دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

بررسی روش‌های استدلال و اثبات در ترکیبیات و گراف

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

دانشجو

خدیجه شفیعی توندری

۱۳۹۳

پروردگارا:

نه می توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:

به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم، و یا مردانگی و سخاوت و مهربانی اش...

تقدیم به دامان سبز مادرم:

نازنینی که سراسر زندگی اش درس ایثار و فداکاری است.

و تقدیم به خواهر و برادر عزیزم

سپاس گزاری...

شکر و سپاس خدای را که بزرگترین امید و یاور در لحظه لحظه زندگیست.

بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید. ابتدا از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و قطعاً بدون راهنمایی‌های ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید، کمال سپاس را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر جعفری‌راد و آقای دکتر علیشاهی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از دیگر اساتید ارجمند، آقایان دکتر علی مس‌فروش، و دکتر محمدرضا ربیعی، که همواره از راهنماییشان استفاده نمودم، قدردانی نمایم.

خدیجه شفیعی توندری
۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **خدیجه شفیعی توندری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی روش‌های استدلال و اثبات در ترکیبیات و گراف** ، تحت راهنمایی **دکتر صادق رحیمی شعرباف** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

خدیجه شفیعی توندری
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

این پایان‌نامه با هدف انجام یک تحقیق تحلیلی در روش‌های اثبات در ترکیبیات و گراف انجام شده‌است. برای این منظور کتاب‌های متعدد درسی در زمینه ترکیبیات و گراف مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرارگرفت. بعضی از هدف‌های موردنظر به شرح ذیل می‌باشد که در قالب پنج فصل این پایان‌نامه ارائه گردیده است.

در فصل اول، ما یک دیدگاه کلی از مفاهیم و روش‌های اثبات در ریاضیات، به‌ویژه در ترکیبیات را عرضه می‌کنیم. فصل دوم، مربوط به آشنایی با موضوع‌ها و تکنیک‌های استدلال ترکیبیاتی می‌باشد. در فصل بعد، ما شناختی از ویژگی‌های ساختاری را بیان می‌کنیم و برخی از مسائل شمارشی در این رابطه را بررسی می‌کنیم. سپس ما در فصل بعدی، برخی از مسائل وجودی در اثبات‌های ترکیبیاتی را بررسی می‌کنیم. سرانجام، برخی از کاربردهای ترکیبیات در علوم رایانه و الگوریتم‌ها در این متن ارائه شده، معرفی خواهد شد.

کلمات کلیدی:

اثبات، روش استقرا، برهان خلف، اثبات وجودی، اثبات با ساختن، ترکیبیات، نظریه گراف، اصل شمول و عدم شمول، توابع مولد، استدلال، اثبات ترکیبیاتی، جایگشت، مثال نقض، مسائل شمارش، الگوریتم، توابع مولد.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

مقدمه و تعاریف اولیه

۱.۱ مقدمه

ضرورت طرح موضوع

امروزه دانش بشری بیشتر به‌صورت جزءنگری و محصول‌محور، در حوزه تامین نیازهای فیزیکی بشر متمرکز شده‌است. در این رابطه حوزه علوم شناختی از حوزه علوم تجربی مجزی شده است. اما ماهیت رشته ریاضی به گونه‌ای است که در آن، ارتباط بین این دو حوزه (حوزه ابزاری و حوزه شناختی علم) بیشتر از سایر رشته‌ها وجود دارد. در همین رابطه تعداد ریاضیدانانی که در حوزه فلسفه نیز صاحب‌نام بوده‌اند، کم نبوده و نیستند. هدف از طرح موضوع این پایان‌نامه، توجه بیشتر دانشجویان رشته ریاضی (بخصوص گراف و ترکیبیات) با روش‌های کلی اثبات در ریاضیات، شناخت روال‌ها و ساختارهای ترکیبیاتی و روش‌های اثبات، همچنین آشنایی با ارتباط ترکیبیات و گراف با سایر موضوعات ریاضی است. در این پایان‌نامه تلاش شده‌است که ویژگی‌های بعضی از شاخه‌های اصلی ریاضی مانند: جبر، آنالیز، هندسه و ترکیبیات مطالعه گردد. در این رابطه وجود ارتباط منظمی بین ساختارهای ریاضی و روش‌های اثبات مورد بررسی قرار گرفته‌است.

شیوه‌ی پژوهش

یک تفاوت عمده موضوع این پایان‌نامه با سایر موضوعات، عام و وسیع بودن حوزه شمول موضوع آن است. در این رابطه مقالاتی مستقیم و مرتبط با موضوع وجود نداشت و بیشتر مطالب از کتاب‌های گوناگون به صورت تحلیلی استخراج شده‌است. روش تحقیق، به شیوه مطالعه کتابخانه‌ای (یک نوع شیوه تحقیق است.) و به صورت تحلیلی و ابتکاری می‌باشد. نتایج این تحقیق می‌تواند کمک موثری در شناخت دانشجویان از ماهیت ریاضیات و به‌خصوص در شاخه‌ی گراف و ترکیبیات باشد. بعضی از محورهای شناختی این موضوع به شرح ذیل می‌باشد:

الف: شناخت روش‌های کلی اثبات ریاضی.

ب: شناخت بیشتر از ساختارهای جبر و آنالیز و ترکیبیات.

ج: ارتباط ترکیبیات با سایر موضوعات ریاضی.

د: آشنایی با روال‌ها و ساختارهای ترکیبیاتی.

و: شیوه‌های اثبات ترکیبیاتی.

در رابطه با بررسی شیوه‌های اثبات قضیه‌ها در جبر، تعداد ۳۳۵ قضیه از کتاب درسی جبر نوشتهٔ توماس. دبلیو. هانگرفورد [۱] و در رابطه با شیوه‌های اثبات قضیه‌ها در آنالیز تعداد ۲۰۸ قضیه از کتاب درسی اصول آنالیز ریاضی نوشتهٔ والتر رودین [۲] مورد مطالعه قرار گرفت و صورت برخی از این قضیه‌ها با توجه به شیوه‌های روش اثبات آن‌ها در جداول مجزی آورده شده‌است. همچنین در رابطه با بررسی ساختارهای ترکیبیاتی در کتاب درسی ریاضیات گسسته و ترکیبیات رالف گریمالدی و کتاب مبانی ترکیبیات نوشته بردلی‌جکسون - دمیتری تورو [۳] مورد مطالعه قرار گرفت و نتایج آن استخراج و تدوین گردید. در این پایان‌نامه در مجموع حدود ۳۰ جلد کتاب مستقیما مورد استفاده و مطالعه قرار گرفته است. امید است که نتایج این تحقیق، مورد استفاده دانشجویان قرار گیرد، و هم‌چنین اساتید محترم با ارائه نقطه نظرات سازنده خود، نقایص موضوع را تکمیل نمایند.

۲.۱ علوم ریاضی و موضوع ریاضیات

موضوع ریاضیات، بررسی انواع رابطه‌های کمی و انواع ارتباط‌های بین کمیات است. در گذشته ریاضیات به دو شاخه عمده تقسیم می‌شد: شاخه‌ای که با کمیت منفصل سروکار داشت، حساب نامیده می‌شد و شاخه دیگر آن به نام هندسه، کمیت متصل را موضوع بحث خود قرار می‌داد. به مرور شاخه‌های دیگر ریاضی از دو شاخه مزبور پدید آمدند و در یکدیگر چنان آمیختند که گاهی تمایز بین آن‌ها میسر نمی‌باشد. نخستین بار اقلیدس، [۴] دانشمند یونانی هندسه را به صورت یک دستگاه قیاسی [۵] عرضه داشت و تا پیش از چند قرن اخیر آن‌را کامل‌ترین نمونه یک دستگاه قیاسی می‌شناختند، اما به دنبال کوشش‌هایی که برای اثبات اصل معروف توازی به‌کار رفت (که ریاضی‌دانان ایرانی، به‌ویژه خیام، نقش به‌سزایی داشتند) به عرضه کردن هندسه‌های نااقلیدسی انجامید، ریاضیدانان بر آن شدند که هندسه را با روش اصل موضوعی [۶] از نو بنا نهند که از هیلبرت، ریاضی‌دان آلمانی می‌توان به عنوان پیش‌گام آن‌ها نام برد. به موازات آن، ریاضی‌دانان دیگری تلاش کردند که حساب را با روش اصول موضوعی به صورت یک دستگاه قیاسی بیان کنند که پئانو، ریاضی‌دان ایتالیایی را باید سردسته آن‌ها دانست. کانتور [۷] ریاضی‌دان آلمانی، از راه ارائه نظریه مجموعه‌ها سعی کرد که همه ریاضیات را به‌طور واحد در یک

[۱] Thomas. w. Hangrford

[۲] Walter Rudin

[۳] Bradley.Jackson-Dmitry Toro

[۴] Euclid

[۵] parable system

[۶] axiom of choice

[۷] Contour

دستگاه بیان کند. اختلاف نظرهای ریاضیدانان مربوط به اساس و زیربنای ریاضیات است. همه آنان در یک موضوع اتفاق نظر دارند و آن، چگونگی اثبات قضیه‌های ریاضی است که همان استدلال ریاضی [۸] نامیده می‌شود. [۲۶]
ریاضیات، علوم کمیت و مقادیر و به‌عبارت دیگر، علوم اندازه‌گیری غیرمستقیم مقادیر است و شامل حساب توابع و جبر و حساب و هندسه است. [۲۲]

کمیت و مقدار

از این لحاظ که برای تحقیق هر موضوع باید روش خاصی در پیش گرفت، و چگونگی روش هر علمی بستگی به موضوع آن دارد، پس برای شناختن روش یک علم باید ابتدا موضوع آن را شناخت. موضوع علوم ریاضی کمیت و مقادیر است. کلمات کمیت و مقدار، چون بسیط و ساده‌اند، غیر قابل تعریف می‌باشند ولی با کمی تامل می‌توان تصور واضحی درباره آن‌ها یافت. به این ترتیب که کمیت، در مقابل تصور کیفیت قرار دارد و اختلاف میان سرخ و سبز، و بین گرم و سرد، و میان لذت و الم، اختلاف کیفی است، درصورتی‌که اختلاف بین یک نارنج و دو نارنج، و یا میان یک و دو، اختلاف از حیث کمیت است.
اما مقصود از مقدار، آن چیزی است که قابل افزایش و نقصان باشد یعنی افزایش و نقصان، فقط در مقدار یک چیز قابل تصور است، به عنوان مثال یک شکل هندسی، و یا یک عدد را مقدار می‌نامند. می‌توان با تعریفی که از موضوع ریاضیات شد روشن‌تر بیان کرد که ریاضیات عبارت است از اندازه گرفتن مقادیر، ولی "اگوست کنت" خاطر نشان ساخته است که این تعریف، با این‌که صحیح است، کافی نیست زیرا که با وسایل عملی نیز می‌توان این منظور را برآورد، چنان‌که مثلا با انطباق خطی بر روی خط دیگر آن‌ها را اندازه می‌گیریم و حال آن‌که ریاضیات نه یک فن است و نه مجموعه وسایل عملی، بلکه در عالی‌ترین درجه علم قرار گرفته است.
بنابراین می‌توان این تعریف را به این طور تکمیل کرد که ریاضیات اندازه غیر مستقیم مقادیر است و همان‌طور که اگوست کنت گفته است "سعی ریاضی‌دان مصروف است به تعیین بعضی از مقادیر بر حسب روابط دقیقی که میان آن‌ها موجود است" بدین وجه ریاضیات همان برقرارکردن روابط و تغیرات متناظره است میان مقادیر، و همین امر است که آن‌را از فن اندازه‌گیری، ممتاز ساخته و علمیّت آن را محرز می‌نماید. [۲۲]

۳.۱ روش ریاضیات

روش ریاضیات [۹] ، این‌گونه مشخص می‌شود که با وضع چند اصل در ابتدای آن، یک سلسله قضیه‌هایی را که منطقا از آن برمی‌خیزد، می‌توان استنتاج [۱۰] کرد. پس ابتدا باید دید که این اصول چیست و سپس اینکه قیاس [۱۱] و یا به عبارت دیگر این استدلال استنتاجی چگونه تشکیل می‌شود.

[۸] mathematics argument
[۹] conclusion
[۱۰] deduction
[۱۱] argument

اما اصل‌هایی را که در ابتدای ریاضیات قرار می‌دهند عبارتست از ''تعاریف''[۱۲] و ''علوم متعارفه'' [۱۳]. و آنچه در هندسه به‌طور خاص به‌کار برده می‌شود عبارتست از ''اصول موضوعه'' [۱۴] یا یک اصل موضوع. [۲۲]

* **ریاضیات در فرهنگ دانشگاهی جدید وبستر**[۱۵]:

ریاضیات عبارت است از «علمی که از نسب دقیق موجود بین کمیات یا مقادیر [۱۶] و اعمال [۱۷] و روش‌هایی که توسط آن‌ها و مطابق با این نسب کمیات مورد جستجو از کمیات معلوم یا مفروض دیگر، استنتاج‌پذیراند، [۱۸] گفتگو می‌کند.» [۱۳]

** **تعریف ریاضیات در فرهنگ ریاضی جیمز**[۱۹]:

در فرهنگ ریاضی، (جیمز) ریاضیات به‌طور ساده عبارتست از: « بررسی منطقی شکل[۲۰]، ترتیب[۲۱] و کمیت». [۱۳]

۴.۱ تعریف بعضی از اصطلاحات مرتبط با استدلال‌های ریاضی

تعریف ۱.۴.۱. نظریه[۲۲]: گزاره‌ای اثبات نشده می‌باشد که درست تلقی می‌شود.
هنگامی‌که یک نظریه اثبات شد، می‌توان از آن به عنوان اساس و پایه اثبات گزاره‌های بعدی استفاده کرد.[۷]

تعریف ۲.۴.۱. لم: به یک تئوری لم [۲۳] گفته می‌شود، هنگامی‌که به عنوان وسیله‌ای برای اثبات تئوری دیگر استفاده شود. [۷]
یا به بیان دیگر: در بعضی موارد یک مساله به آن دلیل ثابت می‌شود که در اثبات مساله‌های دیگر کمک‌کننده است، به این مساله‌ها **لم** می‌گویند. [۲۵]

هم‌چنین می‌توان بیان کرد که، در اثبات یک قضیه پیچیده، شخص ممکن است فاقد حقایقی باشد که باید، پیش از آن که اقدام به اثبات آن قضیه شود، محقق شوند. چنین نتایج ثانویه‌ای، با این‌که در استفاده اولیه‌شان به عنوان کمکی در اثبات قضیه اصلی به‌کار می‌روند، می‌توانند به‌صورت قضیه در نظر گرفته شوند. ریاضی‌دانان چنین قضیه‌های فرعی را **لم** می‌نامند. [۱۳]

---

[۱۲] definitions

[۱۳] Axiomes

[۱۴] Postuiats

[۱۵] Webster's

[۱۶] quantities or magnitudes

[۱۷] operations

[۱۸] deducible

[۱۹] jemz

[۲۰] shape

[۲۱] arrangement

[۲۲] suggestion

[۲۳] lemma

تعریف ۳.۴.۱. گزاره: هر جمله خبری را که یا درست باشد، و یا نادرست (و نه هر دو) یک گزاره [۲۴] می‌نامند. [۷] هم‌چنین، تابعی که خروجی آن درست، یا نادرست باشد را گزاره می‌نامند. [۲۵]

تعریف ۴.۴.۱. قضیه: [۲۵] صرف‌نظر از صوری یا غیر صوری بودن نتیجه‌ای که درستی آن به اثبات رسیده است یک قضیه نامیده می‌شود که در یک اثبات کاملا رسمی در خط آخر می‌آید و کل اثبات نشان می‌دهد که چگونه از اصل‌ها به تنهایی و به وسیله قوانین استنتاج، به‌دست می‌آید. [۷]
بعبارت دیگر: گزاره‌هایی که یا درست هستند یا نادرست، اما نه هردو قضیه نامیده می‌شوند. یک قضیه یک مساله ریاضی است که درستی آن اثبات شده باشد. به‌طور معمول به مساله‌هایی که از اهمیت خاصی برخوردار باشند قضیه گفته می‌شود. [۱۳]

تعریف ۵.۴.۱. نتیجه: [۲۶] بعضی از اوقات اثبات یک مساله باعث می‌شود که به‌راحتی، درست بودن مطلب دیگری نیز مشخص شود، به این مطالب نتیجه می‌گویند. [۲۵]

تعریف ۶.۴.۱. اصل[۲۷]:
گزاره‌ای است که نیاز به اثبات ندارد و یا اثبات نمی‌شود. ریاضی‌دان‌ها به‌طور معمول مفروضات اساسی ریاضی را آکسیوم یا اصل می‌نامند. [۷]

گرچه هر مجموعه از اصول را می‌توان در توسعه یک دستگاه ریاضی به‌کار برد، اما این اصول نباید خود-متناقض [۲۸] باشند، و این کار ممکن است در مورد مجموعه خاصی از اصول دارای اهمیت، شرط کاملا مشکلی باشد. از این گذشته، مجموعه اصول نباید شامل اصولی که مستلزم اصول دیگرند باشند. به عنوان مثال، فرض کنید که کار با چندین اصل که از آن‌ها دو اصل A و B خاصیت $A \to B$ را برقرار می‌کنند آغاز شود. اگر قضیه C از B منتج شود، یعنی $B \Rightarrow C$ در این صورت البته $A \Rightarrow C$. بنا به این دلیل، باید B از A اثبات شود و به عنوان اصل داخل نشود. [۱۳]

تعریف ۷.۴.۱. علامت‌گذاری[۲۹]: در زمینهٔ خاص، مشخص کردن علایم خاصی که معانی مخصوص داشته باشند علامت‌گذاری
نامیده می‌شود. [۱۳]

تعریف ۸.۴.۱. استدلال راهیابانه: استدلالی است که نه به عنوان قطعی ونهایی، بلکه تنها به عنوان موجه‌نما و موقتی در نظر گرفته می‌شود و هدف آن کشف راه حل، مساله حل کردنی است. استدلال راهیابانه، اغلب بر پایه استقرا یا تمثیل بنا می‌شود. [۱۰]

تعریف ۹.۴.۱. تعمیم[۳۰]: توسعه و گسترش یک حکم از حالت خاص، به حالت کل است. به‌عبارت دیگر، گذشتن از ملاحظه یک دسته محدود به ملاحظه‌ی دسته فراگیرتری است که آن دسته محدود را نیز شامل می‌شود. [۱۰]

---
[۲۴] predicate
[۲۵] theorem
[۲۶] corollary
[۲۷] axiom
[۲۸] self-contradictory
[۲۹] notation
[۳۰] generalization

تعریف ۱۰.۴.۱. تمثیل: گونه‌ای از شباهت است که چیزهای همانند و مشابه در بعضی از روابط در قسمت‌های متناظر با یکدیگر توافق دارند. [۱۰]

تعریف ۱۱.۴.۱. تخصیص[۳۱]: گذشتن از ملاحظه‌ی دسته‌ای از چیزها به دسته‌ای کوچک‌تر، یا تنها به یک موضوع و شی مندرج در آن دسته است. [۱۰]

در ریاضیات همانند علوم فیزیکی از مشاهده و استنتاج منطقی برای اکتشاف قوانین کلی استفاده می‌شود. ولی در اینجا تفاوتی که احساس می‌شود این است که، در علوم فیزیکی، ملاک قدرت و اعتباری بالاتر از مشاهده و استنتاج وجود ندارد، ولی در ریاضیات چنین قدرت و اعتباری وجود دارد و آن **اثبات دقیق** است. [۱۰]

استدلال ریاضی، همان روش قیاس و استنتاج منطقی است که گاه صورت تحلیلی و گاه صورت تالیفی (ترکیبی) می‌گیرد. قاعده‌های مختلف استنتاج در قالب مفاهیم اختصاصی ریاضی، استدلال ریاضی را تشکیل می‌دهند. مهم‌ترین این قاعده‌ها عبارتند از:

۱. استقرا ریاضی
۲. برهان مستقیم
۳. برهان خلف
۴. برهان با استفاده از لم
۵. برهان عکس نقیض
۶. قاعده تبدیل متغیر
۷. برهان از راه تعمیم
۸. برهان با کمک فرمول
۹. برهان احتمالاتی
۱۰. برهان ترکیباتی
۱۱. برهان غیر تمثیلی و ...[۲۶]

در فصل بعدی، دربارهٔ برخی از آن‌ها توضیحاتی ارائه می‌شود.
در آخرین بخش از این فصل، برخی تعاریف از گراف بیان می‌شود که مورد نیاز برای موضوع مورد بحث در فصل ۴ می‌باشند.

[۳۱] allecation

تعریف ۱۲.۴.۱. گراف، [۳۲] سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ از راس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(G)$ از یال‌ها و یک تابع وقوع ψ_G که به هر یال G، یک زوج نامرتب از راس‌های G را -که الزاما متمایز نیستند- نسبت می‌دهد. [۶]

تعریف ۱۳.۴.۱. گراف تهی، گرافی را مجموعه یال آن تهی است یک گراف تهی (یا گراف ناهمبند کلی) می‌نامند. [۳۱]

تعریف ۱۴.۴.۱. گراف دوبخشی، اگر مجموعه راس‌های گراف G را بتوان به دو مجموعه مجزی V_1 و V_2 افراز کرد، به‌طوری‌که هر یال G یک راس از V_1 را به یک راس از V_2 وصل کند، آن‌گاه گراف G را یک گراف دوبخشی می‌نامند و با $G(V_1, V_2)$ نمایش می‌دهند. [۳۱]

تعریف ۱۵.۴.۱. گراف k-بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه راس‌های آن‌را به k زیرمجموعه، طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک مجموعه نباشد. [۶]

تعریف ۱۶.۴.۱. گراف منتظم، گرافی که درجه تمام راس‌های آن با هم برابر باشند، یک گراف منتظم می‌نامند. اگر درجه هر راس k باشد، گراف را k-منتظم می‌گویند. [۳۱]

تعریف ۱۷.۴.۱. حذف یال، اگر e یک یال گراف G باشد، گراف حاصل از حذف یال e از G را با $G - e$ نمایش می‌دهند. [۳۱]

تعریف ۱۸.۴.۱. انقباض یال، فرض کنید e یک یال گراف G باشد به‌طوری‌که دو انتهای یال e راس‌های v و w باشند، آن‌گاه اگر یال e حذف شود و دو راس v و w یکی درنظر گرفته شوند، انقباض یال e صورت گرفته و گراف حاصل را با $G \setminus e$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۹.۴.۱. گشت، یک گشت از G، دنباله ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ است به‌طوری‌که جملات آن یک‌درمیان از راس‌ها و یال‌ها بوده و به‌ازای $1 \leq i \leq k$، v_{i-1} و v_i دو سر e_i باشند. در این‌صورت W، یک گشت از v_0 تا v_k یا به عبارتی دیگر یک (v_0, v_k)-گشت است. [۶]

تعریف ۲۰.۴.۱. مسیر، اگر درگشت W یال‌ها و راس‌ها متمایز باشند، W یک مسیر نامیده می‌شود. [۶]

تعریف ۲۱.۴.۱. درخت، یک گراف همبند و بدون دور است. [۶]

تعریف ۲۲.۴.۱. تطابق، زیرمجموعه M از G یک تطابق نامیده می‌شود، اگر عضوهای آن، یال‌های پیوندی بوده، و هیچ دوتای آن‌ها در G مجاور نباشند، و این‌طور بیان می‌شود که دو سر یال‌های M تحت M مطابق شده‌اند. [۶]

[۳۲] graph

فصل ۲

اثبات ریاضی و تکنیک‌های اثبات

۱.۲ اثبات ریاضی

اثبات ریاضی [۱] استدلال دقیقی است که برای متقاعد کردن خود و دیگران در این‌که قضیه ریاضی خاصی درست است، به کار می‌رود. هر مرحله از اثبات ریاضی باید از لحاظ منطقی درست باشد، و همین ملاک است که اثباتهای ریاضی
را بسیار مشکل می‌کند. در ریاضیات هر مرحله باید شامل یک استدلال درست باشد که این درستی شامل استفاده صحیح از قواعد منطق می‌باشد و درصورتی‌که اجرای دنباله‌ای از چنین مراحل منطقی منجر به تحقیق قضیه مورد بحث شود، گفته می‌شود که قضیه اثبات شده است. در اثبات ریاضی، اولین مرحله باید مطالعه دقیق متن کامل قضیه باشد. هر قضیه در حالت کلی شامل دو جزء می باشد:

۱) گزاره‌ای از آن‌چه باید اثبات شود.

۲) شرایطی که باید برقرار باشند.

اثبات قضیه باید برای برقرار کردن تمام شرایط، به‌قدر کافی کلی باشد. یکی از مغالطه‌های متداول، [۲] اثبات گزاره‌ای است که شرایط ساده‌ترِ شرایطی که عملا مشخص شده‌اند را برقرار می‌کند. به‌عنوان مثال، اگر قضیه‌ای براین دعوی باشد که نامساوی مشخصی در مورد جمیع اعداد حقیقی مثبت درست است، در این صورت تحقیق نامساوی در مورد اعداد طبیعی به طور واضح کافی نیست. هنگامی‌که گزاره دقیق قضیه واضح شد، شخص می‌تواند شروع به اثبات کند و در سرتاسر اجرای اثبات باید مطمئن باشد که هر مرحله شامل استدلالی درست است، زیرا اگر تنها یک مرحله نادرست باشد در این‌صورت کل اثبات نادرست خواهد بود. (با توجه به این مطلب، واضح است که بزرگ‌ترین علت اثبات‌های مغالطه‌آمیز [۳] استفاده از استدلال‌هایی است که به‌طور شهودی صحیح به‌نظر می‌رسند اما محقق نشده‌اند.) پس برای اجتناب از این موارد و هم‌چنین اجتناب از اثبات‌های کاذب [۴] که ممکن است نادرست باشند، به اندکی

[۱] mathematical proof

[۲] common fallacy

[۳] fallacious proofs

[۴] pseudo proofs

صبر و شکیبایی بیشتر نیاز است. از آنجا که اثبات، استدلال است، شخص باید تا آنجا که امکان داشته باشد آن‌را به‌طور واضح اجرا کند و در این صورت باید اطمینان پیدا که مراحل اثبات به‌طور منطقی از یکدیگر تبعیت می‌کنند، و در مورد هر یک از آن‌ها باید دلیل خوبی موجود باشد. [۱۳]

۱.۱.۲ استراتژی‌های کلی اثبات:

همان‌طور که بیان شد روش مشخص کردن درست یا غلط بودن یک مساله ریاضی را **اثبات ریاضی** می‌گویند. متاسفانه ثابت کردن همواره ساده نیست، در بعضی از مسایل نمی‌توان آن‌را به قواعد یا فرآیندهای ساده‌تر تبدیل کرد. در ذیل بعضی از استراتژی‌های کلی و مفید برای اثبات مساله بیان می‌شود. [۲۵]

گام اول: ابتدا مساله‌ای که قرار است اثبات شود، باید به دقت خوانده شود. [۲۵]

گام دوم: مساله به زبان روان بازنویسی شود. [۲۵]

گام سوم: مساله به قست‌های کوچک‌تر شکسته شده و هر قسمت به‌طورجداگانه در نظر گرفته شود. [۲۵]

(آ) بعضی از اوقات اجزای یک مسئله چندقسمتی به سادگی مشخص نیستند. در خیلی از موارد مسئله‌های چندقسمتی به شکل « P اگر و تنها اگر Q» هستند و به‌صورت « P iff Q » نوشته می‌شوند، که P و Q عبارات ریاضی هستند. این مسئله می‌تواند به دو قسمت تقسیم شود: قسمت اول P آن‌گاه Q است که به معنی این است که اگر P درست باشد، آن گاه Q نیز درست است و به صورت $P \Rightarrow Q$ نوشته می‌شود. قسمت دوم Q آن‌گاه P است که به معنی این است که اگر Q درست باشد، آن‌گاه P نیز درست است و به صورت $P \Leftarrow Q$ نوشته می‌شود. قسمت اول جهت مستقیم مسئله و قسمت دوم جهت معکوس آن می‌باشد. عبارت P اگروتنها اگر Q بصورت $P \Leftrightarrow Q$ نوشته می‌شود و برای اثبات این مسئله‌ها باید مسئله از هر دوطرف اثبات شود، که به‌طور معمول اثبات یکی از این جهت‌ها ساده‌تر می‌باشد. [۲۵]

(ب) نوع دیگری از مسئله‌های چندقسمتی اثبات تساوی دو مجموعه A و B می‌باشد. قسمت اول باید A زیرمجموعه B و قسمت دوم باید B زیرمجموعه A باشد. بنابراین یک روش کلی برای اثبات $A = B$ این است که ثابت کنیم هر عضو A عضو B نیز بوده و هر عضو B نیز عضو A می‌باشد. [۲۵]

گام چهارم: در این مرحله برای اثبات یک مسئله یا قسمتی از آن، باید مسئله درک شود یعنی اینکه چرا این مسئله درست است. معمولا بررسی چند مثال مفید می‌باشد. مثلا اگر مسئله می‌گوید که نوع خاصی از داده‌ها باید ویژگی مشخصی را داشته باشند، انتخاب چند داده و بررسی چند ویژگی به درک مسئله کمک می‌کند. بعد از این کار، سعی بر این است که نمونه‌ای پیدا شود که این ویژگی را نداشته باشد، به این نمونه، **مثال نقض** می‌گویند. اگر مسئله درست باشد امکان یافتن مثال نقض وجود ندارد. زمانی که برای یافتن مثال نقض با مشکل مواجه می‌شوید، به شما کمک می‌کند که درک کنید که چرا مسئله درست است. [۲۵]

گام پنجم: اگر هنوز برای حل یک مسئله مشکل وجود داشت، باید سعی شود که ابتدا حالت ساده‌تر

(خاص‌تر) آن حل شود. به‌طور مثال: اگر بخواهید ثابت کنید که مسئله‌ای برای هر $K > ۰$ درست است، می‌توان ابتدا آن‌را برای $K = ۱$ حل کرد. اگر درست بود، آن‌گاه آن‌را برای $K = ۲$ حل کرده و این کار را به‌همین ترتیب برای $۳, ۴, \ldots$ ادامه دهید تا روش حل آن برای حالت کلی بدست آید. [۲۵]
گام ششم: اگر اثبات حالت خاصی مشکل بود، سعی شود حالت دیگری را پیدا کرده که اثبات آن ساده‌تر باشد، یعنی حالت خاصی از یک حالت خاص پیدا شود. در نهایت وقتی که اثبات پیدا شد باید، بطور دقیق نوشته شود. برای نوشتن دقیق یک اثبات ابتدا باید آن‌را به‌صورت مرحله به مرحله نوشت، بطوریکه هر مرحله از مرحله قبل بدست آمده باشد. نوشتن دقیق اثبات اهمیت زیادی دارد برای اینکه خواننده بتواند آن‌را بفهمد و اطمینان پیدا کند که در آن خطایی وجود ندارد. [۲۵]

۲.۲ تعاریف، قضایا و اثبات‌ها

قضایا و اثبات‌ها قلب و جان ریاضیات بوده و تعاریف روح آن می‌باشند. این سه مورد برای هر موضوع ریاضی، اساسی می‌باشند. [۲۵]

۱.۲.۲ تعاریف

تعریف، قراردادی بین مولف و خواننده برای به‌کار بردن کلمه (یا کلماتی) در نمایش مفهومی ریاضی است. به‌عنوان مثال می‌توان مربع را به عنوان، مستطیلی با اضلاع به طول‌های مساوی، تعریف کرد. به همین ترتیب، هر عدد صحیحی که بتواند به صورت $۲n$ نوشته شود عدد صحیح زوج نامیده می‌شود. [۱۳]

تعاریف، توصیف‌کننده اشیا و نشانه‌گذاری‌هایی است که استفاده می‌شوند. یک تعریف می‌تواند ساده باشد مانند تعریف مجموعه، یا پیچیده باشد مانند تعریف امن بودن در سیستم رمزنگاری. دقیق بودن در هر تعریف مهم می‌باشد. وقتی‌که شی تعریف می‌شود باید به وضوح مشخص شود که آن شی از چه ساختاری تشکیل شده است. پس از این که اشیا مختلف تعریف شدند معمولا عبارت ریاضی [۵] درباره آن‌ها بیان می‌شود. این عبارات مشخص می‌کند که فلان شی ویژگی خاصی را دارد. این عبارات مانند تعاریف می‌توانند درست نبوده ولی لازم است که دقیق باشند. پس نباید هیچ ابهامی در معنی عبارات باشد. [۲۵]

تعریف عبارت از قضیه‌ای است که ماهیت یا ذات یک چیز یا یک مفهوم را می‌شناساند و تعاریف ریاضی قضیه‌هایی هستند که ذات یک مقدار معین، خواه عدد و یا شکل را، مشخص می‌کنند، به‌طور مثال در تعریف عدد"دو" بیان می‌شود که آن عددی است که از جمع کردن یک با یک حاصل می‌شود، و در تعریف محیط دایره بیان می‌شود که آن خطی است که از حرکت نقطه‌ای که فاصله آن نسبت به نقطه ثابتی همیشه یکسان می‌ماند، حاصل می‌شود. [۲۲]
تعریف‌های ریاضی، به‌وجود آورنده و سازنده هستند، یعنی قانونی را که بر حسب آن، عدد و شکل به‌وجود می‌آید، وضع می‌کنند. این نوع تعاریف را که از هیچ چیز موجود قبلی به‌وجود نیامده‌اند، بلکه نتیجه

[5] mathematical statement

خلاقیت ذهن می‌باشند، معمولاً وضعی و قراردادی می‌خوانند. [۲۲]

۲.۲.۲ اثبات

یک اثبات، [۶] فرآیند منطقی درست بودن یک عبارت می‌باشد. در ریاضیات، پیش‌فرض‌ها باید کاملا واضح باشند و این تفاوت ریاضی با اثبات‌هایی است که ما در کارهای روزمره یا حقوقی انجام می‌دهیم. (یک پرونده جنایی ممکن است بدون هیچ شک معقولی اثبات شود. وجود مدارک، هیأت‌منصفه را مجبور می‌کند متهم را گناهکار یا بی‌گناه بدانند) ولی در اثبات مسئله‌های ریاضی مدارک هیچ نقشی ندارند و یک ریاضی‌دان باید مسئله‌ها را بدون هیچ ابهامی اثبات کند. [۲۵]

۳.۲.۲ قضیه

همان‌طور که در فصل ۱ بیان شد، قضیه[۷] یک مسئله ریاضی است که درستی آن اثبات شده باشد.

