دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی**

**عنوان**

# سازگاری و پایداری طرح المان محدود میلستین-گالرکین برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه‌خطی

استاد راهنما

**دکتر علی مس‌فروش**

استاد مشاور

**دکتر مهدی قوتمند**

دانشجو

**عاطفه آزاد**

۱۳۹۳

به امید درک رازهای پنهانی قصیده ی آسمانی عشق

این پایان نامه راکه ذره ای از تلاش آدمی

برای ورود به گوشه ای از منظومه ی پر رمز و راز هستی است را

به پیشگاه پاک اسطوره های صبر و وفاداری

که در عرصه ی زندگی ناملایمات، تلخی ها و سختی ها را بارها و بارها،

برای پیشرفت های بیشتر این حقیر،

به جان خریدند،

**پدر و مادر مهربانم**

و یگانه همراه و شریک زندگی ام،

**همسر نازنینم**

تقدیم می کنم.

# اگر تنهاترین تنها شوم، بازم خدا هست.

تو مهربان جاودان آسیب ناپذیر من هستی. ای پناهگاه ابدی! تو می توانی جانشین همه ی بی پناهی ها شوی. این نگهبان سکوت، شمع جمعیت تنهایی ها، راهب معبد خاموشی ها، سالک راه فراموشی ها، حاجب درگه نومیدی، چشم به راه پیامی، پیکی، گرمی بازوی مهری نیست.

خدایا! رحمتی کن تا ایمان، نام و نان برایم نیاورد. و قوتم بخش تا نانم و حتی نامم را در خطر ایمان افکنم، تا از آن ها باشم که پول دنیا را می گیرند و برای دین کار می کنند، نه از آن ها که پول دین را می گیرند و برای دنیا کار می کنند... چرا روح های بلند و دل های عمیق، اندوه، پاییز، سکوت و غروب را دوست تر می دارند؟ مگر نه این است که در این لحظه هاست، که خود را به مرز پایان این عالم نزدیک تر احساس می کنند؟ از انسان ها غمی به دل نگیر؛ زیرا خود نیز غمگین اند؛ با آن که تنهایند ولی از خود می گریزند زیرا به خود و به عشق خود و به حقیقت خود شک دارند؛

پس دوستشان بدار اگر چه دوستت نداشته باشند...!

به من بگو نگو، نمی گویم

اما نگو نفهم، که من نمی توانم نفهمم

من می فهمم!!! [1]

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی

# سپاس گزاری

سپاس مخصوص خداوندی است که بر من مقدر کرد آن چه را که شاید برای دیگری مقدر نکرده، مرا انتخاب کرد تا در این جایگاه، افتخار علم اندوزی داشته باشم که آن خود سعادت می خواهد. بارالها، خاشعانه بر درگاهت کرنش می کنم که بر من رقم زدی آن میزان توانایی را تا بتوانم در دریای بیکران معرفت غور کنم. باشد که به تو نزدیک تر شوم. تکریم و تعزز فراوان محضر استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علی مس فروش، همچنین استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی قوتمند که زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند، سپاس اندیشه ی تابناکتان که مرا سهیم کردید در شناخت آن چه خود از نشانه های الوهیت و عظمت خداوند مهربان درک کرده اید و این مباهاتی است که نصیب هر کس نمی شود. پدرانه قدم برداشتن در دنیای ریاضیات را بر من آموختید. زبانم قاصر است و کلامم الکن تا سپاسی در خور تقدیمتان دارم. خدا را برایتان آرزو دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را که مشوقم بودند از کودکی تا بیابم تقرب به خداوند را با علم آموزی، و نیز سپاسی تقدیم به همسر مهربانم که هم قدمم بود در نگارش از آغاز تا واپسین لحظات. امیدوارم با تقریر این مکتوب موجبات خوشنودی شان را مهیا کرده باشم.

خاک پای تمامی کسانی که در این موفقیت همراه و یاری گرم بوده اند را طوطیای چشمانم می کنم. باشد که مهرشان را هیچ گاه از یاد نبرم.

عاطفه آزاد
۱۳۹۳

# تعهدنامه

اینجانب **عاطفه آزاد** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **سازگاری و پایداری طرح المان محدود میلستین-گالرکین برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه‌خطی** ، تحت راهنمایی **دکتر علی مس‌فروش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

*عاطفه آزاد*
**۱۳۹۳**

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده


پاسخ عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی، به‌خصوص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی به‌نسبت نسخه‌های غیرتصادفی زمینه‌ای جدید است. تقریبا اکثر الگوریتم‌هایی که جواب‌های نسبتا مناسبی برای معادلات دیفرانسیل معمولی به‌دست می‌دهند، جواب‌هایی ضعیف در برابر نسخه تصادفی آن دارند. از جمله راه‌حل‌های معرفی شده، روش اویلر-مارایوما و روش میلستین و روش رونگه‌کوتا برای معادلات دیفرانسیل تصادفی است. دراین پایان‌نامه عمومی‌ترین روش المان محدود میلستین-گالرکین را در دسته معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه‌خطی به‌کار می‌بریم.

در فصل اول مفاهیم و تعاریف اولیه را بیان نموده و مروری گذرا بر تعاریف معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و مفاهیم نظریه احتمال خواهیم کرد. در فصل دوم طرح اصلی را معرفی کرده و به بیان فرضیات اصلی مورد کاربرد خواهیم پرداخت. همچنین المان‌های مهم روش المان محدود گالرکین را بیان می‌کنیم. در فصل سوم دسته‌ای از طرح‌های یک‌گامی عددی را در فضای هیلبرت معرفی می‌کنیم و تحلیل سازگاری و پایداری را در این چارچوب کار توسعه می‌دهیم و با مجموعه‌ای از شرایط مناسب برای به‌اصطلاح دوپایداری به اتمام می‌رسانیم و تجزیه‌ای از خطای برشی‌محلی ارایه می‌دهیم. در فصل آخر دوپایداری و سازگاری طرح میلستین-گالرکین را بر اساس چارچوب کار طرح عددی بیان می‌کنیم.

# لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. عاطفه.آ، مس‌فروش.ع، ''سازگاری و پایداری طرح المان محدود میلستین-گالرکین برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه‌خطی''، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، شهریور ۱۳۹۳

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# تعاریف و پیش‌نیاز

در این فصل به بیان پیش‌نیازهای لازم در مطالعه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی خواهیم پرداخت. تعاریف در دو بخش آنالیز تابعی و نظریه احتمال به‌صورت جداگانه آورده شده است. برای گردآوری این فصل از مراجع [۱۲، ۱۵، ۱۱، ۲۵] استفاده شده است.

## ۱.۱ آنالیز تابعی

مهم‌ترین ابزار مورد استفاده در این پایان‌نامه، آنالیز تابعی است، لذا در آغاز به بیان تعاریف، قضایا و لم‌هایی می‌پردازیم که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

### ۱.۱.۱ تعاریف اولیه

**تعریف ۱.۱.۱.** (فضای خطی)
$V$ فضای خطی (یا فضای برداری) با اسکالرهای حقیقی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $u, v \in V$ و $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\lambda u + \mu v \in V.$$

**تعریف ۲.۱.۱.** (تابعک خطی)
تابع $L : V \to \mathbb{R}$ را تابعک خطی می‌نامیم هرگاه برای هر $u, v \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v).$$

**تعریف ۳.۱.۱.** (فرم دوخطی)
فرم دوخطی $a(\cdot, \cdot)$ روی $V$ تابعی مانند $a : V \times V \to \mathbb{R}$ است، که نسبت به هر آرگومان خود خطی است، یعنی برای هر $u, v, w \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ روابط زیر برقرار باشند:

۱. $a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w)$.

۲. $a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w, u) + \mu a(w, v)$.

فرم دوخطی $a(\cdot, \cdot)$ را متقارن می‌گوییم هرگاه:

$$a(w, v) = a(v, w), \qquad \forall v, w \in V,$$

و معین‌مثبت گوییم هرگاه:

$$a(v, v) > ۰, \qquad \forall v \in V, \quad v \neq ۰.$$

**تعریف ۴.۱.۱.** (نرم[۱])

نرم را در فضای خطی $V$ به شکل تابع $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}^+$ تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که:

۱. $\|v\| > ۰, \quad \forall v \in V, \quad v \neq ۰$.

۲. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad v \in V$.

۳. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V$ (نامساوی مثلث) .

تابع $| \cdot | : V \to \mathbb{R}$ نیم‌نرم نامیده می‌شود، هرگاه شرایط سه‌گانه بالا برقرار باشند، با تفاوت در شرط اول،

$$|v| \geq ۰, \qquad \forall v \in V.$$

انواع نرم :

- نرم اقلیدسی:

$$\|p\| = \sqrt{p_۱^۲ + p_۲^۲ + \cdots + p_n^۲} = \sqrt{p \cdot p}.$$

$p$ بردار اقلیدسی نامیده می‌شود.

- نرم $L_p$:

$$\|f\|_{L_p} = \left( \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{۱}{p}}, \quad ۱ < p < \infty.$$

- نرم $L_\infty$:

$$\|f\|_{L_\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

**تعریف ۵.۱.۱.** (فضای خطی نورم‌دار)

فضای خطی به همراه نرم، فضای خطی نرم‌دار نامیده می‌شود.

[۱] Norm

**تعریف ۶.۱.۱.** (فضای ضرب داخلی[۲])

فرم دوخطی که روی فضای خطی $V$ معین‌مثبت و متقارن باشد ضرب داخلی روی $V$ نامیده می‌شود.
فضای خطی $V$ به همراه ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.
اگر $V$ فضای ضرب داخلی و $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ضرب داخلی روی $V$ باشد، نرم متناظر با این ضرب داخلی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall v \in V.$$

**لم ۱.۶.۱.۱.** (نامساوی کوشی-شوارتز[۳])

برای هر $v, w \in V$، نامساوی کوشی- شوارتز به صورت زیر است:

$$|\langle w, v\rangle| \leq \|w\|\|v\|.$$

**تعریف ۷.۱.۱.** (دنباله کوشی)

دنباله نامتناهی $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $V$ را همگرا می‌گوییم و با نماد $\lim_{i\to\infty} v_i = v$ نشان می‌دهیم هرگاه:

$$\|v_i - v\| \to 0, \qquad i \to \infty.$$

و همچنین این دنباله کوشی نامیده می‌شود هرگاه:

$$\|v_i - v_j\| \to 0, \qquad i, j \to \infty.$$

**تعریف ۸.۱.۱.** (فضای کامل)

فضای ضرب داخلی $V$، فضای کامل نامیده می‌شود اگر هر دنباله کوشی در $V$ همگرا باشد.

**تعریف ۹.۱.۱.** (فضای هیلبرت[۴])

فضای ضرب داخلی کامل، فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** (فضای باناخ[۵])

فضای نورم‌دار کامل، فضای باناخ نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** (فضای دوگان[۶])

مجموعه همه تابعک‌های خطی کران‌دار روی $V$، فضای دوگان $V$ نامیده شده و با $V^*$ نمایش داده می‌شود.
نرم در $V^*$ به شکل زیر است:

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V}.$$

[۲] Inner Product Space
[۳] Cauchy-Schwarz
[۴] Hillbert Space
[۵] Banach Space
[۶] Dual Space

**قضیه ۱.۱.۱۱.۱.** (نمایش ریتس[۷])

فرض کنید $V$ فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ باشد. برای هر تابعک خطی کران‌دار $L$ روی $V$ یک عضو یگانه $u \in V$ موجود است به‌گونه‌ای‌که برای هر $v \in V$ :

$$L(v) = \langle u, v \rangle.$$

به‌علاوه:

$$\|L\|_{V^\star} = \|u\|_V.$$

**تعریف ۱.۱.۱۲.** (مرز و دامنه)

فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و

$$\mathbb{R}^d = \{(x_۱, x_۲, \cdots x_d)^T,\ x_i \in \mathbb{R}, i = ۱, ۲, \cdots d\}$$

باشد، $\Omega$ دامنه نامیده می‌شود هرگاه، $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز و محدب باشد. این دامنه برای $d = ۱$ بازه، برای $d = ۲$ بخشی از صفحه، و برای $d = ۳$، زیرمجموعه‌ای از فضاست. مرز $\Omega$ را با نماد $\partial\Omega$ یا $\Gamma$ نمایش می‌دهیم. طول، سطح و حجم $\Omega$ با نماد $|\Omega|$ نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۱.۱.۱۳.** (بستار)

اجتماع دامنه $\Omega$ و مرز $\Gamma$ را بستار $\Omega$ می‌نامیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma.$$

**تعریف ۱.۱.۱۴.** (چگال)

زیرفضای $S$ از فضای نرم‌دار $E$ در $E$ چگال است اگر $\bar{S} = E$ .

**تعریف ۱.۱.۱۵.** (معین‌چگال[۸])

عملگر خطی $T$ از فضای خطی توپولوژی $X$ به $Y$ معین‌چگال نامیده می‌شود اگر دامنه $T$ مجموعه چگال در $X$ باشد.

**تعریف ۱.۱.۱۶.** (خودالحاقی[۹])

عملگر خطی معین‌چگال $A$ در $H$ داده شده، الحاق $A^*$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle.$$

**تعریف ۱.۱.۱۷.** (تقریبا همه‌جا[۱۰])

یک خاصیت، تقریبا همه‌جا( $a.e$ ) برقرار است اگر مجموعه نقاطی از $X$ که آن خاصیت برای آن‌ها برقرار نباشد یک مجموعه پوچ شود.

---

[۷] Riesz Representation Theorem

[۸] Given Density

[۹] Self-Adjoint

[۱۰] Almost Everywhere

**تعریف ۱۸.۱.۱.** (کراندار)
فرم دو خطی $a(\cdot,\cdot)$ را کراندار گوییم هرگاه مقدار ثابت $M$ موجود باشد، به گونه‌ای که:
$$|a(v,w)| \leq M\|w\|_V\|v\|_V \qquad \forall v,w \in V.$$

**تعریف ۱۹.۱.۱.** (هموار[۱۱])
یک تابع هموار نامیده می‌شود، هرگاه به اندازه کافی مشتق پیوسته داشته باشد.

**تعریف ۲۰.۱.۱.** (پایداری[۱۲])
یک مساله پایدار نامیده می‌شود هرگاه تغییرات کوچک در داده‌ها، منجر به تغییرات بزرگ در جواب نشود. به نامساوی‌هایی که در سمت چپ تابع جواب و در سمت راست جملاتی بر حسب داده‌های مساله وجود داشته باشد، برآورد پایداری گوییم.

**نکته ۱.۲۰.۱.۱.** مسایل پیوسته باید با مساله گسسته جایگزین شود که جواب آن تقریبی از مساله پیوسته است. این فرآیند را گسسته‌سازی می‌نامیم. روش گسسته‌سازی در حل مسایل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به دو دسته تقسیم می‌شود.
در روش اول که به روش نیم‌گسسته‌سازی معروف است فقط یک متغیر مثلا متغیر مکانی با یک روش مانند روش گالرکین ناپیوسته گسسته‌سازی می‌شود و دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده به کمک یک روش عددی مانند روش رانگ-کوتا حل می‌شود. در روش دوم که به روش گسسته‌سازی کامل معروف است هم متغیر مکان و هم متغیر زمان به کمک روش‌های عددی گسسته‌سازی می‌شوند و دستگاه معادلات خطی (غیرخطی) به‌دست آمده به کمک روش‌های عددی حل می‌شوند.

**تعریف ۲۱.۱.۱.** (شرایط هولدر[۱۳] و لیپ‌شیتس[۱۴])
$f$ در شرط هولدر (هولدر پیوسته) از مرتبه $\alpha$ ، $0 < \alpha \leqslant 1$ روی $[a,b]$ صدق می‌کند اگر ثابت $k > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x,y \in [a,b]$ :
$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|^\alpha.$$

شرط لیپ‌شیتس، شرط هولدر است با $\alpha = 1$ :
$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

لیپ‌شیتس پیوسته حالت قوی‌تری از پیوستگی یکنواخت برای توابع است.

**تعریف ۲۲.۱.۱.** (چند اندیسه[۱۵])
فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ بردار $d$تایی از عناصر صحیح نامنفی است و به $\alpha$ چند اندیسه گفته می‌شود.

[۱۱] Smooth
[۱۲] Stability
[۱۳] Holder
[۱۴] Lipschitz
[۱۵] Multi Index

طول $\alpha$ را با نماد $|\alpha|$ نشان داده و به شکل

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i.$$

تعریف می‌کنیم.

فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ موجود است. مشتقات جزیی از مرتبه $|\alpha|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_d}^{\alpha_d}}.$$

**تعریف ۲۳.۱.۱.** (گرادیان)

اگر $u$ تابع اسکالری باشد گرادیان $u$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla_n u = gradu = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

## ۲.۱.۱ فضاهای تابعی

فضای $C^k$ :

فرض کنید $M \subset \mathbb{R}^d$ . فضای خطی شامل توابع پیوسته روی $M$ را با $C(M)$ نشان داده می‌شود.

برای توابع پیوسته کران‌دار، نرم ماکزیمم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\|v\|_{C(M)} = \sup_{x \in M} |v(x)|.$$

اگر $M$ کران‌دار و بسته باشد یعنی فشرده باشد، آنگاه نرم بالا مقدار ماکزیمم خود را در $M$ می‌گیرد، لذا

$$\|v\|_{C(M)} = \max_{x \in H} |v(x)|.$$

فرض کنید $\Omega$ دامنه‌ای باشد که لزوما کران‌دار نیست و $k$ عددی صحیح و نامنفی باشد. مجموعه توابعی که $k$ بار به‌طور پیوسته در $\Omega$ مشتق‌پذیر باشند با $C^k(\Omega)$ نشان داده می‌شوند.

اگر $\Omega$ دامنه کران‌داری باشد آن‌گاه:

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{v \in C^k(\Omega) : D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}); \forall |\alpha| \leqslant k\}$$

برای توابع در $C^k(\bar{\Omega})$ از نرم زیر استفاده می‌کنیم:

$$\|v\|_{C^k} = \|v\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega})}$$

نیم‌نرم روی $C^k$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$|v|_{C^k} = |v|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| = k} \|D^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega})}$$

که شامل مشتقات $v$ از بالاترین مرتبه می‌باشد.

مجموعه توابع در $C^k(\Omega)$ که در خارج زیرمجموعه فشرده‌ای از $\Omega$ صفر شود را با $C_0^k(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

فضای $L_p$:

فضای $L_P$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$L_p = L_{p(\Omega)} = \{v : \|v\|_{L_p} < \infty\}$$

که در آن،

$$\|v\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty \\ esssup_\Omega(|v(x)|), & p = \infty \end{cases}$$

که esssup کوچکترین عدد $M$ است به‌گونه‌ای که تقریبا همه‌جا $f(x) \leqslant M$ .

در مورد $L_2$، ضرب داخلی به صورت

$$\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega vw\mathrm{d}x$$

تعریف می‌شود که پایه نرم زیر است:

$$\|v\| = \|v\|_{L_2(\Omega)} = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega v^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

فضای سوبولوف[16]:

فضای سوبولوف روی دامنه $\Omega$ برای $k \geq 1$ با نماد $H^k(\Omega)$ نمایش داده می‌شود.
$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : D^\alpha v \in L_2(\Omega),\ |\alpha| \leq k\}.$

ضرب داخلی برای این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle v, w\rangle_k = \langle v, w\rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha w \mathrm{d}x.$$

نرم در فضای سوبولوف به‌صورت

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = \langle v, v\rangle_k^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

و نیم‌نرم در این فضا

$$|v|_k = |v|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla v\|.$$

تعریف می‌شود.

در دو حالت خاص اگر $k = 0$ آنگاه:

$$H^\circ = H = L_2, \quad \|v\|_{H^\circ} = \|v\|_{L_2},$$

و اگر $k = 1$ آنگاه:

$$H^1 = \{v \in L_2, D^\alpha v \in L_2, |\alpha| \leq 1\}.$$

[16]Sobolev Space

همچنین $H_0^1$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_0^1 = \{v \in H^1, v|_\Gamma = 0\}.$$

**تعریف ۲۴.۱.۱.** ($p$-انتگرال‌پذیر)
برای $1 < p < \infty$ تابع $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را به‌طور موضعی $p$-انتگرال‌پذیر گوییم ، $v \in L_p(\Omega)$ هرگاه برای هر $X \in \Omega$ همسایگی باز $\Omega'$ حول $X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$v \in L_p(\Omega') \qquad , \qquad \bar{\Omega}' \subset \Omega$$

**تعریف ۲۵.۱.۱.** ( نظم[17])
اگر $\Gamma$ هموار باشد ( یا چندضلعی محدب باشد) آنگاه جواب $u \in H^2$ بوده، ثابت مستقل از $f$ مانند $C$ به‌گونه‌ای موجود است که:

$$\|u\|_2 \leqslant C\|f\|.$$

**تعریف ۲۶.۱.۱.** (تصویر متعامد)

- فرض کنید $\mathcal{R}_h : H_0^1 \to s_h$ تصویر متعامد متناظر به ضرب داخلی باشد به‌گونه‌ای‌که برای هر $\phi \in A_h, v \in H_0^1$ اگر $a(\mathcal{R}_h v - v, \phi) = 0$ آنگاه:

$$a(\mathcal{R}_h v, \phi) = a(v, \phi).$$

دراین‌صورت $\mathcal{R}_h$ را نگاشت ریتس [18] می‌نامیم.

- تصویر متعامدکه به شکل $P_h : L_2(\Omega) \to A_h$ نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

برای هر $v \in L_2(\Omega)$ و $\psi \in A_h$ اگر $\langle P_h v - v, \psi\rangle = 0$ آنگاه:

$$\langle P_h v, \psi\rangle = \langle v, \psi\rangle.$$

**قضیه ۱.۲۶.۱.۱.** (نامساوی هولدر[19])
فرض کنید $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $1 < p, q < \infty$، باشد. اگر $g \in L_q(\mathbb{R})$ ،$f \in L_p(\mathbb{R})$ آنگاه $fg \in L_1(\mathbb{R})$ و

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p}\|g\|_{L_q}.$$

**لم ۱.۲۶.۱.۱.** (پوانکاره[20])
اگر $\Omega \subset \mathbb{R}^n$، دامنه کراندار باشد. آنگاه ثابت $C = C(\Omega)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

[17] Regularity

[18] Riesz Projector

[19] Holder Inequality

[20] Poincare

**قضیه ۲.۲۶.۱.۱.** (مقدار میانی [۲۱])

اگر $f$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی $(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد ثابت $C$ وجود دارد که $a<c<b$ به‌طوری‌که:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

**تعریف ۲۷.۱.۱.** (عملگر هیلبرت-اشمیت[۲۲])

فرض کنید $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ پایه‌های متعامد در $U$ باشند. عملگر $A\in L(U,H)$ ، هیلبرت-اشمیت نامیده می‌شود اگر

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle Ae_k,Be_k\rangle<\infty.$$

تعریف عملگر هیلبرت-اشمیت و عدد $\|A\|_{L_۲}:=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\|Ae_k\|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$ مستقل از انتخاب پایه هستند. بنابراین فضای $L_۲(U,H)$ از همه عملگرهای هیلبرت-اشمیت از $U$ به $H$ همراه با ضرب داخلی

$$\langle A,B\rangle_{L_۲}:=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle Ae_k,Be_k\rangle.$$

فضای هیلبرت مجزا می‌شود.

**لم ۱.۲۷.۱.۱.** (رابطه پارسوال[۲۳])

برای مجموعه متعامد $\{\varphi_j\}_{j=۱}^{\infty}$ داریم:

$$\sum_{j=۱}^{\infty}\langle v,\varphi_j\rangle^۲=\|v\|^۲.$$

مجموعه متعامد $\{\varphi_j\}_{j=۱}^{\infty}$ پایه متعامد می‌باشد اگر وتنها اگر برای هر $v\in H$ رابطه پارسوال برقرار باشد.

### ۳.۱.۱ معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل رابطه‌ای میان تابع مجهولی از یک یا چند متغیر مستقل و مشتق‌های مرتبه‌های مختلف آن نسبت به متغیرهای مستقل است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت - در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی - طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند. کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین در ریاضیات به‌ویژه در هندسه و نیز در مهندسی و اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر علوم فراوان‌اند.

معادلات دیفرانسیل در بسیاری پدیده‌های علوم رخ می‌دهد. هر زمان که رابطه‌ای بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود داشته باشد و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌ها یا حالات مختلف شناخته شده باشد می‌توان آن پدیده را با معادله دیفرانسیل بیان کرد. معادلات دیفرانسیل به‌طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

[۲۱] The Mean Value

[۲۲] Hilbert-Schmidt Operator

[۲۳] Parseval Identity

۱. (معادلات دیفرانسیل معمولی[۲۴])

در این نوع معادلات، تابع جواب دارای تنها یک متغیر مستقل است. به این معادلات به اختصار ODE گفته می شود.

۲. (معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی[۲۵])

این معادلات، زبانی برای فرمول‌بندی بسیاری از مساله‌های مهندسی و علمی است، که در پیش‌بینی و کنترل خواص دینامیکی و استاتیکی ساختمان‌ها، گرم کردن و ذوب کردن فلزات، زدودن آلودگی هوا و آب در تسهیلات شهری، عکس‌برداری تشدید مغناطیسی و ... به کار می‌رود.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل هستند که در آن، توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزیی توابع نسبت به آن متغیرها، وجود داشته باشد. به این معادلات به اختصار PDE گفته می‌شود.

صورت کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی برای تابع $u$ از دو متغیر مستقل $x$ و $y$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}, \cdots) = ۰.$$

بالاترین مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن گویند. اگر در معادله دیفرانسیلی متغیر وابسته یا مشتق‌هایش به توان نرسیده یا در هم ضرب نشده باشد، معادله خطی و در غیر این صورت غیر خطی است. ضرایب این معادلات می‌تواند ثابت یا متغیر باشند.

تنها تفاوت بین معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی این است که معادلات دیفرانسیل معمولی اغلب در سیستم‌های دینامیکی یک‌بعدی مدل‌بندی می‌شود و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی در سیستم‌های چندبعدی.

**تعریف ۲۸.۱.۱.** (شرایط اولیه)
به شرایطی که مقادیر تابع یا مشتقات جزیی آن در یک ناحیه داده شده در زمان شروع ($t = ۰$) را نشان دهد، شرایط اولیه گفته می‌شود.

**تعریف ۲۹.۱.۱.** (شرایط مرزی)
به شرایطی که مقادیر تابع یا مشتقات جزیی آن را در نقاط مرزی نشان می‌دهد، شرایط مرزی گفته می‌شود.

**سه عمگر اصلی در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی:**

- عملگر لاپلاس $\Delta_n = \frac{\partial^۲}{\partial x_۱^۲} + \cdots + \frac{\partial^۲}{\partial x_n^۲}$.
- عملگر پخش یا انتشار $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_t} - \Delta_n$.

[۲۴] Ordinary Differential Equation

[۲۵] Partial Differential Equation

- عملگر دالامبرت $\Delta_n - \frac{d^2}{d_t^2}$.

که در آن $\Delta_n = \nabla_n . \nabla_n$.
به طور کلی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به سه رده کلی زیر تقسیم می‌شود:

۱. مسائل مقدار اولیه(IVP)[۲۶]
در این دسته از مسایل همواره یک معادله دیفرانسیل با شرط اولیه همراه است، این شرط اولیه به شکل $u(x_0) = u_0$ است.

۲. مسائل مقدار مرزی(BVP)[۲۷]

- در $\mathbb{R}$: یک BVP در $\mathbb{R}$ باید در مقادیر روی مرز، یعنی نقطه ابتدا و انتهای بازه تعریف و مقدار $u$ مشخص باشد.
- در $\mathbb{R}^n$: مقدار $u$ باید روی سرتاسر مرز ناحیه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ که آن را با نماد $\Gamma$ نشان می‌دهیم، معلوم باشد.

۳. مسائل مقدار ویژه

**شرایط مرزی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی:**

۱- شرط مرزی دیریکله[۲۸]

$$u(x,t) = f(x), \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma, \quad t > 0.$$

۲- شرط مرزی نویمن[۲۹]

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u = g(x), \quad x \in \Gamma$$

که $\vec{n}$ بردار خارجی عمود بر $\Omega$ در $x \in \Gamma$ است.

