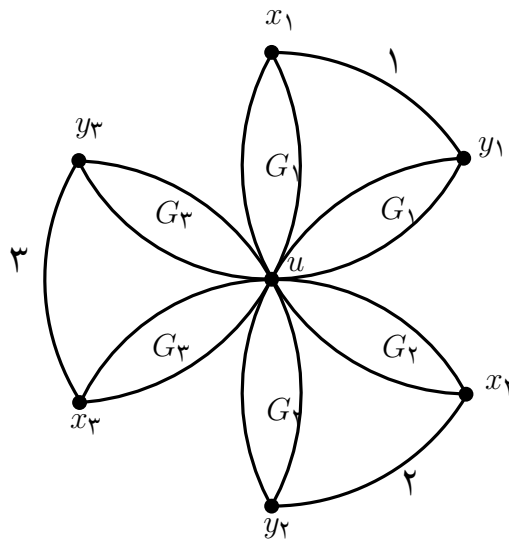
در این بخش نشان می دهیم، گراف های مسطح فاقد ۴-دور وجود دارند به طوری که ۳-رنگ پذیر سازگار نیستند. فرض کنیم گراف $H(a, b, c)$ که در شکل ۱۰.۳ نشان داده شده گرافی باشد که یال های آن با یک رنگ آمیزی یالی، رنگ شده است. هدف ما این است که نشان دهیم گراف $H(a, b, c)$ ، ۳-رنگ پذیر سازگار نیست. فرض می کنیم چنین نباشد یعنی این گراف را بتوان با سه رنگ a, b, c به طور سازگار رنگ آمیزی کرد. در نظر می گیریم که $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ باشد و فرض می کنیم که راس های u و v از گراف $H(a, b, c)$ به ترتیب با رنگ های a و b رنگ شده اند. در این صورت حداقل یکی از راس های w و w' با رنگ c رنگ آمیزی می شوند زیرا به طور مثال اگر راس های w و w' با رنگ a رنگ آمیزی شوند آنگاه یک رنگ آمیزی راسی غیر مجاز و در نتیجه یک رنگ آمیزی ناسازگار حاصل می شود. اگر راس های w و w' با رنگ b نیز رنگ آمیزی شوند بار دیگر یک رنگ آمیزی راسی غیر مجاز حاصل می شود که منجر به یک رنگ آمیزی ناسازگار خواهد شد بنابراین حداقل یکی از راس های w و w' با رنگ c رنگ آمیزی خواهند شد. با توجه به این که گراف $H(a, b, c)$ گراف مقارنی است پس بدون این که خللی به مساله وارد شود می توان فرض کرد که w با رنگ c رنگ آمیزی شده است. در این صورت برای این که

رنگ‌آمیزی سازگار در گراف حفظ شود راس x باید با رنگ a و راس y باید با رنگ c و همچنین z و z' باید با رنگ b رنگ‌آمیزی شوند. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که باقی‌مانده راس‌ها در گراف را نمی‌توان به طور سازگار رنگ‌آمیزی کرد. این نتیجه‌گیری در شکل ۱۰.۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۱۰.۳: $H(a, b, c)$

بنابراین اگر راس‌های u و v به ترتیب با a و b رنگ شوند این رنگ‌آمیزی را نمی‌توان به یک ۳-رنگ‌آمیزی سازگار برای $H(a, b, c)$ گسترش داد. برای هر $1 \leq a \leq 3$ ، فرض کنید b و c دو رنگ متمایز از a انتخاب شده از مجموعه $\{1, 2, 3\}$ باشند. G_a گرافی است که از $H(a, b, c)$ و $H(a, c, b)$ با انقباض دو راس u در یک راس u^* و انقباض دو راس v در یک راس v^* بدست می‌آید به طوری که یال‌های گراف رنگ‌آمیزی شده‌اند. واضح است که در هر ۳-رنگ‌آمیزی سازگار G_a اگر u^* با a رنگ شود آنگاه v^* نیز با a رنگ‌آمیزی می‌شود. فرض کنید v^* با a رنگ‌آمیزی نشود اگر v^* با b رنگ‌آمیزی شود کپی $H(a, b, c)$ و اگر v^* با c رنگ‌آمیزی شود کپی $H(a, c, b)$ می‌شود بنابراین v^* را تنها با رنگ a می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. حال یک ۳-رنگ‌آمیزی سازگار از شکل ۱۱.۳ در نظر می‌گیریم به طوری که دوری از طول چهار نباشد. اگر راس u با رنگ $1 \leq i \leq 3$ رنگ‌آمیزی شود آنگاه هر دو راس x_i و y_i هر دو با رنگ i رنگ‌آمیزی می‌شوند که در این صورت تناقضی آشکار رخ می‌دهد زیرا دو راس x_i و y_i توسط یالی به رنگ i به همدیگر متصل هستند. بنابراین این گراف ۳-رنگ‌پذیر سازگار نخواهد شد.

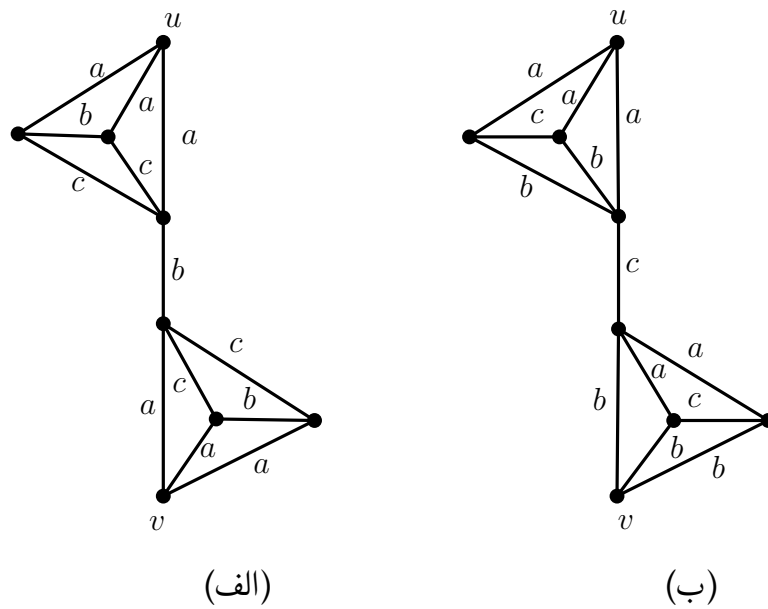


شکل ۱۱.۳: گراف های مسطح فاقد ۴-دور

۶.۳ گراف های مسطح فاقد ۵-دور

در این بخش، نشان می دهیم که گراف های مسطح فاقد ۵-دور وجود دارند که ۳-رنگ پذیر سازگار نیستند. برای هر $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ فرض کنید $H_1(a)$ و $H_2(a, b)$ دو گراف مسطح فاقد ۵-دور باشند مطابق شکل ۱۲.۳ به سادگی می توان نشان داد که در گراف $H_1(a)$ اگر راس های u و v هر دو با رنگ a ، رنگ آمیزی شوند آنگاه این رنگ آمیزی را نمی توان به یک رنگ آمیزی سازگار گراف $H_1(a)$ گسترش داد.

به طور مشابه در گراف $H_2(a, b)$ اگر u و v به ترتیب با a و b ($a \neq b$) رنگ شوند آنگاه مطابق شکل ۱۲.۳ این رنگ آمیزی را نمی توان به یک رنگ آمیزی سازگار $H_2(a, b)$ گسترش داد. سه گراف $H_1(a)$ با $1 \leq a \leq 3$ ، همچنین شش گراف $H_2(a, b)$ با $1 \leq a \neq b \leq 3$ را در نظر می گیریم. نه راس u را در یک راس u^* و نه راس v را در یک راس v^* منقبض می کنیم. فرض می کنیم یک ۳-رنگ آمیزی سازگار f از این گراف وجود دارد. اگر $f(u^*) = f(v^*)$ آنگاه کپی $(H_1(f(u^*)))$ ، ۳-رنگ پذیر سازگار نیست در این صورت تناقض رخ می دهد. در غیر این صورت $f(u^*) \neq f(v^*)$ و در این حالت کپی $(H_2(f(u^*), f(v^*)))$ ، ۳-رنگ پذیر سازگار نیست که دوباره تناقض ایجاد می شود بنابراین گراف مسطح و فاقد ۵-دور ساخته ایم که ۳-رنگ پذیر سازگار نیست.



شکل ۱۲.۳: (الف) $H_1(a)$ و (ب) $H_2(a, b)$

فصل ۴

عدد رنگی سازگار حاصل ضرب گراف‌ها

۱.۴ مقدمه

در این فصل به بررسی رابطه‌ی بین عدد رنگی سازگار یک گراف و توان‌های (رسته‌ای و دکارتی) آن می‌پردازیم. می‌دانیم عدد رنگی سازگار گراف G کوچکتر یا مساوی عدد رنگی معمولی G است در حالی که عدد رنگی معمولی همه توان‌های (دکارتی) G^k از G همانند G باقی می‌ماند و ممکن است عدد رنگی سازگار G^k به ازای k افزایش یابد. همچنین حدس می‌زنیم که برای همه k ‌های به اندازه کافی بزرگ، عدد رنگی سازگار G^k برابر با عدد رنگی G است. این حدس را برای زمانی که G کامل است به ازای $k \geq 4$ نشان می‌دهیم و شواهد بیشتری ارائه می‌کنیم به‌طوری‌که نشان می‌دهد این حدس به ازای $k \geq 2$ نیز برقرار است. همچنین در این فصل در مورد حاصل ضرب‌های دیگر نیز توضیحاتی ارائه خواهد شد.

