



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

رنگ آمیزی گراف های مسطح فازی و مسئله چهار رنگ فازی

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شهرباف مقدس

دانشجو

فریاباستانی

بهمن ۱۳۹۳

ساکذار کسانى هستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکى زاده مى شوم و از دیگرى جاودانه. استادى که سپیدى را بر تنه
سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویى از او پای من سیاه ماند
تقدیم به

به او که نمى دانم از بزرگى اش بگویم، مردانگى، سخاوت یا مهربانى اش
پدرم و نخوشى همیشگى ام،

به مقدس ترین واژه مادر لغت نامه دلم، مادر مهربانم که زندگیم را دیون مهر و عطف آن مى دانم،
و به همسرم اسطوره زندگیم، پناه محبت و امید بودنم.

تعمدنامه

اینجانب فریبا باستانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان رنگ آمیزی گراف های سطح فازی و مسئله چهار رنگ فازی، تحت راهنمایی دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فریبا باستانی
بهمن ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

در این پایان نامه موضوع گراف های مسطح فازی و رنگ آمیزی گراف های مسطح فازی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این رابطه برخی مباحث مربوط به گراف های مسطح قطعی به گراف های مسطح فازی تعمیم داده شده است. فصل اول، مربوط به تاریخچه ی موضوع و بیان تعاریف اساسی گراف های فازی می باشد. در فصل دوم به تعریف گراف مسطح فازی و دوگان آن، گراف چندگانه فازی، گراف مسطح فازی- α و دوگان آن و تعمیم قضایای مربوط به فرمول اویلر برای گراف های فازی پرداخته شده است. در فصل سوم موضوع یکریختی در گراف های مسطح فازی، تعمیم قضیه کوراتوسکی برای گراف های فازی، اجتماع روی گراف های مسطح فازی و تعاریف گراف های فازی منتظم و افلاطونی مطرح شده است. در فصل چهارم انواع رنگ آمیزی گراف های فازی α -برش و برخی کاربردهای آن بررسی و هم چنین برخی مفاهیم گراف های فازی از جمله درجه رأس، درجه وجه و قدرت وجه مبتنی بر اعداد فازی مثلثی تعریف شده اند و عدد رنگی و مفهوم رنگ فازی گراف فازی نیز مبتنی بر اعداد فازی مثلثی تعمیم و چهار رنگ پذیری فازی و ارتباط رنگ فازی با گراف فازی نیز بیان شده است.

فهرست مطالب

ح فهرست تصاویر

د فهرست جداول

۱ تاریخچه و مقدمات

۲ ۱۰۱ تاریخچه رنگ آمیزی گراف

۴ ۲۰۱ تاریخچه رنگ آمیزی گراف های فازی

۴ ۳۰۱ مجموعه های فازی

۷ ۴۰۱ گراف های فازی

۱۷ ۲ گراف مسطح فازی

۱۸ ۱۰۲ گراف مسطح

۲۰ ۲۰۲ گراف چندگانه فازی

۲۱ ۳۰۲ گراف مسطح فازی

۲۵ ۴۰۲ قضایای مربوط به فرمول اویلر

۲۶ ۵۰۲ تعمیم قضایا برای گراف های مسطح فازی

۲۷ ۶۰۲ گراف مسطح فازی-۰.۶۷

۲۸ ۱۰۶۰۲ دوگان گراف مسطح فازی-۰.۶۷

۳۳	۳	یکریختی گراف‌های فازی و اجتماع دو گراف مسطح فازی
۳۴	۱.۳	یکریختی گراف‌های فازی
۳۴	۱.۱.۳	ویژگی‌های اساسی یکریختی
۳۸	۲.۳	اجتماع دو گراف مسطح فازی
۴۳	۳.۳	گراف فازی منتظم
۴۳	۱.۳.۳	گراف منتظم قطعی
۴۴	۲.۳.۳	گراف فازی ۳-منتظم
۴۴	۴.۳	گراف‌های افلاطونی
۴۵	۴	رنگ‌آمیزی گراف‌های فازی
۴۶	۱.۴	رنگ‌آمیزی گراف قطعی
۴۶	۲.۴	رنگ‌آمیزی فازی
۴۷	۳.۴	رنگ‌آمیزی فازی رأسی
۴۸	۴.۴	رنگ‌آمیزی فازی یالی
۵۰	۵.۴	رنگ‌آمیزی فازی مجموع
۵۱	۶.۴	k -رنگ آمیزی فازی
۵۴	۷.۴	جمع رنگی گراف فازی
۵۶	۸.۴	رنگ آمیزی گراف‌های مسطح قطعی
۵۶	۹.۴	قضیه چهار رنگ
۵۷	۱۰.۴	تعمیم برخی مفاهیم گراف فازی مبتنی بر اعداد فازی مثلثی
۵۷	۱.۱۰.۴	قدرت درجه رأس و وجه در گراف فازی
۵۸	۲.۱۰.۴	میانگین قدرت درجه رأس و وجه در گراف فازی
۵۹	۳.۱۰.۴	درجه فازی رأس به صورت یک عدد فازی مثلثی
۵۹	۴.۱۰.۴	درجه فازی وجه

۵.۱۰.۴	تعمیم مفهوم عدد رنگی گراف فازی مبتنی بر اعداد فازی مثلثی	۶۰
۱۱.۴	چهار رنگ‌پذیری فازی گراف‌های مسطح	۶۰
۱۲.۴	تعمیم مفهوم رنگ فازی در گراف‌های فازی	۶۱
۱.۱۲.۴	ارتباط رنگ فازی با گراف فازی	۶۱
۱۳.۴	کاربردها	۶۱
۱.۱۳.۴	کاربرد مسئله حداقل رنگ آمیزی مجموع	۶۲
۲.۱۳.۴	مسئله چراغ راهنمایی	۶۳
۶۵	مراجع	
۶۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۶۹	نمایه	

فهرست تصاویر

۹		گراف فازی $\tilde{G}$ و گراف قطعی G^*	۱.۱
۱۰		گراف فازی قوی $\tilde{G}$ و گراف فازی کامل $\tilde{G}'$	۲.۱
۱۲			۳.۱
۱۳			۴.۱
۱۴		گراف دوبخشی	۵.۱
۱۵		گراف اویلری	۶.۱
۱۹		گراف مسطح G_1 و مسطح شده G_2	۱.۲
۱۹		گراف دوگان G^*	۲.۲
۲۲			۳.۲
۲۶		گراف‌های یکریخت	۴.۲
۳۰			۵.۲
۴۲		اجتماع G_1 و G_2 ($G_1 \cup G_2$)	۱.۳
۴۳			۲.۳
۴۴		گرافهای افلاطونی	۳.۳
۴۸		رنگ‌آمیزی فازی رأسی	۱.۴
۴۹		رنگ‌آمیزی فازی یالی	۲.۴

۵۱		رنگ‌آمیزی فازی مجموع	۳.۴
۶۳			۴.۴
۶۴			۵.۴

فهرست جداول

۴۹		۱.۴
۵۰		۲.۴

فصل ۱

تاریخچه و مقدمات

۱.۱ تاریخچه رنگ‌آمیزی گراف

مفهوم گراف در سال ۱۷۳۶ توسط لئونارد اویلر با طرح راه حلی برای مسئله پل کونیسبرگ^۱ ارائه شد و به تدریج توسعه یافت. گراف‌ها امروزه کاربرد زیادی در برخی علوم دارند. از گراف‌ها در شبکه‌ها، طراحی مدارهای الکتریکی، آنالیز سیستم‌ها، اقتصاد، حمل و نقل، تحقیق در عملیات، اصلاح مسیر خیابان‌ها و برای حل مشکل ترافیک و... استفاده می‌کنند.

رنگ‌آمیزی گراف یکی از مهم‌ترین مسائل بهینه‌سازی ترکیبیات است، بسیاری از مسائل کاربردی مورد مطالعه، می‌تواند به عنوان مسائل رنگ‌آمیزی، مدل‌بندی شود. فرم عمومی این مسائل، مستلزم تشکیل یک گراف با رئوسی که نماینده‌ی بخش‌های مورد مطالعه و یال‌ها، ارتباط دهنده‌ی بین این بخش‌ها است. تاریخچه رنگ‌آمیزی گراف از مسئله چهار رنگ^۲ است، به این صورت که آیا می‌توان کشورهای هر نقشه را با حداکثر چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری‌که دو کشور با مرز مشترک رنگ یکسان نگیرند [۹].

این مسئله توسط فرانک گاتری^۳ در سال ۱۸۵۲ مطرح گردید و بار اول در سال ۱۸۷۹ توسط کمپ^۴ اثبات گردید که اثبات وی در سال ۱۸۹۰ توسط هی‌وود^۵ رد گردید و سرانجام در سال ۱۹۷۷ توسط دانشمندانی چون اپل^۶، هاکن^۷، کچ^۸ اثبات گردید.

اساس مسئله رنگ‌آمیزی گراف، دسته‌بندی رئوس گراف است به بخش‌های کوچک، با این محدودیت که رأس‌های ناسازگار(ناهمرنگ) در یک گروه یکسان قرار نگیرند.

گراف $G(V, E)$ را در نظر بگیرید، یک تابع رنگ‌آمیزی، یک نگاشت $C: V \rightarrow N$ است که $C(i)$ رنگ رأس i است به این صورت که دو رأس مجاور، نمی‌توانند رنگ یکسان بگیرند یعنی اگر $\{i, j\} \in E$ آنگاه $C(i) \neq C(j)$ که رئوس i, j رئوس ناسازگار نامیده می‌شود. k -رنگ‌آمیزی C^k

^۱konigsberg bridge

^۲color four problem

^۳F. Gathree

^۴Kempe

^۵Heawood

^۶Appel

^۷Haken

^۸Koch

یک تابع رنگ آمیزی با حداکثر k رنگ مختلف به صورت زیر است:

$$C^k : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

یک گراف، k -رنگ پذیر^۹ است اگر یک k -رنگ آمیزی را بپذیرد، مینیم مقدار k که G ، k -رنگ پذیر باشد عدد رنگی G نامیده می شود و با $\chi(G)$ نشان داده می شود.

همچنین دو نوع دیگر از رنگ آمیزی به صورت زیر تعریف می شود:

رنگ آمیزی یالی^{۱۰} : k -رنگ آمیزی یالی G ، تخصیص k رنگ $1, 2, 3, \dots, k$ به یال های G به طوری که یال های متلاقی، هم رنگ نباشند.

رنگ آمیزی کلی^{۱۱} : k -رنگ آمیزی کلی G ، تخصیص k رنگ $1, 2, 3, \dots, k$ به رئوس و یال های G به طوری که رئوس مجاور و یال های متلاقی و یال های متصل به رئوس، رنگ یکسان نگیرند.

مسئله رنگ آمیزی گراف^{۱۲} شامل یافتن عدد رنگی گراف و تابع رنگ آمیزی مربوطه است. این مسئله از مسائل Np -سخت است.

بخشی از کاربردهای مسئله رنگ آمیزی در علوم مدیریت است. کاربردهای معمولی شامل سیم کشی مدارهای چاپی، تخصیص منابع، مسئله تخصیص فرکانس و انواع گوناگونی از مسائل زمان بندی و تخصیص ثبات کامپیوتر می باشد. در این مسائل هدف، مینیم کردن تعداد رنگ های تخصیص یافته به رئوس گراف است به طوری که رئوس مجاور رنگ های متفاوتی می گیرد و رئوس، نماینده ی بخش های معین است. در بعضی از شرایط، مدل بندی برخی مسائل، برای رنگ آمیزی، پیچیده است و روش های مرسوم برای حل آن بعضاً ناکارآمد و محدود است و نیازمند استفاده از ابزارهای دیگر است.

یک توسیع از مسائل رنگ آمیزی روی مفهوم ناسازگاری بین رئوس گراف است. دو رأس i, j سازگار است اگر $\{i, j\} \notin E$ و ناسازگار است اگر $\{i, j\} \in E$ به هر حال در بسیاری از موقعیت های واقعی این ناسازگاری قطعی نیست و ناسازگاری می تواند درجات مختلفی داشته باشد و در حالت قطعی درجه شدت رئوس گراف صفر یا یک است که این درجه شدت در بسیاری از موقعیت های واقعی می تواند

^۹k-colored

^{۱۰}edge coloring

^{۱۱}total coloring

^{۱۲}graph coloring problem

سطوح مختلفی داشته باشد [۹].

۲.۱ تاریخچه رنگ‌آمیزی گراف‌های فازی

با توجه به اینکه قدمت گراف فازی کمتر از ۴ دهه می‌باشد و یک موضوع جدید تلقی می‌شود رنگ‌آمیزی این گراف‌ها موضوع بسیار جدیدی است. اولین بار این رنگ‌آمیزی توسط نویسندگانی چون اصلاحچی و اونق (۲۰۰۴) تحت عنوان رنگ‌آمیزی فازی گراف فازی مطرح گردید و این موضوع در سال ۲۰۰۵ به‌طور خاص‌تر تحت عنوان رنگ‌آمیزی گراف‌های فازی توسط دیگر نویسندگان ارائه شد و تاکنون این رنگ‌آمیزی از جنبه‌های گوناگون مورد توجه واقع شده است [۷].

۳.۱ مجموعه‌های فازی

مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه X ، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\}$ است که X مجموعه مرجع و ناتهی است و $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت^{۱۳} است که درجه تعلق x به A است.

هر مجموعه، یک صفت مشخص‌کننده مربوط به خود دارد. معیار عضویت عناصر در مجموعه، صفت مشخص‌کننده مجموعه است و هر عنصر اگر دارای آن صفت باشد عضو مجموعه و در غیر این صورت خارج از مجموعه است. این معیار عضویت را تابع عضویت می‌نامیم و با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان می‌دهیم، که در صورت تعلق x به A این مقدار یک و در غیر این صورت صفر است. در منطق قطعی ارزش هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد که کامپیوتر آن را با یک و صفر نشان می‌دهد.

در زندگی روزمره، وقایع و حوادث را توسط گزاره‌هایی مثل ”امروز هوا ابری است“، ”امروز من ساعت ۴ می‌آیم“ و ... بیان می‌کنیم. در این موارد تابع عضویت نمی‌تواند به صورت صفر و یک عمل کند، تا چه حد هوا ابری است، مثلاً یک روز آسمان کاملاً ابری باشد تابع عضویت ابری بودن را یک می‌گیریم اگر کاملاً صاف باشد درجه ابری بودن را صفر می‌گیریم، اما اگر یک روز نیمه‌ابری باشد آنگاه

^{۱۳}membership function

نمی‌توانیم از منطق قطعی استفاده کنیم مجبوریم یک درجه عضویت بین صفر و یک، به میزان ابری بودن بدهیم.

در مدل‌بندی سیستم‌های پیچیده در دنیای واقعی ممکن است اطلاعات ما دقیق نباشد. یعنی برخی اطلاعات مربوط به مسئله معین نیست، که در این سیستم‌ها استفاده از تئوری فازی می‌تواند کارساز باشد.

در تئوری فازی به‌طور کلاسیک مجموعه‌ی سطح شدت I به‌صورت بازه‌ی $[0, 1]$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که $\mu_A(x) = 0$ نشان دهنده‌ی عدم تعلق x به A است و $\mu_A(x) = 1$ نشان دهنده‌ی تعلق اکید x به A است و هر مقدار میانه با یک درجه‌ی عضویت به A متعلق است، به هر حال مجموعه I می‌تواند یک مجموعه گسسته به‌صورت $I = \{0, 1, \dots, k\}$ متشکل از k صفت بیانی باشد. عبارت $\mu_A(x) < \mu_A(x')$ نشان می‌دهد درجه عضویت x به A از درجه عضویت x' به A کمتر است، به‌طور کلی مجموعه I می‌تواند هر مجموعه‌ی مرتب نه لزوماً عددی باشد برای مثال I می‌تواند به‌صورت: $I = \{\text{کلی، قوی، متوسط، ضعیف، پوچ}\}$ یا به‌طور معادل $I = \{n, l, m, h, t\}$ باشد.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید V مجموعه غیرتهی باشد

$$E = \{(v, v_{\mu_j}), j = 1, 2, \dots, P | v \in V\}$$

مجموعه چندگانه فازی را نشان می‌دهد به‌طوری‌که v_{μ_j} نشان دهنده ارزش عضویت راس v برای هر $j = 1, 2, \dots, P$ به‌طوری‌که $P = \max\{j | v_{\mu_j} \neq 0\}$ است. [۱۰]

تعریف ۲.۳.۱. یک زیر مجموعه‌ی فازی^{۱۴} از یک مجموعه V ، یک نگاشت $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ است، که تابع عضویت نامیده می‌شود [۱۰].

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید σ و τ دو زیر مجموعه‌ی فازی از V باشند، آنگاه $\sigma \cup \tau$ زیر مجموعه‌ی فازی از V می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود: [۱۰]

$$(\sigma \cup \tau)(x) = \sigma(x) \vee \tau(x) \quad \forall x \in V$$

^{۱۴}fuzzy subset

و $\sigma \cap \tau$ زیر مجموعه‌ی فازی از V می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\sigma \cap \tau)(x) = \sigma(x) \wedge \tau(x) \quad \forall x \in V$$

$\vee$ عملگر ماکزیمم و $\wedge$ عملگر مینیمم است.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید σ یک زیر مجموعه فازی از V باشد. آنگاه σ^c زیر مجموعه‌ای فازی از V می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود: [۱۰]

$$\sigma^c(x) = 1 - \sigma(x), \quad \forall x \in V$$

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید S و V دو مجموعه و σ و τ به ترتیب زیر مجموعه‌های فازی از V و S باشند، آنگاه یک رابطه‌ی فازی^{۱۵} μ از زیر مجموعه‌ی فازی σ به زیر مجموعه‌ی فازی τ ، یک زیر مجموعه‌ی μ از $V \times S$ می‌باشد، به طوری که:

$$\mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \tau(y) \quad \forall x \in V, y \in S$$

شرط $\mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \tau(y) \quad \forall x \in V, y \in S$ این امکان را می‌دهد که به ازای هر

μ^t ، یک رابطه از σ^t به τ^t و μ^* یک رابطه از σ^* به τ^* باشند. [۱۰]

تعریف ۶.۳.۱.

$$\mu^\infty(u, v) = \max\{\mu^j(u, v), j = 1, 2, \dots | u, v \in V \text{ هر } \}.$$

تعریف ۷.۳.۱. مجموعه α -برش^{۱۶} از مجموعه فازی A توسط A_α نشان داده می‌شود که از اعضای که تابع عضویت آن‌ها کمتر از α نیست ساخته شده اند. [۲]

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

^{۱۵}fuzzy relation

^{۱۶} α -cut set

تعریف ۸.۳.۱. عدد فازی A را مثلی گوئیم اگر اعداد حقیقی a و b و c وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & b \leq x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases}$$

در این صورت عدد فازی مثلی A را با سه‌تایی مرتب (a, b, c) نیز نمایش می‌دهند. [۱۷]

۴.۱ گراف‌های فازی

در این قسمت تاریخچه گراف‌های فازی بیان می‌شود و انواع گراف فازی مورد استفاده در این تحقیق، مورد بحث واقع شده‌است [۱۰].