۳- شرط مرزی روبین[۳۰]

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k \cdot u(x,t) = g(x), \quad k > 0 \quad x \in \Gamma$$

[۲۶] Initial Value Problems
[۲۷] Boundary Value Problems
[۲۸] Dirichlet Boundary Condition
[۲۹] Neumans Boundary Condition
[۳۰] Robin Boundary Condition

**نکته ۱.۲۹.۱.۱.** نیم‌گروه تحلیلی نوع خاصی از نیم‌گروه پیوسته قوی است، ولی در مقایسه نیم‌گروه تحلیلی نظم جواب مساله مقدار اولیه را بهتر ارایه می‌دهد.

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی

- خطی نامیده می شود اگر

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)D^\alpha u(x) = f(x).$$

که $a_\alpha$(با $|\alpha| \leq k$، $\alpha$ چنداندیسی است ) و $f$ تابع داده شده است. اگر $f \equiv ۰$ آنگاه خطی همگن است.

- نیمه‌خطی است اگر

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u(x) + E_\circ(x, u(x), Du(x), \cdots, D^{k-۱}u(x)) = ۰.$$

- شبه‌خطی است اگر

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), \cdots, D^{k-۱}u(x))D^\alpha u(x) + E_\circ(x, u(x), Du(x), \cdots, D^{k-۱}u(x)) = ۰.$$

## روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

امروزه روش‌های عددی یکی از متداول‌ترین و محبوب‌ترین روش‌ها برای تحلیل بسیاری از مسایل مهندسی می‌باشند، زیرا در مقابل روش‌های تجربی و آزمایشگاهی هزینه‌های بسیار کمتری در پی دارند. علاوه بر این بسیاری از قطعات صنعتی آنچنان باارزش و کمیاب هستند که قرار دادن آن‌ها در شرایط آزمایشگاهی جهت تجزیه و تحلیل آن‌ها، بسیار پرخطر و عملا ناممکن است.

روش‌های عددی به حافظه سخت‌افزاری و قدرت پردازش بالایی نیاز دارند و ازین‌رو با گذر زمان و پیشرفت رایانه‌ها بیش از پیش مورد استقبال قرار گرفتند، به همین دلیل روش‌های عددی روزبه‌روز در حال گسترش هستند. روش‌های عددی متداول برای حل مسایل مهندسی را می‌توان به سه گروه عمده زیر تقسیم‌بندی نمود:

۱. روش تفاضلات محدود[۳۱]

۲. روش المان‌های محدود[۳۲]

۳. روش المان مرزی[۳۳]

[۳۱] Finite Difference Method

[۳۲] Finite Element Method

[۳۳] Boundary Element Method

۰۱ در روش تفاضلات محدود با شبکه‌بندی ناحیه مورد نظر، یک سری گره[۳۴] در ناحیه ایجاد می‌شود. در این روش پس از تبدیل معادلات حاکم به یک سری معادلات دیفرانسیلی، مشتقات مورد نظر را با استفاده از سری تیلور[۳۵] به شکل تفاضلات محدود تبدیل کرده و روی هریک از این گره‌ها اعمال می‌نمایند. این روش در حالت کلی ساده‌تر از دو روش دیگر می‌باشد. از معایب عمده این روش، ضعف آن در تحلیل مسایل با هندسه پیچیده می‌باشد.

۰۲ در روش المان‌های محدود ، با تقسیم ناحیه به تعداد محدودی المان‌های کوچک و اعمال معادلات حاکم روی هریک از این المان‌ها، مساله حل می‌شود. این روش، دیگر محدودیت‌های روش تفاضلات محدود را نداشته و کارایی مناسب برای تحلیل مسایل با هندسه‌های پیچیده را دارا می‌باشد.

۰۳روش المان مرزی همان‌گونه که از نامش پیداست با تبدیل معادلات حاکم به فرم معادلات انتگرالی که بر روی سطح (مرز ناحیه) تعریف شده‌اند، به حل مساله می‌پردازد. در این روش با تقسیم مرز مساله به تعداد محدودی المان، انتگرال‌های فوق روی این المان‌ها، با روشی عددی یا تحلیلی تعیین و بدین وسیله مجهولات روی مرز مشخص می‌شوند. با تعیین این مجهولات دیگر مقادیر تابع در هر نقطه داخلی قابل تعیین می‌باشد.

در این پایان‌نامه، برای حل معادلات از روش ترکیبی المان محدود میلستین–گالرکین[۳۶] استفاده می‌شود. برای شروع روش المان‌های محدود را معرفی کرده، سپس روش گالرکین را تعریف می‌کنیم.

## روش المان‌های محدود

روش اجزای محدود یا روش المان‌های محدود که به اختصار FEM نامیده می‌شود، روشی عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و نیز حل معادله‌های انتگرالی است.

همگام با رشد علوم و فناوری، مسایل مهندسی نیز روزبه‌روز پیچیده‌تر می‌شوند. با پیچیده‌تر شدن مسایل و لزوم حل سریع‌تر و دقیق‌تر آن‌ها، روش‌های تحلیلی، دیگر جواب‌گوی نیازهای روز افزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره سعی می‌کنند در کنار توسعه مبانی علوم، روش‌های عددی را نیز توسعه بخشند.

روش المان‌های محدود، یکی از روش‌هایی است که کاربرد فراوانی در حل مسایل بسیاری از رشته‌های مهندسی و به‌خصوص مسایل مکانیک جامدات دارد. این روش برای آنالیز طیف وسیعی از مسایل تنش و تغییر شکل سازه ساختمان، پل، هواپیما و اتومبیل تا حل مسایل انتقال حرارت، میدان مغناطیسی، نشت و سایر مسایل علمی و مهندسی به‌کار می‌رود. این روش در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مفید می‌باشد به‌خصوص روی

- دامنه‌های پیچیده ( مانند وسایل نقلیه و لوله‌های انتقال نفت )

- دامنه متغیر

[۳۴] Node

[۳۵] Taylor Series

[۳۶] Milestein-Galerkin Finite Element

- وقتی‌که دقت بالا در همه جای دامنه الزامی نیست

- زمانی‌که نتایج، همبستگی و یکنواختی کافی را ندارند

به عنوان مثال در شبیه سازی یک تصادف در قسمت جلوی ماشین، نیازی به دقت بالای نتایج در عقب ماشین نیست، همچنین در شبیه سازی و پیش بینی هوا روی کره زمین، هوا روی خشکی‌ها اهمیت بیشتری از هوای روی دریاها دارند.

## تاریخچه روش المان‌های محدود

روش المان‌های محدود برای اولین بار در سال ۱۹۴۳ توسط ریاضیدان آلمانی، ریچارد کورانت [۳۷] پیشنهاد شد [۱۳]. او معادله پوآسون را بر اساس مینیمم‌سازی تقریب‌های قطعه‌ای‌خطی روی زیردامنه‌های متناهی حل کرد. بااین‌حال تا سال ۱۹۵۰ که مهندسان از این روش در صنعت هواپیماسازی استفاده کردند، به‌طور جدی روی آن کار نشد.

در تعدادی از مقاله‌های جدیدتر توسط آرگیریز [۳۸] و کلسی [۳۹] [۲۱، ۵] ، تورنر [۴۰] ، کلوچ [۴۱] ، مارتین [۴۲] و تاپ [۴۳] [۲۲] در مورد روش المان محدود بحث شده است. نام روش المان محدود در سال ۱۹۶۰ توسط کلوچ استفاده شده است [۳۹]. کمی بعد اولین کتاب راجع به این موضوع توسط زینکویز [۴۴] [۲۸] نوشته شد. آنالیز ریاضی این روش در سال ۱۹۶۰ ارایه شد. در سال ۱۹۶۲ فردریک [۴۵] با استفاده از توابه قطعه‌ای‌خطی روی مثلث‌ها یک سیستم از معادلات را برای حل مسایل روی دامنه کلی به‌دست آورد. او همچنین همگرایی را در فضاهای $H^1$ و $L^2$ ثابت کرده ولی سرعت همگرایی را درنظر نگرفته است.

روش المان محدود در سال ۱۹۴۳ پیشنهاد شد و پیشرفت‌های چشمگیری در زمینه نظریه ریاضی و تخمین خطای آن به‌دست آمده که باعث شده است امروزه به‌طور قابل ملاحظه‌ای در مسایل مختلف به‌کار رود.

با این‌که روش کار این دانشمندان با هم کاملا متفاوت بود اما یک ویژگی مشترک داشت:

**تقسیم یک دامنه پیوسته به یک سری زیردامنه به نام المان.**

---

[۳۷] Richard Courant

[۳۸] Argyris

[۳۹] Kelsey

[۴۰] Turner

[۴۱] Clough

[۴۲] Martin

[۴۳] Topp

[۴۴] Zienkiewiez

[۴۵] Friedrichs

### ۴.۱.۱ روش گالرکین

این روش نخستین بار در سال ۱۹۱۵ توسط گالرکین معرفی شد. اساس این روش مبتنی بر یافتن تقریبی برای جواب است به‌گونه‌ای‌که:

- به‌سادگی بتوان از آن مشتق یا انتگرال گرفت.
- با مجموعه‌ای از توابع پایه‌ای تقریبا متعامد با بعد متناهی تولید شوند.

در آنالیز عددی، روش گالرکین برای تبدیل مساله پیوسته به مساله گسسته به‌کار می‌رود. در فصل بعدی المان‌های مهم این روش را ارایه می‌دهیم.

## ۲.۱ نظریه احتمال

نظریه احتمال مطالعه رویدادهای احتمالی از دیدگاه ریاضیات است. به‌عبارت دیگر، نظریه احتمال به شاخه‌ای از ریاضیات گویند که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارند. هسته نظریه احتمال را متغیرهای تصادفی و فرآیندهای تصادفی و پیشامدها تشکیل می‌دهند.

### ۱.۲.۱ تعاریف اولیه

**تعریف ۱.۲.۱.** (آزمایش تصادفی)
به آزمایشی که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش مشخص نیست و بتوان آن آزمایش را در شرایط یکسان و به دفعات مختلف انجام داد آزمایش تصادفی گوییم.

**تعریف ۲.۲.۱.** (فضای نمونه)
در نظریه احتمال، فضای نمونه مجموعه تمام نتایج ممکن از یک آزمایش تصادفی (پدیده تصادفی) است که آن را با نماد $S$ و $\Omega$ یا $U$ نشان می‌دهند.
در یک رویکرد ساده به احتمالات، هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه را می‌توان یک پیشامد نامید.

**تعریف ۳.۲.۱.** (متغیر تصادفی)
تابعی که در فضای نمونه بر اعداد حقیقی تعریف شده، متغیر تصادفی نامیده می‌شود. یعنی هر عضو از فضای نمونه را به یک عدد حقیقی مربوط می‌کند. متغیر تصادفی را معمولا با $X$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۴.۲.۱.** (میدان[۴۶])
$\mathcal{F}$ میدان است اگر:

-۱

$$\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$$

[۴۶] Field

۲- اگر $A \in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{F}$ پس

$$A \cup B \in \mathcal{F}, \qquad A \cap B \in \mathcal{F}, \qquad A / B \in \mathcal{F}$$

هر افرازی از $\Omega$ ، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های جامع و درعین‌حال منحصربه‌فرد به صورت $\{D_0, \cdots, D_T\}$ است که:

$$D_i \cap D_j = \emptyset, \qquad \bigcup_i D_i = \Omega, \qquad i, j = 0, \cdots, T$$

اگر $\Omega$ متناهی باشد، هر میدان از یک میدان تولید می‌شود یعنی $\mathcal{F}_0, \cdots, \mathcal{F}_T$ .

**تعریف ۵.۲.۱.** (فضای احتمال[۴۷])
در نظریه احتمال، فضای احتمال ساختار ریاضی است که فرآیندی در دنیای واقعی (یا آزمایش) را شامل حالاتی که به صورت تصادفی رخ می‌دهند، فرمول‌بندی می‌کند.
فضای احتمال شامل ۳ قسمت:

۱ فضای نمونه، $\Omega$ .

۲ مجموعه‌ای از میدان‌ها، $\mathcal{F}$ .

۳ تخصیص احتمال در میدان، $P$.

**تعریف ۶.۲.۱.** (فیلتر[۴۸])
فیلتر $\mathbb{F}$ مجموعه‌ای از میدان‌هاست

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_t, \cdots, \mathcal{F}_T\} \qquad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$$

**تعریف ۷.۲.۱.** (فرآیند تصادفی)
مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی با اندیس مرحله یا زمان را فرآیند تصادفی گوییم که وضعیت یک پدیده یا آزمایش تصادفی را در طول دوره نمایش می دهد. فرض کنید $t$ متغیر زمان و $X(t)$ متغیر تصادفی متناسب با $t$ باشد. در این صورت فرآیند تصادفی، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t)\}$ است که در آن $X(t)$ به ازای هر $t \in \{0, \cdots, T\}$ روی $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ متغیر تصادفی است.

**تعریف ۸.۲.۱.** (فیلتر تولید شده توسط فرآیند تصادفی)
فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ و فرآیند تصادفی $\{X(t)\}$ داده شده باشد. همچنین فرض کنید

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}).$$

میدان تولید شده توسط متغیر تصادفی $X_s$ ، $s = 0, \cdots, t'$ باشد . واضح است $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$ . این فیلتر، فیلتر نرمال از فرآیند $\{X(t)\}$ نامیده می‌شود.

---

[۴۷] Probability Space

[۴۸] Filtration

**تعریف ۹.۲.۱.** (اندازه‌پذیری)
اگر $\Omega$ فضای نمونه متناهی باشد، تابع $X$تعریف شده روی $\Omega$ مقادیر عددی را به هر $w \in \Omega$ وصل می‌کند. چون $\Omega$ متناهی است، $X$ فقط به‌طور متناهی تعدادی مقادیر $x_i, i = ۱, \cdots, k$ را می‌گیرد.
اگر میدان پیشامد $\mathcal{F}$ معین باشد، هر مجموعه در آن را مجموعه اندازه‌پذیر می‌گوییم. تابع $X$ روی $\Omega$ را $\mathcal{F}$–اندازه پذیر[۴۹] یا متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F})$ می نامیم.

**نکته ۱.۹.۲.۱.** فرآیند تصادفی را سازگار با فیلتر $\mathbb{F}$ گوییم اگر برای هر $t = ۰, ۱, \cdots, T$ ، $X(t)$ متغیر تصادفی روی $\mathcal{F}_t$ باشد یعنی اگر $X(t)$ ، $\mathcal{F}_t$–اندازه‌پذیر باشد.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** (فرآیند قابل پیش‌بینی)
فرض کنید فیلتر$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_۰, \mathcal{F}_۱, , \cdots, \mathcal{F}_t, \cdots, \mathcal{F}_T)$ داده شده باشد. فرآیند $H_t$ را قابل پیش‌بینی نامند (نسبت به این فیلتر) اگر برای هر $t$ ، $H_t$ ، $\mathcal{F}_{t-۱}$–اندازه‌پذیر باشد.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** ($\sigma$–جبر[۵۰])
جبری است با شرایط

۱–

$$\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$$

۲–

$$A \in \mathcal{F} \to \bar{A} \in \mathcal{F}$$

۳–

$$A_۱, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{F} \to \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \qquad (\bigcap_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{F})$$

هر زیرمجموعه $B$ از $\Omega$ که متعلق به $\mathcal{F}$ است را مجموعه اندازه‌پذیر گوییم.

**تعریف ۱۲.۲.۱.** ($\sigma$–جبر بورل[۵۱] )
فرض کنید $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $C$ دسته تمام بازه‌ها باشد. کوچک‌ترین $\sigma$–جبر تولید شده توسط $C$ را $\sigma$–جبر بورل می‌نامیم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱۳.۲.۱.** ( تقریبا به‌طورحتم[۵۲] )
فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال باشد. پیشامد $E \in \mathcal{F}$ تقریبا به‌طورحتم $(a.s)$ اتفاق می‌افتد اگر $P[E] = ۱$ . اگر پیشامد به اندازه احتمال $P$ وابسته باشد، گوییم پیشامد $P - a.s$ رخ می‌دهد.

[۴۹] $\mathcal{F}$-measurable
[۵۰] $\sigma$-algebra
[۵۱] Borel
[۵۲] almost surely

**تعریف ۱۴.۲.۱.** (امید ریاضی[۵۳])

اگر $X$ متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F})$ و $p$ احتمال روی $\mathcal{F}$ باشد. امید ریاضی $X$ برابر است با:

$$\mathbb{E}X = \int X(w)\mathrm{d}p(w).$$

**تعریف ۱۵.۲.۱.** (امید ریاضی شرطی)

فرض کنید $X$ مقادیر $x_1, \cdots, x_k$ را می‌گیرد و میدان $\mathcal{G}$ با افراز $\{D_1, \cdots, D_k\}$ از $\Omega$ تولید شده باشد. امید ریاضی شرطی $X$ به‌شرط $\mathcal{G}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\| = \mathbb{E}(\|X\||\mathcal{G}).$$

**تعریف ۱۶.۲.۱.** ( واریانس[۵۴])

واریانس متغیر تصادفی $X$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$$

**تعریف ۱۷.۲.۱.** (کوواریانس[۵۵])

کوواریانس دو متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر $X$ و $Y$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

**تعریف ۱۸.۲.۱.** (عملگر کوواریانس)

برای اندازه احتمال $P$ روی فضای هیلبرت $H$ با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ، برای هر $x, y, z$ در $H$ کوواریانس $P$ فرم دوخطی $cov : H \times H \to \mathbb{R}$ است به صورت:

$$cov(x, y) = \int_H \langle x, z\rangle\langle y, z\rangle \mathrm{d}P(z).$$

عملگر کوواریانس $Q$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$cov(x, y) = \langle Qx, y\rangle.$$

با قضیه نمایش ریتس می‌توان نشان داد که عملگر $Q$ وجود دارد اگر $cov$ کران‌دار باشد. ازاین‌رو، $cov$ متقارن است:

$$(x, y) \in H \mapsto \langle Qx, y\rangle_H$$

هم‌چنین برای هر $x \in H$ داریم:

$$\langle Qx, y\rangle_H \geqslant 0$$

پس $Q$ نیمه‌معین‌مثبت است.

**تعریف ۱۹.۲.۱.** (حرکت براونی[۵۶])

فرآیند تصادفی $\{X(t), t \geqslant 0\}$ را یک حرکت براونی گوییم هرگاه:

[۵۳] Expectation

[۵۴] Variance

[۵۵] Covariance

[۵۶] Brownian Motion

۱. $X(t)$ دارای نموهای مستقل باشد یعنی به ازای هر $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ، متغیرهای تصادفی
$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$
مستقل باشند. به‌عبارت دیگر، تغییرات مقادیری آن روی فاصله‌های زمانی نامتداخل، مستقل باشند.

۲. $X(t)$ دارای نموهای نرمال مانا باشد یعنی $X(t) - X(s), s \leqslant t$ برای تمام $t$ها دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ باشد. نمو مانا یعنی توزیع تغییرات مقادیر در بین هر دو نقطه فقط به فاصله آن دو نقطه بستگی داشته باشد.

۳. $X(t)$ تابعی پیوسته از $t$ باشد.

**تعریف ۲۰.۲.۱.** ( فرآیند وینر[۵۷] )
اگر حرکت براونی در نقطه صفر شروع شود $(X(0) = 0)$ آنگاه فرآیند را حرکت براونی استاندارد یا فرآیند وینر گویند و با $W$ نشان می‌دهند.

**تعریف ۲۱.۲.۱.** ( فرآیند $Q$-وینر)
فرآیند تصادفی $W(t), t \in [0, T]$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ، فرآیند $Q$-وینر (استاندارد) نامیده می‌شود اگر

۱.
$$W(0) = 0.$$

۲. $W$ مسیر پیوسته $P - a.s$ باشد.

۳. نموهای $W$مستقل و مانا باشند.

۴. نموها برای هر $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ قانون گاوسی زیر را داشته باشند:
$$P \circ (W(t) - W(s))^{-1} = N(0, (t-s)Q).$$

**تعریف ۲۲.۲.۱.** (الگوریتم مونت‌کارلوی چندسطحی[۵۸])
الگوریتم مونت‌کارلو، الگوریتم تصادفی است که در زمان اجرا، غیراحتمالی است اما خروجی ممکن است با احتمال معینی ( به‌طور معمول کوچک ) نادرست باشد.
طرح مونت‌کارلوی شبیه‌سازی شده با گام زمانی متفاوت $h_\ell = 2^{-\ell}T, \ell = 0, \cdots, L$ را درنظر بگیرید. روی سطح $\ell = 0$ شبیه‌سازی فقط یک گام زمانی استفاده می‌شود در حالی‌که روی سطح آخر $\ell = L$ ، شبیه‌سازی گام زمانی $2^\ell$ بار استفاده می‌شود. برای فرآیند وینر $W(t)$ داده شده ، فرض کنید $p$ نتیجه نهایی و $\hat{p}_\ell$ تقریب گسسته عددی با گام زمانی $h_\ell$ را نشان دهد. واضح است که:
$$\mathbb{E}[\hat{p}_L] = \mathbb{E}[\hat{p}_0] + \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{E}[\hat{p}_\ell - \hat{p}_{\ell-1}].$$

[۵۷] Wiener prosses
[۵۸] Multilevel Monte Carlo

روش مونت‌کارلوی چندسطحی، هر امیدریاضی طرف راست را به‌صورتی که واریانس کلی برای مقادیر داده شده کم شود تقریب می‌زند.

### ۲.۲.۱ معادلات دیفرانسیل تصادفی

معادله دیفرانسیل تصادفی [۵۹] یا SDE معادله ایست که در آن یک یا چند متغیر، فرآیند تصادفی هستند. در نهایت جواب این نوع معادلات خود نیز یک فرآیند تصادفی است. استفاده از SDEها در مدل‌سازی‌های پیچیده احتمال بسیار گسترده است. از جمله در مدل‌سازی هزینه نوسانات بازار یا مدل‌سازی فیزیکی نوسانات دمایی اشیا.

**تعریف ۲۳.۲.۱.** (معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی [۶۰])
معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی یا SPDE شبیه به معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی است. آن‌ها معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی هستند که جملات و ضرایبشان تصادفی هستند و آن‌ها می‌توانند بی‌نهایت جواب مختلف داشته باشند. همچنین ارتباط قوی با نظریه میدان کوانتوم و مکانیک آماری دارند.

### ۳.۲.۱ روش میلستین

در ریاضیات روش میلستین تکنیکی برای جواب عددی تقریبی برای معادله دیفرانسیل تصادفی است. میلستین این روش را در سال ۱۹۷۴ ابداع کرد.

## فضای لبگ

در آخر، فضای لبگ را که فضای تابعی مورد استفاده در نظریه احتمال است را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۲۴.۲.۱.** (فضای لبگ)
فضای لبگ فضای تابعی مربوط به فضای اندازه $(X, M, \mu)$ است که:

- $X$ مجموعه است.
- $M$ ، $\sigma$-جبر از زیرمجموعه $X$ است.
- $\mu$ اندازه جمعی شمارا روی $M$ است.

---

[۵۹] Stochastic Diffrentia Equation

[۶۰] Stochastic Partial Diffrential Equation)

# فصل ۲

# مقدمات

تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی مقرون‌به‌صرفه نیست و مستلزم کار و وقت زیادی است. برای بهبود این امر، می‌توان طرح‌های عددی برای گسسته‌سازی زمانی بازه $[0,T]$ را با روش‌های المان‌های محدود گالرکین برای گسسته‌سازی مکانی ترکیب کرد.

برای مثال فرض کنید $X:[0,T]\times\Omega\rightarrow H$ فرآیند تصادفی با مقادیری در فضای هیلبرت باشد که جواب به‌دست آمده ازمعادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی است. پس هدف ما می‌تواند تقریب مناسبی از

$$\mathbb{E}[\varphi(X(T))] \tag{۱.۲}$$

باشد که در آن $\varphi:H\rightarrow\mathbb{R}$ نگاشتی به اندازه کافی هموار است.

محاسبه مستقیم (۱.۲) پیچیده است و نیاز به صرف وقت زیادی دارد. ازاین‌رو، برای ساده‌سازی از الگوریتم مونت‌کارلوی چندسطحی یا به اختصار MLMC استفاده میشود.

قبل از به‌کار بردن الگوریتم مونت‌کارلوی چندسطحی [۲۶، ۲] به طرح‌های همگرایی ضعیف[۱] برای مساله (۱.۲)می‌پردازیم. این طرح‌ها تقریب خوب توزیع $X$ را تضمین می‌کند و سپس با درونیاب مونت‌کارلوی چندسطحی برای محاسبه تقریبی از (۱.۲) ترکیب می‌شوند.

M.Giles در [۲۶] نشان داد که پیچیدگی محاسباتی مساله (۱.۲) می‌تواند با الگوریتم مونت‌کارلوی چندسطحی کاهش پیدا کند. پس درونیاب مونت‌کارلو را با شبکه زمانی بزرگتر تعمیم می‌دهد که برای این‌کار به مرتبه همگرایی قوی[۲] نیاز است. درکل، طرح همگرای قوی می‌تواند تقریب خوبی برای جواب $X$ ایجاد کند. برای جزییات بیشتر در همگرایی قوی و ضعیف به [۱۴] مراجعه کنید.

M.Giles در [۱۸] کاربرد طرح همگرایی قوی مرتبه بالاتر را نشان می‌دهد که بدون تغییر مرتبه همگرایی ضعیف، پیچیدگی محاسباتی را کاهش می‌دهد. درحالی‌که [۲۶، ۱۸، ۲] روی مساله SODE متناهی‌بعد بحث می‌کنند، نتایج مشابهی برای جواب SPDE در [۸، ۷] به‌دست می‌آیند. در نتیجه، این مشاهدات در مطالعه مدل مشابه طرح میلستین با بعد نامتناهی و نتایج اولیه به‌دست آمده برای

---
[۱] Weakly Convergent

[۲] Strong Convergent

نیم‌گسسته‌سازی زمانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی خطی در [۴، ۳] به‌کار می‌روند.
سپس در [۲۰] ، طرح میلستین با روش المان‌های محدود گالرکین ترکیب شده و روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه‌خطی اعمال شده است که در این پایان‌نامه روی سازگاری[۳] و پایداری آن کار شده است. به‌علاوه، تحت فرضیاتی روی غیرخطی‌ها، برآورد بهتری از خطای همگرایی قوی به‌دست می‌آوریم. برای این‌کار، طرح را در چارچوب کار انتزاعی‌تر جایگذاری می‌کنیم و خطای قوی را با توجه به مفهوم دوپایداری[۴] و سازگاری بررسی می‌کنیم که از [۱۷] به‌دست می‌آید و برای اولین بار، برای معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی در [۳۲، ۹] به‌کار برده شده است. در فصل ۳ ، عملگر مانده $\mathcal{R}_k$ را معرفی می‌کنیم. از این عملگر برای تعیین اینکه جواب دقیق $X$( محدود به شبکه زمانی ) چه مقدار با جواب عددی $X_{k,h}$ اختلاف دارد، استفاده می‌کنیم. این مانده خطای برشی‌محلی نامیده می‌شود و اگر در جملات نرم تصادفی (۳.۳) اندازه‌گیری شود، می‌تواند برای برآورد خطای قوی استفاده شود.
ابتدا برخی از نمادها را معرفی می‌کنیم:
فرض کنید $[0,T]$ بازه زمانی متناهی و $(H,(\cdot,\cdot)_H,\|\cdot\|_H)$ و $(U,(\cdot,\cdot)_U,\|\cdot\|_U)$ دو فضای هیلبرت حقیقی مجزا و $V_h$ فضای توابع قطعه‌وار پیوسته باشند. همچنین فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ را که با فیلتر نرمال $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}\subset\mathcal{F}$ ترکیب شده است، در نظر بگیرید. فرض کنید $\{W(t)\}_{t\in[0,T]}$ فرآیند $Q$–وینر در $U$ نسبت به $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ باشد. در اینجا، عملگر کوواریانس $Q:U\to U$ کران‌دار، متقارن و نیمه‌معین‌مثبت فرض شده است ولی لازم نیست $tr<\infty$ باشد.
معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه‌خطی زیر را در نظر بگیرید [۱۹] :
فرض کنید $X:[0,T]\times\Omega\to H$ ، برای $0\leqslant t\leqslant T$ داریم:

$$X(0)=X_0,\qquad \mathrm{d}X(t)+[AX(t)+f(X(t))]\mathrm{d}t=g(X(t))\mathrm{d}W(t). \tag{۲.۲}$$

در اینجا

- $-A:D(A)\subset H\to H$ پایه نیم‌گروه تحلیلی $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ روی $H$ است.
- $f$ و $g$ غیرخطی با لیپ‌شیتس پیوسته و هموار هستند.