تعریف ۱.۱.۴. رنگ‌آمیزی لیستی رنگ‌آمیزی است که رنگ هر راس v از لیست $L(v)$ انتخاب شده است.

تعریف ۲.۱.۴. عدد انتخابی سازگار گراف G که با نماد $ch_{ad}(G)$ نشان داده می‌شود کوچکترین عدد صحیح k است به‌طوری‌که برای هر رنگ‌آمیزی یالی F از G و هر لیست واگذاری $L(v)$ (برای $v \in V(G)$) با $|L(v)| \geq k$ یک رنگ‌آمیزی لیستی از G سازگار با F وجود داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۴. گراف $G[n]$ گرافی است که از G به‌دست می‌آید به این ترتیب که هر راس v در G با یک مجموعه مستقل n راسی I_v جایگزین می‌شود، در $G[n]$ یک راس از I_v با یک راس از I_w مجاور است اگر و تنها اگر v با w مجاور باشد.

خاصیت ۴.۱.۴. برای هر i و هر یال vv' از گراف G و هر مجموعه $X \subseteq I_v$ و $Y \subseteq I_{v'}$ با شرط $|X|, |Y| \geq \frac{n}{k-1}$ ، یک یال بین X و Y با رنگ i وجود دارد.

برهان. یال $vv' \in E(G)$ را ثابت در نظر می‌گیریم. پیشامد $A_{vv'}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ و هر $X \subseteq I_v$ و هر $Y \subseteq I_{v'}$ با $|X| \geq \frac{n}{k-1}$ و $|Y| \geq \frac{n}{k-1}$ یک

$e \in E(X, Y)$ وجود دارد به طوری که در رنگ آمیزی C ، یال e رنگ i را می‌گیرد یعنی $C(e) = i$. هدف محاسبه $p(\bar{A}_{vv'})$ است.

$Z_{vv'}$ تعداد $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ هایی است که $A_{vv'}$ رخ داده است.

$$Z_{vv'} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_j + \dots + Z_{k-1}$$

فرض کنید، $X \subseteq I_v$ و $Y \subseteq I_{v'}$ با شرط $|X|, |Y| \geq \frac{n}{k-1}$ وجود داشته باشد به طوری که $C^{-1}(i) \cap E(X, Y) = \emptyset$ یعنی یال به رنگ i در $E(X, Y)$ ظاهر نشده باشد. در ادامه میانگین $Z_{vv'}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$E(Z_{vv'}) = \sum_{i=1}^{k-1} E(Z_i) \leq (k-1) \left(\frac{n}{k-1} \right) \left(1 - \frac{1}{k-1} \right)^{\left(\frac{n}{k-1} \right)^2}$$

در عبارت بالا $E(Z_i) = 1p(Z_i = 1) + 0p(Z_i = 0) = p(Z_i = 1)$ است. بنا به نامساوی مارکوف داریم: $p(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$ ، $\forall \alpha > 0$ بدیهی است که $Z_{vv'} \geq 1$ همان $\bar{A}_{vv'}$ است.

$$p(\bar{A}_{vv'}) = p(Z_{vv'} \geq 1) \leq E(Z_{vv'}) = (k-1) \left(\frac{n}{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{k-1} \right)^{\left(\frac{n}{k-1} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{vv' \in E(G)} \bar{A}_{vv'}\right) &\leq \sum_{vv' \in E(G)} p(\bar{A}_{vv'}) \leq \sum_{vv' \in E(G)} (k-1) \left(\frac{n}{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{k-1} \right)^{\left(\frac{n}{k-1} \right)^2} \\ &\leq \frac{n^2}{2} (k-1) \left(\frac{n}{k-1} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{k-1} \right)^{\left(\frac{n}{k-1} \right)^2} \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم زمانی که n بزرگ می‌شود ($n \rightarrow \infty$) عبارت بالا به صفر میل می‌کند. روابط زیر را می‌دانیم:

$$\binom{m}{t} \leq \frac{m^t}{t!}, \quad 1 - x \leq e^{-x}$$

پس روابط بالا را به این صورت ادامه می‌دهیم که:

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{vv' \in E(G)} \bar{A}_{vv'}\right) &\leq \left(\frac{n^2}{2}\right) (k-1) \left(\frac{ne^{\frac{n}{k-1}}}{\left(\frac{n}{k-1}\right)}\right)^2 \left(e^{\frac{-1}{k-1}}\right)^{\left(\frac{n}{k-1}\right)^2} \\ &= \frac{(k-1)^3 n^2}{2} e^{\frac{n^2}{k-1} - \frac{n^2}{(k-1)^3}} \end{aligned}$$

با توجه به این که می‌دانیم مقدار $cn^2 \alpha^n \beta^{-n^2}$ برای $\beta > 1$ زمانی که $n \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند کران بالای بدست آمده نیز زمانی که $n \rightarrow \infty$ می‌رود به صفر میل خواهد کرد. $\square$

قضیه ۵.۱.۴. برای هر گراف G ، یک عدد صحیح n_G وجود دارد به طوری که اگر $n \geq n_G$ آنگاه $\chi_{ad}(G[n]) = \chi(G[n]) = \chi(G)$ است.

برهان. برای هر عدد صحیح n ، $\chi(G[n]) = \chi(G)$. در اثبات درستی رابطه می‌توان چنین بیان کرد با توجه به این‌که $G \subseteq G[n]$ بنابراین $\chi(G) \leq \chi(G[n])$ ، پس کافی است نشان دهیم $\chi(G) \geq \chi(G[n])$. یعنی با هر تعداد رنگی که گراف G رنگ‌آمیزی شود با همان تعداد رنگ گراف $G[n]$ نیز رنگ‌آمیزی خواهد شد. فرض کنید راس‌های G را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم بنابراین هر کدام از راس‌های مستقل مربوط به راس رنگ‌آمیزی شده نیز با همان رنگ، رنگ‌آمیزی خواهد شد بنابراین $\chi(G) \geq \chi(G[n])$ پس رابطه $\chi(G) = \chi(G[n])$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم $\chi(G) = \chi(G[n]) = k$ ، کافی است نشان دهیم اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه یک $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی یالی F از $G[n]$ وجود دارد به‌طوری‌که هیچ $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی راسی $G[n]$ سازگار با F وجود ندارد. رنگ‌آمیزی یالی F از $G[n]$ نیز به این صورت تعریف می‌شود که یال‌های $G[n]$ با $k-1$ رنگ به طور تصادفی رنگ‌آمیزی می‌شوند. در ادامه روند اثبات از خاصیت ۴.۱.۴ استفاده شده که این خاصیت با احتمال بالا رخ می‌دهد. بنابراین یک رنگ‌آمیزی یالی F از $G[n]$ وجود دارد که ویژگی گفته شده در آن صدق می‌کند.

فرض می‌کنیم C یک $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی راسی $G[n]$ باشد باید نشان دهیم که C با F سازگار نیست. برای هر راس $v \in G$ فرض کنید $\phi(v)$ یک رنگ i باشد به طوری‌که $|C^{-1}(i) \cap I_v| \geq \frac{n}{k-1}$. با توجه به این‌که $\chi(G) = k$ باید دو راس مجاور هم‌رنگ باشند چون رنگ‌آمیزی که در نظر گرفتیم $(k-1)$ -رنگ‌آمیزی است پس فرض می‌کنیم $X = C^{-1}(i) \cap I_v$ و $Y = C^{-1}(i) \cap I_{v'}$ بنابراین $|X|, |Y| \geq \frac{n}{k-1}$ و با توجه به ویژگی مذکور از هر رنگ i یک یال وجود دارد که یک راس X را به یک راس از Y وصل کند بنابراین C با F سازگار نیست. $\square$

تعریف ۶.۱.۴. [۸] حاصل ضرب الفبایی^۱ گراف‌های G و H که آن‌را با نماد $G \cdot H$ نشان می‌دهیم عبارت است از گرافی با مجموعه راس‌های $V(G) \times V(H)$ که در این گراف دو راس (u, x) و (v, y) با هم مجاورند اگر و تنها یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$(1) \quad uv \in E(G)$$

$$(2) \quad u = v, \quad xy \in E(H)$$

مثال ۷.۱.۴. گراف $G[n]$ حاصل ضرب الفبایی گراف‌های G و $\overline{K_n}$ است.

تعریف ۸.۱.۴. حاصل ضرب رسته‌ای^۲ G و H که آن‌را با نماد $G \times H$ نشان می‌دهیم گرافی است که مجموعه راس‌های آن $V(G) \times V(H)$ است و دو راس (x, y) و (x', y') در آن مجاور هستند اگر و تنها اگر $xx' \in E(G)$ و $yy' \in E(H)$ باشد.

مثال ۹.۱.۴. با توجه به تعریف ضرب رسته‌ای و گراف $G[n]$ ، اگر به ازای $uv \in E(G)$ ، از زیرگراف دو بخشی کامل القا شده توسط $I_u \cup I_v$ در گراف $G[n]$ ، یک تطابق کامل را حذف کنیم، گراف $G \times K_n$ بدست می‌آید.