اولین تعریف از گراف فازی توسط کافمن^{۱۷} (۱۹۷۷) پیشنهاد شد که مبتنی بر روابط فازی بیان شده توسط لطفی‌زاده (۱۹۷۵) بود، هم‌چنین رزنفلد^{۱۸} (۱۹۷۶) تعاریفات شامل رئوس فازی و یال‌های فازی را بیان کرده بود. از آن پس در بسیاری از کتاب‌ها و مقالات در مورد گراف‌های فازی بحث شد و بدین گونه گراف‌ها به عنوان یکی از پرکاربردترین ابزار حل مسائل بهبود یافت و بسیاری از مسائل بهینه سازی توسط گراف‌های فازی مورد مطالعه قرار گرفت [۷].

یک نوع از گراف فازی به این صورت است که مجموعه یال‌های آن فازی و رئوس آن غیر فازی باشند. نمایش این گراف به صورت $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ است، به‌طوری‌که V مجموعه رئوس قطعی و $\tilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است که به وسیله ماتریس $\mu = (\mu_{ij})_{i,j \in V}$ مشخص می‌شود:

$$\mu_{ij} = \mu_{\tilde{E}}(\{i, j\}) \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j$$

$\mu_{\tilde{E}} : V \times V \rightarrow I$ یک تابع عضویت یال‌های فازی گراف است، هر عضو $\mu_{ij} \in I$ سطح شدت یال $\{i, j\}$ برای هر $i, j \in V$ را نشان می‌دهد که $i \neq j$ ، این نوع گراف فازی را به صورت $\tilde{G} = (V, \mu)$

^{۱۷}Koefman

^{۱۸}Rosenfeld

هم نشان می‌دهند. در این گراف‌ها رئوس قطعی است و ارزش همه رئوس یکسان است و سطح شدت تعلق یال‌ها به رئوس مقداری از داخل مجموعه I است. در این نوع گراف‌ها اگر رئوس گراف وزن‌دار باشد گراف وزن‌دار را به صورت $\tilde{G} = (V, \mu, W)$ نمایش می‌دهیم. نوع دیگری از گراف فازی که در آن مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها هر دو فازی هستند به صورت $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ نمایش می‌دهیم، به طوری که $\tilde{V}$ مجموعه رئوس فازی و $\tilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است، به طوری که مجموعه رئوس فازی $\tilde{V}$ به وسیله رابطه $\sigma = (\sigma_i)_{i \in V}$ مشخص می‌شود:

$$\sigma_i = \sigma_{\tilde{V}}(i) \quad \forall i \in V$$

$\sigma_{\tilde{V}} : V \rightarrow I$ تابع عضویت رئوس فازی گراف است. هر عضو σ_i نشان دهنده‌ی سطح شدت رأس $i \in V$ است، این نوع گراف فازی را به صورت $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ هم نشان می‌دهند.

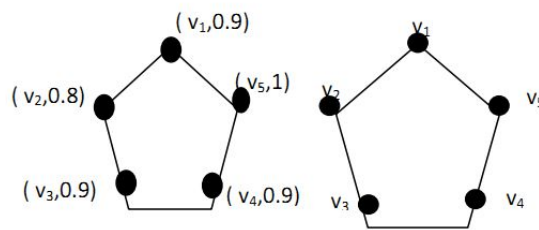
مجموعه سطح شدت I به طور خطی مرتب شده است به طوری که عبارت $\mu_{ij} \prec \mu_{i'j'}$ یعنی سطح شدت یال $\{i, j\}$ از سطح شدت یال $\{i', j'\}$ پایین تر است و عبارت $\sigma_i \prec \sigma_{i'}$ یعنی سطح شدت رأس i از سطح شدت رأس i' پایین تر است.

گراف فازی $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ تعمیمی از یک گراف قطعی $G = (V, E)$ است که در آن $I = \{0, 1\}$ و μ, σ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in V \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{و} \quad \mu_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

تعریف ۱.۴.۱. گراف فازی^{۱۹} $\xi = (V, \delta, \mu)$ مجموعه ناتهی V به همراه یک جفت تابع $\delta : V \rightarrow [0, 1]$ و $\mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$ است به طوری که برای هر $x, y \in V$ به طوری که $\mu(x, y) \leq \min\{\delta(x), \delta(y)\}$ نشانگر ارزش عضویت راس x و یال (x, y) در گراف ξ است. [۸]

مثال ۲.۴.۱. گراف فازی $\tilde{G} : (V, \sigma)$ و گراف قطعی آن $G^* : (V, E)$ در شکل (۱.۱) آورده شده است. [۸]



شکل ۱.۱: گراف فازی $\tilde{G}$ و گراف قطعی G^*

تعریف ۳.۴.۱. α -برش از گراف فازی به صورت $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ تعریف می‌شود به طوری که

$$V_\alpha = \{v \in V | \delta \geq \alpha\} \text{ و } E_\alpha = \{e \in E | \mu \geq \alpha\} \quad [۳]$$

تعریف ۴.۴.۱. زیرگراف فازی^{۲۰} گراف $\xi = (V, \delta, \mu)$ به صورت $\xi' = (V, \delta', \mu')$ است به طوری که

$$\text{برای هر } u, v \in V \text{ خواهیم داشت } \delta'(u) \leq \delta(u), \mu'(u, v) \leq \mu(u, v) \quad [۸]$$

تعریف ۵.۴.۱. یک حلقه در یک راس x گراف فازی به وسیله $\mu(x, x) \neq \circ$ نشان داده می‌شود. [۸]

تعریف ۶.۴.۱. یک گراف فازی که حلقه و یال‌های موازی ندارد گراف فازی ساده^{۲۱} گفته می‌شود.

[۸]

تعریف ۷.۴.۱. یک مسیر^{۲۲} p در یک گراف فازی $(\tilde{V}, \tilde{R})$ یک دنباله از رئوس v_0 و v_1 و ... و v_n است به طوری که $v_{i-1} \neq v_i$ و $\tilde{R}(v_{i-1}, v_i) > \circ$ و $1 \leq i \leq n$. [۱۶]

تعریف ۸.۴.۱. مسیر ρ در گراف فازی تعریف قبل یک دور^{۲۳} فازی است اگر $v_0 = v_n$ و

$$n \geq 3 \quad [۱۶]$$

تعریف ۹.۴.۱. جفت‌های متوالی (v_{i-1}, v_i) را کمان^{۲۴} هایی از مسیر گوییم. [۱۶]

تعریف ۱۰.۴.۱. قدرت یک مسیر^{۲۵} P به صورت $\bigwedge_{i=1}^n \mu(v_{i-1}, v_i)$ تعریف می‌شود. [۱۶]

^{۱۹}fuzzy graph

^{۲۰}fuzzy subgraph

^{۲۱}simple fuzzy graph

^{۲۲}path

^{۲۳}cycle

^{۲۴}arc

^{۲۵}strenght of a path

• به عبارت دیگر، قدرت یک مسیر، درجه عضویت ضعیف‌ترین کمان از مسیر تعریف می‌شود.

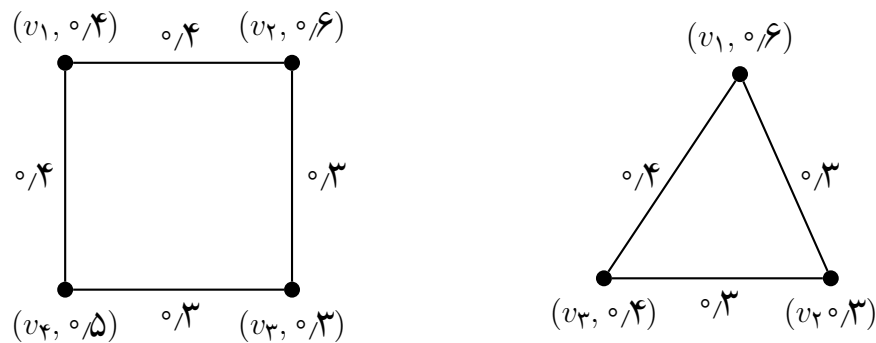
• اگر مسیر به طول صفر باشد، قدرت یک مسیر به صورت $\sigma(v_0)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۴.۱. یک قوی‌ترین مسیر^{۲۶} متصل‌کننده‌ی هر دو راس u و v ، مسیری است که شامل شدت $\mu^\infty(u, v)$ باشند. [۱۶]

• شدت همبندی^{۲۷} بین دو راس u و v می‌باشد.

تعریف ۱۲.۴.۱. گراف فازی $\xi = (V, \delta, \mu)$ کامل^{۲۸} است اگر $\mu(u, v) = \min\{\delta(u), \delta(v)\}$ برای هر $u, v \in V$ به طوری باشد که (u, v) یال بین دو راس u و v را نشان می‌دهد. [۱۰]

تعریف ۱۳.۴.۱. گراف فازی G قوی^{۲۹} است اگر $\mu(u, v) = \min\{\delta(u), \delta(v)\} \quad \forall (u, v) \in E$ [۱۱]



شکل ۲.۱: گراف فازی قوی $\tilde{G}$ و گراف فازی کامل $\tilde{G}'$

تعریف ۱۴.۴.۱. اگر گراف فازی G دارای یک دور فراگیر (دوری که از تمام رئوس می‌گذرد) باشد آن‌گاه G یک گراف فازی هامیلتونی^{۳۰} گفته می‌شود. [۸]

^{۲۶}strenght path

^{۲۷}strenght of connectedness

^{۲۸}complete

^{۲۹}strong

^{۳۰}hamiltonian fuzzy graph

تعریف ۱۵.۴.۱. فرض کنید $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. درجه‌ی یک رأس v ^{۳۱} به صورت زیر تعریف می‌شود: [۵]

$$d_{\tilde{G}}(v) = \sum_{u \in V} \mu(u, v)$$

تعریف ۱۶.۴.۱. فرض کنید $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. مینیمم درجه^{۳۲} از گرافهای فازی $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(\tilde{G}) = \min_{v \in V} \{d_{\tilde{G}}(v)\}$$

و همچنین ماکزیمم درجه^{۳۳} از گراف فازی $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: [۵]

$$\Delta(\tilde{G}) = \max_{v \in V} \{d_{\tilde{G}}(v)\}$$

تعریف ۱۷.۴.۱. درجه‌ی وجه f که آن را با $d_{\tilde{G}}(f)$ نمایش می‌دهیم، به صورت $d_{\tilde{G}}(f) = \sum_{(u,v) \in f} \mu(u, v)$ است به طوریکه $\mu(u, v)$ تابع عضویت یال‌هایی است که وجه f بر روی آن‌ها واقع است. [۵]

تعریف ۱۸.۴.۱. فرض کنید $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. مرتبه‌ی گراف فازی $\tilde{G}$ ، که با $O(\tilde{G})$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر است: [۵]

$$O(\tilde{G}) = \sum_{u \in V} \sigma(u)$$

تعریف ۱۹.۴.۱. فرض کنید $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. اندازه‌ی گراف فازی $\tilde{G}$ ، که با $S(\tilde{G})$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر است: [۵]

$$S(\tilde{G}) = \sum_{u \in V} \mu(u, v)$$

قضیه ۲۰.۴.۱. اگر $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد، داریم: [۵]

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \sum_{u \in V} \mu(u, v)$$

^{۳۱} degree of vertex

^{۳۲} minimum degree

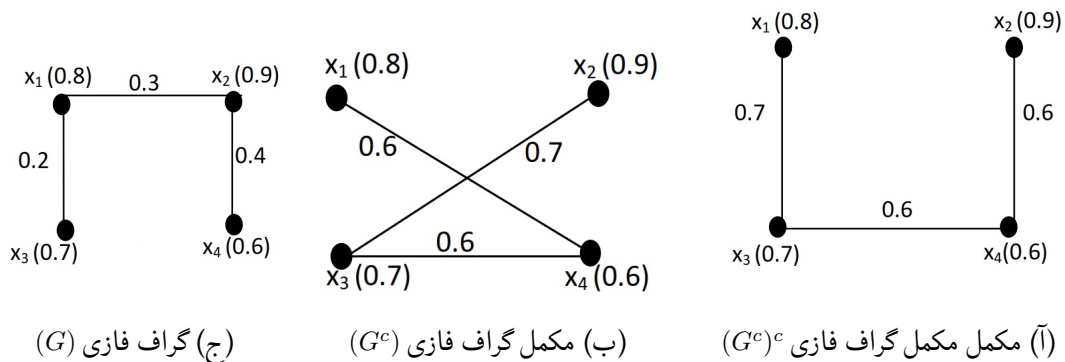
^{۳۳} maximum degree

۳۴ مکمل گراف فازی

مکمل گراف فازی اولین بار توسط مدرسون^{۳۵} به صورت زیر تعریف شده است. که تعریف کامل تر و کاراتر مکمل گراف فازی در تعریف ۲۱.۴.۱ بیان خواهد شد. مکمل گراف فازی $G = (V, \delta, \mu)$ یک گراف فازی $G^c : (V, \delta^c, \mu^c)$ است به طوری که $\delta^c = \delta$ و

$$\begin{cases} \mu^c(x, y) = 0 & \text{اگر } \mu(x, y) > 0 \\ \mu^c(x, y) = \min\{\delta(x), \delta(y)\} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با توجه به تعریف G^c یک گراف فازی است حتی اگر G نباشد و $(G^c)^c = G$ اگر و فقط اگر G یک گراف فازی قوی باشد. هم چنین توابع عضویت گروه G و G^c یکسان نیستند.



شکل ۳.۱

همانگونه که در بالا ملاحظه می کنید $(G^c)^c \neq G$.

تعریف ۲۱.۴.۱. مکمل گراف فازی $G = (V, \delta, \mu)$ یک گراف فازی $\bar{G} = (V, \bar{\delta}, \bar{\mu})$ است به طوری که $\bar{\delta} = \delta$ و

$$\bar{\mu}(x, y) = \delta(x) \wedge \delta(y) - \mu(x, y) \quad \forall x, y \in V$$

^{۳۴}complement fuzzy graph

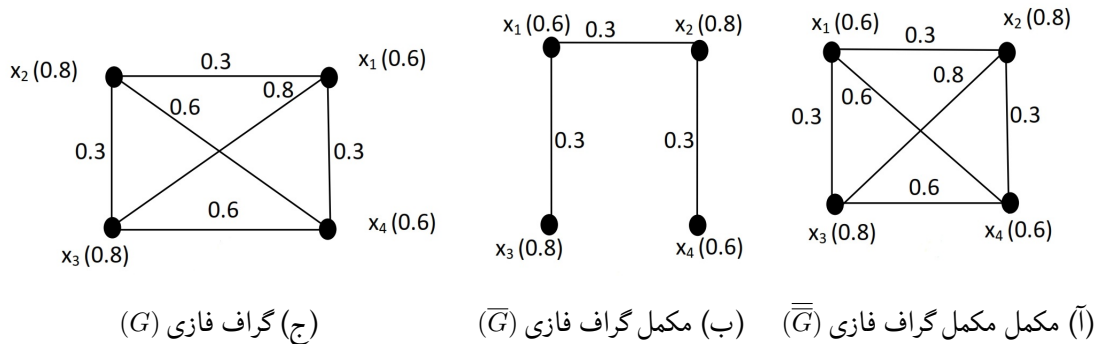
^{۳۵}Moderson

برقرار باشد داریم: $\bar{\bar{\delta}} = \bar{\delta} = \delta$ و

$$\bar{\mu} = \bar{\delta}(x) \wedge \bar{\delta}(y) - \bar{\mu}(x, y)$$

$$= \delta(x) \wedge \delta(y) - (\delta(x) \wedge \delta(y) - \mu(x, y)) = \mu(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

بنابراین $\bar{\bar{G}} = G$.



شکل ۴.۱

شکل ۴.۱ نشان می‌دهد مکمل مکمل گراف فازی خود گراف فازی است. [۳]

تعریف ۲۲.۴.۱. گراف فازی $G = (X, \delta, \mu)$ همبند^{۳۶} گفته می‌شود اگر برای هر $x, y \in X$ وجود داشته باشد یک دنباله از عناصر $x_0, x_1, \dots, x_m$ به طوری که $x_0 = x$ و

$$\mu(x_i, x_{i+1}) > 0 \quad (0 \leq i \leq m-1) \quad [۴]$$

تعریف ۲۳.۴.۱. یک مدار هامیلتونی فازی^{۳۷} در گراف فازی همبند به عنوان یک مسیر بسته است که عبور از هر راس G دقیقاً یکبار به جز راس شروع که در آن مسیر خاتمه می‌یابد تعریف شده است. [۸]

تعریف ۲۴.۴.۱. یک درخت فراگیر ماکزیمم^{۳۸} از یک گراف فازی همبند (V, σ, μ) ، $\tilde{G}$ یک زیر گراف فراگیر فازی $\tilde{T}(V, \sigma, r)$ می‌باشد، به طوری که T^* یک درخت است، و در مورد آن

$$\sum_{u \in V} r(u, v) \text{ ماکزیمم است.} [۵]$$

^{۳۶}connected fuzzy graph

^{۳۷}fuzzy Hamiltonian circuit

^{۳۸}maximum spanning tree

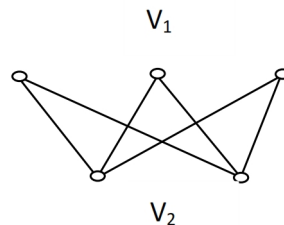
تعریف ۲۵.۴.۱. یک گراف فازی همبند $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ یک درخت فازی^{۳۹} است. اگر دارای یک زیرگراف فراگیر $\tilde{F} = (V, b, r)$ باشد که $\tilde{F}$ یک درخت باشد و به ازای همهی کمان‌هایی که در $\tilde{F}$ نیستند، رابطه زیر برقرار باشد: [۵]

$$\mu(u, v) < r^\infty(u, v)$$

تعریف ۲۶.۴.۱. برای هر گراف فازی $\xi = (V, \delta, \mu)$ یک یال (x, y) قوی گفته می‌شود اگر $\frac{1}{4} \min\{\delta(x), \delta(y)\} \leq \mu(x, y)$ و در غیر این صورت ضعیف است. [۸]

تعریف ۲۷.۴.۱. نیرو^{۴۰} یک یال فازی (x, y) به وسیله ارزش $\frac{\mu(x, y)}{\min\{\delta(x), \delta(y)\}}$ نشان داده می‌شود. [۸]

تعریف ۲۸.۴.۱. فرض کنید مجموعه رئوس یک گراف G می‌تواند به دو مجموعه مجزا V_1 و V_2 تقسیم شود در حالی که هر یال از G ، اتصالی بین رئوس V_1 و V_2 باشد آن‌گاه G یک گراف دوبخشی^{۴۱} گفته می‌شود و آن با $G(V_1, V_2)$ نشان داده می‌شود. [۱۰] مانند شکل ۵.۱



شکل ۵.۱: گراف دوبخشی

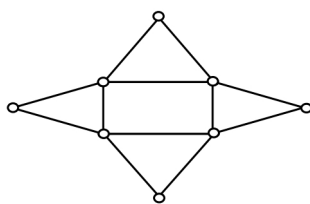
تعریف ۲۹.۴.۱. یک گراف همبند G یک گراف اویلری^{۴۲} گفته می‌شود اگر یک مدار داشته باشد به طوری که شامل هر یالی در G شود و این مدار یک مدار اویلری گفته می‌شود. [۱۰] مانند شکل ۶.۱

^{۳۹}fuzzy tree

^{۴۰}strength

^{۴۱}bipartite graph

^{۴۲}eulerian graph



شکل ۶.۱: گراف اویلری

قضیه ۳۰.۴.۱. یک گراف همبند G یک گراف اویلری است اگر و فقط اگر همه رئوس G درجه زوج

داشته باشند. [۱۰]

فصل ۲

گراف مسطح فازی

در این فصل ضمن تعریف گراف مسطح فازی، گراف مسطح فازی ماکسیمال و گراف دوگان فازی، گراف مسطح فازی - ۶۷° و دوگان گراف مسطح فازی - ۶۷° و چگونگی برقراری نتیجه‌ی فرمول اوایلر در گراف‌های مسطح فازی بررسی شود. در این رابطه با استفاده از تعریف مجموع درجات گراف فازی به صورت:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \sum_{uv \in E} \mu(u, v)$$

نشان می‌دهیم که نتیجه‌ی فرمول اوایلر به صورت زیر:

$$\sum_{uv \in E} \mu(u, v) \leq 3n - 6$$

برقرار می‌باشد [۵].