حال جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی نیمه‌خطی را به‌صورت زیر داریم:
فرض کنید $X:[0,T]\times\Omega\to H$ ، جواب ضعیف $P-a.s$ برای هر $0\leqslant t\leqslant T$ می‌شود:

$$X(t)=S(t)X_0-\int_0^t S(t-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma+\int_0^t S(t-\sigma)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) \tag{۳.۲}$$

در مثال اصلی، $H$ را در فضای $L_2(\mathcal{D};\mathbb{R})$ از توابع انتگرال‌پذیر مربعی درنظر می‌گیریم که در آن $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^d$ دامنه کران‌دار با مرز هموار $\partial\mathcal{D}$ یا دامنه محدب با مرز چندضلعی است. همچنین، $-A$ عملگر لاپلاس با شرایط مرزی دیریکله همگن است.
حال، طرح المان محدود میلستین–گالرکین را معرفی می کنیم. اگر

[۳] Consistency
[۴] Bistability

- $k \in (\circ, T]$ اندازه گام زمانی متساوی‌الفاصله،
- $t_n = nk$ نقاط شبکه‌ای برای $n = ۱, \cdots, N_k$،
- $h \in (\circ, ۱]$ عملگری برای گسسته‌سازی مکانی،

باشند، آنگاه رابطه بازگشتی زیر را برای گسسته‌سازی زمانی‌مکانی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی (۲.۲) برای $n \in \{۱, \cdots, N_k\}$ داریم:

$$\begin{aligned}
X_{k,h}(t_\circ) =& P_h X_\circ, \\
X_{k,h}(t_n) =& X_{k,h}(t_{n-۱}) - k[A_h X_{k,h}(t_n) + P_h f(X_{k,h}(t_{n-۱}))] \\
&+ P_h g(X_{k,h}(t_{n-۱}))\Delta_k W(t_n) \\
&+ \int_{t_{n-۱}}^{t_n} P_h g'(X_{k,h}(t_{n-۱})) \left[\int_{t_{n-۱}}^{\sigma_۱} g(X_{k,h}(t_{n-۱}))\mathrm{d}W(\sigma_۲)\right] \mathrm{d}W(\sigma_۱).
\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

که در آن $\Delta_k W(t_n) := W(t_n) - W(t_{n-۱})$ .

همچنین، $P_h, h \in (\circ, ۱]$ تصویر متعامد[۵] درون فضای المان‌های محدود گالرکین $V_h \subset H$ را نشان می‌دهد. $A_h$ نوع گسسته (مستقل) پایه $A$ است.

## ۱.۲ فرضیات اصلی

در این بخش فرمول دقیقی از فرضیات برای معادله با مشتقات جزیی تصادفی (۲.۲) ارایه می‌دهیم. ابتدا روی عملگر خطی بحث می‌کنیم:

**فرضیه ۱.۰.۱.۲.** عملگر خطی $A : D(A) \subset H \to H$ معین‌چگال و خودالحاق و معین‌مثبت با معکوس فشرده است.

در [۲۹] از فرضیه ۱.۰.۱.۲ نشان داده می‌شود که عملگر $-A$ پایه نیم‌گروه تحلیلی $\{S(t)\}_{t\in[\circ,T]}$ در $H$ است. همچنین دنباله حقیقی‌مقدار صعودی $\{\lambda_i\}_{i\in N}$ ، $\lambda_i > \circ$ با $\lim_{i\in N}\lambda_i = \infty$ و پایه متعامد $\{e_i\}_{i\in N}$ روی $H$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i \in N$، تساوی $Ae_i = \lambda_i e_i$ برقرار باشد.

توان کسری $A$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم[۳۱] :

برای هر $r \geq \circ$ ، عملگر $A^{\frac{r}{۲}} : D(A^{\frac{r}{۲}}) \subset H \to H$ برای $x \in D(A^{\frac{r}{۲}})$ تعریف می‌شود با:

$$A^{\frac{r}{۲}}x := \sum_{j=۱}^{\infty} \lambda_j^{\frac{r}{۲}} x_j e_j,$$

که در آن

$$x \in D(A^{\frac{r}{۲}}) = \{x = \sum_{j=۱}^{\infty} x_j e_j : (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \quad \text{با} \quad \|x\|_r^۲ = \sum_{j=۱}^{\infty} \lambda_j^r x_j^۲ < \infty\}.$$

[۵] Orthogonal projection

با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)_r := (A^{\frac{r}{2}}\cdot, A^{\frac{r}{2}}\cdot)$ و نرم $\|\cdot\|_r := \|A^{\frac{r}{2}}\cdot\|$ فضای $\dot{H}^r := D(A^{\frac{r}{2}})$ فضای هیلبرت مجزا می‌شود.

فضای $\dot{H}^{-r}$ را با توان منفی به عنوان فضای دوگان معرفی می‌کنیم که می‌تواند به‌صورت زیر تعمیم داده شود:

$$\dot{H}^{-r} = \{x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j : (x_j)_{j\in N} \subset \mathbb{R}, \qquad \text{با} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-r} x_j^2 < \infty\}.$$

که در آن تساوی، یک‌ریختی ایزومتری را نشان می‌دهد و نرم در $\dot{H}^{-r}$ با $\|x\|_{-r} = \|A^{-\frac{r}{2}} x\|$ محاسبه می‌شود. برای هر $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \in \dot{H}^{-r}$ قرار می‌دهیم:

$$A^{-\frac{r}{2}} x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\frac{r}{2}} x_j e_j.$$

برای فرمول‌بندی فرضیات باقیمانده از [۳۴، ۶، ۳۰] ، فرض می‌کنیم مقادیر پارامتر $p \in [2,\infty)$ و $r \in [0,1)$ داده شده است.

**فرضیه ۲.۰.۱.۲.** مقدار اولیه $X_0 : \Omega \to \dot{H}^{1+r}$ متغیر تصادفی $\mathcal{F}_0/\mathcal{B}(\dot{H}^{1+r})$-اندازه‌پذیر است با:

$$\mathbb{E}[\|X_0\|_{1+r}^{2p}] < \infty.$$

فرضیه بعدی روی عملگر غیرخطی $f : H \to \dot{H}^{-1+r}$ در (۲.۲) بحث می‌کند.

**فرضیه ۳.۰.۱.۲.** عملگر غیرخطی $f : H \to \dot{H}^{-1+r}$ را داریم. ثابت $C_f$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|f(0)\|_{-1+r} \leqslant C_f,$$

$$\sup_{x\in H} \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(H;\dot{H}^{-1+r})} \leqslant C_f,$$

در واقع برای هر $x_1, x_2 \in H$ داریم:

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\|_{-1+r} &\leqslant C_f \|x_1 - x_2\|, \\ \|f'(x_1) - f'(x_2)\|_{\mathcal{L}(H,\dot{H}^{-1+r})} &\leqslant C_f \|x_1 - x_2\|. \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

فرضیه بعدی با عملگر غیرخطی $g$ در قسمت انتگرالی تصادفی (۲.۲) سروکار دارد.

در [۱۲، ۱۹] ، فضای هیلبرت مجزای $U_0 := Q^{\frac{1}{2}}(U)$ نشان داده است که همراه با ضرب داخلی $(u_0, v_0)_{U_0} := (Q^{-\frac{1}{2}} u_0, Q^{-\frac{1}{2}} v_0)_U$ برای $u_0, v_0 \in U_0$ نشان داده شده است که در آن $Q^{-\frac{1}{2}}$ شبه‌معکوس است.

مجموعه $\mathcal{L}_2^0 := \mathcal{L}_2(U_0, H)$ فضای همه عملگرهای هیلبرت-اشمیت $\phi : U_0 \to H$ همراه با نرم

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 := \sum_{j=1}^{\infty} \|\phi\psi_j\|^2.$$

است که در آن $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ پایه متعامد دلخواه $U_0$ است.

همچنین زیرمجموعه $\mathcal{L}_{2,r}^0 := \mathcal{L}_2(U_0, \dot{H}^r)$ را از [۳۳، ۱۲] معرفی می‌کنیم که زیرمجموعه همه عملگرهای هیلبرت-اشمیت $\phi : U_0 \to \dot{H}^r$ همراه با نرم زیر است:

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}_{2,r}^0} := \|A^{\frac{r}{2}}\phi\|_{\mathcal{L}_2^0}.$$

**فرضیه ۴.۰.۱.۲.** فرض کنیم عملگر غیرخطی $g : H \to \mathcal{L}_2^0$ داده شده است. ثابت $C_g$ به‌گونه‌ای موجود است که:

$$\sup_{x\in H}\|g'(x)\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{L}_2^0)} \leq C_g,$$
$$\|g(0)\|_{\mathcal{L}_2^0} \leq C_g,$$

به‌عبارت دیگر برای هر $x_1, x_2 \in H$ داریم:

$$\|g(x_1) - g(x_2)\|_{\mathcal{L}_2^0} \leq C_g\|x_1 - x_2\|,$$
$$\|g'(x_1) - g'(x_2)\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2^0)} \leq C_g\|x_1 - x_2\|,$$
$$\|g'(x_1)g(x_1) - g'(x_2)g(x_2)\|_{\mathcal{L}_2(U_0,\mathcal{L}_2^0)} \leq C_g\|x_1 - x_2\|.$$

به‌علاوه، نگاشت $g : H \to \mathcal{L}_2^0$ برای هر $x \in \dot{H}^r$ در $g(x) \in \mathcal{L}_{2,r}^0$ صدق می‌کند و

$$\|g(x)\|_{\mathcal{L}_{2,r}^0} \leq C_g(1 + \|x\|_r).$$

تحت فرضیات ذکر شده، جواب ضعیف یکتای $X : [0, T] \times \Omega \to H$ در (۲.۲) به شکل (۳.۲) وجود دارد که اثباتی از آن در [۳۱] بر پایه روشی در [۶] آورده شده است.

به‌علاوه، برای $s \in [0, r + 1]$ طبق فرضیات ۲.۰.۱.۲ و ۴.۰.۱.۲ برای $r \in [0, 1)$ و $p \in [2, \infty)$ داریم:

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\|X(t)\|_s^{2p}] < \infty, \tag{۶.۲}$$

و ثابت $C$ برای هر $t_1, t_2 \in [0, T]$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\left(\mathbb{E}[\|X(t_1) - X(t_2)\|_s^{2p}]\right)^{\frac{1}{2}p} \leqslant C|t_1 - t_2|^{\min(\frac{1}{2},\frac{r+1-s}{2})}. \tag{۷.۲}$$

این نتایج در [۶، ۳۴] اثبات شده‌اند.

## نامساوی برخولدر-دیویس-گاندی [۶]

نامساوی برخولدر-دیویس-گاندی برای برآورد گشتاورهای مراتب بالاتر انتگرال تصادفی استفاده می‌شود. گزاره بعدی که اثباتش در [۱۹] آورده شده، موردی خاص از نامساوی است.

**گزاره ۱.۰.۱.۲.** برای هر $p \in [2, \infty)$ و $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant T$ و برای هر فرآیند تصادفی قابل پیش‌بینی $\Psi : [0, T] \times \Omega \to \mathcal{L}_2^0$ که در

$$\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\Psi(\sigma)\|^2_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^0)} \mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

صدق می‌کند، داریم:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Psi(\sigma)\mathrm{dW}(\sigma)\right\|_{L_p(\Omega;H)} &\leqslant C(p)\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\Psi(\sigma)\|^2_{\mathcal{L}_2^0}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant C(p)\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\Psi(\sigma)\|^2_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^0)}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

[۶] Burkholder-Davis-Gundy

که ثابت می‌تواند انتخاب شود به‌صورت

$$C(p) = \left(\frac{p}{2}(p-1)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{(\frac{p}{2}-1)}.$$

## ۲.۲ روش المان‌های محدود گالرگین

در این بخش اجزای مهم روش المان‌های محدود گالرکین را بیان می‌کنیم. برای جزییات بیشتر به [۳۳، ۳۱] مراجعه کنید که بر پایه [۳۸] آمده است.

نقطه شروع، دنباله $\{V_h\}_{h\in(0,1]}$ از زیرفضای متناهی بعد $\dot{H}^1$ است. برای هر $h \in (0,1]$ نگاشت ریتس $\mathcal{R}_h : \dot{H}^1 \to V_h$ تصویر متعامد به توی $V_h$ نسبت به ضرب داخلی

$$a(x,y) := (A^{\frac{r}{2}}x, A^{\frac{r}{2}}y), \qquad \forall x,y \in \dot{H}^1.$$

است. پس به ازای هر $x \in \dot{H}^1$ و $y_h \in V_h$ داریم:

$$a(\mathcal{R}_h x, y_h) = a(x, y_h).$$

فرضیه زیر نشان می‌دهد که فضای $\{V_h\}_{h\in(0,1]}$ شامل تقریب مناسبی روی همه المان‌ها در $\dot{H}^1$ و $\dot{H}^2$ است [۳۵] .

**فرضیه ۵.۰.۲.۲.** فرض کنید دنباله $\{V_h\}_{h\in(0,1]}$ از زیرفضای متناهی بعد $\dot{H}^1$ داده شده به‌طوری‌که برای هر$s \in \{1,2\}$ و $x \in \dot{H}^s$ و $h \in (0,1]$ ثابت $C$ وجود دارد که:

$$\|\mathcal{R}_h x - x\| \leqslant Ch^s\|x\|_s. \tag{۸.۲}$$

عملگرهای مهم دیگر، نگاشت خطی $A_h : V_h \to V_h$ است که نوع گسسته‌ای از $A$ را نشان می‌دهد. برای $x_h \in V_h$ داده شده، $A_h x_h$ را به صورت المان یکتا در $V_h$ تعریف می‌کنیم که برای هر $y_h \in V_h$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$a(x_h, y_h) = (A_h x_h, y_h).$$

از طرفی برای $x_h, y_h \in V_h$ داریم:

$$(A_h x_h, y_h) = a(x_h, y_h) = (x_h, A_h y_h).$$

همچنین، برای $x_h \in V_h$ و $x_h \neq 0$ داریم:

$$(A_h x_h, x_h) = a(x_h, x_h) = \|x_h\|_1^2 > 0.$$

که به معنای خودالحاقی $A_h$ و معین‌مثبت بودن روی $V_h$ است. ازاین‌رو $-A_h$ پایه نیم‌گروه تحلیلی روی $V_h$ است که از $S_h(t) = e^{-A_h t}$ به‌دست می‌آید.

فرض کنید $\rho \geqslant 0$ . ویژگی زیر را برای $t \in [0,T]$ داریم:

$$\|A_h^\rho S_h(t) y_h\| \leqslant Ct^{-\rho}\|y_h\|.$$

که در آن $C = C(\rho)$ مستقل از $h \in (0,1]$ است. سپس با تعریف $A_h$ برای $y_h \in V_h \subset \dot{H}^1$ به‌دست می‌آید :

$$\|A_h^{\frac{1}{2}} y_h\|^2 = a(y_h, y_h) = \|y_h\|_1^2.$$

$P_h : \dot{H}^{-1} \to V_h$ تصویر متعامد به توی $V_h$ با ضرب داخلی در $H$ است. در [۲۳] تصویر $P_h$ به ازای هر $x \in \dot{H}^{-1}$ و $y_h \in V_h$ تعریف می‌شود با:

$$(P_h x, y_h) = \langle x, y_h \rangle.$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle = a\langle A^{-1} \cdot, \cdot \rangle$ .

بعد از معرفی همه عملگرها برای تقریب مکانی، برآورد نرم منفی گسسته زیر را برای هر $x \in \dot{H}^{-1}$ از [۳۷] ارایه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \|A_h^{-\frac{1}{2}} P_h x\| &= \sup_{z_h \in V_h} \frac{|(A_h^{-\frac{1}{2}} P_h x, z_h)|}{\|z_h\|} = \sup_{z_h \in V_h} \frac{|(P_h x, A_h^{-\frac{1}{2}} z_h)|}{\|z_h\|} \\ &= \sup_{z'_h \in V_h} \frac{|\langle x, z'_h \rangle|}{\|A_h^{\frac{1}{2}} z'_h\|} \leqslant \sup_{z'_h \in V_h} \frac{\|x\|_{-1} \|z'_h\|_1}{\|A_h^{\frac{1}{2}} z'_h\|} = \|x\|_{-1}. \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

همچنین تقریب زیر برای $x \in \dot{H}^{-1}$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \|S_h(t) P_h x\| &= \|A^{\frac{1}{2}} S_h(t) A_h^{-\frac{1}{2}} P_h x\| \\ &\leqslant C t^{-\frac{1}{2}} \|A_h^{-\frac{1}{2}} P_h x\| \leqslant C t^{-\frac{1}{2}} \|x\|_{-1}. \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

**فرضیه ۶.۰.۲.۲.** فرض کنید دنباله $\{V_h\}_{h \in (0,1]}$ از زیرفضای متناهی بعد $\dot{H}^1$ داده شده باشد به‌گونه‌ای‌که برای $h \in (0, 1]$ و $x \in \dot{H}^1$ ثابت $C$ وجود دارد که:

$$\|P_h x\|_1 \leqslant C \|x\|_1. \tag{۱۱.۲}$$

ویژگی‌های نیم گروه $S(t)$ را در لم زیر بیان می‌کنیم و از آن در اثبات خطا استفاده می‌کنیم. ویژگی هموار (الف) و (ب) نتایج کلاسیکی هستند که در [۲۹] اثبات شده‌اند. اثبات گزینه‌های باقیمانده در [۳۴] داده شده است.

**لم ۱.۰.۲.۲.** برای نیم‌گروه تحلیلی $S(t)$ ویژگی‌های زیر صادق‌اند:

الف. برای هر $v \geqslant 0$ ثابت $C = C(v)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|A^v S(t)\| \leqslant C t^{-v}, \qquad \forall t > 0.$$

ب. برای هر $0 \leqslant v \leqslant 1$ ثابت $C = C(v)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|A^{-v}(S(t) - I)\| \leqslant C t^v, \qquad \forall t > 0.$$

ج. برای هر $0 \leqslant v \leqslant 1$ ثابت $C = C(v)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|A^{\frac{v}{2}} S(\tau_2 - \sigma) x\|^2 \mathrm{d}\sigma \leqslant C(\tau_2 - \tau_1)^{1-v} \|x\|^2, \qquad \forall x \in H, \quad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2.$$

د. برای هر $0 \leqslant v \leqslant 1$ ثابت $C = C(v)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\left\| A^v \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau_2 - \sigma) x \mathrm{d}\sigma \right\| \leqslant C(\tau_2 - \tau_1)^{1-v} \|x\|, \qquad \forall x \in H, \quad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2.$$

## ۳.۲ برآورد خطای روش گالرکین برای معادلات غیراحتمالی

در این بخش، به برآورد خطا برای گسسته‌سازی مساله همگن زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} &u(\circ)=x,\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)+Au(t)=\circ. \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

که در آن $x\in\dot{H}^{-۱}$ و $t\in[\circ,T]$.

جملات نیم‌گروه $\{S(t)\}_{t\in[\circ,T]}$ با $-A$ تولید می‌شوند، جواب (۱۲.۲) برای هر $t\in[\circ,T]$ می‌شود:

$$u(t)=S(t)x.$$

### برآورد خطا برای تقریب نیم‌گسسته مکانی

معادله در حالت نیم‌گسسته مکانی برای $x\in\dot{H}^{-۱}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &u_h(\circ)=P_hx,\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_h(t)+A_hu_h(t)=\circ. \end{aligned}$$

که در آن $u_h$ تقریب جواب $u$ می‌باشد.

عملگر خطا برای هر $t\in[\circ,T]$ تعریف می‌شود:

$$F_h(t):=S_h(t)P_h-S(t).$$

**لم ۲.۰.۳.۲.** تحت فرضیه ۵.۰.۲.۲ تقریب زیر برای عملگر خطای $F_h$ به‌دست می‌آید:

الف. فرض کنید $\circ\leqslant\nu\leqslant\mu\leqslant ۲$. ثابت $C$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|F_h(t)x\|\leqslant Ch^{\mu}t^{-\frac{\mu-\nu}{۲}}\|x\|_{\nu},\qquad \forall x\in\dot{H}^{\nu},t\in(\circ,T),h\in(\circ,۱].$$

ب. فرض کنید $\circ\leqslant\rho\leqslant ۱$. ثابت $C$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|F_h(t)x\|\leqslant Ct^{-\frac{\rho}{۲}}\|x\|_{-\rho},\qquad \forall x\in\dot{H}^{-\rho},t\in(\circ,T),h\in(\circ,۱].$$

ج. فرض کنید $\circ\leqslant\rho\leqslant ۱$. ثابت $C$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|F_h(t)x\|\leqslant Ch^{۲-\rho}t^{-۱}\|x\|_{-\rho},\qquad \forall x\in\dot{H}^{-\rho},t\in(\circ,T),h\in(\circ,۱].$$

**برهان.** الف. اثبات در [۳۸] آورده شده است.

ب. برای $\rho=\circ$ با (الف) ثابت می‌شود. در مورد $\rho=۱$ ، لم ۵.۰.۲.۲ (الف) می‌دهد:

$$\|S(t)x\|=\|A^{\frac{۱}{۲}}S(t)A^{-\frac{۱}{۲}}x\|\leqslant Ct^{-\frac{۱}{۲}}\|x\|_{-۱}. \tag{۱۳.۲}$$

همراه با (۱۰.۲) به‌دست می‌آید:

$$\|F_h(t)x\|\leqslant\|S_h(t)P_hx\|+\|S(t)x\|\leqslant Ct^{-\frac{۱}{۲}}\|x\|_{-۱}$$

ج. مورد $\rho = ۰$ از (الف) به‌دست می‌آید. پس کافیست برای $\rho = ۱$ اثبات کنیم. با استفاده از (۸.۲) داریم:

$$\begin{aligned}\|F_h(t)x\| &= \|A_hS_h(t)A_h^{-\frac{۱}{۲}}P_hx - AS(t)A^{-۱}x\|\\ &\leqslant \|A_hS_h(t)P_h(\mathcal{R}_hA^{-۱}x - A^{-۱}x)\| + \|(A_hS_h(t)P_h - AS(t))A^{-۱}x\|\\ &\leqslant Ct^{-۱}\|(\mathcal{R}_h - I)A^{-۱}x\| + \|\frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}t}(t)A^{-۱}x\|\\ &\leqslant Ct^{-۱}h\|A^{-۱}x\|_۱ + \|\frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}t}(t)A^{-۱}x\|.\end{aligned}$$

برای جمله دوم داریم:

$$\|\frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}t}(t)A^{-۱}x\| \leqslant Cht^{-۱}\|A^{-۱}x\|_۱.$$

از آنجاییکه $\|A^{-۱}x\|_۱ = \|x\|_{-۱}$ ، به‌دست می‌آید:

$$\|F_h(t)x\| \leqslant Cht^{-۱}\|x\|_{-۱}.$$

□

**لم ۳.۰.۳.۲.** فرض کنید $۰ \leqslant \rho \leqslant ۱$. تحت فرضیه ۵.۰.۲.۲ عملگر $F_h$ در تقریب‌های زیر صدق می‌کند:

الف. ثابت $C$موجود است به‌گونه‌ای‌که:

$$\Big\|\int_۰^t F_h(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\Big\| \leqslant Ch^{۲-\rho}\|x\|_{-\rho}, \qquad \forall x \in \dot{H}^{-\rho}, t\in(۰,T), h\in(۰,۱].$$

ب. ثابت $C$ موجود است به‌گونه‌ای‌که:

$$\Big(\int_۰^t \|F_h(\sigma)x\|\mathrm{d}\sigma\Big)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant Ch^{۱+\rho}\|x\|_\rho, \qquad \forall x \in \dot{H}^{\rho}, t\in(۰,T), h\in(۰,۱].$$

**برهان.** الف. برای $\rho = ۰$ اثبات در [۳۸] آورده شده است. برای $\rho = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned}\Big\|\int_۰^t F_h(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\Big\| =& \Big\|\int_۰^t(A_hS_h(\sigma)A_h^{-۱}P_h - AS(\sigma)A^{-۱})x\mathrm{d}\sigma\Big\|\\ &\leqslant \Big\|\int_۰^t A_hS_h(\sigma)P_h(\mathcal{R}_h - I)A^{-۱}x\mathrm{d}\sigma\Big\|\\ &\quad + \Big\|\int_۰^t(A_hS_h(\sigma)P_h - AS(\sigma))A^{-۱}x\mathrm{d}\sigma\Big\|\\ &= \Big\|\int_۰^t \frac{\mathrm{d}S_h}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma)P_h(\mathcal{R}_h - I)A^{-۱}x\mathrm{d}\sigma\Big\| + \Big\|\int_۰^t \frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma)A^{-۱}x\mathrm{d}\sigma\Big\|.\end{aligned}$$

از طرفی برای $y \in H$ داریم:

$$\|P_hy\| \leqslant \|y\|.$$

با فرضیه ۵.۰.۲.۲ برای جمله اول به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\Big\|\int_۰^t \frac{\mathrm{d}S_h}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma)P_h(\mathcal{R}_h - I)A^{-۱}x\mathrm{d}\sigma\Big\| =& \|(S_h(t) - I)P - h(\mathcal{R}_h - I)A^{-۱}x\|\\ \leqslant& Ch\|A^{-۱}x\|_۱ = Ch\|x\|_{-۱}.\end{aligned}$$

برای جمله دوم از لم ۲.۰.۳.۲ (الف) با $\mu = \nu = 1$ استفاده می‌شود، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\Big\|\int_0^t \frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma)A^{-1}x\mathrm{d}\sigma\Big\| =&\|(F_h(t)-F_h(0))A^{-1}x\|\\ \leqslant&\|F_h(t)A^{-1}x\| + \|(I-P_h)A^{-1}x\| \leqslant Ch\|x\|_{-1}.\end{aligned}$$

درگام آخر از نکته زیر استفاده شده است:

$$\|(P_h - I)\| \leqslant \|(\mathcal{R}_h - I)y\| \leqslant Ch\|y\|_1, \qquad \forall y \in \dot{H}^1.$$

ب. نامساوی زیر را داریم:

$$\int_0^t \|F_h(\sigma)x\|^2\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_0^t \|(\mathcal{R}_h - I)S(\sigma)x\|^2\mathrm{d}\sigma.$$

زمانی‌که $\rho \in \{0, 1\}$ با فرضیه ۵.۰.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{R}_h - I)S(\sigma)x\| \leqslant& Ch^{1+\rho}\|S(\sigma)x\|_{1+\rho}\\ =&Ch^{1+\rho}\|A^{\frac{1}{2}}S(\sigma)A^{\frac{\rho}{2}}x\| \leqslant C\|x\|^2.\end{aligned}$$

با به‌کار بردن لم ۱.۰.۲.۲ (ج) با $\nu = 1$ اثبات کامل می‌شود.

□

## برآورد خطا برای تقریب گسسته کامل

فرض کنید

- $k \in (0, T]$ اندازه گام زمانی متساوی‌الفاصله باشد.
- $kN_k \leqslant T < k(N_k + 1)$ را با $N_k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم.
- مجموعه نقاط شبکه‌ای زمانی را به‌صورت $\mathcal{T}_k := \{t_n : n = 0, 1, \cdots, N_k\}$ با $t_n = nk$ نشان دهیم.

تقریب المان محدود گالرکین زمانی‌مکانی $u_{k,h} : \tau_k \to V_h$ برای هر $h \in (0, 1]$ و $k \in (0, T]$ با دنباله بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&u_{k,h}(t_0) = P_h x,\\ &u_{k,h}(t_n) + kA_h u_{k,h}(t_n) = u_{k,h}(t_{n-1}), \qquad n = 1, \cdots, N_k.\end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

از [۳۸] تعمیم روش یک‌گامی را برای هر $z \in \mathbb{R}, z \neq 1$ با تابع گویای زیر معرفی می‌کنیم:

$$S_z = \frac{1}{1+z}.$$

ثابت $C$ و $c$ به‌گونه‌ای موجودند که:

$$|S_z - e^{-z}| \leqslant Cz^{q+1}, \tag{۱۵.۲}$$

$$|S_z| \leqslant e^{-cz}. \tag{۱۶.۲}$$

از (۱۴.۲) به‌دست می‌آید:
$$u_{k,h}(t_n) + kA_h u_{k,h}(t_n) = u_{k,h}(t_n)(I + kA_h) = u_{k,h}(t_{n-1}).$$
درنتیجه داریم:
$$u_{k,h}(t_n) = (I + kA_h)^{-1} u_{k,h}(t_{n-1}).$$
از طرفی برای $t_{n-1}$ داریم:
$$u_{k,h}(t_{n-1}) = (I + kA_h)^{-1} u_{k,h}(t_{n-2}).$$
با جایگذاری به‌دست می‌آوریم:
$$u_{k,h}(t_n) = (I + kA_h)^{-2} u_{k,h}(t_{n-2}).$$
با ادامه این روند داریم:
$$u_{k,h}(t_n) = (I + kA_h)^{-n} u_{k,h}(t_0).$$
که با توجه به شرط مساله می‌توان (۱۴.۲) را برای هر $n \in \{0, \cdots, N_k\}$ به صورت زیر معادل‌سازی کرد:
$$u_{k,h}(t_n) = S^n_{k,h} P_h u_0. \tag{۱۷.۲}$$
با $S_{k,h} = (I + kA_h)^{-1}$ .