۳.۲ علوم متعارفه

[۸] چنان‌که گفته شد تعاریف، اصولی هستند که تمام قضیه‌های ریاضی از آن‌ها ناشی می‌شوند لکن برای این‌که میان این قضیه‌ها رابطه‌ای برقرار گردد اصول دیگری لازم است که آن‌ها را علوم متعارفه[۹] خوانند. [۲۲]

علوم متعارفه به معنای حقیقی، قضیه‌هایی هستند که میان مقادیر غیر معین، روابطی ضروری برقرار می‌کند مثل اینکه گفته شود ''کل بزرگتر از جزء خود است'' و ''دو مقدار مساوی با مقدار سوم خود، مساوی هستند'' که این قضیه‌ها درباره همه مقادیر، اعم از متصل و منفصل، و هر اندازه که باشد صادق است. این قضیه‌ها بدیهی و ضروری هستند و کسی نمی‌تواند در آن‌ها شک کند و اگر کسی آن‌ها را انکار کند دچار تناقض می‌شود، برای این‌که وقتی بیان می‌شود کل بزرگتر از جزء است، مثل این‌است که گفته شود شامل، مشمول خود را در بردارد، و معلوم است که کسی نمی‌تواند منکر این امر بشود مگر این‌که خود، خلاف آنچه را که می‌گوید، بیان کند. [۲۲]

در حقیقت، علوم متعارفه موارد اعمال دو اصل ''هوهویّه'' [۱۰] (این همانی) و امتناع تناقض [۱۱] درباره کمیت است. هوهویّه یعنی یک چیز همان است که هست و اصل امتناع تناقض، یعنی این‌که امری را بر امر دیگر نمی‌توان در یک زمان و در یک حالت و از یک جهت ایجاباً و سلباً حمل کرد. [۲۲]

---

[۶] proof

[۷] theorem

[۸] Axiome

[۹] علوم متعارفه یا آکسیوم که به آن علم جامع نیز می‌گویند.

[۱۰] Principe didentite

[۱۱] principe de non contradication

علوم متعارفه، در استدلالات سهم و عمل اساسی دارد به این ترتیب که، برقرارکردن رابطه در میان تعاریف و قضایایی را که از آن‌ها استنتاج می‌شود ممکن ساخته و معادل بودن آن‌ها را نشان می‌دهد. [۲۲]

۴.۲ اصول موضوعه یا مصادرات

قضایای دیگری که بدون آن‌ها برهان‌های هندسی متوقف می‌ماند "اصول موضوعه" نام دارد. در هندسه معمولی (هندسه اقلیدسی) حداقل یک اصل موضوع مورد استفاده قرار می‌گیرد و آن اصل موضوع اقلیدس است که چنین تعبیر می‌شود: "از نقطه مفروضه در خارج خطی، نمی‌توان بیش از یک خط به موازات آن ، عبور داد." [۲۲]
اصل موضوع، قضیه ایست که اثبات آن ممکن نیست و می‌توان آن‌را انکار کرد لکن آن پذیرفته می‌شود برای این‌که بتوان برهان خود را ادامه داد. فرق آن با علوم متعارفه در این است که اصل موضوع به هیچ‌وجه، ضرورت منطقی ندارد و در صورتی‌که بدیهی باشد، بدیهی بودن آن عقلانی و منطقی نیست بلکه یقین داشتن درباره آن از راه حس حاصل شده است، چنان‌که در عالمی که ما با چشم خود می‌بینیم نمی‌توان از یک نقطه مفروض در خارج خطی، بیش از یک خط موازی با آن خط رسم کرد، لکن هیچ دلیل عقلانی خلاف آن را منع نمی‌کند. فرق دیگر اصل موضوع با علوم متعارفه آن است که علوم متعارفه درباره مقادیر غیر معین صادق است و حال آن‌که اصل موضوع فقط درباره مقادیر معینی صدق می‌کند و از این جهت به تعاریف شباهت دارد.
بدین معنی که تعاریف را نیز از این حیث که، بی‌آنکه ضروری باشد، پذیرفته و چون جنبه وضعی دارند ممکن است اصل موضوع خوانده شوند، و اصل موضوع را هم به همین دلیل تعریف نامیده‌اند ولی در این صورت، اصل موضوع، تعریفی خواهد بود بسیار کلی و عامک همانند تعریف فضای هندسی که از فضای محسوس انتزاع می‌شود. [۲۲]

۵.۲ روش‌های اثبات در ریاضیات

در ریاضیات روش‌های مختلفی برای اثبات وجود دارد. یک اثبات ممکن است شامل چندین روش مختلف باشد، زیرا که یک اثبات می تواند چندین اثبات کوچک‌تر هم داشته باشد. [۲۵]
می‌توان روش‌های اثبات و استدلال را به دو دسته زیر تقسیم کرد:

۱. روش‌های مرسوم استدلال، روش‌هایی هستند که در اکثر شاخه‌های ریاضی و به تکرار مورد استفاده قرار می‌گیرند. برخی از این روش‌ها عبارتند از: روش استقرا، روش برهان مستقیم، روش برهان خلف و ...

۲. روش‌های غیر مرسوم استدلال، روش‌هایی هستند که تقریبا هر کدام در شاخه خاصی از ریاضی به‌کار برده می‌شوند و نسبت به روش‌های مرسوم استدلال از عمومیت کمتری برخوردارند. مانند قاعده تبدیل متغیر، برهان به کمک فرمول، قاعده افنا، تمثیل و اثبات هندسی و ...

۱.۵.۲ استقرا و استقرا ریاضی

استقرا: استقرا [۱۲] عبارتست از فرآیند اکتشاف قوانین کلی از طریق ملاحظه و ترکیب کردن نمونه‌های جزیی که در همه علوم و حتی ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرد. اثبات با استقرا یک روش پیشرفته برای نشان دادن برقراری یک ویژگی خاص برای یک **مجموعه نامتناهی** می‌باشد. به‌طور مثال، با استقرا می‌توان نشان داد که یک عبارت ریاضی مقدار موردنظری را برای هر متغیر ورودی آن محاسبه می‌کند، یا اینکه یک برنامه برای همه ورودیها به درستی کار می‌کند. برای نمایش طرز کار اثبات با استقرا فرض می‌شود مجموعه نامتناهی که با آن کار می‌شود مجموعه اعداد طبیعی $N = \{۱, ۲, \ldots, \}$ بوده و ویژگی موردنظر P باشد. هدف این است که ثابت شود $P(k)$ برای هر عددطبیعی k درست است. هر اثبات استقرایی دو قسمت دارد (پایه استقرا و گام استقرا) که هر قسمت، اثبات مربوط به خود را می‌طلبد.[۱۷]

استقرا ریاضی: استقرا ریاضی روش مستقیمی است که اغلب در تحقیق قضیه‌های ریاضی خاصی به‌کار می‌رود، و به عنوان یک روش اثبات دارای امتیازات و محدودیت‌های خاصی می‌باشد.
اصول این تکنیک به دوران یونان باستان برمی‌گردد و جمله استقرا در قرن نوزدهم توسط دمورگان ارایه شده است. ایده اساسی که زیربنای اصل استقرا می‌باشد به صورت ذیل است:
اگر در فرآیندی، مرحله آغازین توصیف شود و بتوان هر مرحله‌ای را بر حسب مرحله قبل توصیف کرد، آن‌گاه می‌توان فرآیند مذکور را در همه مراحل توصیف کرد. مفهوم نظیر آن در علم کامپیوتر همان بازگشت می‌باشد و بیانگر این است که فرآیند مورد بحث در جهت معکوس مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به‌طور غیررسمی، استقرا عبارت است از فرآیند حل مسئله‌ای بزرگ به وسیله تجزیه آن به یک یا چند زیرمسئله به‌طوری که هر یک از این زیرمسئله‌ها از نظر ساختار با مسئله اصلی یکسان‌اند ولی حل آن‌ها آسان‌تر است. [۲]

۲.۵.۲ روش استقرا ریاضی چیست؟

صحبت این است که استقرا ریاضی یک روش قیاسی است. در حقیقت، وقتی به ساختمان محتوی ریاضیات به شکل عبور از جز به کل نگاه شود، وسعت نظر بیشتری به دست می‌آید. خیلی ساده می‌توان فهمید که آنچه استقرا ریاضی نامیده می‌شود، در واقع استقرا نیست، بلکه عینا روش قیاس است!
استدلالی که بر این روش متکی است، از دو قسمت تشکیل شده است:

۱. **مبنا:** آنچه مبنا نامیده می‌شود، یعنی اثبات حکم موردنظر (که البته اثباتی قیاسی است) برای یک (یاچند) عدد طبیعی (مثلا برای یک)

۲. **قدم استقرایی:** که عبارتست از اثبات حکم کلی برای هر مقدار n و آن از این‌جا به‌دست می‌آید که اگر حکم برای n صحیح باشد، برای $(n + ۱)$ هم صحیح خواهد بود. [۱۷]

در واقع اساس استقرا ریاضی (یا استقرا کامل) بر اصلِ استقرا ریاضی قرار دارد، این اصل چنین است: یک حکم برای هر مقدار عدد طبیعی n صحیح است وقتی‌که:

[۱۲] induction

۱. به ازای $n = 1$ صحیح باشد.

۲. از قبول صحت حکم برای عدد دلخواهی مثل $n = k$ بتوان نتیجه گرفت که این حکم برای $n = k+1$ نیز صحیح است.

برای اثبات اصلِ استقرا ریاضی، از اصلِ کوچکترین عدد استفاده می‌شود
.

اصلِ کوچکترین عدد: در هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی، کوچک‌ترین عدد وجود دارد. [۱۷]

اصلِ استقرا ریاضی، به‌طور دقیق حکمی را تنظیم می‌کند که به کمک آن می‌توان از راه مبنا و سپس قدم استقرایی با استدلال کاملا قیاسی، حکم را برای همه مقادیر طبیعی n، مورد مطالعه قرار داد. بنابراین هیچ‌گونه حالت (یا حالت‌های) خاصی که باید بعدا مورد مطالعه قرار گیرد، باقی نمی‌ماند و قضیه برای تمام اعداد طبیعی ثابت شده است. از مبنا که ثابت شده است، حکم برای عدد یک صحیح است، به کمک قدم استقرایی ثابت می‌شود که برای عدد دو هم صحیح است و سپس برای عدد $3, 4, \ldots$ و به این ترتیب حکم می‌تواند برای هرعدد طبیعی برقرار باشد.
به این ترتیب، روش اثبات استقرایی در ریاضیات، عبارتست از به‌کاربردن روش قیاسی استقرا ریاضی در این علم (استقرا در هندسه - استقرا در حساب و جبر...) [۱۷]

استقرا می‌کوشد که در آن سوی ملاحظات و مشهودات به نظم و انسجام برسد و آشکارترین ملزومات آن عبارتست از: تعمیم و تخصیص و تمثیل. [۱۰]
بسیاری از نتایج ریاضی نخست بر پایه استقرا بناشده و سپس به اثبات رسیده است.
ریاضیاتی‌که با دقت و استحکام عرضه می‌شود یک علم استنتاجی منظم است ولی ریاضیاتی که در حال سازندگی است، علمی آزمایشی و استقرایی است.
استقرا [۱۳]: (تحقیق) یعنی عبور از جزیی به کلی.
قیاس [۱۴]: (استنباط) یعنی عبور از کلی به جزیی.

اهمیت عمومیت بخشیدن به نتایجی که از مشاهدات و آزمایش‌های جداگانه به‌دست می‌آید (استقرا) برای علوم تجربی بر همه روشن است، ولی ریاضیات را از قدیم به‌عنوان نمونه مشخصی از علوم می‌شناختند که در مورد احکام آن روش‌های قیاسی قابل اعمال است، زیرا همیشه این تصور وجود دارد که احکام ریاضی به استثنای آن‌ها که مبانی کار هستند (اصول) اثبات می‌شوند و کاربرد مشخص احکام، نتیجه این اثبات است که برای حالت کلی انجام گرفته است. (قیاس) استقرا یعنی تحقیق (درفکر، درحدس، درفرض) که بدون شک نقش اساسی، ولی جستجوگرانه در ریاضیات دارد. استقرا اجازه می‌دهد، حدس زده شود که در میان همه آنچه که به‌نظر می‌رسد، کدامیک باید جواب باشد. ولی احکام ریاضی تنها به‌طور قیاسی اثبات می‌شوند، حتی یک نتیجه ریاضی را نمی‌توان صحیح و یقین دانست مگر این‌که در حالت کلی ثابت شده باشد. [۱۷]

[۱۳] induscation

[۱۴] deductio

پس روش استقرا عبارتست از روش اثبات قضایای حسابی، و یا به‌طور دقیق‌تر، قضایایی که خواص کلی عددهای طبیعی را بیان می‌کند، و در نظریه اعداد طبیعی این روش، به مفهوم معلوم خود، یک وسیله عمومی (و گاهی منحصر به فرد) برای اثبات است.
در اصل موضوعی کردن ساختمان حساب، تمام بنای آن بر تعریف اعمال روی عددهای طبیعی و به وسیله استقرا ریاضی (که به آن‌ها تعریف برگشتی یا رجعتی هم گویند) می‌باشد و در مورد سایر رشته‌های ریاضی هم، به همان اندازه که بر مبنای حساب بنا شده باشند، به استقرا ریاضی احتیاج دارند.
در حقیقت مبنای استقرا، اساسا با روش غیرحسابی ثابت می‌شود. ولی قدم استقرایی در این حالت (حتی اگر بر اصول هندسی و یا اصول دیگری متکی باشد) نوعی تعمیم حکم درباره اعداد طبیعی است، به نحوی که در آن صحبت از به‌کار بردن یک خاصیت در مورد هر عدد طبیعی n است.

این مطلب هم تذکر داده می‌شود که، روشی که به این اندازه برای به نتیجه رساندن استدلال و سیر تکاملی آینده سلسله اعداد $\circ, ۱, ۲, \ldots$ مشخص است، می‌تواند به صورتی کاملا جدید تعمیم پیدا کند. مثلا در حساب منطق ریاضی روی روابطی (گزاره‌هایی) عمل می‌کنند که روابط مقدماتی (گزاره‌های مقدماتی) به‌صورت $A, B, C, \ldots$ و به کمک علامت‌های $\&$ (و) ، $\vee$ (یا) و $\ldots$ درست شده‌اند.
خواص کلی روابط، به طریق استقرا برای بیان روابط منطق ریاضی ثابت می‌شوند.
ثابت می‌شود که:

۱. خاصیت مورد نظر یک رابطه مقدماتی دارد. (مبنا)

۲. از این مطلب، که این خاصیت متعلق به روابط Y و X باشند، نتیجه می‌شود که متعلق به روابط $(X\&Y)$ و $(X \vee Y)$ و X ~ و $\ldots$ هم می‌باشند. (قدم استقرایی)

به طورکلی هر ساختمان ریاضی (و یا منطقی) که به صورت عبور از یک یا چند موضوع اولیه به موضوع جدیدی به کمک یک یا چند عمل انتقالی بوجود آمده باشد، می‌تواند استنادی برای به‌کار بردن روش استقرا برای تعریف یا اثبات باشد. درباره نقش تبعی روش استقرا ریاضی در آنالیز ریاضی، به خصوص این وضع روشن می‌شود که اعدادحقیقی، در تمایز با اعداد طبیعی، محصول ساختمانی که به روشنی طرح شده باشند، نیستند، به‌طوری‌که انواع مختلف استقرا در مورد اعداد طبیعی نتوانسته است مثل روش استقرا ریاضی در حساب و شکل تغییر یافته آن، منطق ریاضی، عمومیت پیدا کند. [۱۷]

مزیت روش استقرا ریاضی:

۱. استقرا در حل مسئله‌های خاصی که در آن‌ها سایر روش‌ها عملی نیستند و یا بسیار مشکل‌اند، مفید می‌باشد.

۲. امتیاز دیگر این روش این است که، از آنجایی‌که روشی آلگوریتمیک است، می‌تواند بدون نیاز به ابتکارهای زاید مفید باشد، و به عبارت دیگر، شخص تنها لازم دارد که برای اثبات از جریان مشخصی پیروی کند، و برای این‌کار به بینش خاصی نیاز نیست. [۱۳]

معایب روش استقرا ریاضی:

عدم امتیاز این روش، محدود بودن استقرا، به قضیه‌هایی است که با اعداد صحیح سروکار دارند. این روش، یک روش تحقیق است، و تنها می‌تواند در اثبات نتایجی که درستی آن‌ها معلوم است یا حدس زده‌شده است، به‌کار رود، و به این ترتیب، در جریان پیشرفت معرف جدید ریاضی قرار نمی‌گیرد. [۱۳]

۳.۵.۲ برهان مستقیم

روش اثبات مستقیم، روشی است که به کرات در ریاضیات به‌کار می‌رود، و همچنین روشی است که از آن غالبا در تجربه‌های قبلی استفاده شده است. در واقع هر دفعه که معادله‌ای حل می‌شود، یا محاسبات حسابی انجام می‌شود، یا تعادل بین سمت راست و سمت چپ یک اتحاد نشان داده می‌شود، موارد ساده‌ای از اثبات مستقیم به‌کار گرفته می‌شود. در حقیقت استقرا ریاضی نیز مورد دیگری از اثبات مستقیم است.

اگر P و Q دو گزاره باشند و P مستلزم Q باشد، در این‌صورت اگر P درست باشد Q نیز درست می‌باشد این موضوع، مبنای اثبات مستقیم است. اما، در این مورد ممکن است پیش از رسیدن از P به Q به مراحل بسیاری نیاز باشد.

برای اثبات گزاره‌ای با استفاده از روش مستقیم، ابتدا به جمع‌آوری گزاره‌های درستی که ممکن است با مسئله مورد بحث در ارتباط باشند پرداخته می‌شود. این گزاره‌ها می‌توانند پوستولات [۱۵] یا گزاره‌های از قبل محقق باشند. با شروع با این گزاره‌ها شخص می‌تواند با استفاده از قوانین جبر و سایر اعمال درست، از مرحله‌ای به مرحله دیگر قدم بگذارد. گزاره نهایی چنین جریانی پاسخ مسئله است، و از آنجا که کار را با گزاره‌های درست آغاز، و با عملیات درست اقدام شده پاسخ نیز باید درست باشد، و به علت اینکه این پاسخ همان پاسخی است که در جستجوی اثبات کردنش بوده، جریان فوق به تکمیل اثبات درست گزاره می‌انجامد.

ممکن است از بحث فوق چنین آشکار شود که روش اثبات مستقیم، روش ساده‌ای برای به‌کاربردن است. این مطلب می‌تواند در مورد حالات خاصی صادق باشد، اما در بسیاری از موارد استعمال این روش، برای اثبات نتیجه مطلوب به مواد اولیه بسیاری نیاز است، و بر خلاف استقرا ریاضی که در آن اساسا شخص می‌داند که چگونه اقدام کند، شروع با اثبات مستقیم، مشکلاتی بوجود می‌آورد. به این ترتیب که شخص باید ابتدا از میان تمام حقایق ممکن آن‌هایی را انتخاب کند که مفیداند، سپس از میان تمام طرق ممکن، اقدام به اثبات آن‌هایی که منجر به اثبات درست می‌شوند بپردازد. [۱۳]

۴.۵.۲ برهان مستقیم ساده

ساختار:

$$P \Longrightarrow Q_۱ \quad , \quad Q_۱ \Longrightarrow Q_۲ \quad , \quad \dots \quad , \quad Q_{n-۱} \Longrightarrow Q_n \quad , \quad Q_n \Longrightarrow Q$$

روش استدلال:

این روش استدلال، که به آن قاعده استلزام نیز گفته می‌شود آن است که با استفاده از مفاهیم و قضیه‌هایی که از قبل پذیرفته و ثابت شده‌اند، زنجیره‌ای از استلزام‌ها، چنان تشکیل می‌شود که از روی آن‌ها استلزامی به‌دست می‌آید که فرض قضیه (مقدم) و حکم قضیه (تالی) همان باشد، اگر P فرض قضیه و Q حکم آن باشد و استلزام‌های مقابل

$$P \Longrightarrow Q_۱ \quad , \quad Q_۱ \Longrightarrow Q_۲ \quad , \quad \dots \quad , \quad Q_{n-۱} \Longrightarrow Q_n \quad , \quad Q_n \Longrightarrow Q$$

وجود داشته باشد، بنا به قانون قیاس، استلزام $P \Longrightarrow Q$ را نتیجه خواهد داد.

---

[۱۵] postulate

این برهان زنجیره‌ای از دو استلزام به‌صورت $P \Longrightarrow P_1 \Longrightarrow Q$ است که استلزام‌های $P \Longrightarrow P_1$ و $P_1 \Longrightarrow Q$ بنا به قضیه‌های قبلی برقرارند و از این دو استلزام، بنا به قانون قیاس، استلزام $P \Longrightarrow Q$ نتیجه می‌شود. [۲۶]

مثال ۱.۵.۲. اثبات زوج بودن جمع دو عدد زوج.

راه‌حل: برای هر دو عدد صحیح x و y می‌توانیم بنویسیم $x = 2a$ و $y = 2b$ به ازای اعداد صحیح a و b ، زیرا هر دو عدد x و y زوج‌اند. اما جمع $(x+y) = 2a + 2b = 2(a+b)$ هم یک عدد زوج است. (در این اثبات از تعریف اعداد زوج صحیح، و قاعده توزیع استفاده شده است.)

۵.۵.۲ برهان مستقیم قضیه‌های دو شرطی

ساختار:

$$(P \Longleftrightarrow Q) \equiv (P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$$

روش استدلال:
برای اثبات قضیه‌هایی که به‌صورت شرط لازم و کافی بیان می‌شوند، روش کلی آن است که هم خود قضیه و هم عکس آن ثابت شوند: $(P \Longleftrightarrow Q) \equiv (P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$
اما اگر بتوان زنجیره‌ای از هم‌ارزی‌ها پدید آورد که از فرض شروع و به حکم پایان یابد، هم‌ارزی فرض و حکم ثابت شده است: $(P \Longleftrightarrow P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow Q) \Longrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)$

مثال ۲.۵.۲. شرط لازم و کافی برای آن که یک عدد طبیعی مضرب ۲ باشد آن است که رقم یکان آن مضرب ۲ باشد. [۲۶]

۶.۵.۲ برهان مستقیم شاخه‌ای

ساختار:
ساختار خاصی برای برهان مستقیم شاخه‌ای نمی‌توان تشکیل داد.
روش استدلال:
همواره نمی‌توان زنجیره‌ای از استلزام‌ها به وجود آورد که از فرض آغاز شود و به حکم پایان یابد. اما اگر بتوان چند زنجیره از استلزام‌ها تشکیل داد که بعضی از آن‌ها از فرض یا از اجزا فرض و بعضی از آن‌ها از قضیه‌های قبلی آغاز شوند به‌گونه‌ای که ترکیب آن‌ها استلزامی به وجود آورد که حکم قضیه (تالی) و فرض قضیه (مقدم) همان باشد، قضیه ثابت شده است.

مثال ۳.۵.۲. اگر اشتراک دو مجموعه A و B برابر A باشد، آنگاه A زیرمجموعه B است.

فرض (P) : $A \cap B = A$
حکم (Q) : $A \subset B$
راه‌حل: بنا به آن‌چه قبلا ثابت شده است:

$R: A \cap B \subset B$

ترکیب عطفی این گزاره با گزاره فرض را تشکیل می‌دهیم:

$$P \wedge R: A \cap B = A \quad \text{و} \quad A \cap B \subset B \qquad \Longrightarrow Q: A \subset B$$

[۲۶]

۷.۵.۲ برهان خلف

ساختار $(P \Longrightarrow Q) \equiv \sim (P \wedge \sim Q)$

برهان خلف، نوعی از برهان غیرمستقیم است، برای آن‌که ثابت شود قضیه‌ای درست است می‌توان ثابت کرد که خلاف آن قضیه، یعنی نقیض آن، نادرست است.
خلاف قضیه $(P \Longrightarrow Q)$می‌شود $(P \wedge \sim Q)$ و برای اثبات نادرستی $(P \wedge \sim Q)$ برهان را از $\sim Q$، یعنی از خلاف حکم قضیه، آغاز کرده و زنجیره‌ای از استلزام‌ها تشکیل می‌شود که به تعارض برخورد کند، یا نتیجه آن خلاف فرض، یا خلاف یکی از قضیه‌های از قبل ثابت شده، یا خلاف یکی از اصول پذیرفته شده باشد و در این صورت نادرستی $(P \wedge \sim Q)$ و در نتیجه درستی $(P \Longrightarrow Q)$ثابت شده است.
برهان خلف یکی از روش‌های اثبات در علم ریاضی و منطق می‌باشد، و به‌طور معمول در اثبات عکس یک قضیه به‌کار می‌رود که بیشتر مورد استفاده در قضیه‌های دوشرطی است.
روش استدلال: فرض شود که P گزاره فرض و Q حکم باشد به‌طوریکه شخص بخواهد Q را از P نتیجه بگیرد یعنی: $P \Longrightarrow Q$. حال اگر لازم باشد که از برهان خلف استفاده شود، ابتدا نقیض حکم را ساخته و به عنوان فرض جدید درنظر گرفته می‌شود و سعی می‌شود که فرض قدیم حاصل شود.

$$\sim Q \equiv \acute{P} \qquad\qquad \acute{P} \Longrightarrow P$$

حال اگر Q درست بوده باشد پس نقیض آن یعنی $\sim Q$ (که همان $\acute{P}$ می‌باشد) غلط است و عبارت $\acute{P} \Longrightarrow P$ دارای تناقض است، اگر چنین باشد در این‌صورت یا P و یا $\acute{P}$ باید غلط باشد.
از آنجا که P فرض اصلی بوده است پس نمی‌تواند غلط باشد، پس $\acute{P}$ غلط بوده است و نقیض $\acute{P}$ درست است. از آنجا که $\acute{P}$ برابر با نقیض Q بود پس نقیض $\acute{P}$ برابر است با نقیض نقیض Q است.
همان‌طور که واضح است، نقیض نقیض هر گزاره برابر با خود گزاره است. پس گزاره Q درست است و حکم ثابت می‌شود. [۲۶]

مثال ۴.۵.۲. اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$.

۸.۵.۲ قاعده برگشت

قاعده برگشت در قضیه‌های مربوط به عددهای طبیعی استفاده می‌شود.
خاصیتی مربوط به یک عدد طبیعی را به عدد قبل از آن، سپس به عدد قبل از عدد دوم مربوط می‌کند

و این عمل ادامه دارد تا به عددی برسد که خاصیت مورد نظر درباره آن صادق است.
قاعده برگشت ممکن است با برهان مستقیم یا برهان خلف صورت گیرد.

مثال ۲.۵.۵. اثبات این که عدد طبیعی وجود ندارد که مجذور آن برابر با مجموع توان‌های چهارم دو عدد طبیعی دیگر باشد، یعنی اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، عدد طبیعی n وجود ندارد که $n^۲ = a^۴+b^۴$ باشد.