۱.۲ گراف مسطح^۱

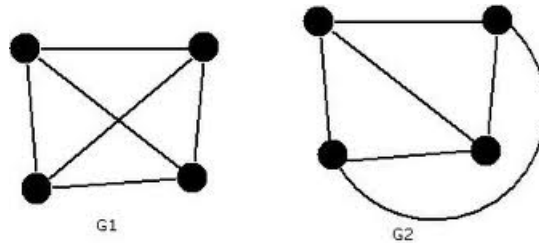
اولین بار گراف‌های مسطح توسط اوایلر ریاضیدان سوییسی ارائه شده است. یک گراف مسطح، همبند و ساده، صفحه را به یک تعداد از نواحی که دربردارنده‌ی نواحی تماماً محصور شده و به یک ناحیه‌ی خارجی نامتناهی تقسیم می‌کند.

یک گراف قطعی غیرمسطح است اگر حداقل یک تلاقی بین یالها (به غیر از رئوس) برای همه نمایش‌های هندسی ممکن برای گراف وجود داشته باشد. گراف قطعی G در یک نمایش خاصی دارای یک تلاقی بین دو یال (a, b) و (c, d) است. در مفهوم فازی این دو یال دارای تابع عضویت ۱ هستند. اگر یال (c, d) حذف شود گراف مسطح خواهد شد. در حالت فازی برای موقعیت فوق‌الذکر یکی ارزش صفر و دیگری ارزش یک دریافت می‌کند.

تعریف ۱.۱.۲. یک گراف را قابل نشانیدن در صفحه یا مسطح می‌نامیم اگر بتوان آن را به طریقه‌ای رسم کرد که هر یال آن، تنها در راس‌های دو سر خود با یال‌های دیگر برخورد داشته باشد. این طریقه

^۱planar graph

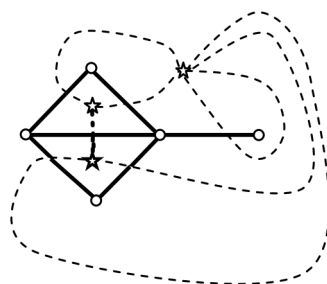
رسم گراف مسطح G را گراف مسطح شده^۲ می‌نامیم. هر ناحیه بسته در یک گراف مسطح، وجه نامیده می‌شود. مطابق شکل ۱۰۲



شکل ۱۰۲: گراف مسطح G_1 و مسطح شده G_2

تعریف ۲.۱۰۲. فرض کنید G یک گراف مسطح باشد. دوگان گراف مسطح شده^۳ G ، یک گراف مسطح دارای یک رأس برای هر وجه در G است که با G^* نشان داده می‌شود. یال‌های G^* متناظر با یال‌های G هستند به عبارت دیگر اگر e یک یال از G باشد که وجه F_i روی یک طرف و وجه F_j روی طرف دیگر آن باشد آن‌گاه متناظراً یال دوگان $e \in E(G^*)$ یک یال اتصال رئوس $x, y \in V(G^*)$ است که متناظر با وجه‌های F_i و F_j از G است.

در زیر یک گراف مسطح شده با یال‌هایی ممتد و دوگان آن G^* با یال‌های خط چین نمایش داده شده است. [۱]



شکل ۲.۲: گراف دوگان G^*

تعریف ۳.۱۰۲. درجه‌ی وجه f که آن را با $d_G(f)$ نمایش می‌دهیم، برابر تعداد یال‌هایی است که وجه f راتشکیل می‌دهند. [۱۴]

^۲plane graph

^۳dual graph

لم ۴.۱.۲. فرض کنید G یک گراف مسطح همبند با n رأس، m یال و f وجه باشد و دوگان هندسی G^* دارای n^* رأس و m^* یال و f^* وجه باشد آنگاه $n^* = f$ و $m^* = m$ و $f^* = n$ و $d_{G^*}(f) = d_G(f)$ است. [۱۰]

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنید G یک گراف مسطح همبند باشد آنگاه G^{**} یکرخت با G است. [۱۰]

قضیه ۶.۱.۲. یال‌ها در گراف مسطح G یک دور در G تشکیل می‌دهد اگر و فقط اگر متناظراً یال‌های دوگان تشکیل یک پیوند در G^* دهد. [۱۰]

تعریف ۷.۱.۲. گراف مسطح دوگان اویلری گفته می‌شود اگر G یک دور اویلری $e_1, \dots, e_k$ داشته باشد به طوری که $e_1^*, e_2^*, \dots, e_k^*$ تشکیل یک دور اویلری در G^* می‌دهد. [۱۰]

برای تعریف گراف مسطح فازی، ضروری است گراف چندگانه فازی^۴ گراف مسطحی باشد که شامل یال‌های ترکیبی است، در قسمت بعد گراف چندگانه فازی تعریف می‌شود. [۱۰]

۲.۲ گراف چندگانه فازی

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید V مجموعه غیرتهی و $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ یک نگاشت و $E = \{((x, y), (x, y)_{\mu^j}), j = 1, 2, \dots, p_{xy} | (x, y) \in V \times V\}$ مجموعه چندگانه فازی از $V \times V$ به طوری که $(x, y)_{\mu^j} \leq \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ برای هر $j = 1, 2, \dots, p_{xy}$ به طوری که $p_{xy} = \max\{j | (x, y)_{\mu^j} \neq 0\}$ آنگاه $\psi = (V, \sigma, E)$ یک گراف چندگانه فازی را نشان می‌دهد به طوری که $\sigma(x)$ نشان‌دهنده ارزش عضویت رأس x و ارزش عضویت یال (x, y) در گراف ψ است. [۱۰]

فرض کنید $\psi = (V, \delta, E)$ گراف چندگانه فازی، E شامل دو یال $((a, b), (a, b)_{\mu^k})$ و $((c, d), (c, d)_{\mu^L})$ باشد به طوری که یکدیگر را در نقطه p قطع می‌کنند و در آن‌ها L و k اعداد صحیح ثابت هستند. آنگاه تعاریف زیر را خواهیم داشت:

^۴fuzzy multigraph

تعریف ۲.۲.۲. در گراف چندگانه فازی قدرت یال فازی^۵ (a, b) به وسیله ارزش $I_{(a,b)} = \frac{(a,b)_{\mu^k}}{\min\{\delta(a), \delta(b)\}}$ می‌تواند اندازه گیری شود. اگر $I_{(a,b)} \geq 0.5$ آن‌گاه یال فازی قوی گفته می‌شود در غیر این صورت ضعیف است.

تعریف ۳.۲.۲. ارزش متقاطع^۶ نقطه p را به وسیله $\mathcal{I}_p = \frac{I_{(a,b)} + I_{(c,d)}}{4}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین اگر تعداد نقاط تقاطع در یک گراف چندگانه فازی اضافه شود، مسطح بودن آن کاهش پیدا می‌کند.

۳.۲ گراف مسطح فازی^۷

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید $G : (V, E, F)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌ها E و مجموعه وجوه F باشد. [۱۰]

یک زیر مجموعه فازی از مجموعه F نگاشت $\lambda : F \rightarrow [0, 1]$ برای هر $f \in F$ است و $\lambda(f)$ درجه تابع عضویت f در گراف فازی $\tilde{G}$ گفته می‌شود. یک زیر مجموعه فازی از مجموعه V نگاشت $\delta : V \rightarrow [0, 1]$ برای هر $v \in V$ است و $\delta(v)$ درجه تابع عضویت v در $\tilde{G}$ است.

گراف مسطح فازی با تابع‌های سه گانه $\tilde{G}(\delta, \mu, \lambda)$ تعریف شده است به طوری که δ زیر مجموعه فازی از v و μ رابطه متقارن فازی روی δ و λ یک زیر مجموعه فازی از F است.

تعریف ۲.۳.۲. گراف ماکزیمم مسطح فازی، گراف مسطح فازی با حداکثر تعداد یال است به طوری که وقتی یال دیگری را اضافه می‌کنیم گراف فازی غیر مسطح می‌شود [۱۰].

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید $\tilde{G}$ یک گراف فازی مسطح باشد. گراف فازی $\tilde{G}^*$ دوگان گراف فازی $\tilde{G}$ گفته می‌شود که در سه مرحله ساخته می‌شود: ۱. داخل هر وجه $\tilde{F}_i$ از $\tilde{G}$ یک نقطه $\tilde{v}_i^*$ انتخاب می‌کنیم که این نقطه‌ها رئوس $\tilde{G}^*$ بادرجه عضویت $\delta(v_i^*) = \lambda(f_i)$ هستند.

۲. مطابق با هر یال $\tilde{e}$ در $\tilde{G}$ یک خط $\tilde{e}^*$ رسم می‌کنیم به طوری که از $\tilde{e}$ و نه از یال دیگری عبور می‌کند

^۵strength of the fuzzy edge

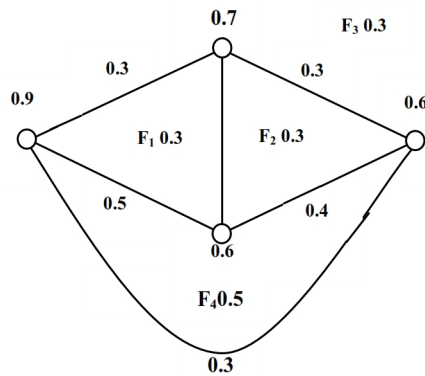
^۶intersecting value

^۷planar fuzzy graph

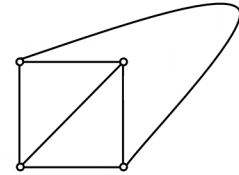
و در رأس $\tilde{v}_i^*$ پیوند ایجاد می‌کند به طوری که در وجوه $\tilde{f}_i$ مجاور $\tilde{e}$ قرار می‌گیرد این خطوط یال‌های $\tilde{G}^*$ با درجه عضویت $\mu(e_i^*) = \mu(e_i)$ است و μ همان شرایط $\mu(e_i^*) \leq \min\{\delta(v_i^*), \delta(v_{i+1}^*)\}$ را به طوری که $\tilde{v}_i^*$ رؤس انتهایی $\tilde{e}_i^*$ هستند برآورد می‌کند.

۳. هر وجه $\tilde{G}^*$ یک درجه عضویت λ دارد به طوری که $\lambda(f_i^*) = \delta(v_i)$.

دوگان فازی گراف مسطح (آ) در گراف (ب) در شکل ۳.۲ نشان داده شده است.



(ب) دوگان گراف مسطح فازی



(آ) گراف مسطح فازی

شکل ۳.۲

گزاره ۴.۳.۲. دوگان، دوگان گراف فازی، خود گراف فازی است. $\tilde{G}^{**} = \tilde{G}$.

برهان. با استفاده از تعریف دوگان گراف فازی، دوگان، گراف فازی دارای درجه عضویت زیر است:

$$\delta(v_i^*) = \lambda(f_i), \quad \mu(e^*) = \mu(e), \quad \lambda(f^*) = \delta(v)$$

و دوگان، دوگان گراف فازی درجه عضویت‌هایی به صورت زیر دارد:

$$\delta(v^{**}) = \lambda(f^*) = \delta(v) \Rightarrow \delta(v^{**}) = \delta(v)$$

$$\mu(e^{**}) = \mu(e^*) = \mu(e) \Rightarrow \mu(e^{**}) = \mu(e)$$

$$\lambda(f^{**}) = \delta(v^*) = \lambda(f) \Rightarrow \lambda(f^{**}) = \delta(v^*)$$

بنابراین درجه عضویت دوگان، دوگان گراف فازی، خود درجه عضویت گراف فازی است بنابراین

□

$$\tilde{G}^{**} = \tilde{G}$$

گزاره ۵.۳.۲. دوگان گراف فازی دوبخشی، یک گراف فازی اویلری است. [۱۰]

برهان. در این اثبات گراف فازی دو بخشی ماکسیمال (حداکثر) با درجه عضویت به ترتیب $\sigma(v)$ و $\mu(e)$ و $\lambda(f)$ برای رئوس، یال‌ها و وجوه در نظر گرفته شده است. از آنجایی که گراف دوبخشی مسطح فازی ماکسیمال است آنگاه با توجه به تعریف گراف مسطح فازی ماکسیمال ۲.۳.۲ هر دور طول زوج دارد به طوری که هر وجه f در $\tilde{G}$ دارای طول زوج است. بنابراین دوگان وجوه f_i برای هر $i = 1, \dots, k$ یک رأس v_i^* از درجه زوج خواهد داشت به طوری که با استفاده از قضیه ۳۰.۴.۱ دوگان گراف، گراف فازی اویلری با درجه عضویت $\sigma(v^*) = \lambda(f)$ و $\mu(e^*) = \mu(e)$ و $\lambda(f^*) = \sigma(v)$ است. $\square$

در این بخش اصطلاحات جدید برای گراف فازی مسطح معرفی شده است:

تعریف ۶.۳.۲. فرض کنید ψ یک گراف فازی چندگانه و برای برخی از نمایش‌های هندسی $p_1, p_2, \dots, p_n$ نقاطی از تقاطع بین یال‌ها باشند. ψ گراف مسطح فازی با تابع مسطحی فازی f گفته می‌شود به طوری که $f = \frac{1}{1 + \{I_{p_1} + I_{p_2} + \dots + I_z\}}$ باشد، واضح است که $0 < f \leq 1$ است. اگر هیچ نقطه تقاطعی برای نمایش هندسی یک گراف مسطح فازی وجود نداشته باشد آنگاه ارزش مسطحی فازی آن ۱ است. در این حالت گراف مسطح قاطع است. تعداد نقاط تقاطع بین یال‌ها افزایش می‌یابد آنگاه f کاهش پیدا می‌کند و بدیهی است که مسطح بودن کاهش پیدا می‌کند. از این قیاس می‌توان گفت هر گراف فازی، گراف مسطح فازی با ارزش مسطحی فازی است. ارزش مسطحی فازی برای یک گراف چندگانه فازی از قضیه زیر محاسبه می‌شود. [۱۰]

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنید ψ یک گراف چندگانه فازی باشد به طوری که ارزش عضویت یالی برای هر یال متقاطع برابر است با مینیمم تابع عضویت رئوس انتهایی آن. ارزش مسطحی فازی^۸ گراف ψ به وسیله $f = \frac{1}{1 + N_p}$ محاسبه می‌شود به طوری که N_p تعداد نقاط تقاطع بین یال‌ها در ψ است.

برهان. فرض کنید $\psi = (V, \delta, \mu)$ یک گراف چندگانه فازی باشد به طوری که ارزش عضویت یالی هر یال متقاطع با مینیمم تابع عضویت رئوس آن‌ها برابر است. برای یک گراف چندگانه فازی

^۸fuzzy planarity value

$(x, y)_{\mu_j} = \min\{\delta(x), \delta(y)\}$ برای هر یال متقاطع (x, y) و $j = 1, 2, \dots, p_{xy}$ است. فرض کنید $p_1, p_2, \dots, p_k$ نقاط متقاطع بین دویال در ψ و k یک عدد صحیح باشد. برای هر یال (a, b) در ψ و $I_{(a,b)} = \frac{(a,b)_{\mu_j}}{\min\{\delta(a), \delta(b)\}} = 1$. بنابراین برای p_1 راس متقاطع بین یال‌های (a, b) و (c, d) ، I_p برابر است با $I_p = \frac{1+1}{1} = 1$. بنابراین $I_{p_i} = 1$ برای $i = 1, 2, \dots, k$ حال داریم

$$f - \frac{1}{1 + I_{p_1} + I_{p_2} + \dots + I_{p_k}} = \frac{1}{1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{\text{تا } k}} = \frac{1}{1 + N_p}$$

به طوری که N_p تعداد نقاط تقاطع بین یال‌های ψ است. $\square$

تعریف ۸.۳.۲. یک گراف مسطح فازی ψ ، گراف مسطح قوی گفته می‌شود اگر ارزش مسطحی فازی گراف بیشتر از ۰.۵ باشد. بنابراین بسته به مقدار ارزش مسطحی فازی، گراف مسطح فازی به دو گروه به نام‌های گراف فازی مسطح قوی و گراف فازی مسطح ضعیف تقسیم می‌شود. وجه فازی در یک گراف فازی یک ناحیه کراندار به وسیله یال‌های فازی است. هر وجه فازی به وسیله یال‌های فازی در مرز آن مشخص شده است. اگر همه یال‌ها در مرز یک وجه فازی ارزش عضویت ۱ داشته باشد آن‌گاه وجه قاطع می‌شود.