^۱Lexicographic product

^۲Categorical product

قضیه ۱۰.۱.۴. برای هر گراف مانند G ، عدد طبیعی n_G وجود دارد به طوری که اگر $n \geq n_G$ آنگاه $\chi_{ad}(G \times K_n) = \chi(G \times K_n) = \chi(G)$.

نتیجه ۱۱.۱.۴. اگر H یک گراف با عدد خوشه‌ای $w(H)$ به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه رابطه زیر برقرار است $\chi_{ad}(G \times H) = \chi(G \times H) = \chi(G)$.

تعریف ۱۲.۱.۴. G^n توان رسته‌ای مرتبه‌ی n ام گراف G است و به طور بازگشتی تعریف می‌شود: $G^1 = G$ و برای هر $n \geq 1$ ، $G^{n+1} = G^n \times G$ ، در G^n داریم:

عدد رنگی G^n برابر با عدد رنگی G و عدد خوشه‌ای G^n هم برابر با عدد خوشه‌ای G است.

حدس ۱۳.۱.۴. برای هر گراف G ، عدد طبیعی n_G وجود دارد به طوری که اگر $n \geq n_G$ آنگاه رابطه زیر برقرار است $\chi_{ad}(G^n) = \chi(G^n) = \chi(G)$.

ثابت می‌شود که گراف کامل در حدس بالا صدق می‌کند و در این حالت $n_G \leq 4$.

تعریف ۱۴.۱.۴. در گراف G ، مقدار کمینه‌ی $|E'|$ را به طوری که $E' \subseteq E(G)$ و $\chi(G - E') < k$ با $\phi(G, k)$ نشان می‌دهیم.

خاصیت ۱۵.۱.۴. برای هر $X \subseteq V(G)$ با $|E[X]| \geq S$ و هر رنگ $j = 1, 2, \dots, k-1$ ، یک یال $e \in E[X]$ با $F(e) = j$ وجود دارد.

برهان. فرض کنید $X \subseteq V(G)$ و $|E[X]| \geq S$. پیشامد A_X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\{1, 2, \dots, k-1\}$ $j \in$ وجود دارد به طوری که برای هر $e \in E[X]$ ، $F(e) \neq j$. برای هر رنگ j ، احتمالی که رنگ j در یال $e \in E(G)$ ظاهر نشده باشد با $p(B)$ نشان داده می‌شود که به صورت زیر قابل بیان است:

احتمال عدم ظهور رنگ j در یک یال مشخص $(1 - \frac{1}{k-1})$ است بنابراین احتمال این که رنگ j در $E[X]$ ظاهر نشده باشد برابر است با $(1 - \frac{1}{k-1})^{|E[X]|} \leq (1 - \frac{1}{k-1})^S$. با توجه به رابطه $1 - x \leq e^{-x}$ خواهیم داشت $(1 - \frac{1}{k-1})^S \leq e^{-\frac{S}{k-1}}$.

اکنون احتمال این که یک j وجود داشته باشد به طوری که رنگ j در یال $e \in E[X]$ ظاهر نشده باشد را محاسبه می‌کنیم، با توجه به این که می‌دانیم تعداد حالات انتخاب رنگ j ، $k-1$ است پس

$$p(A_X) \leq \sum_{j=1}^{k-1} p(B) \leq (k-1) \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^S \leq (k-1) e^{-\frac{S}{k-1}}$$

احتمال این که یک مجموعه X وجود داشته باشد به طوری که $|E(X)| \geq S$ و یک رنگ j وجود داشته باشد به طوری که رنگ j در $e \in E[X]$ ظاهر نشده باشد به صورت زیر قابل محاسبه است:

با توجه به این که می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، 2^n است پس:

$$p\left(\bigcup_{\substack{X \subseteq V(G) \\ |E(X)| \geq S}} A_X\right) \leq \sum_{\substack{X \subseteq V(G) \\ |E(X)| \geq S}} p(A_X) \leq \sum_{\substack{X \subseteq V(G) \\ |E(X)| \geq S}} (k-1) e^{-\frac{S}{k-1}} < 2^n (k-1) e^{-\frac{S}{k-1}} < 1$$

بنابراین

$$p\left(\bigcup A_X\right) < 1 \Rightarrow p\left(\bigcap \overline{A_X}\right) > 0.$$

□

قضیه ۱۶.۱۰۴. فرض کنید G یک گراف n راسی باشد. اگر $\phi(G, k) \geq (k-1)^2(n \ln 2 + \ln(k-1))$ آنگاه $\chi_{ad}(G) \geq k$ به ویژه اگر $n \geq \frac{\ln(k-1)}{(1-\ln 2)}$ و $\phi(G, k) \geq (k-1)^2 n$ آنگاه $\chi_{ad}(G) \geq k$.

برهان. فرض کنید $F : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k-1\}$ یک رنگ آمیزی یالی تصادفی از G باشد به طوری که هر یال به طور مستقل رنگ آمیزی شده و هر رنگ با احتمال مساوی انتخاب شده است. فرض می کنیم $S = (k-1)(n \ln 2 + \ln(k-1))$. با احتمال مثبت، F خاصیت ۱۵.۱۰۴ را دارد. پس یک $(k-1)$ -رنگ آمیزی یالی F از G وجود دارد به طوری که ویژگی مذکور برای آن برقرار است. حال نشان می دهیم هیچ $(k-1)$ -رنگ آمیزی راسی G و سازگار با F وجود ندارد. فرض می کنیم چنین نباشد یعنی یک $(k-1)$ -رنگ آمیزی راسی C از G سازگار با F وجود دارد.

فرض می کنیم $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}$ کلاس رنگی باشد به طوری که هر کلاس رنگی V_i مجموعه راس هایی هستند که در رنگ آمیزی سازگار C رنگ i را دارند به عبارت دیگر $V_i = C^{-1}(i)$.

اجتماع $E' = E[V_1] \cup E[V_2] \cup \dots \cup E[V_{k-1}]$ را در نظر می گیریم. اگر یال های E' را از G حذف کنیم آنگاه درون $k-1$ کلاس رنگی V_i هیچ یالی باقی نمی ماند بنابراین $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}$ مجموعه های مستقلی خواهند شد و $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}$ در گراف $G - E'$ یک رنگ آمیزی مجاز با $k-1$ رنگ ایجاد می کند لذا $\chi(G - E') < k$ بنابراین

$$|E'| \geq \phi(G, k) \geq (k-1)^2(n \ln 2 + \ln(k-1)) = (k-1)S$$

بنابراین i وجود دارد به طوری که $|E(V_i)| \geq S$. و با توجه به انتخاب F ، یالی در $E(V_i)$ وجود دارد رنگ آن i است یعنی $F(e) = i$ که این استدلال، با این فرض که C ، $(k-1)$ -رنگ پذیر سازگار با F است در تناقض است زیرا همه راس های کلاس رنگی V_i ، رنگ i دارند حال اگر یالی درون این کلاس رنگی با رنگ i وجود داشته باشد یک یال تکرنگ خواهیم داشت که با تعریف سازگاری در تضاد است. بنابراین $(k-1)$ -رنگ آمیزی سازگار با F وجود ندارد پس $\chi_{ad}(G) \geq k$. همچنین واضح است اگر $n \geq \frac{\ln(k-1)}{(1-\ln 2)}$ آنگاه

$$\begin{aligned} n(1 - \ln 2) \geq \ln(k-1) &\Rightarrow n - n \ln 2 \geq \ln(k-1) \Rightarrow n \geq n \ln 2 + \ln(k-1) \\ &\Rightarrow (k-1)^2 n \geq (k-1)^2(n \ln 2 + \ln(k-1)) \end{aligned}$$

□

پس اگر $\phi(G, k) \geq (k-1)^2 n$ آنگاه $\chi_{ad}(G) \geq k$.

تعریف ۱۷.۱۰۴. گراف G یال انتقالی^۳ است هرگاه برای هر دو یال $e, e' \in E(G)$ یک خودریختی از G موجود باشد به طوری که e' را به e نسبت دهد.

^۳Edge transitive

قضیه ۱۸.۱۰۴. به ازای هر عدد طبیعی n داریم $\chi_{ad}(K_n^*) = n$.