عملگر خطی $S_{k,h}x$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$S_{k,h}x = \sum_{m=1}^{N_k} S_{k,\lambda_{h,m}}(x, \varphi_{h,m})\varphi_{h,m}. \tag{۱۸.۲}$$
که در آن $\{\lambda_{h,m}\}_{m=1}^{N_k}$ مقادیرویژه مثبت $A_h : V_h \to V_h$ با بردارهای ویژه متعامد $\{\varphi_{h,m}\}_{m=1}^{N_k} \subset V_h$ هستند و $\dim(V_h) = N_k$ .

مشابه نیم‌گروه تحلیلی $\{(t)\}_{t\in[0,T]}$ , عملگر گسسته $S_{k,h}$ به ازای هر $j \in \{1, \cdots, N_k\}$ و $x_h \in V_h$ و $\rho \in [0, 1]$ ویژگی هموار زیر را دارد:
$$\|A^\rho_h S^j_{k,h} x_h\| \leqslant C t_j^{-\rho} \|x_h\|. \tag{۱۹.۲}$$
در اینجا ثابت $C = C(\rho)$ مستقل از $j, k, h$ است. برای اثبات (۱۹.۲) به [۳۸] مراجعه کنید.

برای تحلیل خطا در فصل‌های بعد عملگر خطای زمانی پیوسته بین (۱۲.۲) و (۱۴.۲)را معرفی می‌کنیم. اگر $t \in [t_{j-1}, t_j)$ برای $j \in \{1, 2, \cdots, N_k\}$ باشد داریم:
$$\mathrm{F}_{k,h}(t) := S_{k,h}(t)P_h - S(t), \qquad t \in [0, T). \tag{۲۰.۲}$$
که در آن
$$S_{k,h}(t) := (Id_H + kA_h)^{-j}. \tag{۲۱.۲}$$
نگاشت $t \longmapsto S_{k,h}(t)$ و ازاین‌رو $t \longmapsto \mathrm{F}_{k,h}(t)$ با حد چپ از راست پیوسته هستند. نامساوی‌های زیر نتایج منطقی از (۱۹.۲) و (۲۰.۲) هستند که برای $t \in [t_{j-1}, t_j)$ با $t > 0$ و $j = 1, 2, \cdots$ برقرار هستند :

برای هر $x \in H$ :

$$\|S_{k,h}(t)P_h x\| \leqslant C\|x\|. \tag{۲۲.۲}$$

و برای هر $x \in \dot{H}^{-1}$ :

$$\|S_{k,h}(t)P_h x\| = \|A_h^{\frac{1}{2}}(Id_H + kA_h)^{-j}A_h^{-\frac{1}{2}}P_h x\| \leqslant Ct_j^{-\frac{1}{2}}\|x\|_{-1} \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|x\|_{-1} \tag{۲۳.۲}$$

برای هر دو نامساوی ثابت $C$ می‌تواند مستقل از $h \in (0,1]$ و $k \in (0,T]$ انتخاب شود.

لم بعدی چندین برآورد برای عملگر خطای $F_{k,h}$ با داده اولیه ناهموار[۷] $x$ بیان می‌کند:

**لم ۴.۰.۳.۲.** تحت فرضیات ۵.۰.۲.۲ برآوردهای زیر برای عملگر خطای $F_{k,h}$ به‌دست می‌آیند:

الف. فرض کنید $0 \leqslant \nu \leqslant \mu \leqslant 2$ . ثابت $C$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|F_{k,h}(t)x\| \leqslant C(h^\mu + k^{\frac{\mu}{2}})t^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\|x\|_\nu, \qquad \forall x \in \dot{H}^\nu, t \in (0,T), h,k \in (0,1].$$

ب. فرض کنید $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ . ثابت $C$ وجود دارد که:

$$\|F_{k,h}(t)x\| \leqslant Ct^{-\frac{\rho}{2}}\|x\|_{-\rho}, \qquad \forall x \in \dot{H}^{-\rho}, t \in (0,T), h,k \in (0,1].$$

ج. فرض کنید $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ . ثابت $C$ وجود دارد که:

$$\|F_{k,h}(t)x\| \leqslant C(h^{2-\rho} + k^{\frac{2-\rho}{2}})t^{-1}\|x\|_{-\rho}, \qquad \forall x \in \dot{H}^{-\rho}, t \in (0,T), h,k \in (0,1].$$

**برهان.** الف. فرض کنید $t > 0$ باشد به‌طوری‌که $t_{j-1} \leqslant t < t_j$ و $x \in \dot{H}^\nu$ . داریم:

$$\|F_{k,h}(t)x\| \leqslant \|(S_{k,h}(t)P_h - S(t))x\| \leqslant \|(S_{k,h}(t)P_h - S(t_j))x\| + \|(S(t_j) - S(t))x\|.$$

برای جمعوند دوم از لم ۱.۰.۲.۲ (الف) و (ب) داریم:

$$\begin{aligned}\|(S(t_j) - S(t))x\| =& \|^{-\frac{\mu}{2}}(S(t_j - t) - I) - A^{\frac{\mu-\nu}{2}}S(t)A^{\frac{\nu}{2}}x\| \\ \leqslant& C(t_j - t)^{\frac{\mu}{2}}t^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\|A^{\frac{\nu}{2}}x\| \\ \leqslant& Ck^{\frac{\mu}{2}}t^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\|x\|_\nu.\end{aligned}$$

جمعوند اول خطای بین جواب واقعی $u$ در (۱۲.۲) و طرح گسسته کامل (۱۷.۲) در زمان $t_j$ است. برای مورد $\mu = \nu = 2$ ، تقریب زیر به‌دست می‌آید ، [۳۸] :

$$\|(S_{k,h}(t)P_h - S(t_j))x\| \leqslant C(h^2 + k)\|x\|_2.$$

در (۱۹.۲) با $\rho = 0$ برای مورد $\mu = \nu = 0$ داریم:

$$\|F_{k,h}(t_j)x\| \leqslant C\|x\|. \tag{۲۴.۲}$$

و ثابت $C$ مستقل از $h,k \in (0,1]$ و $t_j > 0$ و $x$ است.

همین روش درونیابی برای مورد میانی $\mu = \nu$ و $\mu \in [0,2]$ نیز به‌کار می‌رود. پس داریم:

$$\|(S_{k,h}(t)P_h - S(t_j))x\| \leqslant C(h^\mu + k^{\frac{\mu}{2}})\|x\|_\mu. \tag{۲۵.۲}$$

از طرفی برای $\nu = 0$ و $\mu = 2$ نیز داریم:

$$\|(S_{k,h}(t)P_h - S(t_j))x\| \leqslant C(h^2 + k)t_j^{-1}\|x\|.$$

---

[۷] Nonsmooth

که در آن ثابت $C$ مستقل از $h, k \in (۰, ۱]$ و $t_j > ۰$ و $x$ است.

درونیابی بین این تقریب و (۲۴.۲) برای $\mu \in [۰, ۲]$ می‌دهد:

$$\|(S_{k,h}(t)P_h - S(t_j))x\| \leqslant C(h^{\mu} + k^{\frac{\mu}{۲}})t_j^{-\frac{\mu}{۲}}\|x\|. \quad (۲۶.۲)$$

اثبات (الف) با جمع درونیابی‌ها با توجه به $\nu \in [۰, \mu]$ بین (۲۶.۲) و (۲۵.۲) و همچنین با درنظر گرفتن $t_j^{-\frac{\mu}{۲}} \leqslant t^{-\frac{\mu}{۲}}$ کامل می‌شود.

ب. مورد $\rho = ۰$ با (۲۴.۲) درست است و مورد $\rho = ۱$ با (۲۳.۲) به‌دست می‌دهد:

$$\|F_{k,h}(t)x\| \leqslant \|S_{k,h}(t)P_h x\| + \|S(t)x\| \leqslant Ct^{\frac{-۱}{۲}}\|x\|_{-۱}.$$

موارد میانی با درونیابی به‌دست می‌آیند.

ج. مورد $\rho = ۰$ همان (الف) با $\mu = ۲$ و $\nu = ۰$ است. بنابراین اثبات $\rho = ۱$ باقی می‌ماند. در (۲۰.۲) با اضافه کردن جملات $\pm S(t_j)$ و $\pm S_h(t_j)P_h$ برای $t > ۰$ با $t_{j-۱} \leqslant t \leqslant t_j$ داریم:

$$\begin{aligned}\|F_{k,h}(t)x\| &\leqslant \|(S_{k,h}(t) - S_h(t_j))P_h x\| + \|(S_h(t_j)P_h - S(t_j))x\| \\ &+ \|(S(t_j) - S(t))x\| := T_۱ + T_۲ + T_۳.\end{aligned}$$

در (۱۸.۲) گفته شد که $\{\lambda_{h,m}\}_{m=۱}^{N_k}$ مقادیرویژه مثبت $A_h$ متناظر با بردارهای ویژه متعامد $\{\varphi_{h,m}\}_{m=۱}^{N_k} \subset V_h$ هستند. برای $T_۱$ از بسط $P_h$ در جملات $\{\varphi_{h,m}\}_{m=۱}^{N_k}$ استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}T_۱^۲ &= \Big\|\sum_{m=۱}^{N_k} \lambda_{h,m}^{\frac{۱}{۲}}(S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-\lambda_{h,m}t_j})(P_h x, \lambda_{h,m}^{-\frac{۱}{۲}}\varphi_{h,m})\varphi_{h,m}\Big\|^۲ \\ &= \sum_{m=۱}^{N_k} \lambda_{h,m}|(S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-k\lambda_{h,m}j})|^۲(A_h^{-\frac{۱}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^۲.\end{aligned}$$

اگر تمام جمعوندها را با $k\lambda_{h,m} \leqslant ۱$ درنظر بگیریم. از [۳۸] به بکار بردن (۱۵.۲) با $q = ۱$ و (۱۶.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-k\lambda_{h,m}j}| &= |(S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-k\lambda_{h,m}})\sum_{i=۰}^{j-۱} S_{k,\lambda_{h,m}}^{j-۱-i}e^{-k\lambda_{h,m}i}| \\ &\leqslant Cj(k\lambda_{h,m})^۲e^{-c(j-۱)k\lambda_{h,m}}.\end{aligned} \quad (۲۷.۲)$$

بنابراین، برای $t_j = jk$ داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_{h,m}|S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-k\lambda_{h,m}j}|^۲ &\leqslant C(jk)^{-۲}k^۲\lambda_{h,m}(jk\lambda_{h,m})^۴e^{-۲cjk\lambda_{h,m}}e^{۲ck\lambda_{h,m}} \\ &\leqslant Ct_j^{-۲}k.\end{aligned}$$

که در آن از $\sup_{z\geqslant ۰} z^۴e^{-۲cz} < \infty$ استفاده می‌کنیم.

اگر جمعوندها را با $k\lambda_{h,m} > ۱$ درنظر بگیریم. تقریب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_{h,m}|S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-k\lambda_{h,m}j}|^۲ < ۲k^{-۱}(k\lambda_{h.m})^۲\left(|S_{k,\lambda_{h,m}}^j|^۲ + |e^{-k\lambda_{h,m}j}|^۲\right).$$

از [۳۸] ، برای هر $z \geqslant ۱$ با $c > ۰$ داریم:

$$|S_z| \leqslant \frac{۱}{۱+cz}. \qquad (۲۸.۲)$$

بنابراین

$$|k\lambda_{h,m}S^{j}_{k,\lambda_{h,m}}|^{۲} \leqslant \left(\frac{k\lambda_{h,m}}{۱+ck\lambda_{h,m}}\right)^{۲}(۱+ck\lambda_{h,m})^{-۲(j-۱)}$$
$$\leqslant \frac{۱}{c^{۲}}(۱+c)^{-۲(j-۱)} = \frac{۱}{c^{۲}}e^{-۲(j-۱)\log(۱+c)} \leqslant Cj^{-۲}.$$

همچنین، از بالا داریم:

$$|k\lambda_{h,m}e^{-k\lambda_{h,m}j}|^{۲} \leqslant Cj^{-۲}.$$

بنابراین،

$$\lambda_{h,m}|S^{j}_{k,\lambda_{h,m}} - e^{-k\lambda_{h,m}j}|^{۲} \leqslant Ct_j^{-۲}k.$$

از رابطه پارسوال داریم:

$$T_۱^{۲} \leqslant Ct_j^{-۲}k\sum_{m=۱}^{\infty}(A_h^{-\frac{۱}{۲}}P_hx,\varphi_{h,m})^{۲} = Ct_j^{-۲}k\|A_h^{-\frac{۱}{۲}}P_hx\|^{۲} \leqslant Ct^{-۲}k\|x\|^{۲}_{-۱}.$$

برای جمله $T_۲$ داریم:

$$T_۲ \leqslant Cht_j^{-۱}\|x\|_{-۱} \leqslant Cht^{-۱}\|x\|_{-۱}.$$

در آخر برای جمله $T_۳$ از لم ۱.۰.۲.۲ (الف) با $\nu = ۱$ و (ب) با $\nu = \frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$T_۳ = \|AS(t)S^{-\frac{۱}{۲}}(S(t_j-t)-I)A^{-\frac{۱}{۲}}x\| \leqslant Ct^{-۱}(t_j-t)^{\frac{۱}{۲}}\|x\|_{-۱} \leqslant Ct^{-۱}k^{\frac{۱}{۲}}\|x\|_{-۱}.$$

با ترکیب تقریب‌های $T_۱$ و $T_۲$ و $T_۳$ به‌دست می‌آید:

$$\|F_{k,h}(t)x\| \leqslant C(h+k^{\frac{۱}{۲}}t^{-۱}\|x\|_{-۱}.$$

پس اثبات با $\rho = ۱$ کامل می‌شود.

□

فرضیه بعدی درباره پایداری تصویر متعامد $P_h$ بحث می‌کند با در نظر گرفتن $\|x\|_۱$ که در اثبات لم بعد به‌کار می‌رود و در [۳۱] آورده شده است.
لم بعدی این بخش درباره نوعی انتگرال واضح از برآورد خطا در لم ۴.۰.۳.۲ (الف) و (ج) بحث می‌کند. [۳۱] را ببینید.

**لم ۵.۰.۳.۲.** فرض کنید $۰ \leqslant \rho \leqslant ۱$ . تحت فرضیه ۵.۰.۲.۲ , عملگر $F_{k,h}$ در برآوردهای زیر صدق می‌کند:

الف. ثابت $C$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\left\|\int_۰^t F_{k,h}(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\right\| \leqslant C(h^{۲-\rho}+k^{\frac{۲-\rho}{۲}})\|x\|_{-\rho}, \qquad x\in \dot{H}^{-\rho}, t>۰, h,k\in(۰,۱].$$

ب. طبق فرضیه ۶.۰.۲.۲ ثابت $C$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\left(\int_{0}^{t} \|F_{k,h}(\sigma)x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(h^{1+\rho}+k^{\frac{1+\rho}{2}})\|x\|_{\rho}, \qquad x\in \dot{H}^{\rho}, t>0, h,k\in(0,1].$$

**برهان.** الف. اثبات (الف) شبیه تکنیک اثبات لم ۴.۰.۳.۲ (ج) است. بدون کاستن از کلیت مساله، فرض می‌کنیم که $t=t_n$ برای هر $n\geqslant 0$ . در حقیقت اگر $t_n<t<t_{n+1}$ داریم:

$$\left\|\int_{0}^{t} F_{k,h}(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\right\| \leqslant \left\|\int_{0}^{t_n} F_{k,h}(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\right\| + \left\|\int_{t_n}^{t} F_{k,h}(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\right\| := T_1+T_2.$$

برای $T_2$ از لم ۴.۰.۳.۲ (ج) و با اضافه کردن $\pm F_{k,h}(t)x$ داریم:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_n}^{t} F_{k,h}(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\right\| &\leqslant \left\|\int_{t_n}^{t} (F_{k,h}(\sigma)-F_{k,h}(t))x\mathrm{d}\sigma\right\| + \left\|\int_{t_n}^{t} F_{k,h}(t)x\mathrm{d}\sigma\right\| \\ &= \left\|\int_{t_n}^{t} (S(\sigma)-S(t))x\mathrm{d}\sigma\right\| + (t-t_n)\|F_{k,h}(t)x\| \\ &\leqslant \left\|S(t_n)A^{\frac{\varrho}{2}}\int_{t_n}^{t} S(\sigma-t_n)A^{\frac{-\rho}{2}}x\mathrm{d}\sigma\right\| C(t-t_n)\|A^{\frac{\varrho}{2}}S(t)A^{\frac{-\rho}{2}}x\| \\ &+ C(t-t_n)(h^{2-\rho}+k^{\frac{2-\rho}{2}})t^{-1}\|x\|_{\rho}.\end{aligned}$$

در ادامه، با به‌کار بردن لم ۱.۰.۲.۲ (الف) و (د) با $\nu=\frac{\varrho}{2}$ و این حقیقت که $(t-t_n)t^{-1}\leqslant 1$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_n}^{t} F_{k,h}(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\right\| &\leqslant C((t-t_n)^{1-\frac{\varrho}{2}}+(t-t_n)t^{\frac{-\rho}{2}}+h^{2-\rho}+k^{\frac{2-\rho}{2}})\|x\|_{-\rho} \\ &\leqslant C(h^{2-\rho}+k^{\frac{2-\rho}{2}})\|x\|_{-\rho}.\end{aligned}$$

برای $T_1$ با اضافه کردن $\pm S_h(\sigma)P_h x$ داریم:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{0}^{t_n} F_{k,h}(\sigma)x\mathrm{d}\sigma\right\| &\leqslant \left\|\int_{0}^{t_n} (S_{k,h}(\sigma)-S_h(\sigma))P_h x\mathrm{d}\sigma\right\| \\ &+ \left\|\int_{0}^{t_n} (S_h(\sigma)P_h-S(\sigma))x\mathrm{d}\sigma\right\|.\end{aligned}$$

برای جمعوند دوم کران

$$\left\|\int_{0}^{t_n} (S_h(\sigma)P_h-S(\sigma))x\mathrm{d}\sigma\right\| \leqslant Ch^{2-\rho}\|x\|_{-\rho}.$$

به‌دست می‌آید.

بنابراین کافیست برای جمعوند اول نشان دهیم:

$$\left\|\int_{0}^{t_n} (S_{k,h}(\sigma)-S_h(\sigma))P_h x\mathrm{d}\sigma\right\| \leqslant Ck^{\frac{2-\rho}{2}}\|x\|_{-\rho}.$$

که در آن ثابت $C=C(\rho)$ مستقل از $h,k\in(0,1]$ و $t>0$ است و $x\in\dot{H}^{-\rho}$.

با بسط تعریف $S_{k,h}$ داریم:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{۰}^{t_n}(S_{k,h}(\sigma)-S_h(\sigma))P_h x\mathrm{d}\sigma\right\| \leqslant & \left\|\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S_{k,h}^j - S_h(t_j))P_h x\mathrm{d}\sigma\right\| \\ &+\left\|\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S_h(t_j)-S_h(\sigma))P_h x\mathrm{d}\sigma\right\| := I_۱ + I_۲.\end{aligned} \tag{۲۹.۲}$$

در (۱۸.۲) مقادیرویژه مثبت $\{\lambda_{h,m}\}_{m=۱}^{N_k}$ $A_h$ متناظر با بردارهای ویژه متعامد $\{\varphi_{h,m}\}_{m=۱}^{N_k}$ تعریف شد. رابطه پارسوال برای $I_۱$ می‌دهد:

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S_{k,h}^j - S_h(t_j))P_h x\mathrm{d}\sigma\right\|^۲ \\ &= \sum_{m=۱}^{N_k}\left|k\sum_{j=۱}^{n}(S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-\lambda_{h,m}t_j})\right|^۲ (P_h x,\varphi_{h,m})^۲ \\ &\leqslant \sum_{m=۱}^{N_k}\left(k\sum_{j=۱}^{n}\lambda_{h,m}^{\frac{\varrho}{۲}}|S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-\lambda_{h,m}t_j}|\right)^۲ (A_h^{\frac{-\varrho}{۲}}P_h x,\varphi_{h,m})^۲.\end{aligned}$$

مشابه اثبات لم ۴۰.۳.۲ (ج) ابتدا برای جمعوند با $k\lambda_{h,m}\leqslant ۱$ ثابت می‌کنیم. در این مورد، (۲۷.۲) می‌دهد:

$$\begin{aligned}k\sum_{j=۱}^{n}\lambda_{h,m}^{\frac{\varrho}{۲}}|S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-\lambda_{h,m}t_j}| \leqslant & Ck\sum_{j=۱}^{n}\lambda_{h,m}^{\frac{\varrho}{۲}} j(k\lambda_{h,m})^۲ e^{-c(j-۱)k\lambda_{h,m}} \\ &= C\lambda_{h,m}^{\frac{\varrho+۴}{۲}} e^{ck\lambda_{h,m}} k^۲ \sum_{j=۱}^{n} jke^{-cjk\lambda_{h,m}} \\ &\leqslant C\lambda_{h,m}^{\frac{\varrho+۴}{۲}} k\int_{۰}^{\infty}(\sigma+k)e^{-c\lambda_{h,m}\sigma}\mathrm{d}\sigma \\ &\leqslant C\lambda_{h,m}^{\frac{\varrho+۴}{۲}} k\left(\frac{۱}{(c\lambda_{h,m})^۲}+\frac{k}{c\lambda_{h,m}}\right) \\ &\leqslant Ck^{\frac{۲-\varrho}{۲}}.\end{aligned}$$

اگر جمعوندها را با $k\lambda_{h,m} > ۱$ درنظر بگیریم، تقریب زیر را به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}k\sum_{j=۱}^{n}\lambda_{h,m}^{\frac{\varrho}{۲}}|S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-\lambda_{h,m}t_j}| < & k^{\frac{۲-\varrho}{۲}}\sum_{j=۱}^{n} k\lambda_{h,m}(|S_{k,\lambda_{h,m}}^j| + e^{-k\lambda_{h,m}j}) \\ &\leqslant k^{\frac{۲-\varrho}{۲}}\left(\frac{k\lambda_{h,m}}{۱+ck\lambda_{h,m}}\sum_{j=۱}^{n}(۱+c)^{-(j-۱)}\right. \\ &\left. +k\lambda_{h,m}e^{-k\lambda_{h,m}}\sum_{j=۱}^{n}e^{-(j-۱)}\right) \leqslant Ck^{\frac{۲-\varrho}{۲}}.\end{aligned}$$

از (۲.۲۸) و $e^{-k\lambda_{h,m}(j-1)} < e^{-(j-1)}$ استفاده کردیم. بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S_{k,h}^j - S_h(t_j))P_hx\mathrm{d}\sigma\Big\|^2 &\leqslant Ck^{2-\rho}\sum_{j=1}^{N_k}(A_h^{\frac{-\rho}{2}}P_hx,\varphi_{h,m})^2 \\ &= Ck^{2-\rho}\|A_h^{\frac{-\rho}{2}}P_hx\|^2.\end{aligned} \tag{۲.۳۰}$$

برای کامل شدن اثبات یافتن تقریبی برای $I_2$ در (۲.۲۹) باقی می‌ماند. با استفاده از رابطه پارسوال، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S_h(t_j) - S_h(\sigma))P_hx\mathrm{d}\sigma\Big\|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{N_k}\Big|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(e^{-\lambda_{h,m}t_j} - e^{-\lambda_{h,m}\sigma})\mathrm{d}\sigma\Big|^2(P_hx,\varphi_{h,m})^2 \\ &= \sum_{m=1}^{N_k}\Big|\lambda_{h,m}^{\frac{\rho}{2}}\sum_{j=1}^{n}e^{-\lambda_{h,m}t_{j-1}}\int_0^k(e^{-k\lambda_{h,m}} - e^{-\lambda_{h,m}\sigma})\mathrm{d}\sigma\Big|^2(A_h^{\frac{-\rho}{2}}P_hx,\varphi_{h,m})^2.\end{aligned}$$

از طرفی، با توجه به

$$\int_0^k(e^{-k\lambda_{h,m}} - e^{-\lambda_{h,m}\sigma})\mathrm{d}\sigma = ke^{-k\lambda_{h,m}} - \frac{1}{\lambda_{h,m}}(1 - e^{-k\lambda_{h,m}}).$$

داریم:

$$\begin{aligned}&\Big|\lambda_{h,m}^{\frac{\rho}{2}}\sum_{j=1}^{n}e^{-\lambda_{h,m}t_{j-1}}\int_0^k(e^{-k\lambda_{h,m}} - e^{-\lambda_{h,m}\sigma})\mathrm{d}\sigma\Big|^2 \\ &= \Big|\lambda_{h,m}^{\frac{\rho}{2}}\Big(ke^{-k\lambda_{h,m}} - \frac{1}{\lambda_{h,m}}(1 - e^{-k\lambda_{h,m}})\Big)\sum_{j=1}^{n}e^{-k\lambda_{h,m}(j-1)}\Big|^2 \\ &= \lambda_{h,m}^{\rho-2}|k\lambda_{h,m}e^{-k\lambda_{h,m}} - (1 - e^{-k\lambda_{h,m}})|^2(1 - e^{-k\lambda_{h,m}})^{-2}.\end{aligned}$$

اگر $k\lambda_{h,m} \leqslant 1$ ، داریم:

$$\begin{aligned}|k\lambda_{h,m}e^{-k\lambda_{h,m}} - (1 - e^{-k\lambda_{h,m}})|^2 &= e^{-2k\lambda_{h,m}}|e^{k\lambda_{h,m}} - 1 - k\lambda_{h,m}|^2 \\ &\leqslant Ck^4\lambda_{h,m}^4.\end{aligned}$$

بنابراین، در این مورد تقریب

$$\begin{aligned}&\Big|\lambda_{h,m}^{\frac{\rho}{2}}\sum_{j=1}^{n}e^{-\lambda_{h,m}t_{j-1}}\int_0^k(e^{-k\lambda_{h,m}} - e^{-\lambda_{h,m}\sigma})\mathrm{d}\sigma\Big|^2 \\ &\leqslant Ck^{2-\rho}(k\lambda_{h,m})^{\rho}\frac{\lambda_{h,m}^2k^2}{(1 - e^{k\lambda_{h,m}})^2} \leqslant Ck^{2-\rho}.\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید که در آن از تابع $x \mapsto x(1 - e^{-x})^{-1}$ که برای هر $x \in (0,1]$ کران‌دار است، استفاده کرده‌ایم.

$k\lambda_{h,m} > 1$ را درنظر می‌گیریم. اگر داشته باشیم

$$\lambda_{h,m}^{\rho-2} < k^{2-\rho}, \qquad \sup_{x\geqslant 0} xe^{-x} < \infty.$$

و
$$(1-e^{-k\lambda_{h,m}})^{-2}\leqslant(1-e^{-1})^{-2}.$$
داریم:
$$\Big|\lambda_{h,m}^{\frac{\rho}{2}}\sum_{j=1}^{n}e^{-\lambda_{h,m}t_{j-1}}\int_{0}^{k}(e^{-k\lambda_{h,m}}-e^{-\lambda_{h,m}\sigma})\mathrm{d}\sigma\Big|^{2}$$
$$\leqslant 2\lambda_{h,m}^{\rho-2}\left(|k\lambda_{h,m}e^{-k\lambda_{h,m}}|^{2}+|1-e^{-k\lambda_{h,m}}|^{2}\right)(1-e^{-k\lambda_{h,m}})^{-2}\leqslant Ck^{2-\rho}.$$
در نهایت $I_2$ برابر می‌شود با:
$$\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S_h(t_j)-S_h(\sigma))P_hx\mathrm{d}\sigma\Big\|^{2}\leqslant Ck^{2-\rho}\sum_{m=1}^{N_k}(A_h^{\frac{-\rho}{2}}P_hx,\varphi_{h,m})^{2}$$
$$\leqslant Ck^{2-\rho}\|A_h^{\frac{-\rho}{2}}P_hx\|^{2}.$$
با ترکیب فرمول بالا با (۳۰.۲) اثبات (۲۹.۲) کامل می‌شود. در نتیجه اثبات (الف) با جمع دو تقریب $T_1$ و $T_2$ کامل می‌شود.

