



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری با روش‌های نیمه تحلیلی

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند جزیی

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی

دانشجو

سید میلاد حسینی

بهمن ۱۳۹۳

پروردگار!...

نه می‌توانم مویشان را که در راه عزّت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های
پینه‌بسته‌شان که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که
هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

تقديم به

پدر و مادر عزیزم

سپاس گزارى...پ

نخستين سپاس و ستايش از آن خداوندى است كه بنده كوچكش را در دريائى بى‌كران اندیشه، قطره‌اى ساخت تا وسعت آن را از دريچه اندیشه‌هاى ناب آموزگارانى بزرگ به تماشا نشيند. لذا اكنون كه در سايه‌سار بنده نوازي‌هايش پايان‌نامه حاضر به انجام رسيده است، برخود لازم مى‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانى به‌جا آورم كه اگر دست ياريگرشان نبود، هرگز اين پايان‌نامه به انجام نمى‌رسيد. ابتدا از استاد گرانقدرم جناب آقاى دكتور مهدى قوتمند كه زحمت راهنمايى اين پايان‌نامه را برعهده داشتند، كمال سپاس را دارم. از استاد عالي‌قدرم جناب آقاى دكتور حجت احسنى كه زحمت مشاوره اين پايان‌نامه را متحمل نمودند، كمال تشكر را دارم. سپاس آخر را به مهربان‌ترين همراهان زندگى‌ام به پدر و مادرم و تمامى دوستانى كه در طول انجام اين پروژه كمك‌رسان من بوده‌اند تقديم مى‌كنم.

سيد ميلاد حسيني
بهمن ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب سید میلاد حسینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری با روش های نیمه تحلیلی، تحت راهنمایی دکتر مهدی قوتمند جزیی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید میلاد حسینی
بهمن ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در سال های اخیر یافتن روش های مناسب نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری موضوع مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. در این طرح روش های مناسب نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری کسری بررسی می شود که از جمله این روش ها می توان به روش تکرار تغییرپذیر، روش تجزیه آدومین و روش آنالیز هموتوپي اشاره کرد.

با توجه به اینکه معادلات دیفرانسیل جبری کسری دارای جواب تحلیلی دقیقی نیست و حل این معادلات با روش های کلاسیک بسیار پیچیده و در برخی موارد غیر ممکن است، لذا سعی داریم تا تقریبی از جواب های معادلات دیفرانسیل جبری کسری را با روش های نیمه تحلیلی به دست آوریم.

در فصل اول به معرفی مفاهیم اولیه مربوط به معادلات دیفرانسیل و به شکل دقیق تر معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری آن اشاره می کنیم. در فصل دوم روش تکرار تغییرپذیر را به تفصیل معرفی کرده و کاربرد آن را در معادلات دیفرانسیل کسری- جبری بیان می کنیم. سپس با ارائه چند مثال عددی فصل دوم را به پایان می بریم. در فصل سوم روش تجزیه آدومین را معرفی و کاربرد این روش در معادلات دیفرانسیل کسری- جبری را با چند مثال نشان می دهیم. در فصل چهارم نیز ابتدا مفاهیم اولیه روش آنالیز هموتوپي را بیان می کنیم؛ سپس روش آنالیز هموتوپي را در معادلات دیفرانسیل کسری- جبری معرفی می کنیم و در انتها با چند مثال عددی فصل را به پایان می بریم.

فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر	
د	لیست جداول	
۱	مفاهیم اولیه	۱
۱	۱.۱ مقدمات و تعاریف اولیه	۱.۱
۱	۱.۱.۱ تاریخچه‌ی حساب کسری	۱.۱.۱
۳	۲.۱.۱ مقدمات	۲.۱.۱
۴	۳.۱.۱ معادلات دیفرانسیل	۳.۱.۱
۶	۴.۱.۱ توابع خاص در حساب کسری	۴.۱.۱
۸	۲.۱ مشتق و انتگرال از مرتبه کسری	۲.۱
۱۶	۳.۱ تبدیلات لاپلاس	۳.۱
۱۷	۱.۳.۱ عملگر لاپلاس	۱.۳.۱
۱۸	۲.۳.۱ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال مرتبه کسری	۲.۳.۱
۱۹	۳.۳.۱ عملگر لاپلاس معکوس	۳.۳.۱
۲۳	۲ روش تغییر تکرارپذیر	۲
۲۳	۱.۲ مقدمه	۱.۲
۲۳	۲.۲ مفاهیم پایه در روش تغییر تکرارپذیر	۲.۲
۲۳	۱.۲.۲ ضرایب لاگرانژ عمومی	۱.۲.۲
۲۵	۲.۲.۲ شرایط پایداری	۲.۲.۲
۲۶	۳.۲.۲ تغییر محدود	۳.۲.۲
۲۸	۳.۲ روش تغییر تکرارپذیر	۳.۲
۳۰	۴.۲ روش تغییر تکرارپذیر برای معادلات دیفرانسیل جبری کسری	۴.۲
۳۲	۵.۲ مثال	۵.۲

۴۳	۳	روش تجزیه آدومین
۴۳	۱.۳	مقدمه
۴۳	۲.۳	روش تجزیه آدومین
۴۷	۳.۳	روش تجزیه آدومین برای معادلات دیفرانسیل جبری کسری
۴۸	۴.۳	مثال
۵۷	۴	روش آنالیز هموتویی
۵۷	۱.۴	مقدمه
۵۷	۲.۴	ایده‌ی هموتویی در یک مثال ساده
۶۱	۳.۴	روش آنالیز هموتویی
۶۴	۴.۴	روش آنالیز هموتویی برای معادلات دیفرانسیل جبری کسری
۶۵	۵.۴	مثال‌ها
۷۲	۶.۴	نتیجه‌گیری
۷۳	آ	کد matlab بخشی از مثال‌ها
۷۸		مراجع
۸۱		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۸۳		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۸۵		نمایه

لیست تصاویر

۳۳		نمودار جواب دستگاه (۴۴.۲).	۱.۲
۳۴		نمودار جواب دستگاه (۴۴.۲).	۲.۲
۳۶		نمودار جواب دستگاه (۴۶.۲).	۳.۲
۳۷		نمودار جواب دستگاه (۴۶.۲).	۴.۲
۳۹		نمودار جواب دستگاه (۴۹.۲).	۵.۲
۴۰		نمودار جواب دستگاه (۴۹.۲).	۶.۲
۴۱		نمودار جواب دستگاه (۴۹.۲).	۷.۲
۴۹		نمودار جواب دستگاه (۲۸.۳).	۱.۳
۵۱		نمودار جواب دستگاه (۳۳.۳).	۲.۳
۵۲		نمودار جواب دستگاه (۳۳.۳).	۳.۳
۵۵		نمودار جواب دستگاه (۳۸.۳).	۴.۳
۶۷		نمودار جواب دستگاه (۵۷.۴) در $\alpha = 1$	۱.۴
۶۸		نمودار جواب دستگاه (۵۷.۴) در $\alpha = 1$	۲.۴
۶۸		نمودار جواب دستگاه (۵۷.۴)	۳.۴
۷۰		نمودار جواب دستگاه (۶۵.۴)	۴.۴
۷۱		نمودار جواب دستگاه (۶۵.۴)	۵.۴

لیست جداول

۱۶		۱.۱ مشتقات کسری خاص
۲۵		۱.۲ مقادیر عددی x
۲۷		۲.۲ مقادیر عددی x
۳۳		۳.۲ مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۳.۲)
۳۶		۴.۲ مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۴.۲)
۳۷		۵.۲ مقادیر عددی $y(t)$ در مثال (۴.۲)
۳۹		۶.۲ مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۵.۲)
۴۰		۷.۲ مقادیر عددی $y(t)$ در مثال (۵.۲)
۴۱		۸.۲ مقادیر عددی $z(t)$ در مثال (۵.۲)
۴۹		۱.۳ مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۳.۳)
۵۱		۲.۳ مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۴.۳)
۵۲		۳.۳ مقادیر عددی $y(t)$ در مثال (۴.۳)
۵۵		۴.۳ مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۵.۳)

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمات و تعاریف اولیه

۱.۱.۱ تاریخچه‌ی حساب کسری

حساب کسری^۱ را می‌توان یک علم جدید و قدیم نامید چرا که تا سال‌های اخیر، اکثر محققان از وجود چنین علمی آگاه نبوده و اغلب دانشمندان به تازگی این علم را در تحقیقات خود مدنظر قرار داده‌اند. این علم در حقیقت زاییده سال ۱۶۹۵ میلادی می‌باشد. در این سال هوپیتال^۲ در نامه‌ای خواستار توجیه معنای $\frac{d^n y}{dt^n}$ وقتی $n = \frac{1}{p}$ باشد، شد و لایبنیتز^۳ [۲۱] در پاسخ، رابطه نزدیک بین مشتقات و سری‌های نامتناهی واگرا را مطرح کرد و نوشت:

«اگر چه سری‌های واگرا و هندسه رابطه دوری با هم دارند، در سری‌های واگرا تنها مجاز به استفاده از توان‌های صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از توان‌های کسری را نداشته‌ایم.» او ادامه می‌دهد: « $d^{\frac{1}{p}} x$ مساوی $x \sqrt[p]{\frac{dx}{x}}$ می‌باشد» و اظهار می‌دارد: «این یک پارادوکس آشکار از چیزی است که روزی نتایج مفیدی خواهد داشت.»

پس از مطرح شدن این موضوع ریاضیدانان زیادی سعی در بسط و گسترش حساب کسری نمودند که از این جمله می‌توان به تحقیقات اوایلر^۴ در سال ۱۷۳۰ و لاپلاس^۵ در سال ۱۸۱۲ اشاره کرد.

در سال ۱۸۱۹، لاکروا^۶، در کتاب خود، دو صفحه را به مبحث مشتق از مرتبه دلخواه اختصاص داد. او نشان داد که اگر $y = x^a$ باشد، آنگاه $\frac{d^{\frac{1}{p}} y}{dx^{\frac{1}{p}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{p})} x^{a-\frac{1}{p}}$ و این نتیجه را نیز به‌دست آورد که $\frac{d^{\frac{1}{p}} x}{dx^{\frac{1}{p}}} = 2\sqrt[p]{\pi}$.

^۴Euler

^۵Laplace

^۶Lacroix

^۱Fractional Calculus

^۲Hospital

^۳Leibniz

در سال ۱۸۲۳، آبل^۷، اولین کاربرد حساب دیفرانسیل کسری را در مسائل فیزیکی (در مسأله هم‌زمانی^۸، که مسأله تعیین یک منحنی است به قسمی که اگر جسمی تحت تأثیر نیروی جاذبه بدون اصطکاک روی آن بلغزد، زمان حرکت آن مستقل از نقطه شروع حرکت باشد) ارائه داد؛ که این مسأله را حل نکرد^[۱۴، ۲۰].

لیوویل^۹ (۱۸۳۲) و ریمان^{۱۰} (۱۸۴۷) ریاضی‌دانانی بودند که تحقیقاتی را بر روی حساب کسری انجام داده و تعاریفی را نیز ارائه دادند که در بخش‌های بعدی به تفصیل به آنها پرداخته خواهد شد. در سال ۱۸۸۴، لوران^{۱۱}، نظریه‌ی عملگرهای تعمیم‌یافته D^v با v حقیقی را منتشر کرد و با انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبه دلخواه مواجه شد. و در سال ۱۹۸۲ نیز هوی‌ساید^{۱۲} مشتقات مرتبه کسری را در توسعه نظریه‌ی خط انتقال خود به‌کار برد. در سال ۱۹۳۶، جمانت^{۱۳} نظریه‌ی انتقال هوی‌ساید را ادامه داد و از مشتقات مرتبه کسری در خاصیت کشسانی استفاده کرد^[۱۲].

در سال ۱۹۷۴، راس^{۱۴}، اولین کنفرانس دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری و کاربردهای آن را برگزار کرد و دومین و سومین کنفرانس در این زمینه در سال ۱۹۸۴ در گلاسکو و ۱۹۸۹ در توکیو برگزار شد. در سال ۱۹۹۳، کنت میلر^{۱۵} و راس کتاب مقدمه‌ای بر دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری را به چاپ رساندند که این کتاب مطالب خوبی را برای دانشمندان و ریاضی‌دانانی که در جستجوی مقدمه‌ای بر این موضوع جذاب هستند، ارائه می‌دهد. در این کتاب حل معادلات

$$\left[D^{\frac{n}{q}} + a_1 D^{\frac{n-1}{q}} + \dots + a_{n-1} D^{\frac{1}{q}} + a_n D^0\right]x(t) = y(t) \quad (1.1)$$

ارائه شده است، وقتی n و q اعداد صحیح و مثبت و a_i ها ثابت هستند. در سال ۱۹۹۷، کولوانکر^{۱۶} در پایان‌نامه‌ی دکترای خود به مطالعه در مورد ارتباط بین فراکتال‌ها و حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری پرداخت. در سال ۲۰۰۰، هیلفر^{۱۷} کتابی با عنوان کاربردهایی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری در فیزیک را چاپ و منتشر کرد که در بخش ۹ به کاربردهای ویژه این موضوع در علم فیزیک می‌پردازد.

در سال ۲۰۰۳ اولین نشست علمی با موضوعیت حساب کسری در شیکاگو برگزار گردید. این نشست علمی بخشی از کنفرانس تکنیک طراحی مهندسی، ASME ۲۰۰۳ بود. سه کنفرانس برگزار شده قبلی در مورد حساب کسری به جنبه‌های ریاضی موضوع توجه داشته و در حقیقت کنفرانس‌هایی ریاضی بودند، اما نشست علمی شیکاگو با هدف توجه بیشتر به کاربردهای این علم برگزار گردید. پس از این نشست علمی، کنفرانس‌ها و نشست علمی‌های متعددی در زمینه دیفرانسیل کسری و کاربردهای آن برگزار گردیده، که از این میان می‌توان به اولین کنفرانس IFAC در زمینه دیفرانسیل کسری و کاربردهای

^{۱۳}Gemant^{۱۴}Ross^{۱۵}Miller^{۱۶}Kolwanker^{۱۷}Hilfer^۷Abel^۸tautochrone problem^۹Liouville^{۱۰}Riemann^{۱۱}Laurent^{۱۲}Heaviside

آن در شهر بوردو فرانسه (۲۰۰۴) و دومین نشست علمی (نیم‌نشست علمی) FDTA در هلند و در شهر آینده‌وون (۲۰۰۵) اشاره کرد [۱۲].

تحقیقات در مورد کاربرد حساب کسری در ابتدای مسیر خود قرار دارد و هم‌اکنون تیم‌های کاری متفاوتی در دنیا مشغول مطالعه و تحقیق برای بسط و گسترش این شاخه نو ظهور با قدمت ۳۱۰ ساله همچنان ادامه دارد.

۲.۱.۱. مقدمات

مشتقات و انتگرال سنتی، به‌عنوان یک بخش اصلی فناوری حرفه‌ای، ابزاری ضروری برای درک و کار با سیستم‌های طبیعی و مصنوعی می‌باشد. حساب کسری یکی از رشته‌های ریاضی مورد مطالعه که از تعاریف عملگرهای مشتق و انتگرال سنتی به همان شیوه توان کسری رشد می‌کند، در نتیجه توان با مقدار صحیح می‌باشد.

بنابر آموزه‌های ابتدای دوران تحصیل، توان را به‌عنوان نماد کوچکی برای آن‌چه که در اصل یک ضرب مکرر از یک مقدار عددی می‌باشد، آموختیم. این مفهوم در نوع خود قابل درک و به‌کاربردن است؛ اما این تعریف ریاضی، وقتی که توان‌هایی با مقادیر غیر صحیح در نظر گرفته شود، می‌تواند کاملاً پیچیده باشد. در حالی که هر کسی می‌تواند رابطه $x^3 = x \times x \times x$ را به‌وضوح درک کند، ولی کمتر کسی است که درک درستی از $x^{\frac{1}{2}}$ یا x^{π} را داشته باشد؛ اما این عبارات را می‌توان از طریق بسط سری‌های بینهایت و یا به‌طور عملی‌تر با استفاده از ماشین حساب محاسبه کرد.

اگر چه انتگرال و مشتق دارای تعاریف پیچیده تری نسبت به توان هستند، اما باز هم می‌توان معانی فیزیکی قابل درک و نسبتاً ساده‌ای را برای عملگر مشتق و یا انتگرال متصور شد. با پذیرش برخی محدودیت‌ها (مانند پیوستگی تابع) تعداد متناهی (n بار) عمل انتگرال‌گیری را می‌توان به آسانی انجام داد، اما سوالی که در یک ذهن کنج‌کاو ایجاد می‌شود آن است که اگر n به اعداد صحیح محدود نباشد، چگونه می‌توان n انتگرال‌گیری را انجام داد؟

در اولین نگاه، نمی‌توان مفهوم فیزیکی یا ریاضی خاصی را به این موضوع اختصاص داد، اما در ادامه نشان خواهیم داد که محاسبات کسری از همان تعاریف سنتی ریاضیات حاصل می‌شود.

قبل از ورود به بحث حساب کسری لازم است به تعریف معادلات دیفرانسیل^{۱۸} و معادلات دیفرانسیل جبری^{۱۹} بپردازیم. سپس چند تعریف ابتدایی از تابع گاما^{۲۰} و تابع بتا^{۲۱} و ... انجام دهیم. همچنین به تعریف انتگرال و مشتق کسری پرداخته خواهد شد و در ادامه به بررسی کاربردهای این عملگرها در معادلات دیفرانسیل کسری خواهیم پرداخت [۲۲].

^{۲۰}Gamma Function

^{۲۱}Beta Function

^{۱۸} Differential Equation

^{۱۹}Differential Equation Algebraic

۳.۱.۱ معادلات دیفرانسیل

بیش از سیصد سال است که آنالیز تواناترین شاخه ریاضیات بوده و مبحث معادلات دیفرانسیل بخش عمده آن است که در درک علوم طبیعی ابزاری بسیار کاراست. بدیهی است که هیچ چیز بدون تغییر دایمی نیست و هدف اولیه معادلات دیفرانسیل آن است که وسیله‌ای برای مطالعه تغییرات جهان مادی باشد؛ چون جهان مادی ما یعنی طبیعت، دائم در حال تغییر است. معادلات دیفرانسیل اغلب از مدل کردن پدیده‌های فیزیکی حاصل می‌شوند. در این قسمت به تعریف معادلات دیفرانسیل و انواع آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. رابطه‌ای بین یک تابع مجهول، متغیر(های) تابع مجهول و مشتق‌های تابع مجهول را معادله دیفرانسیل می‌نامند. شکل کلی معادله دیفرانسیل معمولی به صورت

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

می‌باشد، که معادله دیفرانسیل مرتبه n نامیده می‌شود و رابطه‌ای بین متغیر مستقل x و تابع $y(x)$ و n مشتق اول آن $(y', y'', \dots, y^{(n)})$ است.

تعریف ۲.۱. اگر همین معادلات دارای شرایطی باشند یا به شکلی مقید شده باشند، آنگاه مدل ریاضی آن‌ها علاوه بر معادلات دیفرانسیل، شامل معادلات جبری برای توصیف این قید است. به این دسته معادلات، معادلات دیفرانسیل - جبری می‌گویند. حالت کلی این معادلات به شکل زیر است

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \\ g(x, y, y', \dots, y^{(n)}, t) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

بنابراین آن چیزی که معادله دیفرانسیل را از معادله جبری متمایز می‌کند، وجود مشتق تابع مجهول در معادله می‌باشد.

روش‌های حل معادلات دیفرانسیل بسیار مرتبط با نوع معادله هستند. معادلات دیفرانسیل را به طور کلی به دو دسته می‌توان تقسیم کرد.

معادلات دیفرانسیل معمولی :

اگر در معادله دیفرانسیل تابع مجهول بر حسب یک متغیر باشد، آنگاه آن را معادله دیفرانسیل معمولی^{۲۲} می‌نامیم. فرم کلی این معادلات به دو شکل ضمنی^{۲۳} و صریح^{۲۴} بیان می‌شود.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{ضمنی} \quad (4.1)$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}, \quad \text{صریح} \quad (5.1)$$

^{۲۴}Explicit

^{۲۲}Ordinary Differential Equation

^{۲۳}Implicit

معادلات دیفرانسیل جزئی :

اگر تابع مجهول وابسته به بیش از یک متغیر مستقل باشد، آن گاه آن را معادله دیفرانسیل جزئی یا پاره‌ای^{۲۵} می‌نامیم. فرم کلی این معادلات به صورت زیر می‌باشد

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots) = 0, \quad (6.1)$$

هر دو نوع این معادلات را می‌توان از دیدگاه خطی یا غیرخطی بودن تابع جواب هم دسته بندی کرد.

معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی :

معادله دیفرانسیل را خطی گویند هرگاه ضابطه معادله برحسب تابع مجهول و مشتقات آن خطی باشد. به عبارتی دیگر بتوان آن را به فرم زیر نوشت

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad (7.1)$$

که در آن $g(x)$ و $a_i(x)$, $0 \leq i \leq n$ توابعی بر حسب x هستند.

در معادله (۷.۱) اگر $g(x) \equiv 0$ ، آن‌گاه معادله را همگن^{۲۶} و در غیر این صورت آن را ناهمگن^{۲۷} می‌نامند.

همچنین معادله دیفرانسیل را غیرخطی گوئیم هرگاه خطی نباشد.

به‌طورکل معادلات دیفرانسیل به سه روش تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی حل می‌شوند. برخی از معادلات دارای جواب دقیق و فرم تابعی هستند؛ این‌گونه معادلات را می‌توان از روش‌های تحلیلی حل نمود و به جواب دقیق رسید. معادلات دیگر که دارای فرم تابع مشخص نیستند را بایستی توسط روش‌های نیمه تحلیلی و یا عددی حل کرد. از روش‌های نیمه تحلیلی می‌توان به روش تغییر تکرارپذیر^{۲۸}، روش تجزیه آدومین^{۲۹}، آنالیز هموتوپی^{۳۰}، تبدیل دیفرانسیل^{۳۱} و... اشاره کرد. روش‌های عددی دامنه وسیع‌تری را برای حل معادلات به کار می‌گیرد. از روش‌های عددی می‌توان به روش اوایلر^{۳۲}، روش هون^{۳۳}، روش تیلور^{۳۴}، روش رانگ-کوتا^{۳۵}، آدامز-بشفورث-مولتون^{۳۶}، روش میلن سیمپسون^{۳۷}، روش هامینگ^{۳۸}، روش رانگ-کوتا فلبرگ مرتبه ۵^{۳۹}، روش‌های طیفی^{۴۰}، روش‌های شبکه‌ای همانند المان‌های متناهی^{۴۱} و نقاط محدود و روش‌های بدون شبکه اشاره کرد.