تعریف ۹.۳.۲. فرض کنید $\psi = (V, \sigma, \mu)$ یک گراف مسطح فازی باشد و $p_{xy} = \max\{j | (x, y)_{\mu_j} \neq 0\}$ و $E = \{((x, y), (x, y)_{\mu_j}), j = 1, 2, \dots, p_{xy} | (x, y) \in V \times V\}$ یک وجه فازی از ψ یک ناحیه است که به وسیله مجموعه یال‌های فازی $E' \subset E$ در یک نمایش هندسی از ψ محدود شده است. ارزش عضویت وجه فازی به صورت زیر است:

$$\min \left\{ \frac{(x, y)_{\mu_j}}{\min\{\sigma(x), \sigma(y)\}}, j = 1, 2, \dots, p_{xy} | (x, y) \in E' \right\}$$

یک وجه فازی، وجه فازی قوی گفته می‌شود اگر ارزش عضویت آن بیشتر از ۰.۵ باشد و در غیر این‌صورت ضعیف است. هر گراف مسطح فازی یک ناحیه نامحدود دارد به طوری که وجه فازی بیرونی گفته می‌شود، دیگر وجوه، وجوه فازی داخلی گفته می‌شود.

۴.۲ قضایای مربوط به فرمول اویلر

قضیه ۱.۴.۲ (قضیهی اویلر)^۹. فرض کنید G گراف همبند مسطح شده است و تعداد رئوس و یال‌ها

و وجوه آن به ترتیب n و m و f است. در این صورت $n - m + f = 2$ [۱۲]

برهان. اثبات به روش استقرا روی تعداد یال‌های G است. اگر $m = 0$ ، آن‌گاه $n = 1$. چون G همبند است و $f = 1$ (وجه نامتناهی)، لذا حکم در این حالت برقرار است.

حال فرض کنید این حکم برای تمام گراف‌هایی که حداکثر $m - 1$ یال دارند برقرار باشد و گراف G ، m یال دارد اگر G درخت باشد (گراف همبند فاقد دور درخت نامیده می‌شود)، آن‌گاه $m = n - 1$ و $f = 1$ ، بنابراین $n - m + f = 2$. اگر G درخت نباشد، e را یالی دردوری از G در نظر بگیرید، در این صورت $G - e$ یک گراف همبند مسطح شده است که n رأس، $m - 1$ یال و $f - 1$ وجه دارد و لذا بنابر فرض استقرا، $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$ ، بنابراین $n - m + f = 2$. $\square$

نتیجه ۲.۴.۲. اگر G یک گراف مسطح ساده با $n \geq 3$ رأس و m یال باشد آن‌گاه $m \leq 3n - 6$.

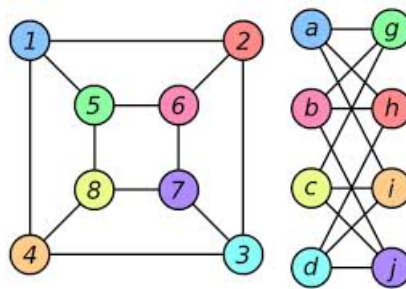
نکته ۳.۴.۲. یک گراف مسطح ساده G دارای $3n - 6$ یال و هر وجه آن یک مثلث به نام حداکثر گراف مسطح است.

نکته ۴.۴.۲. با استفاده از قضیهی اویلر و نتایج آن ثابت می‌شود $k_{5,3}$ و $k_{3,3}$ مسطح نیستند. [۱۳]

برای اثبات قضیهی کوراتوسکی^{۱۰} بیان مفهوم گراف‌های یکرخت مورد نیاز است. دو گراف G و H یکرختند اگر و فقط اگر تابعی یک‌به‌یک و پوشا به صورت $f: V(G) \rightarrow V(H)$ بین مجموعه رئوس دو گراف G و H وجود داشته باشد به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$ در این صورت دو گراف یکرخت و می‌نویسند $G \cong H$. برای مثال دو گراف زیر یکرخت هستند.

^۹Euler

^{۱۰}kuratowski



شکل ۴.۲: گراف‌های یکریخت

قضیه ۵.۴.۲ (قضیه ی کوراتوسکی). گراف G گراف مسطح است اگر و فقط اگر با گراف یکریخت باشد که هیچ زیرگراف همسانریخت با k_5 و $k_{3,3}$ نداشته باشد. [۱۵]

نکته ۶.۴.۲. فرمول اوایلر (فرمول ارائه شده در قضیه ی اوایلر) برای گراف‌های فازی نیز برقرار است. [۵]

۵.۲ تعمیم قضایا برای گراف‌های مسطح فازی

قضایای مربوط به گراف‌های مسطح فازی به صورت زیر می‌باشد.

قضیه ۱.۵.۲. فرض کنید گراف فازی $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ یک گراف مسطح ساده با n رأس و m یال (به طوریکه $\sum_{uv \in E} \mu(u, v) \leq m$) باشد، که $n \geq 3$ ، آنگاه:

$$\sum_{uv \in E} \mu(u, v) \leq 3n - 6 \quad \forall u, v \in V$$

برهان. با استفاده از نتیجه ۲.۴.۲ و با استفاده از رابطه ی $\sum_{uv \in E} \mu(u, v) \leq m$ داریم:

$$\sum_{uv \in E} \mu(u, v) \leq 3n - 6 \quad \forall u, v \in V$$

□

در نتیجه قضیه اثبات شد. [۵]

نتیجه ۲.۵.۲. اگر $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ یک گراف مسطح فازی ساده باشد، آنگاه $\tilde{G}$ دارای حداقل یک رأس v با درجه ی کمتر از ۶ می‌باشد، به عبارت دیگر، یک رأس $v \in V$ با $d(v) \leq 5$ وجود دارد.

برهان. با استفاده از برهان خلف قضیه را اثبات می‌کنیم.

اگر $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ فقط شامل یک رأس باشد، این رأس دارای درجه‌ی صفر می‌باشد. اگر $\tilde{G}$ دو رأس داشته باشد آن‌گاه هر دو رأس دارای درجه‌ی حداکثر یک می‌باشند. حال فرض می‌کنیم که $n \geq 3$ ، به عبارت دیگر، $\tilde{G}$ دارای حداقل ۳ رأس باشد.

فرض خلف: اگر درجه‌ی هر رأس از $\tilde{G}$ حداقل ۶ باشد، داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 6n$$

و از قضیه‌ی مجموع درجات در گراف فازی داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \sum_{uv \in E} \mu(u, v)$$

با استفاده از روابط بالا داریم:

$$2 \sum_{uv \in E} \mu(u, v) = \sum_{v \in V} d(v) \geq 6n$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\sum_{uv \in E} \mu(u, v) \geq 3n$$

و این امر غیر ممکن است. زیرا با استفاده از قضیه‌ی ۱.۵.۲ داریم:

$$\sum_{uv \in E} \mu(u, v) \leq 3n - 6 \quad \forall u, v \in V$$

بنابراین به تناقض می‌رسیم. فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود، به این معنی که گراف

□

مسطح فازی ساده باید یک رأس از درجه‌ی کم‌تر ۶ را دارا باشد. [۵]

۶.۲ گراف مسطح فازی-۰.۶۷

قضیه ۱.۶.۲. اگر مقدار ارزش مسطحی فازی یک گراف فازی مسطح بیشتر از ۰.۶۷ باشد آن‌گاه

گراف شامل نقطه تقاطعی بین دو یال قوی نمی‌شود.

برهان. فرض کنید $\psi = (V, \delta, E)$ یک گراف فازی مسطح باشد با ارزش مسطحی فازی f به طوری که $f \geq 0.67$. اگر امکان این وجود داشته باشد که p نقطه تقاطعی بین دو یال فازی قوی $((a, b), (a, b)_{\mu^j})$ و $((c, d), (c, d)_{\mu^j})$ باشد و برای هریال قوی $((a, b), (a, b)_{\mu^j})$ داریم $(a, b)_{\mu^j} \geq \frac{1}{4} \min\{\delta(a), \delta(b)\}$ بنابراین $I_{(a,b)} \geq 0.5$ برای ارزش مینیمم $I_{(c,d)}$ و $I_{(a,b)}$ ، $f = \frac{1}{1+0.5} < 0.67$ با توجه به این که $\mathcal{I}_p = 0.5$ این متناقض است. بنابراین ψ شامل نقطه تقاطعی بین یالهای قوی نمیشود [۱۰].

انگیزه از این قضیه این بود که ما نوع خاصی از گراف مسطح فازی را معرفی می‌کنیم که گراف مسطح فازی-۰.۶۷ گفته می‌شود به طوری که ارزش مسطحی فازی بیشتر یا مساوی ۰.۶۷ است. $\square$

۱.۶.۲ دوگان گراف مسطح فازی-۰.۶۷

تعریف ۲.۶.۲. فرض کنید $\psi = (V, \delta, E)$ یک گراف مسطح فازی-۰.۶۷ باشد و $E = \{((x, y), (x, y)_{\mu^j}), j = 1, 2, \dots, p_{xy} | (x, y) \in V \times V\}$ و F_1 و F_2 و $\dots$ و F_k وجوه فازی قوی از ψ باشد گراف دوگان فازی از ψ یک گراف مسطح فازی $\psi' = (V', \delta', E')$ است به طوری که $V' = \{x_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ و رئوس x_i از ψ' مربوط به وجه F_i از ψ است. ارزش عضویت رئوس توسط نگاشت $\delta' = V' \rightarrow [0, 1]$ داده شده است به طوری که

$$\delta'(X_i) = \max\{(u, v)_{\mu^j}, j = 1, 2, \dots, p_{uv} | F_i \text{ قوی فازی قوی } (u, v)\}.$$

بین دو وجه F_i و F_j از ψ ممکن است بیشتر از یک یال مشترک وجود داشته باشد بنابراین بین دو راس x_j و x_i در گراف فازی دوگان ψ' ممکن است بیشتر از یک یال وجود داشته باشد. $(x_i, x_j)_{vL}$ ارزش عضویت L -امین یال بین رئوس x_j و x_i است. ارزش عضویت یالهای فازی از گراف دوگان فازی به وسیله $(x_i, x_j)_{vL} = (u, v)_{\mu^j}^L$ داده شده اند به طوری که $(u, v)^L$ یک یال در مرز بین وجه قوی فازی F_i و F_j است و $L = 1, 2, \dots, s$ به طوریکه s تعداد یالهای مشترک در مرز بین F_i و F_j یا تعداد یالهای بین x_j و x_i است. [۱۰]

قضیه ۳.۶.۲. فرض کنید ψ یک گراف فازی مسطح-۰.۶۷ بدون یالهای ضعیف باشد. تعداد

رئوس، تعداد یال‌های فازی و تعداد وجه‌های قوی ψ توسط n و p و m نشان داده شده‌اند. همچنین فرض کنید ψ' دوگان فازی گراف ψ باشد. آنگاه:

(i) تعداد رئوس ψ' برابر m است.

(ii) تعداد یال‌های ψ' برابر p است.

(iii) تعداد وجه‌های فازی ψ' برابر n است.

برهان. اثبات (i) و (ii) و (iii) با استفاده از تعریف گراف دوگان فازی به دست می‌آید. $\square$

مثال ۴.۶.۲. در شکل ۵.۲ یک گراف مسطح فازی-۰.۶۷ ارائه شده است به طوریکه $V = \{a, b, c, d\}$ داده شده است. برای این گراف $\delta(a) = ۰.۶$ و $\delta(b) = ۰.۷$ و $\delta(c) = ۰.۸$ و $\delta(d) = ۰.۹$

$$E = \{((a, b), ۰.۵), ((a, c), ۰.۴), ((a, d), ۰.۵۵), ((b, c), ۰.۷)\}$$

است. بنابراین گراف مسطح فازی-۰.۶۷ وجوه فازی زیر را دارد که F_1 محدود شده به $((b, c), ۰.۴۵)$ و $((a, c), ۰.۴)$ و $((a, b), ۰.۵)$ و F_2 محدود شده به $((a, c), ۰.۴)$ و $((c, d), ۰.۷)$ و $((a, d), ۰.۵۵)$ و وجه بیرونی F_3 توسط $((b, c), ۰.۴۵)$ و $((a, b), ۰.۵)$ و $((c, d), ۰.۷)$ و $((a, d), ۰.۵۵)$ احاطه شده است. گراف دوگان فازی ساخته شده به شرح زیر است در اینجا همه وجوه فازی، وجوه فازی قوی هستند. برای هر وجه فازی قوی، یک راس برای گراف دوگان فازی در نظر گرفته شده است. بنابراین مجموعه رئوس $V' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ به طوری که x_i مربوط به وجه فازی قوی F_i $i = 1, 2, 3, 4$ است. بنابراین $\delta'(x_1) = \max\{۰.۵, ۰.۴, ۰.۴۵\} = ۰.۵$ و

$$\delta'(x_2) = \max\{۰.۵۵, ۰.۷, ۰.۴\} = ۰.۷ \text{ و } \delta'(x_3) = \max\{۰.۵, ۰.۴۵, ۰.۷, ۰.۵۵\} = ۰.۷$$

دو یال مشترک (a, d) و (c, d) بین دو وجه F_2 و F_3 در ψ وجود دارد بنابراین بین رئوس x_3 و x_2 دو یال وجود دارد. تابع عضویت این یال‌ها توسط $(x_2, x_3)_{v_1} = (c, d)_{\mu^1} = ۰.۷$ و

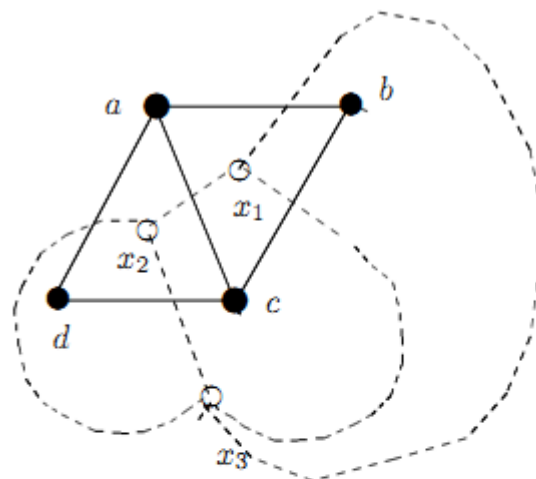
$$۰.۵۵ = (a, d)_{\mu^1} = (x_2, x_4)_{v_2} \text{ داده شده است.}$$

همچنین تابع عضویت دیگر یال‌ها در گراف دوگان فازی توسط $(x_1, x_2)_{v_1} = (a, c)_{\mu^1} = ۰.۴$

و $(x_1, x_3)_{v^1} = (a, b)_{\mu^1} = 0.5$ و $(x_1, x_3)_{v^2} = (b, c)_{\mu^1} = 0.45$ محاسبه شده است بنابراین مجموعه یال از گراف دوگان فازی برابر است با

$$E' = \{((x_1, x_2), 0.4), ((x_1, x_3), 0.5), ((x_1, x_3), 0.45), ((x_2, x_3), 0.7), ((x_2, x_3), 0.55)\}$$

در شکل ۵.۲ گراف دوگان فازی $\psi' = (V', \delta', E')$ به وسیله خط چین ها نشان داده شده است.



$\sigma(a) = 0.6$	$(a, b)_{\mu^1} = 0.5$
$\sigma(b) = 0.7$	$(a, c)_{\mu^1} = 0.4$
$\sigma(c) = 0.8$	$(a, d)_{\mu^1} = 0.55$
$\sigma(d) = 0.9$	$(b, c)_{\mu^1} = 0.45$
	$(c, d)_{\mu^1} = 0.7$
$\sigma'(x_1) = 0.5$	$(x_1, x_2)_{v^1} = 0.4$
$\sigma'(x_3) = 0.6$	$(x_1, x_3)_{v^1} = 0.5$
$\sigma'(x_2) = 0.7$	$(x_1, x_3)_{v^2} = 0.45$
	$(x_2, x_3)_{v^1} = 0.5$
	$(x_2, x_3)_{v^2} = 0.7$

شکل ۵.۲

قضیه ۵.۶.۲. فرض کنید ψ' دوگان گراف فازی، گراف مسطح فازی-۰/۶۷، ψ باشد. در این صورت تعداد وجه های فازی قوی در ψ' کم تر یا مساوی تعداد رئوس ψ است.

برهان. ψ' دوگان گراف فازی، گراف مسطح فازی-۰/۶۷، ψ است. اگر ψ دارای n راس و ψ' دارای m وجه فازی قوی باشد. حال ψ ممکن است دارای یال های ضعیف و یال های قوی باشد. برای ساخت دوگان گراف فازی یال های ضعیف باید از بین برده شوند. بنابراین اگر ψ دارای تعدادی یال

ضعیف باشد بعضی از رئوس ممکن است همه یال‌های مجاور آن یال‌های ضعیف باشند. تعدادی از رئوس را t قرار دهید. این رئوس به هیچ وجه فازی محدود نشده است. اگر ما این رئوس و یال‌های مجاور آن را حذف کنیم آن گاه تعداد رئوس $n - t$ می‌شود. با استفاده از قضیه قبل، $m = n - t$ بنابراین به‌طور کلی $m \leq n$. این نتیجه‌گیری که تعداد وجه‌های فازی قوی در ψ کم‌تر مساوی تعداد رئوس ψ است به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۶.۶.۲. فرض کنید $\psi = (V, \sigma, E)$ یک گراف مسطح فازی-۰.۶۷ بدون یال ضعیف و دوگان گراف فازی ψ ، $\psi' = (V', \sigma', E')$ باشد. تابع عضویت یال‌های فازی ψ' برابر با تابع عضویت یال‌های فازی ψ است.

برهان. فرض کنید $\psi = (V, \sigma, E)$ یک گراف مسطح فازی-۰.۶۷ بدون یال ضعیف است. دوگان گراف فازی ψ گراف $\psi' = (V', \sigma', E')$ است به طوری‌که گراف مسطح فازی-۰.۶۷ بدون هیچ نقطه‌ی تقاطعی بین یال‌ها است. فرض کنید $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ مجموعه وجه‌های فازی قوی ψ باشد از تعریف دوگان گراف فازی می‌دانیم $(x_i, x_j)_{vL} = (u, v)_{\mu_j}^L$ به طوری‌که $(u, v)^L$ یالی در محدوده بین دو وجه فازی قوی F_i و F_j و S و $L = 1, 2, \dots$ است به طوری‌که تعداد یال‌های مشترک در محدوده بین F_i و F_j و S تا است. تعداد یال‌های فازی گراف فازی ψ' همانند ψ است که یال ضعیف ندارد. برای هر یال فازی ψ یک یال فازی در ψ' با همان ارزش عضویت وجود دارد. $\square$

فصل ۳

یکریختی گراف‌های فازی و اجتماع دو گراف مسطح فازی

۱.۳ یکرختی گراف‌های فازی

۱.۱.۳ ویژگی‌های اساسی یکرختی

برای تعاریف زیر فرض می‌کنیم $\tilde{G} : (V, \sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (V', \sigma', \mu')$ دو گراف فازی باشند.