ب. بدون کاستن از کلیت مساله، فرض می‌کنیم $t=t_n$ برای هر $n\geqslant 0$ . مشابه اثبات (الف) داریم:
$$\left(\int_{0}^{t}\|F_{k,h}(\sigma)x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_{0}^{t_n}\|F_{k,h}(\sigma)x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{t_n}^{t}\|F_{k,h}(\sigma)x\|\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}:=T_1+T_2.$$
برای $T_2$ داریم:
$$\left(\int_{t_n}^{t}\|F_{k,h}(\sigma)x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_{t_n}^{t}\|S(\sigma)-S(t))x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+(t-t_n)^{\frac{1}{2}}\|F_{k,h}(t)x\|.$$
برای جمعوند دوم از لم ۴.۰.۳.۲ (الف) با $\mu=1+\rho$ و $\nu=\rho$ همراه با $(t-t_n)t^{-1}\leqslant 1$ استفاده می‌کنیم و تقریب بدست می‌آید. جمعوند اول با لم ۱.۰.۲.۲ (ب) بدست می‌آید:
$$\left(\int_{t_n}^{t}\|(S(\sigma)-S(t))x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{t_n}^{t}\|S(\sigma)A^{\frac{-\rho}{2}}(I-S(t-\sigma))A^{\frac{\rho}{2}}x\|^{2}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left(\int_{t_n}^{t}(t-\sigma)^{\rho}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|_{\rho}\leqslant Ck^{\frac{1+\rho}{2}}\|x\|_{\rho}.$$
پس داریم:
$$\left(\int_{t_n}^{t}\|F_{k,h}(\sigma)x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ck^{\frac{1+\rho}{2}}\|x\|_{\rho}+C(h^{1+\rho}+k^{\frac{1+\rho}{2}})\|x\|_{\rho}.$$
به‌علاوه برای $T_1$ داریم:
$$\left(\int_{0}^{t_n}\|F_{k,h}(\sigma)x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_{0}^{t_n}\|(S_{k,h}(\sigma)-S_h(\sigma))P_hx\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\int_{0}^{t_n}\|(S_h(\sigma)P_h-S(\sigma))x\|^{2}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

و لم ۱.۰.۲.۲ (ب) تقریبی برای جمعوند دوم به شکل

$$\left(\int_{\circ}^{t_n} \|(S_h(\sigma)P_h - S(\sigma))x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant Ch^{۱+\rho}\|x\|_\rho.$$

به‌دست می‌دهد.

بنابراین برای جمعوند اول کافیست نشان دهیم

$$\left(\int_{\circ}^{t_n} \|S_{k,h}(\sigma) - S_h(\sigma))P_h x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant Ck^{\frac{۱+\rho}{۲}}\|x\|_\rho.$$

که در اثبات (الف) برای $\rho \in \{\circ, ۱\}$ این تقریب اثبات شد. برای موارد میانی تقریب را به‌دست می‌آوریم. با تعریف $S_{k,h}(t)$ آنالیزی از (۲۹.۲) به‌دست می‌آید:

$$\left(\int_{\circ}^{t_n} \|S_{k,h}(\sigma) - S_h(\sigma))P_h x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant \left(\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|S_{k,h}^j - S_h(t_j))P_h x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}}$$
$$+ \left(\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|S_h(t_j) - S_h(\sigma))P_h x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۳۱.۲)$$

برای مربع جمعوند اول، رابطه پارسوال را نسبت به پایه ویژه متعامد $\{\varphi_{h,m}\}_{m=۱}^{N_k} \subset V_h$ از $A_h$ به‌کار برده و به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|S_{k,h}^j - S_h(t_j))P_h x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma$$
$$= \sum_{j=۱}^{n} k \sum_{m=۱}^{N_k} \lambda_{h,m}^{-\rho}|S_{k,\lambda_{h,m}}^j - e^{-k\lambda_{h,m}j}|^{۲}(A_{h,m}^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^{۲}.$$

برای تمام جمعوندها با $k\lambda_{h,m} \leqslant ۱$ (۲۷.۲) را به‌کار می‌بریم. به دست می‌آید:

$$\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|(S_{k,h}^j - S_h(t_j))P_h x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma$$
$$\leqslant C\sum_{m=۱}^{N_k} k\lambda_{h,m}^{-\rho}\sum_{j=۱}^{n} j^{۲}(k\lambda_{h,m})^{۴}e^{-۲c(j-۱)k\lambda_{h,m}}(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^{۲}$$
$$\leqslant C\sum_{m=۱}^{N_k} k^{۲}\lambda_{h,m}^{۴-\rho}e^{۲ck\lambda_{h,m}}\int_{\circ}^{\infty}(\sigma+k)^{۲}e^{-۲c\lambda_{h,m}\sigma}\mathrm{d}\sigma(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^{۲}$$
$$\leqslant C\sum_{m=۱}^{N_k} k^{۲}\lambda_{h,m}^{۴-\rho}\left(\frac{۲}{(۲c\lambda_{h,m})^{۳}} + \frac{۲k}{۲c\lambda_{h,m})^{۲}} + \frac{k^{۲}}{۲c\lambda_{h,m}}\right)(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^{۲}$$
$$\leqslant Ck^{۱+\rho}\|A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x\|^{۲}.$$

پس داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|(S_{k,h}^j - S_h(t_j))P_h x\|^{۲}\mathrm{d}\sigma \leqslant Ck^{۱+\rho}\|A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x\|^{۲}. \qquad (۳۲.۲)$$

برای جمعوندهای باقیمانده با $k\lambda_{h,m} > ۱$ از (۲۸.۲) استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} |S^j_{k,\lambda_{h,m}} - e^{-k\lambda_{h,m}j}|^۲ \leqslant ۲\sum_{j=۱}^{n}((۱+c)^{-۲j} + e^{-۲j}) \leqslant C.$$

که کران $C$ مستقل از $n$ است. ازاین‌رو، برای این مورد داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|S^j_{k,h} - S_h(t_j))P_h x\|^۲ \mathrm{d}\sigma \\ &\leqslant C\sum_{m=۱}^{N_k} k\lambda_{h,m}^{-\rho}(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^۲ < Ck^{۱+\rho}\|A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x\|^۲.\end{aligned} \tag{۳۳.۲}$$

حال، نتیجه مشابه برای مربع جمعوند دوم در (۳۱.۲) را اثبات می‌کنیم. در اثبات قسمت (الف) با به‌کار بردن رابطه پارسوال به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|S_h(t_j) - S_h(\sigma))P_h x\|^۲ \mathrm{d}\sigma \\ &= \sum_{j=۱}^{n} k\sum_{m=۱}^{N_k} \lambda - h, m^{-\rho}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} |e^{-k\lambda_{h,m}j} - e^{-\lambda_{h,m}\sigma}|^۲ \mathrm{d}\sigma (A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^۲.\end{aligned}$$

با استفاده از این حقیقت که

$$\int_{t_{j-۱}}^{t_j} |e^{-k\lambda_{h,m}j} - e^{-\lambda_{h,m}\sigma}|^۲ \mathrm{d}\sigma \leqslant e^{-۲k\lambda_{j,m}(j-۱)}k(۱-e^{-k\lambda_{h,m}})^۲.$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|S_h(t_j) - S_h(\sigma))P_h x\|^۲ \mathrm{d}\sigma \\ &\leqslant \sum_{m=۱}^{N_k} k\lambda_{h,m}^{-\rho}k(۱-e^{-k\lambda_{h,m}})^۲(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^۲\sum_{j=۱}^{n} e^{-۲k\lambda_{h,m}(j-۱)} \\ &\leqslant \sum_{m=۱}^{N_k} k\lambda_{h,m}^{-\rho}(۱-e^{-k\lambda_{h,m}})^۲(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^۲(۱-e^{-۲k\lambda_{h,m}})^{-۱}.\end{aligned}$$

جایی‌که $۱ - e^{-۲k\lambda_{h,m}} = (۱+e^{-k\lambda_{h,m}})(۱-e^{-k\lambda_{h,m}})$ داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|S_h(t_j) - S_h(\sigma))P_h x\|^۲ \mathrm{d}\sigma \\ &\leqslant \sum_{m=۱}^{N_k} k\lambda_{h,m}^{-\rho}(۱-e^{-k\lambda_{h,m}})(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^۲(۱+e^{-k\lambda_{h,m}})^{-۱} \\ &\leqslant \frac{۱}{۲}k\sum_{m=۱}^{N_k} k\lambda_{h,m}^{-\rho}(۱-e^{-k\lambda_{h,m}})(A_h^{\frac{\varrho}{۲}}P_h x, \varphi_{h,m})^۲.\end{aligned}$$

اگر $\rho = ۰$ ، چون $۱ - e^{-k\lambda_{h,m}} \leqslant ۱$ ، به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}k\|P_h x\|^۲.$$

اگر $\rho = ۱$ پس با استفاده از $۱ - e^{-k\lambda_{h,m}} \leqslant k\lambda_{h,m}$ و اینکه طرف سمت راست کران‌دار است با $\frac{۱}{۲}k^۲\|A_h^{\frac{۱}{۲}}P_hx\|^۲$ . به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|S_h(t_j)-S_h(\sigma))P_hx\|^۲\mathrm{d}\sigma \leqslant Ck^{۱+\rho}\|A_h^{\frac{۱}{۲}}P_hx\|^۲. \qquad (۳۴.۲)$$

در پایان، ترکیبی از (۳۱.۲) و (۳۲.۲) و (۳۳.۲) و (۳۴.۲) می‌دهد:

$$\left(\int_{۰}^{t_n}\|S_{k,h}(\sigma)-S_h(\sigma))P_hx\|^۲\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant Ck^{\frac{۱+\rho}{۲}}\|A_h^{\frac{\rho}{۲}}P_hx\| \qquad (۳۵.۲)$$

که اثبات مورد $\rho = ۰$ کامل می‌شود. برای مورد $\rho = ۱$ از فرضیه ۶.۰.۲.۲ استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\|A_h^{\frac{۱}{۲}}P_hx\| = \|P_hx\|_۱ \leqslant C\|x\|_۱.$$

برای هر $x \in \dot{H}^۱$. و اثبات لم تمام می‌شود.

□

# فصل ۳

# سازگاری و پایداری طرح یک‌گامی عددی

در این فصل طرح عددی را معرفی می‌کنیم که مدل مشابه طرح میلستین-گالرکین است. با توجه به فرضیات طرح عددی، ثابت می‌کنیم این طرح پایدار و سازگار است. در فصل بعد، نشان می‌دهیم که طرح المان محدود میلستین-گالرکین برای چارچوب کار (۱.۳) مناسب است.

## ۱.۳ تعریف طرح یک‌گامی محض

فرض کنید

- $k \in (\circ, T]$ اندازه گام زمانی متساوی‌الفاصله.
- $\mathcal{T}_k := \{t_n : n = \circ, ۱, \cdots N_k\}$ مجموعه‌ای از نقاط شبکه زمانی.
- $N_k k \leqslant T \leqslant (N_k + ۱)k$ با $N_k \in N$.

عنصر مهم اولیه که طرح عددی را تعیین می‌کند خانواده‌ای از عملگرهای خطی کراندار $S_k : H \to H$ است که تقریب نیم‌گروه $\{S(t)\}_{t\in[\circ,T]}$ است.

همچنین، فرض کنید مجموعه $\mathbb{T} \subset [\circ, T) \times (\circ, T]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{T} := \{(t, k) \in [\circ, T) \times (\circ, T] : t + k \leqslant T\}.$$

تابع رشد که با نگاشت $\Phi : H \times \mathbb{T} \times \Omega \to H$ بیان می‌شود مفروض است به‌گونه‌ای‌که برای هر $(t, k) \in \mathbb{T}$ نگاشت $(x, \omega) \mapsto \Phi(x, t, k)(\omega)$ نسبت به $\mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{F}_{t+k} / \mathcal{B}(H)$ ، اندازه‌پذیر است.

برای هر $k \in (\circ, T]$ و $n \in \{۱, \cdots, N_k\}$ فرآیند تصادفی گسسته در زمان $X_k : \mathcal{T}_k \times \Omega \to H$ با رابطه بازگشتی زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} X_k(t_\circ) &:= \xi, \\ X_k(t_n) &:= S_k X_k(t_{n-۱}) + \Phi(X_k(t_{n-۱}), t_{n-۱}, k). \end{aligned} \qquad (۱.۳)$$

$\xi:\Omega\to H$ به نمایندگی از مقدار اولیه طرح عددی ، متغیر تصادفی $\mathcal{F}_{t_0}/\mathcal{B}(H)$ -اندازه‌پذیر است، که نشان‌دهنده این است که $X_k(t_n)$ برای $n\in\{1,\cdots,N_k\}$ $\mathcal{F}_{t_0}/\mathcal{B}(H)$ -اندازه‌پذیر است.

بعد از معرفی مفهوم طرح عددی، اساس مفهوم سازگاری و پایداری برای روش‌های یک‌گامی را از [۱۶] و [۲۰] یادآوری می‌کنیم. ابتدا، خانواده فضای خطی تطبیق شده، تابع شبکه $p$-انتگرال‌پذیر را برای هر $p\in[0,\infty)$ و $k\in(0,T]$ معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k):=\{Z:\mathcal{T}_k\times\Omega\to H: Z(t_n)\in L_p(\Omega,\mathcal{F}_{t_n},\mathbf{P};H),\quad \forall n\in\{0,1,\cdots,N_k\}\}.$$

نرم در فضای $\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ برای هر $Z\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\|Z\|_{0,p}:=\max_{n\in\{0,\cdots,N_k\}}\|Z(t_n)\|_{L_p(\Omega;H)}. \tag{۲.۳}$$

و

$$\|Z\|_{-1,p}:=\|Z(t_0)\|_{L_p(\Omega;H)}+\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n}S_k^{n-j}Z(t_j)\Big\|_{L_p(\Omega;H)}. \tag{۳.۳}$$

نرم $\|\cdot\|_{-1,p}$ را نرم تصادفی می‌نامیم و برای تقریب خطای همگرایی به‌کار می‌بریم. برای مثال [۱۶، ۹، ۳۶، ۲۷، ۱۷] را ببینید.

برای $p\in[2,\infty)$ ، خانواده عملگرهای غیرخطی $\mathcal{R}_k:\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)\to\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ را تعریف می‌کنیم که برای هر $k\in(0,T]$ و $n\in\{1,\cdots,N_k\}$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_k[Z](t_0)=Z(t_0)-\xi,\\&\mathcal{R}_k[Z](t_n)=Z(t_n)-S_kZ(t_{n-1})-\Phi(Z(t_{n-1}),t_{n-1},k).\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

برای عملگر $\mathcal{R}_k$ فرض کنید $\mathcal{R}_k[X_k]=0\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ که در آن $X_k\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ فرآیند تصادفی گسسته در زمان تولید شده توسط طرح عددی (۱.۳) است. نگاشت $\mathcal{R}_k$ عملگر باقیمانده متناظر با طرح عددی (۱.۳) نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۱.۳.** فرض کنیم $p\in[2,\infty)$. طرح عددی (۱.۳) دوپایدار (نسبت به نورم $\|\cdot\|_{0,p}$ و $\|\cdot\|_{-1,p}$) است اگر عملگر باقیمانده $\mathcal{R}_k:\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)\to\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ خوش‌تعریف و برای هر $k\in(0,T]$ دوسویی باشد.

همچنین، ثابت $C_{stab}$ مستقل از $k\in(0,T]$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $k\in(0,T]$ و $Y,Z\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ داریم:

$$\frac{1}{C_{stab}}\|\mathcal{R}_k[Y]-\mathcal{R}_k[Z]\|_{-1,p}\leqslant\|Y-Z\|_{0,p}\leqslant C_{stab}\|\mathcal{R}_k[Y]-\mathcal{R}_k[Z]\|_{-1,p}. \tag{۵.۳}$$

یعنی برای طرح عددی دوپایدار، فاصله بین دو تابع شبکه تطبیق شده دلخواه می‌تواند با فاصله اندازه باقیمانده آن‌ها نسبت به نرم تصادفی تخمین زده شود و برعکس.

برای سازگاری، $Z|_{\mathcal{T}_k}\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ را فرآیند تصادفی پیوسته و تطبیق شده $Z:[0,T]\times\Omega\to H$ در مجموعه $\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ تعریف می‌کنیم، یعنی

$$Z|_{\mathcal{T}_k}(t_n):=Z(t_n).$$

**تعریف ۲.۱.۳.** فرض کنیم $p \in [2, \infty)$ . طرح عددی (۱.۳) نسبت به معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی (۲.۲) سازگار از مرتبه $\gamma > 0$ است، اگر ثابت $C_{cons}$ مستقل از $k$ برای هر $k \in (0, T]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p} \leqslant C_{cons} k^{\gamma}.$$

که در آن $X$ جواب ضعیف (۲.۲) است.

جمله $\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p}$ خطای برشی‌محلی[1] یا خطای سازگاری نامیده می‌شود. در آخر مفهوم همگرایی قوی را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۳.۱.۳.** فرض کنید $p \in [2, \infty)$ . طرح عددی (۱.۳) همگرای قوی از مرتبه $\gamma > 0$ است اگر برای هر $k \in (0, T]$ ثابت مستقل از $k$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\|X_k - X|_{\mathcal{T}_k}\|_{0,p} \leqslant C k^{\gamma},$$

که در آن $X_k \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ فرآیند تصادفی گسسته در زمان تولید شده توسط طرح عددی (۱.۳) باشند و $X$ جواب ضعیف (۲.۲) باشد.

**قضیه ۱.۳.۱.۳.** طرح عددی دوپایدار (۱.۳) همگرای قوی از مرتبه $\gamma > 0$ است اگر وتنها اگر سازگار از مرتبه $\gamma > 0$ باشد. برای هر $k \in (0, T]$ داریم:

$$\frac{1}{C_{stab}} \|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p} \leqslant \|X_k - X|_{\mathcal{T}_k}\|_{0,p} \leqslant C_{stab} \|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p},$$

که در آن $X_k \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ فرآیند تصادفی گسسته در زمان تولید شده توسط طرح عددی (۱.۳) را نشان می‌دهد و $X$ جواب ضعیف (۲.۲) است.

**برهان.** عملگر باقیمانده $\mathcal{R}_k : \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k) \to \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ برای هر $k \in (0, T]$ در $\mathcal{R}_k[X_k] = 0$ صدق می‌کند که در آن $X_k \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ . فرض کنید $X|_{\mathcal{T}_k} \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ . از تعریف دوپایداری طرح عددی با جایگذاری $Y = X_k$ و $Z = X|_{\mathcal{T}_k}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{C_{stab}} \|\mathcal{R}_k[X_k] - \mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p} \leqslant \|X_k - X|_{\mathcal{T}_k}\|_{0,p} \leqslant C_{stab} \|\mathcal{R}_k[X_k] - \mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p}.$$

اگر $\mathcal{R}_k[X_k] = 0$ را قرار دهیم حکم ثابت می‌شود و داریم:

$$\frac{1}{C_{stab}} \|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p} \leqslant \|X_k - X|_{\mathcal{T}_k}\|_{0,p} \leqslant C_{stab} \|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p}.$$

□

## ۲.۳ فرضیات طرح عددی

از فرضیات ذکر شده در این بخش، برای اثبات پایداری طرح عددی (۱.۳) در بخش بعد استفاده می‌شود.

[1] The Local Truncation Error

**فرضیه ۱.۰.۲.۳.** (مقدار اولیه[۲]) فرض کنید $p \in (\circ, T]$ . مقدار اولیه $\xi : \Omega \to H$ ، انتگرال‌پذیر $p$-تایی و متغیر تصادفی $\mathcal{F}_\circ / \mathcal{B}(H)$ -اندازه‌پذیر است.

دو فرضیه بعدی به خانواده عملگرهای خطی $S_k$ و تابع رشد $\Phi$ مربوط می‌شود.

**فرضیه ۲.۰.۲.۳.** (پایداری خطی[۳] ) برای خانواده عملگرهای خطی کراندار $S_k : H \to H$ به ازای هر $k \in (\circ, T]$ ، ثابت $C_s$ مستقل از $k$ وجود دارد به‌طوری‌که :

$$\sup_{k \in (\circ, T]} \sup_{n \in \{۱, \cdots, N_k\}} \|S_k^n\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant C_s.$$

**فرضیه ۳.۰.۲.۳.** (پایداری غیرخطی[۴]) فرض کنید $p \in [۲, \infty)$ و شرایط همانند فرضیه ۱.۰.۲.۳ باشد. برای هر $(t, k) \in \mathbb{T}$ نگاشت $\Phi(\cdot, t, k) : H \times \Omega \to H$ نسبت به $\mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{F}_{t+k} / \mathcal{B}(H)$ اندازه‌پذیر است. به‌علاوه ثابت $C_\Phi$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $k \in (\circ, T]$ و $n, m \in \{۱, \cdots, N_k\}$ با $n \geqslant m$ داریم:

$$\Big\| \sum_{j=m}^{n} S_k^{n-j} \Phi(\circ, t_{j-۱}, k) \Big\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C_\Phi (t_n - t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}. \tag{۶.۳}$$

درکل، برای هر $Y, Z \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ داریم:

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j} \big(\Phi(Y(t_{j-۱}), t_{j-۱}, k) - \Phi(Z(t_{j-۱}), t_{j-۱}, k)\big) \Big\|^۲_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant C_\Phi^۲ k \sum_{j=۱}^{n} (t_n - t_{j-۱})^{-\frac{۱}{۲}} \|Y(t_{j-۱}) - Z(t_{j-۱})\|^۲_{L_p(\Omega;H)}. \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

حال، نشان می‌دهیم که از فرضیه ۳.۰.۲.۳ برای هر $k \in (\circ, T]$ و $n \in \{۱, \cdots, N_k\}$ و هر $Z \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ به‌دست می‌آید که

$$\|\Phi(Z(t_{n-۱}), t_{n-۱}, k)\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C_\Phi k^{\frac{۱}{۲}} (T^{\frac{۱}{۲}} + \|Z(t_{n-۱})\|_{L_p(\Omega;H)}). \tag{۸.۳}$$

$\hat{Z} \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{Z}(t_j) = \begin{cases} Z(t_{n-۱}), & j = n - ۱ \\ \circ, & j \neq n - ۱ \end{cases}$$

در (۷.۳) $Y(t_{j-۱}) = \hat{Z}(t_{j-۱})$ و $Z(t_{j-۱}) = \circ$ را جایگذاری می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j} \big(\Phi(\hat{Z}(t_{j-۱}), t_{j-۱}, k) - \Phi(\circ, t_{j-۱}, k)\big) \Big\|^۲_{L_p(\Omega;H)} \\ &= \|S_k^{n-۱}(\Phi(\hat{Z}(t_\circ), t_\circ, k) - \Phi(\circ, t_\circ, k)) + S_k^{n-۲}(\Phi(\hat{Z}(t_۱), t_۱, k) - \Phi(\circ, t_۱, k)) \\ &+ \cdots + S_k^{n-n+۱}(\Phi(\hat{Z}(t_{n-۱-۱}), t_{n-۱-۱}, k) - \Phi(\circ, t_{n-۱-۱}, k)) \\ &+ S_k^{n-n}(\Phi(\hat{Z}(t_{n-۱}), t_{n-۱}, k) - \Phi(\circ, t_{n-۱}, k))\|. \end{aligned}$$

[۲]Initial Value

[۳]Linear Stability

[۴]Nonlinear Stability

از تعریف $\hat{Z}(t_j)$ داریم:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\Phi(\hat{Z}(t_{j-1}),t_{j-1},k)-\Phi(0,t_{j-1},k))\Big\|^2_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad=\|S_k^{n-n}(\Phi(\hat{Z}(t_{n-1}),t_{n-1},k)-\Phi(0,t_{n-1},k))\|\\&\quad=\|(\Phi(Z(t_{n-1}),t_{n-1},k)-\Phi(0,t_{n-1},k))\|.\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}&\|\Phi(Z(t_{n-1}),t_{n-1},k)\|_{L_p(\Omega;H)}\\&=\Big\|\sum_{j=1}^{n}\Big[S_k^{n-j}(\Phi(\hat{Z}(t_{j-1}),t_{j-1},k)-\Phi(0,t_{j-1},k))\Big]+\Phi(0,t_{n-1},k)\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

از طرفی از (۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\Phi(\hat{Z}(t_{j-1}),t_{j-1},k)-\Phi(0,t_{j-1},k))\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad\leqslant C_\Phi k^{\frac{1}{4}}\sum_{j=1}^{n}(t_n-t_{j-1})^{-\frac{1}{4}}\|\hat{Z}(t_{j-1}-0)\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad=C_\Phi k^{\frac{1}{4}}\Big[(t_n-t_0)^{-\frac{1}{4}}\|\hat{Z}(t_0)\|_{L_p(\Omega;H)}+\cdots+(t_n-t_{n-2})^{-\frac{1}{4}}\|\hat{Z}(t_{n-2})\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\qquad+(t_n-t_{n-1})^{-\frac{1}{4}}\|\hat{Z}(t_{n-1})\|_{L_p(\Omega;H)}\Big].\end{aligned}$$

با توجه به تعریف $\hat{Z}(t_j)$ داریم:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\Phi(\hat{Z}(t_{j-1}),t_{j-1},k)-\Phi(0,t_{j-1},k))\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad\leqslant C_\Phi k^{\frac{1}{4}}(nk-(n-1)k)^{-\frac{1}{4}}\|\hat{Z}(t_{n-1})\|\\&\quad=C_\Phi k^{\frac{1}{4}}\|Z(t_{n-1})\|.\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&\|\Phi(Z(t_{n-1}),t_{n-1},k)\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad\leqslant C_\Phi k^{\frac{1}{4}}\|Z(t_{n-1})\|_{L_p(\Omega;H)}+\|\Phi(0,t_{n-1},k)\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

به‌علاوه (۶.۳) با $n=m$ می‌دهد:

$$\|\Phi(0,t_{n-1},k)\|_{L_p(\Omega;H)}\leqslant C_\Phi(t_n-t_{n-1})^{\frac{1}{2}}=C_\Phi T^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}}.$$

بنابراین حکم با جایگذاری اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned}&\|\Phi(Z(t_{n-1}),t_{n-1},k)\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad\leqslant C_\Phi k^{\frac{1}{4}}\|Z(t_{n-1})\|+C_\phi T^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}}\\&\quad=\leqslant C_\Phi k^{\frac{1}{4}}(T^{\frac{1}{4}}+\|Z(t_{n-1})\|_{L_p(\Omega;H)}).\end{aligned}$$

## ۳.۳ دوپایداری طرح عددی

در این بخش نشان می‌دهیم که فرضیات ۳.۰.۲.۳ ، ۱.۰.۲.۳ برای دوپایداری طرح عددی مناسب می‌باشند. قبل از اثبات دوپایداری لم زیر را بیان می‌کنیم که در اثبات از آن استفاده می‌شود. اثبات این لم در [۲۴] آورده شده است.

**لم ۱.۰.۳.۳.** (لم گرونوال گسسته) فرض کنید $T > ۰$ و $k \in (۰, T]$ و $\eta \in (۰, ۱]$ و دنباله نامنفی حقیقی‌مقدار $x_n$ با $n \in \{۰, \cdots, N_k\}$ داده شده است. اگر ثابت‌های $C_۱$ و $C_۲$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$x_n \leqslant C_۱ + C_۲ k \sum_{j=۱}^{n} (t_n - t_{j-۱})^{-۱+\eta} x_{j-۱}.$$

آنگاه برای هر $n = ۰, \cdots, N_k$ ثابت $C = C(C_۲, T, \eta)$ مستقل از $k$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$x_n \leqslant C C_۱.$$

**قضیه ۲.۰.۳.۳.** اگر فرضیات ۱.۰.۲.۳ و ۳.۰.۲.۳ با $p \in [۲, \infty)$ برقرار باشند. پس برای هر $k \in (۰, T]$ نگاشت $\mathcal{R}_k : \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k) \to \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ خوش‌تعریف و دوسویی می‌باشد. به‌علاوه طرح عددی (۱.۳) دوپایدار است.