برهان. می‌دانیم $\chi(K_n^*) = n$ و $\chi_{ad}(K_n^*) \leq \chi(K_n^*) = n$ پس $\chi_{ad}(K_n^*) \leq n$ برقرار است. اگر نشان دهیم $\chi_{ad}(K_n^*) \geq n$ برهان تمام است. کافی است نشان دهیم رابطه زیر برقرار است $\chi_{ad}(K_n^*) \geq n$. در این صورت بنابر قضیه قبل $\chi_{ad}(K_n^*) \geq n$. اگر H زیرگرافی از K_n^* با عدد رنگی $(n-1)$ باشد آنگاه هر n -خوشه از K_n^* حداقل یک یال دارد که در $E(H)$ واقع نیست. زیرا اگر n -خوشه به تمامی درون $E(H)$ باشد آنگاه H ، n -رنگ‌پذیر می‌شود. با توجه به این‌که گراف K_n^* گراف یال انتقالی است پس هر یال از K_n^* در تعداد ثابتی از n -خوشه‌ها وجود دارد. اگر K_n^* به تعداد m ، n -خوشه داشته باشد و هر یال از K_n^* در S ، n -خوشه حضور داشته باشد در این صورت هدف شمارش زوج مرتب‌هایی به شکل زیر است:

$$(e, A) \quad s.t \quad e \in A, \quad n\text{-خوشه است } A$$

روش اول شمارش به این صورت است که ابتدا یک یال انتخاب می‌کنیم و تعداد n -خوشه‌هایی که این یال را دارند می‌شماریم، به $|E(K_n^*)|$ طریق می‌توان این یال را انتخاب کرد پس یالی انتخاب شد حال S ، n -خوشه داریم که این یال را دارند پس تعداد زوج مرتب‌ها $|S|$ است. روش دوم شمارش به این صورت است که در ابتدا n -خوشه‌ای را انتخاب می‌کنیم که تعداد انتخاب برای n -خوشه، m است. حال برای n -خوشه‌ی انتخابی باید یالی بیابیم که در این n -خوشه باشد چون $\frac{n(n-1)}{2}$ یال وجود دارد که در این n -خوشه حضور دارند پس تعداد زوج مرتب‌ها برابر $m \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ است. با توجه به این‌که نتیجه هر دو شمارش یکی است پس داریم:

$$S \frac{n^2(n-1)^2}{2} = |S| |E(K_n^*)| = m \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow m = S n^3 (n-1)^3$$

از آنجایی که هر n -خوشه حداقل یک یال در $E(K_n^*)/E(H)$ دارد و همچنین با توجه به این‌که هر یال در $E(K_n^*)/E(H)$ در S ، n -خوشه قرار دارد یک کران پایین برای $|E(K_n^*)/E(H)|$ می‌یابیم. زوج مرتب زیر را در نظر بگیرید:

$$(e, A) \quad s.t \quad e \in E(K_n^*)/E(H), \quad n\text{-خوشه است } A$$

تعداد زوج‌های مرتب بالا را به دو صورت می‌توان شمارش کرد. در روش اول یالی را انتخاب می‌کنیم، تعداد انتخاب‌هایی که برای این یال وجود دارد $|E(K_n^*)/E(H)|$ است و S ، n -خوشه وجود دارد که این یال در آن‌ها حضور دارند پس تعداد زوج مرتب‌ها در این حالت $x \cdot S$ است.

در روش دوم شمارش یک n -خوشه را انتخاب می‌کنیم، به m حالت می‌توان این n -خوشه را انتخاب کرد و برای هر n -خوشه حداقل یک یال در $E(K_n^*)/E(H)$ وجود دارد. تعداد زوج‌های مرتب در این شمارش بزرگتر یا مساوی $m \times 1$ است پس در نهایت $x \times S \geq m \times 1 \Rightarrow x \geq \frac{m}{S} = n^3(n-1)^3$ بنابراین

$$|E(K_n^*)/E(H)| = \phi(K_n^*, n) \geq n^3(n-1)^3 \geq (n-1)^2(n \ln 2 + \ln(n-1))$$

□

پس $\chi_{ad}(K_n^*) \geq n$

این قضیه نشان می‌دهد که K_n^4 گرافی است که عدد رنگی و عدد رنگی سازگار آن با هم برابر هستند.

۲.۴. مربع‌های لاتین

در این بخش نشان می‌دهیم اگر یک صفحه تصویری از مرتبه n یا $n + 1$ وجود داشته باشد آنگاه $\chi_{ad}(K_n^2) = n$ و اگر یک صفحه تصویری از مرتبه $n - 1$ وجود داشته باشد آنگاه $\chi_{ad}(K_n^3) = n$.

تعریف ۱.۲.۴. یک مربع لاتین^۴ از مرتبه n عبارت است از یک ماتریس $n \times n$ که هر سطر و هر ستون با اعداد $1, 2, \dots, n$ پر شده است و در آن هیچ دو درایه‌ای از یک سطر و همین‌طور هیچ دو درایه‌ای از یک ستون یکسان نباشند. در مربع لاتین L ، عنصر سطر i ام و ستون j ام را با $L(i, j)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۴. فرض می‌کنیم A و B دو مربع لاتین از مرتبه n باشند که درایه‌های آن از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ انتخاب شده‌اند. A و B را متعامد می‌نامیم هرگاه زوج‌های مرتب $(A(i, j), B(i, j))$ هر زوج مرتب (u, v) که $u, v \in \{1, 2, \dots, n\}$ را دقیقاً یک‌بار اختیار کنند.

تعریف ۳.۲.۴. یک صفحه تصویری شامل یک مجموعه متناهی از نقطه‌ها و یک مجموعه متناهی از خط‌ها است به‌طوری‌که سه ویژگی زیر را داشته باشد:

- (۱) برای هر دو نقطه داده شده دقیقاً یک خط بین هر دو آن‌ها وجود دارد.
 - (۲) برای هر دو خط داده شده دقیقاً یک نقطه روی هر دو آن‌ها وجود دارد.
 - (۳) چهار نقطه وجود دارد به‌طوری‌که هیچ خطی شامل بیش از دو نقطه از این چهار نقطه نیست.
- می‌توان دید که برای هر صفحه تصویری، $n \in \mathbb{N}$ چنان وجود دارد که این صفحه تصویری دارای $n^2 + n + 1$ نقطه و $n^2 + n + 1$ خط است. به این n ، مرتبه صفحه تصویری گوییم. علاوه بر این می‌توان نشان داد که هر صفحه تصویری از مرتبه n دارای خصوصیات زیر نیز است:
- یک صفحه تصویری^۵ از مرتبه n ، مجموعه‌ای شامل $n^2 + n + 1$ نقطه و $n^2 + n + 1$ خط است به‌طوری‌که چهار ویژگی زیر را داشته باشد:

- (۱) هر خط شامل $n + 1$ نقطه است.
- (۲) هر نقطه روی $n + 1$ خط قرار دارد.
- (۳) هر دو خط، تنها در یک نقطه اشتراک دارند.
- (۴) هر دو نقطه با هم روی یک خط قرار دارند.

^۴Latin square

^۵Projective plane

قضیه ۴.۲.۴. وجود یک صفحه تصویری از مرتبه n معادل با وجود $n - 1$ مربع لاتین دو به دو متعامد از مرتبه n است. [۹، ۱۰]

لم ۵.۲.۴. اگر F یک k -رنگ آمیزی یالی G باشد به طوری که برای هر یال i ، زیر گراف $G_i = (V(G), F^{-1}(i))$ عدد استقلال کمتر از $\frac{1}{k}$ داشته باشد آنگاه $\chi_{ad}(G) \geq k + 1$.

برهان. : فرض می‌کنیم یال‌های گراف G با k رنگ $1, 2, \dots, k$ رنگ آمیزی شده باشند، رنگ آمیزی به این صورت است که همه یال‌های به رنگ ۱ را G_1 ، همه یال‌های به رنگ ۲ را G_2 قرار می‌دهیم، ... و همه یال‌های به رنگ k را G_k قرار می‌دهیم. می‌خواهیم نشان می‌دهیم k -رنگ آمیزی راسی سازگار با F وجود ندارد. فرض کنیم چنین نباشد یعنی G دارای یک k -رنگ آمیزی راسی سازگار با F است و $C : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ این رنگ آمیزی می‌باشد. این k -رنگ آمیزی راسی، راس‌های گراف G را به k بخش افراز می‌کند. V_j را مجموعه همه راس‌های به رنگ j قرار می‌دهیم بدیهی است که V_j در G_j مستقل است زیرا اگر راس‌های به رنگ j درون گرافی قرار گیرند که یال‌های آن رنگ j دارد سازگاری گراف نقض می‌شود.

$$i(G_j) = \frac{\alpha(G_j)}{|V(G_j)|} < \frac{1}{k} \implies \alpha(G_j) < \frac{|V(G_j)|}{k}$$

پس $|V_j| \leq \alpha(G_j) < \frac{|V(G_j)|}{k}$ بنابراین

$$V(G) = \sum_{j=1}^k |V_j| < \sum_{j=1}^k \frac{|V(G_j)|}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |V(G_j)| = \frac{|V(G)|}{k}$$

$$V(G) < \frac{|V(G)|}{k}$$

□ که تناقض است.

قضیه ۶.۲.۴. اگر یک صفحه تصویری از مرتبه n وجود داشته باشد آنگاه $\chi_{ad}(K_n^2) = n$.

برهان. با توجه به این که $\chi(K_n^2) = n$ و $\chi_{ad}(K_n^2) \leq \chi(K_n^2)$ پس $\chi_{ad}(K_n^2) \leq n$ برای اثبات کافی است نشان دهیم $\chi_{ad}(K_n^2) \geq n$.