^{۳۴}Taylor's Method^{۳۵}Runge-Kutta Method^{۳۶}Adams-Bashforth Method^{۳۷}Milne-Simpson Method^{۳۸}Hamming Method^{۳۹}Runge-Kutta-Fehlberg Method^{۴۰}Spectral Methods^{۴۱}Finite Element Method^{۲۵}Partial Differential Equations^{۲۶}Homogeneous^{۲۷}Inhomogeneous^{۲۸}Variational Iteration^{۲۹}Adomian Decomposition^{۳۰}Homotopy Analysis^{۳۱}Differential Transform Method^{۳۲}Euler Method^{۳۳}Heun's Method

۴.۱.۱ توابع خاص در حساب کسری

تابع گاما

بدون شک یکی از توابع اساسی در حساب کسری، تابع گاما $\Gamma(z)$ است که تعمیمی از فاکتوریل می‌باشد که می‌تواند مقادیر خود را به صورت غیر صحیح و حتی مختلط اختیار کند. تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \quad (8.1)$$

یکی از مهم‌ترین خواص تابع گاما این است که در معادله زیر صدق می‌کند

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (9.1)$$

که با استفاده از انتگرال‌گیری جزیه‌جز به صورت زیر به راحتی قابل اثبات می‌باشد.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

واضح است که $\Gamma(1) = 1$ زیرا

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 1,$$

و به همین ترتیب بر اساس رابطه (۹.۱) داریم:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

⋮

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) = x \cdot (x-1)! = x!$$

بنابراین برای هر عدد حقیقی مثبت x داریم:

$$\Gamma(x+1) = x! \quad (10.1)$$

بنابراین با کمک تابع گاما، می‌توان برای تمام اعداد حقیقی، تابع فاکتوریل^{۴۲} تعریف کرد (به جز اعداد صحیح منفی). برخی از خواص مهم تابع گاما به صورت زیر می‌باشد

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11.1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!!, \quad n \in \mathbb{N},$$

برای روشن شدن مطلب، به ذکر مثالی در این زمینه می‌پردازیم.

^{۴۲}Factorial Function

مثال ۳.۱. مقدار $(\frac{5}{2})!$ را با استفاده از تابع گاما محاسبه می‌کنیم.

$$(\frac{5}{2})! = \Gamma(\frac{5}{2} + 1) = \frac{5}{2} \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{15}{8} \Gamma(\frac{1}{2})$$

از طرفی برای محاسبه $\Gamma(\frac{1}{2})$ طبق تعریف داریم:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \xrightarrow{t=u^2} \Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

بنابراین

$$(\frac{5}{2})! = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

تابع بتا

تابع بتا به عنوان انتگرال اویلر نوع اول شناخته می‌شود که در حساب کسری نقش مهمی ایفا می‌کند. این تابع وابستگی زیادی به تابع گاما دارد به طوری که در تعریف این تابع از چندین تابع گاما استفاده می‌شود. تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du \quad p, q \in \mathbb{R}^+ \quad (12.1)$$

برای به دست آوردن رابطه بین توابع بتا و گاما از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم که در ادامه تعریف می‌شود.

$$h_{p,q}(t) = \int_0^t (1-u)^{p-1} u^{q-1} du \quad (13.1)$$

واضح است که $h_{p,q}(t)$ کانولوشن^{۴۳} از توابع u^{p-1} و u^{q-1} است و $h_{p,q}(1) = \beta(p, q)$. کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f * g)(t)$ نشان داده می‌شود، به شکل زیر تعریف می‌شود

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (14.1)$$

با توجه به این که کانولوشن دو تابع برابر حاصل ضرب تبدیل لاپلاس آن دو تابع است، داریم:

$$H_{p,q}(s) = \frac{\Gamma(p)}{s^p} \frac{\Gamma(q)}{s^q} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}, \quad (15.1)$$

^{۴۳}Convolution

که در آن $H_{p,q}(s)$ تبدیل لاپلاس $h_{p,q}(t)$ است. به عبارت دیگر چون $\Gamma(p)$ و $\Gamma(q)$ ثابت هستند، می‌توان $h_{p,q}(t)$ را با گرفتن معکوس تبدیل لاپلاس از طرفین رابطه فوق دوباره به دست آورد. بنابراین خواهیم داشت:

$$h_{p,q}(t) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} t^{p+q-1}, \quad (16.1)$$

با قرار دادن $t = 1$ نتیجه به دست می‌آید.

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (17.1)$$

تابع میتاگ - لفلر

یکی دیگر از توابع خاص که در حساب کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد توابع میتاگ - لفلر و نوع تعمیم یافته‌ی آن است [۲۲]. تعریف استاندارد تابع میتاگ - لفلر به شکل زیر می‌باشد

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad \alpha > 0, \quad (18.1)$$

که این تابع به ازای $\alpha = 1$ همان تابع نمایی^{۴۴} خواهد بود. حالت تعمیم یافته‌ی تابع میتاگ - لفلر که براساس دو آرگومان بیان می‌شود، به صورت زیر قابل تعریف است

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0, \quad (19.1)$$

با مقداری به α و β در رابطه‌ی (۱۹.۱) داریم:

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \\ E_{1,2}(x) &= \frac{e^x - 1}{x}, \\ E_{2,1}(x) &= \cosh(\sqrt{x}), \\ E_{2,2}(x) &= \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \end{aligned} \quad (20.1)$$

۲.۱ مشتق و انتگرال از مرتبه کسری

با توجه به آن‌چه در مقدمه‌ی حساب کسری بیان کردیم، می‌دانیم که مفهوم مشتقات و انتگرال کسری از مشتقات و انتگرال صحیح نتیجه می‌شود. بنابراین در این بخش پس از چند تعریف به معرفی مشتقات

^{۴۴}Exponential Function

و انتگرال کسری کاپوتو^{۴۵}، ریمان - لیوویل^{۴۶} و گرانولد - لتنیکیف^{۴۷} می‌پردازیم. تعاریف، لم‌ها و اثبات آن‌ها در این بخش در مرجع [۲۲] آمده است.

تعریف ۴.۱. تابع حقیقی $f(x)$ ، $x > 0$ در فضای C_μ ، $\mu \in \mathbb{R}$ گفته می‌شود، اگر یک عدد حقیقی $p > \mu$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$f(x) = x^p f_1(x)$$

که $f_1(x) \in C[0, \infty)$. واضح است که اگر $\beta < \mu$ آنگاه $C_\mu \subset C_\beta$.

تعریف ۵.۱. تابع حقیقی $f(x)$ ، $x > 0$ در فضای C_μ^m گفته می‌شود اگر و تنها اگر

$$f^{(m)} \in C_\mu \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

انتگرال کسری

اگر تابع $f(x)$ برای $x > 0$ تعریف شده باشد. انتگرال زیر را تعریف می‌کنیم

$$(If)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad (21.1)$$

در این صورت

$$(I^2 f)(x) = \int_0^x (If)(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt, \quad (22.1)$$

با ادامه این روند برای $n \in \mathbb{N}$ و $x > 0$ داریم:

$$(I^n f)(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t)dt \dots dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad (23.1)$$

این فرمول به فرمول کوشی^{۴۸} معروف است. مشکل اصلی در رابطه‌ی (۲۳.۱) تابع فاکتوریل می‌باشد که برای اعداد غیرصحیح بی‌معنی است. اما با توجه به تعریف تابع گاما این محدودیت رفع می‌شود و با استفاده از تابع گاما به جای تابع فاکتوریل، می‌توان شرط $n \in \mathbb{R}$ را جایگزین کرد. بنابراین با توجه به فرمول کوشی، تعریف عملگر انتگرال ریمان - لیوویل در ادامه بیان می‌شود.

تعریف ۶.۱. فرض کنید $\mu \geq -1$ ، $f \in C_\mu$ ، در این صورت عملگر انتگرال ریمان - لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha \geq 0$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \quad \alpha > 0, x > 0, \quad (24.1)$$

^{۴۷}Grunwald-Letnikov

^{۴۸}Cauchy Formula

^{۴۵}Caputo

^{۴۶}Riemann-Liouville

برخی از خواص J^α :

برای $\gamma > -1$ و $f \in C_\mu, \mu \geq -1, \alpha, \beta \geq 0$ داریم [۱۳، ۱۴، ۲۰]

$$\begin{aligned} J^0 f(x) &= f(x), \\ J^\alpha J^\beta f(x) &= J^{\alpha+\beta} f(x), \\ J^\alpha J^\beta f(x) &= J^\beta J^\alpha f(x), \\ J^\alpha x^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}, \\ J^\alpha \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right) &= \sum_{i=1}^n c_i J^\alpha f_i(x), \end{aligned} \quad (25.1)$$

مشتق کسری ریمان - لیوویل و کاپوتو

در این قسمت دو روش اصلی برای تعریف مشتق کسری بیان می‌کنیم. در اولین روش مشتق و انتگرال به‌عنوان حدهایی از تفاضلات متناهی و تعمیمی از آن فرض می‌شود. تعریف گرانوالد - لتنیف که در ادامه این فصل آن را تعریف می‌کنیم، از این روش پیروی می‌کند. روش دیگر نیز تعمیمی از تکرار انتگرال‌گیری از یک تابع می‌باشد که ریمان - لیوویل و کاپوتو از جمله‌ی این روش‌ها هستند. ریمان - لیوویل برای به‌دست آوردن مشتق کسری یک تابع، فرمول زیر را با استفاده از رابطه‌ی (۲۴.۱) در حالت $\alpha > 0$ به‌دست آورد.

$$D^\alpha f(x) = D^m J^{m-\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right], \quad (26.1)$$

که در آن $m \in \mathbb{N}, m-1 < \alpha < m$.

همچنین برای مشتق مرتبه‌ی n یعنی D^n به این نکته توجه داریم که

$$D^n J^n = I, \quad J^n D^n \neq I \quad n \in \mathbb{N} \quad (27.1)$$

این رابطه قابل تعمیم به مشتقات کسری از مرتبه‌ی α می‌باشد. به‌عبارتی دیگر D^α معکوس چپ (نه معکوس راست) J^α می‌باشد. یعنی

$$D^\alpha J^\alpha = I, \quad J^\alpha D^\alpha \neq I, \quad (28.1)$$

تعریف دیگری که برای مشتق کسری وجود دارد، روش کاپوتو می‌باشد که این عملگر توسط کاپوتو ریاضیدان ایتالیایی در سال ۱۹۶۷ معرفی شد.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $f \in C_-^m$ و $m \in \mathbb{N}$ ، در این صورت مشتقات کسری کاپوتو تابع $f(x)$ به‌شکل

زیر تعریف می‌شود

$$D_*^\alpha f(x) = \begin{cases} J^{m-\alpha} D^m f(x) = \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m f(x)}{dx^m}, & \alpha = m \end{cases} \quad (29.1)$$

تعریف مشتق کسری کاپوتو و ریمان - لیوویل برای مقادیر $0 < \alpha < 1$ نیز به صورت زیر قابل تعریف است

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha < 0, \quad (30.1)$$

مثال ۸.۱. مشتق کسری کاپوتو تابع $f(t) = t$ را با فرض $\alpha = \frac{1}{2}$ به دست آورید.

چون $0 < \alpha < 1$ ، بنابراین $m = 1$ می‌باشد. بنابراین طبق تعریف (۲۹.۱) داریم:

$$D_*^{\frac{1}{2}} t = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau.$$

بنابر خواص تابع گاما در رابطه‌ی (۱۱.۱) و همچنین تغییر متغیر $u = t - \tau$ نتیجه برای مشتق کسری کاپوتو برای تابع $f(t) = t$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} D_*^{\frac{1}{2}} t &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d(t-\tau) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{1}{u} d(u^2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{u} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - 0). \end{aligned}$$

بنابراین

$$D_*^{\frac{1}{2}} t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

با توجه به تعریف (۲۹.۱) لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱۰.۱. اگر $1 < \alpha \leq m$ ، $m \in \mathbb{N}$ و $m-1 < \alpha \leq m$ ، $f \in C_\mu^m$ ، در این صورت:

$$D_*^\alpha J^\alpha f(x) = f(x), \quad (31.1)$$

$$J^\alpha D_*^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}, \quad x > 0. \quad (32.1)$$

برهان. بنابر تعریف D_*^α و J^α داریم:

$$\begin{aligned} J^\alpha D_*^\alpha f(x) &= J^\alpha J^{m-\alpha} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x (x-t)^{m-1} f^{(m)}(t) dt \\ &= \frac{f^{(m)}(t)}{(m-1)!} \int_0^x (x-t)^{m-1} dt = \frac{f^{(m)}(\circ)}{(m-1)!} \frac{(x-t)^m}{m} \Big|_0^x = \frac{f^{(m)}(\circ)}{m!} x^m. \end{aligned} \quad (33.1)$$

از طرفی بسط مک لوران تابع f به صورت زیر است

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(\circ) \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{(m)}(\circ)}{m!} x^m. \quad (34.1)$$

حال با جایگذاری (33.1) در (34.1) داریم:

$$J^\alpha D_*^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(\circ) \frac{x^k}{k!}.$$

□

حال در مقایسه با دو تعریف کاپوتو و ریمان - لیوویل لم (2.1) و نتایج آن را بیان می‌کنیم.

لم 2.1. اگر $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$ و $m \in \mathbb{N}, m-1 < \alpha \leq m$ ، در این صورت

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ), \quad (35.1)$$

برهان. طبق بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه صفر داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\circ) + x f'(\circ) + \frac{x^2}{2!} f''(\circ) + \frac{x^3}{3!} f'''(\circ) + \dots + f^{(n-1)}(\circ) + R_{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(\circ) + R_{m-1} \end{aligned} \quad (36.1)$$

بنابر رابطه‌ی (24.1) داریم:

$$R_{m-1} = \int_0^x \frac{f^{(m)}(\tau)(x-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x f^{(m)}(\tau)(x-\tau)^{m-1} d\tau = J^m f^{(m)}(x). \quad (37.1)$$

حال بنابر خاصیت خطی بودن عملگر مشتق کسری ریمان - لیوویل، فرمول مشتق کسری ریمان - لیوویل

برای تابع توانی (جدول ۱۰.۱) و همچنین (۲۹.۱) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 D^\alpha f(x) &= D^\alpha \left(\sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{x^k}{\Gamma(k+\backslash)} f^{(k)}(\circ) + R_{m-\backslash} \right) \\
 &= \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{D^\alpha x^k}{\Gamma(k+\backslash)} f^{(k)}(\circ) + D^\alpha R_{m-\backslash} \\
 &= \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{\Gamma(k+\backslash)}{\Gamma(k-\alpha+\backslash)} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+\backslash)} f^{(k)}(\circ) + D^\alpha J^m f^{(m)}(x) \\
 &= \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+\backslash)} f^{(k)}(\circ) + J^{m-\alpha} f^{(m)}(x) \\
 &= \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+\backslash)} f^{(k)}(\circ) + D_*^\alpha f(x)
 \end{aligned}$$

و این بدان معنی است که

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+\backslash)} f^{(k)}(\circ),$$

□

نتیجه ۱: در مقایسه با دو تعریف کاپوتو و ریمان - لیوویل داریم:

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} f^{(k)}(\circ+) \frac{x^k}{k!} \right), \quad D_*^\alpha \backslash \equiv \circ, \alpha > \circ, \quad (38.1)$$

برهان. برای اثبات با توجه به (۳۵.۱)، مشتق کسری ریمان - لیوویل تابع توانی (جدول ۱۰.۱) و همچنین خاصیت خطی بودن عملگر مشتق کسری ریمان - لیوویل داریم:

$$\begin{aligned}
 D_*^\alpha f(x) &= D^\alpha f(x) - \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+\backslash)} f^{(k)}(\circ) \\
 &= D^\alpha f(x) - \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{D^\alpha x^k}{\Gamma(k+\backslash)} f^{(k)}(\circ) \\
 &= D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=\circ}^{m-\backslash} \frac{x^k}{\Gamma(k+\backslash)} f^{(k)}(\circ) \right)
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۲: به‌طور کلی برای هر $m - \backslash < \alpha < m$ و $x > \circ$

$$D^\alpha f(x) = D^m J^{m-\alpha} f(x) \neq J^{m-\alpha} D^m f(x) = D_*^\alpha f(x), \quad (39.1)$$

یکی از پرکاربردترین توابع در بحث حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری توابع توانی می باشد که قضیه ی زیر مشتق کسری را برای این توابع تعریف می کند.

قضیه ۱.۱. مشتق کسری کاپوتو برای توابع توانی در رابطه ی زیر صدق می کند

$$D_*^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = D^\alpha t^p, & m-1 < \alpha < m, \quad p > m-1, \quad p \in \mathbb{R} \\ 0, & m-1 < \alpha < m, \quad p \leq m-1, \quad p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

برهان. در حالت $p \leq m-1, p \in \mathbb{N}$ چون $(t^p)^{(m)} = 0$ حکم واضح است. اکنون فرض کنید $m-1 < \alpha < m, p > m-1, p \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$\begin{aligned} D_*^\alpha t^p &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{(\tau^p)^{(m)}}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} (\tau^{p-m})(t-\tau)^{m-\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

حال با تغییر متغیر $\tau = \lambda t, 0 \leq \lambda \leq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(p-m+1)} \int_0^1 ((\lambda t)^{p-m})((1-\lambda)t)^{m-\alpha-1} t d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(p-m+1)} t^{p-\alpha} \int_0^1 \lambda^{p-m}(1-\lambda)^{m-\alpha-1} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(p-m+1)} t^{p-\alpha} B(p-m+1, m-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(p-m+1)} t^{p-\alpha} \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(p-m+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

حال با توجه به رابطه ی (۳۵.۱) داریم:

$$D_*^\alpha t^p = D^\alpha t^p - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t^p)^{(k)}|_{t=0},$$

و با توجه به اینکه $(t^p)^{(k)}|_{t=0} = 0$ برای $k \leq m-1 < \alpha$ داریم:

$$\begin{aligned} D^\alpha t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \cdot (0), \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

□

مشتق کسری گرانولد - لتینکف

با توجه به اینکه فرمول‌های ریمان - لیوویل با ایده‌ی انتگرال‌گیری مکرر از یک تابع به‌دست می‌آید، ایده دنبال کردن دیدگاهی مشابه برای بدست آوردن فرمول مشتق نیز توجه برخی از ریاضیدانان را جلب کرد. گرانولد و لتینکف از پیش‌تازان این ایده بودند. برای بدست آوردن تعریفی برای مشتق کسری، از تعریف مشتق مرتبه اول شروع می‌کنیم [۱۲].

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

با مشتق‌گیری دوباره داریم:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1}, \end{aligned}$$

که اگر $h = h_1 = h_2$ داریم:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2},$$

و با ادامه‌ی این روند می‌توان رابطه‌ی زیر را برای مشتقات مکرر به‌دست آورد

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (40.1)$$

این عبارات را می‌توان برای مقادیر غیر صحیح n نیز استفاده کرد به شرط آن‌که ضرایب $\binom{n}{m}$ به جای تعریف شدن از طریق تابع فاکتوریل، با استفاده از تابع گاما تعریف شود. بنابراین مشتق کسری را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh), \quad (41.1)$$

حد بالا حاصل جمع، در رابطه‌ی فوق باید به بینهایت میل کند و عبارت $\frac{x-a}{h}$ این خصوصیت را دارد (ت و a به ترتیب حد بالا و پایین مشتق‌گیری هستند). همان‌طور که فرمول ریمان - لیوویل برای انتگرال‌گیری کسری در تعریف مشتق کسری نیز مورد استفاده قرار گرفت، فرمول مشتق گرانولد - لتینکف را نیز می‌توان برای انتگرال‌گیری کسری مورد استفاده قرار داد. ساده‌ترین تغییر برای استفاده از این فرمول در انتگرال‌گیری، استفاده از آن برای $\alpha < 0$ می‌باشد. در این حالت باید عبارت $\binom{-\alpha}{m}$ که در رابطه‌ی

(40.1) به وجود می‌آید را با استفاده از تابع گاما قابل تعریف کنیم.

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)}, \quad (42.1)$$

بنابراین مشتق کسری توسط فرمول گرانولد - لتنیف به فرم زیر حاصل خواهد شد

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x-mh). \quad (43.1)$$

مشتق کسری چند تابع خاص

در ادامه مشتقات کسری چند تابع خاص با استفاده از تعریف ریمان - لیوویل در جدول (۱.۱) آمده است [۲۱]. در این بخش دیدیم که تعاریف کاپوتو و ریمان - لیوویل برای $\alpha < 0$ برابر است در حالی که این مقادیر برای $\alpha > 0$ متفاوت است. به عنوان مثال مشتق مرتبه α برای توابع ثابت با استفاده از تعریف ریمان - لیوویل غیر صفر بوده و همین مشتق بنابر تعریف کاپوتو صفر می باشد.

جدول ۱.۱: مشتقات کسری خاص

تابع $f(x)$	مشتق کسری مرتبه α
C	$C \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$(x-a)^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha}$
$e^{bx}, b > 0$	$x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}^*(bx)$
$\ln(x)$	$\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [\log x - \gamma - \Psi^*(1-\alpha)]$
$H^{\diamond}(x-x_0)$	$H(x-x_0) \frac{(x-x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$f(x)H(x-x_0)$	$H(x-x_0) D^{\alpha} f(x)$
$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} (x-x_0)^{-\alpha-1}$

*: $E_{\alpha,\beta}(x)$ تابع میتاگ - لفلر می باشد که در بخش های قبلی معرفی کردیم.

*: $\Psi(x)$ تابع دیگاما^{۴۹} می باشد که همان مشتق لگاریتم تابع گاما است و به صورت زیر تعریف می شود

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (44.1)$$

◊: $H(x-x_0)$ تابع پله ای هویساید^{۵۰} است که در دامنه $x > x_0$ برابر ۱ و در دیگر نقاط صفر می باشد.

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 1 & x > x_0, \\ 0 & x \leq x_0, \end{cases} \quad (45.1)$$

۳.۱ تبدیلات لاپلاس

در این بخش تبدیلات لاپلاس که به عنوان ابزار مهم در ریاضیات و مهندسی مورد به حساب می آید، برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری مورد استفاده قرار می گیرد. در مسیر حل معادلات دیفرانسیل از

^{۵۰} Heaviside Step Function

^{۴۹} Digamma Function

جمله نوع کسری آن به وسیله تبدیلات لاپلاس، معادله دیفرانسیل کسری به معادلات جبری تبدیل شده و سپس با حل معادلات جبری می توان معادلات مجهول را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس به دست آورد. در این قسمت به معرفی و روابط موجود در تبدیلات لاپلاس می پردازیم.

۱.۳.۱ عملگر لاپلاس

تعریف ۹.۱. فرض کنید تابع $f(x)$ برای $0 < x < \infty$ تعریف شده باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس برای مقادیری از s که انتگرال زیر متناهی باشد، به صورت زیر قابل تعریف است

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx, \quad (46.1)$$

که s می تواند یک متغیر حقیقی یا مختلط باشد.