**برهان.** فرض کنید $k \in (۰, T]$ دلخواه باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathcal{R}_k : \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k) \to \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ خوش‌تعریف است.

برای هر $n \in \{۱, \cdots, N_k\}$ و $Z \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ ، متغیر تصادفی $\mathcal{R}_k[Z](t_n)$ ، $\mathcal{F}_{t_n}$–اندازه‌پذیر است. با فرضیات ۱.۰.۲.۳ و ۲.۰.۲.۳ و (۸.۳) $\mathcal{R}_k[Z](t_n)$ برای هر $n \in \{۱, \cdots, N_k\}$ انتگرال‌پذیر $p$–تایی است. بنابراین $\mathcal{R}_k[Z] \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ .

حال یک‌به‌یک بودن $\mathcal{R}_k$ را با استقرا ثابت می‌کنیم. برای $Z, Y \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ داریم $\mathcal{R}_k[Y] = \mathcal{R}_k[Z]$ . پس به‌طور خاص داریم:

$$\mathcal{R}_k[Y](t_۰) = \mathcal{R}_k[Z](t_۰).$$

و از (۴.۳) داریم:

$$Y(t_۰) - \xi = Z(t_۰) - \xi.$$

که $Y(t_۰) = Z(t_۰)$ را نتیجه می‌دهد.

به‌علاوه، فرض می‌کنیم برای $n \in \{۱, \cdots, N_k - ۱\}$ و $j \in \{۰, \cdots, n\}$ داریم:

$$Y(t_j) = Z(t_j).$$

باید ثابت کنیم حکم برای $j = n + ۱$ برقرار است.

با (۴.۳) به‌دست می‌آید که:

$$Y(t_{n+۱}) - S_k Y(t_n) - \Phi(Y(t_n), t_n, k) = Z(t_{n+۱}) - S_k Z(t_n) - \Phi(Z(t_n), t_n, k).$$

ازاین‌رو طبق فرض به‌دست می‌آید $Y(t_{n+۱}) = Z(t_{n+۱})$ که ثابت می‌کند $\mathcal{R}_k$ یک‌به‌یک است.

به‌علاوه برای $V \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ دلخواه، تابع شبکه‌ای $Z \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ برای هر $n \in \{1, \cdots, N_k\}$ تعریف می شود با

$$\begin{aligned} Z(t_0) &:= V(t_0) + \xi, \\ Z(t_n) &:= S_k^n Z(t_0) + \sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\Phi(Z(t_{j-1}), t_{j-1}, k) + V(t_j)). \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

$R^N[Z] = V$ صادق است، که با استقرا به‌دست می‌آید. بنابراین $R^N$ پوشا است. در نتیجه نگاشت $\mathcal{R}_k$ دوسویی است.

برای اثبات دوپایداری کافیست نامعادله (۵.۳) را اثبات کنیم. برای هر $Z \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ به‌طور معادل تغییرات گسسته (۹.۳) برای هر $n \in \{1, \cdots, N_k\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Z(t_0) &= \mathcal{R}_k[Z](t_0) + \xi, \\ Z(t_n) &:= S_k^n Z(t_0) + \sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\Phi(Z(t_{j-1}), t_{j-1}, k) + \mathcal{R}_k[Z](t_j)). \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

با استفاده از (۱۰.۳) و (۷.۳) و فرضیه ۲.۰.۲.۳ برای هر $Y, Z \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \|Y(t_n) - Z(t_n)\|_{L_p(\Omega;H)} &\leqslant \|S_k^n(Y(t_0) - Z(t_0))\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\quad + \Big\|\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\Phi(Y(t_{j-1}, t_{j-1}, k)) - \Phi(Z(t_{j-1}), t_{j-1}, k))\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\quad + \Big\|\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\mathcal{R}[Y](t_j) - \mathcal{R}_k[Z](t_j))\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant C_s\|Y(t_0) - Z(t_0)\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\quad + C_\Phi\left(k\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\|Y(t_{j-1}) - Z(t_{j-1})\|^2_{L_p(\Omega;H)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \Big\|\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\mathcal{R}_k[Y](t_j) - \mathcal{R}_k[Z](t_j))\Big\|_{L_p(\Omega;H)}. \end{aligned}$$

طبق خاصیت یک‌به‌یک داریم:

$$\|Y(t_0) - Z(t_0)\|_{L_p(\Omega;H)} = \|\mathcal{R}_k[Y](t_0) - \mathcal{R}_k[Z](t_0)\|_{L_p(\Omega;H)}.$$

با جایگذاری به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \|Y(t_n) - Z(t_n)\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant& C_s\|\mathcal{R}_k[Y](t_0) - \mathcal{R}_k[Z](t_0)\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &+ C_\Phi\left(k\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\|Y(t_{j-1}) - Z(t_{j-1})\|^2_{L_p(\Omega;H)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \Big\|\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(\mathcal{R}_k[Y](t_j) - \mathcal{R}_k[Z](t_j))\Big\|_{L_p(\Omega;H)}. \end{aligned}$$

حال از تعریف نرم $\|\cdot\|_{-1,p}$ در (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\|Y(t_n)-Z(t_n)\|^2_{L_p(\Omega;H)} \leqslant& 2(1+C_s)^2\|\mathcal{R}_k[Y]-\mathcal{R}_k[Z]\|^2_{-1,p}\\ &+2C_\Phi^2 k\sum_{j=1}^{n}(t_n-t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\|Y(t_{j-1})-Z(t_{j-1})\|^2_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

با به‌کار بردن لم گرونوال گسسته[5] ( لم ۳.۳.۰.۱ ) داریم:

$$\|Y(t_n)-Z(t_n)\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C\|\mathcal{R}_k[Y]-\mathcal{R}_k[Z]\|_{-1,p}.$$

به این ترتیب، اثبات نامعادله طرف راست در (۵.۳) کامل می‌شود.

به‌طور مشابه، از (۱۰.۳) و (۷.۳) برای هر $n\in\{1,\cdots,N_k\}$ و $Y,Z\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=1}^{n}S_k^{n-j}(\mathcal{R}_k[Y](t_j)-\mathcal{R}_k[Z](t_j))\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &\quad\leqslant \|Y(t_n)-Z(t_n)\|_{L_p(\Omega;H)}+\|S_k^n(Y(t_0)-Z(t_0))\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &\qquad+\Big\|\sum_{j=1}^{n}S_k^{n-j}(\Phi(Y(t_{j-1}),t_{j-1},k))-\Phi(Z(t_{j-1},t_{j-1},k))\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &\quad\leqslant 2\|Y-Z\|_{0,p}+C_\Phi\left(k\sum_{j=1}^{n}(t_n-t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\|Y(t_{j-1})-Z(t_{j-1})\|^2_{L_p(\Omega;H)}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\leqslant\left(2+C_\Phi\left(k\sum_{j=1}^{n}(t_n-t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\|Y-Z\|_{0,p}.\end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$k\sum_{j=1}^{n}(t_n-t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\leqslant\int_0^{t_n}\sigma^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\sigma\leqslant 2t_n^{\frac{1}{2}}\leqslant 2T^{\frac{1}{2}}. \qquad (۱۱.۳)$$

درستی نامعادله را از طرف چپ (۵.۳) نشان دادیم. □

**نتیجه ۳.۳.۰.۱.** فرض کنید $X_k\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ برای $k\in(0,T]$ فرآیند تصادفی گسسته در زمان باشد که با طرح عددی (۱.۳) تولید شده است. تحت فرضیات ۳.۲.۰.۱ و ۳.۲.۰.۳ با $p\in[2,\infty)$ داریم:

$$\|X_k\|_{0,p}\leqslant C_{stab}\left(\|\xi\|_{L_p(\Omega;H)}+C_\Phi T^{\frac{1}{2}}\right).$$

**برهان.** تحت فرضیات داده شده طرح عددی (۱.۳) پایدار است. چون $\mathcal{R}_k[X_k]=0\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ پس داریم:

$$\begin{aligned}\|X_k\|_{0,p}=\|X_k-0\|_{0,p}&\leqslant C_{stab}\|\mathcal{R}_k[X_k]-\mathcal{R}_k[0]\|_{-1,p}\\ &=C_{stab}\|\mathcal{R}_k[0]\|_{-1,p}.\end{aligned}$$

[5] Discrete Gronwall Lemma

از تعریف نرم و (۶.۳) به‌دست می‌آید:

$$\|\mathcal{R}_k[\circ]\|_{-۱,p} = \|\xi\|_{L_p(\Omega;H)} + \max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\Phi(\circ, t_{j-۱}, k)\Big\|_{L_p(\Omega;H)}$$
$$\leqslant \|\xi\|_{L_p(\Omega;H)} + C_\Phi T^{\frac{۱}{۲}}.$$

با جایگذاری به‌دست می‌آید:

$$\|X_k\|_{\circ,p} \leqslant C_{stab}\left(\|\xi\|_{L_p(\Omega;H)} + C_\Phi T^{\frac{۱}{۲}}\right).$$

□

## ۴.۳ سازگاری طرح عددی

در این بخش تجزیه‌ای از خطای برشی‌محلی $\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-۱,p}$ را به‌دست می‌آوریم که در اثبات سازگاری طرح میلستین-گالرکین به‌کار میرود. لم زیر تقریب خطای برشی‌محلی را بیان می‌کند.

جمعوند اول، شرایط اولیه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی تصادفی (۲.۲) و طرح عددی (۱.۳) را به‌هم مربوط می‌کند. سه جمعوند بعدی به اصل خطا از جایگزینی نیم‌گروه تحلیلی $\{S(t)\}_{t\in[\circ,۱]}$ با خانواده عملگرهای خطی کراندار $S_k$ ، مربوط می‌شود و در نهایت، جمعوند آخر با علت خطا توسط تابع رشد $\Phi$ سروکار دارد.

**لم ۲.۰.۴.۳.** فرض کنید $X$ جواب ضعیف (۲.۲) باشد. پس خطای برشی‌محلی برای هر $k \in (\circ, T]$ به‌صورت تقریب زیر است:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-۱,p} &\leqslant \|X(t_\circ) - \xi\|_{L_p(\Omega;H)} + \max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}}\|(S(t_n) - S_k^n)X_\circ\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&+ \max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+۱})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&+ \max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+۱})g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&+ \max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\Big[-\int_{t_{j-۱}}^{t_j} S_k f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\\
&+ \int_{t_{j-۱}}^{t_j} S_k g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) - \Phi(X(t_{j-۱}), t_{j-۱}, k)\Big]\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

**برهان.** از تعریف نرم تصادفی $\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]$ و (۴.۳) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-۱,p} = &\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}](t_۰)\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &+ \max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}](t_j)\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &= \|X(t_۰)-\xi\|_{L_p(\Omega;H)} + \max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\,[X(t_j)-S_kX(t_{j-۱}) \\ &-\Phi(X(t_{j-۱}),t_{j-۱},k)]\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

ابتدا رابطه زیر را که از (۳.۲) به‌دست می‌آید، در جمله دوم قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}X(t_j) =&S(t_j-t_{j-۱})X(t_{j-۱}) - \int_{t_{j-۱}}^{t_j} S(t_j-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma \\ &+ \int_{t_{j-۱}}^{t_j} S(t_j-\sigma)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma). \qquad P-a.s.\end{aligned}$$

پس برای هر $n\in\{۱,\cdots,N_k\}$ داریم:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=۱}^{n}S_k^{n-j}[X(t_j)-S_kX(t_{j-۱})-\Phi(X(t_{j-۱}),t_{j-۱},k)]\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant \Big\|S_k^{n-j}\Big[S(k)X(t_{j-۱}) - \int_{t_{j-۱}}^{t_j} S(t_j-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma \\ &+ \int_{t_{j-۱}}^{t_j} S(t_j-\sigma)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) - S_kX(t_{j-۱}) - \Phi(X(t_{j-۱}),t_{j-۱},k)\Big]\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

جملات $\pm\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} S_kf(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma$ و $\pm\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} S_kg(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)$ را اضافه می‌کنیم و بعد از فاکتورگیری داریم:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=۱}^{n}S_k^{n-j}[X(t_j)-S_kX(t_{j-۱})-\Phi(X(t_{j-۱}),t_{j-۱},k)]\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant \Big\|\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}((S(k)-S_k)X(t_{j-۱}) - \int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_j-\sigma)-S_k)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma \\ &+ \int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_j-\sigma)-S_k)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma))\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &+ \Big\|\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\Big[-\int_{t_{j-۱}}^{t_j} S_kf(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma + \int_{t_{j-۱}}^{t_j} S_kg(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) \\ &-\Phi(X(t_{j-۱}),t_{j-۱},k)]\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

جمعوند آخری در شکل مطلوب قبلا آمده است. بنابراین تقریب جمعوند اول باقی می‌ماند:

$$\Theta_n := \Big\| \sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}[(S(k) - S_k)X(t_{j-1}) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (S(t_j - \sigma) - S_k)f(X(\sigma)]\mathrm{d}\sigma + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (S(t_j - \sigma) - S_k)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)) \Big\|_{L_p(\Omega;H)}.$$

از (۳.۲) به‌دست می‌آید:

$$X(t_{j-1}) = S(t_{j-1})X_0 + \int_0^{t_{j-1}} S(t_{j-1} - \sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma + \int_0^{t_{j-1}} S(t_{j-1} - \sigma)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma).$$

رابطه بالا را در $\Theta_n$ جایگذاری می‌کنیم و بعد از فاکتورگیری داریم:

$$\begin{aligned}
\Theta_n = &\| \sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}[(S(k) - S_k)(S(t_{j-1})X_0 + \int_0^{t_{j-1}} S(t_{j-1} - \sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma \\
&+ \int_0^{t_{j-1}} S(t_{j-1} - \sigma)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma))] - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (S(t_j - \sigma) - S_k)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma \\
&+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} (S(t_j - \sigma) - S_k)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma))\|_{L_p(\Omega;H)} \\
\leqslant &\Big\| \sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(S(k) - S_k)S(t_{j-1})X_0 \Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&+ \| \sum_{t_{j-1}}^{n} S_k^{n-j} \Big( (S(k) - S_k) \int_0^{t_{j-1}} S(t_{j-1} - \sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma \\
&+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} (S(t_{j-1} - \sigma) - S_k)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma \Big) \|_{L_p(\Omega;H)} \\
&+ \| \sum_{t_{j-1}}^{n} S_k^{n-j} \Big( (S(k) - S_k) \int_0^{t_{j-1}} S(t_{j-1} - \sigma)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) \\
&\quad + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (S(t_{j-1} - \sigma) - S_k)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) \Big) \|_{L_p(\Omega;H)} =: \Theta_n^1 + \Theta_n^2 + \Theta_n^3.
\end{aligned}$$

از طرفی برای هر $n \in \{1, \cdots, N_k\}$

$$\sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(S(k) - S_k)S(t_{j-1}) = S(t_n) - S_k^n. \qquad (۱۲.۳)$$

برقرار است.

پس برای جمله $\Theta_n^1$ تقریب زیر به‌دست می‌آید:

$$\Theta_n^1 = \Big\| \sum_{j=1}^{n} S_k^{n-j}(S(k) - S_k)S(t_{j-1})X_0 \Big\|_{L_p(\Omega;H)} = \|(S(t_n) - S_k^n)X_0\|_{L_p(\Omega;H)}. \qquad (۱۳.۳)$$

برای $\Theta_n^۲$ با عوض کردن جای جمع و انتگرال به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}(S(k)-S_k)\int_{۰}^{t_{j-۱}} S(t_{j-۱}-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma$$
$$=\sum_{j=۱}^{n}\int_{۰}^{t_{n-۱}} \mathbb{I}_{[۰,t_{j-۱}]}S_k^{n-j}(S(k)-S_k)S(t_{j-۱}-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma = I.$$

در $S(t_{j-۱}-\sigma)$ ، $\pm t_{\ell(\sigma)}$ را اضافه می‌کنیم و از (۱۲.۳) استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{۰}^{t_{n-۱}} \sum_{j=\ell(\sigma)+۱}^{n} S_k^{n-j}[S(k)-S_k)S(t_{j-۱}-t_{\ell(\sigma)}) - S(t_{\ell(\sigma)}-\sigma)f(X(\sigma)]\mathrm{d}\sigma\\
&= \int_{۰}^{t_{n-۱}} (S(t_n-t_{\ell(\sigma)})S_k^{n-\ell(\sigma)})S(t_{\ell(\sigma)}-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\\
&= \sum_{j=۱}^{n-۱}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} (S(t_n-t_j)-S_k^{n-j})S(t_j-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\Bigg[(S(k)-S_k)\int_{۰}^{t_{j-۱}} S(t_{j-۱}-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\\
&\qquad + \int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_j-\sigma)-S_k)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Bigg]\\
&= \sum_{j=۱}^{n-۱}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\Big[S(t_n-t_j)-S_k^{n-j})S(t_j-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\\
&\qquad + \sum_{j=۱}^{n} S_k^{n-j}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_j-\sigma)-S_k)f(X(\sigma)\Bigg]\mathrm{d}\sigma\\
&= \sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_n-\sigma)-S_k^{n-j+۱})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

در کل برای هر $n\in\{۱,\cdots,N_k\}$ داریم:

$$\Theta_n^۲ = \Big\|\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_n-\sigma)-S_k^{n-j+۱})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}. \tag{۱۴.۳}$$

برای هر $\sigma\in(۰,t_{N_k}]$ داده شده، فرض کنید $\ell(\sigma)\in\mathbb{N}$ با $t_{\ell(\sigma)-۱}\leqslant\sigma\leqslant t_{\ell(\sigma)}$ تعیین شود.
برای $\Theta_n^۳$ نیز همین کار را انجام می‌دهیم و در آخر برای هر $n\in\{۱,\cdots,N_k\}$ به‌دست می‌آید:

$$\Theta_n^۳ = \Big\|\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}(S(t_n-\sigma)-S_k^{n-j+۱})g(X(\sigma))\mathrm{d}W\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}. \tag{۱۵.۳}$$

حال تقریب $\Theta_n$ از جمع سه جمعوند $\Theta_n^1$ و $\Theta_n^2$ و $\Theta_n^3$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\Theta_n =& \|(S(t_n) - S_k^n)X_0\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+ \Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+1})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+ \Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+1})g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

حال با جایگذاری به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=1}^{n}S_k^{n-j}(X(t_j) - S_kX(t_{j-1}) - \Phi(X(t_{j-1}),t_{j-1},k))\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &\leqslant \|(S(t_n) - S_k^n)X_0\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+1})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+1})g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+\Big\|\sum_{j=1}^{n}S_k^{n-j}\Big[-\int_{t_{j-1}}^{t_j}S_kf(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma + \int_{t_{j-1}}^{t_j}S_kg(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\\ &-\Phi(X(t_{j-1}),t_{j-1},k)\Big]\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

و در آخر داریم:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p} \leqslant& \|X(t_0) - \xi\|_{L_p(\Omega;H)} + \max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\|(S(t_n) - S_k^n)X_0\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+1})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_k^{n-j+1})g(X(\sigma))\mathrm{d}W\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &+\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n}S_k^{n-j}\Big[-\int_{t_{j-1}}^{t_j}S_kf(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\\ &+\int_{t_{j-1}}^{t_j}S_kg(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) - \Phi(X(t_{j-1}),t_{j-1},k)\Big]\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

□

# فصل ۴

# طرح المان محدود میلستین-گالرکین

طرح المان محدود میلستین-گالرکین را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
X_{k,h}(t_\circ) =& P_h X_\circ,\\
X_{k,h}(t_n) =& X_{k,h}(t_{n-۱}) - k[A_h X_{k,h}(t_n) + P_h f(X_{k,h}(t_{n-۱}))]\\
&+ P_h g(X_{k,h}(t_{n-۱}))\Delta_k W(t_n)\\
&+ \int_{t_{n-۱}}^{t_n} P_h g^{'}(X_{k,h}(t_{n-۱}))\left[\int_{t_{n-۱}}^{\sigma_۱} g(X_{k,h}(t_{n-۱}))\mathrm{d}W(\sigma_۲)\right]\mathrm{d}W(\sigma_۱).
\end{aligned}$$

در این فصل دوپایداری و سازگاری طرح را با فرضیات ذکر شده اثبات می‌کنیم.

## ۱.۴ دوپایداری

ثابت می‌کنیم که فرضیات ۱.۰.۲.۳ و ۳.۰.۲.۳ برقرار هستند و درنتیجه دوپایداری طرح را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید $\xi_h = P_h X_\circ$ باشد. به ازای هر $h \in (\circ, ۱]$ تعریف می‌کنیم:

$$S_{k,h} := (Id_H + kA_h)^{-۱} P_h \in \mathcal{L}(H).$$

توجه کنید در مقایسه با بخش ۲.۴ عملگر $S_{k,h}$ شامل نگاشت متعامد $P_h$ می‌شود و بنابراین عملگری از $H$ به $H$ تعریف می‌کند.

به‌علاوه، تابع رشد $\Phi_H : H \times \mathbb{T} \times \Omega \to H$ را برای هر $(t,k) \in \mathbb{T}$ و $x \in H$ به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi_h(x,t,k) =& -kS_{k,h}f(x) + S_{k,h}g(x)(W(t+k) - W(t))\\
&+ S_{k,h}\int_t^{t+k} g^{'}(x)\left[\int_t^{\sigma_۱} g(x)\mathrm{d}W(\sigma_۲)\right]\mathrm{d}W(\sigma_۱).
\end{aligned}$$

**قضیه ۳.۰.۱.۴.** تحت فرضیات ۲.۰.۱.۲ و ۴.۰.۱.۲ طرح المان محدود میلستین-گالرکین (۴.۲) برای هر $h \in (\circ, ۱]$ دوپایدار است. ثابت پایداری $C_{stab}$ می‌تواند مستقل از $h$ انتخاب شود.

**برهان.** فرض کنید $h \in (\circ, ۱]$ دلخواه باشد ولی مقدار عملگر گسسته‌سازی مکانی ثابت است. با قضیه ۲.۰.۳.۳ کافیست نشان دهیم فرضیات ۱.۰.۲.۳ و ۳.۰.۲.۳ برقرار هستند.

درخصوص فرضیه ۱.۰.۲.۳ از فرضیه ۲.۰.۱.۲ به‌دست می‌آید که $\xi_h = P_h X_\circ$ انتگرال‌پذیر $p$-تایی و $\mathcal{F}/\mathcal{B}(H)$-اندازه‌پذیر است. به‌علاوه داریم:

$$\|\xi_h\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant \|X_\circ\|_{L_p(\Omega;H)}. \tag{۱.۴}$$

یعنی نرم $\xi_h$ مستقل از $h \in (\circ, ۱]$ کران‌دار با نرم $X_\circ$ است.

پایداری خانواده عملگرهای خطی $S_{k,h}$ با $k \in (\circ, T]$ از (۱۹.۲) با $\rho = \circ$ به‌دست می‌آید برای هر $x \in H$ و $n \in \{۱, \cdots, N_k\}$ داریم:

$$\|S_{k,h}^n x\| = \|((Id_H + kA_h)^{-۱} P_h)^n x\| = \|(Id_H + kA_h)^{-n} P_h x\| \leqslant C\|x\|.$$

درنتیجه فرضیه ۲.۰.۲.۳ با $C_s = C$ صادق است و ثابت، مستقل از $h \in (\circ, ۱]$ و $k \in (\circ, T]$ است.

برای فرضیه ۳.۰.۲.۳، طبق تعریف $\Phi_h$ برای هر $p \in [۲, \infty)$ و $m, n \in \{۱, \cdots, N_k\}$ با $n \geqslant m$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=m}^{n} S_{k,h}^{n-j} \Phi_h(\circ, t_{j-۱}, k)\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\quad \leqslant \Big\|\sum_{j=m}^{n} S_{k,h}^{n-j+۱} f(\circ) k\Big\|_{L_p(\Omega;H)} + \Big\|\sum_{j=m}^{n} S_{k,h}^{n-j+۱} g(\circ)(W(t_j) - W(t_{j-۱}))\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\quad\quad + \Big\|\sum_{j=m}^{n} S_{k,h}^{n-j+۱} \int_{t_{j-۱}}^{t_j} g'(\circ) \left[\int_{t_{j-۱}}^{\sigma_۱} g(\circ) \mathrm{d}W(\sigma_۲)\right] \mathrm{d}W(\sigma_۱)\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\quad =: I_۱ + I_۲ + I_۳.
\end{aligned}$$

از (۲۱.۲) و (۲۳.۲) جمله $I_۱$ تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}
I_۱ &= \Big\|\int_{t_{m-۱}}^{t_n} S_{k,h}(t_n - \sigma) P_h f(\circ) \mathrm{d}\sigma\Big\| \\
&\leqslant \int_{t_{m-۱}}^{t_n} (t_n - \sigma)^{-\frac{۱}{۲}} \|f(\circ)\|_{-۱} \mathrm{d}\sigma \\
&= ۲(t_n - t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}} \|f(\circ)\|_{-۱}.
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$I_۱ \leqslant ۲(t_n - t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}} \|f(\circ)\|_{-۱}. \tag{۲.۴}$$

برای تقریب $I_۲$ ابتدا مجموع با انتگرال تصادفی و قرار دادن (۲۱.۲) به‌دست می‌آید. سپس با به‌کار

بردن ۱.۰.۱.۲ و (۲۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} I_۲ &= \Big\| \int_{t_{m-۱}}^{t_n} S_{k,h}(t_n-\sigma)P_h g(\circ)\mathrm{d}W\sigma \Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant C(p)\left(\int_{t_{m-۱}}^{t_n} \|S_{k,h}(t_n-\sigma)P_h g(\circ)\|^۲_{\mathcal{L}_۲^\circ}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leqslant C\left(\int_{t_{m-۱}}^{t_n} \|g(\circ)\|^۲_{\mathcal{L}_۲^\circ}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} = C(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}\|g(\circ)\|_{\mathcal{L}_۲^\circ}. \end{aligned}$$

پس داریم:

$$I_۲ \leqslant C(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}\|g(\circ)\|_{\mathcal{L}_۲^\circ}. \tag{۳.۴}$$

ثابت $C$ مستقل از $h\in(\circ,۱]$ و $k\in(\circ,T]$ است.

در ادامه، برای تقریب جمله سوم $(I_۳)$ فرآیند تصادفی $\Gamma_Y:[\circ,T]\times\Omega\to H$ برای $Y\in\mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_Y(\sigma) := \begin{cases} \circ\in H, & \sigma=\circ. \\ \int_{t_{j-۱}}^{\sigma} g(Y(t_{j-۱}))\mathrm{d}W(\tau), & \sigma\in(t_{j-۱},t_j], j\in\{۱,\cdots,N_k\}. \end{cases} \tag{۴.۴}$$

توجه کنید که $\Gamma_Y$ با وجود حد چپ از راست پیوسته است و این قابل پیش‌بینی است. به‌علاوه با گزاره ۱.۰.۱.۲ برای هر $p\in[۲,\infty)$ داریم :

$$\sup_{\sigma\in[\circ,T]}\|\Gamma_Y(\sigma)\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^\circ)} \leqslant C(p)k^{\frac{۱}{۲}}\max_{j\in\{۱,\cdots,N_k\}}\|g(Y(t_{j-۱}))\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^\circ)}$$

از فرضیه ۴.۰.۱.۲ ، برای $I_۳$ به‌دست می‌آید :

$$\begin{aligned} I_۳ &= \Big\| \int_{t_{m-۱}}^{t_n} S_{k,h}(t_n-\sigma)P_h g^{'}(\circ)[\Gamma_\circ(\sigma)]\mathrm{d}W(\sigma) \Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant C(p)\left(\int_{t_{m-۱}}^{t_n} \|S_{k,h}(t_n-\sigma)P_h g^{'}(\circ)[\Gamma_\circ(\sigma)]\|^۲_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^\circ)}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leqslant C\left(\int_{t_{m-۱}}^{t_n} \|g^{'}(\circ)[\Gamma_\circ(\sigma)]\|^۲_{L(\Omega;\mathcal{L}_۲^\circ)}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leqslant C(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}k^{\frac{۱}{۲}}\|g^{'}(\circ)\|_{\mathcal{L}(H;\mathcal{L}_۲^\circ)}\|g(\circ)\|_{\mathcal{L}_۲^\circ} \\ &\leqslant CC_g^۲T^{\frac{۱}{۲}}(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}. \end{aligned}$$

پس داریم:

$$I_۳ \leqslant CC_g^۲T^{\frac{۱}{۲}}(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}. \tag{۵.۴}$$

حال با ترکیب (۲.۴) و (۳.۴) و (۵.۴) داریم :

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{j=m}^{n} S_{k,h}^{n-j}\Phi_h(\circ,t_{j-۱},k)\Big\|_{L_p(\Omega;H)} &\leqslant ۲(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}\|f(\circ)\|_{-۱} \\ &\quad + C(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}\|g(\circ)\|_{\mathcal{L}_۲^\circ} + CC_g^۲T^{\frac{۱}{۲}}(t_n-t_{m-۱})^{\frac{۱}{۲}}. \end{aligned}$$

در نهایت با فاکتورگیری به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\|\sum_{j=m}^{n} S_{k,h}^{n-j}\Phi_h(\circ, t_{j-1}, k)\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\qquad\leqslant (t_n - t_{m-1})^{\frac{1}{2}}\left[2\|f(\circ)\|_{-1} + C\|g(\circ)\|_{\mathcal{L}_2^\circ} + CC_g^2 T^{\frac{1}{2}}\right].\end{aligned}$$

با درنظر گرفتن $C_\Phi = 2\|f(\circ)\|_{-1} + C\|g(\circ)\|_{\mathcal{L}_2^\circ} + CC_g^2 T^{\frac{1}{2}}$ ، (۶.۳) ثابت می‌شود.