تعریف ۱.۱.۳. یک هم‌ریختی از گراف‌های فازی $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ ، نگاشت $h : V \rightarrow V'$ می‌باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشد: [۵]

$$\sigma(x) \leq \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V, \quad \mu(x, y) \leq \mu'(h(x), h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

تعریف ۲.۱.۳. یک یکرختی $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ ، $h : V \rightarrow V'$ یک نگاشت دوسویی می‌باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار می‌باشد:

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V,$$

$$\mu(x, y) = \mu'(h(x), h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

و با $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$ نشان می‌دهیم. [۵]

قضیه ۳.۱.۳. برای هر دو گراف فازی یکرخت، مرتبه و اندازه آنها یکسان می‌باشد. [۵]

برهان. اگر $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ یک یکرختی بین گراف‌های فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ با مجموعه‌های زمینه‌ی V و V' باشد، آنگاه

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V,$$

$$\mu(x, y) = \mu'(h(x), h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

با توجه به تعریف مرتبه در گراف فازی و روابط بالا داریم:

$$O(\tilde{G}) = \sum_{x \in V} \sigma(x) = \sum_{x \in V} \sigma'(h(x)) = O(\tilde{G}')$$

با توجه به تعریف اندازه در گراف فازی و روابط بالا داریم:

$$S(\tilde{G}) = \sum_{x,y \in V} \mu(x,y) = \sum_{x,y \in V} \mu'(h(x), h(y)) = S(\tilde{G}')$$

□

قضیه ۴.۱.۳. اگر $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ گراف‌های فازی یکرخت باشند، آنگاه درجات رئوس آن‌ها حفظ می‌شود. [۵]

برهان. فرض کنید $h: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ یک یکرختی از $\tilde{G}$ بر روی $\tilde{G}'$ باشد. با استفاده از تعریف یکرختی داریم:

$$\mu(x,y) = \mu'(h(x), h(y)) \quad \forall x,y \in V$$

همچنین، با استفاده از رابطه بالا و باتوجه به تعریف درجه‌ی یک رأس در یک گراف فازی داریم:

$$d_{\tilde{G}}(u) = \sum_{\substack{u \neq v \\ v \in V}} \mu(u,v) = \sum_{\substack{u \neq v \\ v \in V}} \mu'(h(u), h(v)) = d_{\tilde{G}'}(h(u))$$

□

نکته ۵.۱.۳. یکرختی بین گراف‌های فازی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. [۵]

برهان. فرض کنید $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ ، $\tilde{G}' = (V', \sigma', \mu')$ و $\tilde{G}'' = (V'', \sigma'', \mu'')$ گراف‌های فازی، به‌ترتیب با مجموعه‌های زمینه‌ی V ، V' و V'' باشند.

۱. **انعکاسی:** نگاشت همانی $h: V \rightarrow V$ را در نظر بگیرید که به‌ازای هر $x \in V$ ، $h(x) = x$

می‌باشد. که h یک نگاشت دوسویی است و روابط

$$\sigma(x) = \sigma(h(x)) \quad \forall x \in V$$

$$\mu(x,y) = \mu(h(x), h(y)) \quad \forall x,y \in V$$

برقرار می‌باشد. از این‌رو h یک یکرختی از گراف‌های فازی به خودش می‌باشد. بنابراین

گراف فازی G با خودش یکرخت است (یعنی $\tilde{G} \cong \tilde{G}$). در نتیجه رابطه‌ی انعکاسی برقرار است.

۲. تقارنی: فرض کنید $h : V \rightarrow V'$ یک یکرختی از $\tilde{G}$ بر روی $\tilde{G}'$ باشد، آنگاه h یک نگاشت

دوسویی

$$h(x) = x', \quad x \in V \quad (1.3)$$

است، که

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

$$\mu(x, y) = \mu'(h(x), h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (2.3)$$

برقرار می‌باشد. چون h دوسویی است با استفاده از (۱.۳) داریم:

$$h^{-1}(x') = x \quad \forall x' \in V'; \quad (3.3)$$

و با استفاده از (۱.۳) و (۳.۳) در (۲.۳) داریم:

$$\sigma(h^{-1}(x')) = \sigma'(x') \quad \forall x' \in V'$$

$$\mu(h^{-1}(x'), h^{-1}(y')) = \mu'(x', y') \quad \forall x', y' \in V' \quad (4.3)$$

بنابراین یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشا $h^{-1} : V' \rightarrow V$ را به دست می‌آوریم، که یک یکرختی

از $\tilde{G}'$ بر روی $\tilde{G}$ می‌باشد. به عبارت دیگر،

$$\tilde{G} \cong \tilde{G}' \Rightarrow \tilde{G}' \cong \tilde{G}.$$

در نتیجه رابطه‌ی تقارنی برقرار است.

۳. تعدی: فرض کنید $h : V \rightarrow V'$ و $g : V' \rightarrow V''$ به ترتیب، یکرختی‌هایی از G بر روی $\tilde{G}'$ و

$\tilde{G}'$ بر روی $\tilde{G}''$ باشند. آنگاه $g \circ h$ یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشا از V به V'' است که

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) \quad \forall x \in V$$

همچنین $h: V \rightarrow V'$ یک یکرختی است، که به ازای هر $x \in V$ ، $h(x) = x'$ می‌باشد، که

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

$$\mu(x, y) = \mu'(h(x), h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

برقرار می‌باشد. به عبارت دیگر،

$$\sigma(x) = \sigma'(x') \quad \forall x \in V \quad (۵.۳)$$

$$\mu(x, y) = \mu'(x', y') \quad \forall x, y \in V \quad (۶.۳)$$

از آنجایی که g یک یکرختی از V' به V'' است داریم:

$$g(x') = x'', \quad x' \in V'$$

$$\sigma'(x') = \sigma''(g(x')) \quad \forall x' \in V' \quad (۷.۳)$$

$$\mu'(x', y') = \mu''(g(x'), g(y')) \quad \forall x', y' \in V' \quad (۸.۳)$$

از (۵.۳) و (۷.۳) و با استفاده از $h(x) = x'$ ، $x \in V$ داریم:

$$\sigma = \sigma'(x') \quad \forall x \in V$$

$$= \sigma''(g(x')) \quad \forall x' \in V'$$

$$= \sigma''(g(h(x))) \quad \forall x \in V$$

از (۶.۳) و (۸.۳) داریم:

$$\mu(x, y) = \mu'(x', y') \quad \forall x, y \in V$$

$$= \mu''(g(x'), g(y')) \quad \forall x', y' \in V'$$

$$= \mu''(g(h(x)), g(h(y))) \quad \forall x, y \in V.$$

در نتیجه رابطه‌ی تعدی برقرار است. بنابراین $g \circ h$ یک یکرختی بین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}''$ است. در نتیجه

□

یکرختی بین گراف‌های فازی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

نکته ۶.۱.۳. یکرختی خاصیت مسطح بودن گراف‌های فازی را حفظ می‌کند.

قضیه ۷.۱.۳. اگر $\tilde{G}$ یک گراف مسطح فازی باشد اگر یکرختی $\tilde{G}'$ $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ وجود داشته باشد به طوریکه $\tilde{G}'$ گراف فازی باشد، $\tilde{G}'$ می‌تواند به صورت گراف مسطح فازی با همان ارزش مسطحی فازی $\tilde{G}$ نشان داده شود. [۱۰]

برهان. فرض کنید $\tilde{G}$ یک گراف مسطح فازی باشد و یکرختی $\tilde{G}'$ $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ وجود داشته باشد به طوری که $\tilde{G}'$ گراف فازی باشد. حال یکرختی وزن یال و راس را حفظ می‌کند، هم‌چنین مرتبه و اندازه گراف‌های فازی در یکرختی گراف‌های فازی نگه داشته می‌شود. بنابراین مرتبه و اندازه $\tilde{G}'$ برابر $\tilde{G}$ خواهد بود. آنگاه $\tilde{G}'$ می‌تواند همانند $\tilde{G}$ رسم شود. بنابراین تعداد تقاطع بین یال‌ها و ارزش مسطحی فازی $\tilde{G}'$ مانند $\tilde{G}$ خواهد بود و این نتیجه‌گیری که $\tilde{G}'$ می‌تواند مانند گراف مسطح فازی با همان ارزش مسطحی فازی رسم شود به دست می‌آید. $\square$

با استفاده از قضیه یکرختی برای گراف‌های فازی و قضیه ۷.۱.۳، قضیه کوراتوسکی را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه ۸.۱.۳. گراف $\tilde{G}$ گراف مسطح فازی است اگر و فقط اگر با گراف فازی یکرخت باشد که هیچ زیرگراف فازی یکرخت با $\tilde{k}_5$ و $\tilde{k}_{3,3}$ نداشته باشد.

۲.۳ اجتماع دو گراف مسطح فازی

اجتماع^۱ دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ به صورت یک گراف فازی:

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2 = (\sigma_1 \cup \sigma_2, \mu_1 \cup \mu_2)$$

^۱union

روی $G^* : (V, E)$ که $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2$ با

$$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \begin{cases} \sigma_1(u), & \text{اگر } u \in V_1 - V_2 \\ \sigma_2(u), & \text{اگر } u \in V_2 - V_1 \\ \sigma_1(u) \vee \sigma_2(u), & \text{اگر } u \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(u, v) = \begin{cases} \mu_1(u, v), & \text{اگر } uv \in E_1 - E_2 \\ \mu_2(u, v), & \text{اگر } uv \in E_2 - E_1 \\ \mu_1(u, v) \vee \mu_2(u, v), & \text{اگر } uv \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

تعریف می‌شود. [۱۶]

درجه‌ی یک رأس در اجتماع دو گراف مسطح فازی به‌ازای هر $u \in V_1 \cup V_2$ ، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $u \in V_1$ یا $u \in V_2$ ، اما هر دو به‌طور هم‌زمان رخ داده نمی‌شوند.

آنگاه هیچ یال متلاقی با رأس u در $E_1 \cap E_2$ قرار نمی‌گیرند.

بنابراین

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(u, v) = \begin{cases} \mu_1(u, v), & \text{اگر } u \in V_1 \text{ (به عبارت دیگر) } uv \in E_1 \\ \mu_2(u, v), & \text{اگر } u \in V_2 \text{ (به عبارت دیگر) } uv \in E_2 \end{cases}$$

بنابراین اگر $u \in V_1$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(u, v) \\ &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(u, v) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u). \end{aligned}$$

اگر $u \in V_2$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(u, v) \\ &= \sum_{uv \in E_1} \mu_2(u, v) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u). \end{aligned}$$

حالت دوم: $u \in V_1 \cap V_2$ اما هیچ یال متلاقی با رأس u در $E_1 \cap E_2$ قرار نمی‌گیرد. بنابراین هر یال متلاقی با رأس u در E_1 یا در E_2 قرار می‌گیرد، اما به‌طور همزمان در هر دو قرار نمی‌گیرد. همچنین تمامی این یال‌ها در $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ واقع می‌شوند. بنابراین

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(u, v) \\ &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(u, v) + \sum_{uv \in E_2} \mu_2(u, v) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u). \end{aligned}$$

حالت سوم: $u \in V_1 \cap V_2$ و برخی یال‌های متلاقی با رأس u در $E_1 \cap E_2$ قرار دارند. هر یال uv که در $E_1 \cap E_2$ قرار دارد، فقط یک‌بار در $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ ظاهر می‌شود. به‌ازای یال uv داریم:

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(u, v) = \mu_1(u, v) \vee \mu_2(u, v).$$

با استفاده از تعریف،

$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(u, v) \\
 &= \sum_{uv \in E_1 - E_2} \mu_1(u, v) + \sum_{uv \in E_2 - E_1} \mu_2(u, v) + \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(u, v) \vee \mu_2(u, v) \\
 &= \left[\sum_{uv \in E_1 - E_2} \mu_1(u, v) + \sum_{uv \in E_2 - E_1} \mu_2(u, v) + \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(u, v) \vee \mu_2(u, v) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(u, v) \wedge \mu_2(u, v) \right] - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(u, v) \wedge \mu_2(u, v) \\
 &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(u, v) + \sum_{uv \in E_2} \mu_2(u, v) - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(u, v) \wedge \mu_2(u, v) \\
 &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u) - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(u, v) \wedge \mu_2(u, v).
 \end{aligned}$$

مثال ۱.۲.۳. گراف‌های مسطح فازی $\tilde{G}_1 : (V_1, \sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (V_2, \sigma_2, \mu_2)$ را در شکل ۱.۳ در نظر بگیرید.

x را در نظر بگیرید: در شکل $x \in V_1$ می‌باشد و چون در V_2 واقع نشده‌است. بنابراین با استفاده از حالت اول داریم:

$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(x) &= d_{\tilde{G}_1}(x) \\
 &= \mu_1(x, w) + \mu_1(x, v) \\
 &= ۰/۵ + ۰/۶ = ۱/۱
 \end{aligned}$$

v را در نظر بگیرید: در شکل ۱.۳، $v \in V_1 \cap V_2$ می‌باشد، اما هیچ یال متلاقی با رأس v در $E_1 \cap E_2$ واقع نمی‌شود. یعنی هر یال متلاقی با رأس u در E_1 یا در E_2 قرار می‌گیرد، اما به طور همزمان در هر دو قرار نمی‌گیرد.

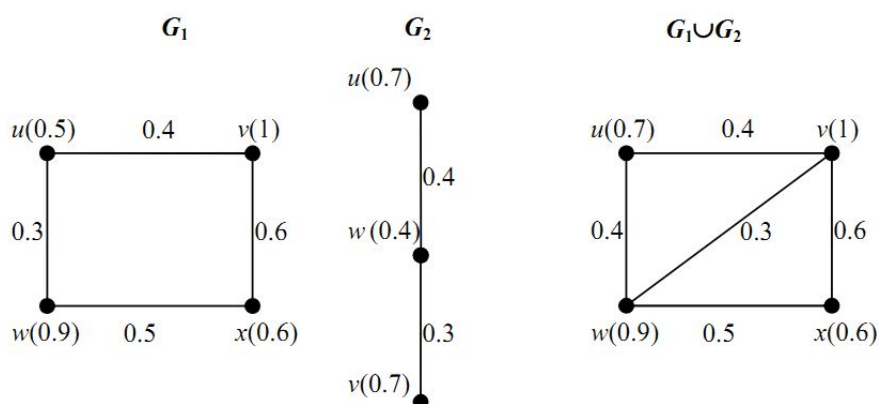
بنابراین با استفاده از حالت دوم داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(v) &= d_{\tilde{G}_1}(v) + d_{\tilde{G}_2}(v) \\ &= (\mu_1(u, v) + \mu_1(x, v)) + \mu_2(w, v) \\ &= (0.4 + 0.6) + 0.3 = 1.3 \end{aligned}$$

u را در نظر بگیرید: در شکل ۱.۳، $u \in V_1 \cap V_2$ و همچنین $uw \in E_1 \cap E_2$ برقرار می‌باشد، یعنی یال متلاقی با رأس v در $E_1 \cap E_2$ واقع شده است. بنابراین با استفاده از حالت سوم داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u) - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(u, v) \wedge \mu_2(u, v) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u) - \mu_1(u, w) \wedge \mu_2(u, w) \\ &= (0.3 + 0.4) + 0.4 - (0.3 \wedge 0.4) \\ &= 0.7 + 0.4 - 0.3 = 0.8 \end{aligned}$$

تمامی این درجات در شکل $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ در شکل ۱.۳ بررسی می‌شود.



شکل ۱.۳: اجتماع G_1 و G_2 ($G_1 \cup G_2$)

۳.۳ گراف فازی منتظم^۲

۱.۳.۳ گراف منتظم قطعی

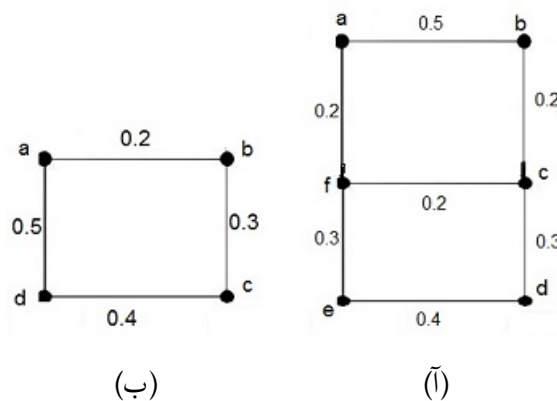
تعریف ۱.۳.۳. هرگاه درجه‌ی هر رأس گراف G برابر k باشد، G را یک گراف k -منتظم گوئیم.

تعریف ۲.۳.۳. گراف فازی $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ روی $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. اگر به ازای هر $v \in V$ در گراف زمینه G ، $d_{\tilde{G}}(v) = k$ (به عبارت دیگر) اگر هر رأس گراف زمینه G دارای درجه‌ی یکسان k داشته باشد، آنگاه $\tilde{G}$ را یک گراف فازی k -منتظم گوئیم. که با تعریف گراف‌های منتظم در نظریه گراف قطعی مشابه است.

البته تعریف گراف فازی منتظم مبتنی بر تعریف ۱۵.۴.۱ دو مشکل زیر را به همراه دارد:

آ. ممکن است درجه رؤس یکسان باشند ولی گراف زمینه لزوماً منتظم نباشد. (شکل آ)

ب. ممکن است گراف زمینه، گراف فازی منتظم باشد ولی درجه رؤس گراف فازی برابر نباشند. (شکل ب)



شکل ۲.۳

بنابراین میتوان گراف فازی منتظم را برحسب گراف زمینه آن، به صورت زیر تعریف نمود:

تعریف ۳.۳.۳. گراف فازی $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ منتظم است، اگر گراف زمینه آن منتظم باشد.