توجه داشته باشید که می توانیم انتگرال ناسره فوق را به شکل زیر هم بنویسیم

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (47.1)$$

قضیه ۲.۱. قضیه وجود تبدیل لاپلاس: فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته در بازه $[0, \infty)$ که از مرتبه نمایی است، یعنی برای هر $c \in \mathbb{R}$ و $x > 0$ داریم:

$$\sup \frac{|f(x)|}{e^{cx}} < \infty.$$

در این صورت تبدیل لاپلاس برای هر $s > c$ موجود است.

برخی از تبدیلات لاپلاس مهم که در این فصل مورد استفاده قرار می گیرد، در این قسمت معرفی می شود. برای $L[f(x)] = F(s)$ و $L[g(x)] = G(s)$ داریم:

$$L[f(x) + g(x)] = F(s) + G(s),$$

$$L[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}}, \quad \beta > -1,$$

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

$$L[x^n f(x)] = (-1)^{n-1} F^{(n-1)}(s),$$

$$L\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s},$$

$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t) dt\right] = F(s)G(s).$$

۲.۳.۱ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال مرتبه کسری

لم ۳.۱. تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$L[J^\alpha f(x)] = \frac{F(s)}{s^\alpha} \quad (۴۸.۱)$$

برهان. بنابر تعریف عملگر انتگرال کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} L[J^\alpha f(x)] &= L\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right] = L\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(x-t) f(t) dt\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L[f * g] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} F(s) G(s), \end{aligned} \quad (۴۹.۱)$$

که در آن $f * g$ کانولوشن توابع f و g و $g(x) = x^{\alpha-1}$ می‌باشد. بنابراین

$$G(s) = L[x^{\alpha-1}] = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}, \quad (۵۰.۱)$$

□

با جایگذاری (۵۰.۱) در (۴۹.۱) حکم ثابت می‌شود.

لم ۴.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان - لیوویل برای $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$L[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(0)], \quad (۵۱.۱)$$

برهان. بنابر تعریف عملگر مشتق کسری ریمان - لیوویل داریم:

$$L[D^\alpha f(t)] = L\left[\frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t)\right]$$

حال بنابر فرمول تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه‌ی صحیح m داریم:

$$\begin{aligned} L[D^\alpha f(t)] &= s^m L[J^{m-\alpha} f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \frac{d^{m-k-1}}{dt^{m-k-1}} J^{m-\alpha} f(0) \\ &= \frac{s^m F(s)}{s^{m-\alpha}} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(0)], \end{aligned}$$

□

لذا حکم ثابت می‌شود.

لم ۵.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو برای $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$L[D_*^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (۵۲.۱)$$

برهان. برای اثبات رابطه‌ی (۵۲.۱)، بنابر تعریف عملگر مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه‌ی $\alpha > 0$ داریم:

$$D_*^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} f^{(m)}(t),$$

در نظر می‌گیریم $g(t) = D^m f(t)$ ؛ بنابراین

$$D_*^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} g(t),$$

بنابر عملگر لاپلاس انتگرال کسری از مرتبه‌ی $m - \alpha$ برای تابع $g(t)$ به صورت

$$L[D_*^\alpha f(t)] = L[J^{m-\alpha} g(t)] = s^{-(m-\alpha)} G(s) \quad (53.1)$$

می‌باشد که $G(s) = L[g(t)]$. با استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه‌ی صحیح m داریم:

$$G(s) = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0), \quad (54.1)$$

بنابراین با جایگذاری (۵۴.۱) در (۵۳.۱) داریم:

$$\begin{aligned} L[D_*^\alpha f(t)] &= s^{-(m-\alpha)} \left(s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \right) \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \end{aligned} \quad (55.1)$$

بنابراین

$$L[D_*^\alpha f(t)] = \frac{s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)}{s^{m-\alpha}}. \quad (56.1)$$

□

۳.۳.۱ عملگر لاپلاس معکوس

تعریف ۱۰.۱. تابع $f(x)$ تعریف شده در معادله (۴۶.۱) تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ نامیده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} e^{sx} F(s) ds, \quad (57.1)$$

که σ به اندازه کافی بزرگ است و $F(s)$ برای قسمت حقیقی $s \geq \sigma$ تعریف می‌شود.

هم اکنون چند لم را که برای یافتن تابع $f(x)$ از طریق تبدیل لاپلاس آن‌ها مهم است، بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۶.۱. برای $\alpha, \beta > 0, a \in \mathbb{R}$ و $s^\alpha > |a|$ فرمول تبدیل لاپلاس معکوس را به شکل زیر داریم:

$$L^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}\right] = x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-ax^\alpha). \quad (58.1)$$

برهان. برای تابع $\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}$ با استفاده از بسط سری‌ها داریم:

$$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} = \frac{1}{s^\beta} + \frac{1}{1 + \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-a}{s^\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{s^{n\alpha+\beta}}. \quad (59.1)$$

بنابر خطی بودن عملگر لاپلاس معکوس و این که

$$L^{-1}\left[\frac{\Gamma(n\alpha + \beta)}{s^{n\alpha+\beta}}\right] = x^{n\alpha+\beta},$$

با گرفتن لاپلاس معکوس از رابطه‌ی (۵۹.۱) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n\alpha+\beta-1}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} = x^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} = x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-ax^\alpha). \quad (60.1)$$

□

لم ۷.۱. برای $\alpha \geq \beta > 0, a \in \mathbb{R}$ و $s^{\alpha-\beta} > |a|$ داریم:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}}\right] = x^{\alpha(n+1)-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha)} x^{k(\alpha-\beta)}. \quad (61.1)$$

برهان. با استفاده از بسط سری $(1+x)^{-n-1}$ که به صورت زیر است

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-x)^k. \quad (62.1)$$

داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}} &= \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^{n+1}} = \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{-a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{(-a)^k}{s^{\alpha(n+1)+k(\alpha-\beta)}}\right) \end{aligned} \quad (63.1)$$

□

با گرفتن لاپلاس معکوس از طرفین لم اثبات می‌شود.

حال به ارائه‌ی چند مثال از حل معادلات دیفرانسیل کسری به روش لاپلاس می‌پردازیم.

مثال ۱۱.۱. مسأله مقدار اولیه‌ی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^\gamma y(x) + D_*^\gamma y(x) + y(x) = 1 + x, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases} \quad (64.1)$$

با فرض $L[y(x)] = F(s)$ ، از طرفین معادله عمل لاپلاس می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} L[D_*^\gamma y(x) + D_*^\gamma y(x) + y(x)] &= L[1 + x], \\ s^\gamma F(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{s^\gamma F(s) - sy(0) - y'(0)}{s^{\frac{1}{\gamma}}} + F(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}, \\ s^\gamma F(s) - s - 1 + \frac{s^\gamma F(s) - s - 1}{s^{\frac{1}{\gamma}}} + F(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}, \\ F(s)(s^\gamma + s^{\frac{1}{\gamma}} + 1) &= \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)(s^\gamma + s^{\frac{1}{\gamma}} + 1), \\ F(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{\frac{1}{\gamma}}}. \end{aligned}$$

حال با گرفتن لاپلاس معکوس از طرفین رابطه $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{\frac{1}{\gamma}}}$ داریم:

$$y(x) = 1 + x. \quad (65.1)$$

مثال ۱۲.۱. مسأله مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^\alpha x(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (66.1)$$

با فرض $L[x(t)] = F(s)$ ، از طرفین معادله عمل لاپلاس می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} L[D_*^\alpha x(t) + x(t)] &= L[0], \\ \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}} + F(s) &= 0, \\ F(s) &= \frac{s^{\alpha-1}}{1 + s^\alpha}. \end{aligned}$$

حال با توجه به لم (۶.۱) جواب دقیق مسأله به صورت زیر خواهد بود.

$$x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^\alpha}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

در فصل‌های بعدی به تفصیل به حل معادلات دیفرانسیل کسری - جبری با روش‌های نیمه تحلیلی از جمله روش روش تغییر تکرارپذیر، روش تجزیه آدومین و آنالیز هموتوپی می‌پردازیم.

فصل ۲

روش تغییر تکرارپذیر

۱.۲ مقدمه

در این بخش روش تغییر تکرارپذیر که از آن به عنوان یک روش نیمه تحلیلی یاد می شود، معرفی و ارائه می شود. این روش اولین بار توسط یک ریاضیدان چینی به نام هی^۱ در سال ۱۹۹۸ پیشنهاد شد که در واقع تعمیمی از روش ضرایب لاگرانژ^۲ می باشد [۲، ۷، ۸]. این روش در موارد زیادی از مسائل خطی و غیرخطی مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش ضرایب لاگرانژ عمومی برای ساخت تابع تصحیح^۳ در مسائل معرفی می شود. این ضرایب می توانند به وسیله ی نظریه ی تغییر بهینه شوند. خاصیت اصلی این روش انعطاف پذیری و قدرت حل معادلات غیرخطی با دقت بالا است. از طرف دیگر، روش تغییر تکرارپذیر توانایی بالایی در کاهش میزان محاسبات تا زمان رسیدن به جواب عددی با دقت بالا دارد. این روش دنباله ای از توابع را تولید می کند که به جواب دقیق مسأله همگراست. در ادامه این فصل با ارائه مثال های مختلف نشان خواهیم داد که این روش ابزار قوی برای حل انواع مختلف مسائل به خصوص معادلات دیفرانسیل کسری جبری می باشد.

به منظور توسعه روش تغییر تکرارپذیر، ابتدا برخی از نام گذاری های جدید، مانند تغییر محدود و تابع تصحیح را معرفی می کنیم.

۲.۲ مفاهیم پایه در روش تغییر تکرارپذیر

۱.۲.۲ ضرایب لاگرانژ عمومی

ما ضرایب لاگرانژ را به خوبی در بهینه سازی و حساب تغییرات می شناسیم. اینکوتی^۴ و همکارانش، یک روش عمومی ضرایب لاگرانژ پیشنهاد کردند. برای درک مفهوم ضرایب لاگرانژ عمومی، معادله جبری زیر

^۳Correction Functional

^۴Inokuti

^۱He

^۲Lagrange Multiplier

را در نظر بگیرید

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

اگر x_n ریشه تقریبی معادله (۱.۲) باشد، داریم:

$$f(x_n) \neq 0.$$

به منظور بهبود دقت آن، معادله اصلاحگر را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n), \quad (2.2)$$

که در آن λ ضریب لاگرانژ عمومی است، که به وسیله‌ی دستگاه زیر بهینه می‌شود

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0, \quad (3.2)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = \frac{dx_n}{dx_n} + \lambda \frac{df(x_n)}{dx_n}, \quad (4.2)$$

که طبق (۲.۲) منجر به فرمول معروف تکراری نیوتن^۵ می‌شود

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

روش‌های دیگری برای ساخت تابع اصلاحگر وجود دارد [۶]. این تابع را برای x_n می‌توان به شکل زیر نوشت

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) f(x_n), \quad (5.2)$$

که $g(x_n)$ یک تابع کمکی است. بنابر (۵.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = \frac{dx_n}{dx_n} + \lambda g(x_n) \frac{df(x_n)}{dx_n} + \lambda f(x_n) \frac{dg(x_n)}{dx_n}, \quad (6.2)$$

که با جایگذاری (۳.۲) در معادله (۴.۲) خواهیم داشت:

$$\lambda = \frac{-1}{g(x_n) f'(x_n) + f(x_n) g'(x_n)}, \quad (7.2)$$

بنابراین

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) f(x_n)}{g(x_n) f'(x_n) + f(x_n) g'(x_n)}, \quad (8.2)$$

^۵Newton Iteration Formula

در روند تکراری مقادیر تابع کمکی نباید صفر و یا مقادیر کوچک باشد یا به عبارتی دیگر $|g(x_n)| > 1$. اگر ما تابع کمکی را به صورت $g(x_n) = e^{-\alpha x_n}$ انتخاب کنیم، فرمول تکراری (۸.۲) به شکل زیر خواهد شد

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \alpha f(x_n)}, \quad (9.2)$$

این فرمول زمانی مؤثر است که $f'(x_n)$ کوچک باشد. به عنوان مثال معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\sin x = 0, \quad (10.2)$$

اگر از نقطه‌ی $x_0 = 1/6$ ، فرمول تکراری نیوتن قابل قبول نیست چون $\cos 1/6$ مقدار کوچکی خواهد بود. جدول زیر نشان می‌دهد در روند تکراری (۹.۲) نزدیکترین جواب به $x_0 = 1/6$ ، $x = \pi$ است.

جدول ۱۰.۲: مقادیر عددی x

مرحله	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 0.97$
۰	۱/۶	۱/۶	۱/۶
۱	۲/۵۷	۲/۰۹	۲/۶۰
۲	۲/۹۶	۲/۴۸	۲/۹۸
۳	۳/۱۲	۲/۷۸	۳/۱۲
۴	۳/۱۴	۲/۹۹	۳/۱۴

۲.۲.۲ شرایط پایداری

مسئله بهینه‌سازی همواره در طبیعت وجود دارد. ساده ترین مسئله حساب تغییر، تخمین یک تابع $y = f(x)$ که به ازای چه مقداری از تابع معلوم زیر ماکزیمم یا مینیمم باشد [۳].

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x)y|_{x=x_1} - g_2(x)y|_{x=x_2} \quad (11.2)$$

شرایط پایدارى (۱۱.۲) مستلزم آن است که

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \delta \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y|_{x=x_2} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y|_{x=x_2} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \delta y' \right\} dx + g_1(x) \delta y|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y|_{x=x_2} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right\} dx + g_1(x) \delta y|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y|_{x=x_2} \quad (12.2) \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \delta y \right) \right\} dx + g_1(x) \delta y|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y|_{x=x_2} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y \right\} + \left[\frac{dF}{dy'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} dx + g_1(x) \delta y|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y|_{x=x_2} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

برای δy دلخواه از رابطه‌ی (۱۲.۲) داریم:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) = 0, \quad (13.2)$$

و شرایط مرزی

$$\frac{dF}{dy'}(x_1) - g_1(x_1) = 0, \quad (14.2)$$

$$\frac{dF}{dy'}(x_2) - g_2(x_2) = 0 \quad (15.2)$$

به معادله (۱۳.۲)، معادله دیفرانسیل اویلر - لاگرانژ^۶ گفته می‌شود و معادله (۱۴.۲) به شرایط مرزی طبیعی^۷ معروف است.

۳.۲.۲ تغییر محدود

برای نشان دادن چگونگی کار تغییر محدود^۸ در روش تکرار تغییرات، معادله جبری ساده زیر را در نظر می‌گیریم

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad (16.2)$$

معادله‌ی (۱۶.۲) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\tilde{x}.x - 3x + 2 = 0, \quad (17.2)$$

^۸Restricted Variation

^۶Euler-Lagrange's Differential Equation

^۷Natural Boundary Conditions

که به $\tilde{x}$ متغیر محدود گفته می‌شود و مقدار $\tilde{x}$ به عنوان حدس اولیه معلوم فرض می‌شود. برای یافتن مقدار x از معادله (۱۷.۲) داریم:

$$x = \frac{2}{3 - \tilde{x}}, \quad (18.2)$$

یا فرمول تکراری

$$x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}, \quad (19.2)$$

این روش اغلب برای یافتن جواب خوب کارآمد است. جدول (۲۰.۲) را مشاهده کنید.

جدول ۲۰.۲: مقادیر عددی x

مرحله	معادله	فرمول تکراری نیوتن
۰	۰/۵	۰/۵
۱	۰/۸	۰/۸۷۵
۲	۰/۹۰۹	۰/۹۸۷
۳	۰/۹۵۶	۰/۹۹۹
۴	۰/۹۷۸	۱/۰۰۰
۵	۰/۹۸۹	۱/۰۰۰
۶	۰/۹۹۴	۱/۰۰۰
۷	۰/۹۹۷	۱/۰۰۰
۸	۰/۹۹۸	۱/۰۰۰
۹	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰

در روش تکرار تغییرات، حدس اولیه همیشه با انتخاب یک پارامتر مجهول ممکن همراه خواهد بود. یک تغییر منجر به جواب با دقت بالا می‌شود. ما تأثیر پارامتر آزاد را در مثال بالا نشان می‌دهیم. بدین منظور یک پارامتر آزاد در پیش بینی اولیه به شکل زیر معرفی می‌کنیم

$$x_0 = 0.5 + b, \quad (20.2)$$

که b یک پارامتر کوچک است. با جایگذاری معادله (۲۰.۲) در معادله (۱۹.۲) داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3 - 0.5 - b} = \frac{2}{2.5 - b} = \frac{2}{2.5(1 - \frac{1}{2.5}b)} \\ &= 0.8(1 + \frac{1}{2.5}b) + O(b^2) = 0.8 + 0.32b + O(b^2), \end{aligned} \quad (21.2)$$

برای تعیین مقدار b از رابطه (۲۱.۲) قرار می‌دهیم $x_0 = x_1$ ، بنابراین

$$0.5 + b = 0.8 + 0.32b,$$

که در این صورت $b = 0.4412$ و $x_1 = 0.9412$.

۳.۲ روش تغییر تکرارپذیر

در این قسمت روش تغییر تکرارپذیر به عنوان ایده اساسی معرفی می‌شود [۱۹]. بدین منظور دستگاه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t), \quad (22.2)$$

که در آن L عملگر خطی و N عملگر غیرخطی و $g(t)$ عبارت ناهمگن معادله می‌باشد. حال با استفاده از ضرایب لاگرانژ، تابع تصحیح به صورت زیر ساخته می‌شود

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(s)[L(u_n(s)) + N(\tilde{u}_n(s)) - g(s)]ds \quad (23.2)$$

که در آن $\lambda(s)$ ضریب لاگرانژ عمومی، u_n ، n مین تقریب جواب، u_0 تقریب اولیه‌ی جواب و $\tilde{u}_n$ تغییر محدود در نظر گرفته می‌شود، بدین معنی که $\delta \tilde{u}_n = 0$. حال برای یافتن جواب در این روش، ضریب لاگرانژ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که تابع تصحیح پایا باشد یعنی $\delta u_{n+1}(u_n(t), t) = 0$ ؛ سپس با داشتن ضریب لاگرانژ λ و انتخاب تابع اولیه u_0 که در شرایط اولیه یا مرزی صدق کند، تقریب‌های متوالی u_n ، $n \geq 0$ از جواب دقیق u به دست می‌آید. حال با حدگیری از دنباله تقریب‌های متوالی جواب دقیق مسأله به دست می‌آید و در نتیجه داریم:

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad (24.2)$$

برای مسائل خطی، جواب دقیق تنها با یک تکرار به دست می‌آید؛ چون ضریب لاگرانژ به طور دقیق مشخص می‌شود.

مثال ۱.۲. معادله دیفرانسیل خطی زیر را در نظر بگیرید

$$u' + a(t)u = b(t), \quad u(0) = c \quad (25.2)$$

تابع تصحیح آن به صورت زیر نوشته می‌شود

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right\} ds. \quad (26.2)$$

حال با برقراری شرایط پایایی تابع تصحیح (۲۶.۲) و با توجه به اینکه $\delta u_n(0) = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda \delta u_n(s)|_{s=t} + \int_0^t \left\{ -\frac{\partial \lambda}{\partial s} + a(s)\lambda \right\} \delta u_n(s) ds = 0. \end{aligned} \quad (27.2)$$

بنابراین، معادله اویلر-لاگرانژ^۹ زیر به دست می آید

$$-\frac{\partial \lambda(t, s)}{\partial s} + a(s)\lambda(t, s) = 0. \quad (28.2)$$

با شرط مرزی

$$1 + \lambda(t, t) = 0. \quad (29.2)$$

با حل معادله‌ی (۲۸.۲) ضریب لاگرانژ به صورت زیر تعیین می شود.

$$\lambda(t, s) = -\exp \left\{ \int_s^t a(\xi) d\xi - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} \quad (30.2)$$

حال با جای گذاری ضریب لاگرانژ به دست آمده در تابع تصحیح (۲۶.۲) داریم:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \exp \left\{ \int_s^t a(\xi) d\xi - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right\} ds. \quad (31.2)$$

با شروع از حل معادله همگن $u' + a(t)u = 0$ با شرط اولیه‌ی $u(0) = c$ داریم:

$$u_0 = c \exp \left\{ - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} \quad (32.2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} u_1(t) &= c \exp \left\{ - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} - \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_s^t a(\xi) d\xi - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} ds \\ &= c \exp \left\{ - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} + \exp \left\{ \int_0^t a(s) ds \right\} \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_s^t a(\xi) d\xi \right\} ds. \end{aligned} \quad (33.2)$$

که همان جواب دقیق معادله (۲۵.۲) می باشد.

مثال ۲.۲. معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$u'' + w^2 u(t) = F(u, u', u''), \quad (34.2)$$

تابع تصحیح معادله‌ی (۳۴.۲) به صورت زیر نوشته می شود

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{ u_n''(s) + w^2 u_n(s) - \tilde{F}(u, u', u'') \} ds.$$

^۹Euler-Lagrange Equatio

می دانیم که $\delta u_n(\circ) = \circ$ پس

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_{\circ}^t \lambda \{u_n''(s) + w^\gamma u_n(s) - \tilde{F}(s)\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda(s) \delta u_n'(s)|_{s=t} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s)|_{s=t} + \int_{\circ}^t \left\{ \frac{\partial^\gamma \lambda}{\partial s^\gamma} + w^\gamma \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds \\ &= \left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial s}\right) \delta u_n(s)|_{s=t} + \lambda(s) \delta u_n'(s)|_{s=t} + \int_{\circ}^t \left\{ \frac{\partial^\gamma \lambda}{\partial s^\gamma} + w^\gamma \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = \circ.\end{aligned}$$

با اعمال شرط پایایی داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma \lambda}{\partial s^\gamma} + w^\gamma \lambda(t, s) = \circ \\ 1 - \frac{\partial \lambda(t, s)}{\partial s} \Big|_{t=s} = \circ \\ \lambda(t, s) \Big|_{t=s} = \circ \end{cases}$$

ضریب لاگرانژ $\lambda = \frac{1}{w} \sin w(s-t)$ است. در نتیجه فرمول تکراری زیر را به دست می آوریم

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{\circ}^t \frac{1}{w} \sin w(s-t) \{u_n''(s) + w^\gamma u_n(s) - \tilde{F}(u, u', u'')\} ds.$$

با فرض $u_{\circ}(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$ با ثابت های مناسب c_1 و c_2 تقریب اولیه به صورت

$$u_1(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt - \frac{1}{w} \int f(s) \sin w(s-t) ds,$$

است که جواب عمومی مسأله می باشد.