حال بررسی می‌کنیم که $\Phi_h$ در (۷.۳) صدق کند. برای $p \in [2, \infty)$ و $Y, Z \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ و $n \in \{1, \cdots, N_k\}$ داریم:

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j}\left(\Phi_h(Y(t_{j-1}), t_{j-1}, k) - \Phi_h(Z(t_{j-1}), t_{j-1}, k)\right)\right\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad\leqslant \left\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\left(f(Y(t_{j-1})) - f(Z(t_{j-1}))\right)k\right\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad\quad+\left\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\left(g(Y(t_{j-1})) - g(Z)(t_{j-1}))\right)(W(t_j) - W(t_{j-1}))\right\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad\quad+\left\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} g'(Y(t_{j-1}))[\Gamma_Y(\sigma)] - g'(Z(t_{j-1}))[\Gamma_z(\sigma)]\mathrm{d}W(\sigma)\right\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\quad=: I_4 + I_5 + I_6\end{aligned}$$

برای $I_4$، از (۹.۲) و (۱۹.۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}I_4 &\leqslant k\sum_{j=1}^{n}\|A_h^{\frac{1}{2}}S_{k,h}^{n-j+1}A_h^{-\frac{1}{2}}P_h(f(Y(t_{j-1})) - f(Z(t_{j-1})))\|_{L_p(\Omega;H)}\\&\leqslant k\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\|f(Y(t_{j-1})) - f(Z(t_{j-1}))\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})}.\end{aligned}$$

بنابراین با به‌کارگیری فرضیه ۳.۰.۱.۲ و نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$\begin{aligned}I_4^2 &\leqslant C_f^2k^2\left(\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{4}}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{4}}\|Y(t_{j-1}) - Z(t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;H)}\right)^2\\&\leqslant C_f^2k^2\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\|Y(t_{j-1}) - Z(t_{j-1})\|^2_{L_p(\Omega;H)}.\end{aligned}$$

بعد از به‌کار بردن (۱۱.۳) جمله $I_4^2$ در شکل مطلوب (۷.۳) دیده می‌شود.

$$I_4^2 \leqslant 2C_f^2T^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\|Y(t_{j-1}) - Z(t_{j-1})\|^2_{L_p(\Omega;H)}. \tag{۶.۴}$$

برای $I_5$ و $I_6$، می‌توان مجموع را به‌عنوان انتگرال هر جمله بیان کرد. برای هر $Y \in \mathcal{G}_p(\mathcal{T}_k)$ و $\sigma \in [\circ, T]$ تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}g_Y(\sigma) &:= \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(\sigma)g(Y(t_{j-1})),\\g'_Y(\sigma) &:= \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(\sigma)g'(Y(t_{j-1}))[\Gamma_Y(\sigma)].\end{aligned}$$

سپس $I_۵$ با گزاره ۱.۰.۱.۲ و (۲۲.۲) تقریب زده می‌شود. پس داریم:

$$\begin{aligned} I_۵ &= \Big\| \int_۰^{t_n} S_{k,h}(t_n-\sigma)P_h(g_Y(\sigma)-g_Z(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant C(p)\left(\int_۰^{t_n}\|S_{k,h}(t_n-\sigma)P_h(g_Y(\sigma)-g_Z(\sigma))\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^۰)}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leqslant C\left(\int_۰^{t_n}\|g_Y(\sigma)-g_Z(\sigma)\|^۲_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^۰)}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &= C\left(k\sum_{j=۱}^{n}\|g(Y(t_{j-۱}))-g(Z(t_{j-۱}))\|^۲_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^۰)}\right)^{\frac{۱}{۲}}. \end{aligned}$$

فرضیه ۴.۰.۱.۲ می‌دهد:

$$\begin{aligned} I_۵^۲ &\leqslant C^۲C_gk\sum_{j=۱}^{n}\|Y(t_{j-۱})-Z(t_{j-۱})\|^۲_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant C^۲T^{\frac{۱}{۲}}C_gk\sum_{j=۱}^{n}(t_n-t_{j-۱})^{-\frac{۱}{۲}}\|Y(t_{j-۱})-Z(t_{j-۱})\|^۲_{L_p(\Omega;H)}. \end{aligned} \tag{۷.۴}$$

برای تقریب $I_۶$ از گزاره ۱.۰.۱.۲ و (۲۲.۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I_۶ &= \Big\|\int_۰^{t_n} S_{k,h}(t_n-\sigma)P_h(g_Y'(\sigma)-g_Z'(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\leqslant \left(\sum_{j=۱}^{n}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}\|g'(Y(t_{j-۱}))[\Gamma_Y(\sigma)]-g'(Z(t_{j-۱}))[\Gamma_Z(\sigma)]\|^۲_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^۰)}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{۱}{۲}}. \end{aligned}$$

بعد چون

$$g'(Y(t_{j-۱}))[\Gamma_Z(\sigma)] = \int_{t_{j-۱}}^{\sigma} g'(Y(t_{j-۱}))g(Y(t_{j-۱}))\mathrm{d}W(\sigma_۲) \in L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^۰).$$

با به‌کار بردن دوباره گزاره ۱.۰.۱.۲ و فرضیه ۴.۰.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned} I_۶^۲ &\leqslant Ck^۲\sum_{j=۱}^{n}\|g'(Y(t_{j-۱}))g(Y(t_{j-۱}))-g'(Z(t_{j-۱}))g(Z(t_{j-۱}))\|^۲_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲(U_۰,\mathcal{L}_۲^۰))} \\ &\leqslant CT^{\frac{۳}{۲}}C_gk\sum_{j=۱}^{n}(t_n-t_{j-۱})^{-\frac{۱}{۲}}\|Y(t_{j-۱})-Z(t_{j-۱})\|^۲_{L_p(\Omega;H)}. \end{aligned}$$

ازاین‌رو، با (۶.۴) و(۷.۴) اثبات (۷.۳) کامل می‌شود که ثابت $C_\Phi$ می‌تواند مستقل از $h\in(۰,۱]$ انتخاب شود.

درخصوص اندازه‌پذیری $\Phi_h$ ، برای هر $(x,t,k)\in H\times\mathbb{T}$ داریم

$$\Phi_h(x,t,k)\in L_p(\Omega,\mathcal{F}_{t+k},\mathbf{P};H).$$

درکل، $\Phi_h(x,t,k) \mapsto x$ را به‌عنوان نگاشتی از $H$ به $L_p(\Omega;H)$ داریم که اندازه‌پذیری نگاشت $(x,\omega)\mapsto\Phi_h(x,t,k)(\omega)$ نسبت به $\mathcal{B}(H)\otimes\mathcal{F}_{t+k}/\mathcal{B}(H)$ را به‌دست می‌دهد.

در پایان، بعد از بررسی کوچکی از اثبات قضیه ۲.۰.۳.۳ درمی‌یابیم:

از آن‌جایی‌که ثابت‌ها می‌توانند مستقل از $h \in (0, 1]$ انتخاب شوند یک انتخاب برای ثابت پایداری $C_{stab}$ برای طرح المان محدود میلستین-گالرکین (۴.۲) وجود دارد که همچنان می‌تواند مستقل از پارامتر $h \in (0, 1]$ باشد. □

## ۲.۴ سازگاری

هدف کلی از این بخش بررسی سازگاری طرح میلستین-گالرکین است. نتیجه را در قضیه زیر مختصر بیان می‌کنیم. برای اثبات این قضیه کافیست همگرایی جمعوندهای خطای برشی‌محلی که در لم ۲.۰.۴.۳ داده شده، بررسی شود. جمعوندهای خطای برشی‌محلی را تحت عنوان لم در زیر بیان کردیم.

**قضیه ۴.۰.۲.۴.** فرض کنید فرضیات ۵.۰.۲.۲ و ؟؟ با گسسته‌سازی مکانی[1] برقرار باشند. اگر فرضیات ۲.۰.۱.۲ و ۴.۰.۱.۲ برقرار باشند، خطای برشی‌محلی طرح (۴.۲) برای هر $h \in [0, 1)$ و $k \in (0, T]$ عبارت است از:

$$\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-1,p} \leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}}).$$

به‌ویژه اگر $k, h$ برای ثابت مثبت $c \in \mathbb{R}$ به‌صورت $h := ck^{\frac{1}{2}}$ جفت شوند. پس طرح میلستین-گالرکین سازگار از مرتبه $\frac{1+r}{2}$ است.

**لم ۳.۰.۲.۴.** (سازگاری شرایط اولیه) فرض کنید فرضیه ۲.۰.۱.۲ با $r \in [0, 1]$ برقرار باشد. تحت فرضیه ۵.۰.۲.۲ برای هر $h \in (0, 1]$ داریم:

$$\|X(0) - \xi_h\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant Ch^{1+r}.$$

که در آن $\xi_h = P_h X_0$.

**برهان.** از نگاشت متعامد $P_h : H \to V_h$ و با فرضیه ۵.۰.۲.۲ برای هر $h \in (0, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned}\|X(0) - \xi_h\|_{L_p(\Omega;H)} &= \|(Id_H - P_h)X_0\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &\leqslant \|(Id_H - R_h)X_0\|_{L_p(\Omega;H)}\\ &\leqslant Ch^{1+r}.\end{aligned}$$

□

سه لم بعدی به سازگاری خانواده عملگرهای خطی $S_{k,h}$ با $k \in (0, T]$ و $h \in (0, 1]$ می‌پردازد.

**لم ۴.۰.۲.۴.** فرض کنید فرضیه ۲.۰.۱.۲ برای $r \in [0, 1]$ برقرار باشد. اگر گسسته‌سازی مکانی در فرضیه ۵.۰.۲.۲ برای هر $h \in (0, 1]$ و $k \in (0, T]$ صدق کند، داریم:

$$\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}} \|(S(t_n) - S_{k,h}^n)X_0\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\|A^{\frac{1+r}{2}}X_0\|_{L_p(\Omega;H)}.$$

ثابت $C$ مستقل از $n \in \{1, \cdots, N_k\}$ است.

[1] Spatial Discretization

**برهان.** سمت چپ نامساوی خطای تقریب گسسته کامل برای مساله (۱۲.۲) در شرط اولیه متغیر تصادفی است. با فرضیه ۲.۰.۱.۲ برای $\omega \in \Omega$ داریم:

$$X_0(\omega) \in \dot{H}^{1+r}.$$

تقریب خطا از لم ۴.۰.۳.۲ (الف) با $\mu = \nu = 1 + r$ برای هر $k \in (0, T]$ و $h \in (0, 1]$ به‌دست می‌آید:

$$\|(S(t_n) - S_{k,h}^n)X_0\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\|X_0\|_{1+r}.$$

با درنظر گرفتن $\|A^{\frac{\nu}{2}}x\|_{L_p(\Omega;H)} = \|x\|_\nu$ داریم:

$$\|(S(t_n) - S_{k,h}^n)X_0\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\|A^{\frac{1+r}{2}}X_0\|_{L_p(\Omega;H)}.$$

که در آن ثابت $C$ مستقل از $n \in \{1, \cdots, N_k\}$ است. □

**لم ۵.۰.۲.۴.** فرض کنید فرضیات ۲.۰.۱.۲ و ۴.۰.۱.۲ برای $r \in [0, 1)$ برقرار باشند. اگر گسسته‌سازی مکانی روی فرضیه ۵.۰.۲.۲ صادق باشد، برای هر $h \in (0, 1]$ و $k \in (0, T]$ داریم:

$$\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_{k,h}^{n-j+1})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}}).$$

**برهان.** با استفاده از (۲۰.۲) برای هر $n \in \{1, \cdots, N_k\}$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_{k,h}^{n-j+1})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma = \int_0^{t_n} F_{k,h}(t_n-\sigma)f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma.$$

با اضافه کردن جمله $\pm f(X(t_n))$ و فاکتورگیری به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_{k,h}^{n-j+1})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&=\Big\|\int_0^{t_n} F_{k,h}(t_n-\sigma)\left(f(X(\sigma)) - f(X(t_n)) + f(X(t_n))\right)\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&\leqslant\Big\|\int_0^{t_n} F_{k,h}(t_n-\sigma)(f(X(\sigma)) - f(X(t_n)))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&\quad+\Big\|\int_0^{t_n} F_{k,h}(t_n-\sigma)f(X(t_n))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&\quad:= J_n^1 + J_n^2.
\end{aligned}$$

برای $J_n^1$ لم ۴.۰.۳.۲ (ج) را با $\rho = 1 - r$ به‌کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
J_n^1 &\leqslant \int_0^{t_n}\|F_{k,h}(t_n-\sigma)(f(X(\sigma)) - f(X(t_n)))\|_{L_p(\Omega;H)}\mathrm{d}\sigma\\
&\leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\int_0^{t_n}(t_n-\sigma)^{-1}\|f(X(\sigma)) - f(X(t_n))\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1+r})}\mathrm{d}\sigma\\
&\leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\int_0^{t_n}(t_n-\sigma)^{-1+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\sigma\\
&\leqslant CT^{\frac{1}{2}}(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}}).
\end{aligned}$$

که در آن (۵.۲) و (۷.۲) را به‌کار بردیم.

جمله $J_n^2$ با به‌کارگیری لم ۵.۰.۳.۲ (الف) با $\rho = 1 - r$ تقریب زده می‌شود. فرضیه ۳.۰.۱.۲ و (۶.۲) را نیز داریم. پس به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
J_n^2 &\leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\|f(X(t_n))\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1+r})} \\
&\leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\left(1 + \sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}\right).
\end{aligned}
$$

با ترکیب $J_n^1$ و $J_n^2$ به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_{k,h}^{n-j+1})f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\leqslant CT^{\frac{1}{2}}(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}}) + C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}})\left(1 + \sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}\right) \\
&= C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}}).
\end{aligned}
$$

که در آن $C = CT^{\frac{1}{2}} + C\left(1 + \sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}\right)$ . اثبات کامل است. □

**لم ۶.۰.۲.۴.** فرض کنید فرضیات ۲.۰.۱.۲ و ۴.۰.۱.۲ برای $r \in [0, 1)$ برقرار باشند. اگر گسسته‌سازی مکانی در فرضیات ۵.۰.۲.۲ و ؟؟ صدق کند، برای هر $h \in (0, 1]$ و $k \in (0, T]$ داریم:

$$
\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_{k,h}^{n-j+1})g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant C(h^{1+r} + k^{\frac{1+r}{2}}).
$$

**برهان.** با استفاده از اثبات لم ۵.۰.۲.۴ و (۲۰.۲) داریم:

$$
\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma) - S_{k,h}^{n-j+1})g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) = \int_0^{t_n}F_{k,h}(t_n-\sigma)g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma).
$$

با گزاره ۱.۰.۱.۲ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma)-S_{k,h}^{n-j+1})g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&\leqslant C(p)\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_n}\|F_{k,h}(t_n-\sigma)g(X(\sigma))\|_{\mathcal{L}_2^0}^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C(p)\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_n}\|F_{k,h}(t_n-\sigma)(g(X(\sigma))-g(X(t_n)))\|_{\mathcal{L}_2^0}^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+C(p)\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_n}\|F_{k,h}(t_n-\sigma)g(X(t_n))\|_{\mathcal{L}_2^0}^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C(p)\left(\int_0^{t_n}\|F_{k,h}(t_n-\sigma)g(X(\sigma))\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^0)}^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\left(\int_0^{t_n}\|F_{k,h}(t_n-\sigma)g(X(t_n))\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^0)}^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=: C(p)(J_n^3+J_n^4).
\end{aligned}$$

برای تقریب $J_n^3$ لم ۴.۰.۳.۲ (الف) را با $\mu=1+r$ و $\nu=0$ به‌کار می‌بریم. با فرضیه ۴.۰.۱.۲ و (۷.۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
J_n^3&\leqslant C(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}})\left(\int_0^{t_n}(t_n-\sigma)^{-1-r}\|g(X(\sigma))-g(X(t_n))\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^0)}^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}})\left(\int_0^{t_n}(t_n-\sigma)^{-r}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant CT^{\frac{1-r}{2}}(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}}).
\end{aligned}$$

برای تقریب $J_n^4$، لم ۵.۰.۳.۲ (ب) را با $\rho=r$ به‌کار می‌بریم. از فرضیه ۱.۰.۱.۲ و (۷.۲) برای هر $h\in(0,1]$ و $k\in(0,T]$ و $n\in\{1,\cdots,N_k\}$ داریم:

$$\begin{aligned}
J_n^4&\leqslant C(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}})\|g(X(t_n))\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_{2,r}^0)}\\
&\leqslant C(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}})\left(1+\sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^r)}\right).
\end{aligned}$$

با ترکیب $J_n^3$ و $J_n^4$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(S(t_n-\sigma)-S_{k,h}^{n-j+1})g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&\leqslant C(p)CT^{\frac{1-r}{2}}(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}})\\
&\quad+C(p)C(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}})\left(1+\sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^r)}\right)\\
&\leqslant C(h^{1+r}+k^{\frac{1+r}{2}}).
\end{aligned}$$

که در آن $C = C(p)CT^{\frac{1-r}{2}} + C(p)C\left(1 + \sup_{\sigma\in[0,T]} \|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^r)}\right)$ . اثبات کامل است.
□

**نکته ۱.۰.۲.۴.** مورد $r = 1$ مشمول لم ۶.۰.۲.۴ نمی‌شود. در تقریب جمله $J_n^3$ این مطلب اثبات می‌شود. این مسئله می‌تواند تحت فرضیات قوی‌تری روی $g$ الغا شود.
برای مثال پارامتر $s \in (0, 1]$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x_1, x_2 \in \dot{H}^s$:

$$\|g(x_1) - g(x_2)\|_{\mathcal{L}_{2,r}^0} \leqslant C_g\|x_1 - x_2\|_s$$

این اغلب برای $g$ خطی صدق می‌کند که در [۳۳] نشان داده شده است.

با استفاده از لم ۲.۰.۴.۳ بررسی همگرایی جمله آخر باقی می‌ماند، که بعد از قرار دادن $\Phi_h$ با دو جمعوند زیر تحقق می‌یابد:

$$\begin{aligned}
&\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}} \|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j}\Big[-\int_{t_{j-1}}^{t_j} S_k f(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma + \int_{t_{j-1}}^{t_j} S_k g(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma) \\
&\quad -\Phi_h(X(t_{j-1}), t_{j-1}, k)]\,\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\leqslant \max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma)) - f(X(t_{j-1}))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\quad + \max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}} \|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}} \Big(g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-1})) \\
&\quad -g'(X(t_{j-1}))[\Gamma_{X|_{\mathcal{T}}}(\sigma)]\Big)\,\mathrm{d}W(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}.
\end{aligned} \tag{۸.۴}$$

که از (۴.۴) داریم:

$$\Gamma_{X|_{\mathcal{T}_k}}(\sigma) := \begin{cases} 0 \in H, & \sigma = 0. \\ \int_{t_{j-1}}^{\sigma} g(X(t_{j-1}))\mathrm{d}W(\tau), & \sigma \in (t_{j-1}, t_j], j \in \{1, \cdots, N_k\}. \end{cases} \tag{۹.۴}$$

دو لم باقی‌مانده در این بخش به تقریب دو جمعوند در (۸.۴) مربوط هستند.

**لم ۷.۰.۲.۴.** فرض کنید فرضیات ۲.۰.۱.۲ و ۴.۰.۱.۲ برای $r \in (0, 1]$ برقرار باشند. اگر گسسته‌سازی مکانی در فرضیه ۵.۰.۲.۲ صدق کند، برای هر $h \in (0, 1]$ و $k \in (0, T]$ داریم:

$$\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\Big\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma)) - f(X(t_{j-1}))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant Ck^{\frac{1+r}{2}}.$$

**برهان.** برای هر $n \in \{1, \cdots, N_k\}$ ، ابتدا امیدریاضی شرطی را اضافه و کم کرده، بعد از فاکتورگیری داریم:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma)) - f(X(t_{j-1}))\mathrm{d}\sigma\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\leqslant \Big\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma)) - \mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\quad + \Big\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}] - f(X(t_{j-1}))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L_p(\Omega;H)}.
\end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

بنابراین برای جمعوندهای جمله اول برای هر $j,\ell\{1,\cdots,n\}$ با $\ell<j$ نتیجه می‌شود:

$$\mathbb{E}\left[S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma))-\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\mathrm{d}\sigma|\mathcal{F}_{t_\ell}\right]=0\in H.$$

نامساوی برخولدر ([۳۱]) ، همراه با (۱۹.۲) و (۹.۲) به‌کار می‌رود و داریم:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n}S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma))-\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\mathrm{d}\sigma\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&\leqslant C\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma))-\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\mathrm{d}\sigma\right\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|A_h^{\frac{1}{2}}S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} A_h^{-\frac{1}{2}}P_h(f(X(\sigma))-\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\mathrm{d}\sigma\right\|^2_{L_p(\Omega;H)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}t_{n-j+1}^{-1}k\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|f(X(\sigma))-\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\|^2_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

از طرفی، چون به ازای هر $G\in L_p(\Omega;\dot H^{-1})$ داریم:

$$\|\mathbb{E}[G|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\|_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}\leqslant\|G\|_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}.$$

برای $\sigma\in[t_{j-1},t_j]$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|f(X(\sigma))-\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\|_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}\\
&=\|f(X(\sigma))-f(X(t_{j-1}))+\mathbb{E}[f(X(t_{j-1}))-f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\|_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}\\
&\leqslant\|f(X(\sigma))-f(X(t_{j-1}))\|_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}+\|f(X(t_{j-1}))-f(X(\sigma))\|_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}\\
&\leqslant 2\|f(X(\sigma))-f(X(t_{j-1}))\|_{L_p(\Omega;\dot H^{-1})}\\
&\leqslant C|\sigma-t_{j-1}|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

که در آن از (۵.۲) و (۷.۲) استفاده شده است. بنابراین از (۱۱.۳) تقریب جمعوند اول در (۱۰.۴) کامل می‌شود با:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n}S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(\sigma))-\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\mathrm{d}\sigma\|_{L_p(\Omega;H)}\\
&\qquad\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}t_{n-j+1}^{-1}k^3\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\left(k^3\sum_{j=1}^{n}t_{n-j+1}^{-r}t_{n-j+1}^{-1+r}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\leqslant C\left(k^3\sum_{j=1}^{n}t_{n-j+1}^{-r}k^{-1+r}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ck^{\frac{1+r}{2}}.
\end{aligned}$$

برای جمعوند دوم در (۱۰.۴) از قضیه مقدار میانی استفاده می‌شود. برای هر $\tau_1,\tau_2\in[0,T]$ داریم:

$$f(X(\tau_1))=f(X(\tau_2))+\int_0^1 f'\left(X(\tau_2)+s(X(\tau_1)-X(\tau_2))\right)[X(\tau_1)-X(\tau_2)]\mathrm{d}s.$$

برای راحتی، نکته زیر برای هر $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ و $s \in [0, 1]$تعریف می‌شود:

$$f'(\tau_1, \tau_2; s) := f'(X(\tau_2) + s(X(\tau_1) - X(\tau_2))).$$

پس با قرار دادن (۳.۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}})) - f(X(t_{j-1}))] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^1 f'(\sigma, t_{j-1}; s)[(S(\sigma - t_{j-1}) - Id_H)X(t_{j-1})]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\int_0^1 f'(\sigma, t_{j-1}; s)\left[\int_{t_{j-1}}^{\sigma} S(\sigma - \tau)f(X(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^1 f'(\sigma, t_{j-1}; s)\left[\int_{t_{j-1}}^{\sigma} S(\sigma - \tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right] \\
&=: \Theta_1(\sigma, t_{j-1}) + \Theta_2(\sigma, t_{j-1}) + \Theta_3(\sigma, t_{j-1}).
\end{aligned}$$

ازاین‌رو، جمعوند دوم در (۱۰.۴) صدق می‌کند در :

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}] - f(X(t_{j-1}))\mathrm{d}\sigma\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Theta_1(\sigma, t_{j-1}) + \Theta_2(\sigma, t_{j-1}) + \Theta_3(\sigma, t_{j-1})\mathrm{d}\sigma\right\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\Theta_1(\sigma, t_{j-1}) + \Theta_2(\sigma, t_{j-1}) + \Theta_3(\sigma, t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})}\mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

در گام بعدی دوباره (۹.۲) و (۱۹.۲) را به‌کار می‌بریم . داریم:

$$\|\Theta_i(\sigma, t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})} \leqslant C|\sigma - t_{j-1}|^{\frac{1+r}{2}}, \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \tag{۱۲.۴}$$

بنابراین برای کامل کردن تقریب (۱۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n} S_{k,h}^{n-j+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E}[f(X(\sigma))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}] - f(X(t_{j-1}))\mathrm{d}\sigma\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} |\sigma - t_{j-1}|^{\frac{1+r}{2}}\mathrm{d}\sigma \leqslant Ck^{\frac{1+r}{2}}.
\end{aligned}$$

که در آن از (۱۱.۳) استفاده شده است. بنابراین اگر (۱۲.۴) را ثابت کنیم حکم اثبات می‌شود.