راه‌حل: در این مورد از برهان خلف استفاده می‌شود و ثابت می‌کند که اگر عدد n با این خاصیت وجود داشته باشد، عدد طبیعی m کوچکتر از n وجود دارد که دارای همین خاصیت است، همچنین عدد طبیعی p کوچکتر از m نیز یافت می‌شود که همین خاصیت را داشته باشد و ... اما چون بعد از حداکثر n بار تکرار عمل، دیگر عدد طبیعی وجود نخواهد داشت، حالت ناسازگاری پیش می‌آید و فرض وجود n با خاصیت مزبور نادرست است. حال می‌توان گفت که استقرا ریاضی نوع مهمی از قاعده برگشت است، که بر پایه اصل پنجم از اصول پئانو، مربوط به بنای حساب انجام می‌گیرد و این روش غیر از آن استقرا است که در روش علوم تجربی است. روش اثبات با استقرا ریاضی از این قرار است:
برای آنکه ثابت کنیم $p(n)$ که n عدد طبیعی است، همواره درست است، نخست ثابت می‌شود که اگر $n_۰$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد (که معمولاًمی‌توان آن‌را به جای n انتخاب کرد)، $p(n_۰)$ درست است. آنگاه ثابت می‌شود که اگر $p(k)$ درست باشد $p(k+۱)$ نیز درست است، در این صورت بنا به اصل پئانو نتیجه می‌شود که $p(n)$ به ازای هر n درست است.

مثال ۲.۵.۶. ثابت کنید که عدد $p(n) = ۱۰^n - ۱$ به ازای هر عدد طبیعی n مضرب ۹ است.

راه‌حل: اولاً به ازای $n = ۱$ داریم $p(۱) = ۱۰ - ۱ = ۹$ که مضرب ۹ است.
ثانیاً هرگاه $p(k) = ۱۰^k - ۱$ مضرب ۹ باشد، ثابت می‌شود که $p(k+۱)$ نیز مضرب ۹ است زیرا

$$\begin{aligned} ۱۰^{(k+۱)} - ۱ &= ۱۰ \times ۱۰^k - ۱ \\ &= (۹+۱) \times ۱۰^k - ۱ \\ &= ۹ \times ۱۰^k + (۱۰^k - ۱) \end{aligned}$$

چون $۱۰^k - ۱$، بنا به فرض، مضرب ۹ است و ۹×۱۰^k نیز مضرب ۹ است، طرف دوم برابری بالا مضرب ۹ است، پس طرف اول نیز مضرب ۹ است. بنابراین داریم:
$p(۱)$ برقرار
و $p(k) \longrightarrow p(k+۱)$ و حکم ثابت است. [۲۶]

۲.۵.۹ اثبات غیرمستقیم

در اثبات‌های مستقیم کار با گزاره‌های درست آغاز می‌شود و بعد اعمال درستی به‌کار برده می‌شود تا سرانجام نتیجه مطوب حاصل شود. اما در روش اثبات غیر مستقیم[۱۶] طریق مخالف این روش را انجام می‌شود، به این ترتیب که کار با قضیه‌ای نادرست آغاز شده و عملیات درستی انجام می‌شود تا سرانجام گزاره محالی[۱۷] حاصل شود. [۱۳]

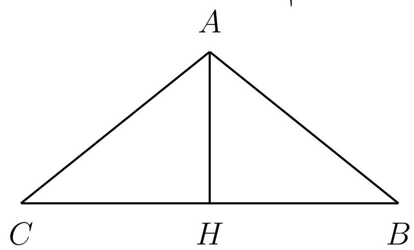
[۱۶] indirect proof
[۱۷] absurd

۱۰.۵.۲ برهان با استفاده از لم

واژه لم، فرانسوی است و می‌توان آن‌را قضیه کمکی یا پیش قضیه نامید. برای اثبات بسیاری از قضیه‌ها، نخست یک قضیه‌ی کمکی مطرح و اثبات می‌شود، آن‌گاه با استفاده از نتیجه این قضیه و فرض، زنجیره استلزام‌ها تشکیل می‌شود.

مثال ۷.۵.۲. اثبات قضیه در هر مثلث قایم الزاویه، ارتفاع واسطه هندسی بین دو قطعه وتر است.

راه‌حل: نخست این قضیه (به عنوان لم) ثابت می‌شود که اگر در مثلث ABC مجموع (تفاضل) دو



شکل ۱.۲: مربوط به برهان عکس نقیض

زاویه C و B برابر ۹۰ درجه باشد، چون ارتفاع AH رسم شود، دو مثلث HAB و HAC متشابه‌اند. آن‌گاه از نتیجه این قضیه کمکی که تشابه دو مثلث و تناسب ضلع‌های آن‌ها است حکم قضیه مفروض را به‌دست می‌آید. [۲۶]

۱۱.۵.۲ عکس نقیض

ساختار: $(P \Longrightarrow Q) \equiv (\sim Q \Longrightarrow \sim P)$

استلزام $P \Longrightarrow Q$ با عکس نقیض آن $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ هم‌ارز است. بنابراین برای اثبات یک قضیه می‌توان عکس نقیض آن قضیه را اثبات کرد.

مثال ۸.۵.۲. در مثلث ABC ، اضلاع AB، AC نابرابرند ارتفاع AH رسم می‌شود. آن‌گاه باید ثابت شود که BH و HC نابرابرند.

$$\begin{cases} AB \neq AC & : \textbf{فرض} \ (\mathrm{P}) \\ BH \neq CH & : \textbf{حکم} \ (\mathrm{Q}) \end{cases}$$

راه‌حل:

ابتدا عکس نقیض قضیه را به‌صورت زیر در نظر گرفته:

$$\begin{cases} BH = CH & : \textbf{فرض} (\sim P) \\ AB = AC & : \textbf{حکم} (\sim Q) \end{cases}$$

اما این قضیه قبلاً ثابت شده است، پس قضیه مفروض نیز ثابت است. [۲۶]

۱۲.۵.۲ مثال نقض:

تاکنون به بررسی روش‌های گوناگون مفیدی در اثبات نتایج پرداخته شد، و موارد کاربرد این روش‌ها گاه موفقیت آمیز بوده و منجر به اثبات حقایق ریاضی می‌شدند. از این لحاظ برهان استقرا و روش‌های اثبات مستقیم و اثبات غیرمستقیم را می‌توان به‌صورت روش‌های ساختاری[۱۸] در نظر گرفت، زیرا کاربرد آن‌ها می‌تواند به طرح دانش جدیدی منجر شود.
در اینجا روش اثباتی، مورد بررسی قرار می‌گیرد که در ذات مخرب[۱۹] است، و کاربردش، اثر مقابل اثبات نتیجه را دارد. یعنی برای عدم اثبات درستی قضیه بیان شده، به کار می‌رود. قضیه‌هایی وجود دارند که در آن‌ها، تمام کوشش‌ها در اثبات قضیهٔ مفروض[۲۰] شکست می‌خورد و این تردید حاصل می‌شود که قضیه مورد بحث چنان‌که بیان شده، ناصحیح می‌باشد. در چنین وضعیت‌هایی مفید است که روشی برای عدم درستی قضیه وجود داشته باشد. هنگامی‌که عدم درستی[۲۱] قضیه اثبات شد، کذب گزاره اصلی به‌طور قطع اثبات شده و به این طریق دانش ریاضی افزونی یافته است.
اثبات عدم درستی قضیه اصلی، چون به دقت در نظر گرفته شود، می‌تواند در تحقیق ریاضی از فایده بسیار برخوردار باشد. عموماً، هنگامی‌که درستی قضیه‌ای رد شود، بدان معنی نیست که گزاره مورد بحث به‌کلی نادرست می‌باشد، بلکه تنها به این معنی است که قضیه چنان‌که بیان شده نادرست می‌باشد و این اغلب به علت این که قضیه خیلی کلی است اتفاق می‌افتد، و در این‌صورت ممکن است شرح تغییر یافته با شرایط ضعیف شده‌ای از آن، اثبات شود. به عنوان مثال، ممکن است چنین بیان شده باشد که گزاره اصلی در مورد تمام اعدادحقیقی درست است. اما چون عدم درستی این قضیه اثبات شود این امکان وجود دارد که گزاره، در صورتی‌که محدود به اعداد طبیعی شود، درست باشد. گزاره دوم ممکن است درست و بنابراین شایسته اثبات باشد. به‌عبارت دیگر عدم اثبات درستی یک قضیه می‌تواند به محقق توانا، این رهنمونی را بدهد که قضیه اصلی را به‌صورتی‌که درستی‌اش اثبات شود بازگویی کند.
مثالی که قضیه‌ای را نقض می‌کند به **مثال نقض**[۲۲]، یعنی مثالی که علیه آن گزاره حرکت می‌کند موسوم است. هنگامی‌که به‌نظر برسد که گزاره‌ای نادرست است، به‌دست‌آوردن مثال نقض مناسبی می‌تواند از اتلاف کوشش‌های بسیاری جلوگیری کند. [۱۳]

۱۳.۵.۲ اثبات وجودی:

غالب قضایای ریاضی شامل سور عمومی می‌باشند. این قضایا شامل عباراتی چون: «به ازاء جمیع اعداد طبیعی»، «تمام اعداد طبیعی حقیقی بین صفر و یک»، «تمام اعداد بزرگ‌تر از سه» هستند. اثبات درستی چنین گزاره‌هایی زمانی حاصل می‌شود که گزاره، به ازاء جمیع اعضایی که توسط سور عمومی مقید شده‌اند، اثبات شود. به‌عنوان مثال، اگر فرض بر این باشد که گزاره‌ای به ازاء جمیع اعداد طبیعی راست باشد، در این‌صورت اثبات، تنها، وقتی کامل است که راستی گزاره نه تنها به ازاء چند عدد طبیعی بلکه به

[۱۸] constructive procedures

[۱۹] destructive

[۲۰] hypothesized theorem

[۲۱] disproval

[۲۲] counterexample

ازاء جمیع اعداد طبیعی نشان داده شود. حتی اگر چنین قضیه‌ای به ازاء جمیع اعداد طبیعی به استثنای عدد ۲۰ راست باشد، دروغ است و درنتیجه باید تغییر یابد.

اما قضایایی هم وجود دارند که برحسب سور وجودی بیان شده اند. مثال‌هایی از آنها عبارتند از: صفر مثبتی از چندجمله‌ای خاصی موجود است؛ و یا با توجه به این موضوع، گزارهٔ « حیات هوشمندانه در سایر سیارات موجود است». شخص انتظار دارد که اثبات قضایایی که شامل سور وجودی اند از نمونه‌ای متفاوت با اثبات قضایای شامل سور عمومی، پیروی کند. همان‌طور که می‌دانید (با توجه به روابط منطقی) برای اثبات وجود باید، تنها یک حالت، که گزاره به ازاء آن درست است، به‌دست آورده شود. به عنوان مثال اگر شخص بخواهد وجود حیات هوشمندانه را در سیارات دیگر اثبات کند، تنها لازم است که یک موجود هوشمند از آن سیاره حاصل کند. به این ترتیب ممکن است اثبات قضایای شامل سور وجودی بسیار ساده بنظر برسند زیرا، آن‌ها برای اثبات تنها به یک حالت نیاز دارند. اما در عمل شخص با وضعیتی روبه‌رو می‌شود که در آن‌ها بدست‌آوردن حتی یک حالت ساده بی‌نهایت مشکل است، اما این وضع معمولاً موقتی است زیرا اغلب قضایای ریاضی، پس از تحلیل‌های دقیق و غالباً مفصل، یا ثابت می‌شوند یا مردود می‌گردند. [۱۳]

مثال ۹.۵.۲. نشان دهید که معادلهٔ $x^۴ - ۲x^۲ - ۳ = ۰$ دارای جواب حقیقی در فاصلهٔ بین $x = ۱$ و $x = ۲$ می‌باشد.

راه‌حل: ابتدا ملاحظه می‌کنید که $x^۴ - ۲x^۲ - ۳ = ۰$ یک چندجمله‌ای است، ویکی از خواص چندجمله‌ای‌ها این است که نمودارهای آن‌ها منحنی‌های متصلی بدون هیچ‌گونه نقاط بریدگی هستند.
اگر چندجمله‌ای به ازاء مقدار x، مثلاً $x = a$، منفی و به ازاء مقدار دیگر، $x = b$، مثبت باشد، در این‌صورت باید در جایی بین این دو مقدار صفر باشد. زیرا، از آنجا که منحنی چندجمله‌ای بریدگی ندارد، نمی‌تواند از مقدار منفی به مقدار مثبت بدون گذر از محور xها در محلی بین a و b جهش کند. در این مورد $x = ۱$ منجر به:

$$x^۴ - ۲x^۲ - ۳ = ۱ - ۲ - ۳ = -۴$$

و $x = ۲$ منجر به:

$$۲^۴ - ۲(۲)^۲ - ۳ = ۵$$

می‌شود. بنابراین، چون نمودار $x^۴ - ۲x^۲ - ۳ = ۰$ رسم شود، از دو نقطهٔ $(۱, -۴)$ و $(۲, ۵)$ می‌گذرد و از محور xها در محلی بین این دو نقطه عبور می‌کند. این ثابت می‌کند که جواب $x^۴ - ۲x^۲ - ۳ = ۰$ باید در جایی بین $x = ۱$ و $x = ۲$ موجود باشد.
حال که مشخص شد که جوابی موجود است، می‌توان برای به‌دست آوردن جواب دقیق معادله از روش‌های عددی یا کامپیوتر استفاده شود.
باید توجه داشت که کاملاً مفید است که پیش از صرف مقدار زیادی وقت برای به‌دست آوردن جواب یک معادله، بدانید که چنین جوابی موجود است یا خیر؟ [۱۳]

۱۴.۵.۲ اثبات با ساختن:

تعدادی از قضایا بیان می‌کنند که نوع خاصی از اشیاء وجود دارند. یک راه حل برای اثبات این قضایا بیان روش ساخت آن اشیاء می‌باشد. به این روش « اثبات با ساختن[۲۳] » می‌گویند.

مثال ۱۰.۵.۲. بین هر دو عدد گویای نامساوی، عدد گویای دیگری موجود است.

راه‌حل: در حالت کلی، دو عدد گویای نامساوی a و b را فرض کنید. از آنجا که یکی از این دو عدد بزرگ‌تر از دیگری است، فرض کنید که b عدد بزرگ‌تر باشد. واسطه حسابی a و b ، یعنی $\frac{a+b}{۲}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $a < b$، $(a+b) < (b+b)$. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\frac{(a+b)}{۲} < \frac{(b+b)}{۲} \qquad \text{یا} \qquad \frac{(a+b)}{۲} < b$$

است. یا به همین ترتیب،

$$\frac{(a+a)}{۲} < \frac{(a+b)}{۲} \qquad \text{یا} \qquad a < \frac{(a+b)}{۲}$$

است. به این ترتیب، اثبات شد که واسطهٔ حسابی دو عدد گویا بین آن‌ها قرار دارد. قبلاً اثبات شده است که مجموعات و حاصل‌ضرب‌های اعداد گویا به اعداد گویا منجر می‌شود. به همین دلیل $\frac{(a+b)}{۲}$ عدد گویایی است که بین a و b قرارمی‌گیرد، واین، نتیجه را اثبات می‌کند. [۱۳]
درفصل ۴ دربارهٔ اثبات با ساختن و اثبات وجودی، مجدداً بحث خواهد شد.

تفاوت اساسی بین راه‌حل‌های مثال ۹.۵.۲ و ۱۰.۵.۲ در این است که در مثال ۹.۵.۲ ادعا شد که جوابی از معادله مورد بحث بین $x = ۱$ و $x = ۲$ موجود است، و بعد این ادعا اثبات گردید، هرچند که وجود جواب اثبات شد، اما جواب واقعی حاصل نشد. درحالی‌که در مثال ۱۰.۵.۲ نه‌تنها ادعا شد که بین دو عدد گویای دلخواه a و b عدد گویای دیگری وجود دارد بلکه عملاً عدد گویای $\frac{(a+b)}{۲}$، که در شرایط صدق می‌کرد، به‌دست آمد. [۱۳]

۱۵.۵.۲ قاعده تبدیل متغیر:

در یک فرمول یا در قسمتی از آن می‌توان به‌جای یک متغیر معادل آن‌را قرار داد یا این‌که در تمام یک فرمول می‌توان متغیری را با متغیر دیگر جانشین کرد.

مثال ۱۱.۵.۲. انتگرال مقابل را حساب کنید. $I = \int x(۱ - x^۲)dx$

راه‌حل: تبدیل متغیر $y = ۱ - x^۲$ را قرار می‌دهیم که داریم: $dy = -۲xdx$ و خواهیم داشت:

$$I = \frac{-۱}{۲}\int ydy = \frac{-۱}{۴}y^۲ + c = \frac{-۱}{۴}(۱ - x^۲)^۲ + c$$

[۲۶]

---

[۲۳] proof by construction

۱۶.۵.۲ برهان از راه تعمیم:

یک ویژگی ریاضیات این است که احکام را به‌گونه کلی و عمومی بیان می‌کند. به‌طور مثال در هندسه وقتی بخواهند یک ویژگی مربوط به شکلی، مثلا مثلث را ثابت کنند آن شکل را به گونه کلی، و نه به‌گونه شکلی که اجزا آن مقادیر معلوم باشند، در نظر می‌گیرند.
در حساب و جبر و سایر شاخه‌های ریاضی نیز همین روش را به‌کار می‌برند، برای آن‌که رابطه‌ی مربوط به یک چیز یا چند مقدار را ثابت کنند، آن مقدار یا مقدارها را به‌صورت کلی و به‌گونه متغیر در نظر می‌گیرند و رابطه را درباره این متغیر یا متغیرها ثابت می‌کنند.
به‌عبارت دیگر، برای آن‌که حالت خاص یک ویژگی را ثابت کنند حالت کلی آن‌را درنظر می‌گیرند وثابت می‌کنند که شامل حالت خاص نیز می‌باشد.

مثال ۱۲.۵.۲. اثبات این‌که اگر عددی مثبت باشد، مجموع آن عدد با عکس آن بزرگتر یا مساوی با ۲ است.

راه‌حل: نابرابری همیشه برقرار $(a-۱)^۲ \geq ۰$ را در نظر می‌گیریم. از این نابرابری نتیجه می‌شود $a^۲+۱ \geq ۲a$. حال اگر a مثبت باشد از تقسیم دو طرف نابرابری بر a رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{a^۲+۱}{a} \geq ۲ \longrightarrow a+\frac{۱}{a} \geq ۲$$

[۲۶]

۱۷.۵.۲ برهان به کمک فرمول:

این‌گونه برهان، گونه‌ای از قاعده استنتاج تخصیص است. هرگاه یک ویژگی از راه تعمیم یعنی به‌صورت کلی ثابت شده و نتیجه آن به صورت یک فرمول بیان شده باشد، در هر حالت خاص فقط از این فرمول استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۳.۵.۲. برای محاسبه $\tan(۲۲/۵^\circ)$ داریم:

راه‌حل: برای این‌که $\cos(۴۵^\circ)$درجه را مشخص است، پس، از فرمول (قبلا ثابت شده) زیر استفاده می‌کنیم

$$\tan x = \sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}} \qquad x\text{حاده}$$

$$\tan(۲۲/۵^\circ) = \sqrt{\frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۱+\cos ۴۵^\circ}} = \cdots = \sqrt{۲}-۱$$

[۲۶]

۱۸.۵.۲ قاعده افناء

این روش که حالت خاصی از قاعده برگشت است بیشتر درباره قضیه‌های مربوط به حد [۲۴] به‌کار می‌رود. برای اثبات خاصیتی مربوط به یک متغیر در ازای یک مقدار که حد آن متغیر است، آن اثبات به ازای

[۲۴] limit

مقداری نزدیکتر به آن حد برگشت داده می‌شود، به این ترتیب که مقادیری را که متوالیاً به مقدار حدی نزدیک‌تر هستند برای متغیر در نظر می‌گیرند و ثابت می‌کنند که در ازای هر یک از این مقادیر، خاصیت موردنظر برقرار است.

مثال ۱۴.۵.۲. برای تعیین محیط دایره، این قضیه ثابت می‌شود که محیط دایره محصور است بین محیط‌های دو n ضلعی منتظم که یکی در دایره محاط و دیگری بر دایره محیط است.

اکنون n را متوالیا دو برابر می‌کنیم و هر چه عمل دو برابر کردن را بیشتر تکرار کنیم محیط‌های چند ضلعی‌ها به محیط دایره نزدیک‌تر می‌شوند و از این راه ثابت می‌شود که محیط دایره حد محیط چندضلعی منتظم محاطی یا محیطی آن است هرگاه تعداد ضلع‌های این چندضلعی‌ها به بی‌نهایت میل کند. [۲۶]

۱۹.۵.۲ رابطه برگشت

رابطه برگشت، شاخه‌ای از قاعده برگشت می‌باشد و در یک دنباله از اعداد، رابطه بین هر جمله با جمله‌های قبل را، رابطه برگشت می‌نامند.
از رابطه برگشت برای اثبات بسیاری از ویژگی‌های دنباله‌های اعداد و هم‌چنین در عملیات مربوط به اعداد استفاده می‌شود.

مثال ۱۵.۵.۲. یک روش برای محاسبه جذر اعداد:

برای تعیین جذر عدد حقیقی $a > 1$ با تقریب معین، دنباله با جمله عمومی

$$x_n = \frac{a + X_{n-1}}{1 + X_{n-1}}$$

و با جمله اول $X_1 = 1$ را در نظر می‌گیریم. جمله عمومی این دنباله یک رابطه برگشت است و ثابت می‌شود که هرگاه n به سمت بی‌نهایت میل کند این جمله دارای حد را X می‌نامیم، داریم:

$$X = \frac{a + x}{1 + x} \Longrightarrow x^2 = a \qquad , \qquad x = \sqrt{a}$$

یعنی حد جمله عمومی برابر با $\sqrt{a}$ است . در عمل از $n = 1$ آغاز می‌کنیم، و محاسبه را به ترتیب برای n = ۲ ، n = ۳ ، ... ، k = n ادامه می‌دهیم. هر چه k بزرگتر اختیار شود مقدار x_k به مقدار $\sqrt{a}$ نزدیک‌تر خواهد بود. [۲۶]

۲۰.۵.۲ تمثیل و اثبات هندسی

یکی از مشکلاتی که اغلب مردم با ریاضیات دارند این است که بیشتر آن به‌صورت مجرد[۲۵] نوشته شده است. به‌عنوان مثال، به‌جای بررسی حالت خاص $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ، اغلب حالت کلی $a + b$ را مورد بررسی قرار می‌دهد. واضح است که بیشتر مردم به چنین تعمیماتی عادت ندارند، و به این دلیل، بسیاری از مردم درک مجردات را مشکل می‌یابند. اما در صورتی که موضوعات تجرید مورد بحث با تمثیلات آشنا توضیح داده‌شوند، غالباً بسیار ساده می‌شوند. این تمثیلات می‌توانند مثال‌های عددی ساده، اشکال هندسی، یا ابزار ریاضی معروف باشند.

[۲۵] abstract from

استفاده از تمثیلات در توضیح مفاهیم پیچیده، نه تنها در ریاضیات بلکه در بسیاری از شاخه‌های دیگر مفید است. مثلاً اگر شخص بخواهد جریانات روحی بشری را برای یک متخصص کامپیوتر توضیح بدهد، ترسیم شباهت بین مغز بشر و یک کامپیوتر پیچیده می تواند مناسب باشد. به همین ترتیب، اگر شخص بخواهد احساسات نقاش با استعدادی را برای ریاضیدانی که هیچ آگاهی از هنر ندارد را شرح دهد ممکن است ارزش زیبایی‌شناسی یک اثبات جالب و یک نقاشی خوب را با هم مقایسه کند. هنگام استفاده از روش هندسی، شخص باید اطمینان حاصل کند که حالت کلی را توضیح می‌دهد و نه تنها حالت خاص را. (اثبات‌های هندسی یعنی اثبات‌های با شکل) [۱۳]

مثال ۱۶.۵.۲. فرض کنیم تابع $f(x)$ی داریم که بر دامنه اعداد حقیقی با حوزه زیرمجموعه اعداد حقیقی، تعریف شده است، و علاوه بر این در تساوی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صادق است. همچنین فرض کنیم که xی چنان موجود است که $f(x) \neq 0$. حال از ما خواسته شده است که خواص این تابع را به‌دست بیاوریم.

راه‌حل: ابتدا باید سعی کنیم که تابعی را بیابیم که دارای همان خاصیت تابع داده شده باشد. می دانیم که تابع نمایی دارای خاصیت $a^{x+y} = a^x + a^y$ است و با توجه به اینکه خواص توابع نمایی را می‌دانیم، باید بررسی کنیم آیا می‌توانیم خواص مشابهی برای تابع مورد نظر اثبات کنیم یا خیر؟ [۱۳]

۲۱.۵.۲ اثبات ابتدایی

اثبات ابتدایی، اثباتی است که از تحلیل‌های پیچیده استفاده نمی‌کند. تا مدت‌ها این باور وجود داشت که تئوری‌های خاصی مانند تئوری اعداد اول تنها به کمک ریاضیات پیشرفته قابل اثبات است، در حالی‌که با گذشت زمان، بسیاری از این نتایج با استفاده از تکنیک‌های ابتدایی به اثبات رسید.

فصل ۳

بررسی روش‌های اثبات در هندسه، جبر و آنالیز

در این فصل مفهوم موضوعات هندسه، جبر و آنالیز از چند دیدگاه بیان می‌شود و سپس ضمن بررسی روش‌های اثبات در جبر و آنالیز، این سوال مورد بررسی قرار می‌گیرد که آیا بین ساختارهای این دو موضوع و روش‌های اثبات، ارتباطی وجود دارد یا خیر؟
یعنی ما با توجه به ساختارهای خاص جبری ملزم به استفاده از روش‌های خاصی از اثبات‌ها هستیم یا خیر؟

۱.۳ مقدمه‌ای بر هندسه

پس از علم حساب یکی از شاخه‌های قدیمی ریاضی، هندسه می‌باشد. آثار موجود در موزه‌های مختلف دنیا حاکی از این است که هندسه در نزد بابلیان و آشوری‌ها شناخته شده بود و آن‌ها برای مقاصد خاصی از آن استفاده می‌کردند. بعدها این علم در مصر رونق یافت و یونانی‌ها آن‌را از مصریان آموختند. گویا اولین کسی که قوانین موجود را جمع‌آوری و به صورت کتابی درآورد، طالس [۱] بود ولی کتاب وی به مرور زمان از بین رفت. نظام بخشی و تابع اصول‌سازی که با طالس آغاز شده بود، مدت دو سده توسط فیثاغورس [۲] و شاگردانش ادامه یافت. پی‌ریزی منظم هندسه مسطحه توسط مکتب فیثاغورس را بقراط، ریاضیدانان یونانی در حدود ۴۰۰ سال قبل از میلاد مسیح در کتاب اصول سروصورتی داد. [۹]
سده چهارم پیش از میلاد ناظر شکوفایی آکادمی علوم و فلسفه افلاطون بود. افلاطون در کتاب جمهوری می‌نویسد«مطالعه ریاضیات دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به‌کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است» اقلیدس شاگرد مکتب افلاطون بود. در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد تمام دانش ریاضی زمان خود را جمع کرد و در کتابی به‌نام «مقدمات» تالیف کرد که این کتاب به مدت ۲۰۰۰

[۱] Tales

[۲] Pythagoras

سال بر تعلیم این ماده مسلط بود. [۹]

روش اصولی که اقلیدس به‌کار برده الگویی است برای آن‌چه که ما امروز **ریاضیات محض** می‌نامیم. منظور از محض در اینجا اندیشه محض است. هیچ تجربه عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضایا بود. چنانچه تاریخ نشان می‌دهد جای شگفتی است که ریاضیات محض اغلب کاربردهایی پیدا می‌کند که خالق آن هرگز تصور آن را هم نمی‌کند. پس از انتشار کتاب مقدمات، ریاضی‌دان‌ها و حتی خود اقلیدس به اصل پنجم با شک و تردید نگریستند و سعی کردند آن را به صورت یک قضیه از سایر اصول نتیجه بگیرند. [۹]

تلاش ریاضی‌دان‌ها برای اثبات اصل پنجم منجر به کشف قضیه‌های دیگری شد که هم ارز اصل پنجم می‌باشد. از آن‌جمله اصل پلی‌فیز می‌باشد که امروزه در کتاب‌های درسی با نام اصل اقلیدس نوشته می‌شود.

« از هر نقطه واقع در خارج خط، تنها یک خط به موازات آن می‌گذرد .»

بالاخره در قرن ۱۹ اثبات شد که اصل پنجم مستقل از سایر اصول می‌باشد و با تعویض آن هندسه‌های دیگری که موسوم به هندسه‌های نااقلیدسی هستند، کشف گردید. [۹]

به موازات تلاش برای اصل پنجم عده‌ای از دانشمندان به مسایل ترسیمات هندسی روی آوردند و سه مساله مشهور به صورت زیر را مطرح کردند:

۱ تثلیث زاویه: آیا می‌توان با پرگار و خطکش یک زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد.

۲ تربیع دایره: آیا می‌توان با پرگار و خطکش مربعی ترسیم کرد که مساحت آن برابر مساحت دایره مفروض باشد.

۳ تضعیف مکعب: آیا می‌توان با پرگار و خطکش مکعبی رسم کرد که حجم آن دو برابر حجم مکعب داده شده باشد.

جواب هر سه مساله در قرن ۱۹ با استفاده از نظریه گالوا داده شده است. جواب منفی است یعنی این کارها با پرگار و خطکش شدنی نیست. [۹]

هندسه همواره سهم برجسته‌ای از ریاضیات یونان را به خود اختصاص داده و به این لحاظ موضوع عمده‌ی کتاب «اصول» اقلیدس به آن مربوط است. کتاب اصول، نخستین و اصیل‌ترین نمونه از یک دستگاه بنداشتی صوری بود که الگویی برای نتیجه‌گیری ریاضی‌گونه به‌بار آورده است به هرحال، کشف هندسه‌های نااقلیدسی در فهم فلسفی و ریاضی طبیعت ریاضیات بسیار موثر بود. رابطه بین هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی با بسط هندسه‌ی تصویری -متاثر از سوالات هنرمندان در مورد پرسپکتیو است- آشکار می‌شود. [۱۲]

۱.۱.۳ دستگاه‌های بنداشتی

هر شاخه از ریاضیات نیاز به شناختی از ماهیت استدلال قیاسی دارد و دلایل تاریخچه‌ای مهمی برای این نقش هندسه وجود دارد، در این بخش، به معرفی اصطلاحات اساسی، برای یک بحث مستدل قیاسی پرداخته می‌شود تا تاثیر فوق‌العاده‌ی تاریخچه‌ی هندسه روی مفاهیم جدید دستگاه‌های استنتاجی آشکار گردد. [۱۲]

استدلال قیاسی که در جای جای یک ساختار منطقی منظم ظاهر می‌شود، دستگاه بنداشتی (قیاسی) ارایه می‌دهد. این چنین دستگاهی متشکل از اجزای زیر است:

۱: اصطلاحات تعریف نشده

۲: اصطلاحات تعریف شده

۳: بنداشت‌ها

۴: یک دستگاه منطقی

۵: قضایا [۱۲]

آوردن اصطلاحات تعریف نشده، به‌دلیل عدم امکان تعریف همه اصطلاحات بدون توسل به تعاریف دوری است. اصطلاحات تعریف نشده در دستگاههای هندسی اغلب، اما نه لزوماً، نقطه - خط - صفحه - روی را دربردارند . به اصطلاحات تعریف شده واقعا نیازی نیست، اما در کنار هر دستگاه بنداشتی به کرّات، عباراتی معین از اصطلاحات تعریف نشده استفاده می‌شود، پس بهتر است که یک اصطلاح جدید را به‌عنوان اصطلاحات تعریف شده برای هر یک از عباراتی این‌چنین، جایگزین شود، به‌طور مثال در هندسه‌ی اقلیدسی اصطلاح «خطوط موازی» به‌جای «خطوطی که همدیگر را قطع نمی‌کنند» جایگزین می‌شود. علاوه بر این اثبات همه‌ی عبارات ساخته شده از اصطلاحات تعریف شده و نشده‌ی دستگاه، بدون استدلال دوری، همانند تعریف همه‌ی اصطلاحات، غیرممکن است، بنابراین، یک مجموعه از عبارات را باید بدون اثبات پذیرفت. [۱۲]

تعریف ۱.۱.۳. عباراتی که بدون اثبات پذیرفته می‌شوند به بنداشت معروفند.