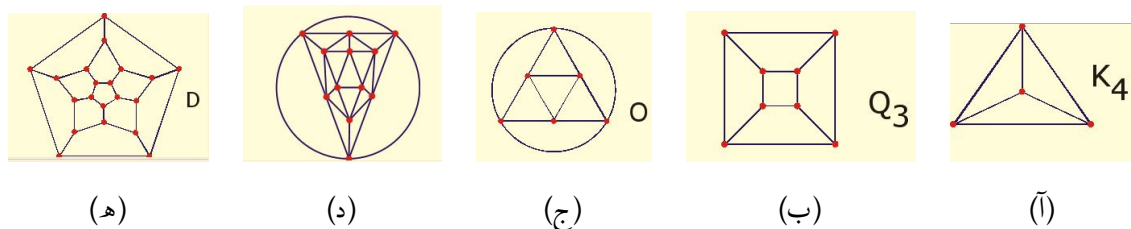
^۲regular fuzzy graph

۲.۳.۳ گراف فازی ۳-منتظم

گراف $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی ۳-منتظم یا مکعب است هرگاه هر رأس گراف زمینه آن دارای درجه‌ی یکسان ۳ باشد. [۸]

۴.۳ گراف‌های افلاطونی

در میان گراف‌های منتظم گراف‌های موسوم به افلاطونی که مسطح نیز می‌باشند، مورد توجه خاص‌اند. این گراف‌ها عبارتند از پنج گراف منتظم فضایی افلاطونی: چهار وجهی (K_4)، مکعب (Q_3)، هشت وجهی، دوازده وجهی (گراف همیلتونی) و بیست وجهی که در شکل زیر نشان داده شده‌اند. [۱۴]



شکل ۳.۳: گراف‌های افلاطونی

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی روی $G = (V, E)$ باشد. اگر $\tilde{G}$ گراف فازی منتظم با گراف زمینه، گراف افلاطونی باشد، $\tilde{G}$ یک گراف فازی افلاطونی است.

فصل ۴

رنگ آمیزی گراف های فازی

یکی دیگر از کاربردهای گراف فازی، رنگ آمیزی گراف های فازی است.

رنگ آمیزی گراف های فازی اولین بار توسط نویسندگانی چون اصلاحچی و اوناک در سال ۲۰۰۴ تحت عنوان رنگ آمیزی فازی گراف فازی مطرح گردید و این موضوع در سال ۲۰۰۵ به طور خاص تر تحت عنوان رنگ آمیزی گراف های فازی توسط دیگر نویسندگان ارائه گردید و تاکنون این رنگ آمیزی از جنبه های گوناگون مورد توجه واقع شده است.

۱.۴ رنگ آمیزی گراف قطعی

تعریف ۱.۱.۴. گراف قطعی $G : (V, E)$ را در نظر بگیرید، یک تابع رنگ آمیزی، یک نگاشت $G : V \rightarrow N$ است که $C(i)$ ، رنگ رأس i است، به این صورت که دو رأس مجاور نمی توانند رنگ یکسان بگیرند، یعنی اگر $\{i, j\} \in E$ آنگاه $C(i) \neq C(j)$ ، که رؤس i و j ناسازگار نامیده می شود. k -رنگ آمیزی C^k ، یک تابع رنگ آمیزی با حداکثر k رنگ متمایز به صورت زیر است:

$$C^k : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

تعریف ۲.۱.۴. یک گراف، k -رنگ پذیر است اگر یک k -رنگ آمیزی را بپذیرد.

تعریف ۳.۱.۴. به مینیمم مقدار k که گراف قطعی G ، k -رنگ پذیر باشد را عدد رنگی G نامیده می شود و با $\chi(G)$ نمایش داده می شود.

۲.۴ رنگ آمیزی فازی

در این بخش به تعریف عدد رنگی و انواع رنگ آمیزی فازی α -برش ها از جمله رنگ آمیزی رأسی، رنگ آمیزی یالی و رنگ آمیزی مجموع می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید $\alpha \in [0, 1]$ گراف α ، $\hat{G}_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ ، α -برش از $\hat{G}$ است به طوریکه

$$\hat{G}_\alpha = \{v \in V | \delta(v) \geq \alpha\}, \{uv \in E | \mu(u, v) \geq \alpha\}$$

گراف فازی یک تعداد متناهی از α -برش‌های مختلف دارد. α -برش در میان فواصل زیر تغییر

نمی‌کند: $[V] \cdot (\alpha_0, \alpha_1], \dots, (\alpha_{k-1}, \alpha_k]$

تعریف ۲.۲.۴. دو رأس u و v در $\hat{G}$ مجاور گفته می‌شود اگر $\mu(u, v) \leq \frac{1}{4} \min\{\delta(u), \delta(v)\}$. [۷]

تعریف ۳.۲.۴. دو یال $v_i v_j$ و $v_j v_k$ حادث گفته می‌شود اگر $\delta(v_j) \leq 2 \min\{\mu(v_i, v_j), \mu(v_j, v_k)\}$

برای $j = 1, 2, \dots, |v|$ و $1 \leq i, k \leq |v|$.

۳.۴ رنگ آمیزی فازی رأسی^۱

همانطور که پیش از این بیان شد یک مجموعه فازی A تعریف شده روی X با خانواده‌ای از

α -برش‌ها توسط $A_\alpha = \{x \in X | \mu(x) \geq \alpha, \alpha \in I\}$ نشان داده می‌شود.

بنابراین هر k -رنگ آمیزی قطعی می‌تواند روی G_α تعریف شود. تابع k -رنگ آمیزی $\hat{G}$ از طریق این

دنباله تعریف می‌شود. برای هر $\alpha \in I$ فرض کنید ψ_α نشان‌دهنده عدد رنگی G_α باشد، عدد رنگی $\hat{G}$

از طریق یک خانواده از مجموعه α -برش‌ها تعریف خواهد شد. [۲]

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید $\tilde{G} = (V, \sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد، عدد رنگی، عدد فازی

$\chi(\tilde{G}) = \{(x, v(x)) | x \in X\}$ است به طوری که $X = \{1, \dots, |v|\}$ و $\forall x \in X \quad v(x) =$

$\sup\{\alpha \in I | x \in A_\alpha\}$ و $A_\alpha = \{1, \dots, \chi_\alpha\}$. [۲]

عدد رنگی یک گراف فازی یک عدد فازی نرمال است که بستگی به مفهوم شاخص α دارد و این

می‌تواند به روش زیر تفسیر شود: برای مقادیر پایین تر از α که بسیاری از پیوندهای ناسازگار بین

گره‌ها وجود دارد در نتیجه رنگ‌های بیشتر به منظور در نظر گرفتن این ناسازگاری‌ها نیاز است و از

سوی دیگر برای مقادیر بالاتر از α پیوند ناسازگار بین گره‌ها کم تر و رنگ مورد نیاز کم تر خواهد بود.

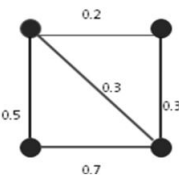
مسئله رنگ آمیزی فازی شامل تعیین عدد رنگی یک گراف فازی و وجود یک تابع رنگ آمیزی است.

در این روش، برای هر سطح α ، حداقل تعداد مورد نیاز برای رنگ آمیزی گراف قاطع G_α محاسبه

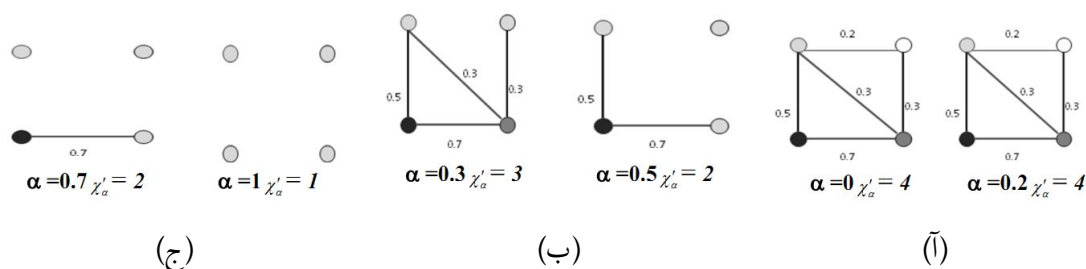
خواهد شد به این ترتیب عدد رنگی فازی به عنوان یک عدد فازی از طریق α -برش تعریف شده است.

^۱fuzzy vertex coloring

مثال ۲.۳.۴. گراف فازی $\hat{G} = (V, \mu)$ بارئوس قطعی را در نظر بگیرید بطوریکه $V = \{1, 2, 3, 4\}$ و ماتریس μ به صورت زیر تعریف شده است.

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$


برای این مثال شش گراف قطعی $G_\alpha = (V, E_\alpha)$ برای هر $\alpha \in I$ شامل می شود. برای هر کدام عدد رنگی χ'_α و یک رنگ آمیزی بدست می آید.



شکل ۱.۴: رنگ آمیزی فازی رأسی

عدد رنگی فازی $\hat{G}$ مجموعه $\psi(\hat{G}) = \{(1, 1), (2, 0.7), (3, 0.3), (4, 0.2)\}$ است.

۴.۴ رنگ آمیزی فازی یالی^۲

در گراف های قطعی عدد رنگی یالی یک گراف Δ یا $\Delta + 1$ است بطوریکه Δ حداکثر درجه رأس باشد. حال عدد رنگی یالی فازی به عنوان عدد فازی زیر تعریف می شود: [۲]

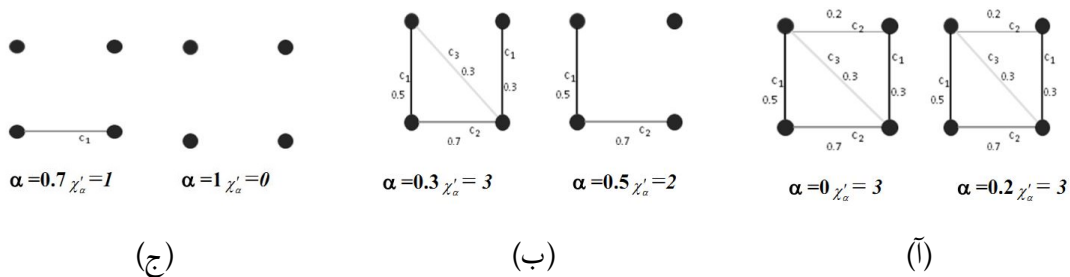
تعریف ۱.۴.۴. برای یک گراف فازی $\hat{G} = (V, \mu)$ ، عدد رنگی یالی عدد فازی $\chi'_f(\hat{G})$ است بطوریکه $X = \{1, \dots, \Delta + 1\}$ و $\lambda(x) = \sup\{\alpha \in I | x \in A_\alpha\}$ و $A_\alpha = \{1, \dots, \chi'_\alpha\}$ برای هر $\alpha \in I$.

^۲fuzzy edge coloring

α	E_α	χ	$c_\alpha(12)$	$c_\alpha(13)$	$c_\alpha(14)$	$c_\alpha(23)$	$c_\alpha(34)$
0	12,13, 14,23, 24	3	1	2	3	3	1
0.2	12,13, 14,23, 24	3	1	2	3	3	1
0.3	13,14, 23, 24	3	0	2	1	1	3
0.5	14,34	2	0	0	1	0	2
0.7	34	1	0	0	0	0	1
1	Φ	0	0	0	0	0	0

جدول ۱.۴

در مثال ۲.۳.۴ شش گراف قطعی $G_\alpha = (V, E_\alpha)$ برای هر $\alpha \in I$ شامل شد، برای هر کدام عدد رنگی یالی χ'_α بدست خواهد آمد در جدول بالا عدد رنگی با χ و رنگ های اختصاص داده به هر یال با C_i نشان داده شده است.



شکل ۲.۴: رنگ آمیزی فازی یالی

از آنجایی که $\Delta = 3$ است برای عدد رنگی یالی فازی $\hat{G}$ مجموعه فازی زیر بدست می آید:

$$\chi'_\alpha = \{(1, 0.7), (2, 0.5), (3, 0.3), (4, 0)\}$$

نکته ۲.۴.۴. اگر برای همه یال های $\hat{G}$ ، $\mu = 1$ باشد آنگاه گراف قطعی بدست می آید و در نتیجه

$$\cdot \chi'_\alpha = \chi'$$

۵.۴ رنگ آمیزی فازی مجموع

در موارد قطعی عدد رنگی مجموع یک گراف بیشتر از $\Delta + ۲$ (با حدس رنگ آمیزی مجموع) است بطوریکه Δ حداکثر درجه رئوس است.

بنابراین عدد رنگی فازی مجموع را به عنوان یک عدد فازی به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۵.۴. برای یک گراف فازی $\hat{G} = (V, \mu)$ عدد رنگی مجموع، عدد فازی $\tau(x) = \sup\{\alpha \in I | x \in A_\alpha\}$ و $X = \{۱, \dots, \Delta + ۲\}$ بطوریکه $\chi_f^T(\hat{G}) = \{(x, \tau(x)) | x \in X\}$ و $A_\alpha = \{۱, \dots, \chi_f^T\}$ برای هر $\alpha \in I$.

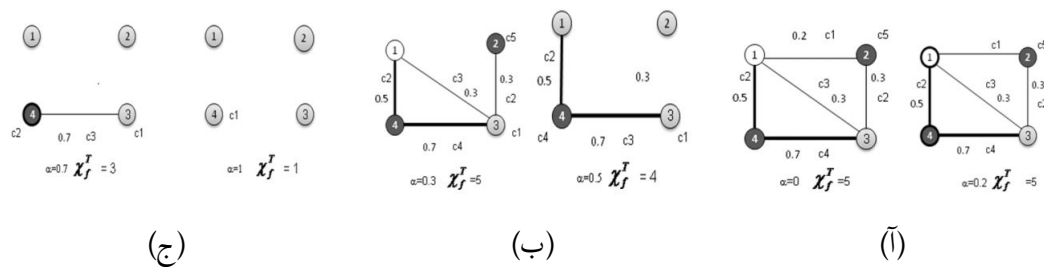
در مثال ۲.۳.۴ برای هر $\alpha \in I$ ، مطابق شکل ۳.۴ شامل نگاشت $C_\alpha : V \cup E \rightarrow \{۱, ۲, \dots, k\}$ و عدد رنگی مجموع χ_f^T برای G_α می شود.

α	χ_f^T	$c_\alpha(1)$	$c_\alpha(2)$	$c_\alpha(3)$	$c_\alpha(4)$	$c_\alpha(12)$	$c_\alpha(13)$	$c_\alpha(14)$	$c_\alpha(23)$	$c_\alpha(34)$
0	5	2	5	1	5	1	4	3	3	2
0.2	5	2	5	1	5	1	4	3	3	2
0.3	5	2	1	5	1	0	4	3	3	2
0.5	4	1	1	1	2	0	0	3	0	4
0.7	3	1	1	1	3	0	0	0	0	2
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

جدول ۲.۴

شش گراف قطعی $G_\alpha = (V, E_\alpha)$ برای هر α به صورت شکل ۳.۴ در نظر گرفته می شود. از آنجایی که برای گراف $\Delta = ۳$ است عدد رنگی فازی مجموع $\hat{G}$ مجموعه فازی زیر است:

$$\chi_f^T = \{(۱, ۱), (۲, ۰), (۳, ۰/۷), (۴, ۰/۵), (۵, ۰/۳)\}$$



شکل ۳.۴: رنگ آمیزی فازی مجموع

۶.۴ k -رنگ آمیزی فازی

در سال ۱۹۶۵ بهزاد^۳ و ویزینگ^۴ به طور مستقل یک مفهوم جدید از رنگ آمیزی گراف را معرفی کردند که رنگ آمیزی کلی گفته می شود. این یک نوع رنگ آمیزی ترکیبی از رنگ آمیزی مجاز رئوس و یال ها است.

رنگ آمیزی کلی بر حسب بزرگترین درجه رئوس برای گراف ها به صورت حدس تعیین شده است که هر گراف G یک رنگ آمیزی کلی با حداکثر $2 + \Delta(G)$ رنگ است اگر $\Delta(G) \geq n - 5$ به طوری که n تعداد رئوس در G است. [۷]

أناق^۵ و اصلاحچی^۶ عدد رنگی فازی را حداقل مقدار k تعریف می کنند برای گراف G که k -رنگ آمیزی فازی دارد و تعریف k -رنگ آمیزی فازی در زیر آمده است. [۷]

تعریف ۱.۶.۴. یک خانواده $\Gamma = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ روی مجموعه فازی V ، k -رنگ آمیزی فازی^۷ از $\hat{G} = (V, \delta, \mu)$ گفته می شود اگر

$$\forall \Gamma = \delta \quad (۱)$$

$$Y_i \wedge Y_j = \circ \quad (۲)$$

^۳Behzad^۴Vizing^۵Onagh^۶Eslahchi^۷ k -fuzzy coloring

(۳) برای هر یال قوی xy از G ($1 \leq i \leq k$) $\min\{Y_i(x), Y_i(y)\} = \circ$

این تعریف برای یال ها گسترش داده شده و رنگ آمیزی کلی به صورت زیر تعریف شده است. [۷]

تعریف ۲.۶.۴. یک خانواده $\Gamma = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ از مجموعه فازی روی $V \cup E$ ، k -رنگ آمیزی کل فازی $^{\wedge}$ از $\hat{G} = (V, \sigma, \mu)$ گفته می شود اگر

(۱) $\max_i Y_i(v) = \sigma(v) \quad (\forall v \in V), \max_i Y_i(u, v) = \mu(u, v) \quad (uv \in E)$ (برای هر یال $uv \in E$)

(۲) $Y_i \wedge Y_j = \circ$

(۳)

$\min\{Y_i(v_j, v_k) | j = 1, 2, \dots, |v|\}$ ، مجموعه یال های حادث از راس v_j است.

$\min\{Y_i(u), Y_i(v)\} = \circ$ برای رئوس مجاور u و v

حداقل مقدار k برای هر G یک k -رنگ آمیزی کل فازی دارد که توسط $\chi_T(\hat{G})$ نشان داده می شود که عدد رنگی کل فازی از $\hat{G}$ نام دارد. [۵]

مثال ۳.۶.۴. مثال زیر از گراف فازی $\hat{G} = (V, \delta, \mu)$ با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ و مجموعه یال $E = \{v_i v_j | ij \in \{12, 13, 23, 24, 25, 34, 35\}\}$ در نظر بگیرید. تابع عضویت به صورت زیر تعریف می شود.

$$\delta(v_i) = 1 \quad \text{برای } i = 1, 5$$

$$\delta(v_i) = 0.3 \quad \text{برای } i = 2, 3$$

$$\delta(v_i) = 0.2 \quad \text{برای } i = 4$$

$$\mu(v_i, v_j) = 0.3, \quad ij \in \{12, 35\}$$

$$\mu(v_i, v_j) = 0.1, \quad ij \in \{13, 23, 24, 25, 34\}$$

$$\mu(v_i, v_j) = 0, \quad \text{در غیر این صورت}$$

فرض کنید $P = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ یک خانواده از مجموعه‌های فازی باشد که روی $V \cup E$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}
 Y_1(v_i) &= \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0.2 & i = 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} & Y_1(v_i, v_j) &= \begin{cases} 0.3 & ij = 12 \\ 1 & ij = 35 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\
 Y_2(v_i) &= \begin{cases} 0.3 & i = 2 \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} & Y_2(v_i, v_j) &= \begin{cases} 1 & ij = 13, 24 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\
 Y_3(v_i) &= \begin{cases} 0.3 & i = 3 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} & Y_3(v_i, v_j) &= \begin{cases} 0.3 & ij = 25 \\ 1 & ij = 34 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\
 Y_4(v_i) &= \begin{cases} 1 & i = 5 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} & Y_4(v_i, v_j) &= \begin{cases} 1 & ij = 23 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}
 \end{aligned}$$

اینجا ملاحظه می‌کنید که خانواده $\Gamma = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ تعریف رنگ آمیزی مجموع را برآورد می‌کند. بنابراین گراف فازی در این مثال ۴-رنگ آمیزی کل فازی دارد و این کم‌ترین رنگ آمیزی کل فازی است از آنجایی که خانواده کم‌تر از ۴ عضو برآورد نمی‌کند. بنابراین عدد رنگی کل فازی $\chi_T(\hat{G}) = 4$ است.