تعیین ضریب لاگرانژ برای مسائل غیرخطی کار مشکلی است. برای حل این مشکل، جملات غیرخطی به صورت تغییرات محدود در نظر گرفته می شود. بنابراین ضریب لاگرانژ به صورت تقریبی به دست می آید و جواب تقریبی مسأله پس از چند گام تعیین می شود.

۴.۲ روش تغییر تکرارپذیر برای معادلات دیفرانسیل جبری کسری

دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید [۲۸]

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)), & \circ < \alpha_i \leq 1, \\ g(t, x_1, \dots, x_n) = \circ & i = 1, 2, \dots, n-1, \quad t \geq \circ \end{cases} \quad (35.2)$$

با شرایط اولیه

$$x_i(\circ) = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (36.2)$$

قسمت اصلی در این روش ساخت تابع تصحیح برای معادله (۳۵.۲) است که به صورت زیر نوشته می شود

$$x_{ik+1} = x_{ik} + J^{\alpha_i} \{ \lambda_i (D_*^{\alpha_i} x_{ik}(t) - f_i(t, \tilde{x}_{1k}(t), \dots, \tilde{x}_{nk}(t), \tilde{x}'_{1k}(t), \dots, \tilde{x}'_{nk}(t))) \}. \quad (37.2)$$

که λ_i ضریب لاگرانژ عمومی و $\tilde{x}_{ik}$ تغییر محدود را مشخص می کند بدین معنی که $\delta \tilde{x}_{ik} = 0$. در اینجا راه مستقیمی برای به دست آوردن تقریبی ضریب لاگرانژ بنابر شرط پایایی از یک تابع با انتگرال کسری وجود ندارد. برای حل این مشکل α را یک عدد صحیح مینمال $\alpha > \text{ceil}(\alpha) = 1$ انتخاب می کنیم. بنابراین تابع تصحیح (۳۷.۲) به صورت تقریبی به شکل زیر بیان می شود

$$x_{ik+1} = x_{ik} + \int_0^t \{ \lambda_i (x'_{ik}(s) - f_i(t, \tilde{x}_{1k}(s), \dots, \tilde{x}_{nk}(s), \tilde{x}'_{1k}(s), \dots, \tilde{x}'_{nk}(s))) \} ds. \quad (38.2)$$

با توجه به اینکه $\delta x_{ik}(0) = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \delta x_{ik+1} &= \delta x_{ik} + \delta \int_0^t \lambda_i \{ x'_{ik}(s) - f_i(t, \tilde{x}_{1k}(s), \dots, \tilde{x}_{nk}(s), \tilde{x}'_{1k}(s), \dots, \tilde{x}'_{nk}(s)) \} ds \\ &= \delta x_{ik} + \lambda_i \delta x_{ik}|_{s=t} - \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta x_{ik} ds = 0 \end{aligned} \quad (39.2)$$

با اعمال شرط پایایی برای تابع (۳۹.۲) داریم:

$$\begin{cases} \lambda'_i(s)|_{s=t} = 0, \\ 1 + \lambda_i(s)|_{s=t} = 0, \end{cases} \quad (40.2)$$

برای هر $i = 1, 2, \dots, n-1$. بنابراین داریم:

$$\lambda_i = -1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (41.2)$$

با جای گذاری در معادله (۳۷.۲) فرمول تکراری به صورت زیر خواهد بود

$$x_{ik+1} = x_{ik} - J^{\alpha_i} \{ D_*^{\alpha_i} x_{ik}(t) - f_i(t, \tilde{x}_{1k}(t), \dots, \tilde{x}_{nk}(t), \tilde{x}'_{1k}(t), \dots, \tilde{x}'_{nk}(t)) \}. \quad (42.2)$$

با شروع از تقریب اولیه $x_{i0} = x_i(0)$ ، تقریب های x_{ik} به طور کامل تعیین می شود. در نهایت جواب را به صورت زیر به وسیله N امین عبارت $x_{iN}(t)$ ، تقریب می زنیم.

$$x_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ik}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (43.2)$$

۵.۲ مثال

در این قسمت به ارائه چند مثال از معادلات دیفرانسیل کسری - جبری و حل آن به روش تکرار تغییر پذیر می پردازیم.

مثال ۳.۲. معادله دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^\alpha x(t) - ty'(t) + x(t) - (1+t)y(t) = 0, & 0 < \alpha \leq 1, \\ y(t) - \sin t = 0, \end{cases} \quad (44.2)$$

با مقادیر اولیه‌ی $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ و جواب دقیق $x(t) = e^{-t} + t \sin t$, $y(t) = \sin t$ وقتی که $\alpha = 1$.

بنابر رابطه روش وردشی معادله (۴۴.۲) را به شکل زیر می نویسیم

$$x_{k+1} = x_k(t) - J^\alpha [D_*^\alpha x_k(t) + x_k(t) - \tilde{g}(t)]. \quad (45.2)$$

که در آن $\tilde{g}(t)$ بسط تیلور تابع $g(t) = t \cos t + (1+t) \sin t$ است که به شکل زیر خواهد بود

$$\tilde{g}(t) = 2t + t^2 - \frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{6} + \frac{t^5}{20} + \frac{t^6}{120} + \dots$$

بنابر (۴۵.۲) رابطه بازگشتی را بصورت زیر داریم:

$$x_0(t) = 1$$

$$x_1(t) = x_0(t) - J^\alpha [x_0(t) - \tilde{g}(t)]$$

$$x_2(t) = -J^\alpha [x_1(t) - \tilde{g}(t)]$$

$$\vdots$$

بنابراین با شروع از تقریب اولیه‌ی $x_0(t) = 1$ داریم:

$$x_0(t) = 1$$

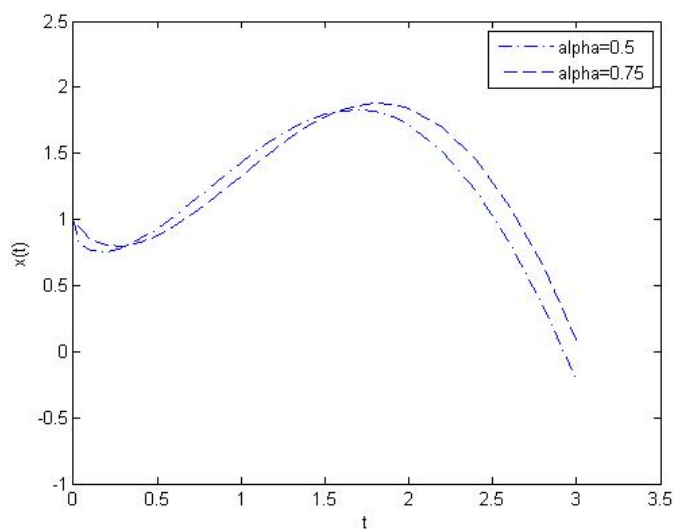
$$x_1(t) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{2t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{2t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)} - \frac{4t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} - \frac{4t^{4+\alpha}}{\Gamma(5+\alpha)} + \frac{6t^{5+\alpha}}{\Gamma(6+\alpha)} + \dots$$

$$x_2(t) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{2t^{1+2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)} - \frac{2t^{2+2\alpha}}{\Gamma(3+2\alpha)} + \frac{4t^{3+2\alpha}}{\Gamma(4+2\alpha)} + \frac{4t^{4+2\alpha}}{\Gamma(5+2\alpha)} - \frac{6t^{5+2\alpha}}{\Gamma(6+2\alpha)} + \dots$$

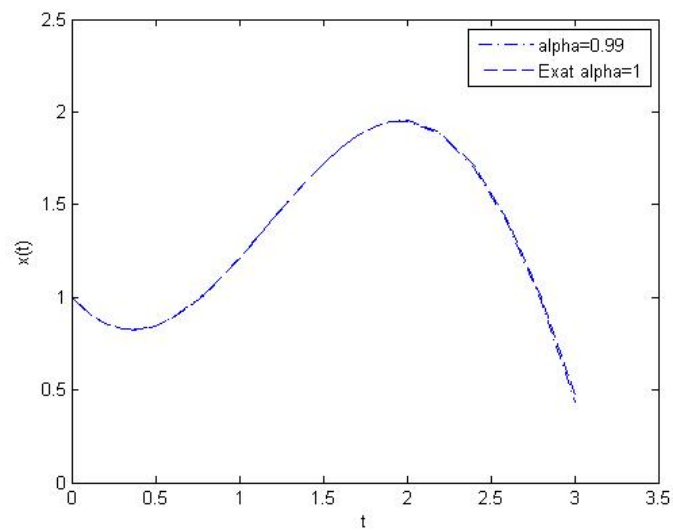
$$\vdots$$

جدول ۳.۲: مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۳.۲)

t	$\alpha = ۰/۵$	$\alpha = ۰/۷۵$	$\alpha = ۰/۹۹$	جواب دقیق $\alpha = ۱$
۰	۱	۱	۱	۱
۰/۲	۰/۷۵۴۵۰۹۶۴	۰/۸۰۱۶۶۹۷۱	۰/۸۵۶۲۳۲۹۵	۰/۸۵۸۴۶۴۶۱
۰/۴	۰/۸۵۲۴۹۵۰۴	۰/۸۲۵۰۸۷۱۲	۰/۸۲۵۵۲۳۲۶	۰/۸۲۶۰۸۷۳۸
۰/۶	۱/۰۲۴۲۰۵۱۶	۰/۹۴۵۴۵۸۱۴	۰/۸۸۹۳۵۱۱۳	۰/۸۸۷۵۹۷۱۲
۰/۸	۱/۲۲۷۳۲۹۱۰	۱/۱۲۲۹۵۹۴۲	۱/۰۲۶۹۱۸۰۵	۱/۰۲۳۲۱۳۸۳
۱	۱/۴۳۲۷۵۵۱۱	۱/۳۲۶۹۷۵۵۰	۱/۲۱۴۱۵۷۲۶	۱/۲۰۹۳۵۰۴۲
۱/۲	۱/۶۱۵۲۸۹۴۸	۱/۵۲۹۶۳۱۵۱	۱/۴۲۴۵۰۴۲۰	۱/۴۱۹۶۴۱۱۱
۱/۴	۱/۷۵۲۳۱۹۱۰	۱/۷۰۴۷۶۴۷۵	۱/۶۳۰۰۷۹۸۲	۱/۶۲۶۲۲۶۵۸
۱/۶	۱/۸۲۴۱۵۷۵۱	۱/۸۲۸۳۴۸۳۲	۱/۸۰۳۰۹۱۷۵	۱/۸۰۱۲۱۴۲۸
۱/۸	۱/۸۱۴۸۳۰۹۵	۱/۸۷۹۳۹۴۰۷	۱/۹۱۷۳۳۰۱۶	۱/۹۱۸۲۲۴۶۲
۲	۱/۷۱۲۸۹۹۴۸	۱/۸۴۰۹۶۰۸۴	۱/۹۴۹۶۴۷۲۴	۱/۹۵۳۹۳۰۱۳
۲/۲	۱/۵۱۲۱۲۲۶۴	۱/۷۰۱۰۶۸۳۶	۱/۸۸۱۳۱۲۱۶	۱/۸۸۹۴۹۵۲۴
۲/۴	۱/۲۱۱۸۵۲۷۴	۱/۴۵۳۳۸۲۷۱	۱/۶۹۹۱۳۶۶۰	۱/۷۱۱۸۲۹۵۸
۲/۶	۰/۸۱۷۰۷۱۸۸	۱/۰۹۷۵۷۲۲۸	۱/۳۹۶۲۷۱۸۶	۱/۴۱۴۵۷۷۱۴
۲/۸	۰/۳۳۸۰۱۰۳۶	۰/۶۳۹۲۵۵۵۲	۰/۹۷۲۵۸۸۲۵	۰/۹۹۸۷۷۶۸۸
۳	-۰/۲۱۰۶۹۷۲	۰/۰۸۹۴۸۲۳۵	۰/۴۳۴۵۶۱۳۴	۰/۴۷۳۱۴۷۰۹



شکل ۱.۲: نمودار جواب دستگاه (۴.۲).



شکل ۲.۲: نمودار جواب دستگاه (۴۴.۲).

نمودارهای (۱.۲) و (۲.۲) جواب دقیق $x(t)$ را به ازای مقادیر مختلف α در مقایسه با نمودار جواب دقیق مسأله نشان می دهد.

مثال ۴.۲. معادله دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} x(t) - ty'(t) + t^\gamma z'(t) + x(t) - (1+t)y(t) + (t^\gamma + \gamma t)z(t) = 0, \\ D_*^{\alpha_2} y(t) - tz'(t) - y(t) + (t-1)z(t) = 0, & 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \\ z(t) - \sin t = 0, \end{cases} \quad (46.2)$$

با مقدار اولیه $x(0) = y(0) = 1$ و $z(0) = 0$

بنابر رابطه روش وردشی معادله (۴۶.۲) را به شکل زیر می نویسیم

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k(t) - J^{\alpha_1} [D_*^{\alpha_1} x_k(t) - ty'_k(t) + x_k(t) - (1+t)y_k(t) + t^\gamma \cos t + (t^\gamma + \gamma t) \sin t], \\ y_{k+1} = y_k(t) - J^{\alpha_2} [D_*^{\alpha_2} y_k(t) - y_k(t) - t \cos t + (t-1) \sin t]. \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (47.2)$$

حال با قراردادن $\tilde{g}_1(t)$ و $\tilde{g}_2(t)$ در (۴۷.۲) که به ترتیب بسط تیلور $g_1(t) = t^\gamma \cos t + (t^\gamma + \gamma t) \sin t$ و $g_2(t) = t \cos t - (t-1) \sin t$ می باشند و به صورت

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(t) &= \gamma t^\gamma + t^\gamma - \frac{5t^\gamma}{6} - \frac{t^5}{6} + \frac{\gamma t^6}{120} + \dots \\ \tilde{g}_2(t) &= \gamma t - t^\gamma - \frac{\gamma t^3}{3} + \frac{t^4}{6} + \frac{t^5}{20} - \frac{t^6}{120} + \dots \end{aligned}$$

تعریف می شود، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k(t) - J^\alpha [D_*^{\alpha_1} x_k(t) - ty'_k(t) + x_k(t) - (1+t)y_k(t) + \tilde{g}_1(t)], \\ y_{k+1} = y_k(t) - J^\alpha [D_*^{\alpha_2} y_k(t) - y_k(t) - \tilde{g}_2(t)]. \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (48.2)$$

بنابر (۴۸.۲) رابطه بازگشتی را بصورت زیر داریم:

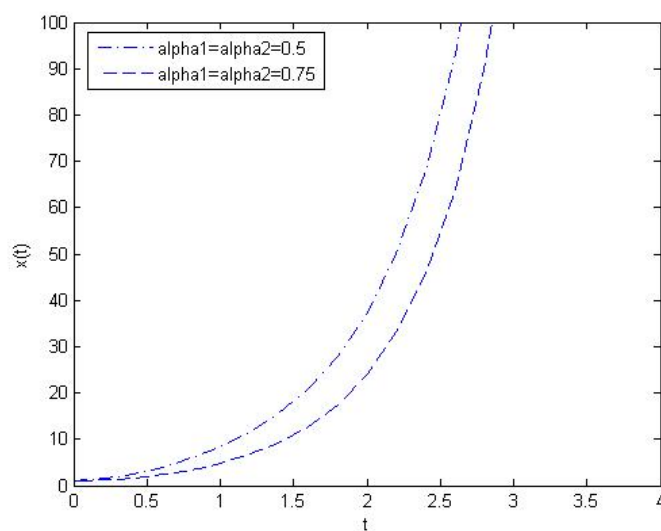
$$\begin{aligned} x_0(t) &= y_0(t) = 1 \\ x_1 &= x_0(t) - J^\alpha [-t + \tilde{g}_1(t)], \\ y_{k+1} &= y_0(t) - J^\alpha [-1 - \tilde{g}_2(t)], \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال با شروع از تقریب اولیه $x_0(t) = y_0(t) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= y_0(t) = 1 \\ x_1(t) &= 1 + \frac{t^{1+\alpha_1}}{\Gamma(2+\alpha_1)} - \frac{\gamma t^{2+\alpha_1}}{\Gamma(3+\alpha_1)} - \frac{\gamma t^{2+\alpha_1}}{\Gamma(4+\alpha_1)} + \frac{\gamma_0 t^{4+\alpha_1}}{\Gamma(5+\alpha_1)} + \frac{\gamma_0 t^{5+\alpha_1}}{\Gamma(6+\alpha_1)} + \dots \\ y_1(t) &= 1 + \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} + \frac{\gamma t^{1+\alpha_2}}{\Gamma(2+\alpha_2)} - \frac{\gamma t^{2+\alpha_2}}{\Gamma(3+\alpha_2)} - \frac{\gamma t^{3+\alpha_2}}{\Gamma(4+\alpha_2)} + \frac{\gamma t^{4+\alpha_2}}{\Gamma(5+\alpha_2)} + \frac{\gamma t^{5+\alpha_2}}{\Gamma(6+\alpha_2)} + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

جدول ۴.۲: مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۴.۲)

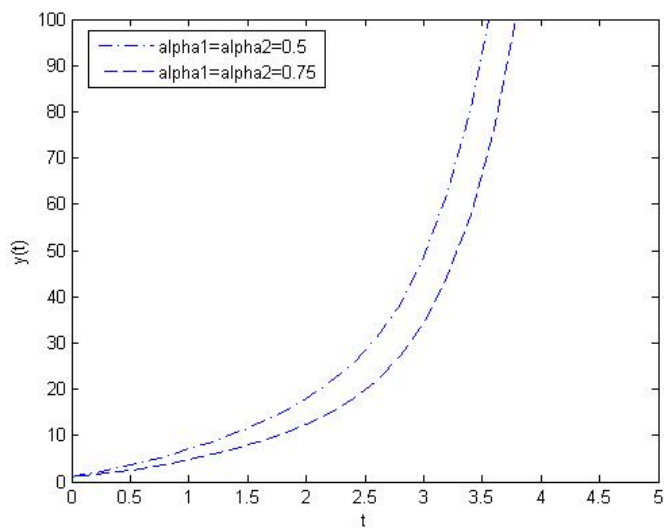
t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$
۰	۱	۱
۰/۲	۱/۵۵۳۳۶۹۸۵	۱/۱۸۶۵۳۶۹۵
۰/۴	۲/۵۲۹۹۶۱۳۴	۱/۶۳۲۹۸۷۴۰
۰/۶	۳/۹۵۷۴۹۰۳۷	۲/۳۵۵۶۰۶۲۸
۰/۸	۵/۸۸۸۹۸۶۶۳	۳/۴۰۱۴۱۴۷۳
۱	۸/۴۰۰۵۷۰۶۱	۴/۸۳۹۳۸۵۰۶
۱/۲	۱۱/۶۰۹۵۴۹۵۱	۶/۷۷۱۰۰۸۰۹
۱/۴	۱۵/۷۰۳۸۸۷۱۳	۹/۳۴۹۷۲۲۳۰
۱/۶	۲۰/۹۸۴۸۰۰۸۷	۱۲/۸۱۰۲۶۸۹۹
۱/۸	۲۷/۹۲۵۹۶۲۸۹	۱۷/۵۱۰۵۰۰۴۹
۲	۳۷/۲۵۴۰۱۳۳۶	۲۳/۹۸۹۰۳۵۵۰
۲/۲	۵۰/۰۵۶۴۱۶۱۰	۳۳/۰۴۳۰۳۵۸۰
۲/۴	۶۷/۹۲۴۲۳۳۵۴	۴۵/۸۳۱۴۱۲۶۹
۲/۶	۹۳/۱۳۹۲۲۴۵۷	۶۴/۰۱۰۰۳۳۵۲
۲/۸	۱۲۸/۹۱۶۸۲۰۰۴	۸۹/۹۰۷۰۵۶۵۸
۳	۱۷۹/۷۱۹۰۴۴۹۱	۱۲۶/۷۴۸۴۵۳۱۴



شکل ۳.۲: نمودار جواب دستگاه (۴.۲).

جدول ۵.۲: مقادیر عددی $y(t)$ در مثال (۴.۲)

t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$
۰	۱	۱
۰/۲	۱/۹۷۲۰۹۰۸۳	۱/۴۸۴۵۵۸۷۸
۰/۴	۲/۹۵۲۶۴۱۷۰	۲/۰۷۳۲۶۰۴۷
۰/۶	۴/۱۲۸۰۰۷۴۶	۲/۸۱۲۳۶۴۸۸
۰/۸	۵/۴۹۲۳۷۵۶۱	۳/۶۹۸۸۶۲۴۶
۱	۷/۰۳۴۳۹۹۴۹	۴/۷۲۷۱۲۹۴۹
۱/۲	۸/۷۴۸۷۲۹۹۱	۵/۸۹۴۸۶۶۸۳
۱/۴	۱۰/۶۴۴۵۶۰۲۰	۷/۲۰۸۷۸۹۷۴
۱/۶	۱۲/۷۵۵۳۵۰۴۴	۸/۶۹۱۶۴۹۳۱
۱/۸	۱۵/۱۵۰۷۸۱۸۲	۱۰/۳۹۱۱۴۰۹۳
۲	۱۷/۹۵۱۶۴۷۵۰	۱۲/۳۹۱۱۶۳۶۷
۲/۲	۲۱/۳۴۸۴۲۰۱۳	۱۴/۸۲۵۹۴۱۵۴
۲/۴	۲۵/۶۲۴۳۶۳۸۷	۱۷/۸۹۷۶۰۹۰۷
۲/۶	۳۱/۵۸۹۷۷۸۴۰	۲۱/۸۹۷۹۸۳۴۵
۲/۸	۳۸/۵۸۹۷۷۸۴۰	۲۷/۲۳۵۳۹۴۷۵
۳	۴۸/۶۰۳۵۹۸۵۹	۳۴/۴۶۷۶۲۸۸۹



شکل ۴.۲: نمودار جواب دستگاه (۴.۲).