می‌دانیم مجموعه راس‌های K_n برابر با $\{1, 2, \dots, n\}$ و مجموعه راس‌های K_n^2 برابر با زوج‌های مرتب $\{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n\}$ است. اگر یک صفحه تصویری از مرتبه n وجود داشته باشد آنگاه $n - 1$ مربع لاتین دو به دو متعامد $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ از مرتبه n وجود دارد. برای هر مربع لاتین A_k که $k = 1, 2, \dots, n - 1$ و هر $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ فرض کنید $X_{k,s} = \{(i, j) : A_k(i, j) = s\}$ باشد. (بنابراین $|X_{k,s}| = n$ خواهد شد.) با توجه به این که A_k یک مربع لاتین است، $A_k(i, j) = s = A_k(i', j')$ دلالت بر این نکته دارد که $i \neq i'$ و $j \neq j'$. می‌دانیم اگر در یک مربع لاتین درایه سطر i ام و ستون j ام با درایه سطر i' ام و ستون j' ام با هم یکسان باشند این بدان معنی است که این دو درایه در یک سطر و یک ستون یکسان واقع نیستند بنابراین $i \neq i'$ و $j \neq j'$. حال اگر در K_n^2 ، $i = i'$ و $j = j'$ باشد (i, j) و (i', j') نشان‌دهنده یک راس هستند با توجه به این که $i \neq i'$ و $j \neq j'$

پس (i, j) و (i', j') در K_n^2 همسایه هستند. گراف K_n^2 از حاصل ضرب رسته‌ای دو گراف K_n در K_n بدست می‌آید و گوییم دو راس (i, j) و (i', j') در این گراف با هم مجاور هستند هرگاه $ii' \in E(K_n)$ و $jj' \in E(K_n)$ ، این شرط در مورد گراف K_n برقرار است بنابراین چون هر دو راسی که در نظر می‌گیریم با هم مجاور هستند پس هر $X_{k,s}$ یک n -خوشه در K_n^2 القا می‌کند. فرض می‌کنیم X_k زیر گرافی فراگیر از K_n^2 باشد به طوری که اجتماع راس مجزای اعضای $\{X_{k,s} : s = 1, 2, \dots, n\}$ است پس هر X_k اجتماعی راس مجزا از $X_{k,1}, X_{k,2}, \dots, X_{k,n}$ است که هر کدام یک n -خوشه هستند پس X_k از اجتماع راس مجزا از n ، n -خوشه تشکیل می‌شود یا به عبارت دیگر X_k اجتماع راس مجزا از n کپی از K_n است بنابراین عدد نسبت X_k به این صورت خواهد شد $\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} = \frac{\alpha(X_k)}{|V(X_k)|} = i(X_k)$. نشان می‌دهیم اگر $k \neq k'$ آنگاه X_k و $X_{k'}$ یال مجزا هستند، فرض می‌کنیم چنین نباشد با توجه به این که می‌دانیم X_k زیر گراف فراگیری است که اجتماع راس مجزای $\{X_{k,s} : s = 1, 2, \dots, n\}$ و $X_{k'}$ زیر گراف فراگیری است که اجتماع راس مجزای $\{X_{k',s} : s = 1, 2, \dots, n\}$ است بنابراین s و s' چنان وجود دارند که $X_{k,s}$ و $X_{k',s'}$ یال مشترک $(i', j') \sim (i, j)$ دارند پس این یال هم در X_k و هم در $X_{k'}$ آمده است پس بنابه تعریف $A_k(i, j) = A_k(i', j') = s$ و $A_{k'}(i, j) = A_{k'}(i', j') = s'$ یعنی $(s, s') = (A_k(i, j), A_{k'}(i, j)) = (A_k(i', j'), A_{k'}(i', j'))$. مشاهده می‌شود که این تساوی در تناقض با متعامد بودن دو مربع لاتین A_k و $A_{k'}$ است، پس اگر $k \neq k'$ باشد آنگاه X_k و $X_{k'}$ یال مجزا هستند.

در ادامه X_1 را همه یال‌های به رنگ ۱، X_2 را همه یال‌های به رنگ ۲، ... و X_k را همه یال‌های به رنگ k ، قرار می‌دهیم بنابراین یک $(n-1)$ -رنگ‌آمیزی یالی از K_n^2 بدست می‌آوریم به طوری که برای هر رنگ k ، زیر گراف $G_k = (V(G), F^{-1}(k))$ دارای نسبت استقلال $i(G_k) = \frac{\alpha(G_k)}{|V(G_k)|} = \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$ است پس بنابه لم قبل $\chi_{ad}(K_n^2) \geq n$.

□

قضیه ۷.۲.۴. اگر یک صفحه تصویری از مرتبه $n+1$ وجود داشته باشد، آنگاه $\chi_{ad}(K_n^2) = n$ است. برهان. قبل از ورود به اثبات قضیه، به اثبات درستی رابطه $\chi(K_n^2) = n$ می‌پردازیم. در حالت کلی نشان می‌دهیم که

$$\chi(G \times H) \leq \min\{\chi(G), \chi(H)\}.$$

فرض کنید c رنگ‌آمیزی مجازی با χ رنگ برای گراف G و f یک رنگ‌آمیزی راسی برای گراف $G \times H$ باشد که به صورت $f(a, b) = c(a)$ تعریف می‌شود. برای دو راس مجاور دلخواه (a, b) و (a', b') باید نشان دهیم که $f(a, b) \neq f(a', b')$. با توجه به اینکه $aa' \in E(G)$ و c رنگ‌آمیزی مجازی با χ رنگ برای G است پس نتیجه مطلوب برقرار بوده و f رنگ‌آمیزی مجاز می‌باشد یعنی $\chi(G \times H) \leq \chi(G)$. از طرفی برای گراف H نیز نتیجه مشابه برقرار است پس $\chi(G \times H) \leq \chi(H)$ و در نهایت رابطه $\chi(G \times H) < \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ برقرار است. حالت تساوی همچنان به صورت یک حدس باقی مانده است.

حال که درستی عبارت $\chi(K_n^2) = n$ نشان داده شد، بنا به رابطه $\chi_{ad}(K_n^2) \leq \chi(K_n^2)$ نامساوی $\chi_{ad}(K_n^2) \leq n$ برقرار است و تنها کافی است نشان دهیم که $\chi_{ad}(K_n^2) \geq n$.

از قبل می‌دانیم که وجود یک صفحه تصویری از مرتبه $n+1$ معادل با وجود n مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبه $n+1$ است پس می‌توان از بین این n مربع لاتین، $n-1$ مربع لاتین $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ از مرتبه $n+1$ را در نظر گرفت. در ادامه فرض می‌کنیم A'_k با حذف سطر و ستون آخر A_k بدست آید. ملاحظه می‌کنیم که درایه $a = A_k(n+1, n+1)$ در A'_k مرتبه n رخ می‌دهد و دیگر درایه‌ها غیر از a ، یعنی اگر $1 \leq s \leq n+1$ و $s \neq a$ باشد آنگاه s در A'_k مرتبه $n-1$ رخ می‌دهد. فرض کنید $\chi_{k,s} = \{(i, j) : A'_k(i, j) = s\}$. با توجه به اینکه هر دو عضوی که از $\chi_{k,s}$ در نظر گرفته می‌شود در K_n^χ مجاور خواهند شد پس اگر $s \neq a$ آنگاه $\chi_{k,s}$ در K_n^χ یک $(n-1)$ -خوشه القا می‌کند و زمانی که $s = a$ است، $\chi_{k,s}$ یک n -خوشه در K_n^χ القا خواهد کرد. حال فرض کنید X_k زیرگراف فراگیری از K_n^χ باشد که از اجتماع راس مجزای اعضای $\{X_{k,s} : s = 1, 2, \dots, n+1\}$ حاصل شده است.

با توجه به این که X_k از n ، $(n-1)$ -خوشه و یک n -خوشه تشکیل شده است بنابراین نسبت استقلال آن برابر است با:

$$i(X_k) = \frac{\alpha(X_k)}{|v(X_k)|} = \frac{n+1}{n^2} < \frac{1}{n-1}$$

با استفاده از قضیه قبل اگر، $k \neq k'$ آنگاه طبق قضیه قبل A_k و $A_{k'}$ متعامد هستند پس X_k و $X_{k'}$ یال مجزا خواهند بود. حال یال‌های X_k را با رنگ k رنگ‌آمیزی می‌کنیم. می‌دانیم که $k \in \{1, \dots, n-1\}$ است بنابراین یک $(n-1)$ -رنگ‌آمیزی یالی با نام F از زیرگراف K_n^χ بدست می‌آوریم به‌طوری‌که برای هر رنگ k نسبت استقلال زیرگراف $G_k = (V(G), F^{-1}(k))$ با

$$i(G_k) = \frac{\alpha(G_k)}{|v(G_k)|} = \frac{n+1}{n^2} < \frac{1}{n-1}$$

معادل خواهد شد که با به کار بردن لم ۵.۲.۴ داریم $\chi_{ad}(K_n^\chi) \geq n$ و درنهایت درستی عبارت $\square$ $\chi_{ad}(K_n^\chi) = n$ به اثبات می‌رسد.