بهزاد در سال ۱۹۶۵ حدس زد که یک گراف G می‌تواند همیشه به طور کامل با استفاده از بیشتر از دو رنگ از حداکثر درجه در G رنگ شود. حدس رنگ آمیزی مجموع^۹ برای هر گراف ساده G بیان می‌کند: $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. حدس رنگ آمیزی مجموع برای برخی موارد محدود شده از گراف‌های قاطع تایید شده است برای مثال برای گراف‌های قاطع با حداکثر درجه بزرگ اثبات شده است که گراف G یک رنگ آمیزی با بیشتر از $\Delta(G) + 2$ رنگ دارد اگر $\Delta(G) \geq n - 5$ بنابراین

^۹TCC

هر گراف G یک رنگ آمیزی مجموع با بیشتر از $2 + \Delta(G)$ رنگ دارد اگر $\frac{3}{4}n \geq \Delta(G)$ باشد. [۷]

۷.۴ جمع رنگی گراف فازی

تعریف ۱.۷.۴. برای یک k -رنگ آمیزی فازی $\Gamma = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ از گراف فازی G ، Γ -مجموع

رنگی فازی G° به وسیله $\sum_{\Gamma}(G)$ نشان داده می شود که به صورت زیر تعریف می شود: [۴]

$$\sum_{\Gamma}(G) = 1 \sum_{X \in C_1} \theta_1(X) + \dots + k \sum_{X \in C_k} \theta_k(x)$$

به طوریکه $C_i = \sup Y_i$ و $\theta_i(x) = \max\{\sigma(x) + \mu(x, y) | y \in C_i\}$.

تعریف ۲.۷.۴. جمع رنگی فازی G با $\sum(G)$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود: [۴]:

$$\sum(G) = \inf\{\sum_{\Gamma}(G) | \Gamma \text{ یک رنگ آمیزی فازی } G \text{ است}\}$$

تعداد رنگ آمیزی فازی G متناهی است و بنابراین یک رنگ آمیزی فازی Γ وجود دارد به طوری

که کوچکترین مجموع رنگ آمیزی فازی G گفته می شود به طوری که: $\sum(G) = \sum_{\Gamma^*}(G)$

تعریف ۳.۷.۴. قدرت رأسی^{۱۱} از گراف فازی G به وسیله $S(G)$ نشان داده می شود و به صورت زیر

تعریف می شود

$$S(G) = \min\{|\Gamma| | \sum(G) = \sum_{\Gamma}(G)\}$$

این به معنی این است که $S(G)$ حداقل تعداد رنگ هایی است که ما می توانیم با آن مجموع رنگ

آمیزی فازی G را بیابیم. (همانطور که در بالا آمده است) $S(G) \geq \chi(G)$ [۴]

تعریف ۴.۷.۴. فرض کنید G یک گراف فازی و x یک رأس از G باشد. همسایه x در G تعریف

شده است با مجموعه: $N(x) = \{y | xy \text{ یال قوی در } G \text{ است}\}$.

قضیه ۵.۷.۴. فرض کنید G یک گراف فازی و $\Gamma^* = \{Y_1, \dots, Y_s\}$ یک حداقل مجموع رنگ آمیزی

فازی از G باشد آنگاه نتایج درست زیر به دست می آید

^{۱۰} Γ -chromatic fuzzy sum

^{۱۱} vertex-strength

(۱)

$$\sum_{x \in C_1} \theta_1(x) \geq \sum_{x \in C_2} \theta_2(x) \geq \dots \leq \sum_{x \in C_s} \theta_s(x)$$

(۲) فرض کنید $x_0 \in C_i$. آن‌گاه برای هر $i < j$ یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

$$C_j \cap N(x_0) \neq \emptyset \quad (a)$$

$$j[\sum_{x \in C'_j} \theta_j(x) - \sum_{x \in C_j} \theta_j(x)] \geq i[\sum_{x \in C_i} \theta_i(x) - \sum_{x \in C'_i} \theta_i(x)], \quad C_j \cap N(x_0) = \emptyset \quad (b)$$

$\emptyset$

به طوریکه $C'_i = C_i - \{x_0\}$ و $C'_j = C_j \cup \{x_0\}$ [۴].

برهان. فرض کنید که برای برخی $i < j$ داریم $\sum_{x \in C_i} \theta_i(x) < \sum_{x \in C_j} \theta_j(x)$. رنگ آمیزی فازی

$$Y'_r = \begin{cases} Y_r & r \notin \{i, j\}, \\ Y_j & r = i, \\ Y_i & r = j \end{cases} \quad \text{شامل } \Gamma'_0 = \{Y'_1, \dots, Y'_s\} \text{ است که تعریف شده است با}$$

$$\sum_{\Gamma'_0} (G) - \sum_{\Gamma_0} (G) = (i - j) \left[\sum_{x \in C_j} \theta_j(x) - \sum_{x \in C_i} \theta_i(x) \right] < 0$$

بنابراین $\sum_{\Gamma'_0} (G) < \sum_{\Gamma_0} (G)$ که با حداقل بودن Γ_0 متناقض است.

(۲) فرض کنید $i < j$ و $C_j \cap N(x_0) = \emptyset$ رنگ آمیزی فازی را $\Gamma' = \{Y'_1, \dots, Y'_s\}$ را در نظر

بگیرید که با $Y'_k = Y_k$ تعریف شده است اگر $k \notin \{i, j\}$

$$Y'_i(x) = \begin{cases} Y_i(x) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases} \quad Y'_j(x) = \begin{cases} Y_j(x) & x \neq x_0 \\ \delta(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

حال از آنجایی که Γ_0 حداقل رنگ آمیزی است ما داریم

$$0 \leq \sum_{\Gamma'} (G) - \sum_{\Gamma_0} (G) = j \left[\sum_{x \in C'_j} \theta_j(x) - \sum_{x \in C_j} \theta_j(x) \right] - i \left[\sum_{x \in C_i} \theta_i(x) - \sum_{x \in C'_i} \theta_i(x) \right]$$

□

و اثبات کامل می‌شود.

۸.۴ رنگ آمیزی گراف های مسطح قطعی

در این قسمت به بیان تعدادی از قضایای مربوط به رنگ آمیزی گراف های مسطح قطعی می پردازیم:

قضیه ۱.۸.۴. هر گراف ساده مسطح دارای راسی است که درجه ی آن حداکثر پنج است. [۱۲]

قضیه ۲.۸.۴. هر گراف مسطح ۶-رنگ پذیر است. [۱۲]

قضیه ۳.۸.۴. هر گراف مسطح ۵-رنگ پذیر است. [۱۲]

۹.۴ قضیه چهار رنگ

قضیه چهار رنگ یا حدس چهار رنگ از مسائل مشهور و قدیمی ریاضیات است که سال ها اثبات نشده مانده بود. به بیان ساده این قضیه بیان می کند:

برای رنگ کردن هر نقشه به طوریکه کشورها و نواحی همسایه در نقشه هم رنگ نباشند فقط چهار رنگ کافی است. سه رنگ برای نقشه های ساده تر کافیت ولی یک رنگ چهارم اضافی برای برخی نقشه ها لازم است. مثل نقشه هایی که در آن ها یک ناحیه با تعداد فرد نواحی دیگر احاطه شده است که به یکدیگر در یک دایره وصل هستند. قضیه ۵ رنگ که اثباتی کوتاه و ابتدایی دارد، بیان می کند که ۵ رنگ برای رنگ آمیزی نقشه کافیت. این قضیه در اواخر قرن ۱۹ توسط هیوود اثبات شده است. اثبات اینکه ۴ رنگ کافیت بسیار سخت تر است. تعدادی اثبات های غلط و مثال های نقض از زمان ارائه قضیه چهار رنگ در سال ۱۸۵۲ بیان شده اند.

این مسئله به صورت معادله ابتدا در سال ۱۸۵۲ عنوان شد و سرانجام در سال ۱۹۷۶ با کمک رایانه توسط کی ایل و هیکن حل شد. این اولین قضیه مهمی بود که با استفاده از کامپیوتر به اثبات رسید. بیان شهودی قضیه چهار رنگ، یعنی: ”در هر افزای از یک صفحه که نقشه نامیده می شود، هر ناحیه می تواند به طوری رنگ شود که هیچ دو ناحیه مجاوری هم رنگ نباشند و در این رنگ آمیزی از بیشتر از چهار رنگ استفاده نشود“.

یک بیان ساده تر این قضیه به کمک تئوری گراف می باشد. می توان مجموعه نواحی یک نقشه را به یک

گراف بدون جهت نظیر کرد که رأس یک ناحیه و هر یال دو رأس دو ناحیه که مجاور هستند را به هم وصل می‌کند. گراف حاصل مسطح می‌باشد: یعنی این گراف را می‌توان در صفحه نقشه قرار داد و هر رأس را در جای دلخواهی از ناحیه متناظر آن گذاشت، بدون آنکه هیچ دو یالی همدیگر را قطع کنند. از طرفی می‌دانیم هر گراف مسطح ۴- رنگ‌پذیر رأسی است، بنابراین نقشه با در نظر گرفتن کشورها به عنوان رئوس، ۴- رنگ‌پذیر رأسی است اما برای قابل درک بودن بهتر مسئله می‌توان بدین صورت عمل کرد که: دوگان این گراف مسطح را بدست می‌آوریم، طبق تعریف دوگان مسطح، آن نیز مسطح است. کشورهای نقشه را نظیر وجه‌های گراف دوگان در نظر می‌گیریم، بنا به قضیه هر گراف مسطح شده، ۴- رنگ پذیر وجهی است، گراف دوگان مسطح شده که در آن کشورها به عنوان وجه‌ها در نظر گرفته می‌شوند، ۴- رنگ‌پذیر وجهی است. [۱۳]

۱۰.۴ تعمیم برخی مفاهیم گراف فازی مبتنی بر اعداد فازی

مثلثی

در این بخش برخی مفاهیم گراف فازی را مبتنی بر اعداد مثلثی تعمیم می‌دهیم که عدد رنگی گراف فازی همان عدد رنگی گراف زمینه گراف فازی $\tilde{G}$ است که به صورت عدد مثلثی بیان می‌شود. سپس قضایای رنگ‌پذیری برای گراف‌های مسطح را با استفاده از تعریف جدید برای گراف‌های مسطح فازی بیان می‌کنیم.

۱.۱۰.۴ قدرت درجه رأس و وجه در گراف فازی

تعریف ۱.۱۰.۴. فرض کنید $\tilde{G}$ گراف فازی و $v \in V$ رأس گراف فازی $\tilde{G}$ باشد. قدرت درجه رأس v را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{I}_v = \min_{u \in V} \{\mu(u, v)\}$$

تعریف ۲.۱۰.۴. فرض کنید $\tilde{G}$ گراف فازی و f وجه گراف فازی $\tilde{G}$ باشد. قدرت درجه وجه f را

به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{I}_f = \min_{(u,v) \in f} \{\mu(u,v)\}$$

به طوریکه $\mu(u,v)$ تابع عضویت یال هایی است که وجه f بر روی آن ها واقع است.

۲.۱۰.۴ میانگین قدرت درجه رأس و وجه در گراف فازی

تعریف ۳.۱۰.۴. اگر $\tilde{G}$ یک گراف فازی و $v \in V$ رأس گراف فازی $\tilde{G}$ باشد. میانگین قدرت درجه رأس v در گراف فازی $\tilde{G}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$M\tilde{I}_v = \frac{d_{\tilde{G}}(v)}{d_G(v)}$$

به طوریکه $d_G(v)$ درجه رأس v گراف زمینه گراف فازی $\tilde{G}$ و $d_{\tilde{G}}(v)$ درجه رأس گراف فازی $\tilde{G}$ می باشد.

حال اگر $\alpha < 1$ آنگاه خواهیم داشت $M\tilde{I}_v < 1$ باتوجه به این مطلب میتوان به قضیه زیر دست یافت.

قضیه ۴.۱۰.۴. اگر $\tilde{G}$ گراف مسطح فازی با $\alpha < 1$ باشد آنگاه داریم:

$$d_{\tilde{G}}(v) < 5$$

برهان. باتوجه به اینکه $M\tilde{I}_v < 1$ و قضیه ۱.۸.۴، درحالت قطعی $d_G(v) \leq 5$ و درحالت فازی $d_{\tilde{G}}(v) < 5$ می باشد. $\square$

تعریف ۵.۱۰.۴. اگر $\tilde{G}$ یک گراف فازی و f وجه گراف فازی $\tilde{G}$ باشد. میانگین قدرت درجه وجه f در گراف فازی $\tilde{G}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$M\tilde{I}_f = \frac{d_{\tilde{G}}(f)}{d_G(f)}$$

به طوریکه $d_G(f)$ درجه وجه f گراف زمینه گراف فازی $\tilde{G}$ و $d_{\tilde{G}}(f)$ درجه وجه گراف فازی $\tilde{G}$ می باشد.

۳.۱۰.۴ درجه فازی رأس به صورت یک عدد فازی مثلثی

تعریف ۶.۱۰.۴. فرض کنید $\tilde{G}$ گراف فازی و $M\tilde{I}_v$ میانگین قدرت درجه رأس v گراف فازی $\tilde{G}$ باشد. درجه فازی رأس v را به صورت یک عدد فازی مثلثی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{d}_{\tilde{G}}(v) = (M\tilde{I}_v, d_G(v), M\tilde{I}_v)$$

به طوریکه $d_G(v)$ درجه رأس v گراف زمینه گراف فازی $\tilde{G}$ است.

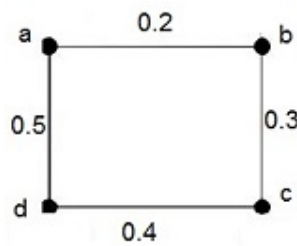
۴.۱۰.۴ درجه فازی وجه

تعریف ۷.۱۰.۴. فرض کنید $\tilde{G}$ گراف فازی و $M\tilde{I}_f$ میانگین قدرت درجه وجه f گراف فازی $\tilde{G}$ باشد. درجه فازی وجه f را به صورت عدد فازی مثلثی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{d}_{\tilde{G}}(f) = (M\tilde{I}_f, d_G(f), M\tilde{I}_f)$$

به طوریکه $d_G(f)$ درجه وجه f گراف زمینه گراف فازی $\tilde{G}$ است.

مثال ۸.۱۰.۴. مثال زیر از گراف فازی را در نظر بگیرید. درجه فازی رئوس و درجه فازی وجه f ، وجه داخلی گراف فازی به صورت زیر بدست می‌آید:



$$M\tilde{I}_a = 0.35 \quad \tilde{d}_{\tilde{G}}(a) = (0.35, 2, 0.35)$$

$$M\tilde{I}_b = 0.25 \quad \tilde{d}_{\tilde{G}}(b) = (0.25, 2, 0.25)$$

$$M\tilde{I}_c = 0.35 \quad \tilde{d}_{\tilde{G}}(c) = (0.35, 2, 0.35)$$

$$M\tilde{I}_d = 0.45 \quad \tilde{d}_{\tilde{G}}(d) = (0.45, 2, 0.45)$$

$$M\tilde{I}_f = 0.35 \quad \tilde{d}_{\tilde{G}}(f) = (0.35, 4, 0.35)$$

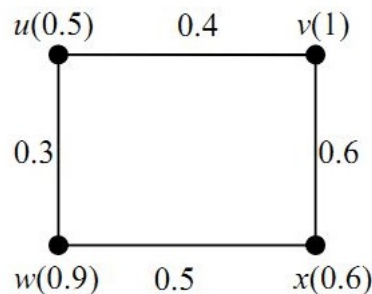
۵.۱۰.۴ تعمیم مفهوم عدد رنگی گراف فازی مبتنی بر اعداد فازی مثلثی

تعریف ۹.۱۰.۴. فرض کنید عدد رنگی گراف زمینه گراف فازی $\tilde{G}$ ، χ_G باشد. اگر $\beta_{\tilde{G}}$ به صورت زیر تعریف شود، $\chi_{\tilde{G}}$ عدد رنگی گراف فازی $\tilde{G}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\beta_{\tilde{G}} = \frac{\sum_{v \in V} \sigma(v)}{n}, \quad \tilde{\chi}_{\tilde{G}} = (\beta_{\tilde{G}}, \chi_G, \beta_{\tilde{G}})$$

به طوریکه n تعداد رئوس و $\sigma(v)$ درجه عضویت رئوس $v \in V$ است.

مثال ۱۰.۱۰.۴. عدد رنگی برای گراف فازی نشان داده شده به صورت زیر بدست می آید:



$$\beta_{\tilde{G}} = ۰/۶۳, \quad \chi_G = ۲, \quad \tilde{\chi}_{\tilde{G}} = (۰/۶۳, ۲, ۰/۶۳)$$

۱۱.۴ چهار رنگ پذیری فازی گراف های مسطح

با توجه به تعریف ۹.۱۰.۴ و قضیه چهار رنگ، گراف های مسطح فازی چهار رنگ پذیر فازی با عدد رنگی فازی مثلثی $(\beta_{\tilde{G}}, ۴, \beta_{\tilde{G}})$ می باشد.

نتیجه ۱۰.۱۱.۴. برای هر گراف مسطح فازی، یک عدد رنگی فازی ۴ (یک عدد فازی مثلثی ۴) متمایز خواهیم داشت.

همچنین قضیه های ۲.۸.۴ و ۳.۸.۴ که برای گراف های مسطح قطعی اثبات شده است، با تعریف جدید نیز می توان برای گراف های مسطح فازی به صورت زیر بیان نمود. هر گراف مسطح فازی $\tilde{G}$ ، ۶-رنگ پذیر فازی با عدد رنگی فازی $(\beta_{\tilde{G}}, ۶, \beta_{\tilde{G}})$ می باشد. هر گراف مسطح فازی $\tilde{G}$ ، ۵-رنگ پذیر فازی با عدد رنگی فازی $(\beta_{\tilde{G}}, ۵, \beta_{\tilde{G}})$ می باشد.