مثال ۵.۲. معادله دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t)x(t) = 1, \\ D_*^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^2(t) + z(t) = 0, & 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \\ y(t) - x^2(t) = 0, \end{cases} \quad (49.2)$$

با مقدار اولیه‌ی

$$x(0) = y(0) = z(0) = 1, \quad (50.2)$$

در حالت $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ جواب دقیق مسأله به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^{2t}, \\ z(t) = e^{-t}, \end{cases} \quad (51.2)$$

بنابر رابطه روش وردشی معادله (۴۹.۲) را به شکل زیر می نویسیم

$$\begin{cases} y_{k+1} = x_k^2(t), \\ z_{k+1} = z_k(t) - J^{\alpha_2} [D_*^{\alpha_2} z_k(t) - y_{k+1}(t) + x_k^2(t) + z_k(t)], \\ x_{k+1} = x_k(t) - J^{\alpha_1} [D_*^{\alpha_1} x_k(t) - x_k(t) + x_k(t)z_{k+1}(t) - 1]. \end{cases} \quad (52.2)$$

بنابر (۵۲.۲) رابطه بازگشتی را بصورت زیر داریم:

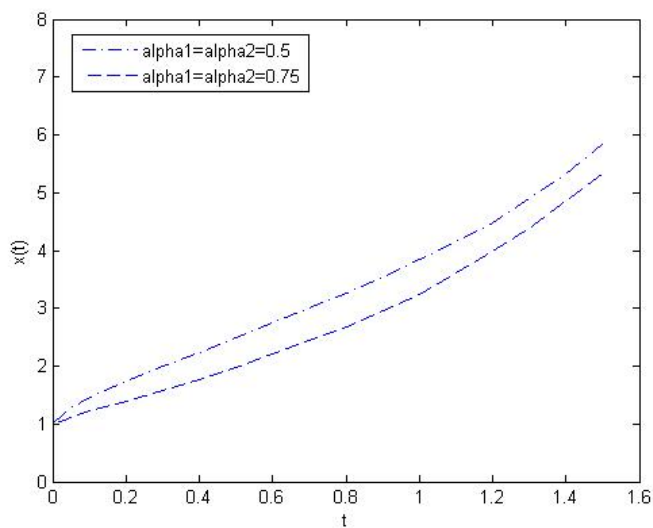
$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = z(0) = 1 \\ y_1 &= x_0^2(t), \\ z_1 &= z_0(t) - J^{\alpha_2} [z_0(t)], \\ x_1 &= x_0(t) - J^{\alpha_1} [-x_0(t) + x_0(t)z_1(t) - 1]. \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال با شروع از تقریب اولیه‌ی $x_0(t) = y_0(t) = z_0(t) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ z_1 &= 1 - \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(1 + \alpha_2)}, \\ x_1 &= 1 + \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1 + \alpha_1)} + \frac{t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(1 + \alpha_1 + \alpha_2)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

جدول ۶.۲: مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۵.۲)

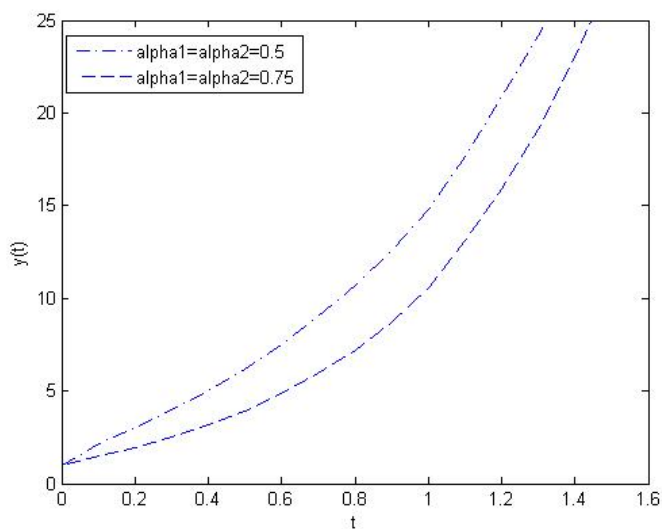
t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$
۰	۱	۱
۰/۱	۱/۴۶۷۸۸۴۹۳	۱/۲۱۸۷۰۶۸۱
۰/۲	۱/۷۴۱۱۳۲۰۷	۱/۴۰۰۰۲۷۸۷
۰/۳	۱/۹۹۲۷۸۷۹۰	۱/۵۸۴۱۲۶۸۵
۰/۴	۲/۲۳۹۲۴۸۷۱	۱/۷۷۶۹۰۸۶۴
۰/۵	۲/۴۸۷۱۱۳۴۲	۱/۹۸۱۳۸۶۵۴
۰/۶	۲/۷۴۰۰۲۹۲۸	۲/۱۹۹۷۴۴۷۲
۰/۷	۳/۰۰۰۴۰۹۳۱	۲/۴۳۳۸۸۲۹۱
۰/۸	۳/۲۷۰۰۴۴۷۸	۲/۶۸۵۶۲۳۴۰
۰/۹	۳/۵۵۰۳۶۳۲۰	۲/۹۵۶۸۰۹۵۶
۱	۳/۸۴۵۵۴۱۹۸	۳/۲۴۹۳۶۲۳۸
۱/۱	۴/۱۵۴۲۳۴۸۶	۳/۶۰۷۴۸۶۶۲
۱/۲	۴/۴۷۳۴۹۹۰۳	۳/۹۸۳۸۲۸۵۷
۱/۳	۴/۹۰۵۱۹۴۹۸	۴/۳۹۱۲۴۵۵۵
۱/۴	۵/۳۱۹۳۷۰۷۶	۴/۸۵۵۹۵۳۳۷
۱/۵	۵/۸۳۳۸۱۷۲۷	۵/۳۱۲۵۶۹۳۵



شکل ۵.۲: نمودار جواب دستگاه (۴۹.۲).

جدول ۷.۲: مقادیر عددی $y(t)$ در مثال (۵.۲)

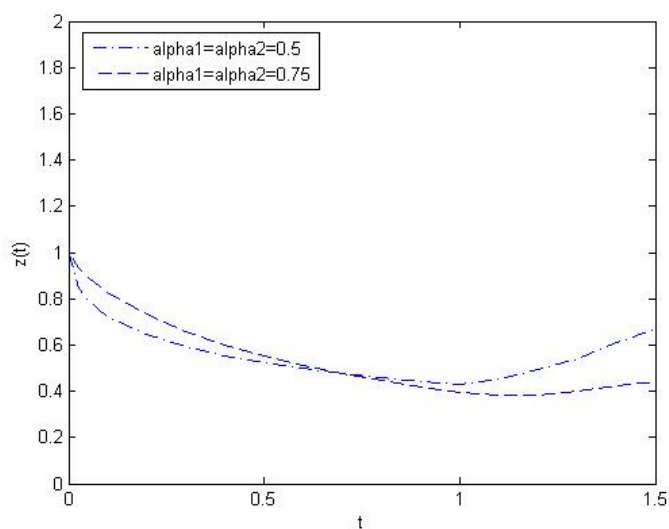
t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$
۰	۱	۱
۰/۱	۲/۱۵۴۶۸۶۱۶	۱/۴۸۵۲۴۶۲۵
۰/۲	۳/۰۳۱۵۴۰۸۵	۱/۹۶۰۰۷۷۸۹
۰/۳	۳/۹۷۱۲۰۳۷۳	۲/۵۰۹۴۵۷۶۸
۰/۴	۵/۰۱۴۲۳۴۷۹	۳/۱۵۷۴۰۳۸۶
۰/۵	۶/۱۸۵۷۳۳۱۸	۳/۹۲۵۸۹۲۲۴
۰/۶	۷/۵۰۷۷۶۰۳۷	۴/۸۳۸۸۷۷۴۸
۰/۷	۹/۰۰۲۴۵۵۸۶	۵/۹۲۳۷۹۰۹۵
۰/۸	۱۰/۶۹۶۱۹۲۷	۷/۲۱۲۵۹۲۵۷
۰/۹	۱۲/۶۰۵۰۷۸۹	۸/۷۴۲۷۸۶۴۸
۱	۱۴/۷۸۳۱۲۹۱	۱۰/۵۵۸۵۳۷۰
۱/۱	۱۷/۶۷۰۷۳۸۰۰	۱۳/۱۳۷۱۰۹۹۱
۱/۲	۲۰/۸۹۸۵۲۸۳۱	۱۵/۸۷۳۵۳۱۶۴
۱/۳	۲۴/۱۴۶۴۵۳۲۵	۱۹/۱۲۳۳۶۸۸۲
۱/۴	۲۸/۰۶۷۵۴۲۳۶	۲۲/۹۶۱۷۳۲۶۵
۱/۵	۳۲/۴۹۳۰۶۲۶۳	۲۷/۴۶۲۵۶۴۸۱



شکل ۶.۲: نمودار جواب دستگاه (۴۹.۲).

جدول ۸.۲: مقادیر عددی $z(t)$ در مثال (۵.۲)

t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$
۰	۱	۱
۰/۱	۰/۷۲۳۵۷۸۴۵	۰/۸۲۸۲۵۰۵۷
۰/۲	۰/۶۴۳۷۸۸۶۹	۰/۷۳۲۵۸۴۷۴
۰/۳	۰/۵۹۲۰۲۲۲۰	۰/۶۶۰۳۳۷۵۳
۰/۴	۰/۵۵۳۶۲۴۱۸	۰/۶۰۲۱۲۱۱۵
۰/۵	۰/۵۲۳۲۱۶۳۱	۰/۵۵۳۶۰۲۶۹
۰/۶	۰/۴۹۸۱۸۳۹۷	۰/۵۱۲۲۸۵۳۶
۰/۷	۰/۴۷۷۰۶۷۸۳	۰/۴۷۶۵۵۵۷۳
۰/۸	۰/۴۵۸۹۹۳۸۷	۰/۴۴۵۲۹۴۵۶
۰/۹	۰/۴۴۲۴۲۷۹۶	۰/۴۱۷۶۸۷۳۷
۱	۰/۴۲۷۰۵۷۰۳	۰/۳۹۳۱۲۰۶۳
۱/۱	۰/۴۵۳۶۷۹۶۳	۰/۳۸۴۹۱۵۶۷
۱/۲	۰/۴۹۵۰۶۰۵۹	۰/۳۸۴۸۴۷۷۴
۱/۳	۰/۵۴۳۴۳۹۶۳	۰/۳۹۸۶۱۳۴۹
۱/۴	۰/۶۰۸۷۷۵۲۷	۰/۴۲۶۷۲۱۶۵
۱/۵	۰/۶۷۱۰۴۶۸۰	۰/۴۴۲۹۴۱۰۲



شکل ۷.۲: نمودار جواب دستگاه (۴۹.۲).

فصل ۳

روش تجزیه آدومین

۱.۳ مقدمه

یکی از روش‌های عددی که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته و در حل انواع معادلات تابعی از جمله معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرالی، معادلات کسری و ... کاربرد دارد [۵]، روش تجزیه آدومین است، که توسط جرج آدومین^۱ در سال ۱۹۸۰ معرفی شد. در این روش جواب معادله به صورت یک سری نامتناهی در نظر گرفته می‌شود که غالباً به جواب واقعی همگراست. در واقع در این روش با استفاده از سری که جملات این سری در یک رابطه بازگشتی بوسیله‌ی چندجمله‌ای‌های آدومین^۲ به دست می‌آید، جواب را تعیین می‌کند. یکی از پراهمیت‌ترین تفاوت‌های روش‌های تجزیه با سایر روش‌های عددی برای یافتن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل این است که می‌توان در این روش جواب را به صورت یک چندجمله‌ای محاسبه کرد.

۲.۳ روش تجزیه آدومین

ابتدا به معرفی روش تجزیه آدومین می‌پردازیم [۲۶]. به این منظور معادله دیفرانسیل ناهمگن و غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$Lu + Nu + Ru = g \quad (۱.۳)$$

که در آن L عملگر خطی معکوس‌پذیر و دارای بالاترین مرتبه مشتق، R عملگر خطی باقیمانده، N عملگر غیرخطی و $g(x)$ قسمت ناهمگن معادله هستند. با اعمال عملگر L^{-1} در معادله (۱.۳) به دست می‌آوریم

$$u = f - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu), \quad (۲.۳)$$

^۲Adomian Polynomials

^۱George Adomian

که تابع f جمله حاصل شده از انتگرال g و اعمال شرایط اولیه است. در روش تجزیه آدومین فرض می‌کنیم که تابع u به صورت سری نامتناهی زیر است

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (۳.۳)$$

همچنین در این روش قسمت غیر خطی $Nu = F(u)$ را به صورت یک سری نامتناهی از چندجمله‌ای‌های آدومین به شکل

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (۴.۳)$$

بسط می‌دهیم که در آن A_n ها چندجمله‌ای‌های آدومین هستند که به صورت زیر به دست می‌آیند

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad (۵.۳)$$

یا به طور ساده‌تر

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0), \\ A_1 &= u_1 F'(u_0), \\ A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} F''(u_0), \\ A_3 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} F'''(u_0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

لازم به ذکر است که در محاسبه چندجمله‌ای‌های آدومین دو نکته قابل توجه است: اول اینکه A_0 تنها به u_0 ، A_1 تنها به u_0 و u_1 ، A_2 تنها به u_0 و u_1 و u_2 و به همین ترتیب A_n به u_0 و u_1 و $\dots$ و u_n بستگی دارد و دوم اینکه جمع اندیس‌های هر جمله‌ی A_n برابر n است. روش‌های دیگری نیز برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای‌های آدومین وجود دارد که برای نمونه روش زیر ذکر می‌گردد. در ابتدا بسط u یعنی $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ را در تابع اصلی جایگذاری می‌کنیم و پس از بسط تابع، تمام جملاتی را که مجموع اندیس‌های آن‌ها با یکدیگر برابر است را با یکدیگر جمع کرده و به عنوان چندجمله‌ای‌های آدومین با مرتبه‌ی مجموع اندیس‌های هر یک از جملات آن قرار می‌دهیم. برای درک بهتر موضوع مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.

مثال ۱۰.۳. تابع غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$F(u) = u^2, \quad (7.3)$$

در ابتدا بسط u را در معادله (۷.۳) جای گذاری می کنیم

$$F(u) = (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots)^2, \quad (8.3)$$

حال خواهیم داشت:

$$F(u) = u_0^2 + 2u_0u_1 + 2u_0u_2 + u_1^2 + 2u_0u_3 + 2u_1u_2 + \dots. \quad (9.3)$$

جملاتی را که دارای مجموع اندیس های یکسان است در کنار یکدیگر دسته بندی می کنیم.

$$F(u) = u_0^2 + 2u_0u_1 + 2u_0u_2 + u_1^2 + 2u_0u_3 + 2u_1u_2 + 2u_0u_4 + 2u_1u_3 + u_2^2 + 2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 + \dots. \quad (10.3)$$

بنابراین چند جمله ای های آدومین به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2, \\ A_1 &= 2u_0u_1, \\ A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \\ A_4 &= 2u_0u_4 + 2u_1u_3 + u_2^2, \\ A_5 &= 2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

مثال ۲۰.۳. تابع غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$F(u) = e^u, \quad (11.3)$$

با جای گذاری بسط u در (۱۱.۳) داریم:

$$F(u) = e^{(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots)}, \quad (12.3)$$

با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$F(u) = e^{u_0} \times (1 + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) + \frac{1}{2!}(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 + \dots), \quad (13.3)$$

به بیان دیگر $F(u)$ عبارت است از

$$F(u) = e_0^u + u_1 e_0^u + (u_2 + \frac{1}{2!} u_1^2) e_0^u + (u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!} u_1^3) e_0^u \\ + (u_4 + u_1 u_3 + \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 + \frac{1}{4!} u_1^4) e_0^u + \dots \quad (14.3)$$

در نتیجه چند جمله‌ای‌های آدومین به صورت زیر خواهند بود

$$A_0 = e_0^u, \\ A_1 = u_1 e_0^u, \\ A_2 = (u_2 + \frac{1}{2!} u_1^2) e_0^u, \\ A_3 = (u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!} u_1^3) e_0^u, \\ A_4 = (u_4 + u_1 u_3 + \frac{1}{2!} u_2^2 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 + \frac{1}{4!} u_1^4) e_0^u, \\ \vdots$$

حال با توجه به روابط (۳.۳) و (۴.۳) معادله (۲.۳) به صورت زیر خواهد بود

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L^{-1} R \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right), \quad (15.3)$$

که مؤلفه‌های $u_0, u_1, u_2, \dots$ با توجه به رابطه (۱۵.۳) از روابط بازگشتی زیر به دست می‌آیند

$$u_0 = f, \\ u_1 = -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0), \\ \vdots \\ u_{k+1} = -L^{-1}(Ru_k) - L^{-1}(A_k) \quad k \geq 0, \quad (16.3)$$

حال با مشخص شدن مؤلفه‌های u ، تقریب n جمله‌ای ψ_n را برای جواب u به صورت

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \text{ به طوری که } u = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n. \quad (17.3)$$

تعریف می‌کنیم. در ادامه روش تجزیه‌ی آدومین را برای معادلات دیفرانسیل کسری - جبری به تفصیل توضیح داده و با چند مثال بحث را کامل می‌کنیم.

۳.۳ روش تجزیه آدومین برای معادلات دیفرانسیل جبری کسری

دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید [۲۸]

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n), & 0 < \alpha_i \leq 1, \\ g(t, x_1, \dots, x_n) = 0 & i = 1, 2, \dots, n-1, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (18.3)$$

با شرایط اولیه

$$x_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (19.3)$$

در روش تجزیه آدومین معادله (۱۸.۳) را به صورت زیر می نویسیم

$$D_*^{\alpha_i} x_i(t) = L_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + N_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi_i(t), \quad (20.3)$$

که در آن L_i عملگر خطی، N_i عملگر غیرخطی و $D_*^{\alpha_i}$ عملگر دیفرانسیل کسری می باشد. با به کار بردن عملگر J^{α_i} در دو طرف معادله (۲۰.۳) که معکوس $D_*^{\alpha_i}$ است، داریم:

$$x_i(t) = x_i(0) + J^{\alpha_i}(\varphi_i(t)) + J^{\alpha_i}(L_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)) + J^{\alpha_i}(N_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad (21.3)$$

در روش تجزیه آدومین نشان داده شد که جواب $x_i(t)$ به وسیله سری نامتناهی مؤلفه ای زیر به دست می آید

$$x_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (22.3)$$

و همچنین عملگر غیرخطی $N_i(t)$ به صورت تجزیه می شود

$$N_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}(t). \quad (23.3)$$

که در آن A_{im} چند جمله ای آدومین وابسته به مقادیر $x_{10}, \dots, x_{1m}, x_{20}, \dots, x_{2m}, x_{n0}, \dots, x_{nm}$ می باشد و فرمول آن نیز به صورت زیر می باشد

$$A_{im} = \frac{1}{m!} \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} N_i \left(t, \sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} \lambda^m, \sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0}. \quad (24.3)$$

با جایگذاری روابط (۲۳.۳)، (۲۳.۳) و (۲۴.۳) در رابطه (۲۱.۳) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{im} = x_i(0) + J^{\alpha_i}(\varphi_i(t)) + J^{\alpha_i} \left[L_i \left(t, \sum_{m=0}^{\infty} x_{1m}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \right) \right] + J^{\alpha_i} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \right]. \quad (25.3)$$

از رابطه‌ی (۲۵.۳) با استفاده از روابط بازگشتی داریم:

$$x_{i\circ} = x_i(\circ)$$

$$x_{i\backslash} = J^{\alpha_i}(\varphi_i(t)) \quad (26.3)$$

$$x_{im+\backslash} = J^{\alpha_i}[L_i(t, x_{\backslash m}, x_{\nabla m}, \dots, x_{nm})] + J^{\alpha_i}[A_{im}], \quad \backslash \leq i \leq n - \backslash, m = \circ, \backslash, \nabla, \dots.$$

حال جواب $x_i(t)$ با استفاده از سری برشی زیر به دست می‌آید

$$\psi_i^N(t) = \sum_{m=\circ}^{N-\backslash} x_{im}(t) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_i^N(t) = x_i(t), \quad i = \backslash, \nabla, \dots, n - \backslash. \quad (27.3)$$

۴.۳ مثال

برای درک بهتر مفاهیم روش تجزیه آدومین در این قسمت به ارائه چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۳.۳. معادله دیفرانسیل کسری- جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^\alpha x(t) - ty'(t) + x(t) - (\backslash + t)y(t) = \circ, & \circ < \alpha \leq \backslash, \\ y(t) - \sin t = \circ, \end{cases} \quad (28.3)$$

با مقادیر اولیه‌ی $x(\circ) = \backslash$, $y(\circ) = \circ$ و جواب دقیق $x(t) = e^{-t} + t \sin t$, $y(t) = \sin t$ وقتی که $\alpha = \backslash$.

معادله (۲۸.۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$D_*^\alpha x(t) = -x(t) + t \cos t + (\backslash + t) \sin t. \quad (29.3)$$

با استفاده از عملگر انتگرال ریمان لیوویل J^α در رابطه (۲۹.۳) داریم:

$$J^\alpha[D_*^\alpha x(t)] = J^\alpha[-x(t) + t \cos t + (\backslash + t) \sin t]. \quad (30.3)$$

حال با جایگذاری $\tilde{g}(t)$ در رابطه (۳۰.۳) که بسط تیلور تابع $g(t) = t \cos t + (\backslash + t) \sin t$ می‌باشد، داریم:

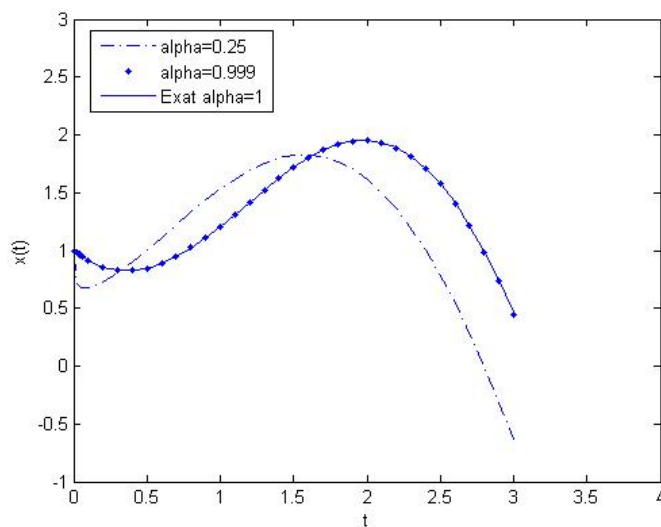
$$x(t) - x(\circ) = J^\alpha(\tilde{g}(t)) - J^\alpha(x(t)). \quad (31.3)$$

طبق رابطه بازگشتی روش آدومین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_\circ(t) = \backslash \\ x_{\backslash}(t) = J^\alpha(\tilde{g}(t)) \\ x_{n+\backslash} = -J^\alpha(x_n(t)). \quad n \geq \backslash. \end{cases} \quad (32.3)$$

جدول ۱.۳: مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۳.۳)

t	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.999$	جواب دقیق $\alpha = 1$
۰	۱	۱	۱
۰.۲	۰.۷۲۸۳۱۰۰۰	۰.۸۵۸۲۴۱۹۸	۰.۸۵۸۴۶۴۶۱
۰.۴	۰.۹۰۰۳۷۵۸۱	۰.۸۲۶۰۲۹۲۳	۰.۸۲۶۰۸۷۳۸
۰.۶	۱.۱۱۱۵۵۳۳۲	۰.۸۸۷۷۷۰۲۲	۰.۸۸۷۵۹۷۱۲
۰.۸	۱.۳۲۹۶۰۴۰۰	۱.۰۲۳۵۸۲۷۴	۱.۰۲۳۲۱۳۸۳
۱	۱.۵۳۰۴۰۸۱۱	۱.۲۰۹۸۳۰۹۰	۱.۲۰۹۳۵۰۴۲
۱.۲	۱.۶۹۲۶۲۵۹۷	۱.۴۲۰۱۲۷۶۵	۱.۴۱۹۶۴۱۱۱
۱.۴	۱.۷۹۷۲۴۲۰۴	۱.۶۲۶۶۰۷۸۰	۱.۶۲۶۲۲۶۵۸
۱.۶	۱.۸۲۷۹۶۹۶۰	۱.۸۰۱۳۷۶۷۸	۱.۸۰۱۲۱۴۲۸
۱.۸	۱.۷۷۱۷۹۷۱۱	۱.۹۱۸۰۳۸۳۵	۱.۹۱۸۲۲۴۶۲
۲	۱.۶۱۹۴۵۹۳۶	۱.۹۵۳۱۹۹۵۰	۱.۹۵۳۹۳۰۱۳
۲.۲	۱.۳۶۵۷۳۹۹۱	۱.۸۸۷۸۴۸۳۰	۱.۸۸۹۴۹۵۲۴
۲.۴	۱.۰۰۹۵۵۲۵۲	۱.۷۰۸۵۰۱۲۴	۱.۷۱۱۸۲۹۵۸
۲.۶	۰.۵۵۳۷۶۹۷۰	۱.۴۰۸۰۲۱۵۰	۱.۴۱۴۵۷۷۱۴
۲.۸	۰.۰۰۴۷۷۹۶۸	۰.۹۸۶۰۱۸۶۱	۰.۹۹۸۷۷۶۸۸
۳	-۰.۶۲۸۲۳۴۲۱	۰.۴۴۸۷۵۳۴۱	۰.۴۷۳۱۴۷۰۹



شکل ۱.۳: نمودار جواب دستگاه (۲۸.۳).