از روی بنداشت‌ها با توجه به قواعد استنتاج یک دستگاه منطقی (معمولا ارسطویی) عبارات دیگری ثابت می‌شوند که این عبارات را قضیه می‌نامیم.
بنداشت‌های یک دستگاه باید عبارت‌هایی باشند که توسط اصطلاحات دستگاه ساخته شوند، اما آن‌ها را نمی‌توان به دلخواه ساخت، چراکه یک دستگاه بنداشتی باید سازگار باشد. [۱۲]

۲.۱.۳ روش بنداشتی (اصولی)

روش بنداشتی (اصولی) روشی برای اثبات درستی نتایج است (برای برخی از نتایج مهم در ریاضیات اساساً دلیل‌های ناقصی داده شده بود. حتی این مطلب در نوشته‌های اقلیدس هم مشهود بود.) بنابراین دلیل‌ها به فرد اطمینان می‌دهند که نتیجه‌ها درست هستند. مثلا اگر بخواهیم از راه استدلال محض شما را متقاعد سازیم که حکم s_1 را بپذیرید، باید نشان دهیم که این حکم چگونه به‌طور منطقی از حکم دیگر s_2 که شما قبلا آن‌را پذیرفته‌اید، نتیجه می‌شود. ولی اگر شما s_2 را نپذیرید، باید نشان دهیم که حکم s_2 چگونه از حکم دیگر s_3 نتیجه می‌شود. این عمل را باید چند بار تکرار کنیم تا به حکمی برسیم که شما آن‌را می‌پذیرید و نیازی به اثبا ت آن نیست. [۹]
حکم اخیر نقش یک اصل یا بنداشت را ایفا می‌کند. اگر نتوانیم به حکمی برسیم که شما به عنوان مبانی استدلال بپذیرید، دچار تسلسل خواهید شد. پس باید دو شرط مسلم شود تا درستی برهانی را بپذیریم.

شرط اول: پذیرفتن احکامی به نام «اصل» یا «بنداشت» که به هیچ توجیهی نیاز نداشته باشند.

شرط دوم: توافق بر این‌که کی و چگونه حکمی « به صورت منطقی» از حکم دیگری نتیجه می‌شود یعنی توافق در برخی از قواعد استدلال.

کار مهم اقلیدس این بود که چند اصل ساده را انتخاب کرد و از آن‌ها ۴۶۵ قضیه دیگر را نتیجه گرفت که بسیاری از آن‌ها پیچیده و به صورت شهودی بدیهی نبودند. اقلیدس هندسه را بر پنج اصل موضوع ساخت. [۹]

مفاهیم اولیه (تعریف نشده‌ها) در هندسه: همان‌طور که بیان شد، ما در تعریف‌های موجودات ریاضی به یک عده اصطلاح نیاز داریم که آن‌ها را بدون تعریف می‌پذیریم و به آن‌ها اصطلاح مفاهیم اولیه یا تعریف نشده‌ها اطلاق می‌کنیم.

در هندسه مفاهیم اولیه عبارتند از نقطه، خط قراردارد یا دارند، بین، تساوی هندسی، صفحه، ...

به‌طور مثال: (نقطه A روی خط a قرار دارد.) (نقطه B بین نقاط A و C قرار دارد.)

تعریف ۲.۱.۳. صفحه: مجموعه نقاط و خطوطی است که گفته می‌شود همه آن‌ها بر آن قرار دارند.

[۹]

۲.۳ هندسه:

کلمه هندسه از واژه انگلیسی«جئو متری»[۳]از زبان یونانی، ریشه گرفته است. این کلمه از دو کلمه «جئو» به معنای زمین و «متری» به معنای اندازه‌گیری تشکیل شده است. بنابراین هندسه، اندازه‌گیری زمین است. مصریان اولیه، نخستین کسانی بودند که اصول هندسه را کشف کردند. هر سال، رودخانه نیل طغیان می‌کرد و نواحی اطراف رودخانه را سیل فرا می‌گرفت. این عمل، تمام علایم مرزی میان تقسیمات مختلف را از بین می‌برد و لازم می‌شد، دوباره هرکس زمین خود را اندازه‌گیری و مرزبندی نماید. آن‌ها روشی از علامت‌گذاری زمین‌ها با کمک پایه‌ها و طناب‌ها اختراع کردند. آن‌ها پایه‌ای را در نقطه‌ای مناسب در زمین فرو می‌کردند، پایه دیگر در جایی دیگر نصب می‌شد و دو پایه، با طنابی که مرز را مشخص می‌ساخت به یکدیگر متصل می‌شدند. با دو پایه دیگر، زمین محصور شده، محلی برای کشت یا ساختمان‌سازی میگشت. هندسه توسط یونانیان، قدم به مرحله‌ای علمی گذاشت. در آغاز تمام اصول هندسی، ابتدایی بود. اما در سال ششصد قبل از میلاد مسیح، آموزگار یونانی به نام تالس [۴] ، اصول هندسی را از لحاظ علمی ثابت کرد. [۱۵]

دسته‌بندی هندسه: هندسه مقدماتی به دو شاخه تقسیم می‌شود:

۱. هندسه مسطحه:در هندسه مسطحه، اشکالی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که فقط دو بعد دارند.

۲. هندسه فضایی: در هندسه فضایی، مطالعه اشکال هندسی سه بعدی است. این بخش از هندسه در مورداشکال سه بعدی چون مکعب‌ها، استوانه‌ها ،مخروط‌ها، کره‌ها است.

[۳] Geometry

[۴] thales

[۱۵]

هندسه مدرن: در هندسه مدرن، شاخه‌های زیر مورد مطالعه قرار می‌گیرند:

۱. هندسه تحلیلی

۲. هندسه برداری

۳. هندسه دیفرانسیل

۴. هندسه جبری

۵. هندسه محاسباتی

۶. هندسه اعداد صحیح

۷. هندسه اقلیدسی

۸. هندسه نا اقلیدسی

۹. هندسه تصویری

۱۰. هندسه ریمانی

۱۱. هندسه ناجابه‌جایی

۱۲. هندسه هذلولوی

۳.۳ جبر

در فصل‌هلی قبل گفته شد که مقدار بر دو نوع است: ۱-منفصل، مثل عدد که هرچند بسیار کوچک باشد باز بین هر عدد با عدد قبلی یا بعدی، فاصله‌ای وجود دارد. ۲-متصل، مثل خط که اجزاء آن پیوسته است.

قسمتی از ریاضیات که در آن بحث از کمیت منفصل می‌کنند، علم حساب نام دارد و آن قسمت را که در آن از کمیت متصل بحث می‌کنند، هندسه می‌خوانند.

می‌توان به‌جای اعداد حروف را به‌کار برد و با هر حرفی ممکن است هر مقداری را که بخواهیم تعیین کنیم، چنان‌که با حرف "a" ممکن است عدد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ و غیره را بنمایانیم و یا فرمولی مانند:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$$

رابطه مقادیر غیر معینی را نشان بدهیم. این‌گونه فرمول‌ها کار علمی است که به‌نام جبر موسوم است و به‌وسیله آن، عملیات حسابی را ساده می‌کنند و تعمیم می‌دهند. دکارت، با اختراع هندسه تحلیلی، معلوم داشت که یک شکل هندسی را نیز به وسیله یک معادله جبری می‌توان نشان داد و بدین ترتیب تغییرات یک شکل هندسی را به وسیله تغییرات مقادیری که یک معادله جبری رابطه آن‌ها را معلوم می‌دارد،

می‌توان شناخت. از اینجا نتیجه می‌گیریم که علم جبر (که از تعمیم کامل آن، نظریه توابع حاصل شده است) به تمام معنی علم ریاضی است که هم در مقادیر متصل و هم در مقادیر منفصل قابل اعمال است.
بدین وجه، ریاضیات، بر حسب کلیت متنازل و ترکیب و تفصیل متصاعد، شامل علوم ذیل است:
۱-نظریه توابع و جبر.
۲-علم حساب.
۳-هندسه
[۲۲]

۴.۳ روش‌های اثبات در جبر

۱.۴.۳ پیدایش جبر از دیدگاه دکتر وحیدی اصل

جبر، شاخه‌ای از ریاضیات است که پیدایش آن همانند حساب و هندسه به دوره‌های باستان بر می‌گردد. در رابطه با پیدایش جبر، وحیدی اصل در کتاب «تاریخ جبر»می‌نویسد: کلمه «الگبر»[۵]از صورت لاتین از کلمه عربی «الجبر» است که از عنوان کتاب «الجبر و مقابله» (علم بازکردن و به هم پیوستن و برابر هم نهادن است) محمد بن موسی خوارزمی، گرفته شده است. اصطلاح جبر و مقابله، به معنای جملات کاسته شده به طرف دیگر معادله و حذف جملات یکسان در دو طرف مقابل معادله است. اگر چه کلمه جبر در اصل اشاره به معادلات داشت، ولی امروزه معنای وسیع‌تری دارد. تعریف رضایت بخش آن مستلزم رویکرد این دو مرحله است:

۱: جبر اولیه (مقدماتی)، که عبارت است از بررسی معادله‌ها و روش حل آن‌ها.

۲: جبر نوین (جبر مجرد)، عبارت است از بررسی ساختارهای ریاضی همانند گروه‌ها، حلقه‌ها و میدان‌ها.

آغاز تعاریف رسمی ساختارهای جبری، به قرن نوزدهم برمی‌گردد. اصطلاح جبر مجرد، در برابر جبر مقدماتی یا جبر دبیرستانی قرار می‌گیرد. در نیمه اول قرن بیستم به آن جبر مدرن می‌گفتند. جبر مقدماتی، اشیاء و اعمال ریاضی را فارغ از ماهیت آن‌ها بررسی می‌کند. اعداد، ماتریس‌ها و توابع، از عناصر آن و اعمال دوتایی ضرب، جمع و ترکیب توابع، از اعمال آن به شمار می‌آیند. دسته‌بندی گروه‌ها و حلقه‌ها، از موضوعات اساسی جبر مجرد به حساب می‌آیند. [۱۵]

۲.۴.۳ جبر از دیدگاه دکتر مصاحب

غلامحسین مصاحب در کتاب ”تئوری مقدماتی“ در رابطه با جبر می‌نویسد: «جبر در قرون وسطی، جبر لفظی بوده است.» به عبارت دیگر بیان‌کردن هر معادله به صورت ضرایب مثبت. جبر خیام نیز در بند همین محدودیت‌ها بوده است. ”همچنین نامبرده در رابطه با اعداد جبری و اعداد متعالی می‌نویسد: ” عدد جبری، عددی است که ریشه یک معادله جبری صحیح الضرایب باشد. اگر این معادله تکین باشد

[۵] Algebra

آن عدد جبری، عدد صحیح جبری است. عدد متعالی، عددی است که جبری نباشد. این اعداد در قرن نوزدهم به‌دست آمدند. کانتور، نشان داد که مجموعه اعداد جبری، شمارا و مجموعه اعداد متعالی، ناشمارا هستند». [۱۵]

۳.۴.۳ جبر از دیدگاه استاد شهریاری

همچنین در رابطه با ماهیت جبر، شهریاری در کتاب ''سرگذشت ریاضیات'' می‌نویسد: « جبر به مفهوم گسترده خود، می‌تواند به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات تعریف شود که درباره دستگاه‌هایی از چیزهایی با طبیعت‌های مختلف، بحث می‌کند. در این دستگاه‌ها، عمل‌هایی انجام می‌شود که ویژگی‌هایی خاص خود را دارند و کم و بیش با جمع و ضرب‌ها شباهت دارند. اینگونه عمل‌ها، عمل‌های جبری نامیده می‌شوند. جبر، دستگاه‌هایی را تنظیم می‌کند که در آن‌ها عمل‌های جبری و ویژگی‌های این عمل‌ها تعریف شده است». بعضی از موضوعات عمومی جبر عبارتند از: گروه‌ها و زیرگروه‌ها، جایگشت‌ها و همریختی‌ها، گروه خارج قسمت و قضایای یکریختی، حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها، حلقه و زیر حلقه، هم‌ریختی و یک‌ریختی حلقه‌ها، ایده‌آل‌ها و حلقه‌های خارج قسمتی، ایده‌آل‌های ماکسیمال وغیره . [۱۵]

در جبر، انواع مختلف سیستم‌های مجرد مطالعه می‌شود، یکی از بنیادی‌ترین انواع این سیستم‌ها **گروه** نام دارد.

تعریف ۱.۴.۳. گروه: فرض کنید ۱) $\mathbb{G}$ عبارتست از یک مجموعه و $*$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{G}$ است.
۲) $*$ شرکت‌پذیر است.
۳) عضوی مانند e در $\mathbb{G}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر x در $\mathbb{G}$ داریم $x * e = e * x = x$
۴) به ازای هر عضو x در $\mathbb{G}$، عضوی مانند y در $\mathbb{G}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x * y = y * x = e$ در این‌صورت $\mathbb{G}$ همراه با عمل دوتایی $*$ گروه نامیده می‌شود و آن‌را با $(\mathbb{G}, *)$ نمایش می‌دهند. مانند $(\mathbb{Q}, +)$ یا $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ [۱۱]

تعریف ۲.۴.۳. گروه آبلی: گروه‌هایی که عمل آن‌ها جابه‌جایی است، گروه‌های آبلی نام دارند.[۱۱]

تعریف ۳.۴.۳. حلقه: فرض کنید $\mathbb{R}$ یک مجموعه و $+$ و . دو عمل دوتایی روی $\mathbb{R}$ باشند، به‌علاوه فرض کنید
۱) $(\mathbb{R}, +)$ یک گروه آبلی است.
۲) . شرکت‌پذیر است.
۳) قانون پخش‌پذیری روی $\mathbb{R}$ صادق است، یعنی برای هر $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ داریم: $(r_2 + r_3).r_1 = r_2.r_1 + r_3.r_1$ و $r_1.(r_2 + r_3) = r_1.r_2 + r_1.r_3$ آن‌گاه R را همراه با دو عمل $+$ و . یک حلقه می‌نامند و آن‌را به‌صورت $\mathbb{R}, +, .$ نمایش می‌دهند.[۱۱]

تعریف ۴.۴.۳. حلقه بخشی: حلقه $\mathbb{R}$ را یک حلقهٔ بخشی گویند اگر $\mathbb{R}$ دارای عضوی مانند ۱ که مخالف صفر است بوده و هر عضو غیر صفر آن یک یکه باشد. به‌عبارتی، حلقه بخشی این است که $\mathbb{R} - \{0\}$ تحت عمل ضرب تشکیل یک گروه دهد. [۱۱]

تعریف ۵.۴.۳. میدان: هر حلقه بخشی تعویض‌پذیر را یک، میدان می‌گویند. به‌عبارتی میدان این است که $\mathbb{R} - \{0\}$ تحت عمل ضرب تشکیل یک گروه آبلی دهد. [۱۱]

۵.۳ بررسی روش‌های اثبات بعضی از قضایا در جبر

برای کسب اطلاع از روش‌های مرسوم در جبر، در یک تحقیق و بررسی بر روی قضیه‌های کتاب جبر نوشته توماس دبلیو. هانگرفورد، قضیه‌ها بر حسب روش اثبات‌شان در سه جدول مجزا تفکیک شده‌اند و به‌صورت زیر بیان می‌شوند:
جدول ۱.۳ مربوط به قضایایی است که به روش برهان خلف اثبات شده‌اند.
جدول ۲.۳ مربوط به قضایایی است که به روش استقرا اثبات شده‌اند.
جدول ۳.۳ مربوط به قضایایی است که به روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.

جدول ۱.۳: قضیه‌های جبر

قضایایی که با روش برهان خلف اثبات شده‌اند

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۱۵	۰-۱-۶	اعداد صحیح	اصل استقرای ریاضی
۲	۲۲	۰-۲-۴	اصل خوش‌ترتیبی	اصل استقرای ترانسفینی
۳	۵۴	۰-۴-۳	گروه‌های دوری	فرض کنیم G یک گروه بوده و $a \in G$. هرگاه a مرتبه نامتناهی داشته باشد، آنگاه به ازای هر k که $m \mid k$ داریم $\lvert a^k \rvert = m/k$
۴	۷۴	۱-۷-۶	گروههای متقارن- متناوب	یک جایگشت در $S_n \quad (n \geqslant ۲)$ نمی‌تواند هم زوج و هم فرد باشد.
۵	۱۰۹	۲-۱-۱	گروه‌های آبلی آزاد	F یک پایه ناتهی دارد $\Longleftrightarrow$ F مجموع مستقیم خانواده‌ای نامتناهی از زیرگروههای دوری باشد.
۶	۱۲۹	۲-۳-۳	گروه آبلی با تولید متناهی	هرگاه گروه G در شرط زنجیر افزایشی یا کاهشی بر زیرگروههای نرمال صدق کند، آنگاه G حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی متناهی زیرگروه تجزیه‌ناپذیر است.
۷	۱۲۱	۲-۲-۶	گروه آبلی با تولید متناهی	فرض کنیم G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد یا G آبلی آزاد است، یا اعداد صحیح مثبتی مانند $p_۱^{n_۱},\dots,p_k^{n_k}$که صرفنظر از ترتیب اعضا منحصربه‌فردند، موجود می‌باشند بطوریکه $p_۱,\dots,p_k$ اعدادی اول و $s_۱,\dots,s_k$ اعدادی صحیح و مثبت بوده، و $G \cong Z_{p_۱}^{n_۱} \oplus \dots \oplus Z_{p_k}^{n_k} \oplus F$ که در آن F آبلی آزاد است.
۸	۱۸۵	۳-۹-۱	حلقه‌ها و هم‌ریختی‌ها	فرض کنیم R حلقه‌ای یکدار با واحد I_R مشخص و $n > ۰$ باشد. هرگاه R مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد آنگاه n اول است.
۹	۲۵۲	۳-۱۰-۶	مشتق صوری چندجمله‌ای‌های $\acute{F}$	
۱۰	۲۵۴	۳-۱۰-۶	مشتق صوری چندجمله‌ای‌ها	لم گاوس
۱۱	۲۵۷	۳-۱۵-۶	مشتق صوری چندجمله‌ای‌ها	محک آیزنشتاین
۱۲	۲۸۶	۴-۵-۲	مدول آزاد	فرض کنیم R حلقه‌ای یکدار بوده و F یک R -مدول آزاد با پایه نامتناهی X باشد. در این‌صورت هر پایه F همان اصلیت X را خواهد داشت.
۱۳	۲۸۸	۴-۷-۲	مدول آزاد	هرگاه V یک فضای برداری روی حلقه بخشی D باشد، آنگاه هر دو پایه V دارای یک اصلیت می‌باشند.
۱۴	۴۹۷	۶-۲-۲	از هم جدایی خطی و جدایی‌پذیری	فرض کنیم C یک میدان به‌طور جبری بسته با زیرمیدان‌های F, E, K باشد بطوریکه $K \subset E \cap F$. در اینصورت، E و F روی K از هم‌جدایی خطی‌اند$\Longleftrightarrow$ F و Eروی K از هم‌جدای خطی باشند.
۱۶	۲۸۶	۶-۱۰-۲	از هم جدایی خطی و جدایی‌پذیری	F و $K^{\frac{۱}{p^\infty}}$ روی از هم جدایی خطی‌اند.
۱۶	۵۸۰	۸-۴-۱	شرایط زنجیری	اگر مدول A در شرایط زنجیر افزایشی (کاهشی) بر زیرمدول‌ها صدق کند آنگاه در شرایط ماکزیمال (مینیمال) بر زیرمدول‌ها صدق می‌کند.

ادامه در صفحه بعدی

(ادامه در صفحه بعدی) قضایایی که با روش خلف می‌شوند

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱۷	۵۸۵	۱-۱۱-۸	شرایط زنجیری	اگر مدول ناصفر A دارای سری ترکیبی باشد آنگاه در شرایط زنجیر افزایشی و کاهشی بر زیرمدول‌ها صدق می‌کند.
۱۸	۵۸۹	۲-۲-۸	ایده‌آل‌های اول	هرگاه S زیر مجموعه‌ای ضربی از حلقه R و جدا از ایده‌آل I ی R باشد، آنگاه ایده‌آلی مانند P وجود دارد که در مجموعه تمام ایده‌آلهای R جدا از S و شامل I ماکزیمال است و P اول می‌باشد.
۱۹	۵۸۹	۲-۳-۸	ایده‌آل‌های اول	فرض کنیم K زیرحلقه‌ای از حلقه تعویض‌پذیر R باشد هرگاه $P_1,\dots,P_n$ ایده‌آلهای اولی از R باشند بطوریکه $K \subset P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ ، آنگاه به ازای i ی، $K \subset P_i$
۲۰	۵۹۰	۲-۴-۸	ایده‌آل‌های اول	هرگاه R حلقه یکدار و تعویض‌پذیری بوده و P ایده‌آلی باشد که در مجموعه تمام ایده‌آلهای R که با تولید متناهی نیستند ماکزیمال است، آنگاه P اول خواهد بود.
۲۱	۵۹۸	۳-۵-۸	تجزیه اولیه	شرایط مدولها
۲۲	۶۰۰	۳-۶-۸	تجزیه اولیه	ایده‌آلهایی که تجزیه اولیه تحویل یافته دارند.
۲۳	۶۰۴	۴-۱-۸	حلقه‌ها و مدول‌های نوتری	حلقه تعویض‌پذیر و یکدار R نوتری است$\Longleftrightarrow$ هر ایده‌آل اول R با تولید متناهی باشد.
۲۴	۶۰۴	۴-۴-۸	حلقه‌ها و مدول‌های نوتری	قضیه اشتراکی کرول
۲۵	۶۰۶	۴-۵-۸	حلقه‌ها و مدول‌های نوتری	لم ناکایاما
۲۶	۶۲۲	۱۱-۵-۸	توسیع‌های حلقه	فرض کنیم S یک توسیع از حلقه R و P یک ایده‌آل اول در R باشد. هرگاه Q و $\acute{Q}$ ایده‌آل‌های اولی در S باشند بطوریکه $Q \subset \acute{Q}$ و هر دوی Q و $\acute{Q}$ روی P قرار داشته باشند، آنگاه $Q = \acute{Q}$
۲۷	۶۲۸	۵-۶-۸	دامنه‌های ددکیند	هرگاه R یک دامنه ددکیند باشد، آنگاه هر ایده‌آل اول ناصفر R معکوس‌پذیر و ماکزیمال است
۲۸	۶۲۵	۳-۱-۹	حلقه‌های ساده اولیه	مدول چپ A روی حلقه R ساده است $\Longleftrightarrow$ A به ازای ایده‌آل چپ ماکزیمال منطقی مانند I با R/I یکریخت باشد.
۲۹	۶۵۵	۹-۱-۹	حلقه‌های ساده اولیه	فرض کنیم R یک حلقه چگال از درون‌ریختی‌های فضای برداری V روی حلقه بخشی D باشد. در این‌صورت، اگر R آرتینی چپ]راست[باشند آنگاه $dim_D V$ متناهی است، که داریم $R = Hom_D(v,v)$
۳۰	۶۸۳	۳-۳-۹	حلقه‌های نیم ساده	قضیه (ودربورن - آرتین)
۳۱	۷۱۰	۲-۵-۹	جبرها	فرض کنیم A یک K -جبر باشد. اگر زیرمجموعه I از A یک ایده‌آل جبر چپ ماکزیمال منتظم باشد. آنگاه I یک ایده‌آل چپ ماکزیمال منتظم حلقه A است.
۳۲	۷۱۴	۸-۵-۹	جبرها	هرگاه K دارای مشخص اول P و $K(G)$ نیمه‌ساده باشد، آنگاه P ، $\lvert G\rvert$ را عاد می‌کند. (مشکه) (Maschke)
۳۳	۷۲۰	۳-۶-۹	جبرهای بخشی	

پایان جدول

جدول ۲.۳: قضیه‌های جبر

قضایایی که با برهان استقرا اثبات شده‌اند

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۱۵	۶-۲-۰	اعداد صحیح	قضیه بازگشتی
۲	۱۷	۶-۶-۰	اعداد صحیح	هرگاه a,b اعدادی صحیح و نسبت به هم اول باشند و $a\|bc$ آنگاه $a\|c$
۳	۱۸	۶-۷-۰	اعداد صحیح	قضیه اساسی حساب
۴	۳۱	۸-۱۲-۰	اعداد صحیح	فرض کنیم A یک مجموعه بوده و به ازای هر عدد صحیح $n \geqslant 1$ ، $A^n = A \times A \times \dots \times A$ (nعامل) هرگاه A متناهی باشد آنگاه $\lvert A^n\rvert = \lvert A\rvert^n$ و اگر A نامتناهی باشد آنگاه $\lvert A^n\rvert = \lvert A\rvert$
۵	۴۲	۶-۱-۱	نیمگروه	قانون شرکت‌پذیری تعمیم یافته

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*) **قضایایی که با روش استقرا اثبات می‌شوند**

ردیف	صفحه	قضیه شماره	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۶	۴۴	۱-۱-۹	نیمگروه و تکگون	هرگاه G گروه (نیم‌گروه یا تکگون) باشد و $a \in G$ آنگاه به ازای $m, n \in \mathbb{Z}$ ۱) $a^m a^n = a^{m+n}$ ۲) $(a^m)^n = a^{mn}$
۷	۱۱۳	۲-۱-۶	گروه آبلی آزاد از رتبه متناهی	
۸	۱۱۸	۲-۲-۲	گروه آبلی با تولید رتبه متناهی	هر گروه آبلی با تولید متناهی G مساوی مجموع مستقیم متناهی گروههای دوری است که هر یک نامتناهی یا از مرتبه توانی از یک عدد اول است.
۹	۲۲۰	۲-۷-۳	گروه آبلی آزاد از رتبه متناهی	قضیه کرول - اشمیت
۱۰	۱۵۷	۲-۱-۶	گروه‌های پوچ‌توان حل‌پذیر	حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی متناهی گروه پوچ‌توان، پوچ‌توان است.
۱۱	۱۶۲	۲-۷-۱۴	گروه‌های پوچ‌توان حل‌پذیر	حکم (پی . هال) Hall . P
۱۲	۱۶۲	۲-۷-۱۴	حلقه‌ها و هم‌ریختیها	اگر R یک حلقه باشد. ۱)به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ و هر $a, b \in R$ داریم $(na) = n(ba) = n(ab)$ ۲) به ازای هر $a_i, b_j \in R$ داریم $(\sum_{i=1}^{n})(\sum_{j=1}^{m}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$
۱۳	۱۵۷	۲-۱-۶	حلقه‌ها و هم‌ریختیها	قضیه دو جمله‌ای
۱۴	۱۹۳	۳-۳-۶	ایده‌آلها	
۱۵	۲۰۴	۳-۲-۲۵	ایده‌آلها	قضیه باقی‌مانده چینی
۱۶	۲۳۳	۳-۵-۲	حلقه‌های چندجمله‌ایها	
۱۷	۲۴۷	۳-۶-۲	تجزیه در حلقه‌های چندجمله‌ای	الگوریتم تقسیم
۱۸	۲۵۰	۳-۶-۷	تجزیه در حلقه‌های چندجمله‌ای	
۱۹	۲۵۶	۳-۶-۱۴	مشتق صوری چندجمله‌ای‌های $\acute{f}$	
۲۰	۳۴۹	۴-۶-۹	مدول‌ها روی دامنه ایده‌آل اصلی	
۲۱	۴۰۳	۵-۳-۲	میدان‌های تجزیه‌گر	
۲۲	۴۰۷	۵-۳-۸	میدان‌های تجزیه‌گر	
۲۳	۴۳۹	۵-۵-۸	میدان‌های متناهی	
۲۴	۴۴۸	۵-۶-۱۲	جدایی‌پذیری	
۲۵	۴۶۷	۵-۸-۲	توسیع‌های دایره‌بر	
۲۶	۴۹۰	۶-۱-۵	پایه‌های متعالی	
۲۷	۵۰۳	۶-۲-۱۰	از هم جدایی خطی	جدایی پذیری
۲۸	۵۳۵	۷-۲-۱۲	رتبه و تعادل	
۲۹	۵۶۶	۷-۴-۹	تجزیه یک تبدیل خطی و تشابه	
۳۰	۵۷۱	۷-۵-۱	چندجمله‌ای مشخص	
۳۱	۵۸۲	۶-۱-۸	شرایط زنجیری	

پایان جدول

جدول ۳.۳: قضیه‌های جبر

قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۱۶	۰-۶-۳	اعداد صحیح	الگوریتم تقسیم
۲	۲۷	۰-۸-۵	اعداد اصلی	قضیه شرودر - برنشتاین Schroder - Bernstein
۳	۲۸	۰-۸-۷	قانون تثلیث	اعداد اصلی

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*) **قضایایی که با برهان مستقیم اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	قضیه شماره	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۴	۶۸	۶-۵-۱	نرمال ، هم‌ریختی‌ها	قضیه اول یکریختی‌ها
۵	۶۸	۹-۵-۱	گروه‌های خارج قسمتی و نرمال	قضیه دوم یکریختی‌ها
۶	۶۸	۱۰-۵-۱	نرمال ، هم‌ریختی‌ها	قضیه سوم یکریختی‌ها
۷	۱۰۳	۵-۹-۱	مولدها	قضیه وان دایک Dyck Van
۸	۱۳۱	۵-۳-۲	گروهْهای آبلی با تولید متناهی	لم فیتینگ Fitting
۹	۱۴۰	۶-۴-۲	عمل یک گروه بر مجموعه	نتیجه کیلی
۱۰	۱۴۵	۶-۴-۲	گروه متناهی	قضیه کشی Cauchy
۱۱	۱۴۷	۷-۵-۲	ویژگی گروه متناهی	قضیه اول زیلوف Sylow
۱۲	۶۸	۹-۵-۲	ویژگی زیرگروه متناهی	قضیه دوم زیلوف
۱۳	۶۸	۱۰-۵-۲	گروه متناهی	قضیه سوم زیلوف
۱۴	۱۷۱	۹-۸-۲	سری‌های نرمال و زیر نرمال	لم زاسن هاوس haus Zassen
۱۵	۱۷۲	۱۰-۸-۲	سری‌های نرمال و زیر نرمال	قضیه شریر Schreier
۱۶	۱۷۴	۱۱-۸-۲	سری‌های نرمال و زیر نرمال	قضیه ژردان - هولدر
۱۷	۱۹۶	۱۰-۲-۳	ایده‌آل‌ها و حلقه ها	قضیه اول یکریختی (گروهها - حلقه‌ها)
۱۸	۱۹۶	۱۲-۲-۳	ایده‌آل‌ها و حلقه ها	قضیه دوم یکریختی (گروهها - حلقه‌ها)
۱۹	۱۹۶	۱۲-۲-۳	ایده‌آل‌ها و حلقه ها	قضیه سوم یکریختی (گروهها - حلقه‌ها)
۲۰	۲۲۱	۴-۴-۳	حلقه کسرها (خارج قسمت)	تعریف حلقه خارج‌قسمت‌ها
۲۱	۲۳۲	۱-۵-۳	حلقه های چندجمله‌ای‌ها	حلقه چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{R}$
۲۲	۲۴۸	۳-۶-۳	تجزیه در حلقه های چندجمله‌ای‌ها	قضیه باقی‌مانده
۲۳	۲۵۷	۱۷-۱-۴	مدول‌ها - همریختیها - دنباله‌های کامل	لم پنج کوتاه
۲۴	۳۳۳	۱۰-۵-۴	ضرب‌های تانسوری	شرکت‌پذیری الحاقی
۲۵	۳۸۴	۵-۲-۵	قضیه اساسی	قضیه اساسی نظریه گالوا
۲۶	۳۹۴	۱۵-۲-۵	قضیه اساسی	قضیه آرتین
۲۷	۴۱۲	۱۲-۳-۵	میدان‌های تجزیه‌گر	قضیه اساسی تعمیم یافته
۲۸	۴۱۷	۱۹-۳-۵	قضیه اساسی جبر	قضیه اساسی جبر
۲۹	۴۵۰	۱۵-۶-۵	جدایی پذیری	قضیه عنصر اولیه
۳۰	۴۵۷	۶-۷-۵	توسیع‌های دوری	قضیه ۹۰ هیلبرت
۳۱	۴۸۲	۹-۸-۵	معادله کلی از درجه n	قضیه آبل Abel
۳۲	۵۰۷	۱۲-۲-۶	از هم جدایی خطی و جدایی‌پذیری	نتیجه محک مک لین MCLane
۳۳	۵۷۲	۲-۵-۷	مقادیر ویژه	قضیه کیلی همیلتون HamiLton
۳۴	۶۲۱	۹-۵-۸	توسیع‌های حلقه	قضیه رو قرار داشتن
۳۵	۶۲۲	۱-۵-۸	توسیع‌های حلقه	قضیه بالا رفتن
۳۶	۶۴۱	۲-۷-۸	صفرهای هیلبرت	لم نرمال سازی نوتر
۳۷	۶۴۴	۴-۷-۸	قضیه صفرهای هیلبرت	صفرهای هیلبرت
۳۸	۶۵۷	۱۰-۱-۹	حلقه‌های ساده و اولیه	لم شور Schur
۳۹	۶۵۸	۱۲-۱-۹	حلقه‌های ساده و اولیه	قضیه چگالی ژاکوسبون
۴۰	۶۶۰	۱۴-۱-۹	حلقه های نیمه ساده	قضیه ودربورن - آرتین
۴۱	۷۰۵	۸-۴-۹	رادیکال اول - حلقه های اول و نیمه اول	قضیه گولدی

پایان جدول

طبق این بررسی تعداد ۳۳ قضیه از این کتاب به روش برهان خلف، و تعداد ۴۱ قضیه به روش استقرا، و بقیه قضیه‌ها به روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند که فقط بخشی از آن‌ها در جدول ۳.۳ ارایه شده است.