لم ۸.۲.۴. برای هر دو عدد صحیح و مثبت n و k ، داریم:

$$\chi_{ad}(K_{n+1}^{k+1}) \geq \chi_{ad}(K_n^k) + 1.$$

برهان. $V(K_n) = Z_n$ بنابراین $V(K_{n+1}) = Z_{n+1}$ می‌دانیم که

$$V(K_{n+1}^{k+1}) = \{(j_1, j_2, \dots, j_{k+1}) : j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \in Z_{n+1}\},$$

و

$$V(K_n^k) = \{(j_1, j_2, \dots, j_k) : j_1, j_2, \dots, j_k \in Z_n\},$$

و

$$V(K_n^k) = \{(j_1, j_2, \dots, j_k) : j_1, j_2, \dots, j_k \in Z_n\}.$$

حال $v^* = (n, n, \dots, n)$ از K_{n+1}^{k+1} را در نظر می‌گیریم. زیرگرافی از K_{n+1}^{k+1} که توسط همسایگی $N_{K_{n+1}^{k+1}}(v^*)$ از v^* القا شده، یک کپی از K_n^{k+1} است. زیرا راس‌های این زیرگراف $k+1$ تایی‌هایی

از Z_n هستند. توجه داشته باشید که این زیرگراف شامل n کپی راس مجزا از K_n^k القا شده توسط مجموعه‌های

$$Y_i = \{(i + j_1, j_1, \dots, j_k) : j_1, j_2, \dots, j_k \in Z_n, i = 0, 1, \dots, n-1\}$$

است. واضح است که در همه Y_i ها مولفه اول و مولفه دوم مستقل از هم نیستند، $(j_1, \dots, j_k)$ ها به‌طور آزاد انتخاب می‌شوند. هر جفت از این k تایی‌ها در K_n^k به هم وصل‌اند هرگاه تک‌تک مولفه‌ها با هم متفاوت باشند. در گراف K_{n+1}^{k+1} نیز همین طور است. یک جفت از $k+1$ تایی‌ها به هم وصل‌اند هرگاه تمامی مولفه‌ها از جفت مولفه‌های اول تا ... جفت مولفه‌های آخر با هم متفاوت باشند. بنابراین اگر مولفه‌های دوم متناظر با مولفه‌های آخر متناظر را در نظر بگیریم، همگی متفاوت خواهند شد و به هم متصل خواهند بود یعنی Y_i ها زیرگراف‌هایی از K_n^k هستند. از طرف دیگر اگر هر جفت از k تایی‌ها در K_n^k به هم وصل باشند، آنگاه $j_1 \neq j'_1$ است پس در مولفه اول به هر j و j' مقدار مساوی اضافه شده یعنی مولفه‌های اول هم متفاوتند و $k+1$ تایی‌ها نیز متفاوت خواهند شد پس هر Y_i یک کپی از K_n^k است.

همچنین این n کپی باید راس مجزا باشند. فرض کنید چنین نباشد یعنی Y_i و $Y_{i'}$ وجود دارند که راس مجزا نیستند یعنی راسی وجود دارد که هم در Y_i و هم در $Y_{i'}$ وجود دارد و

$$Y_i = \{(i + j_1, j_1, \dots, j_k), j_1, \dots, j_k \in Z_n\},$$

$$Y_{i'} = \{(i' + j'_1, j'_1, \dots, j'_k), j'_1, \dots, j'_k \in Z_n\}$$

پس باید $(i + j_1, j_1, \dots, j_k) = (i' + j'_1, j'_1, \dots, j'_k)$ از تساوی $j_1 = j'_1$ و $i + j_1 = i' + j'_1$ نتیجه می‌شود که $i = i'$ پس هر دو راس در یک کپی قرار دارند و $Y_i \cap Y_{i'} = \emptyset$.

در ادامه اگر $\chi_{ad}(K_n^k) = m$ آنگاه یک $(m-1)$ -رنگ‌آمیزی F از K_n^k با رنگ‌های $0, 1, \dots, m-2$ وجود دارد به‌طوری‌که K_n^k ، $(m-1)$ -رنگ‌آمیزی سازگار با F ندارد. از طرفی می‌دانیم $\chi(K_n^k) = n$ و $\chi_{ad}(K_n^k) \leq \chi(K_n^k)$ پس $m \leq n$. فرض می‌کنیم F' یک m -رنگ‌آمیزی یالی از K_{n+1}^{k+1} با تعریف زیر باشد:

برای $j = 0, 1, \dots, m-1$ ، Y_j را با رنگ صفر، یال‌های بین v^* و Y_1 را با رنگ ۱، ... و یال‌های بین v^* و Y_{n-1} را با رنگ $(m-1)$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم چون $m \leq n$ پس $m+1 \leq n+1$. حال یال‌های درون Y_j را رنگ‌آمیزی می‌کنیم به این صورت که درون Y_j در $(m-1)$ رنگ‌آمیزی F یال‌های به رنگ صفر را با رنگ $(m-1)$ ، درون Y_1 یال‌های به رنگ یک را با رنگ $m-1$ جابه‌جا می‌کنیم تا جایی که $j < m-1$ و یال‌های دیگر را به دلخواه رنگ‌آمیزی می‌کنیم. حال باید نشان دهیم که K_{n+1}^{k+1} رنگ‌آمیزی سازگار با F' ندارد. فرض کنید چنین نباشد و C یک m -رنگ‌آمیزی از K_{n+1}^{k+1} سازگار با F' داشته باشد. اگر برای $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ، $C(v^*) = j$ آنگاه هیچ راسی در Y_j از رنگ j وجود نخواهد داشت، در غیر این صورت رنگ‌آمیزی K_{n+1}^{k+1} سازگار نخواهد شد. بنابراین اگر بتوان هر کپی از K_n^k را با $m-1$ رنگ به‌طور سازگار رنگ‌آمیزی کرد آنگاه K_{n+1}^{k+1} را نیز می‌توان به‌طور سازگار با F' رنگ‌آمیزی کرد که این تناقضی آشکار است. $\square$

نتیجه ۲.۴.۹. اگر یک صفحه تصویری از مرتبه $n-1$ وجود داشته باشد آنگاه $\chi_{ad}(K_n^3) = n$.

۳.۴ حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها

تعریف ۱.۳.۴. حاصل ضرب دکارتی گراف‌های H و G که با $G \square H$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G) \times V(H)$. دو راس (x, y) و (x', y') در آن مجاور هستند اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$(۱) \quad y = y', xx' \in E(G)$$

$$(۲) \quad x = x', yy' \in E(H)$$

توان دکارتی گراف G ، که به صورت بازگشتی تعریف می‌شود مطابق با رابطه زیر نشان داده می‌شود $G^{\square 1} = G$ و $G^{\square(n+1)} = G^{\square n} \square G$. برای $n \geq 1$ این سوال مطرح می‌شود که آیا همانند حاصل ضرب رسته‌ای، عدد ثابتی مانند k وجود دارد به طوری که برای هر n ، $\chi_{ad}(K_n^{\square k}) = n$ شود یا خیر، که پاسخ منفی است. در واقع درجه ماکسیمم $K_n^{\square k}$ ، $k(n-1)$ است و در $[۷]$ نشان داده شده که برای هر گراف G ، $\chi_{ad}(K_n^{\square k}) \leq n-1$ آنگاه $\sqrt{2ekn} \leq n-1$ بنابراین اگر $\chi_{ad}(G) \leq \left\lceil \sqrt{e(2\Delta(G)-1)} \right\rceil$ ، البته اگر توان محدود به یک عدد ثابت نباشد جواب مثبت است. نشان داده می‌شود که به ازای هر عدد طبیعی n داریم $\chi_{ad}(K_n^{\square(n-1)}) = n$.

حدس ۲.۳.۴. برای هر گراف G ، عدد طبیعی مانند $m(G)$ وجود دارد که اگر $n \geq m(G)$ آنگاه $\chi_{ad}(G^{\square n}) = \chi(G^{\square n}) = \chi(G)$.

در این بخش ثابت می‌شود که حدس بالا برای گراف‌هایی مانند G که عدد رنگی کسری نهایی آن‌ها به طور اکید از $\chi(G) - 1$ کوچکتر است، برقرار می‌باشد، به ویژه برای هر $p \geq 2q$ این حدس برای گراف کامل دوری $K_{\frac{p}{q}}$ که مجموعه راس‌های آن $\{0, 1, \dots, p-1\}$ و مجموعه یال‌های آن $\{i, j : q \leq |i-j| \leq p-q\}$ است، صدق می‌کند.

قضیه ۳.۳.۴. [۲] فرض می‌کنیم G یک گراف باشد، $\chi(G) = n$ اگر و تنها اگر n کوچکترین عددی است که یک همریختی مانند $f: G \rightarrow K_n$ موجود باشد، به عبارت دیگر $\chi(G) = n$ اگر و تنها اگر $\chi(G) = n = \min\{n \in N | \exists f: G \rightarrow K_n \text{ یک همریختی}\}$

عدد رنگی کسری [۴] گراف G که با $\chi_f(G)$ نشان می‌دهیم برابر است با:

$$\chi_f(G) = \min\left\{\frac{m}{n} \in N | \exists f: G \rightarrow KG(m, n) \text{ یک همریختی}\right\}$$

مدتی بعد از بیان این تعریف، ثابت شد که اینفیم در این تعریف می‌تواند بدست آید و بنابراین

$$\chi_f(G) = \inf\left\{\frac{m}{n} \in N | \exists f: G \rightarrow KG(m, n) \text{ یک همریختی}\right\}$$

با توجه به قضیه ۳.۳.۴ و تعریف عدد رنگی کسری می‌توان، این نکته را دریافت که همان نقشی که گراف کامل برای عدد رنگی راسی ایفا می‌کند، گراف کنسر برای عدد رنگی کسری ایفا خواهد کرد. به وضوح می‌توان مشاهده نمود که $\chi_f(G) \leq \chi(G)$ زیرا با توجه به تعریف آنها، اگر از G به $KG(m, n)$ یک

همریختی موجود باشد به طوری که $\frac{m'}{n}$ کوچکترین عدد باشد و $\frac{m'}{n}$ نیز از $\frac{m}{n}$ بزرگتر باشد، بنابراین طبق تعریف $\chi(G)$ و از آنجایی که از G به K_m یک همریختی وجود دارد، $\frac{m}{n}$ را به عنوان $\chi_f(G)$ در نظر می‌گیریم، بنابراین همواره $\chi_f(G) \leq \chi(G)$.