مثال ۴.۳. معادله دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} x(t) - ty'(t) + t^2 z'(t) + x(t) - (1+t)y(t) + (t^2 + 2t)z(t) = 0, \\ D_*^{\alpha_2} y(t) - tz'(t) - y(t) + (t-1)z(t) = 0, & 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \\ z(t) - \sin t = 0, \end{cases} \quad (33.3)$$

با مقدار اولیه‌ی

$$x(0) = y(0) = 1 \quad z(0) = 0, \quad (34.3)$$

معادله ی (۳۳.۳) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} x(t) = ty'(t) - x(t) - (1+t)y(t) - t^2 \cos t - (t^2 + 2t) \sin t, \\ D_*^{\alpha_2} y(t) = y(t) + t \cos t - (t-1) \sin t. \end{cases} \quad (35.3)$$

با اعمال عملگر انتگرال ریمان لیوویل J^α در رابطه (۳۵.۳) داریم:

$$\begin{cases} J^{\alpha_1} [D_*^{\alpha_1} x(t)] = J^{\alpha_1} [ty'(t) - x(t) - (1+t)y(t) - t^2 \cos t - (t^2 + 2t) \sin t], \\ J^{\alpha_2} [D_*^{\alpha_2} y(t)] = J^{\alpha_2} [y(t) + t \cos t - (t-1) \sin t]. \end{cases} \quad (36.3)$$

بنابراین

$$\begin{cases} x(t) - x(0) = J^{\alpha_1} [ty'(t) - x(t) - (1+t)y(t) - \tilde{g}_1(t)], \\ y(t) - y(0) = J^{\alpha_2} [y(t) + \tilde{g}_2(t)]. \end{cases} \quad (37.3)$$

که در آن $\tilde{g}_1(t)$ و $\tilde{g}_2(t)$ بسط تیلور توابع $g_1(t) = t^2 \cos t + (t^2 + 2t) \sin t$ و $g_2(t) = t \cos t - (t-1) \sin t$ می‌باشد. بنابراین طبق رابطه بازگشتی روش آدومین خواهیم داشت:

$$x_0(t) = x(0)$$

$$y_0(t) = y(0)$$

$$x_1(t) = J^{\alpha_1}(\tilde{g}_1(t))$$

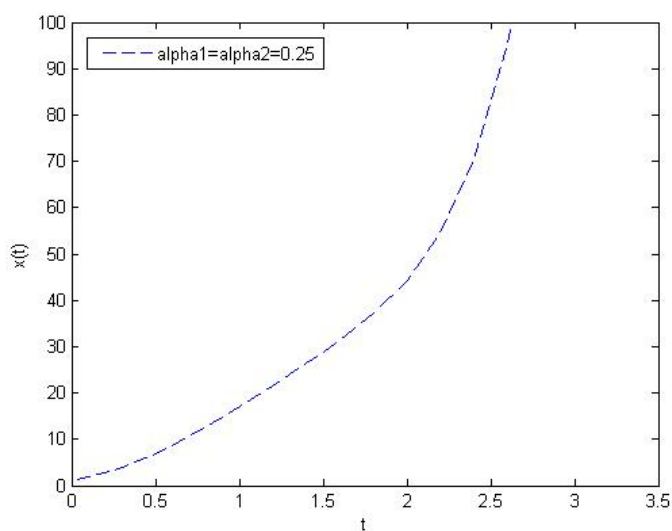
$$y_1(t) = J^{\alpha_2}(\tilde{g}_2(t))$$

$$x_{n+1} = J^{\alpha_1} [ty'_n(t) - x_n(t) - (1+t)y_n(t)] \quad n \geq 1$$

$$y_{n+1} = J^{\alpha_2}(y_n(t)) \quad n \geq 1$$

جدول ۲.۳: مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۴.۳)

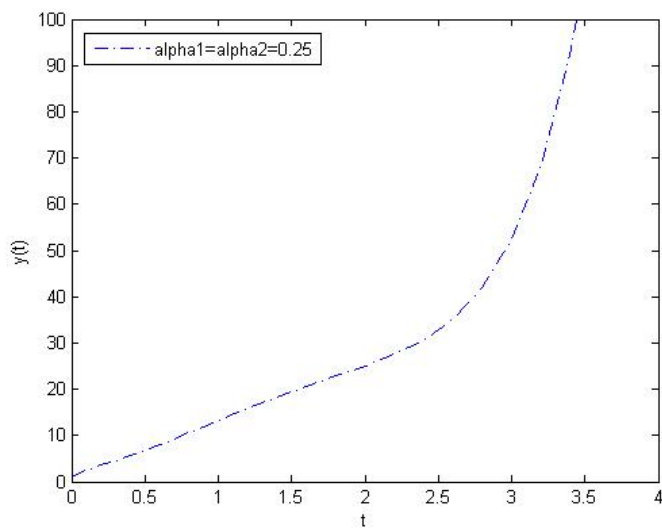
t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$
۰	۱
۰/۲	۲/۹۱۱۶۵۷۴۹
۰/۴	۵/۴۳۵۶۱۸۳۹
۰/۶	۸/۷۱۳۸۱۱۰۵
۰/۸	۱۲/۶۱۹۴۰۵۱۱
۱	۱۶/۹۷۸۲۶۰۰۲
۱/۲	۲۱/۶۱۶۱۰۴۸۵
۱/۴	۲۶/۴۲۸۵۱۶۷۹
۱/۶	۳۱/۴۸۱۲۹۴۹۷
۱/۸	۳۷/۱۴۷۰۹۱۴۰
۲	۴۴/۲۸۴۴۱۴۹۸
۲/۲	۵۴/۴۶۵۵۶۴۲۰
۲/۴	۷۰/۲۶۰۵۱۲۹۱
۲/۶	۹۵/۵۸۴۲۵۲۱۲
۲/۸	۱۳۶/۱۱۵۵۷۶۶۲
۳	۱۹۹/۷۹۵۷۹۸۳۵



شکل ۲.۳: نمودار جواب دستگاه (۳.۳).

جدول ۳.۳: مقادیر عددی $y(t)$ در مثال (۴.۳)

t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$
۰	۱
۰/۲	۳/۵۰۹۰۹۳۸۰۷
۰/۴	۵/۶۱۱۱۷۲۸۰۵
۰/۶	۷/۹۷۶۲۸۱۵۸۶
۰/۸	۱۰/۵۳۰۷۲۳۴۳
۱	۱۳/۱۷۰۸۶۱۹۱
۱/۲	۱۵/۷۹۱۱۳۳۸۸
۱/۴	۱۸/۳۰۳۸۹۹۸۹
۱/۶	۲۰/۶۶۱۸۰۳۹۰
۱/۸	۲۲/۸۸۴۷۲۵۴۳
۲	۲۵/۰۹۲۲۲۴۰۴
۲/۲	۲۷/۵۴۲۱۳۱۴۴
۲/۴	۳۰/۶۷۵۸۹۰۳۴
۲/۶	۳۵/۱۷۱۲۳۰۴۳
۲/۸	۴۲/۰۰۲۷۷۸۷۳
۳	۵۲/۵۱۱۲۱۲۴۷



شکل ۳.۳: نمودار جواب دستگاه (۳.۳).

مثال ۵.۳. معادله دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t)x(t) = 1, \\ D_*^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^\Psi(t) + z(t) = 0, \\ y(t) - x^\Psi(t) = 0, \end{cases} \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad (38.3)$$

با مقدار اولیه‌ی

$$x(0) = y(0) = z(0) = 1, \quad (39.3)$$

در حالت $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ جواب دقیق مسأله به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^{2t}, \\ z(t) = e^{-t}, \end{cases} \quad (40.3)$$

معادله ی (38.3) را به شکل زیر بازنویسی می کنیم

$$\begin{cases} y(t) - x^\Psi(t) = 0, \\ D_*^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t)x(t) = 1, \\ D_*^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^\Psi(t) + z(t) = 0, \end{cases} \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad (41.3)$$

با اعمال عملگر انتگرال ریمان لیوویل J^α در رابطه (41.3) داریم:

$$\begin{cases} J^{\alpha_1} [D_*^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t)x(t) = 1], \\ J^{\alpha_2} [D_*^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^\Psi(t) + z(t) = 0]. \end{cases} \quad (42.3)$$

بنابراین

$$\begin{cases} y(t) - x^\Psi(t) = 0, \\ x(t) - x(0) = J^{\alpha_1} [x(t) - z(t)x(t) + 1], \\ z(t) - z(0) = J^{\alpha_2} [y(t) - x^\Psi(t) - z(t)]. \end{cases} \quad (43.3)$$

حال با توجه به مقادیر اولیه‌ی $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0)$ و همچنین چندجمله‌ای آدومین برای عبارت‌های غیرخطی $x(t), z(t)$ و $x^\Psi(t)$ که به صورت زیر تعریف می شود

$$z(t).x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \quad (44.3)$$

$$x^\Psi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i, \quad (45.3)$$

بنابر تعریف چندجمله‌ای‌های آدومین داریم:

$$\begin{aligned} A_0 &= x_0 z_0, \\ A_1 &= x_0 z_1 + x_1 z_0, \\ A_2 &= x_0 z_2 + x_1 z_1 + x_2 z_0, \\ A_3 &= x_0 z_3 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_3 z_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (46.3)$$

و به همین ترتیب

$$\begin{aligned} B_0 &= x_0^2, \\ B_1 &= 2x_0 x_1, \\ B_2 &= 2x_0 x_2 + x_1^2, \\ B_3 &= 2x_0 x_3 + 2x_1 x_2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (47.3)$$

معادله‌ی (38.3) براساس روش تجزیه‌ی آدومین به شکل زیر قابل حل است.

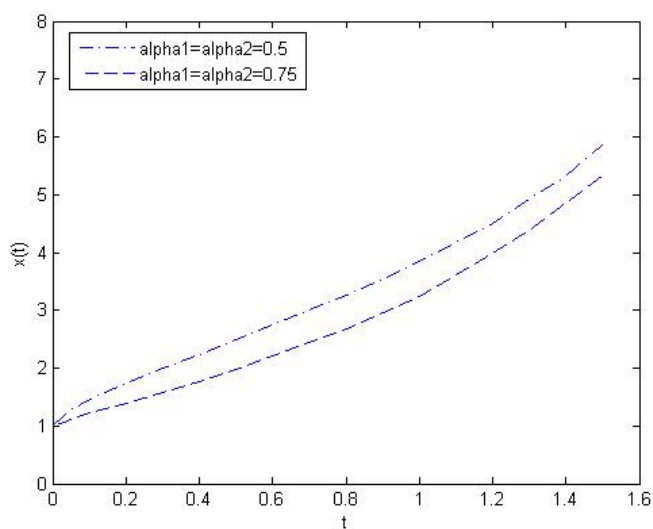
$$\left\{ \begin{aligned} y_1(t) &= x_0^2(t), \\ x_1(t) &= J^{\alpha_1}[x_0(t) - z_0(t)x_0(t) + 1], \\ z_1(t) &= J^{\alpha_2}[y_0(t) - x_0^2(t) - z_0(t)], \\ y_{n+1}(t) &= B_n, \\ x_{n+1}(t) &= J^{\alpha_1}[x_n(t) - A_n], \\ z_{n+1}(t) &= J^{\alpha_2}[y_n(t) - B_n - z_n(t)], \quad n \geq 1. \end{aligned} \right. \quad (48.3)$$

حال با شروع از مقادیر اولیه‌ی $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ و روابط (46.3) و (47.3) داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} y_1(t) &= 1, \\ x_1(t) &= J^{\alpha_1}[1] = \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}, \\ z_1(t) &= J^{\alpha_2}[-1] = -\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}, \\ y_2(t) &= B_1 = 2x_1, \\ x_2(t) &= J^{\alpha_1}[-z_1], \\ z_2(t) &= J^{\alpha_2}[1 - 2x_1 - z_1]. \end{aligned} \right. \quad (49.3)$$

جدول ۴.۳: مقادیر عددی $x(t)$ در مثال (۵.۳)

t	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.75$
۰	۱	۱
۰/۱	۱/۴۶۷۸۸۴۹۳	۱/۲۱۸۷۰۶۸۲
۰/۲	۱/۷۴۱۱۳۲۱۶	۱/۴۰۰۰۲۷۸۷
۰/۳	۱/۹۹۲۷۸۹۱۲	۱/۵۸۴۱۲۶۸۴
۰/۴	۲/۲۳۹۲۵۵۷۱	۱/۷۷۶۹۰۸۶۲
۰/۵	۲/۴۸۷۱۴۱۵۳	۱/۹۸۱۳۸۶۵۲
۰/۶	۲/۷۴۰۱۱۸۳۲	۲/۱۹۹۷۴۴۶۸
۰/۷	۳/۰۰۰۶۴۶۹۳	۲/۴۳۳۸۸۲۹۸
۰/۸	۳/۲۷۰۶۰۵۳۵	۲/۶۸۵۶۲۳۸۱
۰/۹	۳/۵۵۱۵۶۶۴۰	۲/۹۵۶۸۱۱۰۷
۱	۳/۸۴۴۹۴۰۷۱	۳/۲۴۹۳۶۶۶۳
۱/۱	۴/۱۷۴۴۳۴۸۶	۳/۶۰۷۴۸۷۲۱
۱/۲	۴/۴۹۳۶۹۹۰۳	۳/۹۸۳۸۲۹۶۷
۱/۳	۴/۹۲۶۰۹۴۹۸	۴/۳۹۱۲۴۶۵۷
۱/۴	۵/۳۳۰۱۷۰۷۶	۴/۸۵۵۹۵۵۰۱
۱/۵	۵/۸۶۹۸۱۷۲۷	۵/۳۱۲۵۷۰۳۵



شکل ۴.۳: نمودار جواب دستگاه (۳۸.۳).

فصل ۴

روش آنالیز هموتوپی

۱.۴ مقدمه

اخیراً روش‌های جدیدی گسترش یافته که به وسیله‌ی آن‌ها می‌توان جواب‌های اختلالی را به صورتی ارائه داد که برای مقادیر زیادی از پارامترها قابل قبول باشد. یکی از این روش‌ها، روش آنالیز هموتوپی است که در سال ۱۹۹۲، لیائو^۱ ایده‌های اساسی هموتوپی در توپولوژی را به منظور ارائه روش تحلیلی عمومی برای مسائل غیرخطی به کار برد [۱۰، ۱۱، ۲۳، ۲۴، ۲۵]. ایده اصلی این روش تولید یک دنباله از جواب‌های تقریبی است که به جواب دقیق مسأله همگراست. وجود پارامترها و توابع کمکی در جواب تقریبی منجر به تولید دسته‌ای از جواب‌های تقریبی به جای جواب واحد تولید شده در روش اختلال سنتی می‌شود. این روش از امکاناتی چون آزادی عمل در انتخاب تابع اولیه و عملگر خطی بهره می‌برد. به وسیله همین آزادی عمل‌ها و انتخاب‌های اولیه یک مسأله غیرخطی پیچیده حل می‌گردد و به مسأله‌های خطی کوچکتر و ساده تبدیل می‌شود. همچنین، به وسیله‌ی پارامترها و توابع کمکی این امکان وجود دارد که ناحیه و سرعت همگرایی مجموعه جواب را تضمین کنیم. برای توضیح روش هموتوپی از یک مسأله‌ی خیلی ساده که به وسیله‌ی لیائو و تان^۲ شرح داده شده است، شروع می‌کنیم. در ادامه این بخش روش آنالیز هموتوپی را برای حل معادلات دیفرانسیل جبری از مرتبه کسری به کار می‌بریم. همچنین با ارائه مثال‌هایی تأثیر و کارایی روش آنالیز هموتوپی را ثابت می‌کنیم.

۲.۴ ایده‌ی هموتوپی در یک مثال ساده

مسأله غیرخطی و جبری زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = 0, \quad (1.4)$$

^۲Tan

^۱Liao

قبل از شروع رابطه‌ی زیر را می‌سازیم

$$H(x; q) = (1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x), \quad (2.4)$$

جایی که x_0 حدس اولیه ما از پارامتر x می‌باشد و $q \in [0, 1]$ پارامتر هموتوپي خوانده می‌شود. واضح است که وقتی $q = 0$ و $q = 1$ ما داریم:

$$H(x; 0) = f(x) - f(x_0) \quad H(x; 1) = f(x), \quad (3.4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌گردد با افزایش مقدار q از ۰ تا ۱ مقدار $H(x; q)$ به طور مداوم از $f(x) - f(x_0)$ به $f(x)$ تغییر می‌یابد. به چنین تغییرات پیوسته‌ای، تغییر حالت در توپولوژی می‌گویند. حال با قرار دادن $H(x; q)$ برابر با صفر داریم:

$$(1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0, \quad (4.4)$$

ما هم اکنون از بیان هموتوپي به یک سری از معادلات جبری رسیدیم. واضح است که جوای این سری از معادلات به مقدار q وابسته می‌باشد. پس این دسته از معادله‌ها می‌تواند به صورت زیر بازسازی گردد که بیانی از پارامتر q است

$$(1 - q)[f(\phi(q)) - f(x_0)] + qf(\phi(q)) = 0, \quad (5.4)$$

بنابراین

$$\begin{cases} q = 0 \longrightarrow \phi(0) = x_0, \\ q = 1 \longrightarrow f(\phi(q)) = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

بنابر معادله $f(x) = 0$ خواهیم داشت:

$$\phi(1) = x, \quad (7.4)$$

بنابراین، با افزایش پارامتر هموتوپي از مقدار ۰ تا ۱، مقدار $\phi(q)$ هم از x_0 به مقدار واقعی حل $f(x) = 0$ میل می‌کند. ما به خانواده‌ای از معادلات که مثل رابطه‌ی (۵.۴) تعریف شوند، معادلات تغییر یافته‌ی مرتبه صفر^۳ می‌گوییم. حال بسط مک‌لوران تابع $\phi(q)$ که تابعی از پارامتر هموتوپي q است، می‌نویسیم

$$\phi(q) = x_0 + \sum_{m=0}^{\infty} x_m q^m \quad (8.4)$$

^۳Zero-Order Deformation Equation

که در آن

$$x_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial \phi_i(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (9.4)$$

با فرض این‌که سری هموتوپی (۸.۴) در $q = 1$ همگرا باشد، با توجه به (۹.۴) جواب معادله به صورت زیر خواهد بود

$$x = x_0 + \sum_{m=0}^{\infty} x_m, \quad (10.4)$$

متأسفانه بازه‌ی همگرایی بسیاری از سری‌های تیلور توابع بسیار کوچک و کمتر از ۱ می‌باشد. بنابراین ما در اینجا باید تصور نماییم که سری هموتوپی در $q = 1$ همگرا می‌باشد. با معرفی یک پارامتر کمکی می‌توان این محدودیت را رفع کرد. با به کار بردن مشتق مرتبه اول هموتوپی در دو طرف معادله تغییر حالت مرتبه صفر (۵.۴)، معادله تغییر حالت مرتبه یک^۴ به دست می‌آید

$$x_1 f'(x_0) + f(x_0) = 0 \quad (11.4)$$

که جواب معادله (۱۱.۴) به صورت زیر است

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (12.4)$$

با دو بار مشتق گرفتن از رابطه‌ی هموتوپی از معادله (۵.۴) معادله تغییر حالت مرتبه دوم نیز به دست می‌آید

$$x_2 f'(x_0) + x_1 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_1^2 f''(x_0) = 0 \quad (13.4)$$

که جواب معادله (۱۳.۴) به صورت زیر خواهد بود

$$x_2 = -\frac{x_1^2 f''(x_0)}{2 f'(x_0)} = -\frac{f^2(x_0)}{2 [f'(x_0)]^3}, \quad (14.4)$$

با این روش می‌توان مقدار x_m را به ازای $m = 1, 2, 3, \dots$ به دست آورد. در اینجا لازم است که تأکید شود که تمام این معادلات تغییر یافته خطی هستند و به آسانی قابل حل می‌باشند. با نوشتن سری هموتوپی مرتبه یک تقریب x به صورت زیر است

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (15.4)$$

و تقریب دوم سری هموتوپی به صورت زیر است

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)}{2 [f'(x_0)]^3}, \quad (16.4)$$

توجه شود که رابطه (۱۵.۴) همان رابطه بازگشتی نیوتون برای حل معادلات جبری می‌باشد و رابطه (۱۶.۴) را می‌توان رابطه نیوتون مرتبه دوم نامید.