۶.۳ روش‌های اثبات در آنالیز

۱.۶.۳ مفهوم لغوی آنالیز

معنی لغوی آنالیز «تجزیه» و «ریزکردن» است و معنای اصطلاحی آن «نقاط استثنایی» است؛ در واقع آنالیز ریاضی به نقاط استثنایی ریاضی می‌پردازد. به‌طور کلی می‌توان گفت که: آنالیز، نام عمومی آن بخش‌هائی از ریاضیات است که با مفاهیم حد و همگرایی مربوط‌اند و در آن‌ها موضوعاتی مثل پیوستگی و انتگرال‌گیری و مشتق‌پذیری و توابع غیرجبری بررسی می‌شود. این موضوعات را اغلب در عرصه اعدادحقیقی یا اعدادمختلط و توابع مربوط به آن‌ها بحث می‌کنند؛ ولی می‌توان آن‌ها را در هر فضائی از موجودات ریاضی که در آن مفهوم نزدیکی، فضای توپولوژیک یا فاصله، فضای متریک وجود دارد، به‌کار برد. آنالیز ریاضی از کوشش‌های مربوط به دقیق‌کردن مبانی و تعریف‌های حسابان، سر برآورده است. آنالیز ریاضی، زمینه‌ای ظریف و دقیق است که در واقع به نقاط استثنایی ریاضیات می‌پردازد. در واقع حسابان قسمت کاربردی و بدون در نظر گرفتن جزئیات آنالیز محسوب می‌شود. [۱۵]

۷.۳ تقسیم‌بندی آنالیز

۱. **آنالیز حقیقی:** به مطالعه بر روی حدها، مشتقات، انتگرال‌ها و سری‌های توانی می‌پردازد.

۲. **آنالیز تابعی:** به معرفی نظریه‌هایی از قبیل فضاهای باناخ و نیز فضاهای هیلبرت می‌پردازد.

۳. **آنالیز هارمونیک:** سری‌های فوریه را مورد مطالعه قرار می‌دهد.

۴. **آنالیز مختلط:** به بررسی توابع مختلط و خواص این توابع از قبیل مشتق‌پذیری و انتگرال‌گیری می‌پردازد. [۱۵]

تاریخچه و ساختار آنالیز: یکی ازکارهای بسیار جالب دوران تاریخ علوم، طرح ”بی‌نهایت کوچک‌ها“ در سده‌ی هفدهم بود که کلیه روش‌های ریاضی را دگرگون کرد و دامنه وسیع و روش جالب توجه آن، باعث به وجودآمدن علوم جدیدی شد. حساب بی‌نهایت کوچک‌ها درباره‌ی مقادیر کوچک بحث می‌کرد، خارج قسمت آن‌ها، «حساب دیفرانسیل» و مجموع آن‌ها، «حساب انتگرال» را به وجود آورد. در اصل این حساب، زاییده‌ی دو نوع مساله هندسی، محاسبه‌ی مساحت‌های منحنی‌الخط و حجم‌ها است. اساس «حساب انتگرال» و جستجوی مماس بر منحنی‌های مختلف، «حساب دیفرانسیل» به‌شمار می‌رود. دو سده‌ی پیش از میلاد، ارشمیدس [۶] این اصل را پیش‌بینی کرد، ولی جستجوهای او به وسیله‌ی دیگران

[۶] Arachimedes

تعقیب نشد تا در سده‌ی هفدهم که این حساب، شروع به پیشرفت فوق‌العاده‌ای کرد؛ بطوریکه در تمام رشته‌های علمی و عملی نفوذ کرد و به‌عنوان وسیله‌ی دقیق و نیرومند برای حل مساله‌های موجود و یا کشفیات بعدی به‌شمار رفت، توسعه‌ی آن بخصوص در سده‌ی نوزدهم سبب بوجود آمدن علوم جدیدی شد که مجموع آن‌ها را آنالیز ریاضی نام نهادند. [۱۵]

یونانی‌ها با مطالعات زیادی که درباره‌ی مساله تربیع (تبدیل دایره به مربع) (محاسبه‌ی مساحت‌ها) و تضعیف مکعب (تبدیل به مکعب) (محاسبه‌ی حجم‌ها) در سده‌ی چهارم کردند، به نخستین اندیشه‌های «بی‌نهایت کوچک ها» برخوردند، به زودی دانستند که مساحت دایره را می‌توان، حد مساحت‌های چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی آن دانست، به شرط اینکه، مرتبه‌ی تعداد اضلاع آنها را دو برابر کنیم؛ ولی با وجود اینکه با حد سروکار داشتند، کمتر توانستند آنرا درک و معین کنند؛ تا اینکه ادوکس، این مشکل را با آوردن روش «کوچک نمودن» برطرف کرد. اوایل سده‌ی شانزدهم در ایتالیا، کارهای ارشمیدس را در پرتو اطلاعات جدیدی که درباره‌ی حدود بدست آوردند، تکمیل کردند. دانشمندان، هریک به تنهائی راه‌حل بعضی مساله‌ها را جستجو می‌کردند. کاوالیری در ۱۶۲۹، نظریه‌ی خود را به‌نام «هندسه‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها» بوجود آورد وکوششی برای یافتن مجموع این بی‌نهایت کوچک‌ها که اساس حساب انتگرال بود، به‌کار برد. [۱۵]

در سال ۱۶۶۴ نیوتن [۷] ، سری‌های بی‌نهایت را مورد تحقیق قرار داد و هم‌زمان ثابت کرد که قاعده‌ی معمولی بسط در مورد تمام مقادیرn، همچنان‌که امروز معلوم شده است، از لحاظ همگرایی معتبر است. در سال ۱۶۶۵ نوشتن کتاب حساب انتگرال و دیفرانسیل را آغاز کرد، موضوعی که آن‌را حساب تفاضل می‌نامند و برای تعیین تانژانت و شعاع خمیدگی در هر نقطه از منحنی، به‌کار می‌رود. [۱۵]

در ۱۶۸۴ ریاضی‌دان بزرگ آلمانی، لایب‌نیتز اثر بزرگ و جالبی به‌وجود آورد که در آن به مطالعه‌ی روش‌های مختلفی پرداخت به‌وسیله‌ی دانشمندان درباره‌ی روش‌های علم جدید بیان شده بود. از آنالیز دکارت [۸] و پاسکال [۹] ، عنصرهای یک علم جدید را بیرون کشید و نام آن‌را آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها گذاشت؛ او متوجه این نکته شد که حساب انتگرال، درحقیقت عکس حساب دیفرانسیل است. گسترش کشفیات لایب‌نیتز به اندازه‌ای بود که تا سده‌ی هجدهم، هنوز کارهای او نتوانست تمام و کامل شود. [۱۵]

همچنین در اوایل سده‌ی هفدهم، مباحثه‌ای بین این دو دانشمند پیش آمد؛ نیوتن به لایب‌نیز تهمت زد و مدعی شد کشفی را که او در سال ۱۶۷۱ انجام داده است، لایب‌نیتز به نام خود کرده‌است. این جریان در سده‌ی نوزدهم پس از آنکه مدارک چاپ نشده‌ای بدست آمد، روشن شد و ثابت گردید که نیوتن و لایب‌نیتز هریک به‌طورمستقل و تقریبا دریک زمان اصول حساب بی‌نهایت کوچک ها را کشف کرده بودند. کلیه دانشمندان به سرعت شیفته و دلباخته علم جدید شدند. تیلور [۱۰] و ماکلرن پیشرفت‌های جدیدی به رشته‌ها دادند و نظریه ی رشته‌های صحیح را بوجود آوردند. هوپیتال [۱۱] با عنوان آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها این «حساب جدید» را با در نظر گرفتن اطلاعات لایب‌نیتز در فرانسه منتشر کرد. خانواده برنولی هم که قسمت زیادی از سده‌ی هفدهم و هجدهم، در بسیاری از آکادمی‌های اروپا تعلیم

[۷] Newton

[۸] Descartes

[۹] Pascal

[۱۰] Taylor

[۱۱] Hopital

می‌دادند، سهم زیادی در انتشار و پیشرفت این علم دارند. اویلر [۱۲] افق جدیدی که به وسیله نیوتن و لایب‌نیتز باز شده بود را توسعه داد. او نظریه انتگرال را تکمیل نمود و گسترش بعضی از رشته‌ها را معین کرد. [۱۵]

در سده‌های هفدهم و هجدهم سرفصل های آنالیزی از قبیل حساب‌تغییرات، معادلات دیفرانسیل با مشتقات‌جزئی و آنالیز فوریه در زمینه‌های کاربردی، توسعه فراوانی یافتند و از آن‌ها به‌طور موفقیت‌آمیزی در زمینه‌های صنعتی استفاده شد. در سده هجدهم، تعریف مفهوم تابع به موضوع بحث برانگیز تبدیل شد. در سده نوزدهم، کوشی [۱۳] با معرفی سری‌های کوشی، اولین کسی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال را بر پایه منطقی استوار کرد. در اواخر همین سده، وایرشتراس [۱۴] مفهوم حد را معرفی کرد و نتایج کار خود را بر روی سری‌ها ارایه داد. در اوایل قرن بیستم، هیلبرت برای حل معادلات انتگرال، فضای هیلبرتی را تعریف و معرفی کرد. از آخرین تحولات در آنالیز نیز می‌توان به پایه‌گذاری آنالیز تابعی توسط یک دانشمند لهستانی به نام «باناخ [۱۵] » نام برد. [۱۵]

۸.۳ بررسی روش‌های اثبات بعضی از قضایا در آنالیز

اکنون روندی مشابه بخش قبل، بر روی قضایای کتاب اصول آنالیز ریاضی نوشته والتر رودین انجام داده و قضیه‌ها را بر حسب روش اثبات‌شان در چهار جدول مجزی به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند.
جدول ۴.۳ مربوط به قضایایی است که به روش استقرا اثبات شده‌اند.
جدول ۵.۳ مربوط به قضایایی است که به روش برهان مستقیم شده‌اند.
جدول ۶.۳ مربوط به قضایایی است که به روش برهان خلف اثبات شده‌اند.
جدول ۷.۳ مربوط به قضایایی است که با سایر روش‌ها اثبات شده‌اند.

جدول ۴.۳: قضیه‌های آنالیز

قضایایی که با روش استقرا ثابت شده‌اند.

ردیف	صفحه	قضیه شماره	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۳۷	۲-۱۳	مجموعه‌های شمارش‌پذیر	فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر، و B_n مجموعه تمام n تایی‌های مرتب $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ باشد که در آن‌ها $a_k \in A(k = 1, \dots, n)$ و عناصر $a_0, a_1, \dots, a_n$ لزوماً متمایز نیستند، در اینصورت B_n ها شمارش‌پذیر خواهند بود.
۲	۲۳۲	۸-۱۸	تابع گاما	به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم : $\Gamma(n+1) = n!$
۳	۲۶۶	۹-۲۳	اصل انقباض	هرگاه x یک فضای متری تام و φ یک انقباض ازx به توی x باشد، آنگاه یک و فقط یک x هست که $\varphi(x) = x$
۴	۳۰۲	۱۰-۷	نگاشتهای اولیه	فرض کنیم F یک $\acute{\xi}$ نگاشت از مجموعه باز $E \subset R^n$ به توی R^nباشد، $E \ni O, 0 = F(0)$ و$\acute{F}(0)$ معکوس‌پذیر باشد. در اینصورت، همسایگی ازO در R^n هست که در آن نمایش $F(x) = B_1 \dots B_{n-1} G_n O \dots O G_1(x)$ معتبر باشد.

ادامه در صفحه بعدی

[۱۲] Oyler

[۱۳] «OgustanLuiKosi

[۱۴] «Vayerstras

[۱۵] Banakh

(*ادامه در صفحه بعدی*) **قضایایی که با روش استقرا شده‌اند.**

ردیف	صفحه	قضیه شماره	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۵		۳۳-۱۰	قضیه استوکس	قضیه استوکس
۶	۳۳۸	۳۹-۱۰	فرم‌های بسته و کامل	هرگاه $E \subseteq R^n$ محدب و باز بوده، $K \geqslant 1$ ، یک فرم K بعدی از رده $\acute{\xi}$ در E باشد، و $dw = 0$ ،آنگاه یک فرم $(K-1)$ بعدی در E مانند λ هست بطوریکه

پایان جدول

جدول ۵.۳: قضیه‌های آنالیز

قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.

ردیف	صفحه	قضیه شماره	بحث مورد موضوع	قضیه صورت یا قضیه نام
۱		۲۰-۱	میدان حقیقی	الف: خاصیت ارشمیدسی R ب: چگال بودن Q در R
۲	۱۴	۲۵-۱	میدان مختلط	اصول موضوعی مدان مختلط
۳	۱۸	۳۵-۱	میدان مختلط	نامساوی شوارتز (Schwarz)
۴	۵۰	۴۱-۲	مجموعه‌های فشرده	قضیه هاینه بورل (Heine–Borel)
۵	۵۱	۴۲-۲	مجموعه‌های فشرده	قضیه وایراشتراس (Weierstrass)
۶	۷۶	۲۶-۳	سریها با جملات نامنفی	(سری هندسی)هرگاه $0 \le x \le 1$ آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ اگر $x \geq 1$، سری واگرا می‌باشد.
۷	۷۸	۲۸-۳	سریها با جملات نامنفی	$\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $p > 1$ ، و $\sum \frac{1}{n^p}$ واگراست اگر $p \le 1$
۸	۷۸	۲۹-۳	سریها با جملات نامنفی	هرگاه $p > 1$ ، $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ همگراست. چنان‌چه $p \le 1$ ، سری واگراست.
۹	۸۰	۳۱-۳	عدد e	$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
۱۰	۸۱	۳۳-۳	آزمون‌ها	آزمون ریشه
۱۱	۸۲	۳۴-۳	آزمون‌ها	آزمون نسبت
۱۲	۸۸	۳۵-۳	همگرایی مطلق	هرگاه $\sum a_n$ را به‌طور مطلق همگرا باشد، این سری همگرا نیز است.
۱۳	۸۹	۴۷-۳	همگرایی مطلق	هرگاه $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$ ، آنگاه $\sum(a_n+b_n) = A+B$ و به ازای هر ثابت c ، $\sum ca_n = cA$
۱۴	۹۱	۵۰-۳	جمع و ضرب سری‌ها	مرتنس (Mertens)
۱۵	۹۴	۵۴-۳	تجدید آرایش	قضیه ریمان (Riemann)
۱۶	۹۶	۵۵-۳	تجدید آرایش	هرگاه $\sum a_n$ یک سری از اعدادمختلط به‌طور مطلق همگرا باشد، آنگاه هر تجدید آرایش $\sum a_n$ همگراست و همه به یک مجموع همگرا می‌باشد.
۱۷	۱۰۸	۹-۴	توابع پیوسته	فرض کنیم p یک نقطه حدی E باشد در اینصورت f در p پیوسته است $\iff \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$
۱۸	۱۰۸	۱۰-۴	توابع پیوسته	توابع مختلط پیوسته‌ای بر فضای متری x باشند آنگاه $f+g$ ، f/g ، $f*g$ بر x پیوسته خواهند بود.
۲۶	۱۳۳	۱۰-۵	قضایای مقدار میانگین	قضیه مقدار میانگین
۲۷	۱۳۴	۱۲-۵	پیوستگی مشتق‌ها	فرض کنیم f یک تابع حقیقی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشد بطوریکه $\acute{f}(a) < \lambda < \acute{f}(b)$. در این‌صورت، نقطه‌ای مانند $x \in (a,b)$ هست که $\acute{f}(x) = \lambda$.
۲۸	۱۳۴	۱۳-۵	قاعده هوپیتال	قاعده هوپیتال (Hospital)
۳۰	۱۳۹	۱۹-۵	مشتق‌گیری از توابع برداری	فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از $[a,b]$ به توی R^n و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت، x ی در(a,b) هست بطوریکه $\lvert f(b) - f(a)\rvert \le (b-a)\lvert\acute{f}(x)\rvert$
۳۱	۱۵۱	۴-۶	افراز ـ تظریف	هرگاه p^* یک تظریف p باشد، آنگاه $L(p,f,\alpha) \le L(p^*,f,\alpha)$ و $U(p^*,f,\alpha \le U(p,f,\alpha))$
۳۲	۱۵۲	۵-۶	انتگرال	$\int_{-a}^{b} f d\alpha \le \int_{a}^{-b} f d\alpha$
۳۳	۱۵۲	۶-۶	انتگرال‌پذیری	$f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ $\iff$ به ازای $\varepsilon > 0$ افرازی مانند p باشد بطوریکه $U(p,f,\alpha) - L(p,f,\alpha) < \epsilon$
۳۴	۱۵۴	۸-۶	انتگرال‌پذیری	هرگاه f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر$[a,b]$

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*)**قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۳۵	۱۵۷	۱۲-۶	خواص انتگرال	هرگاه $f_2() \le f_1(x)$x بر $[a,b]$ ، آنگاه $\int_a^b f_2 d\alpha \le \int_a^b f_1 d\alpha$
۳۶	۱۵۸	۱۳-۶	خواص انتگرال	دیگر خواص انتگرال
۳۷	۱۵۹	۱۵-۶	تابع پله‌ای	هرگاه $a < s < b$ باشد و f بر $[a,b]$ کراندار و در s پیوسته باشد و $\alpha(s) = I(x-s)$ آنگاه $\int_a^b f d\alpha = f(s)$
	۱۹-۶	۱۶۲	انتگرال۳۸	تغییر متغیر
۳۹	۱۶۴	۲۱-۶	انتگرال‌گیری و مشتق‌پذیری	قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۴۰	۱۶۴	۲۲-۶	انتگرال‌گیری	قضیه انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء
۴۱	۱۵۴	۲۴-۶	انتگرال‌گیری از توابع برداری	هرگاه f و F بازه $[a,b]$ را به توی R^k بنگارد، $f \in R$ بر $[a,b]$ ، و $\acute{F} = f$ ، آنگاه $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$
۴۲	۱۶۷	۷۱-۶	منحنی‌های با طول متناهی	هرگاه $\acute{\gamma}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه γ با طول متناهی است و $\Lambda(\gamma) = \int_a^b \lvert\acute{\gamma}(t)\rvert dt$
۴۳	۱۷۸	۸-۷	همگرایی یکنواخت	محک کشی
۴۴	۱۷۹	۹-۷	همگرایی یکنواخت	فرض کنیم $x \in E$ و $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. قرار می‌دهیم $M_n = \sup_{x\in E} \lvert f_n(x) - f(x)\rvert$. در انصورت، $f_n \longrightarrow f$ بطور یکنواخت بر $E \Longleftrightarrow$ وقتی $n \to \infty, M_n \to 0$
۴۵	۱۸۱	۱۲-۷	همگرایی یکنواخت و پیوستگی	هرگاه f_n دنباله‌ای از توابع پیوسته بر E باشد و $f \Longrightarrow f_n$ بطوریکنواخت بر E ، آنگاه f بر E پیوسته خواهد بود.
۴۶	۱۸۳	۱۶-۷	همگرایی یکنواخت و انتگرال‌گیری	فرض کنیم α بر $[a,b]$ صعودی باشد و به ازای $n = 1, 2, \ldots$ ، $f_n \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ ، و $f_n \longrightarrow f$ بطوریکتواخت بر $[a,b]$. در اینصورت $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha$
۴۷	۱۸۶	۱۸-۷	همگرایی یکنواخت و مشتق‌گیری	تابعی حقیقی و پیوسته بر خط حقیقی هستکه در هیچ نقطه مشتق پذیر نیست.
۴۸	۱۹۰	۲۴-۷	خانواده‌های هم‌پیوسته از توابع	هرگاه k یک فضای متری فشرده بوده، $f_n \in \xi(k)$ به ازای $n = 1, 2, \ldots$ و بر k بطور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه f_n بر k هم‌پیوسته خواهد بود.
۴۹	۱۹۲	۲۶-۷	توابع مختلط پیوسته	قضیه استون - وایر اشتراس
۵۰	۱۹۵	۲۹-۷	جبر (کراندار و یکنواخت بسته)	فرض کنیم $\Re$ بست یکنواخت جبری A مرکب از توابع کراندار باشد. در اینصورت، $\Re$ یک جبر به‌طوریکنواخت بسته خواهد بود.
۵۱	۲۱۰	۲-۸	سری‌های توانی	فرض کنیم $\sum C_n$ همگرا باشد. قرار می‌دهیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ در اینصورت $\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$
۵۲	۲۱۳	۴-۸	سری‌های توانی	قضیه تیلور
۵۳	۲۱۷	۶-۸	توابع نمایی و لگاریتمی	خواص تابع e^x
۵۴	۲۲۱	۷-۸	توابع مثلثاتی	خواص تابع $\sin, \cos$
۵۵	۲۲۷	۱۲-۸	سری‌های فوریه	نامساوی بسل (Bessel)
۵۶	۲۲۹	۱۴-۸	همگرایی نقطه به نقطه سری فوریه	هرگاه به ازای x ی ثابت‌هایی چون $> \delta$ و $M < \infty$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $t \in (-\delta, \delta)$ ، $\lvert f(x+t) - f(x)\rvert \le mM\lvert t\rvert$ آنگاه $\lim_{N\to\infty} S_n(f,x) = f(x)$
۵۷	۲۳۰	۱۶-۸	قضایای تقریب	قضیه پارسوال (Parseval)
۵۸	۲۳۰	۱۵-۸	قضایای تقریب	هرگاه fپیوسته باشد و $\varepsilon > 0$ آنگاه یک چندجمله‌ای مثلثاتی مانند p هست بطوریکه هر عدد حقیقی x داریم $\lvert p(x) - f(x)\rvert < \varepsilon$
۵۹	۲۳۴	۲۰-۸	تابع بتای	هرگاه $x > 0$و $y > 0$ آنگاه $$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
۶۰	۲۳۵	۲۳-۸	تابع گاما	فرمول استرلینگ (Stirling) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(\frac{x}{e})^x\sqrt{2\pi x}} = 1$$
۶۱	۲۵۰	۵-۹	تبدیلات خطی	عملگر خطی Aبر فضای برداری با بعد متناهی x یک است اگر و فقط اگر برد A تمام x باشد.

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*)**قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۶۲	۲۶۷	۹-۲۴	معکوس‌پذیری توابع پیوسته و مشتق‌پذیر	قضیه تابع معکوس
۶۳	۲۷۱	۹-۲۷	مشتق‌پذیری توابع پیوسته در صفحه	قضیه تابع ضمنی
۶۴	۲۷۷	۹-۳۲	تبدیلات خطی	قضیه رتبه
۶۵	۲۸۱	۹-۳۴	دترمینان‌ها	خواص دترمینان
۶۶	۲۸۲	۹-۳۵	دترمینان‌ها	هرگاه A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند آنگاه $det([A][B]) = det[A].det[B]$
۶۷	۲۸۳	۹-۳۶	دترمینان	عملگر خطی A بر R^n معکوس‌پذیر است$\Longleftrightarrow det[A] \neq ۰$
۶۸	۲۸۶	۹-۴۲	مشتق‌گیری از انتگرال‌ها	فرض کنیم ۱) $\varphi(x,t)$ به ازای $x \leq a \leq b$ و $c \leq t \leq d$ تعریف شده باشد. ۲) φ یک تابع صعودی بر $[a,b]$ باشد. ۳)به ازای هر $t \in [a,b]$ ، $\varphi^t \in \Re(\alpha)$
۶۹	۲۹۸	۱۰-۲	انتگرال‌گیری	به ازای هر $f \in \varphi(I)^k$ ، $L(f) = \acute{L}(f)$
۷۰	۳۰۵	۱۰-۹	تغییر متغیرها بر انتگرال چندگانه	
۷۱	۳۱۶	۱۰-۲۰	مشتق‌گیری از فرم‌های دیفرانسیلی	
۷۲	۳۲۲	۱۰-۲۵	تغییر متغیرهای فرمهای دیفرانسیلی	
۷۳	۳۳۶	۱۰-۳۸	فرم‌های بسته و کامل	
۷۳	۳۳۶	۱۰-۳۸	فرم‌های بسته و کامل	
۷۴	۳۴۲	۹-۵	عنصرهای حجم	قضیه گرین
۷۵	۳۴۸	۱۰-۵۰	انتگرال‌های فرم‌های دوبعدی در $R^۳$	فرمول استوکس
۷۶	۳۴۹	۱۰-۵۱	عنصرهای سطح در$R^۳$	قضیه دیورژانس
	۳۶۳۷۷	۱۱-۳	نظریه لبگ (توابع مجموعه‌ای)	فرض کنیم Φ بر حلقه $\Re$ بطور شمارش‌پذیر جمع پذیر باشد و هم‌چنین $A_۱ \subset A_۲ \subset \ldots \subset A_n \in \Re$ ، $(n = ۱,۲,\ldots.)$ و $A \in \Re$ و $A = \cup_{n=۱}^{\infty}(A_n)$ در اینصورت وقتی $n \to \infty$ داریم $\Phi(A_n) \longrightarrow \phi(A)$
۷۸	۳۶۷	۱۱-۸	اندازه خارجی (μ^*)	۱) به ازای هر $A \in \xi$ ، $\mu^*(A) = \mu(A)$ ۲)هرگاه $E = \cup_{n=۱}^{\infty}$ ، آنگاه $\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=۱}^{\infty} \mu^*(E_n)$
۷۹	۳۶۹	۱۱-۱۰	تابع‌های اندازه‌پذیر	$\Re(\mu)$ یک σ حلقه و μ^* بر $\Re(\mu)$ بطور شمارش‌پذیر جمع‌پذیر است.
۸۰	۳۷۶	۱۱-۱۶	تابع‌های اندازه‌پذیر	هرگاه f اندازه‌پذیر باشد، $\|f\|$ نیز اندازه‌پذیر است.
	۳۸۳	۱۱-۲۶ ۸۱	تابع‌های اندازه‌پذیر	هرگاه $f \in \varphi(\mu)$ بر E ، آنگاه $\|f\| \in \varphi(\mu)$ بر E و $\left\| \int_E f d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f\| d\mu$
۸۲	۳۸۳	۱۱-۲۸	تابع‌های اندازه‌پذیر	قضیه همگرایی یکنوای لبگ
۸۳	۱۱-۲۹	۱۱-۲۹	تابع‌های اندازه‌پذیر	فرض کنیم $f = f_۱ + f_۲$ که در آن $f_i \in \varphi(\mu)$ $(i = ۱,۲)$ بر E در اینصورت $f \in \varphi(\mu)$ بر E و $\int_E f d\mu = \int_E f_۱ d\mu + \int_e f_۲ d\mu$
۸۴	۳۸۶	۱۱-۳۱	تابع‌های اندازه‌پذیر نامنفی	قضیه فاتو (Fatou)
۸۵	۳۸۷	۱۱-۳۲	تابع‌های اندازه‌پذیر	قضیه همگرایی تسلطی لبگ
۸۶	۳۸۹	۱۱-۳۳	مقایسه انتگرال ریمان و انتگرال لبگ	
۸۷	۳۹۳	۱۱-۳۵	مقایسه انتگرال ریمان و انتگرال لبگ	فرض کنیم $f,g \in \varphi^۲(\mu)$. در این‌صورت $f.g \in \varphi(\mu)$ و $\int_x \|fg\| d\mu \leqslant \|\|f\|\|.\|\|g\|\|$

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*)**قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۸۸	۳۹۳	۱۱-۳۶	انتگرال‌گیری از توابع مختلط	هرگاه $f, g \in \varphi^{2}(\mu)$ آنگاه $f + g \in \varphi^{2}(\mu)$ و $\|\|f + g\|\| \leqslant \|\|f\|\| + \|\|g\|\|$
۸۹	۳۹۳	۱۱-۳۸	توابع از رده φ^{2}	توابع پیوسته یرمجموعه چگالی از φ^{2} بر $[a, b]$ را تشکیل می‌دهند.
۹۰	۳۹۸	۱۱-۴۳	توابع φ^{2}	هرگاه $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در $\varphi^{2}(\mu)$ باشد، تابعی چون $f \in \varphi^{2}(\mu)$ هست بطوری‌که $\{f_n\}$ در $\varphi^{2}(\mu)$ به f همگراست.
۹۱	۳۹۶	۱۱-۴۳	توابع از رده φ^{2}	قضیه ریس - فیشر
۹۲	۳۹۶	۱۱-۴۲	فضای متری تام	هرگاه $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در $\varphi^{2}(\mu)$ باشد، تابعی چون $f \in \varphi^{2}(\mu)$ هست بطوری‌که $\{f_n\}$ در $\varphi^{2}(\mu)$ به f همگراست. ($\varphi^{2}(\mu)$یک فضای متری تام است)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

پایان جدول

جدول ۶.۳: قضیه‌های آنالیز

قضایایی که با روش برهان خلف اثبات شده‌اند.