تعریف ۴.۳.۴. عدد رنگی کسری نهایی گراف G که با نماد $\chi_F(G)$ نشان داده می‌شود عبارت است از $\chi_F(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_f(G^{\square k})$.

تعریف ۵.۳.۴. برای گرافی مانند G نسبت استقلال نهایی که آن را با نماد $I(G)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} i(G^{\square k})$$

همچنین در [۱۳] نشان داده شده است که $\chi_F(G)I(G) = 1$.

لم ۶.۳.۴. اگر G یک گراف و n یک عدد صحیح باشد به طوری که $i(G) < \frac{1}{n-1}$ آنگاه نامساوی زیر برقرار است $\chi_{ad}(G^{\square(n-1)}) \geq n$ ، علاوه بر این اگر $\chi(G) = n$ آنگاه $\chi_{ad}(G^{\square(n-1)}) = n$.

برهان. فرض کنید $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ یالی از $G^{\square(n-1)}$ باشد بنابراین با توجه به تعریف، اندیس $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ وجود دارد به طوری که $x_j \sim y_j$ و $x_i = y_i$ برای $i \neq j$. این یال را با رنگ j رنگ آمیزی می‌کنیم بنابراین یک $(n-1)$ -رنگ آمیزی F از یال‌های $G^{\square(n-1)}$ بدست می‌آید. زیرگراف G_j القا شده توسط یال‌های به رنگ j را در نظر می‌گیریم. برای هر دنباله $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})$ با جایگزین کردن درایه‌ی j ام (نماد $*$) با راس‌های G ، یک کپی از G بدست می‌آید که با $G_{(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})}$ نشان داده می‌شود. نکته قابل ملاحظه این است که در $G_{(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})}$ همه راس‌ها در $n-2$ درایه با هم یکسان و تنها در درایه‌ی j ام با هم متفاوت هستند. حال اگر درایه‌ی j ام را با راس‌های G جایگزین کنیم در این صورت اگر هر دو راس در G به هم متصل باشند، دو راس در این گراف نیز به همدیگر وصل می‌باشند بنابراین اگر یالی بین راس‌ها موجود باشد، رنگ یال حاصل رنگ j خواهد شد. بنابراین این گراف زیرگرافی از زیرگراف فراگیر G_j خواهد شد. حال دو گراف $G_{(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})}$ و $G_{(x'_1, x'_2, \dots, x'_{j-1}, *, x'_{j+1}, \dots, x'_{n-1})}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_{n-1})$ و $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{j-1}, *, x'_{j+1}, \dots, x'_{n-1})$ با هم متفاوت باشند در این صورت باید به ازای یک $i, i \neq j$ داشته باشیم $x_i \neq x'_i$. بنابراین G_j اجتماع راس مجزا از $|V(G)|^{n-2}$ کپی از G است و بنا به فرض $i(G_j) < \frac{1}{n-1}$ پس با استفاده از لم ۵.۲.۴ داریم $\chi_{ad}(G^{\square(n-1)}) \geq n$.

حال برای اثبات درستی ادامه لم از این حقیقت می‌توان استفاده کرد که می‌دانیم:

$$\chi(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n) = \max \chi(G_i),$$

بنابراین

$$\chi(G^{\square(n-1)}) = \chi(G) = n,$$

پس با توجه به رابطه $\chi_{ad}(G^{\square(n-1)}) \leq \chi(G^{\square(n-1)})$ واضح است که $\chi_{ad}(G^{\square(n-1)}) = n$. $\square$

نتیجه ۷.۳.۴. برای هر عدد صحیح n ، $\chi_{ad}(K_n^{\square(n-1)}) = n$.

برهان. با قرار دادن $G = K_n$ در لم قبلی و از آنجا که $i(K_n) < \frac{1}{n-1}$ نتیجه مطلوب برقرار است. $\square$

قضیه ۸.۳.۴. برای هر گراف G ، عدد صحیح m وجود دارد به طوری که $\chi_{ad}(G) \geq \lceil \chi_F(G) \rceil$. اگر $\chi(G) < \chi_F(G) + 1$ آنگاه $\chi(G) = \chi(G^{\square m}) = \chi_{ad}(G^{\square m})$.

برهان. اگر $\lceil \chi_F(G) \rceil = n$ ادعا می‌کنیم k چنان وجود دارد که $i(G^{\square k}) < \frac{1}{n-1}$ فرض کنید چنین نباشد و برای هر k داشته باشیم $i(G^{\square k}) \geq \frac{1}{n-1}$ بنابراین با حد گرفتن از این عبارت خواهیم داشت $I(G) \geq \frac{1}{n-1}$ از طرفی $I(G)\chi_F(G) = 1$ پس

$$1 = I(G)\chi_F(G) \geq \frac{\chi_F(G)}{n-1}.$$

به عبارت دیگر $\chi_F(G) \leq n-1$ که با $\lceil \chi_F(G) \rceil = n$ در تناقض است، پس چنین k ای وجود دارد. حال فرض کنید $G^{\square k} = H$ ، با توجه به لم ۶.۳.۴ داریم $\chi_{ad}(H^{\square(n-1)}) \geq n$ که در نهایت $\chi_{ad}(G^{\square km}) \geq n$ در بخش دیگر اثبات اگر $\chi(G) < \chi_F(G) + 1$ داریم $\chi_F(G) > \chi(G) - 1$ به عبارت دیگر $\lceil \chi_F(G) \rceil = \chi(G)$ که بنا به حالت قبل و لم ۶.۳.۴ نتیجه مطلوب برقرار است. $\square$

تعریف ۹.۳.۴. فرض کنیم G یک گراف و p و q اعداد صحیح مثبت باشند. یک (p, q) -رنگ آمیزی برای G عبارت است از نگاشتی مانند $f: v(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, p-1\}$ به طوری که برای هر یال uv از گراف G داشته باشیم $q \leq |f(u) - f(v)| \leq p - q$.

تعریف ۱۰.۳.۴. عدد رنگی دوری گراف G با نماد $\chi_c(G)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_c(G) = \inf\{p/q : (p, q) \text{ رنگ آمیزی دارد}\}.$$

برای هر گراف G ، $\chi(G) - 1 \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$ و $\chi_f(G) \leq \chi_F(G) \leq \chi_c(G)$ [۱۳، ۱۴].

تعریف ۱۱.۳.۴. گرانی مانند G را ستاردهاکسترمال می‌نامیم هرگاه $\chi_F(G) = \chi_c(G)$. به ازای هر $p \leq 2q$ ، گراف کامل دوری $K_{\frac{p}{q}}$ یک گراف ستاردهاکسترمال است.

نتیجه ۱۲.۳.۴. اگر G یک گراف ستاره-اکسترمال باشد آنگاه برای عدد به اندازه کافی بزرگ m داریم:

$$\chi_{ad}(K_{\frac{p}{q}}^{\square m}) = \chi(K_{p/q}) = \lceil \frac{p}{q} \rceil,$$

قضیه ۱۳.۳.۴. برای گراف‌های G و H ، داریم:

$$\chi_{ad}(G \square H) \leq \chi_{ad}(G)\chi_{ad}(H).$$

برهان. فرض کنید $\chi_{ad}(G) = k$ و $\chi_{ad}(H) = l$. فرض کنید F یک رنگ آمیزی یالی $G \square H$ باشد که در آن از رنگ‌های $\{(i, j) : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l\}$ استفاده شده است. برای هر راس x از H فرض کنید G_x زیرگرافی از $G \square H$ القا شده توسط $V(G) \times \{x\}$ و F_x یک رنگ آمیزی یالی G_x با تعریف $F_x(e) = i$ اگر $F(e) = (i, j)$ برای برخی j ‌ها است. همچنین فرض کنید برای هر y از G ، زیرگراف H_y و رنگ آمیزی یالی F_y به طور مشابه تعریف شده است. برای هر x از H فرض کنید f_x

یک k -رنگ آمیزی G_x سازگار با F_x است و برای هر راس y از G ، فرض کنید g_y یک L -رنگ آمیزی از H_y سازگار با F_y است. حال $\phi(y, x) = (f_x(y), g_y(x))$ یک kl -رنگ آمیزی $G \square H$ سازگار با F است. $\square$

تعریف ۱۴.۳.۴. بیشینه میانگین درجات گراف G که با نماد $mad(G)$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$mad(G) = \max\{2|E(H)|/|v(H)| \mid H \text{ زیر گراف } G \text{ است}\}$$

برای هر گراف G داریم

$$ch_{ad}(G) \leq \lceil mad(G)/2 \rceil + 1.$$

قضیه ۱۵.۳.۴. برای گراف‌های G و H داریم:

$$\chi_{ad}(G \square H) \leq ch_{ad}(G \square H) \leq \min\{ch_{ad}(G) + \lceil mad(H)/2 \rceil, ch_{ad}(H) + \lceil mad(G)/2 \rceil\}$$