۱۲.۴ تعمیم مفهوم رنگ فازی در گراف‌های فازی

در این بخش ابتدا به تعریف کلاس رنگ‌های فازی می‌پردازیم سپس ارتباط رنگ فازی با گراف فازی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۰۱۲.۴. فرض کنید کلاسی از رنگ‌های فازی به صورت $\tilde{C} = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_k\}$ باشد به‌طوری‌که در آن هر رنگ را به صورت یک مجموعه نرمال رنگ فازی تعریف می‌کنیم:

$$C_i = \{(C_{ij}, \sigma_{ij}) | \sigma_{ij} \in [0, 1], \quad 1 \leq i, j \leq k\}$$

σ_{ij} نشان‌دهنده میزان شدت رنگ C_i است.

۱۰۱۲.۴ ارتباط رنگ فازی با گراف فازی

فرض شود در گراف فازی $\tilde{G}$ ، رأس‌های $i, j \in \tilde{G}$ دارای درجه عضویت‌های به‌ترتیب σ_i و σ_j باشند. اختصاص دو رنگ فازی (C_i, σ_i^*) و (C_j, σ_j^*) به دو رأس مجاور (i, σ_i) و (j, σ_j) مجاز خواهد بود اگر

$$D(\sigma_i^*, \sigma_j^*) \geq \min\{\sigma_i, \sigma_j\}$$

به‌طوری‌که در آن $D(\sigma_i^*, \sigma_j^*) = |\sigma_i^* - \sigma_j^*|$.

۱۳.۴ کاربردها

در نظریه گراف کاربردهای عملی بسیاری وجود دارد. بطور خاص کاربردهای بسیاری برای ساختار گراف‌هایی که در آن‌ها عبور از بین یال‌ها در آن‌ها جایز نیست، وجود دارد از جمله مدارها، مترو، چراغ راهنمایی و عبور از دو اتصال بدان معنی است که خطوط ارتباطی باید در ارتفاع‌های مختلف اجرا شود. برخی مدارات اگر اتصالات آن‌ها در لایه‌های کم‌تری ساخته شود آسان‌تر ایجاد می‌شود. در برنامه‌ریزی شهری بزرگراه‌ها، تونل‌ها، خطوط لوله کشی و خطوط مترو در قرن بیست و یکم بسیار ضروری هستند. با توجه به اینکه عبور شانس حادثه را بالا می‌برد و از سوی دیگر مسیرهای

زیرزمینی باعث کاهش ترافیک می‌شود پس در یک برنامه‌ریزی شهری، راه بدون عبور برای ایمنی مناسب می‌باشد. این برنامه‌های کاربردی، توسط مفهوم گراف مسطح طراحی شده است. اما با توجه به کمبود فضا، آیا عبور از چنین خطوطی مجاز است؟ عبور از یک مسیر شلوغ و یک مسیر خلوت آسان‌تر از عبور از دومسیر شلوغ است. به‌طورکلی از اصطلاحات ”متراکم“، ”بسیارمتراکم“، ”بسیار شلوغ“ و غیره استفاده می‌شود. این اصطلاحات، اصطلاحات زبانی گفته می‌شود و آن‌ها مقادیر عضویت دارند. مسیر شلوغ به مسیر قوی و مسیر خلوت به مسیر ضعیف اشاره می‌کند، شرایط مسیر قوی و مسیر ضعیف منجر به یال قوی و یال ضعیف و اجازه عبور از بین یال‌های قوی و ضعیف منجر به مفهوم گراف مسطح فازی می‌شود.

در این بخش ما به برخی از کاربردهای رنگ‌آمیزی گراف‌های فازی از جمله کاربرد مسئله حداقل رنگ‌آمیزی مجموع (تخصیص منابع) و مسئله چراغ راهنمایی می‌پردازیم که اگر در شرایطی همانند بالا قرار بگیرند، منجر به گراف مسطح فازی می‌شوند.

۱.۱۳.۴ کاربرد مسئله حداقل رنگ‌آمیزی مجموع^{۱۲}

در مسئله حداقل رنگ‌آمیزی مجموع (MSC) ما به دنبال یک رنگ هستیم که جمع رنگ‌های اختصاص داده شده به همه رئوس به حداقل برسد و مسئله MSC در نظریه برنامه‌ریزی یک برنامه طبیعی است. یکی از برنامه‌ها مسئله تخصیص منابع با محدودیت‌های اعمال شده توسط منابع مورد نیاز متضاد است.

برای مثال یک مسئله تخصیص منابع توزیع شده به صورت گراف G نشان داده می‌شود به‌طوری‌که رئوس آن نشان دهنده پردازنده‌ها و یال‌ها نشان دهنده رقابت در منابع است که دورأس مجاور هستند اگر پردازنده مربوطه نتواند کار خود را به طور همزمان انجام دهند. هدف این مسئله به حداقل رساندن متوسط زمان پاسخ یا به عبارت دیگر برای به حداقل رساندن مجموع زمان اتمام کار است. با فرض زمان ثابت برای اجرای کارها این مسئله، مسئله MSC است.

فرض کنید x و y دو وظیفه یک دستگاه واحد باشند به‌طوری‌که دستگاه می‌تواند x و y را به‌طور

^{۱۲}minimum sum coloring problem

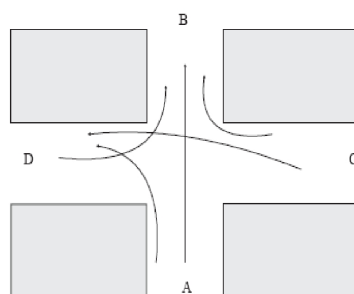
هم‌زمان انجام دهند در این مورد مقدار زمانی که صرف دستگاه در x (یا y) شده است بستگی دارد به مقدار منحصر بفرد زمانی که قبلاً در x (یا y) صرف شده همراه با مقدار تفاوت زمان (تداخل) بین x و y است.

برای حل این مسئله ما گراف $G : (X, \sigma, \mu)$ را تعریف می‌کنیم به طوری که X مجموعه همه وظایف، $\sigma(x)$ مقدار زمان لازم دستگاه برای هر $x \in X$ و $\mu(x, y)$ مقدار تداخل (تفاوت) وظایف x و y است. یافتن حداقل مقدار زمان اتمام کار برای این مسئله معادل مجموع رنگی G است [۴].

۲.۱۳.۴ مسئله چراغ راهنمایی

چراغ راهنمایی می‌تواند به عنوان یک مسئله رنگ آمیزی گراف مدل شود، مثال زیر این روش را نشان می‌دهد. [۶]

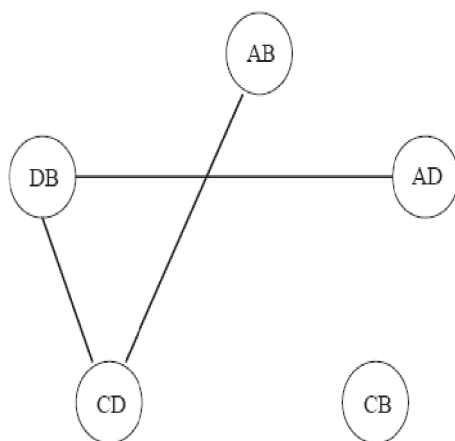
مثال ۱.۱۳.۴. ترافیک در گوشه‌ای از خیابان در شکل زیر به تصویر کشیده شده است. خطوط خاص مانند AD و CB سازگار هستند (نقطه تقاطع ندارند) در حالی که بعضی مانند AB و CD ناسازگار هستند. به منظور جلوگیری از تصادف ما مایل به نصب چراغ راهنمایی برای کنترل وسایل نقلیه هستیم این مسئله را می‌توان با استفاده از گراف ناسازگار $G = (V, E)$ که رئوس به وسیله خطوط نشان داده شده است و اگر ناسازگار باشد (برخورد داشته باشند) یک جفت خطوط یال را مشخص می‌کند در این مثال $V = \{AB, AD, CB, CD, DB\}$ و $E = \{\{AB, CD\}, \{AD, DB\}, \{CD, DB\}\}$ گراف ناسازگار G در شکل ۴.۴ نشان داده شده است.



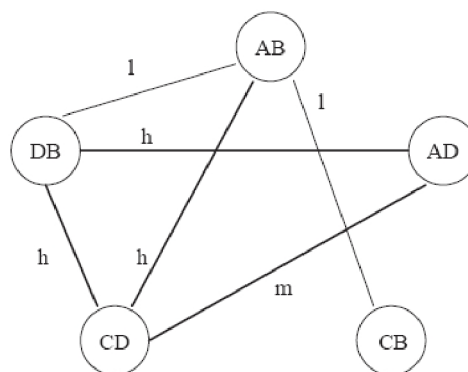
شکل ۴.۴

هر k -رنگ آمیزی C^k از گراف G یک سیاست کنترل سیستم چراغ را شناسایی می کند. کل چرخه به k طول (زمان) تقسیم می شود. برای هر طول زمان $C \in \{1, \dots, k\}$ برای حرکت هایی گردش i ، $C^k(i) = C$ است بنابراین عدد رنگی $\psi(G)$ حداقل زمان مورد نیاز برای کنترل سیستم می باشد. عدد رنگی G هست $\psi(G) = 2$ است یعنی k -رنگ آمیزی وجود دارد به طوری که

$$C^2(AB) = 1, C^2(AD) = 2, C^2(CB) = 1, C^2(CD) = 2, C^2(DB) = 1$$



شکل ۴.۴ (ب) گراف ناسازگار



شکل ۴.۴ (آ) گراف فازی

شکل ۵.۴

در بالا بدیهی است، سیاست های کنترلی به ناسازگاری خطوط بستگی دارند. مفهوم ناسازگاری می تواند فازی و می تواند فارغ از آن باشد سطح امنیت زمانی به حداکثر می رسد که همه خطوط در حالت ناسازگار در نظر گرفته و گراف کامل است. سطح امنیتی حداقل به دست آمده هنگامی اتفاق می افتد که مجموعه یال های ناسازگار خالی است در این مورد تعداد رنگ ۱ است و همه حرکت ها در هر لحظه مجاز است.

مراجع

- [1] N. Abdul-jabbar, J. H. Naoom and, E. H. Ouda, *Fuzzy dual graph*, Journal Of Al-Nahrain University, 12(4), 2009,Pages168-171.
- [2] M. Ananthanarayanan, S.Lavanya, *Fuzzy graph coloring using α -cuts* , International Journal of Engineering and Applied Sciences 2014,Pages23 -28.
- [3] A. Dey, D. Ghosh, A. Pal, *Edge Coloring of a Complement Fuzzy Graph* ,International Journal of Modern Engineering Research (IJMER) ,Vol.2, Issue.4, July-Aug. 2012 Pages1929-1933.
- [4] C. Eslahchi and B. N. Onaghe, *Vertex strength of fuzzy graphs*, Inter- national Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2006, Article ID 43614, 2006, Pages 1-9.
- [5] Z. Fadaie and S. Rahimi, *the proof for result of Euler's formala in fuzzy planar graphs*, (IFSC), Islamic Azad university of Qazvin, 2013.
- [6] S. Firouzian and M. Nouri Jouybari, *Coloring Fuzzy Graphs and Traffic Light Problem*, The Journal of Mathematics and Computer Science, 2011, 2(3), Pages431-435.
- [7] S. Lavanya and R. Sattanathan, *Fuzzy total coloring of fuzzy graphs*, International Journal of Information technology and Knowledge Management, 2009.

- [8] G. Nirmala and K. Dhanabal, *Special planar fuzzy graph configurations*, International Journal of Scientific and Research Publications, 2(7), 2012, Pages 1-4.
- [9] Vitaly I. Voloshin, *graph coloring, History, results and open problems*, Alabama Journal of Mathematics Troy University, Spring 2009 ,Pages1-4.
- [10] S. Samanta and A. Pal and M. Pal, *New concepts of fuzzy planar graphs*, International Journal of Advanced Research in Artificial Intelligence, vol.3, no.1, 2014, Pages52–59.
- [11] M.S. Sunitha, *Studies on fuzzy graphs* ,Department of mathmatics, cochin university of science and technology cochin,APRIL 2001.
- [۱۲] جعفر بی‌آزار، کتاب درآمدی بر نظریه‌ی گراف، ۱۳۸۸.
- [۱۳] دکتر حسین دوستی، کتاب نظریه‌ی گراف و کاربردهای آن، ۱۳۸۴.
- [۱۴] حمید ضرابی زاده، کتاب نظریه‌ی گراف‌ها و کاربردهای آن، ۱۳۷۸.
- [۱۵] حسن رزاقیان، زهرا عباسی و آروین مهدوی، یکریختی گراف فازی و مکمل آن، مقاله کنفرانس بین المللی مدل سازی غیر خطی و بهینه سازی، ۲۰۱۲.
- [۱۶] گراف فازی و برخی از کاربردهای آن، زهره فدائی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد دانشگاه شاهرود، بهمن ۱۳۹۲.
- [۱۷] ماشاالله ماشینچی، حسن حسن‌پور و محبوبه حسن‌یزدی، مقاله آشنایی با حساب اعداد فازی، بهار ۱۳۸۶.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

union	اجتماع
intersecting value	ارزش متقاطع
fuzzy planarity value	ارزش مسطحی فازی
konigsberg bridge	پل کونیسبرگ
membership function	تابع عضویت
fuzzy multigraph	چندگانه فازی
degree of vertex	درجه‌ی یک رأس
fuzzy tree	درخت فازی
maximum spanning tree	درخت فراگیر ماکزیمم
cycle	دور
fuzzy relation	رابطه‌ی فازی
k -fuzzy coloring	رنگ آمیزی فازی
fuzzy vertex coloring	رنگ‌آمیزی فازی رأسی
fuzzy edge coloring	رنگ‌آمیزی فازی یالی
total coloring	رنگ‌آمیزی کلی
edge coloring	رنگ‌آمیزی یالی
fuzzy subset	زیر مجموعه‌ی فازی
fuzzy subgraph	زیرگراف فازی
strenght of connectedness	شدت همبندی
vertex-strength	قدرت رأسی
strength of the fuzzy edge	قدرت یال فازی
strenght of a path	قدرت یک مسیر
strong	قوی
strenght part	قوی‌ترین مسیر

minimum sum coloring problem	کاربرد مسئله حداقل رنگ آمیزی مجموع
complete	کامل
arc	کمان
kuratowski	کوراتوسکی
eulerian graph	گراف اویلری
bipartite graph	گراف دوبخشی
fuzzy graph	گراف فازی
simple fuzzy graph	گراف فازی ساده
regular fuzzy graph	گراف فازی منتظم
hamiltonian fuzzy graph	گراف فازی هامیلتونی
planar graph	گراف مسطح
plane graph	گراف مسطح شده
planar fuzzy graph	گراف مسطح فازی
maximum degree	ماکزیمم درجه
fuzzy Hamiltonian circuit	مدار هامیلتونی فازی
path	مسیر
color four problem	مسئله چهار رنگ
graph coloring problem	مسئله رنگ‌آمیزی گراف
complement fuzzy graph	مکمل گراف فازی
minimum degree	مینیمم درجه
strength	نیرو
connected fuzzy graph	همبند
k-colored	k -رنگ‌پذیر

نمایه

۹. کمان arc

۱۴. گراف دوبخشی bipartite graph

۲. مسئله چهار رنگ color four problem

۱۲. مکمل گراف فازی complement fuzzy graph

۱۰. کامل complete

۱۳. همبند connected fuzzy graph

۹. دور cycle

۱۱. درجه‌ی یک رأس degree of vertex

۳. رنگ‌آمیزی یالی edge coloring

۱۴. گراف اویلری eulerian graph

۵. زیر مجموعه‌ی فازی fuzzy subset

۴۶. رنگ‌آمیزی فازی یالی fuzzy edge coloring

۸. گراف فازی fuzzy graph

۱۳. مدار هامیلتونی فازی fuzzy Hamiltonian circuit

۱۹. چندگانه فازی fuzzy multigraph

۲۲. ارزش مسطحی فازی fuzzy planarity value

۶. رابطه‌ی فازی fuzzy relation

- fuzzy subgraph زیرگراف فازی. ۹
- fuzzy tree درخت فازی. ۱۴
- fuzzy vertex coloring رنگ آمیزی فازی رأسی. ۴۵
- graph coloring problem مسئله رنگ آمیزی گراف. ۳
- hamiltonian fuzzy graph گراف فازی هامیلتونی. ۱۰
- intersecting value ارزش متقاطع. ۲۰
- k -colored k -رنگ پذیر. ۳
- k -fuzzy coloring رنگ آمیزی فازی. ۴۹
- konigsberg bridge پل کونیسبرگ. ۲
- kuratowski کوراتوسکی. ۲۴
- maximum degree ماکزیمم درجه. ۱۱
- maximum spanning tree درخت فراگیر ماکزیمم. ۱۳
- membership function تابع عضویت. ۴
- minimum degree مینیمم درجه. ۱۱
- minimum sum coloring problem کاربرد مسئله حداقل رنگ آمیزی مجموع. ۶۰
- path مسیر. ۹
- planar fuzzy graph گراف مسطح فازی. ۲۰
- planar graph گراف مسطح. ۱۷
- plane graph گراف مسطح شده. ۱۸
- regular fuzzy graph گراف فازی منتظم. ۴۱
- simple fuzzy graph گراف فازی ساده. ۹
- strenght of a path قدرت یک مسیر. ۹

۱۰. شدت همبندی. strenght of connectedness

۱۰. قوی‌ترین مسیر. strenght part

۱۴. نیرو. strength

۲۰. قدرت یال فازی. strength of the fuzzy edge

۱۰. قوی. strong

۳. رنگ‌آمیزی کلی. total coloring

۳۶. اجتماع. union

۵۲. قدرت رأسی. vertex-strength

Aabstract

The present thesis is an attempt to study fuzzy planar graph and the problem of fuzzy planar graph coloring. In this regard, the problems related to definitive planar graph have been extended to fuzzy planar graphs. The first chapter explores the history of the subject and the basic definitions of fuzzy graph. In the second chapter a definition of fuzzy planar graph and its duality, fuzzy multigraphs, 0.67- fuzzy planar graphs and its duality and the extension of Euler's formula to fuzzy graph are discussed. The third chapter deals with the uniformity of planar fuzzy graphs, the extension of kuratowski theorem to fuzzy graphs, union of fuzzy planar graphs and definitions of regular and Platonic fuzzy graphs. In chapter 4, different colorings of alphas-cut fuzzy graphs and some of its applications as well as some concepts of fuzzy graphs such as degree of a vertex, degree of a face, face strength based on triangular fuzzy numbers are addressed. Moreover, the coloring number and the concept of fuzzy coloring of a fuzzy graph based on triangular fuzzy numbers are extended and 4-colored fuzzy and the relation between fuzzy coloring and fuzzy graph are discussed.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

fuzzy planar graph coloring and four-colored fuzzy problem

Supervisor
Dr.sadegh rahimi

by
fariba bastani

2015