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۱۱	۱-۲۱	میدان حقیقی	به ازای هر عددحقیقی $x > 0$ و هر عدد صحیح $n > 0$ یک و یک y حقیقی است که $y^{n} = x$
۲	۴۰	۲-۲۰	فضای متری	هرگاه p یک نقطه حدی مجموعه E باشد، هر همسایگی p بی‌نهایت نقطه از E را دارد.
۳	۴۸	۲-۳۶	مجموعه‌های فشرده	گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده فضای متری x باشد بطوریکه اشتراک هر زیرگردایه متناهی آن تهی باشد، آنگاه $\bigcap k_{\alpha}$ ناتهی خواهد بود.
۴	۴۸	۲-۳۷	مجموعه‌های فشرده	هرگاه E یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه فشرده kباشد، آنگاه E یک نقطه حدی در k دارد.
۵	۴۹	۲-۴۰	مجموعه‌های فشرده	هر حجره k بعدی فشرده است.
۶	۵۲	۲-۴۳	مجموعه‌های کامل	فرض کنیم یک مجموعه کامل ناتهی در باشد. در اینصورت شمارش‌ناپذیر است.
۷	۵۲	۲-۴۷	مجموعه‌های همبند	زیرمجموعه از خط حقیقی همبند است اگر و فقط اگر این خاصیت را داشته باشد:هرگاه $x \in E, y \in E, x < z < y \longrightarrow z \in Y$
۸	۷۰	۳-۱۷	حدود بالایی و پایینی	فرض کنیم $\{S_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد E و S^{*} را داریم $S^{*} = supE$ در اینصورت S^{*}از دو خاصیت زیر بهره‌مند است. $(1): S^{*} \in E$ (۲): چنانچه $x > S^{*}$ ، عدد صحیحی مانند N هست بطوریکه $n \geq N$نامساوی$S_n < x$ را ایجاب می‌کند.
۹	۸۱	۳-۳۲	سری دنباله‌های اعداد	عدد e گنگ است.
۱۰	۱۱۵	۴-۲۲	پیوستگی و همبندی	هرگاه f یک نگاشت پیوسته از فضای متری x به توی فضای متری Y و E زیرمجموعه همبندی از X باشد آنگاه $f(E)$ نیز همبند است.
۱۱	۲۲۳	۸-۸	تمامیت جبری میدان مختلط	فرض کنیم $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد مختلطی باشند، $n \geqslant 1, a_n \neq 0, p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k}$ در اینصورت، به ازای عدد مختلطی چون z $p(z) = 0$،
۱۲	۲۴۷	۲-۹	توابع چندمتغیره	فرض کنیم rعددصحیح مثبتی باشد. هرگاه فضای برداری x بوسیله مجموعه‌ای از r بردار پیموده شود، آنگاه $dimx \leqslant r$

ادامه در صفحه بعدی

ادامه جدول صفحه قبل(**قضایایی که با روش برهان خلف اثبات شده‌اند.**)

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱۳	۳۱۲	۱۰-۱۵	فرمهای k بعدی اساسی دیفرانسیل	فرض کنیم $w = \sum_I b_I(x)dx_I$ نمایش متعارف فرم k بعدی w در مجموعه باز $E \subset R^n$ باشد. هرگاه $w = 0$ در E، آنگاه به ازای هر اندیس K بعدی I و هر $x \in E$، آنگاه $b_I(x) = 0$

پایان جدول

جدول ۷.۳: قضیه‌های آنالیز

قضایایی که با سایر روش‌ها اثبات شده‌اند.

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	نوع اثبات	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۴۴	۲-۲۸	فضای متری	تفکیک حالات	فرض کنیم E مجموعه‌ای باشد ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار است. قرارمی‌دهیم $y = supE$. در اینصورت، $y \in \bar{E}$. لذا، اگر E بسته باشد، $y \in E$
۲	۲۳۲	۸-۱۸	خواص تابع گاما	انتگرالگیری جزء به جزء	معادله تابعی $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ برقراراست اگر که $0 < x < \infty$
۳	۲۳۲	۸-۱۸	خواص توابع گاما	نامساوی هولدر	$\log\Gamma$ بر $(0, \infty)$ محدب است.
۴	۳۲۴	۱۰-۲۷	سادکها و زنجیرها	تفکیک حالات	هرگاه δ یک سادک k بعدی مستقیم الخط جهتدار در مجموعه باز $E \in R^n$ باشد و $\bar{\delta} = \varepsilon\delta$ ، آنگاه به ازای هر فرم k بعدی w در E $$\int_{\bar{\delta}} w = \varepsilon \int_{\varepsilon} w$$
۵	۱۰	۱-۱۹	میدان حقیقی	تقسیم مراحل	قضیه وجودی

پایان جدول

همچنین بقیهٔ قضیه‌های این کتاب به روش برهان مستقیم، اثبات شده‌اند، که از ذکر آنها در جدول ۵.۳ خودداری شده است. به این ترتیب تمامی قضیه‌های این کتاب ۲۰۸ می‌باشد که ۱۸۴ تای آنها به روش مستقیم، ۶تای آنها به روش استقرا، ۱۳ قضیه به روش برهان خلف و مابقی به روش‌های دیگر اثبات شده‌اند.

فصل ۴

بررسی روش‌های اثبات در گراف و ترکیبات

۱.۴ ترکیبیات چیست؟

ترکیبیات[۱] بخشی از ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در شاخه‌های گوناگون ریاضیات دارد و در آن مسائل شمارش، گراف‌ها، بازی‌ها و نیز مسائل ساختاری روی مجموعه‌های متناهی را بررسی می‌کنند. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های ترکیبیات کاربرد آن در برنامه نویسی کامپیوتر و الگوریتم‌ها می‌باشد. [۱۹]

ترکیبیات یکی از مهم‌ترین شاخه‌های ریاضیات نوین است و همه‌روزه مرزهای آن گسترش پیدا می‌کند. یکی از مهم‌ترین دلایل گسترش سریع ترکیبیات در قرن گذشته (قرن بیستم) اختراع کامپیوتر بوده است. به علت سرعت بالای کامپیوتر، بسیاری از مسائل که قبل از اختراع کامپیوتر قابل حل و بررسی نبودند، بررسی شدند. البته تقابل کامپیوتر و ترکیبیات یک‌طرفه نبوده است و کامپیوترها نمی‌توانستند مستقل عمل کنند و برای عمل نیاز به برنامه داشتند. اساس برنامه‌های کامپیوتری غالباً الگوریتم‌های ترکیبیاتی‌اند. به همین علت، اهمیت و کاربرد ترکیبیات پس از اختراع کامپیوتر چندین برابر معلوم شد و باعث شد تا ریاضی‌دانان بسیاری به تحقیقات گسترده در این زمینه رو آورند. [۱۹]

همان‌طور که بیان شد امروزه ترکیبیات به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات تعریف می‌شود که به بحث درباره مباحثی چون مجموعه‌ها، گراف‌ها، ماتریس‌ها و ...می‌پردازد. در حقیقت این موضوعات جزئی کاربردهای بسیاری در دیگر شاخه‌های ریاضیات دارند و این به‌عنوان یکی از جذابیت‌های این موضوع محسوب می‌شود. هم‌چنین مسائلی که در این شاخه از ریاضیات به آن‌ها پاسخ داده می‌شود، مباحث کاربردی‌اند. مزیت دیگر این ترکیبیات گستردگی موضوعات آن می‌باشد. به این صورت که اگرشخصی بخشی را به‌طورکامل متوجه نشد، بتواند با شروع مبحث جدید سیر مطالعاتی خود را ادامه دهد. حسن دیگر گستردگی ترکیبیات، قابلیت یادگیری مطالب جدید برای هر فرد می‌باشد که با مطالعه مقالات و کتب جدید به‌دست می‌آید. [۳۰]

ترکیبیات به بررسی و مطالعه خواص و حالت‌های (تعداد حالت‌ها) مجموعه‌های متناهی و گسسته از اشیاء تعریف شده و معین می‌پردازد. کلمه ترکیبیات، جمع ترکیب است و در اصطلاح به معنای، ریخت

[۱] Combinatorics

و آمیختگی است. بخش‌های ترکیبیات، شامل مطالعه ساختارهای ترکیبیاتی [۲]، الگوریتم‌های ترکیبیاتی [۳]و بهینه‌سازی ترکیبیاتی [۴] است. [۱۵]

۲.۴ روال‌ها و ساختارهای اساسی در ترکیبیات

ساختارهای ترکیبیاتی، می‌تواند شامل، گراف‌ها (جهت‌دار و بدون جهت و ابر گراف‌ها) ، ساختارهای چندتایی و دسته‌های از زیر مجموعه‌های یک مجموعه متناهی باشد.
بعضی از ساختارهای اصلی در ترکیبیات در جدول ۱.۴ آورده شده است.

۳.۴ اصول اولیه شمارش

روش‌های شمارش را می‌توان به عنوان موضوع اساسی ترکیبیات نام برد. دو اصل ضرب و جمع از اصول اساسی برای مطالعه ترکیب و جایگشت هستند. هم‌چنین به وسیله این دو اصل می توان، مسائل پیچیده ترکیبیاتی را ساده و حل کرد. شمارش[۵]، عبارت است از بررسی روش‌هایی که بتوان به وسیله آن‌ها و بدون شمردن تک‌تک اعضاء و یا اشیاء مجموعه، از تعداد حالت‌های حاصله مطلع شد. شمارش، مبتنی بر دو اصل جمع و ضرب است که بعضی از مدل‌های متفاوت آن به عنوان روش‌های ترکیبیاتی شامل، جایگشت، ترکیب، اصل طرد و شمول، توابع مولد و روابط و توابع بازگشتی می‌باشد. [۱۵]

۱) **اصل جمع (اصل شمارش فصلی):** اگر برای انجام کار اول n_1 راه و برای انجام کار دوم n_2 راه و ...و برای انجام کار k ام، n_k راه وجود داشته باشد، به‌طوری‌که نتوان این k کار را به‌طور هم‌زمان انجام داد، آن‌گاه برای انجام کار اول یا کار دوم یا ...یا کار k ام، $n_1+n_2+\ldots+n_k$ راه وجود دارد. [۱۹]

۲) **اصل ضرب (اصل شمارش ترتیبی):** فرض کنید نحوه انجام کاری را بتوان به k مرحله تجزیه کرد. مرحله اول به n_1 طریق قابل انجام باشد، به ازای هر طریق انجام مرحله اول، مرحله دوم به n_2 طریق قابل انجام باشد، به ازای هر طریق انجام مرحله‌های اول، دوم، مرحله سوم به n_3 طریق قابل انجام باشد،...و به ازای هر طریق انجام مرحله‌های اول، دوم،...و $(k-1)$ ام، مرحله k ام به n_k طریق قابل انجام باشد. در این‌صورت کل کار را به $n_1n_2\ldots n_k$ طریق می‌توان انجام داد. [۱۹]

۳) **اصل متمم:** در برخی از مسئله‌های شمارش، محاسبه تعداد حالت‌های نامطلوب از محاسبه تعداد حالت‌های مطلوب ساده‌تر است یا ممکن است روش شمارش ما چیزی اضافه‌تر از حالت‌های مطلوب را بشمارد. در این مواقع برای حل مسئله از اصل متمم استفاده می‌کنیم، یعنی آن‌چه را که اضافه شمرده‌ایم کم می‌کنیم. [۲۰]

[۲] Combinatorial structures

[۳] Combinatorial algorithms

[۴] Combinatorial optimizations

[۵] Enumeration

جدول ۱.۴: بعضی از ساختارها در ترکیبیات

ردیف	موضوع	نوع ساختار ترکیبیاتی
۱	مجموعه‌های متناهی	اگر $A \cap B = \varnothing$ آن‌گاه $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$
۲	روابط متناهی	اگر $\lvert B\rvert = m$ و $\lvert A\rvert = n$ آن‌گاه $f : A \longrightarrow B$ یا $E : Z_۲^m \longrightarrow Z_۲^n$
۳	ماتریس‌های صفر و یک	$A = [a_{ij}] = \{۰, ۱\}$
۴	جبر بول	$(B, +, ., -, ۰, ۱)$
۵	ماشین‌های متناهی حالت	اگر $M = \{s, p, q, V, W\}$ آن‌گاه $V = s \times p \to s$ $W = s \times p \to q$
۶	گراف	$G = (V, E, \psi)$
۷	مربع‌های لاتین	$a_{ij} \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ $L = (a_{ij})$
۸	توابع مولد	$f(x) = \sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^i$
۹	توابع بازگشتی	$a_{n+۱} - Ca_n = ۰$
۱۰	شبکه‌ها	$N = (V, E)$

۴.۴ برخی از روش‌های شمارش

می‌توان از تناظر یک‌به‌یک و شمارش دوگانه به عنوان مهم‌ترین روش‌های شمارش نام برد.

۱.۴.۴ تناظر یک‌به‌یک

تعریف ۱.۴.۴. تناظر یک‌به‌یک: منظور از تناظر یک به یک بین دو مجموعه A و B یعنی قاعده‌ای که به هر عضو A ، عضوی از B را متناظر می‌کند، با این خاصیت که هر عضو B دقیقاً نظیر یک عضو A است. در این حالت می‌گوییم A و B در تناظر یک‌به‌یک یا هم ارز هستند.

تناظر یک‌به‌یک یکی از مهم‌ترین روش‌های حل مسائل ترکیبیات می‌باشد و استفاده از این روش باعث می‌شود که از بسیاری از دوباره‌کاری‌ها پرهیز شود و با برقراری تناظری یک‌به‌یک مسئله به مسئله‌ای تبدیل شود که راه‌حل آن مشخص است. [۱۹]

مثال ۲.۴.۴. ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌ای ۲ عضوی و ۳ عضوی مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ با هم برابرند.

راه‌حل: به هر زیرمجموعه ۲ عضوی A مکملش را متناظر می‌کنیم. چون مکمل هر زیرمجموعه ۲ عضوی A زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از A است، پس به هر زیرمجموعه ۲ عضوی A زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی متناظر می‌شود. این قاعده تناظر یک‌به‌یک است. پس تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی و ۳ عضوی با هم برابرند. [۱۹]
و در حالت کلی قضیه زیر درست است.

قضیه ۳.۴.۴. *فرض کنید $۰ \leq r \leq n$ و A مجموعه‌ای n عضوی باشد. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی و $n - r$ عضوی A با هم برابرند.* [۱۹]

۲.۴.۴ شمارش مضاعف (دوگانه)

شاید مهم‌ترین کاربرد روش دوگانه، در اثبات اتحادهای ترکیبیاتی باشد. در بسیاری از این اتحادها که با استفاده از روش شمارش دوگانه به سادگی ثابت می‌شوند، اثبات جبری آن‌ها معمولاً مشکل و حتی در مواردی غیرممکن است.
می‌توان این جمله را به‌خاطر سپرد که (اگر اعضای یک مجموعه به دو صورت مختلف شمرده شوند، حاصل دو شمارش با هم برابر است.)
در واقع روش شمارش دوگانه، همان‌طور که از نام آن پیداست، محاسبه یک کمیت به دو صورت مختلف و به‌دست‌آوردن یک تساوی است. [۱۹]

۳.۴.۴ جایگشت

دو اصل ضرب و جمع از اصول اساسی برای مطالعه ترکیب [۶] و جایگشت [۷] هستند. همچنین به وسیله این دو اصل می‌توان مسائل پیچیده ترکیبیاتی را ساده و حل کرد. در جایگشت، تعداد حالت چیدن اشیاء با ترتیب بررسی می‌شود؛ به عنوان نمونه، قراردادن تعدادی دانش‌آموز در یک صف؛ اما در ترکیب، ترتیب انتخاب و چیدمان اشیاء مهم نیست. برای مثال، انتخاب تعدادی شیی هم شکل و هم اندازه. ترکیب و جایگشت، هر دو با نظریه احتمال ارتباط تنگاتنگی دارند. [۱۵]

تعریف ۴.۴.۴. جایگشت خطی: هر آرایش خطی از n شئ را یک جایگشت (خطی) از این nشئ، می‌نامند.

تعریف ۵.۴.۴. جایگشت‌های باتکرار:
بدست‌آوردن تعداد جایگشت‌های چند شئ که ممکن است در بین آن‌ها برخی از اشیاء، یکسان باشند.

مثال ۶.۴.۴. (قضیه) تعداد جایگشتهای n شئ که n_1 شئ آن‌ها از نوع اول، n_2 شئ از نوع دوم، ...و n_k شئ از نوع kام است و $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ برابر است با

$$p(n;n_1,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

تعریف ۷.۴.۴. جایگشت دوری: منظور از یک جایگشت دوری از n شئ، آرایشی از این n شي دور یک دایره است با این ویژگی که اگر یک آرایشی از دوران آرایش دیگری به‌دست آید، آن‌گاه این دو آرایش را یکسان می‌گیریم.

مثال ۸.۴.۴. (قضیه) تعداد جایگشت‌های دوری n شئ متمایز برابر $(n-1)!$ است. [۱۹]

۴.۴.۴ ترکیب

تعریف ۹.۴.۴. ترکیب: اگر A مجموعه‌ای باشد، یک ترکیب A یعنی زیر مجموعه‌ای از A.

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی ازمجموعه‌ای n عضوی را با $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم. (ترکیب r از n).
در واقع $\binom{n}{r}$ برابر با تعداد راه‌های انتخاب r شئ از n شئ متمایز است.
اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، آن‌گاه A فقط یک زیرمجموعه صفرعضوی، یعنی ϕ، و فقط یک زیرمجموعه n عضوی یعنی A، دارد. پس

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

همچنین A، n مجموعه یک عضوی دارد پس $\quad \binom{n}{1}=1$
بنابر قضیه ۳.۴.۴ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی A برابر است؛ پس

[۶] combination
[۷] Permutation

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

از این نکته درمی‌یابیم که

$$\binom{n}{n-۱}=\binom{n}{n}=n$$

ابتدا در یک مثال روش به‌دست آوردن فرمولی را برای $\binom{n}{r}$ توضیح داده، سپس قضیه کلی را بیان می‌شود.

مثال ۱۰.۴.۴. مجموعه ۵ عضوی چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

راه‌حل: فرض شود $A=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعه موردنظر باشد. تعداد جایگشت‌های ۳ حرفی از ۵ حرف a,b,c,d,e به دو روش حساب می‌شود. از یک طرف این تعداد برابر با $p(۵,۳)=\frac{۵!}{۲!}$ است. برای محاسبهٔ تعداد این جایگشت‌ها، عمل نوشتن هر جایگشت ۳ حرفی به دو مرحله تجزیه می‌شود: ابتدا انتخاب ۳ حرف از ۵ حرف a,b,c,d,e سپس نوشتن جایگشتی از سه حرف انتخاب شده. مرحلهٔ اول را، طبق تعریف، به $\binom{۵}{۳}$ طریق می‌توان انجام داد و به ازای هریک از این راه‌ها، مرحله دوم را به !۳ طریق می‌توان انجام داد. پس

$$\binom{۵}{۳}.۳!=\frac{۵!}{۲!}$$

و در نتیجه

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}$$

قضیه ۱۱.۴.۴. *اگر* $۰\le r\le n$ *آن‌گاه*

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

راه‌حل: تعداد جایگشت‌های r شی از n شی $۱,۲,\dots,n$ به دو روش حساب می‌شود. از یک طرف این تعداد برابر $p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ است و از طرف دیگر، مانند استدلالی که در راه‌حل مثال ۱۰.۴.۴ ارایه شد، این تعداد برابر با $\binom{n}{r}\times r!$ است. پس

$$\binom{n}{r}\times r!=\frac{n!}{(n-r)!}$$

و در نتیجه

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تفاوت جایگشت و ترکیب: تفاوت در این است که جایگشت، آرایش مرتب چند شئ است، در حالی‌که ترکیب، انتخابی از چند شئ بدون در نظرگرفتن ترتیب است. [۱۹]
اکنون چهار حالت مربوط به جایگشت‌ها و ترکیب‌های (باتکرار و بدون تکرار) r عنصر از مجموعه‌ای دارای n عنصر متمایز را به عنوان دو الگوی شمارشی زیر تعبیر می‌کنیم:

الگوی گزینش

تعداد طرق گزینش r عنصر از مجموعه‌ای n عنصری برابر است با :

- $P(n,r)$ هرگاه عناصر برگزیده شده متمایز و ترتیبی که طبق آن برگزیده شده‌اند مهم باشد.
- $C(n,r)$ هرگاه عناصر برگزیده شده متمایز باشند ولی ترتیبی که طبق آن برگزیده شده‌اند مهم نباشد.
- n^r هرگاه عناصر برگزیده شده لزوماً متمایز نباشند ولی ترتیب مهم باشد.
- $C(r+n-۱,n-۱)$ هرگاه عناصر برگزیده شده لزوماً متمایز نباشند و ترتیب هم مهم نباشد. [۲]

الگوی تخصیص

تعداد طرق تخصیص r شئ به n مکان متمایز برابر است با:

- $P(n,r)$ هرگاه اشیاء متمایز باشند و هیچ مکانی نتواند بیشتر از یک شئ بگیرد.
- $C(n,r)$ هرگاه اشیاء یکسان باشند و هیچ مکانی نتواند بیشتر از یک شیء بگیرد.
- n^r هرگاه اشیاء متمایز باشند و هیچ قیدی روی تعداد اشیایی که یک مکان می‌گیرد، نباشد.
- $C(r+n-۱,n-۱)$ هرگاه اشیاء یکسان باشند و هیچ قیدی روی تعداد اشیایی که یک مکان می‌گیرد، نباشد. [۲]

خلاصه‌ای از مطالب ارایه شده را می‌توان به‌صورت جدول ۲.۴ بیان کرد.

جدول ۲.۴: جدول انتخاب‌ها

انتخاب r شی از n شی	باترتیب	بدون ترتیب
بدون تکرار	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{n}{r}$
با تکرار	n^r	$\binom{n+r-۱}{r}$

۵.۴.۴ مثال‌هایی از برهان‌های ترکیبیاتی:

مثال ۱۲.۴.۴. برای اعداد صحیح n و r باشرط $n \geq r \geq ۱$ ثابت کنید

$$\binom{n}{r-۱}+\binom{r}{n}=\binom{n+۱}{r}$$

(گرچه این اتحاد را می‌توان از راه جبری با توجه به تعریف $C(n,r)$ یعنی $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ثابت کرد.)

راه‌حل: (روش ترکیبیاتی) فرض کنید $A=\{x,a_۱,\dots,a_n\}$ و همه زیرمجموعه‌های r عنصری A را در نظر گرفته شوند. تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی برابر $\binom{n+۱}{r}$ است. این زیرمجموعه‌ها دقیقاً یکی از دو مورد زیر هستند:

۱- آن‌هایی که شامل عنصر xاند.

۲- آن‌هایی که شامل این عنصر نیستند.
برای بدست آوردن زیر مجموعه C از A، که در آن $x \in C$ و $|C| = r$، xرا در C قرار داده و سپس $r-1$ عنصر از $a_1, a_2, \dots a_n$ را انتخاب می‌کنیم: این کار را می‌توان به $\binom{n}{r-1}$ راه انجام داد.
برای مورد دیگر، زیرمجموعه B از A را با شرایط $|B| = r$ و $x \notin B$ لازم داریم. لذا بین $a_1, a_2, \dots a_n$ r عنصر انتخاب می‌شود. این انتخاب را می‌توان به $\binom{n}{r}$ راه انجام دهیم. لذا بنابر اصل جمع نتیجه می‌شود که$\binom{n+1}{r} = \binom{r}{n} + \binom{n}{r-1}$ [۲۳]

اثباتی ترکیبیاتی برای اصل شمول و عدم شمول

تعریف ۱۳.۴.۴. اصل شمول و عدم شمول: روشی غیرمستقیم برای برخی موارد در شمارش در مبحث ریاضیات گسسته و ترکیبیات می‌باشد.

مجموعه A را با $|A| = n$ و شرط‌های c_i ، $1 \le i \le t$ ، که بعضی از عنصرهای A در آن‌ها صادق‌اند، در نظر می‌گیریم. تعداد عنصرهایی از A را که در هیچ‌یک از شرط‌های c_i ، $1 \le i \le t$ ، صدق نمی‌کنند با $\bar{N} = N(\bar{c}_1\bar{c}_2 \dots \bar{c}_t)$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\begin{aligned}\bar{N} = N &- [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \dots + N(C_t)] \\ &+ [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \dots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \dots + N(c_{t-1}c_t)] \\ &- [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \dots + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + \dots \\ &+ N(c_1c_3c_t) + \dots + N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)] + \dots + (-1)^t N(c_1c_2c_3 \dots c_t)\end{aligned} \tag{۱.۴}$$

یا

$$\begin{aligned}\bar{N} = N &- \sum_{1 \le i \le t} N(c_i) + \sum_{1 \le i \le j \le t} N(c_ic_j) - \sum_{1 \le i \le j \le k \le t} N(c_ic_jc_k) + \dots \\ &+ (-1)^t N(c_1c_2c_3 \dots c_t)\end{aligned} \tag{۲.۴}$$

(گرچه این قضیه را می‌توان به وسیله استقرا روی t ثابت کرد، ولی در اینجا استدلالی ترکیباتی ارائه می‌شود .)
ارائه استدلال: برای هر $x \in A$ نشان داده می‌شود که x به هر طرف معادله ۲.۴ یک شماره ۰ یا ۱ خواهد داد . اگر x در هیچ شرطی صدق نکند، آن‌گاه x در$\bar{N}$ یک بار و در N یک بار به حساب می‌آید. ولی در هیچ جمله دیگر از معادله ۲.۴ به حساب نمی‌آید. بنابراین x به هر طرف معادله یک ۱ خواهد داد.
امکان دیگر آن است که x دقیقاً در r، $1 \le r \le t$ شرط صدق کند، در این حالت x چیزی به $\bar{N}$ نمی‌دهد، اما در طرف راست معادله ۲.۴ ، x به حساب می‌آید.
مرحله۱) یک بار درN
مرحله۲) r بار در$\sum_{1 \le i \le t}$. (یک بار برای هریک از r شرط)

مرحله۳) $\binom{r}{2}$ بار در $\sum_{1\leq i<j\leq t} N(c_ic_j)$. (یک بار برای هر زوج شرط منتخب از r شرطی که x در آن‌ها صدق می‌کند.)

مرحله۴) $\binom{r}{3}$ بار در $\sum_{1\leq i<j<k\leq t} N(c_ic_jc_k)$

همین روند ادامه دارد تا

مرحله($r+1$)ام. $1=\binom{r}{r}$ بار در $\sum N(c_{i1}c_{i2}\dots c_{ir})$، که در آن، مجموع‌یابی روی همه انتخاب‌های با اندازه r از t شرط انجام می‌گیرد. درنتیجه، در سمت راست معادله ۲.۴، x بنابر قضیه دوجمله‌ای به میزان

$$1-r+\binom{r}{2}-\binom{r}{3}+\dots+(-1)^r\binom{r}{r}=[1+(-1)]^r=0^r=0$$

بار به حساب می‌آید. بنابراین، دو طرف معادله ۱.۲ عنصرهای واحدی از A را به حساب می‌آورند و برابری برقرار است. [۲۳]

۵.۴ برخی از روش‌های اثبات در گراف و ترکیبیات

۱. اصل لانه کبوتری

۲. اصل استقرای ریاضی

۳. اصل همخوانی

۴. اتحادهای ترکیبیاتی

۵. روابط بازگشتی

۶. روش احتمالاتی و ...

که در ادامه به‌طور مختصر توضیحاتی درباره برخی از آن‌ها ارائه می‌شود.

۱.۵.۴ اصل لانه کبوتر

اصل لانه کبوتر مفهوم ساده‌ای است که به اثبات‌های ظریفی منجر می‌گردد، و ممکن است آن را به مسئله‌ای تحویل و تحلیل کرد. این اصل اساسا می‌گوید که هر مجموعه از اعداد دارای عددی حداقل به اندازه میانگین است.