برهان. فرض می‌کنیم $ch_{ad}(G) = k$ و $\lceil mad(H)/2 \rceil = l$. کافی است نشان دهیم نامساوی زیر برقرار است $ch_{ad}(G \square H) \leq k + l$. فرض می‌کنیم F رنگ آمیزی یالی G و l لیست واگذاری است که به هر راس (y, x) از $G \square H$ یک مجموعه $L(y, x)$ شامل $k + l$ رنگ مجاز واگذار می‌کند برای هر راس y از G ، زیرگراف H_y یک کپی از H است. بنا به نتیجه حکیمی [۵] یک جهت‌دهی از H_y وجود دارد به طوری که برای هر راس (y, x) از H_y درجه خروجی حداکثر l است اگر $L'_x(y)$ از $L(y, x)$ با حذف رنگ همه یال‌های خروجی (y, x) در H_y بدست آید آنگاه $L'_x(y)$ شامل حداقل k رنگ مجاز است. برای هر راس x از H زیرگراف G_x یک کپی از G و k -انتخاب‌پذیر سازگار است. بنابراین یک L'_x رنگ آمیزی ϕ_x از G_x ، سازگار با F وجود دارد. واضح است که ϕ که به صورت $\phi(y, x) = \phi_x(y)$ تعریف می‌شود یک L -رنگ آمیزی $G \square H$ است. $\square$

پیوست آ

جدول نمادها

جدول آ.۱: جدول نمادها

دور n راسی	C_n
عدد انتخابی سازگار	ch_{ad}
مسیر n راسی	P_n
درجه راس v در G	$d_G(v)$
مجموعه یال‌ها	E
گراف	G
زیرگراف G القا شده توسط S	$G[S]$
حاصل ضرب الفبایی	$G \cdot H$
حاصل ضرب رسته‌ای	$G \times H$
حاصل ضرب دکارتی	$G \square H$
نسبت استقلال گراف G	$i(G)$
گراف کامل n راسی	K_n
گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y که $ X = n$ و $ Y = m$	$K_{m,n}$
گراف کنسر	$KG(m, n)$
مجموعه راس‌ها	V
عدد استقلال	α
عدد استقلال یالی	α'
عدد خوشه‌ای	w
کمترین درجه	δ
بیشترین درجه	Δ

جدول ۲.۰: جدول نمادها

عدد رنگی	χ
عدد رنگی یالی	χ'
عدد رنگی سازگار	χ_{ad}
عدد رنگی کسری	χ_f
عدد رنگی دوری	χ_c
انقباض e	$G \cdot e$
حذف e	$G - e$
افزودن e	$G + e$
حذف v	$G - v$
حذف S	$G - S$
یکریختی	$G \cong H$
H زیرگراف G	$H \subseteq G$
H زیرگراف سره G	$H \subset G$
گراف تهی با n راس	N_n
بیشینه میانگین درجات گراف G	$mad(G)$

- [1] Noga Alon and Joel H Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons, 2004.
- [2] John Adrian Bondy and Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph theory with applications*, volume 6. Macmillan London, 1976.
- [3] Louis Esperet, Mickaël Montassier, and Xuding Zhu. Adapted list coloring of planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 62(2):127–138, 2009.
- [4] Christopher David Godsil, Gordon Royle, and CD Godsil. *Algebraic graph theory*, volume 207. Springer New York, 2001.
- [5] S Louis Hakimi. On the degrees of the vertices of a directed graph. *Journal of the Franklin Institute*, 279(4):290–308, 1965.
- [6] Pavol Hell, Zhishi Pan, Tsai-Lien Wong, and Xuding Zhu. Adaptable chromatic number of graph products. *Discrete Mathematics*, 309(21):6153–6159, 2009.
- [7] Pavol Hell and Xuding Zhu. On the adaptable chromatic number of graphs. *European Journal of Combinatorics*, 29(4):912–921, 2008.
- [8] Wilfried Imrich and Sandi Klavzar. *Product graphs*. Wiley, 2000.
- [9] CC Lindner and CA Rodger. *Design theory*. 1997.
- [10] SS Shrikhande. A note on mutually orthogonal latin squares. *Sankhyā Ser. A*, 23:115–116, 1961.
- [11] Klaus Wagner. Über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Mathematische Annalen*, 114(1):570–590, 1937.

- [12] Douglas Brent West. *Introduction to graph theory*, volume 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- [13] Xuding Zhu. On the bounds for the ultimate independence ratio of a graph. *Discrete Mathematics*, 156(1):229–236, 1996.
- [14] Xuding Zhu. Circular chromatic number: a survey. *Discrete mathematics*, 229(1):371–410, 2001.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

join اتصال

induced القا شده

contraction انقباض

ب

cut برش

vertex cut برش راسی

minimum cut برش مینیمم

edge cut برش یالی

improvement بهبود

پ

covering پوشش

minimum covering پوشش مینیمم

edge covering پوشش یالی

ت

matching تطابق

perfect matching تطابق کامل

چ

chromatic polynomial چند جمله‌ای رنگی

ح

four-colour conjecture حدس چهار رنگ

خ

automorphism خود ریختی

clique خوشه

د

degree درجه
 system of distinct representative دستگاه نمایندگی متمایز
 cycle دور
 even cycle دور زوج
 odd cycle دور فرد

ر

vertex راس
 vertex colouring رنگ آمیزی راسی
 proper colouring رنگ آمیزی مجاز
 edge colouring رنگ آمیزی یالی

ز

subgraph زیر گراف
 induced subgraph زیرگراف القایی
 edge-induced subgraph زیر گراف القایی یالی
 disjoint subgraphs زیر گراف‌های مجزا

ط

loop طوقه
 length طول

ع

independence number عدد استقلال
 chromatic number عدد رنگی

ف

distance فاصله

ک

girth کمر

گ

graph گراف
 bipartite graph گراف دوبخشی
 simple graph گراف ساده
 complete graph گراف کامل
 planar graph گراف مسطح
 regular graph گراف منتظم

disconnected graph	گراف ناهمبند
isomorphic graphs	گراف‌های یکرخت
connected graph	گراف همبند
k-partite graph	گراف k -بخشی
م	
triangle	مثلث
adjacent	مجاور
independent set	مجموعه مستقل
path	مسیر
component	مولفه
ن	
embedding	نشانندن
و	
face	وجه
ی	
edge	یال
cut edge	یال برشی
isomorphism	یکریختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

adjacent مجاور

B

bipartite graph گراف دوبخشی

C

chromatic number عدد رنگی

chromatic polynomial چند جمله‌ای رنگی

clique خوشه

complete graph گراف کامل

component مولفه

connected graph گراف همبند

contraction انقباض

cut برش

cut edge یال برشی

covering پوشش

cycle دور

D

degree درجه

disconnected graph گراف ناهمبند

disjoint subgraphs زیر گراف‌های مجزا

distance فاصله

E

edge یال

edge colouring رنگ آمیزی یالی

edge covering پوشش یالی

edge cut	برش یالی
edge-induced subgraph	زیرگراف القایی یالی
embedding	نشانندن
even cycle	دور زوج
F	
face	وجه
four-colour conjecture	حدس چهار رنگ
G	
girth	کمر
graph	گراف
I	
independence number	عدد استقلال
independent set	مجموعه مستقل
induced subgraph	زیرگراف القایی
induced	القا شده
improvement	بهبود
isomorphic graphs	گراف‌های یکرخت
isomorphism	یکریختی
J	
join	اتصال
K	
k-partite graph	گراف k -بخشی
L	
length	طول
loop	طوقه
M	
matching	تطابق
minimum covering	پوشش مینیم
minimum cut	برش مینیم
O	
odd cycle	دور فرد
automorphism	خود ریختی

P

path مسیر

perfect matching تطابق کامل

planar graph گراف مسطح

proper colouring رنگ آمیزی مجاز

 R

regular graph گراف منتظم

 S

simple graph گراف ساده

subgraph زیر گراف

system of distinct representative دستگاه نمایندگی متمایز

 T

triangle مثلث

 V

vertex راس

vertex colouring رنگ آمیزی راسی

vertex cut برش راسی

نمایه

- K_4 فرد-یالی، ۱۸
- L -رنگ آمیزی سازگار، ۳۱
- k -رنگ آمیزی سازگار، ۱۵
- k -انتخاب پذیر سازگار، ۳۲
- k -رنگ پذیر سازگار، ۱۶
- k -وجهی، ۳۹
- حاصل ضرب
- الفبایی، ۵۱
- رسته ای، ۵۱
- دو چرخه فرد-یالی، ۱۸
- رنگ آمیزی لیستی، ۴۹
- سیستم نمایندگی متمایز، ۱۷
- شرط هال، ۱۷
- صفحه تصویری، ۵۵
- عدد انتخابی سازگار، ۳۲
- عدد رنگی سازگار، ۱۶
- قضیه چهار رنگ، ۲۹
- لم لواژ، ۲۹
- مربع لاتین، ۵۵
- وتر طولانی، ۳۶

Aabstract

Given an edge coloring with colors $\{1, 2, \dots, k\}$, we call a vertex coloring of G with colors $\{1, 2, \dots, k\}$ adaptable to the edge coloring if for any edge of G , the colors on the end vertices of it and the edge itself are different. The smallest k for which there exists a adaptable coloring for any edge coloring with colors $\{1, 2, \dots, k\}$ is called the adaptable coloring number of G , denoted by $\chi_{ad}(G)$.

In this thesis, we describe some new results in the concept of the adaptable coloring of graphs. Also We define the adaptable choice number graphs and we study some results concerning the choice number of graphs.

Keywords : Adapted coloring - Adapted list coloring- Adaptable chromatic number - Adaptable choice number



Shahrood University of Technology

Shahrood University
Faculty of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Adaptable Chromatic Number of Graphs

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

Advisor

Mr. Seyed Reza Musawi

by

Fatemeh Moradi

2015