شیوه‌ی به‌کارگرفته شده در بالا به هیچ پارامتر فیزیکی وابسته نیست و اصلاً مهم نیست که مسأله‌ی غیرخطی دارای پارامترهای کوچک و بزرگ باشد یا خیر. ما همیشه می‌توانیم پارامتر هموتویی $q \in [0, 1]$ را برای ساختن یک معادله‌ی تغییر حالت مرتبه صفر بسازیم. متأسفانه سری استفاده شده در معادله‌ی (۸.۴) همیشه در $q = 1$ همگرا نیست. بنابراین سری مربوطه در معادله (۱۰.۴) ممکن است واگرا شود. بسیار اتفاق می‌افتد که گاهی روش بازگشتی نیوتون به جواب نمی‌انجامد، این به خاطر این است که سری نیوتون بر این فرضیه نوشته شده است که معادله هموتویی در $q = 1$ همگرا می‌شود. اما این فرضیه همیشه برقرار نیست، مخصوصاً برای معادله‌هایی که غیرخطی بودن در آن‌ها شدید است. برای برطرف کردن این مشکل لیائو پارامتر $\bar{h} \neq 0$ را برای ساخت معادله تغییر حالت هموتویی ارائه کرد.

$$(1 - q)[f(\phi(q)) - f(x_0)] = \bar{h}qf(\phi(q)), \quad (17.4)$$

زمانی که $q = 1$ داریم:

$$\bar{h}f(\phi(q)) = 0, \quad (18.4)$$

که با معادله‌ی $f(x) = 0$ برابر است. تمام معادلاتی که قبلاً تعریف شد به همان شکل هستند و تغییری در آن‌ها به‌وجود نمی‌آید به غیر از معادلات تغییر یافته‌های مرتبه یک و دو و سه و ... با به‌کاربردن مشتق هموتویی در دو طرف معادله (۱۷.۴) معادله تغییر حالت مرتبه یک به دست خواهد آمد.

$$x_1 = -\bar{h} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (19.4)$$

با مشتق‌گیری هموتویی مرتبه دوم در دو طرف معادله (۱۷.۴) داریم:

$$x_2 f'(x_0) - (1 + \bar{h})x_1 f'(x_0) + \frac{1}{2}x_1^2 f''(x_0) = 0, \quad (20.4)$$

که حل معادله (۲۰.۴) به‌صورت زیر می‌شود

$$x_2 = (1 + \bar{h})x_1 f'(x_0) + \frac{x_1^2 f''(x_0)}{2f'(x_0)} = \bar{h}(1 + \bar{h})f(x_0) - \frac{f^2(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}. \quad (21.4)$$

به‌طور مشابه سری مرتبه یک هموتویی به شکل زیر خواهد بود

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 - \bar{h} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (22.4)$$

و همچنین سری مرتبه دوم هموتویی به شکل زیر خواهد بود

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = (1 + \bar{h} + \bar{h}^2)x_0 - \bar{h} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}, \quad (23.4)$$

واضح است که (۱۵.۴) و (۱۶.۴) حالات خاصی از معادلات (۲۲.۴) و (۲۳.۴) به ازای مقدار $\bar{h} = -1$ می‌باشند. کاملاً مشخص است که انتخاب مناسب پارامتر $\bar{h}$ می‌تواند همگرایی سری‌های هموتویی را تضمین نماید. در حقیقت این پارامتر کمکی $\bar{h}$ بوده است که برای اولین بار برای ما روشی به ارمغان آورد که همگرایی جواب را تضمین می‌دهد. به نظر می‌رسد که این کاملاً منطقی است که اگر پارامتر $\bar{h}$ را پارامتر کنترل‌کننده‌ی همگرایی^۵ بنامیم.

جا دارد که تأکید شود که، بدون استفاده از پارامتر کنترل‌کننده‌ی $\bar{h}$ ، ما باید گاهی بر خلاف واقعیت فرض کنیم که سری‌هایی همچون معادله (۸.۴) موجود باشند. با وجود پارامتری همچون $\bar{h}$ همچنین فرضی غیر ضروریست زیرا به نظر می‌رسد که همیشه می‌توانیم یک پارامتر $\bar{h}$ مناسب انتخاب کنیم تا یک سری جواب همگرا داشته باشیم. لذا اضافه کردن پارامتر $\bar{h}$ به معادله‌ی تغییر یافته‌ی مرتبه صفر هموتویی توانست این روش را بسیار قوی و پیشرفته سازد. هم اکنون معادلات تغییر یافته‌ی مرتبه صفر گوناگونی به وسیله‌ی لیائو تدوین و ارائه گشته است.

۳.۴ روش آنالیز هموتویی

در این قسمت ایده اساسی روش آنالیز هموتویی و مفاهیم اولیه‌ی آن معرفی می‌شود.

معادله تغییر حالت مرتبه صفر

ابتدا روش هموتویی استاندارد را برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی در نظر بگیرید:

$$N[x_i(t)] = 0 \quad (24.4)$$

گام اول برای جواب معادله به روش آنالیز هموتویی ساختن هم‌ارزی زیر می‌باشد

$$H[\Phi_i(t, q); x_{i0}, H_i(t), \bar{h}_i, q] \equiv (1 - q)L[\Phi_i(t; q) - x_{i0}(t)] - q\bar{h}_i H_i(t)N[\Phi_i(t; q)], \quad (25.4)$$

که در آن $\bar{h}_i \neq 0$ پارامتر کمکی، $H_i(t)$ تابع کمکی، $q \in [0, 1]$ پارامتر تعبیه، $x_{i0}(t)$ تقریب اولیه جواب، $\Phi_i(t; q)$ تابعی است که در شرایط اولیه یا مرزی صدق می‌کند و L عملگر خطی در معادله می‌باشد. همچنین عملگر خطی L معمولاً باید هم‌مرتبه با عملگر غیرخطی N باشد. با قرار دادن معادله (۲۵.۴) برابر صفر داریم:

$$(1 - q)L[\Phi_i(t; q) - x_{i0}(t)] = q\bar{h}_i H_i(t)N[\Phi_i(t; q)], \quad (26.4)$$

با قرار دادن $q = 0$ در (۲۶.۴) داریم:

$$L[\Phi_i(t; 0) - x_{i0}(t)] = 0, \quad (27.4)$$

^۵Convergence-Parameter Controll

در نتیجه

$$\Phi_i(t; \circ) = x_{i\circ}(t) \quad (28.4)$$

با قرار دادن $q = 1$ در (۲۶.۴) نیز داریم:

$$N[\Phi_i(t; 1)] = \circ, \quad (29.4)$$

بنابراین با توجه به (۲۹.۴) و اینکه $\Phi_i(t; q)$ در شرایط اولیه یا مرزی صدق می‌کند، داریم:

$$\Phi_i(t; 1) = x_i(t), \quad (30.4)$$

با توجه به (۲۸.۴) و (۳۰.۴) مقدار اولیه‌ی $x_{i\circ}(t)$ به جواب دقیق $x_i(t)$ تغییر می‌کند وقتی پارامتر q از $\circ$ به 1 افزایش می‌یابد. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، در توپولوژی این نوع تغییرات را تغییر حالت معادلات می‌گویند و همچنین معادلات (۲۶.۴) معادلات تغییر حالت مرتبه صفر نامیده می‌شود. با داشتن آزادی برای انتخاب پارامتر کمکی $\hbar$ ، تابع کمکی $H_i(t)$ ، مقدار اولیه $x_{i\circ}(t)$ و عملگر خطی کمکی L می‌توانیم فرض کنیم که همه آن‌ها به درستی انتخاب شده‌اند به‌طوری‌که جواب $\Phi_i(t; q)$ معادله تغییر حالت مرتبه صفر (۲۶.۴) برای $1 \leq q \leq \circ$ وجود دارد. به‌علاوه، مشتق مرتبه m آن‌ها نسبت به پارامتر q یعنی

$$x_{i\circ}^{[m]}(t) = \left. \frac{\partial \Phi_i(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=\circ} \quad (31.4)$$

وجود دارد برای $m = 1, 2, \dots$. رابطه $x_{i\circ}^{[m]}(t)$ مشتقات تغییر حالت مرتبه m ^۶ نامیده می‌شود. هم‌اکنون تعریف می‌کنیم

$$x_{im}(t) = \frac{x_{i\circ}^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial \Phi_i(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=\circ}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (32.4)$$

با استفاده از بسط تیلور ^۷ داریم:

$$\Phi_i(t; q) = \Phi_i(t; \circ) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial \Phi_i(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=\circ} q^m, \quad (33.4)$$

بنابر رابطه‌ی (۲۸.۴) و (۳۲.۴) داریم:

$$\Phi_i(t; q) = x_{i\circ}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} x_{im} q^m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (34.4)$$

^۶Taylor Series

^۷Mth-Order Deformation Derivative

با انتخاب مناسب عملگر خطی کمکی L ، پارامتر کمکی $\hbar$ ، تابع کمکی $H_i(t)$ و مقدار اولیه $x_{i0}(t)$ سری (۳۴.۴) در $q = 1$ همگراست. بنابراین در $q = 1$ سری (۳۴.۴) به صورت زیر خواهد بود

$$\Phi_i(t; 1) = x_{i0}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} x_{im} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (35.4)$$

همچنین با جایگذاری (۳۰.۴) در (۳۵.۴) داریم:

$$x_i(t) = x_{i0}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} x_{im} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (36.4)$$

معادله (۳۶.۴) رابطه‌ای بین مقدار $x_{i0}(t)$ و جواب دقیق $x_i(t)$ به وسیله $x_{im}(t)$ ($m = 1, 2, \dots$) که مجهول هستند، فراهم می‌کند.

معادله تغییر حالت مرتبه بالا

بردار $\vec{x}_{im}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{x}_{im} = \{x_{i0}(t), x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{im}(t)\} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (37.4)$$

بدین منظور با مشتق‌گیری از معادله‌ی (۲۶.۴) نسبت به q داریم:

$$(\lambda - q)L\left(\frac{\partial \Phi_i(t; q)}{\partial q}\right) - L[\Phi_i(t; q) - x_{i0}(t)] = \hbar_i H_i(t) N[\Phi_i(t; q)] + q \hbar_i H_i(t) \frac{\partial N[\Phi_i(t; q)]}{\partial q} \quad (38.4)$$

با جایگذاری $q = 0$ در (۳۸.۴) و با توجه به روابط (۲۸.۴) و (۳۲.۴) داریم:

$$L[x_{i1}] = \hbar H_i(t) N[x_{i1}] \quad (39.4)$$

با m بار مشتق‌گیری از معادله‌ی (۲۶.۴) نسبت به q داریم:

$$\begin{aligned} & (\lambda - q)L\left[\frac{\partial^m \Phi_i(t; q)}{\partial q^m}\right] - mL\left[\frac{\partial^{m-1} \Phi_i(t; q)}{\partial q^{m-1}}\right] \\ & = m \hbar_i H_i(t) \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} + q \hbar_i H_i(t) \frac{\partial^m N[\Phi(t; q)]}{\partial q^m} \end{aligned} \quad (40.4)$$

همچنین با جایگذاری $q = 0$ در (۴۰.۴) و تقسیم عبارت بر $m!$ داریم:

$$L\left[\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi_i(t; q)}{\partial q^m} - \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \Phi_i(t; q)}{\partial q^{m-1}}\right]_{q=0} = \hbar_i H_i(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (41.4)$$

با استفاده از معادله (۴۱.۴) و رابطه‌ی (۳۲.۴)، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$L[x_{im}(t) - x_{im-1}(t)] = \hbar_i H_i(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (42.4)$$

هم‌اکنون تابع کمکی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (43.4)$$

همچنین

$$R_{im}(\vec{x}_{im-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (44.4)$$

بنابراین رابطه‌ی (۴۲.۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$L[x_{im}(t) - \chi_m x_{im-1}(t)] = \hbar_i H_i(t) R_{im}(\vec{x}_{im-1}(t)) \quad (45.4)$$

که به این معادله، معادله‌ی تغییر حالت مرتبه m گفته می‌شود.

۴.۴ روش آنالیز هموتوپي برای معادلات دیفرانسیل جبری کسری

دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید [۲۸]

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n), & 0 < \alpha_i \leq 1, \\ 0 = g((t, x_1, \dots, x_n)) & i = 1, 2, \dots, n-1, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (46.4)$$

با شرایط اولیه

$$x_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (47.4)$$

بدین ترتیب معادله تغییر حالت مرتبه صفر معادله‌ی (۴۶.۴) به صورت زیر می‌باشد

$$(1-q)L[\Phi_i(t; q) - x_{i0}(t)] = q\hbar_i H_i(t) [D_*^{\alpha_i} \Phi_i(t; q) - f_i(t, \Phi_1(t; q), \Phi_2(t; q), \dots, \Phi_n(t; q), \frac{d}{dt}\Phi_1(t; q), \frac{d}{dt}\Phi_2(t; q), \dots, \frac{d}{dt}\Phi_n(t; q))] \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (48.4)$$

$$(1-q)[\Phi_n(t; q) - x_{n0}] = -q\hbar_n H_n(t) [g(t, \Phi_1(t; q), \Phi_2(t; q), \dots, \Phi_n(t; q))]. \quad (49.4)$$

با شرایط اولیه

$$\Phi_i(0; q) = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (50.4)$$

با توجه به بردار $\vec{x}_{im}$ در رابطه‌ی (۳۷.۴) معادله‌ی تغییر حالت مرتبه m به صورت زیر می‌باشد

$$L_i[x_{im}(t) - \chi_m x_{i(m-1)}(t)] = \hbar_i H_i(t) R_{im}(\vec{x}_{i(m-1)}(t)) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (51.4)$$

$$x_{nm}(t) = \chi_m x_{n(m-1)}(t) + \hbar_n H_n(t) R_{nm}(\vec{x}_{n(m-1)}(t)). \quad (52.4)$$

با شرایط اولیه

$$x_{im}(\circ) = \circ, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (53.4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} R_{im}(\vec{x}_{i(m-1)}) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} [D_*^{\alpha_i} \Phi_i(t; q) - f_i(t, \Phi_1(t; q), \Phi_2(t; q), \dots, \Phi_n(t; q), \\ &\quad \frac{d}{dt} \Phi_1(t; q), \frac{d}{dt} \Phi_2(t; q), \dots, \frac{d}{dt} \Phi_n(t; q))] \Big|_{q=\circ} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (54.4) \\ R_{nm}(\vec{x}_{n(m-1)}) &= -\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} [g(t, \Phi_1(t; q), \Phi_2(t; q), \dots, \Phi_n(t; q))] \Big|_{q=\circ}. \end{aligned}$$

حال عملگر L_i^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L_i^* L_i[x_i(t)] = x_i(t) + K_i(t), \quad L_i L_i^* = I, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (55.4)$$

که I عملگر واحد می‌باشد. در یک حالت خاص، اگر $H_i(t) = 1$ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ قرار دهیم، معادله تغییر حالت مرتبه m به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} x_{im}(t) &= \chi_m x_{i(m-1)}(t) + \hbar_i L_i^*[R_{im}(\vec{x}_{i(m-1)}(t))] + K_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \\ x_{nm}(t) &= \chi_m x_{n(m-1)}(t) + \hbar_n R_{nm}(\vec{x}_{n(m-1)}(t)). \end{aligned} \quad (56.4)$$

۵.۴ مثال‌ها

مثال ۱.۴. معادله دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^\alpha x(t) - ty'(t) + x(t) - (1+t)y(t) = \circ, & \circ < \alpha \leq 1, \\ y(t) - \sin t = \circ, \end{cases} \quad (57.4)$$

با مقادیر اولیه‌ی

$$x(\circ) = 1, \quad y(\circ) = \circ, \quad (58.4)$$

در حالت $\alpha = 1$ جواب دقیق مسأله به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} x(t) &= e^{-t} + t \sin t, \\ y(t) &= \sin t, \end{cases} \quad (59.4)$$

ابتدا با تقریب اولیه‌ی زیر شروع می کنیم

$$x_t(\circ) = 1, \quad y_t(\circ) = \circ, \quad (60.4)$$

و عملگرها را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$L = D_*^\alpha, \quad L^* = J^\alpha. \quad (61.4)$$

با توجه به رابطه‌ی (54.4) می توانیم هموتوپی را به صورت زیر بسازیم

$$\begin{cases} R_{1m}(\vec{x}_{m-1}(t)) = D_*^\alpha x_{m-1}(t) - t y'_{m-1}(t) + x_{m-1}(t) - (1+t)y_{m-1}(t), \\ R_{2m}(\vec{y}_{m-1}(t)) = y_{m-1}(t) - (1-\chi_m) \sin t, \end{cases} \quad (62.4)$$

و معادله‌ی تغییر حالت مرتبه‌ی m برای $m \geq 1$ را به شکل زیر داریم:

$$\begin{cases} x_m(t) = \chi_m x_{m-1}(t) + \bar{h}_1 J^\alpha [R_{1m}(\vec{x}_{m-1}(t))], \\ y_m(t) = \chi_m y_{m-1}(t) + \bar{h}_2 R_{2m}(\vec{y}_{m-1}(t)), \end{cases} \quad (63.4)$$

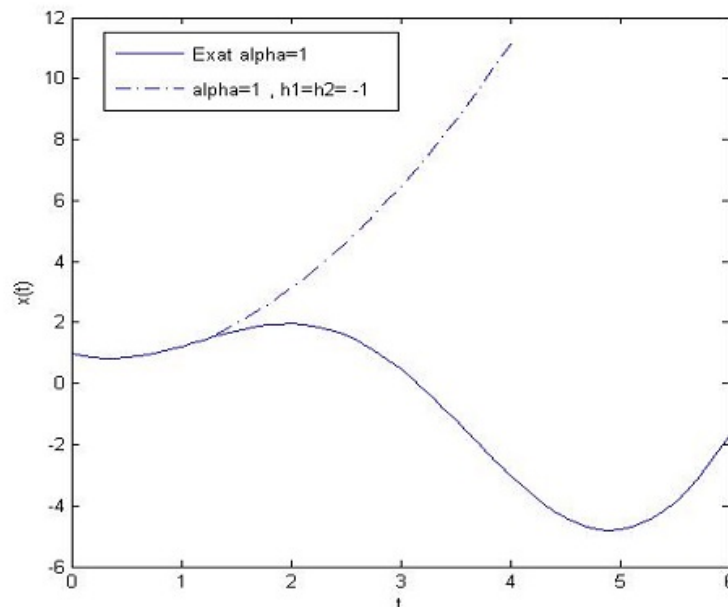
با جایگذاری (62.4) در (63.4) رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد

$$\begin{aligned} x_\circ(t) &= 1 \\ y_\circ(t) &= \circ \\ x_1(t) &= \bar{h}_1 J^\alpha(1) = \bar{h}_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ y_1(t) &= -\bar{h}_2 \sin t \\ x_2(t) &= (1+\bar{h}_1)x_1 - \bar{h}_1 J^\alpha(x_1 + \bar{h}_1 t \cos t + \bar{h}_2(1+t) \sin t) \\ y_2(t) &= -\bar{h}_2(1+\bar{h}_2) \sin t \\ &\vdots \end{aligned}$$

با ادامه این روند مجموعه جواب معادله (۵۷.۴) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}
 x(t) = & 1 + \frac{\bar{h}_1^4 + 4\bar{h}_1^3 + 6\bar{h}_1^2 + 4\bar{h}_1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha + \frac{2\bar{h}_1\bar{h}_2(\bar{h}_1^2 + \bar{h}_2^2 + \bar{h}_1\bar{h}_2) + 4\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + 6}{\Gamma(2+\alpha)} t^{\alpha+1} \\
 & + \left[\frac{\bar{h}_1^3(3\bar{h}_1^2 + 8\bar{h}_1 + 3)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{3\bar{h}_1^2 4^{-\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\frac{1}{4}+\alpha)} \right] t^{2\alpha} \\
 & + \frac{2\bar{h}_1\bar{h}_2(\bar{h}_1^2 + \bar{h}_2^2 + \bar{h}_1\bar{h}_2) + 4\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + 6}{\Gamma(3+\alpha)} t^{\alpha+2} \\
 & + \frac{2\bar{h}_1^3\bar{h}_2(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + 4)}{\Gamma(2+2\alpha)} t^{2\alpha+1} \\
 & + \frac{\bar{h}_1^3(3\bar{h}_1 + 4)}{\Gamma(1+3\alpha)} t^{3\alpha} - \frac{4\bar{h}_1\bar{h}_2(\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + 3)}{\Gamma(4+\alpha)} t^{\alpha+3} \\
 & + \frac{2\bar{h}_1^3\bar{h}_2(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + 4)}{\Gamma(3+2\alpha)} t^{2\alpha+2} \\
 & + \frac{2\bar{h}_1^3\bar{h}_2}{\Gamma(2+3\alpha)} t^{3\alpha+1} + \frac{\bar{h}_1^4}{\Gamma(1+4\alpha)} t^{4\alpha} + \dots \\
 y(t) = & -\bar{h}_2(\bar{h}_1^4 + 5\bar{h}_1^3 + 10\bar{h}_1^2 + 10\bar{h}_1 + 5) \sin t.
 \end{aligned}
 \tag{۶۴.۴}$$

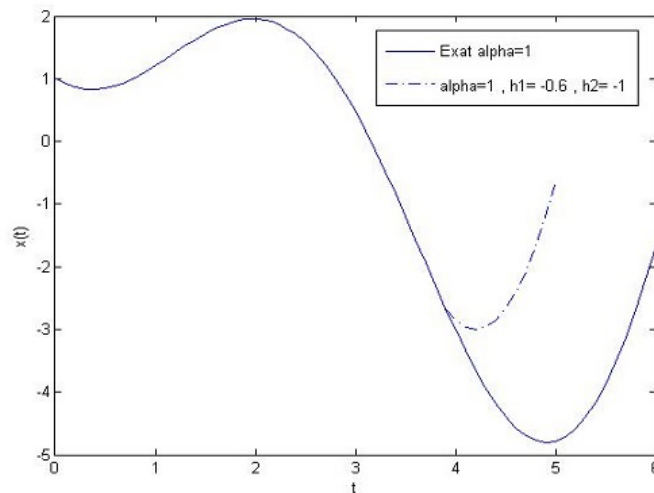
حال نمودار جواب $x(t)$ از دستگاه معادله دیفرانسیل کسری - جبری (۵۷.۴) را به ازای پارامتر کمکی $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ در مقادیر مختلف α در نمودارهای (۱.۴)، (۲.۴) و (۳.۴) نشان داده شده است.



شکل ۱.۴: نمودار جواب دستگاه (۵۷.۴) در $\alpha = 1$

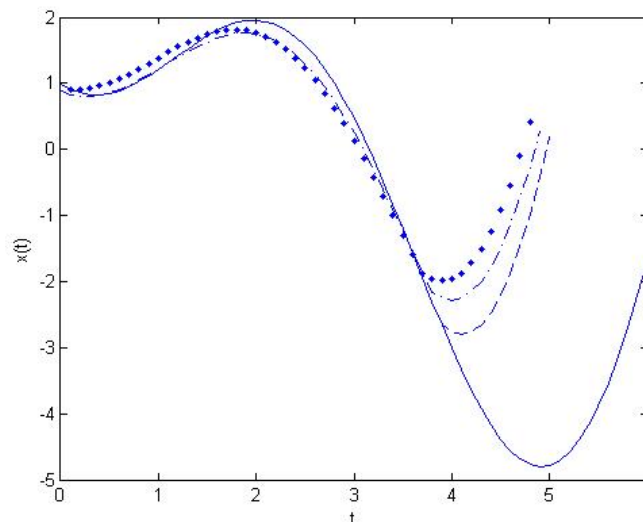
در نمودار (۱.۴) خط ممتد جواب دقیق و نقطه - خط جواب به ازای $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = -1$ در $\alpha = 1$

می باشد که نشان میدهد پارامترهای کمکی $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ برابر با ۱- انتخاب درستی برای رسیدن به جواب مسأله (۵۷.۴) نیست. در نمودار (۲.۴) با انتخاب مقادیر مناسب برای پارامترهای $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ به جواب دقیق مسأله نزدیک می شویم.