لم ۱.۵.۴. *(اصل لانه کبوتر) اگر مجموعه‌ای متشکل از بیش از kn شیئ به n رده افراز شود، آن‌گاه رده‌ای بیش از k شیئ دریافت می‌کند.*

در اثبات این لم، عکس نقیض می‌گوید که اگر هر رده حداکثر k شیئ دریافت کند، آن‌گاه مجموعا حداکثر kn شیئ توزیع شده‌اند. [۲۹]

اصل لانه کبوتر معمولاً در مسائلی به‌کار می‌رود که میخواهیم وجود دو یا چند شیئ را که دارای ویژگی مشترکی هستند، ثابت کنیم. روش استفاده از این اصل در حل این‌گونه مسائل به این‌صورت است که اشیای مورد نظر را طوری دسته‌بندی می‌شوند که اگر چند شیئ در یک دسته قرار گرفتند، همه این چند شیئ، ویژگی مشترک مورد نظر را داشته باشند. همانطور که می‌دانید اصل لانه کبوتری، در عین سادگی بسیار کاربرد دارد. لازم به ذکر است که اصل لانه کبوتری اصل موضوع نیست بلکه یک قضیه است و می‌توان آن را ثابت کرد، اما به دلیل سادگی و وضوح و کاربرد فراوان نام اصل به آن داده‌اند. از اصل لانه کبوتر می‌توان در حل مسائل هندسی و همچنین در حل مسئله‌هایی در نظریه اعداد استفاده شود. [۱۹]

همچنین می‌توان بیان کرد که اصل لانه کبوتری دارای اهمیت و قدرت زیادی است، زیرا تعمیم‌های آن دارای تابعی عمیق در نظریه ترکیبیاتی و نظریه اعداد می‌باشد. [۲]

قضیه ۲.۵.۴. ***صورت ساده اصل لانه کبوتری*** *اگر m کبوتر داخل n لانه قرار داشته باشند و $m > n$، آن‌گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن بیش از یک کبوتر قرار دارد.*

قضیه ۳.۵.۴. ***صورت تعمیم یافته اصل لانه کبوتری*** *اگر m کبوتر داخل n لانه قرار داشته باشند و $m > nk$، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $k + 1$ کبوتر قرار دارد. [۱۹]*

کاربرد اصل لانه کبوتری

۱. در هندسه(در مسائل و قضایا)

۲. در نظریه اعداد (به‌عنوان مثال در الگوریتم تقسیم و در قضیه اساسی حساب استفاده می‌شود.) پایه نظریه اعداد بر الگوریتم تقسیم نهاده شده است. [۱۹]

۳. هم‌چنین در حل مسائل اکسترمال از اصل لانه کبوتر استفاده می‌شود. مهم‌ترین روش در حل مسئله‌های این مبحث دسته‌بندی اعضای یک مجموعه بر اساس یک ویژگی مشخص است. [۲۰]

مثال ۴.۵.۴. هر گراف ساده با حداقل دو رأس، دارای دو رأس با درجه برابر است.

راه‌حل

در یک گراف ساده با n رأس، درجه هر رأس متعلق به مجموعه $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$ است. اگر کمتر از n مقدار وجود داشته باشد، آن‌گاه اصل لانه کبوتر ادعا را اثبات می‌کند. در غیر این‌صورت، هردوی $0, n - 1$ درجه‌های رأس‌ها خواهند بود. این غیرممکن است، زیرا اگر یک رأس مجاور با همه رأس‌های دیگر باشد، آن‌گاه هیچ رأس تنهایی نمی‌تواند وجود داشته باشد. [۲۹]

۲.۵.۴ استقرای ریاضی

همان‌طور که بیان شد یکی از تکنیک‌های ساده، ظریف و مفید اثبات در ریاضیات جامع و به‌ویژه در ترکیبیات، تکنیک معروف به استقرا ریاضی است که اساسا روش آن اثبات الگوریتمی می‌باشد. [۲]

بعلاوه اصل استقرای ریاضی، یکی از ویژگی‌های مجموعه اعداد طبیعی است. استقرای ریاضی صرفاً اصل نیست، بلکه یکی از قوی‌ترین ابزار اثبات در ریاضیات است.
می‌توان **استقرا** را به سه دسته به‌صورت زیر تقسیم کرد:

۱. **استقرای ضعیف :** فرض کنید $p(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی مانند n باشد و

۱: $p(1)$ درست باشد.

۲: به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، اگر $p(k)$ درست باشد، آن‌گاه $p(k+1)$ نیز درست است.
در این‌صورت $p(n)$ به ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.[۱۹]

۲. **استقرای قوی:** فرض کنید $p(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی مانند n باشد و

۱: $p(1)$ درست باشد.

۲: به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، اگر $p(1), p(2), \ldots, p(k)$ درست باشد، آن‌گاه $p(k+1)$ نیز درست است.
در این‌صورت $p(n)$ به ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.[۱۹]
در این حالت قوی بودن اصل اسقرا حاکی از این است که مرحله استقرا معلومات بیشتری از مرحله استقرا در حالت ضعیف دارد [۲]

۳. **استقرا با دو مقدمه:** فرض کنید $p(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی مانند n باشد و

۱: $p(1)$ و $p(2)$ درست باشد.

۲: به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، اگر $p(k)$ و $p(k+1)$ درست باشد، آن‌گاه $p(k+2)$ نیز درست باشد. در این‌صورت $p(n)$ به ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است. [۱۹]

که تمام حالات نتیجه‌ای از خوش‌ترتیبی هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی می‌باشد. [۲] می‌توان به‌عنوان کاربردی از استقرای با دو مقدمه از **دنباله اعداد فیبوناتچی** نام برد.
دنباله اعداد فیبوناتچی در نظریه اعداد و ترکیبیات بسیار ظاهر می‌شوند. [۱۹]

مثال ۵.۵.۴. اگر G یک درخت باشد، آن‌گاه $e = v - 1$.

برهان با استفاده از استقرا روی v. وقتی $v = 1$، $G \cong K_1$ و $e = 0 = v - 1$. فرض کنید قضیه برای هر درخت با رأس‌های کمتر از v درست باشد، و G درختی با $v \geqslant 2$ رأس است. فرض کنید $uv \in E$. چون uv مسیر (u, v) ی یکتا در G است، لذا $G - uv$ شامل هیچ مسیر (u, v) نیست، پس $G - uv$ ناهمبند بوده و لذا $\omega(G - uv) = 2$ پس مؤلفه‌های G_1 و G_2 از $G - uv$ که بی‌دوراند، درخت هستند.
بعلاوه هر کدام کمتر از v رأس دارند لذا، بنابر فرض استقرا برای $i = 1, 2$ داریم $e(G_i) = V(G_i) - 1$
پس $e(G) = e(G_1) + e(G_2) + 1 = V(G_1) + V(G_2) - 1 = V(G) - 1$ [۶]

۳.۵.۴ اصل همخوانی

همخوانی را نمی‌توان به عنوان یک اصل ریاضیات در نظر گرفت. ولی از این مورد می‌توان برای حل بسیاری از مسائل ترکیبیاتی بهره گرفت.

مثال ۶.۵.۴. نشان دهید در هر گراف تعداد رأس‌های با درجه فرد، عددی زوج است.

راه‌حل: برای هر گراف $G=(V,E)$ داریم: $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$ که عددی زوج است. بنابراین $\sum_{v\in v_{odd}} d(v) + \sum_{v\in v_{even}} d(V) = 2|E|$ از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که مجموع درجات راس‌های با درجه فرد، زوج است و بنابراین باید تعداد زوجی از آن‌ها وجود داشته باشد. این مثال نمونه‌ای از بکارگیری اصل همخوانی است. [۳۰]

مثال ۷.۵.۴. نشان دهید در هر گراف دوبخشی، هر دور از تعداد زوجی یال تشکیل شده است.

حل: گراف دوبخشی $G=(V_1,E,V_2)$ را در نظر گرفته می‌شود. حال دور $v_1v_2\ldots v_{n-1}v_nv_1$ را در گراف G فرض کرده بدون اینکه به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌شود که $v_1\in V_1$ و با توجه به یال $v_1v_2\in E$ مسلماً باید $v_2\in V_2$ باشد. به همین ترتیب $v_3\in V_1,\ldots,v_{n-1}\in V_1, v_n\in V_2, v_1\in V_1$. بنابراین رئوس با اندیس فرد عضو V_1 و رئوس با اندیس زوج عضو V_2می‌باشند و چون $v_n\in V_2$ است می توان فهمید n عددی زوج است. [۳۰]

۴.۵.۴ توابع مولد

توابع مولد[8]، تعمیم دیگری از اصل شمارش است. این توابع، ابزار قدرتمندی در حل مسائل شمارشی به‌ویژه، بررسی مسائل حاوی گزینش و آرایش اشیاء (که با تکرار و قیود اضافی همراهند)، با شروط خاص می‌پردازد. به عنوان مثال، توزیع ۱۲ شیء بین سه نفر به طوری‌که، نفر اول حداقل ۴ شیء، نفر دوم و سوم، هر کدام حداقل ۲ شیء، دریافت کنند ولی نفر سوم، بیشتر از ۵ شیء نداشته باشد. توابع مولد در بخش توابع مولد گشتاور در نظریه احتمال کاربرد دارد. نخستین بار لئونارد و پیسائی در اوایل قرن ۱۳ با ارائه سری فیبوناتچی زمینه‌ای را فراهم کرد که در قرن ۱۸، آبراهام دموآور این سری را از یک تابع مولد بدست بیاورد، اما نخستین مجموعه کامل از توابع مولد را پییرسیمون دولاپلاس در اواخر قرن ۱۸ مطرح کرد. [۱۵]

استفاده از روش توابع مولد: بیشتر وقت‌ها مناسب است که اندازهٔ مسئله‌ای ویژه را با پارامتری مانند i نشان دهیم که در آن مقدار i هر عدد صحیح نامنفی می‌تواند باشد. اگر a_i تعداد برآمدها در حالتی باشد که مقدار پارامتر i است، جواب این گردایه از مسئله‌های شمارشی را می‌توان با دنباله‌ای مانند A که $A=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots)$ توصیف کرد. معمولاً مطلوب‌ترین حالت را این می‌دانند که تابع ساده‌ای مانند چندجمله‌ای داشته باشیم تا با محاسبهٔ مقدارش در i مقدار a_i به‌دست آید. اگر f تابعی از این دست باشد که $f(i)=a_i$ می‌گوییم f دستوری بسته برای A است.

[8] Generating function

متأسفانه بعضی وقت‌ها پیداکردن دستوری بسته برای دنباله‌ای مانند Aکه نشان‌دهنده جواب مجموعه‌ای از مسئله‌های ترکیبی است دشوار یا حتی ناممکن است. تابع مولد دنباله تعمیمی از مفهوم چندجمله‌ای است. جبر این چندجمله‌ای‌های تعمیم یافته در حل کردن بسیاری از مسئله‌های ترکیبیاتی سودمند است. با استفاده از تابع‌های مولد می‌توان مسئله‌های انتخاب، مسئله‌های توزیع، و هم‌چنین مسئله‌های شامل افرازهای اعداد صحیح را تحلیل کرد. [۱۴] تابع‌های مولد به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱: تابع مولد معمولی

تعریف ۸.۵.۴. به هر دنباله مانند A به صورت $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$ یک سری توانی به صورت $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_i z^i + \dots$ نسبت داده می‌شود. $A(z)$ را تابع مولد دنباله A می‌نامند.

از تابع‌های مولد معمولی برای شمارش انتخاب‌ها با تکرار محدود، توزیع‌های اشیای یکسان، جواب‌های صحیح معادلات خطی و افرازها استفاده می‌شود.
هم‌چنین تابع‌های مولد معمولی را برای شمارش توزیع‌های اشیای یکسان و آرایش‌هایی که در آن‌ها ترتیب مهم نیست به‌کار می‌بریم. به عبارت دیگر این توابع را برای حل مسائل ترکیبیاتی مربوط به توزیع اشیاء یکسان (غیر قابل تمیز از یکدیگر) در مکان‌های متمایز به‌کار می‌برند
.

مثال ۹.۵.۴. تابع مولدی برای تعداد راه‌های خردکردن n تومان هزینه پست فقط با استفاده از تمبرهای دو، سه و پنج تومانی پیدا کنید.

راه‌حل: در اینجا می‌خواهیم a_n، تعداد ترکیب‌های تمبرهای دو، سه و پنج تومانی را که مبلغ کل‌شان n تومان است، پیدا کنیم. تصور کنید که ابتدا چند تمبر دو تومانی، بعد چند تمبر سه تومانی و دست آخر چند تمبر پنج تومانی انتخاب می‌کنیم. از آن‌جایی که با انتخاب هر تمبر دو تومانی ۲ واحد به مبلغ کل اضافه می‌شود $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots$ تابع مولد انتخاب اول‌مان است. به همین ترتیب تابع مولد انتخاب چند تمبر سه تومانی $1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots$ و تابع مولد انتخاب تمبرهای پنج تومانی $1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \dots$ است. بنابراین تابع مولد $A(z)$ را به‌دست می‌آوریم که
$$A(z) = (1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots)(1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots)(1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \dots)$$

[۱۴]

۲: تابع مولد نمایی

تعریف ۱۰.۵.۴. تابع مولدی که در ارتباط با مسائل ترکیبیاتی که، ترتیب در آن‌ها مهم است، به‌کار می‌رود را تابع مولد نمایی گویند.
اگر $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$، دنبالهٔ دلخواهی باشد $E(z)$ را که به‌صورت $E(z) = a_0 + a_1 z + \frac{a_2 z^2}{2!} + \dots + \frac{a_i z^i}{i!} + \dots$ تعریف می‌شود، تابع مولد نمایی دنباله A می‌نامند.

مثال ۱۱.۵.۴. تعداد راه‌های توزیع کردن n شئ متمایز در پنج جعبه مختلف را پیدا کنید به شرطی که تعداد اشیایی که در جعبه پنج گذاشته می‌شود زوج باشد.

راه‌حل: اگر تعدادی نامحدود از اشیا در جعبه‌های ۱ تا ۴ و تعدادی زوج از اشیا در جعبه پنج گذاشته شوند، تابع مولد نمایی $(e^z)^۴(\frac{e^z+e^{-z}}{۲})$ یا $\frac{e^{۵z}+e^{۳z}}{۲}$ به‌دست می‌آید. از آنجایی که ضریب $\frac{z^n}{n!}$ در این عبارت، $\frac{۵^n+۳^n}{۲}$ است تعداد توزیع‌های n شیء متمایز با شرط داده شده هم همین مقدار است. از تابع‌های مولد نمایی برای شمارش توزیع‌های اشیای متمایز و آرایش‌هایی که در آن‌ها ترتیب مهم است به‌کار می‌بریم. [۱۴]

مثال ۱۲.۵.۴. مطلوب است تعیین تعداد طرق آرایش دادن ۵ مهره در یک ردیف با استفاده از مهره‌های دارای سه رنگ متفاوت (قرمز، آبی، سفید) به طوری‌که هر آرایش حداقل یک مهره از هر رنگ داشته باشد و با این فرض که حداکثر ۳ مهره قرمز، حداکثر ۲ مهره سفید و حداکثر ۲ مهره آبی در اختیار داشته باشیم.

راه‌حل: در این حالت تعداد آرایش‌ها برابر خواهد بود با ضریب $\frac{x^۵}{۵!}$ در

$$g(x) = (x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!})(x + \frac{x^۲}{۲!})^۲$$

و این ضریب با ضریب $\frac{x^۵}{۵!}$ در

$$h(x) = (x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots)(x + \frac{x^۲}{۲!})^۲ = (e^x - ۱)(x + \frac{x^۲}{۲!})$$

یکی است.

مثال ۱۳.۵.۴. تابع مولد نمایی تعداد راه‌های ساختن دنباله‌ای به طول n با استفاده از تعداد دلخواه از پنج نوع نماد مختلف را پیدا کنید. با استفاده از این تابع مولد نمایی تعداد دنباله‌هایی به طول ۱۰ را، که می‌توان با این روش به‌دست آورد را حساب کنید.

راه‌حل: تابع مولد نمایی انتخاب هر یک نوع نماد $\ldots + \frac{z^۲}{۲!} + z + ۱$ یا همان e^z است و بنابراین تابع مولد نمایی مرکب $e^{z۵}$ یعنی $e^{۵z}$ است. ضریب $\frac{z^n}{n!}$در بسط $e^{۵z}$ ، ۵^n . بنابراین تعداد دنباله‌های موردنظر به طول ۱۰ ، $۵^{۱۰}$ است.

نکته ۱۴.۵.۴. تابع مولد معمولی در مسائل انتخابی پیش می‌آید که در آن‌ها ترتیب مورد نظر نیست و در مسائل آرایشی که ترتیب نکته اساسی آن‌ها است از توابع مولد نمایی استفاده می‌شود.

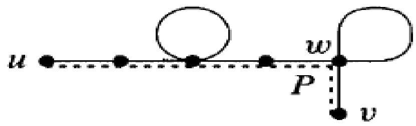
[۱۴]

۵.۵.۴ استقرا و گشت‌ها:

فن استقرا را می‌توان برای بسیاری از گزاره‌هایی که متضمن یک پارامتر صحیح مثبت هستند، به‌کار برد. این فن بر ویژگی خوش‌ترتیبی، که آن‌را برای اعداد صحیح مثبت فرض می‌کنیم متکی است: هر زیرمجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت دارای کوچک‌ترین عضو است. نخستین کاربردهای استقرا، لم‌ها دربارهٔ گشت‌ها و مسیرها هستند.

مثال ۱۵.۵.۴. اگر u و v رأس‌های متمایزی در G باشند، آنگاه هر u,v–گشت در G شامل یک u,v– مسیر است.

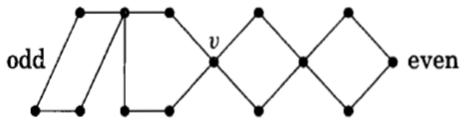
راه‌حل:
از اصل استقرا (قوی) روی l استفاده می‌شود تا ثابت شود که به ازای هر l گزاره $P(l)$ بیان می‌کند که هر u,v–گشت به طول l شامل یک u,v–مسیر می‌باشد. فرض کنید W یک u,v–گشت به طول l باشد. اگر $l = ۱$، آنگاه تنها یال W، uv است و خود W یک u,v– مسیر است.
برای گام استقرا، فرض کنید $l > ۱$ و فرض کنید ادعا برای گشت‌های به طول کمتر از l برقرار است. اگر W هیچ رأس تکراری نداشته باشد، آنگاه خود W یک u,v–مسیراست. اگر W یک رأس تکراری داشته باشد، آنگاه می‌توان یال‌ها و رأس هایی از W را که میان رأس تکراری ظاهر می‌شوند حذف کنید تا یک u,v–گشت کوتاه‌تری در W به‌دست آید. بنابر فرض استقرا، این گشت شامل یک u,v–مسیر است، که به ترتیب در W ظاهر می‌شود. [۲۹]



شکل ۱.۴: مربوط به مثال ۱۵.۵.۴

مثال ۱۶.۵.۴. هر گشت بسته فرد، شامل یک دور فرد می‌باشد.

راه‌حل: فرض کنید W یک گشت بسته فرد باشد؛ استقرا را روی طول l از W به‌کار ببرید. اگر $l = ۱$، آنگاه W یک طوقه است، که دوری به طول ۱ می‌باشد. برای گام استقرا، فرض کنید $l > ۱$، و فرض کنید ادعا برای گشت‌های با طول کمتر از l برقرار باشد. اگر W هیچ رأس تکراری نداشته باشد (به‌جز نخستین=آخرین)، آنگاه W خود یک دوری با طول فرد است. اگر رأس v در W تکرار شده باشد، آنگاه W را می‌توان به دو u,v– گشت افراز کرد. چون طول کل W فرد است، یکی از این دو گشت فرد و دیگری زوج است. گشت فرد از W کوتاه‌تر است. بنابر فرض استقرا، آن شامل یک دور فرد می‌باشد، که به ترتیب در W ظاهر می‌شود. [۲۹]



شکل ۲.۴: مربوط به مثال ۱۶.۵.۴

۶.۵.۴ شمارش و نگاشت‌های دوسویی

یک روش برای اثبات برابری میان دو فرمول این است که نشان دهیم آن اثبات یک مجموعه را به دو روش مختلف می‌شمارد. از این روش، نخست برای اثبات رابطه‌ای میان درجه‌های رأس‌ها و یال‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۷.۵.۴. (فرمول مجموع -درجه) اگر G گرافی با درجه رأس‌های $d_۱, d_۲, \dots, d_n$ باشد، آنگاه $\sum d_i = ۲e(G)$

در جمع کردن درجه‌ها هر یال دو بار شمرده می‌شود، زیرا هر یال دو نقطه پایانی دارد وبرای درجهٔ هر نقطه پایانی مؤثر است. مجموعه‌ای را که به دو روش می‌شماریم، مجموعهٔ جفت‌های v, e است به‌طوری که

$$v \in V(G), \qquad e \in E(G), \qquad v \in e$$

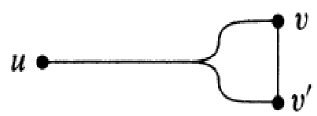
این‌ها دقیقاً ۱های ماتریس وقوع $M(G)$ هستند. برای هر یال دو تا ۱ در $M(G)$ وجود دارد، بنابراین با شمارش ۱های $M(G)$ به‌وسیله ستون‌ها، $۲e(G)$ به‌دست می‌آید. برای رأس v این ۱ها، $d(v)$ است، بنابراین شمارش ۱ها به‌وسیله سطرها، $\sum d(v)$ را به‌دست می‌دهد. [۲۹]

۷.۵.۴ تناقض و گراف‌های دوبخشی

اثبات بوسیله تناقض (یا اثبات غیرمستقیم). برای اثبات درستی اصل استقرا در بحث هم‌ارزی‌ها به‌کار می‌رود. همان‌طور که می‌دانید گزاره شرطی «A ایجاب می‌کند B» نادرست است تنها اگر A درست و B نادرست باشد. روش اثبات‌های تناقضی «A ایجاب می‌کند B» را با نشان دادن غیرممکن بودن «A درست و نادرست B» است، اثبات می‌شود.

مثال ۱۸.۵.۴. یک گراف دوبخشی است اگر و فقط اگر، هیچ دور فرد نداشته باشد.

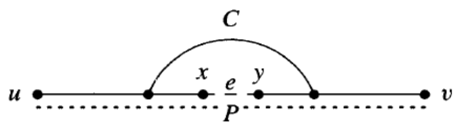
راه‌حل: $\Leftarrow$ فرض کنید G دوبخشی است. هر گشت در G میان دو ردهٔ رنگ متناوب است، بنابراین هر بازگشت به ردهٔ اولیه (شامل رأس اولیه) پس از گام‌هایی با تعداد زوج ظاهر می‌شود. از این‌رو G دارای هیچ دور فردی نیست.
$\Rightarrow$ فرض کنید G دارای هیچ دور فرد نیست. با افراز رأس‌های هر مؤلفه از G به دو مجموعه مستقل، ثابت می‌شود که G دوبخشی است. فرض کنید u رأسی در یک مؤلفه H از G باشد. اگر G دارای u,v–گشت‌ها با دوتایگی متفاوت برای یک $v \in V(H)$ باشد، آنگاه الحاق آن‌ها یک گشته بسته با طول فرد است. بنابر مثال ۱۶.۵.۴ این گشت شامل یک دور فرد است، که با فرض فقدان دورهای فرد در تناقض است. به این ترتیب می‌توان $V(H)$ را به مجموعهٔ X از رأس‌های قابل دسترسی از u با گشت‌های زوج و مجموعهٔ Y از رأس‌های قابل دسترسی از u با گشت‌های فرد افراز کرد. هر کدام از X، Y یک مجموعه مستقل هستند، زیرا یک یال v، $v\prime$ در X یا Y دوباره یک گشت بستهٔ فرد می‌سازد و با فقدان دورهای فرد در تناقض است.



شکل ۳.۴: مربوط به مثال ۱۸.۵.۴

مثال ۱۹.۵.۴. یک یال $e = xy$ یک یال برشی از یک گراف G است اگر و فقط اگر، $G - e$ هیچ x, y-مسیر نداشته باشد.

راه‌حل: با استفاده از عکس نقیض، گزاره هم‌ارز عبارت است از «e یک یال برشی نیست اگر و فقط اگر، $G-e$ دارای یک x, y-مسیر باشد». حذف e هیچ مولفه‌ای را که شامل e نباشد تغییر نمی‌دهد، بنابراین کافی است این گزاره را برای مولفه H از G که شامل e است ثابت کنید. اگر e یک یال برشی از H نباشد، آن‌گاه $H - e$ همبند است و از این‌رو شامل یک x, y-مسیر است.
برعکس، فرض کنید $H - e$ دارای یک x, y-مسیر C است؛ حال باید ثابت شود که $H - e$ همبند است. $u, v \in V(H)$ را به‌طور دلخواه انتخاب کنید. چون H همبند است. دارای یک u, v-مسیر P است.
اگر P شامل e نباشد، آن‌گاه P نیز در $H-e$ وجود دارد. اگر P شامل e باشد، آن‌گاه یک u, v-گشت را در $H - e$ بدین ترتیب ساخته می‌شود که با دنبال کردن P تا آنجا که به e برسید، و دنبال کردن C به‌جای e تا آنجا که به انتهای دیگر e رسیده و سپس باقی‌مانده P را ادامه داده تا به v برسید. بنابر مثال ۱۵.۵.۴، این u, v-گشت در $H - e$ شامل یک u, v-مسیر می‌باشد. چون u, v به‌طور دلخواه از $V(H)$ انتخاب شده بودند، ثابت شد که $H - e$ همبند است. [۲۹]



شکل ۴.۴: مربوط به مثال ۱۹.۵.۴

۸.۵.۴ اکسترمال بودن

فن اکسترمال بودن متضمن انتخاب یک مثال اکسترمال [۹] از یک ساختار و استفاده از یک مثال «بهینه[۱۰]» برای بدست آوردن توانایی بیشتر برای اثبات است. این فن برای اثبات نابرابری‌ها مناسب است. به‌عنوان مثال اگر بخواهیم ثابت کنیم که یک گراف دارای مسیری با طول حداقل l است، آن‌گاه می‌توانیم یک مسیر طولانی‌تر را در نظر بگیریم، زیرا چنین مسیری در نابرابری صدق می‌کند اگر مسیری در آن صدق کند.

مثال ۲۰.۵.۴. فرض کنید G یک گراف متناهی با حداقل یک یال باشد. اگر G هیچ دوری نداشته باشد، آن‌گاه G دارای حداقل دو رأس از درجه ۱ است.

راه‌حل: چون $V(G)$ متناهی است، هر مسیر در G متناهی است. فرض کنید e یالی در G باشد، و فرض کنید P مسیر ماکسیمالی شامل e باشد(«ماکسیمال» یعنی P مشمول در هیچ مسیر طولانی‌تر نیست). چون P را نمی‌توان بسط داد، از این‌رو هر همسایه از یک نقطه پایانی v از P متعلق به P است. برای اجتناب از ایجاد یک دور، v نباید هیچ همسایه‌ای به‌جز همسایه‌اش در امتداد P داشته باشد. [۲۹]

[۹] Extremality

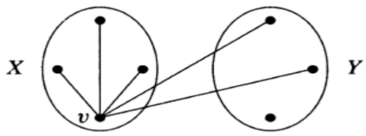
[۱۰] Extreme

۹.۵.۴ اثبات با ساختن

همان‌طور که در فصل ۱ بیان شد، یک روش برای اثبات قضیه‌هایی که بیان‌گر وجود نوع خاصی از اشیاء می‌باشند، روش اثبات با ساختن می‌باشد.
به بیان دیگر، وجود یک چیز را می‌توان با ساختن آن ثابت کرد، چنین اثبات‌هایی را می‌توان به عنوان الگوریتم‌های کامپیوتری انجام داد. یک اثبات ساختاری به بیش از بیان یک الگوریتم نیاز دارد، باید هم‌چنین ثابت شود که الگوریتم به پایان می‌رسد و نتیجه مطلوب را به‌دست می‌دهد. این کار ممکن است متضمن استقرا، تناقض، متناهی بودن و غیره باشد. این روش، روش اثباتی در گراف و ترکیبیات می‌باشد. به‌طور نمونه چند مثال زیر بررسی می‌شوند. فرض کنید بخواهید ثابت کنید که هر گراف دارای یک زیرگراف دوبخشی بزرگ است.

مثال ۲۱.۵.۴. هر گراف بی‌دور G دارای یک زیرگراف دوبخشی با حداقل $\frac{e(G)}{۲}$ یال است.

راه‌حل:
فرض کنید با افرازی دلخواه از $v(G)$ به دومجموعه X و Y مطلب را آغاز کنید. با مشمول کردن یال‌های دارای یک نقطه پایانی در هر مجموعه، یک زیرگراف دوبخشی H را با افراز مضاعف X و Y به‌دست می‌آید. اگر H شامل کمتر از نیمی از یال‌های G متصل به رأس v باشد، آنگاه رأس v چنان وجود دارد که v در رده‌اش همسایه‌های بیشتری از ردهٔ دیگر دارد، هم‌چنان‌که در تصویر ۵.۴ نشان داده شده است. با حرکت v به رده دیگر، یال‌های بیشتری از G که، از دست می‌رود، به‌دست می‌آید. یک چنین جابه‌جایی



شکل ۵.۴: مربوط به مثال ۲۱.۵.۴

موضعی در افراز مضاعف را تا مادامی‌که زیرگراف دوبخشی جاری دارای رأسی باشد که در کمتر از نیمی از یال‌هایش شرکت دارد، انجام می‌شود. هرچنین جابه‌جایی تعداد یال‌های زیرگراف را افزایش می‌دهد. بنابراین فرآیند باید پایانی داشته باشد. هنگامی‌که فرآیند به پایان می‌رسد، به ازای هر $v \in V(G)$ داریم $d_H(v) \geqslant \frac{d_G(v)}{۲}$ و از این‌رو بوسیله فرمول مجموع-درجه خواهیم داشت $e(H) \geqslant \frac{e(G)}{۲}$.
هم‌چنین می‌توان برای اثبات این مثال، از اکسترمال بودن استفاده کرد: زیرگراف دوبخشی H با بیش‌ترین یال‌ها دارای حداقل نیمی از یال‌های G است. درغیر این‌صورت، برای یک $v \in V(G)$ داریم $d_H(v) \geqslant \frac{d_G(v)}{۲}$ ، و در غیر این‌صورت جابه‌جاسازی v در افراز مضاعف با انتخاب H در تناقض است. [۲۹]

مثال ۲۲.۵.۴. برای هر عدد زوج n که بزرگتر از ۲ باشد یک گراف منتظم ۳تایی با n راس وجود دارد.

راه‌حل: فرض می‌شود n یک عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ باشد، ($n > ۲$)؛ حال یک گراف $G = (V, E)$ با n راس را به شکل زیر ساخته می‌شود. مجموعه راس‌های G به‌صورت $V = \{۰, ۱, ۲, \dots, n - ۱\}$ بوده و مجموعه یال‌های G به‌صورت زیر می‌باشد.

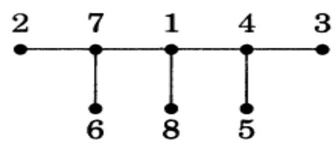
$$E = \{\{i, i + ۱\} | \forall \quad ۰ \leqslant i \leqslant n - ۲\} \cup \{n - ۱, ۰\}$$

$$\cup\{\{i, i+\frac{n}{۲}\} | \forall \quad ۰ \leqslant i \leqslant \frac{n}{۲} - ۱\}$$

اگر رأس‌های این گراف در اطراف یک دایره رسم شوند، یال‌های تعریف شده در سطر اول E رأس‌های همسایه را در اطراف دایره به یکدیگر متصل می‌کنند. یال‌های موجود در سطر دوم E هر رأس را به رأس مقابل آن در دایره متصل می‌کنند. [۲۵]

مثال ۲۳.۵.۴. ثابت کنید که تعداد درخت‌های برچسب‌زده شده روی n برابر $\tau(K_n) = n^{n-۲}$ می‌باشد.