برای تقریب $\Theta_1$ برای هر $G \in L_p(\Omega; \dot{H}^{-1})$ داریم

$$\|\mathbb{E}[G|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})} \leqslant \|G\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})}.$$

و به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|\Theta_1(\sigma,t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})}\\
&\qquad\leqslant \Big\|\int_0^1 f^{'}(\sigma,t_{j-1};s)[(S(\sigma-t_{j-1})-Id_H)X(t_{j-1})]\mathrm{d}s\Big\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})}\\
&\qquad\leqslant \int_0^1 \left(\mathbb{E}\left[\|f^{'}(\sigma,t_{j-1};s)\|^p_{\mathcal{L}(H,\dot{H}^{-1})}\|(S(\sigma-t_{j-1})-Id_H)X(t_{j-1})\|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}s\\
&\qquad\leqslant C\sup_{x\in H}\|f^{'}(x)\|_{\mathcal{L}(H,\dot{H}^{1+r})}\|(S(\sigma-t_{j-1})-Id_H)X(t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;H)}.
\end{aligned}$$

بنابراین از [8] برای هر $\sigma\in[t_{j-1},t_j]$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\|(S(\sigma-t_{j-1})-Id_H)X(t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;H)} &\leqslant C(\sigma-t_{j-1})^{\frac{1+r}{2}}\|X(t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{1+r})}\\
&\leqslant C(\sigma-t_{j-1})^{\frac{1+r}{2}}\sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{1+r})}.
\end{aligned}$$

با به‌کار بردن (۱۲.۴) اثبات (۱۲.۴) با $i=1$ کامل می‌شود. برای $\Theta_2$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\|\Theta_2(\sigma,t_{j-1})\|_{L_p(\Omega,\dot{H}^{-1})}\\
&\qquad\leqslant C\sup_{x\in H}\|f^{'}(x)\|_{L_p(H,\dot{H}^{-1+r})}\|\int_{t_{j-1}}^{\sigma}S(\sigma-\tau)f(X(\tau))\mathrm{d}\tau\|_{L_p(\Omega;H)}.
\end{aligned}$$

اکنون با به‌کار بردن این حقیقت که

$$\|A^{\frac{1-r}{2}}S(\sigma-\tau)\|_{\mathcal{L}(H)}\leqslant C(\sigma-\tau)^{-\frac{1-r}{2}},\qquad \forall t_{j-1}\leqslant\tau<\sigma\leqslant t_j.$$

برای هر $\sigma\in[t_{j-1},t_j]$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\Big\|\int_{t_{j-1}}^{\sigma}S(\sigma-\tau)f(X(\tau))\mathrm{d}\tau\Big\|_{L_p(\Omega;H)} &\leqslant C\int_{t_{j-1}}^{\sigma}(\sigma-\tau)^{-\frac{1-r}{2}}\|f(X(\tau))\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1+r})}\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant C\left(1+\sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}\right)k^{\frac{1+r}{2}}.
\end{aligned}$$

مشابه $\Theta_1$ ، به‌دست می‌آید:

$$\|\Theta_2(\sigma,t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-1})}\leqslant Ck^{\frac{1+r}{2}},\qquad \forall\sigma\in[t_{j-1},t_j].$$

برای تقریب $\Theta_3$ ابتدا این حقیقت به‌کار می‌رود که:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 f^{'}(X(t_{j-1}))\left[\int_{t_{j-1}}^{\sigma}S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]=0.$$

پس به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|\Theta_۳(\sigma, t_{j-۱})\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-۱})}\\
&\quad= \mathbb{E}\left[\int_۰^۱ f'(\sigma, t_j, s)\left[\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_{t_{j-۱}}\right]\\
&\qquad - \mathbb{E}\left[\int_۰^۱ f'(X(t_{j-۱}))\left[\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_{t_{j-۱}}\right]\\
&\quad= \mathbb{E}\left[\int_۰^۱ (f'(\sigma, t_j, s) - f'(X(t_{j-۱})))\left[\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_{t_{j-۱}}\right]\\
&\quad\leqslant \int_۰^۱ \left\|(f'(\sigma, t_j, s) - f'(X(t_{j-۱})))\left[\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right]\right\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-۱})}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

به‌علاوه برای هر $s \in [۰, ۱]$ از نامساوی هولدر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|(f'(\sigma, t_j, s) - f'(X(t_{j-۱})))\left[S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right]\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{-۱})}\\
&\quad\leqslant \left(\mathbb{E}\left[\|f'(\sigma, t_j, s) - f'(X(t_{j-۱}))\|^p_{\mathcal{L}(H,\dot{H}^{-۱})}\|S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\|^p\right]\right)^{\frac{۱}{p}}\\
&\quad\leqslant \|f'(X(t_{j-۱}) + s(X(\sigma) - X(t_{j-۱}))) - f'(X(t_{j-۱}))\|_{L_{۲p}(\Omega;\mathcal{L}(H,\dot{H}^{-۱}))}\\
&\qquad\times \left\|\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\right\|_{L_{۲p}(\Omega;H)}.
\end{aligned}$$

از (۵.۲) و (۷.۲) برای هر $s \in [۰, ۱]$ و $\sigma \in [t_{j-۱}, t_j]$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\|f'(X(t_{j-۱}) + s(X(\sigma) - X(t_{j-۱}))) - f'(X(t_{j-۱}))\|_{L_{۲p}(\Omega;\mathcal{L}(H,\dot{H}^{-۱}))}\\
&\quad\leqslant C_f\|X(\sigma) - X(t_{j-۱})\|_{L_{۲p}(\Omega;H)} \leqslant C(\sigma - t_{j-۱})^{\frac{۱}{۲}}.
\end{aligned}$$

با گزاره ۱.۲.۰.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
&\|\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau)\|_{L_{۲p}(\Omega;H)}\\
&\quad\leqslant C\left(\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} \|S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\|^۲_{L_p(\Omega;H)}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{۱}{۲}}\\
&\quad\leqslant C\left(۱ + \sup_{\tau\in[۰,T]} \|X(\tau)\|_{L_p(\Omega;H)}\right)k^{\frac{۱}{۲}}.
\end{aligned}$$

در نهایت تقریب $\Theta_۳$ کامل می‌شود و به این ترتیب تقریب (۱۱.۴) اثبات می‌شود. بنابراین در (۱۰.۴) داریم:

$$\left\|\sum_{j=۱}^{n} S_{k,h}^{n-j+۱}\int_{t_{j-۱}}^{t_j} f(X(\sigma)) - f(X(t_{j-۱}))\mathrm{d}\sigma\right\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant Ck^{\frac{۱+r}{۲}}.$$

□

**لم ۸.۰.۲.۴.** فرض کنید فرضیات ۲.۰.۱.۲ و ۴.۰.۱.۲ برای $r \in [\circ, ۱)$ برقرار باشند. اگر گسسته‌سازی مکانی فرضیه ۵.۰.۲.۲ برقرار باشد، برای هر $h \in (\circ, ۱]$ و $k \in (\circ, T]$ داریم:

$$\max_{n\in\{۱,\cdots,N_k\}} \| \sum_{j=۱}^{n} S_{k,h}^{n-j+۱} \int_{t_{j-۱}}^{t_j} (g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) \\ -g^{'}(X(t_{j-۱}))\left[\int_{t_{j-۱}}^{\sigma} g(X(t_{j-۱}))\mathrm{d}W(\tau)\right]\Big) \mathrm{d}W(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)} \leqslant Ck^{\frac{۱+r}{۲}}.$$

**برهان.** $\Gamma_X$ در (۴.۴) برای هر $n \in \{۱,\cdots,N_k\}$ تعریف شده است. برای هر $j \in \{۱,\cdots,n\}$ داریم:

$$\mathbb{E}\left[S_{k,h}^{n-j+۱} \int_{t_{j-۱}}^{t_j} g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) - g^{'}(X(t_{j-۱}))[\Gamma_X(\sigma)]\mathrm{d}W(\sigma)|\mathcal{F}_{t_{j-۱}}\right] = \circ.$$

بنابراین، نامساوی برخولدر را به‌کار برده و با گزاره ۱.۰.۱.۲ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\| \sum_{j=۱}^{n} S_{k,h}^{n-j+۱} \int_{t_{j-۱}}^{t_j} g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) - g^{'}(X(t_{j-۱}))[\Gamma_X(\sigma)]\mathrm{d}W(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)} \\ &\quad\leqslant C(\mathbb{E}[(\sum_{j=۱}^{n} \|S_{k,h}^{n-j+۱} \int_{t_{j-۱}}^{t_j} (g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) \\ &\qquad\qquad - g^{'}(X(t_{j-۱}))[\Gamma_X(\sigma)])\mathrm{d}W(\sigma)\|^{۲})^{\frac{p}{۲}}])^{\frac{۱}{p}} \\ &\leqslant C(\sum_{j=۱}^{n} \| \int_{t_{j-۱}}^{t_j} (g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) \\ &\qquad\qquad - g^{'}(X(t_{j-۱}))[\Gamma_X(\sigma)])\mathrm{d}W(\sigma)\| - L_p(\Omega;H)^{۲})^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leqslant C(\sum_{j=۱}^{n} \int_{t_{j-۱}}^{t_j} \|g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) - g^{'}(X(t_{j-۱}))[\Gamma_X(\sigma)]\|^{۲}_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^{\circ})}\mathrm{d}\sigma)^{\frac{۱}{۲}}. \end{aligned}$$

درنتیجه، اگر نشان دهیم که ثابت برای هر $\sigma \in [t_{j-۱}, t_j]$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) - g^{'}(X(t_{j-۱}))[\Gamma_X(\sigma)]\|^{۲}_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_۲^{\circ})} \leqslant Ck^{۱+r}. \qquad (۱۳.۴)$$

اثبات کامل می‌شود.

برای اثبات (۱۳.۴) قضیه مقدار میانی برای عملگر $g$ استفاده می‌شود و به‌دست می‌آید:

$$g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-۱})) = \int_{\circ}^{۱} g^{'}(\sigma, t_{j-۱}, s)[X(\sigma) - X(t_{j-۱})]\mathrm{d}s.$$

که در آن برای هر $\tau_۱, \tau_۲ \in [\circ, T]$ و $s \in [\circ, ۱]$

$$g^{'}(\tau_۱, \tau_۲, s) := g^{'}(X(\tau_۲) + s(X(\tau_۱) - X(\tau_۲))).$$

بعد از قرار دادن (۳.۲) تقریب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|g(X(\sigma)) - g(X(t_{j-1})) - g'(X(t_{j-1}))[\Gamma_X(\sigma)]\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)} \\
&\quad\leqslant \int_0^1 \|g'(\sigma, t_{j-1}, s)[(S(\sigma - t_{j-1}) - Id_H)X(t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)}\mathrm{d}s \\
&\quad\quad+ \int_0^1 \|g'(\sigma, t_{j-1}, s)\left[\int_{t_{j-1}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)f(X(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)}\mathrm{d}s \\
&\quad\quad+ \int_0^n \|g'(\sigma, t_{j-1}, s)\left[\int_{t_{j-1}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau) - \Gamma_X(\sigma)\right]\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)}\mathrm{d}s \\
&\quad\quad+ \int_0^1 \|(g'(\sigma, t_{j-1}, s) - g'(X(t_{j-1})))[\Gamma_X(\sigma)]\|_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)}\mathrm{d}s \\
&\quad\quad=: J_5 + \cdots + J_8.
\end{aligned}$$

جملات $J_i, i \in \{5, \cdots, 8\}$ را درنظر بگیرید. تقریب مطلوب $J_5$ شبیه به جمله $\Theta_1$ در اثبات لم ۸.۰.۲.۴ به‌دست می‌آید. یعنی:

$$\begin{aligned}
j_5 &\leqslant \int_0^1 (\mathbb{E}[\|g'(\sigma, t_{j-1}, s)\|^p_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2^\circ}\|(S(\sigma - t_{j-1}) - Id_H)X(t_{j-1})\|^p])^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\sup_{x\in H}\|g(x)\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2^\circ)}\|(S(\sigma - t_{j-1}) - Id_H)(X(t_{j-1})\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\leqslant C\sup_{x\in H}\|g(x)\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2^\circ)}\sup_{\tau\in[0,T]}\|X(\tau)\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{1+r})}k^{\frac{1+r}{2}}.
\end{aligned}$$

تقریب $J_6$ عینا شبیه جمله $\Theta_2$ در اثبات لم ۸.۰.۲.۴ آمده است. بنابراین داریم:

$$J_6 \leqslant C\sup_{x\in H}\|g(x)\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2^\circ)}\left(1 + \sup_{\sigma\in[0,T]}\|X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}\right)k^{\frac{1+r}{2}}.$$

تقریب جمله $J_7$ برابر است با:

$$J_7 \leqslant C\sup_{x\in H}\|g(x)\|_{L_p(H,\mathcal{L}_2^\circ)}\|\int_{t_{j-1}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau) - \Gamma_X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)}.$$

بعد از قرار دادن تعریف (۴.۴) در $\Gamma_X$ و به‌کار بردن گزاره ۱.۰.۱.۲ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\|\int_{t_{j-1}}^{\sigma} S(\sigma-\tau)g(X(\tau))\mathrm{d}W(\tau) - \Gamma_X(\sigma)\|_{L_p(\Omega;H)} \\
&\quad\leqslant C\left(\int_{t_{j-1}}^{\sigma}\|S(\sigma-\tau)g(X(\tau)) - g(X(t_{j-1}))\|^2_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\leqslant C\left(\int_{t_{j-1}}^{\sigma}\|(S(\sigma-\tau) - Id_H)g(X(\tau))\|^2_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\quad+ C\left(\int_{t_{j-1}}^{\sigma}\|g(X(\tau)) - g(X(t_{j-1}))\|^2_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^\circ)}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

برای اولین جمعوند فرضیه ۴.۰.۱.۲ به‌کار می‌رود. به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_{t_{j-1}}^{\sigma} \|(S(\sigma-\tau)-Id_H)g(X(\tau))\|^{2}_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^{0})}\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C\Big(\int_{t_{j-1}}^{\sigma}(\sigma-\tau)^{r}\|g(X(\tau))\|^{2}_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^{0})}\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C(1+\sup_{\tau\in[0,T]}\|X(\tau)\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{r})})k^{\frac{1+r}{2}}.
\end{aligned}$$

تقریب مشابه برای جمعوند دوم با فرضیه ۴.۰.۱.۲ و (۷.۲) به‌دست می‌آید. داریم:

$$\left(\int_{t_{j-1}}^{\sigma}\|g(X(\tau))-g(X(t_{j-1}))\|^{2}_{L_p(\Omega;\mathcal{L}_2^{0})}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\left(\int_{t_{j-1}}^{\sigma}(\tau-t_{j-1})\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ck^{\frac{1+r}{2}}.$$

در نتیجه به‌دست می‌آید:

$$J_7\leqslant C\sup_{x\in H}\|g(x)\|_{L_p(H,\mathcal{L}_2^{0})}\left(C(1+\sup_{\tau\in[0,T]}\|X(\tau)\|_{L_p(\Omega;\dot{H}^{r})})k^{\frac{1+r}{2}}+Ck^{\frac{1+r}{2}}\right).$$

مشخص است که تقریب مطلوب برای $J_7$ به‌دست آمده و تقریب $J_8$ باقی می‌ماند.

تقریب $J_8$ بسیار شبیه تقریب $\Theta_3$ در اثبات لم ۸.۰.۲.۴ است. بعد از به‌کار بردن نامساوی هولدر به‌دست می‌آید که:

$$\begin{aligned}
J_8\leqslant&\int_0^1\|g^{'}(X(t_{j-1})+s(X(\sigma)-X(t_{j-1})))-g^{'}(X(t_{j-1})\|_{L_{2p}(\Omega;\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2^{0}))}\mathrm{d}s\\
&\times\|\int_{t_{j-1}}^{\sigma}g(X(t_{j-1}))\mathrm{d}W(\tau)\|_{L_{2p}(\Omega;H)}.
\end{aligned}$$

در آخر از فرضیه ۴.۰.۱.۲ و (۷.۲) داریم:

$$\|g^{'}(X(t_{j-1})+s(X(\sigma)-X(t_{j-1})))-g^{'}(X(t_{j-1}))\|_{L_{2p}(\Omega;\mathcal{L}(H,\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2^{0}))}\leqslant C(\sigma-t_{j-1})^{\frac{1}{2}}.$$

از گزاره ۱.۰.۱.۲ و فرضیه ۴.۰.۱.۲ برای هر $\sigma\in[t_{j-1},t_j]$ به‌دست می‌آید که:

$$\begin{aligned}
\|\int_{t_{j-1}}^{\sigma}g(X(t_{j-1}))\mathrm{d}W(\tau)\|_{L_{2p}(\Omega;H)}&\leqslant C\left(\int_{t_{j-1}}^{\sigma}\|g(X(t_{j-1}))\|^{2}_{L_{2p}(\Omega;\mathcal{L}_2^{0})}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C\left(1+\sup_{\tau\in[0,T]}\|X(\tau)\|_{L_{2p}(\Omega;H)}\right)k^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

بنابراین حکم برای $J_8$ نیز اثبات شد. با جایگذاری $J_i, i\in\{5,\cdots,8\}$ حکم (۱۳.۴) ثابت می‌شود.
□

با اثبات این دو لم درواقع نشان دادیم:

$$\begin{aligned}
\max_{n\in\{1,\cdots,N_k\}}\|\sum_{j=1}^{n}S_{k,h}^{n-j}&\left(-\int_{t_{j-1}}^{t_j}S_kf(X(\sigma))\mathrm{d}\sigma+\int_{t_{j-1}}^{t_j}S_kg(X(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\right)\\
&\leqslant Ck^{\frac{1+r}{2}}
\end{aligned}$$

لازم به ذکر است با اثبات این لم‌ها، در حقیقت به اثبات قضیه ۴.۰.۲.۴ رسیدیم که برای هر $h\in[0,1)$ و $k\in(0,T]$ :

$$\|\mathcal{R}_k[X|_{\mathcal{T}_k}]\|_{-۱,p} \leqslant C(h^{۱+r} + k^{\frac{۱+r}{۲}})$$

پس طرح میلستین سازگار از مرتبه $\frac{۱+r}{۲}$ است.

# مراجع


[1] A.Barth and A.Lang, *Lp and almost sure convergence of a milstein scheme for stochastic partial differential equations*, Stochastic Processes and their Applications.

[2] Kebaier. Ahmed et al., *Statistical romberg extrapolation: a new variance reduction method and applications to option pricing*, The Annals of Applied Probability **15** (2005), no. 4, 2681–2705.

[3] Lang. Annika, Chow. Pao-Liu, and Potthoff. Juergen, *Almost sure convergence of a semi-discrete milstein scheme for spdes of zakai type (vol 82, pg 315, 2010).*

[4] Lang. Annika, Chow. Pao-Liu, and Potthoff. Jürgen, *Almost sure convergence of a semidiscrete milstein scheme for spdes of zakai type*, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastics Processes **82** (2010), no. 3, 315–326.

[5] J.H Argyris and S Kelsey, *Energy theorems and structural analysis.*

[6] Jentzen. Arnulf and Röckner. Michael, *Regularity analysis for stochastic partial differential equations with nonlinear multiplicative trace class noise*, Journal of Differential Equations **252** (2012), no. 1, 114–136.

[7] A. Barth, A. Lang, , and Ch. Schwab., *Multilevel monte carlo method for parabolic stochastic partial differential equations*, BIT Numerical Mathematics.

[8] A. Barth and A. Lang, *Multilevel monte carlo method with applications to stochastic partial differential equations*, **89** (2012), no. 18, 2479–2498.

[9] Beyn., Wolf-Jürgen, and Kruse. Raphael, *Two-sided error estimates for the stochastic theta method*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **14** (2010), no. 2, 389–407.

[10] Burkholder and Donald .L, *Explorations in martingale theory and its applications.*

[11] Klebaner. Fima C et al., *Introduction to stochastic calculus with applications*, vol. 57, World Scientific, 2005.

[12] Prévôt. Claudia and Röckner. Michael, *A concise course on stochastic partial differential equations*, vol. 1905, Springer, 2007.

[13] Courant, Richard, et al., *Variational method for the solution of problems of equilibrium and vibration*, Bulletin of American Mathematical Soceity **49**, no. 1, 1–23.

[14] Kloeden. Peter E and Platen. Eckhard, *Numerical solution of stochastic differential equations*, **23** (1992).

[15] K. Eriksson, P.Hansbo, and C.Johnson, *Computational differential equations, volume 1.*

[16] Hairer. Ernst, Nørsett. Syvert Paul, and Wanner. Gerhard, *Solving ordinary differential equations i: nonstiff problems*, **1** (2008), 119–132.

[17] Stummel. Friedrich, *Approximation methods in analysis: Notes based on lectures spring semester, 1973*, vol. 1, Aarhus universitet, Matematisk institut, Technische Universitat Berlin, 1973.

[18] Giles and Michael. B, *Multilevel monte carlo path simulation*, Operations Research **56** (2008), no. 3, 607–617.

[19] Da Prato. Giuseppe and Zabczyk. Jerzy, *Stochastic equations in infinite dimensions*, vol. 152, Cambridge university press, 2014.

[20] Jentzen.Arnulf and Röckner. Michael, *A milstein scheme for spdes*, arXiv preprint arXiv:1001.2751 (2010).

[21] Argyris. J.H and Kelsey. S, *Energy theorems and structural analysis*, vol. 960.

[22] Turner.M Jon, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences).

[23] Chrysafinos. K and Hou. LS, *Error estimates for semidiscrete finite element approximations of linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions*, SIAM journal on numerical analysis **40** (2002), no. 1, 282–306.

[24] Elliott. Charles M and Larsson. Stig, *Error estimates with smooth and nonsmooth data for a finite element method for the cahn-hilliard equation*, Mathematics of Computation **58** (1992), no. 198, 603–630.

[25] Loève. Michel, *Probability theory*, Graduate texts in mathematics **45** (2005), 12.

[26] Giles. Mike, *Improved multilevel monte carlo convergence using the milstein scheme*, Mathematics of Computation (2008), 343–358.

[27] Spijker. Marc Nico, *Stability and convergence of finite-difference methods*, (1968).

[28] O.C.Zienkiewiez and Y.K.Chung, *The finite element method in continuum and structural mechanics.*

[29] Pazy.Amnon, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Journal of Applied Fluid Mechanics (1983).

[30] Printems and Jacques, *On the discretization in time of parabolic stochastic partial differential equations*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis **35**, no. 6, 1055–1078.

[31] Kruse . Raphael, *Strong and weak approximation of stochastic evolution equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements (2013).

[32] Kruse. Raphael, *Characterization of bistability for stochastic multistep methods*, BIT Numerical Mathematics **52** (2012), no. 1, 109–140.

[33] Kruse .Raphael, *Optimal error estimates of galerkin finite element methods for stochastic partial differential equations with multiplicative noise*, IMA Journal of Numerical Analysis **34** (2014), no. 1, 217–251.

[34] Kruse. Raphael and Larsson. Stig, *Optimal regularity for semilinear stochastic partial differential equations with multiplicative noise*, Electron. J. Probab **17** (2012), no. 65, 1–19.

[35] Larsson. S. and Thomee. V., *Partial differential equations with numerical methods*, Texts in Applied Mathematics, Springer, 2008.

[36] Spijker and Marc Nico, *On the structure of error estimates for finite-difference methods*, Numerische Mathematik **18** (1971), no. 1, 73–100.

[37] Larsson. Stig, *Semilinear parabolic partial differential equations: theory, approximation, and application*, New Trends in the Mathematical and Computer Sciences **3** (2006), 153–194.

[38] Thomée. Vidar, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, Springer-Verlag, 2006.

[39] Clough.Ray W, *The finite element method in plane stress analysis.*

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| آرگومان | Argument |
| المان | Element |
| تقریب | Approximation |
| جایگزین کردن، جایگذاری | Substitution |
| جزیی | Partial |
| داخلی | Inner |
| دلخواه، اختیاری | Arbitrary |
| دیریکله | Dirichlet |
| دیفرانسیل | Differential |
| رابین | Robin |
| ضعیف | Weakly |
| قوی | Strongly |
| کوشی | Cauchy |
| گره | Node |
| گسسته‌سازی | Discretization |
| متغیر | Variable |
| مثبت | Positive |
| مقدار | Value |
| ناهموار | Nonsmooth |
| نویمن | Neumann |
| همگن | Homogeneous |
| یکتا | Unique |
| اولیه | Initiall |
| اجزای محدود | Finite Element |
| اقلیدس | Euclidean |

| | |
|---|---|
| الگوریتم | Algoritm |
| انتگرال گیری عددی | Quadrature |
| اسکالر | Scalar |
| افراز | Partition |
| برآورد | Estimate |
| برهان | Proof |
| برچسب | Label |
| پیوسته | Continuous |
| پایه | Basic |
| تکه‌ای | Piecewise |
| تقریب گالرکین | Galerkin approximation |
| تصویر متعامد | Orthogonal projection |
| ترکیب | Combine |
| ثابت | Constant |
| خطی | Linear |
| دامنه | Domain |
| درجه | Degree |
| درون‌یابی | Interpolation |
| دنباله | Sequence |
| روش | Method |
| راه‌حل | Solution |
| روش گالرکین | Galerkin method |
| عددی | Numerical |
| عمومی | General |
| عملگر | Operator |
| فضا | Space |
| فضای سوبولوف | Sobolev space |
| فرم دوخطی | Quadratic form |
| فضای ضرب داخلی | Inner product space |
| فضای هیلبرت | Hilbert space |
| قضیه | Theory |
| لیپ شیتز | Lipschits |

| | |
|---|---|
| میدان | Field |
| معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی | Partial differential equation |
| مجموعه | Set |
| متقارن | Symmetric |
| مقدار ویژه | Eigenvalue |
| مستقیم | Direct |
| مقدار میانی | Mean value |
| معکوس شدنی | Invertible |
| معین مثبت | Positive definite |
| ناپیوستگی | Discontinuous |
| نرم | Norm |
| نامساوی هولدر | Holder inequality |
| نگاشت | Map |
| نظم | Regularity |
| همگرا | Convergence |
| هم‌ارز | Equivalent |
| هموار | Smooth |
| یکتایی | Uniquenss |
| یکنواخت | Uniformly |
| کوشی-شوارتز | Cauchy-Schwarz |
| فضای باناخ | Banach Space |
| فضای دوگان | Dual Space |
| قضیه نمایش ریتس | Riesz Representation Theorem |
| میدان | Field |
| امید ریاضی | Expectation |
| فیلتر | Filtration |
| فضای احتمال | Probability Space |
| فرآیند وینر | Wiener Prosses |
| واریانس | Variance |
| کوواریانس | Covariance |
| حرکت برآونی | Brownian Motion |
| مونت‌کارلوی چندسطحی | Multilevel Monte Carlo |

دوپایداری ........ Bistability

سازگاری ........ Consistency

پایداری ........ Stability

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| Boundary | مرز |
| Coefficient | ضریب |
| Conditions | شرایط |
| Consider | درنظرگرفتن |
| Constant | ثابت |
| Dimension | بعد |
| Domain | دامنه |
| Element | المان |
| Expression | عبارت، جمله |
| Finite | متناهی |
| Integration | انتگرال‌گیری |
| Method | روش |
| Numerical | عددی |
| Numerical Integration | انتگرال‌گیری عددی |
| Property | خاصیت، ویژگی |
| Result | نتیجه |
| Scheme | روش |
| Smooth | هموار |
| Symmetric | متقارن |
| Theorem | قضیه |
| Vector | بردار |
| Approximation | تقریب |
| Algoritm | الگوریتم |
| Convergence | همگرا |
| Constant | ثابت |

Continuous ........ پیوسته
Conforming ........ یکنواخت
Discontinuous ........ ناپیوستگی
Definite ........ معین
Degree ........ درجه
Estimate ........ برآورد
Euclidean ........ اقلیدس
Eigenvalue ........ مقدارویژه
Equivalent ........ هم ارز
Element ........ عنصر
Field ........ میدان
Finite element ........ اجزای محدود
Function ........ تابع
General ........ عمومی
Heterogeneous ........ ناهمگن
Hilbert space ........ فضای هیلبرت
Holder inequality ........ نامساوی هولدر
Initial ........ اولیه
Interpolation ........ درون‌یابی
Input ........ ورودی
Inner product space ........ فضای ضرب داخلی
Lipchitz ........ لیپ‌شیتز
Linear ........ خطی
Method ........ روش
Mean value ........ مقدار میانی
Norm ........ نورم
Operator ........ عملگر
Orthogonal projection ........ تصویر متعامد
Partial ........ جزیی
Problem ........ مسئله
Proof ........ برهان
Partition ........ افراز

معین مثبت ........ Positive definite
فرم دوخطی ........ Quadratic form
نتیجه ........ Result
نظم ........ Regularity
مجموعه ........ Set
فضای سوبولوف ........ Sobolev space
متقارن ........ Symmetric
اسکالر ........ Scalar
هموار ........ Smooth
استاندارد ........ Standard
راه‌حل ........ Solution
فضا ........ Space
قضیه ........ Theory
یکنواخت ........ Uniformly
یکتایی ........ Uniqueness
بردار ........ Vector
مقدار ........ Value
ضعیف ........ Weak
میدان ........ Field
امید ریاضی ........ Expectation
فیلتر ........ Filtration
فضای احتمال ........ Probability Space
فرآیند وینر ........ Wiener Prosses
واریانس ........ Variance
کوواریانس ........ Covariance
حرکت براونی ........ Brownian Motion
مونت‌کارلوی چندسطحی ........ Multilevel Monte Carlo
دوپایداری ........ Bistability
سازگاری ........ Consistency
پایداری ........ Stability
کوشی-شوارتز ........ Cauchy-Schwarz

فضای دوگان ........................................ Dual Space
قضیه نمایش ریتس ........................................ Riesz Representation Theorem

**Aabstract**

A solution of stochastic differential equations, particular stochastic partial differential equations,relatively new versions of non pitches. Almost all relatively good algorithms for ordinary differential equations. They provide answers, answers that are weak against accidental release. Among the solutions presented, and the method of Euler-Marayvma Milstein and methods for stochastic differential equation is Ronge koota. In this thesis use the most common Milstein-Galerkin finite element method to semilinear stochastic partial differential equations.

In the first chapter the basic concepts and definitions of words and a brief overview of the concepts and definitions of partial differential equations, probability theory will. The second chapter introduces the design and application of the basic assumptions stated below. Also important element Galerkin finite element method to apply.

The final chapter bistability and consistency of Milstein-Galerkin scheme to express the numerical scheme based on the framework.

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

# Consistency and Stability of a Milstein-Galerkin Finite Element Scheme for Semilinear Stochastic Partial Diffrential Equations

Supervisor
Dr Ali Mesforosh

Advisor
Dr Mehdi Ghovatmand

by

Atefe Azad

2015