شکل ۲.۴: نمودار جواب دستگاه (۵۷.۴) در $\alpha = 1$

در نمودار (۲.۴) خط ممتد جواب دقیق و نقطه - خط جواب به ازای $\bar{h}_1 = -0.6, \bar{h}_2 = -1$ در $\alpha = 1$ می باشد.



شکل ۳.۴: نمودار جواب دستگاه (۵۷.۴)

نمودار (۳.۴) جواب دستگاه (۵۷.۴) را به ازای $\bar{h}_1 = -0.6, \bar{h}_2 = -1$ برای α های مختلف نشان می دهد.

مثال ۲.۴. معادله دیفرانسیل کسری - جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D_*^\alpha x(t) = -\mathfrak{Y}tx^\mathfrak{Y}(t) + x(t)y(t) - \mathfrak{I}, & 0 < \alpha \leq \mathfrak{I}, \\ y(t) = x(t)y(t) + t^\mathfrak{Y}, \end{cases} \quad (۶۵.۴)$$

با مقدار اولیه‌ی

$$x(0) = y(0) = \mathfrak{I}, \quad (۶۶.۴)$$

در حالت $\alpha = \mathfrak{I}$ جواب دقیق مسأله به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}+t^\mathfrak{Y}}, \\ y(t) = t^\mathfrak{Y} + \mathfrak{I}, \end{cases} \quad (۶۷.۴)$$

برای حل (۶۵.۴) به روش آنالیز هموتوپي، تقریب‌های اولیه‌ی $x_0(t) = \mathfrak{I}$, $y_0(t) = \mathfrak{I}$ را در نظر می‌گیریم. همچنین با توجه به عملگر خطی $L^* = J^\alpha$, $L = D_*^\alpha$ و رابطه‌ی (۵۴.۴) هموتوپي را به شکل زیر می‌سازیم

$$R_{\mathfrak{I}m}(\vec{x}_{m-\mathfrak{I}}(t)) = D_*^\alpha x_{m-\mathfrak{I}}(t) + \mathfrak{Y}t \sum_{i=0}^{m-\mathfrak{I}} x_i(t)x_{m-\mathfrak{I}-i}(t) - \sum_{i=0}^{m-\mathfrak{I}} x_i(t)y_{m-\mathfrak{I}-i}(t) + (\mathfrak{I} - \chi_m), \quad (۶۸.۴)$$

$$R_{\mathfrak{Y}m}(\vec{y}_{m-\mathfrak{I}}(t)) = y_{m-\mathfrak{I}}(t) - \sum_{i=0}^{m-\mathfrak{I}} x_i(t)y_{m-\mathfrak{I}-i}(t) - (\mathfrak{I} - \chi_m)t^\mathfrak{Y},$$

و معادله‌ی تغییر حالت مرتبه‌ی m برای $m \geq \mathfrak{I}$ را به شکل زیر داریم:

$$\begin{cases} x_m(t) = \chi_m x_{m-\mathfrak{I}}(t) + \bar{h}_\mathfrak{I} J^\alpha [R_{\mathfrak{I}m}(\vec{x}_{m-\mathfrak{I}}(t))], \\ y_m(t) = \chi_m y_{m-\mathfrak{I}}(t) + \bar{h}_\mathfrak{Y} R_{\mathfrak{Y}m}(\vec{y}_{m-\mathfrak{I}}(t)), \end{cases} \quad (۶۹.۴)$$

با جایگذاری (۶۸.۴) در (۶۹.۴) رابطه بازگشتی به صورت زیر خواهد بود

$$x_0(t) = \mathfrak{I}$$

$$y_0(t) = \mathfrak{I}$$

$$x_\mathfrak{I}(t) = \bar{h}_\mathfrak{I} J^\alpha(\mathfrak{Y}t) = \mathfrak{Y}\bar{h}_\mathfrak{I} \frac{t^{\alpha+\mathfrak{I}}}{\Gamma(\alpha+\mathfrak{Y})}$$

$$y_\mathfrak{I}(t) = -\bar{h}_\mathfrak{Y} t^\mathfrak{Y}$$

$$x_\mathfrak{Y}(t) = (\mathfrak{I} + \bar{h}_\mathfrak{I})x_\mathfrak{I} - \bar{h}_\mathfrak{I} J^\alpha((\mathfrak{Y}t - \mathfrak{I})x_\mathfrak{I} + \bar{h}_\mathfrak{Y} t^\mathfrak{Y})$$

$$y_\mathfrak{Y}(t) = -\bar{h}_\mathfrak{Y}(t^\mathfrak{Y} - x_\mathfrak{I})$$

$$\vdots$$

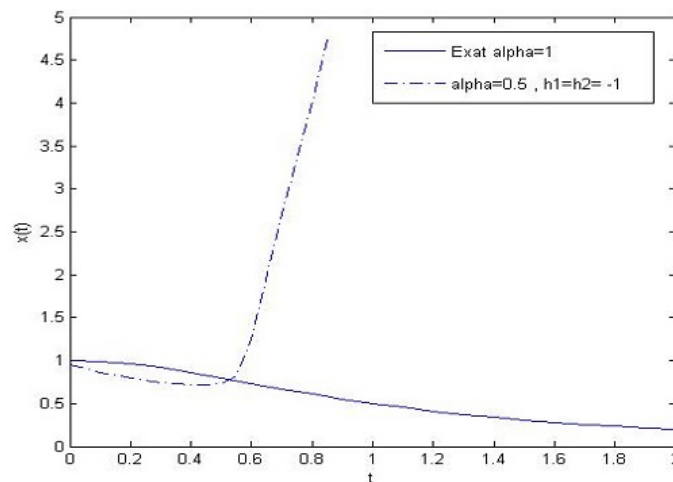
با ادامه این روند مجموعه جواب معادله (۶۵.۴) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 + \frac{2\bar{h}_1(\bar{h}_1 + 2)}{\Gamma(2 + \alpha)} t^{\alpha+1} - \frac{2\bar{h}_1^2}{\Gamma(2 + 2\alpha)} t^{2\alpha+1} + \frac{2\bar{h}_1\bar{h}_2}{\Gamma(3 + \alpha)} t^{\alpha+2} \\
 &\quad + \frac{8\bar{h}_1^2\Gamma(3 + \alpha)}{\Gamma(2 + \alpha)\Gamma(3 + 2\alpha)} t^{2\alpha+2} + \dots \\
 y(t) &= 1 - 2\bar{h}_1 t^2 - \frac{2\bar{h}_1\bar{h}_2}{\Gamma(2 + \alpha)} t^{\alpha+1} + \dots
 \end{aligned} \quad (70.4)$$

با قرار دادن $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = -1$ و همچنین $\alpha = 1$ در (۷۰.۴) داریم:

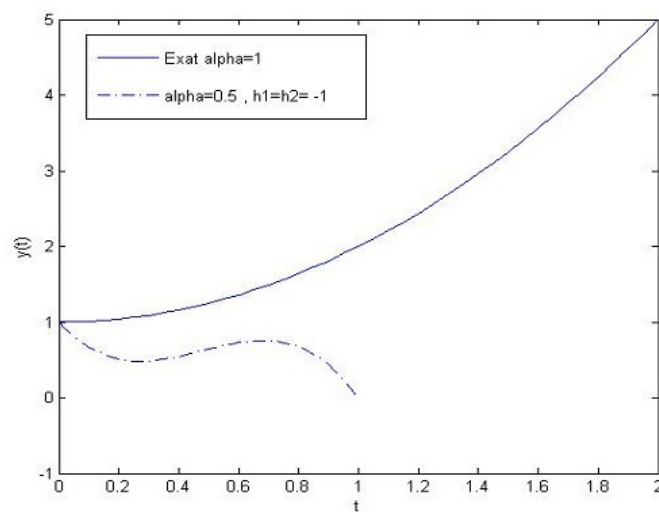
$$\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 + t^4 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}. \\ y(t) = 1 + t^2. \end{cases} \quad (71.4)$$

که همان جواب دقیق دستگاه بالاست. این بدان معنی است که بهترین مقدار برای پارامترهای کمکی $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ برابر است با $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = -1$. حال با توجه به پارامترهای کمکی مناسب جواب $x(t)$ و $y(t)$ از دستگاه (۶۵.۴) به ازای $\alpha = 0.5$ در نمودارهای (۴.۴) و (۵.۴) نشان داده شده است.



شکل ۴.۴: نمودار جواب دستگاه (۶۵.۴)

در نمودار (۴.۴) خط ممتد جواب دقیق دستگاه و خط - نقطه جواب دستگاه به ازای $\alpha = 0.5$ و پارامترهای $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = -1$ را نمایش می دهد.



شکل ۵.۴: نمودار جواب دستگاه (۶۵.۴)

در نمودار (۵.۴) خط ممتد جواب دقیق دستگاه و خط - نقطه جواب دستگاه به ازای $\alpha = 0.5$ و پارامترهای $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = -1$ را نمایش می‌دهد.

۶.۴ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه سه روش تغییر تکرارپذیر، تجزیه آدومین و آنالیز هموتویی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری با چند مثال مشابه ارائه شد. در مثال‌های ارائه شده در فصل ۲ و ۳ نتایج عددی بدست آمده به ازای مقادیر مختلف α نشان دهنده رفتار تقریباً یکسان این نتایج با جواب دقیق مسأله می‌باشد و یکی از مزایای آن‌ها که این دو روش را برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری معتبر می‌سازد، این است که نتایج عددی برای مسائل خطی و غیرخطی بدون خطی‌سازی بدست می‌آید. در فصل ۴ ساخت روش آنالیز هموتویی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری کسری ارائه شد. با یک مقایسه بین نمودار مثال روش هموتویی و دو روش قبلی نکته‌ای قابل توجه است و آن این‌که ما در روش هموتویی آزادی زیادی برای انتخاب پارامتر کمکی $\bar{h}$ داریم. همین نکته یکی از مزایای روش هموتویی را نسبت به دو روش دیگر نشان می‌دهد که می‌توان با انتخاب صحیح این پارامتر کمکی همگرایی به جواب دقیق در یک ناحیه بزرگتر اتفاق می‌افتد.

پیوست آ

کد matlab بخشی از مثال‌ها

کد متلب مثال (۳.۲)

```
clc
clear
al=0.5;
syms t
g=t^(al-1);
f1=-1+t*cos(t)+(t+1)*sin(t);
f=taylor(f1,10);
lg=laplace(g);
lf=laplace(f);
j=lg*lf;
jj=(1/gamma(al))*ilaplace(j);
x(1)=1;
t=0.1;
k=2;
x(2)=eval(jj);
for ii=1:17
k=k+1;
syms t
g=t^(al-1);
f=-jj;
```

```

lg=laplace(g);
lf=laplace(f);
j=lg*lf;
jj=(1/gamma(al))*ilaplace(j);
t=0.1;
x(k)=eval(jj);
end
sum(x)

```

کد متلب مثال (۴.۲) و (۴.۳)

```

clc
clear
al1=0.25;
al2=0.25;
syms t;
g1=t^2*cos(t)+(t^2+2*t)*sin(t);
tg1=taylor(g1);
g2=t*cos(t)-(t-1)*sin(t);
tg2=taylor(g2);
x(1)=1;
y(1)=1;
dy(1)=0;
j=t^(al1-1);
lj=laplace(j);
f=t-tg1;
lf=laplace(f);
lja=lf*lj;
ja=(1/gamma(al1))*ilaplace(lja);
f2=1+tg2;
j=t^(al2-1);
lj=laplace(j);
lf2=laplace(f2);
lja2=lf2*lj;

```

```
ja2=(1/gamma(al2))*ilaplace(lja2);

t=0.1;
x(2)=eval(ja);
y(2)=eval(ja2);
k=2;
for ii=1:10
syms t
dja2=diff(ja2);
t=0.1;
dy(k)=eval(dja2);
syms t
f=t*dja2-ja+(1+t)*ja2;
lf=laplace(f);
j=t^(al1-1);
lj=laplace(j);
lja=lf*lj;
ja=(1/gamma(al1))*ilaplace(lja);
f2=ja2;
lf2=laplace(f2);
j=t^(al2-1);
lj=laplace(j);
lja2=lf2*lj;
ja2=(1/gamma(al2))*ilaplace(lja2);
t=0.1;
x(k+1)=eval(ja);
y(k+1)=eval(ja2);
k=k+1;
end
sum(x)
sum(y)
```

```

clc
clear
a1=0.5;
a2=0.5;
x(1)=1;
y(1)=1;
z(1)=1;
y(2)=1;
syms t
zz=1-((t^a2)/gamma(a2+1));
xx=1+((t^a1)/gamma(a1+1))+((t^(a1+a2))/gamma(a1+a2+1));
t=0.1;
z(2)=eval(zz);
x(2)=eval(xx);
k=2;
for ii=1:5
syms t
yy=xx*xx;
fz=-zz;
lfz=laplace(fz);
j2=t^(a2-1);
lj2=laplace(j2);
ljz=lj2*lfz;
zz=1+(1/gamma(a2))*ilaplace(ljz);
fx=xx-xx*zz+1;
lfx=laplace(fx);
j1=t^(a1-1);
lj1=laplace(j1);
ljx=lj1*lfx;
xx=1+(1/gamma(a1))*ilaplace(ljx);
t=0.1;
y(k+1)=eval(yy);

```

YY

```
z(k+1)=eval(zz);
```

```
x(k+1)=eval(xx);
```

```
k=k+1;
```

```
x
```

```
y
```

```
z
```

```
end
```

- [1] George Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, Journal of mathematical analysis and applications **135** (1988), no. 2, 501–544.
- [2] Ji-Huan He, *Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **167** (1998), no. 1, 57–68.
- [3] Ji-Huan He, *Generalized variational principles in fluids*, Science & Culture Publishing House of China, Hong Kong (2003).
- [4] He.Ji-Huan, *Variational iteration method—some recent results and new interpretations*, Journal of computational and applied mathematics **207** (2007), no. 1, 3–17.
- [5] MM Hosseini, *Adomian decomposition method for solution of differential-algebraic equations*, Journal of computational and applied mathematics.
- [6] He . Ji-Huan, *Non-perturbative methods for strongly nonlinear problems*, 2006.
- [7] He. Ji-Huan, *Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **167** (1998), no. 1, 69–73.
- [8] He Ji-Huan, *Variational iteration method—some recent results and new interpretations*, Journal of computational and applied mathematics **207** (2007), no. 1, 3–17.

- [9] Sh J Liao, *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*, Ph.D. thesis.
- [10] Shi-Jun Liao, *A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters—ii. an application in fluid mechanics*, International Journal of Non-Linear Mechanics **32** (1997), no. 5, 815–822.
- [11] Shijun Liao, *Homotopy analysis method: a new analytical technique for nonlinear problems*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **2** (1997), no. 2, 95–100.
- [12] Adam Loverro, *Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer*, Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering (2004).
- [13] Francesco Mainardi, *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, no. 378, Springer Verlag, 1997.
- [14] Kenneth S.. Miller and Bertram Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, 1993.
- [15] Shaher Momani and Zaid Odibat, *Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order*, Physics Letters A **365** (2007), no. 5, 345–350.
- [16] Momani.Shaher and Odibat. Zaid, *Numerical approach to differential equations of fractional order*, Journal of Computational and Applied Mathematics **207** (2007), no. 1, 96–110.
- [17] Katsuyuki Nishimoto and Japan Mathematician, *An essence of nishimoto's fractional calculus:(calculus in the 21st century): Integrations and differentiations of arbitrary order*, Descartes Press, 1991.
- [18] Zaid Odibat and Shaher Momani, *Modified homotopy perturbation method: application to quadratic riccati differential equation of fractional order*, Chaos, Solitons & Fractals.

- [19] ZM Odibat and Shaher Momani, *Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation **7** (2006), no. 1, 27–34.
- [20] KB Oldham and J Spanier, *The fractional calculus.*, 1974.
- [21] Keith B. Oldham and Jerome Spanier., *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.*
- [22] Igor Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, vol. 198, Academic press, 1998.
- [23] Liao. Shi-Jun, *A simple approach of enlarging convergence regions of perturbation approximations*, Nonlinear Dynamics **19** (1999), no. 2, 93–111.
- [24] Liao . Shijun, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*, CRC press, 2003.
- [25] Liao. Shijun, *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*, Ph.D. thesis, Ph. D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [26] Abdul-Majid Wazwaz, *A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators*, Applied Mathematics and Computation **111** (2000), no. 1, 33–51.
- [27] Odibat. ZM and Momani. Shaher, *Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation **7** (2007), 27–34.
- [28] Mohammad Zurigat, Shaher Momani, and Ahmad Alawneh, *Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic–differential equations by homotopy analysis method*, Computers & mathematics with applications **59** (2010), no. 3, 1227–1235.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Initial	اولیه
Parameter	پارامتر
Function	تابع
Functional	تابعک
Adomian Decomposition	تجزیه آدومین
Analytical	تحلیلی
Correction	تصحیح
Approximate	تقریب
Iteration	تکرار
Topology	توپولوژی
Stationary	ثابت
Algebraic	جبری
Solution	جواب
Polynomial	چندجمله‌ای
Calculus	حسابان
Linear	خطی
System	دستگاه
Exact	دقیق
Arbitrary	دلخواه
Sequence	دنباله
Method	روش
Series	سری
Multiplier	ضرایب
Integer	عدد صحیح
Numerical	عددی

Operator	عملگر
Non-Linear	غیرخطی
Space	فضا
Formula	فرمول
Physical	فیزیکی
Fractional	کسری
Auxiliary	کمکی
Lagrange	لاگرانژ
Unknown	مجهول
Order	مرتبه
Zero-Order	مرتبه صفر
Boundary	مرزی
Derivative	مشتق
Value	مقدار
Differential Equation	معادلات دیفرانسیل
Inverse	معکوس
Component	مؤلفه
Inhomogeneous	ناهمگن
Variational	وردشی
Convergence	همگرایی
Homogeneous	همگن
Homotopy	هموتوپ

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adomian Decomposition	تجزیه آدومین
Algebraic	جبری
Analytical	تحلیلی
Approximate	تقریب
Arbitrary	دلخواه
Auxiliary	کمکی
Boundary	مرزی
Calculus	حسابان
Component	مؤلفه
Convergence	همگرایی
Correction	تصحیح
Derivative	مشتق
Differential Equation	معادلات دیفرانسیل
Exat	دقیق
Formula	فرمول
Fractional	کسری
Function	تابع
Functional	تابعک
Homogeneous	همگن
Homotopy	هموتوپ
Inhomogeneous	ناهمگن
Initial	اولیه
Integer	عدد صحیح
Inverse	معکوس
Iteration	تکرار

Lagrange	لاگرانژ
Linear	خطی
Method	روش
MultiPlier	ضرایب
Non-Linear	غیرخطی
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Order	مرتبه
Parameter	پارامتر
Physical	فیزیکی
Polynomial	چند جمله ای
Sequence	دنباله
Series	سری
Solution	جواب
Space	فضا
Stationary	ثابت
System	دستگاه
Topology	توپولوژی
Unknown	مجهول
Value	مقدار
Variational	وردشی
Zero-Order	مرتبه صفر

نمایه

آ

آنالیز هموتوپی، ۵، ۵۲

ا

انتگرال ریمان - لیوویل، ۹، ۱۰

انتگرال و مشتق کسری، ۳

اندیس، ۴۱

پ

پارامتر هموتوپی، ۵۳

ت

تابع اصلاحگر، ۲۲

تابع بتا، ۳، ۷

تابع دیگاما، ۱۶

تابع پله‌ای هویساید، ۱۶

تابع گاما، ۳، ۶

تابعک تصحیح، ۲۱، ۲۶

تابع نمایی، ۸

تبدیل لاپلاس معکوس، ۱۶، ۱۹

تبدیلات لاپلاس، ۱۶

تابع میتاگ - لفلر، ۸

توپولوژی، ۵۲

چ

چندجمله‌ای‌های آدومین، ۴۰

ح

حساب کسری، ۱

ر

روش تجزیه آدومین، ۵، ۴۰

روش تغییر تکرارپذیر، ۵، ۲۱

روش‌های نیمه تحلیلی، ۵

ض

ضرایب لاگرانژ، ۲۱

ع

عملگر خطی، ۲۶، ۴۰

عملگر غیرخطی، ۲۶، ۴۰

ف

فرمول کوشی، ۹

ک

کانولوشن، ۸

م

متغیر محدود، ۲۵

مرتبه نمایی، ۱۶

مشتق کسری ریمان - لیوویل، ۱۰

مشتق کسری کاپوتو، ۹، ۱۰

مشتق کسری گرانولد - لتنیکف، ۹

معادلات تغییر یافته‌ی مرتبه صفر، ۵۳

معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری، ۲

معادلات دیفرانسیل، ۳

معادلات دیفرانسیل جبری، ۳

معادلات دیفرانسیل خطی، ۵

معادلات دیفرانسیل غیر خطی، ۵

معادلات دیفرانسیل - جبری، ۴

معادله دیفرانسیل اویلر - لاگرانژ، ۲۴

معادله دیفرانسیل جزئی، ۵

معادله دیفرانسیل معمولی، ۴

و

وردشی، ۳۰

Aabstract

In recent years, much research has been focused on the numerical solution of differential-algebraic equations by semi-analytical methods. In this thesis, semi-analytical suitable methods for fractional differential-algebraic equations were checked. Some of these methods are Variational Iteration method, Adomian Decomposition method and Homotopy analysis method.

Most fractional differential-algebraic equations do not have exact analytic solution and classical methods for solving these equations are very complex and in some cases are impossible, so we try to obtain approximate solutions of fractional differential-algebraic equations with semi-analytical methods.

The first chapter introduces the basic concepts of differential equations of order fractional. Variational iteration methods are introduced in details and its use of fractional differential-algebraic equations are expressed in chapter two, Then we provide a numerical example at the end of the second chapter. In the third chapter, adomian decomposition method is introduced and application of this method in differential differential-algebraic equations with a few examples are indicated. In the fourth chapter, we describe basic concepts of Homotopy analysis method, then we introduce the Homotopy analysis in the fractional differential-algebraic equations, and this chapter is ended with some numerical examples.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Solving Of Fractional Differential-Algebraic Equation By Semi-Analytical Methods

Supervisor
Dr.Mehdi Ghovatmand

Advisor
Dr.Hojjat Ahsani

by
Seyyed Milad Hosseini

February 2015