راه‌حل: فرض می‌شود که مجموعه رأس‌های K_n برابر با $N = \{۱, ۲, \dots, n\}$ باشد. یادآوری می‌شود که تعداد دنباله‌هایی به طول $n-۲$ که می‌توان از N ساخت، برابر با $n^{n-۲}$ می‌باشد. بنابراین برای اثبات قضیه کافی است که یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه درخت‌های فراگیر k_n و مجموعه چنین دنباله‌هایی پیدا شوند. به هر درخت فراگیر T از K_n، دنباله یکتای $(t_۱, t_۲, \dots, t_{n-۲})$ را به صورت زیر نسبت داده می‌شود: N را به صورت یک مجموعه‌ی مرتب در نظر گرفته، و فرض می‌شود $s_۱$ اولین رأس درجه یک T باشد. رأس مجاور به $s_۱$ را به عنوان $t_۱$ در نظر گرفته، و $s_۱$ را $t_۱$ قرار داده، سپس $s_۱$ را از T حذف کرده و اولین رأس درجه یک در $T - s_۱$ را $s_۲$ نامیده می‌شود. این عمل تا زمانی که به $t_{n-۲}$ برسد و درختی فقط با دو رأس باقی بماند، ادامه می‌یابد. به عنوان **مثال** درخت شکل ۶.۴ به دنباله $(۱, ۷, ۱, ۴, ۴, ۷)$ منتهی خواهد شد، و یال باقی‌مانده $\{۱, ۸\}$ می‌باشد.
به راحتی می‌توان دید که درخت‌های فراگیر متفاوت از k_n، دنباله‌های متفاوتی را معین می‌کنند. عکس



شکل ۶.۴: مربوط به مثال ۲۳.۵.۴

فرایند فوق نیز بسیار ساده است. پیش از هر چیز، مشاهده می‌شود که هر راس v از T، به تعداد $d_T(v) - ۱$ دفعه در دنباله‌ی $(t_۱, t_۲, \dots, t_{n-۲})$ تکرار شده است. بنابراین راس‌های درجه یک در T دقیقاً آن‌هایی هستند که در این دنباله ظاهر نمی‌شوند. برای بازسازی T از $(t_۱, t_۲, \dots, t_{n-۲})$ به صورت زیر عمل می‌شود: $s_۱$ را به عنوان اولین رأسی از N که در $(t_۱, t_۲, \dots, t_{n-۲})$ نیست در نظر گرفته، و $s_۱$ را به $t_۱$ وصل کرده، سپس $s_۲$ را به عنوان اولین رأس از $N \setminus \{s_۱\}$ که در $(t_۱, t_۲, \dots, t_{n-۲})$ نیست در نظر گرفته، و $s_۲$ به $t_۲$ وصل می‌شود. به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا $n - ۲$ یال $s_{n-۲}t_{n-۲}, \dots, s_۲t_۲, s_۱t_۱$ مشخص شوند. اکنون می‌توان با افزودن یالی که دو راس باقی‌مانده را به هم وصل می‌کند، به T رسید. به راحتی می‌توان تحقیق نمود که دنباله‌های متفاوت به درخت‌های فراگیر متفاوتی از K_n منتهی می‌شوند. بدین ترتیب تناظر یک‌به‌یک مورد نظر به دست می‌آید. [۲۹]

مثال ۲۴.۵.۴. (اثبات رنگی یالی گراف کامل) : اگر n فرد باشد $\chi'(K_n) = n$، $n \neq ۱$، واگر n زوج باشد $\chi'(K_n) = n - ۱$.

راه‌حل: اگر n فرد باشد، یال‌های K_n را به طریق زیر با n رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. رئوس K_n را به‌صورت رئوس یک n ضلعی منتظم قرار داده و یال‌های واقع در این n ضلعی را با n رنگ،

رنگ‌آمیزی کنید، و هر یک از یال‌های باقی‌مانده را با رنگ ضلعی که با آن موازی است رنگ کنید. از آنجا که بیش‌ترین تعداد یال‌هایی که می‌توانند هم‌رنگ باشند، $\frac{1}{2}n(n-1)$ است، ملاحظه می‌شود که K_n، نمی‌تواند، $(n-1)$-رنگ‌پذیر باشد. بنابراین K_n حداکثر $\chi'(K_n)(n-1)\frac{1}{2}$ یال دارد.

اگر $n(\geqslant 4)$ زوج باشد، آنگاه K_n را می‌توان از وصل‌کردن گراف کامل $(n-1)$، K_{n-1} به یک رأس به‌دست آورد. در این‌صورت اگر یال‌های گراف K_{n-1} با روش فوق رنگ‌آمیزی شده باشند، در هر رأس یک رنگ وجود ندارد و این رنگ‌ها همه متفاوت هستند. حال اگر هر یک از یال‌های باقی‌مانده را با رنگی که در رأس نظیر ظاهر نشده، رنگ‌آمیزی شود، رنگ‌آمیزی K_{n-1}، با n رنگ کامل می‌شود. در پایان اگر $n=2$ حکم بدیهی است. [۳۱]

۱۰.۵.۴ اثبات احتمالاتی

اثبات احتمالاتی، یکی از راه‌های مختلف برای نشان دادن تئوری‌های وجودی می‌باشد. این روش، اثباتی است که در آن به‌وسیله تئوری احتمالات، با قطعیت نشان داده می‌شود که مثالی با ویژگی مطلوب وجود دارد. به بیان دیگر این روش به ساده‌ترین صورت چنین بیان می‌شود:
اگر در مجموعهٔ مفروضی از اشیا، احتمال این‌که شیئ یک ویژگی معین را نداشته باشد کوچک‌تر از یک باشد، باید شیئ با این ویژگی وجود داشته باشد.

در حقیقت در اینجا، با یک قضیه وجودی سروکار داریم و یافتن این شئ ممکن است بسیار دشوار باشد، اما می‌دانیم که وجود دارد. در ذیل مثالی از روش احتمالاتی اردوش ارائه می‌شود. ابتدا خانواده‌ای چون $\mathfrak{F}$ مرکب از زیرمجموعه‌های A_i از یک مجموعهٔ مبنایی متناهی X را که اندازه همگی $d \geqslant 2$ است در نظر بگیرید. گویند $\mathfrak{F}$ ، ۲-رنگ‌پذیر است اگر یک رنگ‌آمیزی X با دو رنگ وجود داشته باشد به‌نحوی که در هر مجموعه A_i هر دو رنگ ظاهر شوند. روشن است که هر خانواده‌ای به این طریق قابل رنگ‌آمیزی نیست. به‌عنوان مثال، همه زیرمجموعه‌های با اندازهٔ d از مجموعهٔ $2d-1$ عضوی X را در نظر بگیرید. در این‌صورت، صرفنظر از اینکه چگونه X را با ۲ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنید، باید d عضو وجود داشته باشند که رنگشان همانند باشد. از طرف دیگر به همین اندازه روشن است که هر زیرخانواده از خانواده‌ای ۲-رنگ‌پذیر از مجموعه‌های d عضوی، خودش ۲-رنگ‌پذیر است. پس کوچک‌ترین عدد $m=m(d)$ قابل‌توجه است که به ازای آن خانواده‌ای با m مجموعه وجود دارد که ۲-رنگ‌پذیر نیست. به بیان دیگر، $m(d)$ کوچک‌ترین عددی است که تضمین می‌کند هر خانواده که کمتر از $m(d)$ مجموعه عضو آن باشد، ۲-رنگ‌پذیر است. [۴]

مثال ۲۵.۵.۴. هر خانواده مرکب از حداکثر 2^{d-1} مجموعهٔ d عضوی، ۲-رنگ‌پذیر است، یعنی

$$m(d) > 2^{d-1}$$

.

راه‌حل: فرض کنید $\mathfrak{F}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های dعضوی با حداکثر 2^{d-1} مجموعه باشد. X با دو رنگ به‌طور تصادفی رنگ می‌شود چنان‌که همه رنگ‌آمیزی‌ها هم‌احتمال باشند. به ازای هر مجموعهٔ $A \in \mathfrak{F}$، فرض کنید E_A این پیشامد باشد که همه عضوهای A رنگ مشابه داشته باشند. چون دقیقاً دو

تا ازاین‌گونه رنگ‌آمیزی‌ها وجود دارد، داریم

$$Prob(E_A) = (\frac{۱}{۲})^{d-۱}$$

و بنابراین با $m = |\mathfrak{F}|$ (توجه شود که پیشامدهای E_A مجزا نیستند):

$$Prob(\bigcup_{A\in\mathfrak{F}} E_A) < \sum_{A\in\mathfrak{F}} Prob(E_A) = m(\frac{۱}{۲})^{d-۱} \leqslant ۱$$

نتیجه می‌شود $Prob(\bigcap_{A\in\mathfrak{F}} E_A^C) > ۰$ رنگ‌آمیزی از X با دو رنگ بدون مجموعه‌ای تک‌رنگ وجود دارد و این درست شرط ۲-رنگ‌پذیری است. [۴]

۱۱.۵.۴ اثبات ترکیبیاتی

یکی از روش‌های اثبات اتحادها، روش جبری یا محاسباتی است. علی‌رغم اینکه می‌توان روش جبری یا محاسباتی را در برخی اتحادها می‌توان استفاده کرد، ولی اثبات برخی از اتحادها با این روش یا بسیار سخت و یا حتی غیرممکن است ونکته دیگر این که اثبات برخی از اتحادها به روش جبری نیاز به ابزار محاسباتی پیشرفته‌تر، از قبیل مشتق و انتگرال ...دارد.

روش دیگر اثبات اتحادها، اثبات ترکیبیاتی یا اثبات شمارشی است. در واقع همان‌طور که بیان شد مهم‌ترین و کارآمدترین روش برای اثبات اتحادهای ترکیبیاتی استفاده از تناظر یک‌به‌یک و شمارش دوگانه است. [۱۹]

اثبات ترکیبیاتی برابری دو عبارت را ثابت می‌کند، بانشان دادن این‌که هردو عبارت یک چیز را می‌شمارند.

مثال ۲۶.۵.۴. برای هر مجموعه متناهی Aبا $|A| = n \geq ۰$، A دارای ۲^n زیرمجموعه است، بهعبارت دیگر$|P(A)| = ۲^n$.

راه‌حل: به ازای هر $۰ \leq k \leq n$ ، $\binom{n}{k}$ زیر مجموعه‌ای با اندازه k وجود دارد. اگر تعداد زیر مجموعه های A را بر حسب تعداد عناصر ، k ، در یک زیر مجموعه حساب کنیم، اتحاد ترکیبیاتی زیر را خواهیم داشت. به ازای $n \geq ۰ \geq$ داریم: $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n$

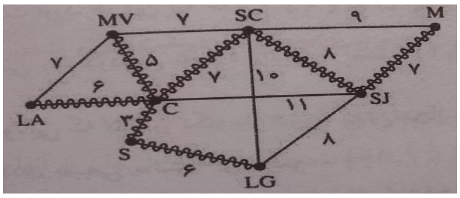
(اتحاد مزبور به وسیلهٔ شمارش یک گردایه از اشیاء (زیرمجموعه‌های A)) [۱۹]

۱۲.۵.۴ روش الگوریتمی

برای حل بسیاری از مسائل می‌توان از الگوریتم‌های گراف استفاده کرد. درخت‌ها در بسیاری از الگوریتم‌های علوم رایانه به‌کار می‌روند که در آن‌ها حل کردن مسئله از مؤثرترین راه ممکن، مورد نظر است. هم‌چنین می‌توان برای تحلیل بسیاری از مسئله‌های بهینه‌سازی از درخت‌ها، به‌ویژه درخت‌های فراگیر استفاده کرد.

به‌عنوان مثال فرض کنید قرار است شبکهٔ راه‌آهنی که چند شهر را به هم وصل می‌کند ساخته شود و معلوم شده است که هزینهٔ ساختن خط‌آهن مستقیم میان شهرهای v_i و v_j، c_{ij} است. علاوه بر این فرض به

دلایل اقتصادی این شبکهٔ راه‌آهن باید با کمترین هزینه ممکن ساخته شود. مسئلهٔ ساختن شبکهٔ راه‌آهنی با کمترین هزینه که همهٔ شهرهای موردنظر را به هم وصل کند به **مسئله کمترین رابطها** معروف است. خطوط راه‌آهن مطرح شده را با گرافی وزن‌دار مانند G نمایش داده که در آن به ازای هر شهر یک رأس



شکل ۷.۴:

و به ازای هر دوتا از شهرها مانند v_i و v_j ،یالی مانند v_iv_j با وزن c_{ij} وجود دارد. برای حل‌کردن مسئله کمترین رابطها باید زیرگراف فراگیر همبندی با کمترین وزن پیدا شود. از آنجایی که وزن‌ها نشان‌دهندهٔ هزینه‌ها هستند می‌توان این را هم فرض کرد که آن‌ها مثبت‌اند و بنابراین زیرگراف با کمترین وزن از G درختی فراگیر از G است. درخت فراگیر با کمترین وزن درگرافی وزن‌دار مانند G را **درخت اقتصادی** می‌نامند.

برای حل این‌گونه مسائل می‌توان از الگوریتم‌های پریم و کروسکال استفاده کرد، که به‌طور خلاصه در زیر بیان می‌شوند. [۱۴]

الگوریتم پریم

فرض کنید G گرافی وزن‌دار با مجموعهٔ رئوس V باشد که $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_p\}$.

۱. فرض کنید $i = ۱$ ،$V_۱ = \{v_۱\}$ و $E_۱ = \phi$.

۲. اگر $U_i = V - V_i$ مقدار w_i را که، $w_i = min_{x\in V_i, y\in U_i}$ ،حساب کنید.
فرض کنید e_i ، که $e_i = (x_i, y_i)$ ، یالی باشد که به ازای آن این کمترین مقدار، w_i ،به‌دست می‌آید.

۳. i را ۱ واحد افزایش دهید. قرار دهید $V_i = V_{i-۱} \cup \{y_i\}$ و $E_i = E_{i-۱} \cap \{e_i\}$.

۴. اگر $i < p$ به مرحلهٔ ۲ برگردید. در غیر این‌صورت الگوریتم را متوقف کنید زیرا زیرگراف T با مجموعهٔ رأس V_p که $V_p = V$ و مجموعهٔ یال E_p درختی فراگیر با کمترین وزن است. [۱۴]

الگوریتم کروسکال

فرض کنید G گرافی وزن‌دار با مجموعهٔ رئوس V باشد که $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_p\}$

۱. فرض کنید $i = ۱$ و زیرگراف G را که از یک تک رأس $v_۱$ تشکیل شده است با T نشان دهید.

۲. مقدار w_i را که، $w_i = min\{w(e)\}$ حساب کنید که در اینجا کمترین مقدار روی مجموعهٔ شامل همه یال‌هایی مانند e محاسبه می‌شود که وقتی به T اضافه می‌شوند دوری تشکیل نمی‌دهند.
فرض کنید e_i یالی باشد که به ازای آن این کمترین مقدار، w_i ،به‌دست می‌آید.

۳. مقدار i را ۱ واحد افزایش دهید. به جای T ،$T + e_i$ را بگذارید.

۴. اگر $i < p$ به مرحلهٔ ۲ برگردید. در غیر این‌صورت الگوریتم را متوقف کنید زیرا زیرگراف T درخت فراگیری با کمترین وزن است.

هم‌چنین از درخت‌ها می‌توان در بسیاری از برنامه‌های رایانه‌ای به‌عنوان ساختارهای مناسبی برای ذخیره‌سازی داده‌ها استفاده کرد. برای ساختن درخت دوتایی بهینه از الگوریتم هافمن استفاده می‌شود که در مرتب‌سازی‌ها از آن استفاده می‌شود، و m فهرست در قالب یک فهرست ادغام می‌شود. [۱۴]

مسئله فروشنده دوره‌گرد(TSP): فرشنده دوره‌گردی از شهر محل اقامتش به راه می‌افتد و باید به هر کدام از$(n - ۱)$ شهر دیگر سر بزند و بعد به خانه‌اش برگردد. هزینه سفر از شهر i به شهر j مقدار C_{ij} است و هزینه کل این سفر مجموع هزینه‌های هر بخش جداگانه اش است. اگر ترتیبی که در آن فروشنده به شهرها می‌رود اهمیت نداشته و فقط این شرط باشد که هزینه کل سفر کمترین مقدار ممکن شود او باید کدام مسیر را طی کند؟
مسئله فروشنده دوره‌گرد مسئله دشوار مشهوری در علوم رایانه است و در واقع بسیاری افراد اعتقاد دارند که اصلا بعید است که الگوریتم موثری برای حل‌کردن آن پیدا شود. یک الگوریتم شمارش برای حل‌کردن مسئله فروشنده دوره‌گرد در نظر می‌گیریم، به این‌صورت که فرض کنیم همه مسیرهای ممکن را بررسی و هزینه هر مسیر را برای پیداکردن مسیری با کمترین هزینه کل حساب کنیم. مسیر فروشنده دوره‌گرد را می‌توان به شکل آرایش دوری این n شهر تصور کرد. همان‌طور که می‌دانیم $(n - ۱)!$ جایگشت دوری متمایز از این n شهر وجود دارد که باید آن‌ها را بررسی کرد. [۱۴]

۶.۴ دسته بندی مسائل ترکیبیات

همان‌طور که بیان شد، ترکیبیات کاربردهای فراوانی در شاخه‌های گوناگون ریاضیات دارد و اساساً به مطالعهٔ مجموعه‌ها متناهی یا گسسته (نظیر مجموعه اعداد صحیح) و ساختارهای گوناگونی روی این مجموعه‌ها، مانند ترتیب‌ها، ترکیب‌ها، انتساب‌ها و پیکربندی‌ها می‌پردازد. قطع نظر از جزئیات، ضمن مطالعه این مجموعه‌ها و ساختارهای نام برده روی آن‌ها، سه نوع مسئله پیش می‌آید که موضوعات و مسائل ترکیبیات را می توان در سه دسته اصلی به‌صورت زیر تقسیم‌بندی نمود. [۲]

الف: مسائل شمارشی و برآورد کردنی

تعریف ۱.۶.۴. مسائل شمارشی آن دسته از مسائل ترکیبیاتی هستند که با محاسبه تعداد آرایش‌هایی که از نوعی معین هستند سروکار دارند. [۱۴] به‌عبارتی، مسائل شمارشی در جست‌وجوی یافتن تعداد ترتیب‌ها یا پیکربندی‌های ممکن، از یک الگوی مفروض می‌باشند. [۲]

ب: مسائل وجودی

تعریف ۲.۶.۴. مسائل وجودی آن دسته از مسائل ترکیبیاتی است که می‌خواهد بداند که دست کم یک آرایش از نوعی مشخص واقعاً وجود دارد. [۱۴] به‌بیان دیگر، مسائل وجودی به این پرسش مربوط می‌شوند که، آیا حداقل یک ترتیب از نوع مفروض وجود دارد؟ [۲]

ج: مسائل بهینه‌سازی

تعریف ۳.۶.۴. مسائل بهینه‌سازی آن دسته از مسائل ترکیبیاتی هستند که در جستجوی آرایش‌هایی (پاسخ‌هایی) می‌باشند که مؤثرتر از بقیه‌اند. [۱۴]

۱.۶.۴ روندها و روش‌ها در مسائل شمارشی

برای شمارش اشیایی از یک نوع، معمولاً روندی شمارشی درنظر گرفته می‌شود که دنباله‌ای از مراحل ساختن، یا انتخاب نوع خواسته شده اشیاست. اگر هر کدام از برآمدهای متمایز روند متناظر با دقیقاً یکی از اشیا موردنظر باشد، می‌توان این اشیا را با بررسی برآمدهای آن روند شمارش کرد.

الف: روند شمارش دنباله‌ای

انواعی از روندهای شمارشی را می‌توان به شکل پرکردن K تایی‌های مرتب درنظر گرفت. روندی شمارشی از این دست، روند شمارشی دنباله‌ای نامیده می‌شود. برای آن‌که بتوان اصل ضرب را در مورد روندی شمارشی به‌کار برد باید مطمئن شد که مراحل آن روند، شرایطی را که در زیر ذکر می‌شود دارا باشد.

- در روند شمارشی دنباله‌ای مراحل مرتب‌اند یعنی اینکه هر دو دنباله از برآمدهای مختلف نشان‌دهنده برآمدهای ترکیبی متمایزند.
- در روند شمارشی دنباله‌ای مراحل از هم مستقل‌اند یعنی اینکه برآمدهای مراحل قبلی بر تعداد برآمدهای یک مرحله تاثیر نمی‌گذارند.
- در روند شمارشی دنباله‌ای مراحل کامل‌اند یعنی هر برآمد ترکیبی از دنباله کاملی از برآمدهای جداگانه، به‌ازای هر مرحله یک برآمد، تشکیل می‌شود. به‌طور کلی در اصل ضرب مسئله را با استفاده از دنباله کاملی از مراحل تقسیم می‌کنیم که هر کدامشان بدون استثنا رخ می‌دهند و بعد تعداد کل برآمدها را با ضرب کردن حساب می‌کنیم. معمولاً برای شمارش اشیایی که شکلی از ویژگی ۱، و شکلی از ویژگی ۲، و ...و شکلی از ویژگی m را دارند از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

ب: روند شمارش حالت به حالت

یکی دیگر از قواعد اساسی برای شمارش اشیای مجموعه‌ها اصل جمع نامیده می‌شود که می‌توان آن را در مورد بسیاری از روندهای شمارشی به‌کار برد. همانند اصل ضرب، از این اصل نیز می‌توان برای تقسیم‌کردن مسئله‌های شمارشی پیچیده به بخش‌های کوچک‌تر استفاده کرد. در اصل جمع مسئله طوری به حالت‌های مختلف تقسیم می‌شود که هر برآمد ترکیبی، دقیقاً در یک حالت رخ دهد و بعد تعداد کل برآمدها با جمع‌کردن حساب می‌شوند. بیشتر اوقات سعی می‌شود، اشیایی را که ویژگی مشخصی دارند شمارش شوند، یعنی برای شمارش اشیایی که ویژگی۱، یا ویژگی۲، یا ...، یا ویژگی K را دارند از اصل جمع (یا تعمیم آن، اصل شمول و عدم شمول) استفاده می‌شود.

ج: روند شمارش به صورت انتخاب

برای مسئله‌های شمارش اشیایی از نوع معین، معمولاً روندی شمارشی درنظر گرفته می‌شود که از مراحل یا پیشامدهای کوچک‌تری تشکیل شده باشند. بیشتر وقت‌ها هر مرحلهٔ روندی شمارشی را

می‌توان با گزینش یا انتخاب K شیء مختلف از مجموعه‌ای شامل n شیء مختلف در نظر گرفت. دو مدل انتخاب، از این دست به‌صورت زیر می‌باشند.

۱) جایگشت؛ که انتخابی مرتب می‌باشد.

۲) ترکیب؛ که انتخابی نامرتب می‌باشد. [۱۴]

د:استفاده از روش روابط بازگشتی

روابط بازگشتی[۱۱]، ابزاری برای حل مسائل ترکیبیاتی می‌باشند. این روابط، شیوه دیگری برای محاسبه و شمارش ترکیب‌های مختلف و انتخاب‌هایی از اشیاء متفاوت هستند، که در آن از روش مستقیم استفاده نمی‌شود. در این مسائل، وضعیتی مفروض بررسی می‌شود و آنگاه پاسخ‌ها با توجه به حالت‌های قبلی و کوچک‌تر حاصل می‌شوند. از جمله کاربردهای آن می توان به نور شناسی، نظریه احتمال، قضیه تارعنکبوت در اقتصاد و همچنین در علوم اجتماعی اشاره کرد. نخستین مطالعات در این حوزه از اصل شمارش لئوناردو در قرن ۱۳ و بعد از او نیز یاکوب برنولی در قرن ۱۷ انجام داده اند. [۱۵]

به‌عنوان مثال دنباله فیبوناتچی و مثلث خیام و برج هانوی توسط این روابط حل می‌شوند.

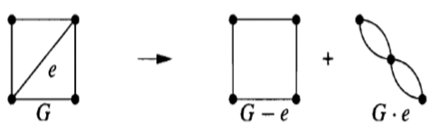
مثال ۴.۶.۴. اگر e یک یال پیوندی از G باشد داریم:

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$$

راه‌حل: درخت‌های فراگیر G که e را ندارند دقیقاً درخت‌های فراگیر $G-e$ هستند. تعداد درخت‌های فراگیری که شامل e می‌باشند عبارت است از $\tau(G.e)$، زیرا یک نگاشت دوسویی طبیعی میان درخت‌های فراگیر $G.e$ و درخت‌های فراگیر G که شامل e هستند وجود دارد. منقبض کردن e در یک درخت فراگیر G که شامل e است یک درخت فراگیر $G.e$ را به‌دست می‌دهد. دیگر یالها، تحت انقباض، یکسانی خود را حفظ می‌کنند، بنابراین هیچ دو درختی از راه این عمل به یک درخت فراگیر از $G.e$ تبدیل نمی‌شوند. علاوه بر این، هر درخت فراگیر از $G.e$ از این راه ظاهر می‌شود. از این‌رو نگاشت، یک نگاشت دوسویی است.

مثال: یک گام در بازگشت

گراف‌های سمت راست در شکل زیر، هر یک چهار درخت فراگیر دارند، بنابراین بازگشت برای درخت‌های فراگیر ایجاب می‌کند که گراف سمت چپ دارای هشت درخت فراگیر باشد. [۲۹]



شکل ۸.۴: مربوط به مثال ۲.۸.۴

[۱۱] Recursive function

مثال ۵.۶.۴. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد دنباله‌های دودویی به طول n پیدا کنید که در آن‌ها
* *هیچ دو رقم ۰ای پشت سر هم نیایند.*
** *هیچ سه رقم ۰ای پشت سر هم نیایند.*

راه‌حل

* فرض کنید a_n تعداد دنباله‌های دودویی به طول n باشد که شامل هیچ دو رقم ۰ پشت سر همی نیستند. با بررسی جمله اول دنباله‌ای از این دست رابطه‌ای بازگشتی برای a_n به‌دست می‌آید. هر دنباله به طول n که دو رقم ۰ پشت سر هم ندارد ممکن است با یک رقم ۱ آغاز شود که به دنبال آن هر دنباله‌ای به طول $n-1$ که شامل دو رقم ۰ پشت سر هم نباشد می‌تواند بیاید. از طرف دیگر دنباله موردنظر ممکن است با یک رقم ۰ هم آغاز شود که در این صورت بلافاصله پشت سر آن باید یک رقم ۱ بیاید. رقم‌های باقی‌مانده در دنباله‌ای از این دست می‌تواند هر دنباله‌ای به طول $n-2$ باشد که دو رقم ۰ پشت سر هم ندارد. بنابراین رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ با شرط‌های اولیه $a_0 = 1$ (دنباله تهی) و $a_1 = 2$ حاصل می‌شود.

** به همین ترتیب فرض کنید b_n تعداد دنباله‌های دودویی به طول n باشد که شامل سه رقم ۰ پشت سر هم نیستند. دنباله‌ای به طول n که در آن هیچ سه رقم ۰ای پشت سر هم نمی‌آیند ممکن است با یک رقم ۱ آغاز شود که به دنبال آن هر دنباله‌ای به طول $n-1$ که سه رقم ۰ پشت سر هم نداشته باشد می‌تواند بیاید یا دنباله‌ای از این دست ممکن است با دو رقم ۰۱ آغاز شود که به دنبال آن هر دنباله‌ای به طول $n-2$ که سه رقم ۰ پشت سر هم نداشته باشد می‌تواند بیاید یا دست آخر دنباله موردنظر ممکن است با سه رقم ۰۰۱ آغاز شود که در این صورت به دنبال آن هر دنباله‌ای به طول $n-3$ که شامل هیچ سه رقم ۰ پشت سر همی نباشد می‌تواند بیاید. پس در این مورد دنباله بازگشتی $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$ را به دست می‌آید که در شرط‌های اولیه $b_0 = 1$ ، $b_1 = 2$ و $b_2 = 4$ صدق می‌کند. [۱۴]

۲.۶.۴ روندها و روش‌ها در مسائل وجودی

مسائل وجودی در شاخه‌های مختلف ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابتدا دو مسئله وجودی در آنالیز به‌عنوان قضیه رول و قضیه وایراشتراس مطرح می‌گردد.

مثال ۶.۶.۴. **قضیه رول:** اگر تابع f در فاصلهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته، و در فاصلهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد و بعلاوه $f(a) = f(b) = 0$ باشد، آن‌گاه لااقل یک نقطه مانند c ، $c \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $f'(c) = 0$.

راه‌حل: دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: برای همه مقادیر x ، $f(x) = 0$ است. در این حالت $f'(x) = 0$ و بنابراین c می‌تواند هر یک از اعداد بین a و b را اختیار کند.

حالت دوم: $f(x)$ در بعضی نقاط (a,b) غیر صفر است. در این حالت چون f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است، این تابع روی این فاصله ماکسمم مطلق و مینیمم مطلق دارد. از این‌که $f(a) = f(b) = 0$ و f

در برخی نقاط فاصله (a,b) غیرصفر است، نتیجه می‌گیریم که f در نقطه‌ای مانند $c_1 \in (a,b)$ دارای یک ماکسیمم مطلق مثبت، یا در نقطه‌ای مانند $c_2 \in (a,b)$ دارای یک مینیمم مطلق منفی است و یا هردو. بنابراین f روی فاصله باز (a,b) در نقطه‌ای مانند $c = c_1$ و یا $c = c_2$ ماکسیمم مطلق و یا مینیمم مطلق و در نتیجه ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد و چون $f'(c)$ موجود است، پس داریم $f'(c) = 0$. [۲۱]

یکی از مباحث مهم در آنالیز، تقریب توابع به وسیلهٔ توابع ساده‌تر است. مبحث تقریب یکی از مباحث بسیار مفید نه تنها در آنالیز بلکه در بخش‌های دیگر دانش ریاضی نیز است. قضیه تقریب وایراشتراس یکی از این قضایا است که تقریب یک تابع حقیقی پیوسته را به‌وسیلهٔ یک چندجمله‌ای به دست می‌دهد. تعمیمی از این قضیه تحت عنوان تعمیم استون از قضیه وایراشتراس است که به قضیه استون–وایراشتراس معروف است و این دو قضیه نمونه‌ای از مسائلی وجودی هستند که در زیر بیان می‌شوند.

مثال ۷.۶.۴. قضیه وایراشتراس: اگر تابع f بر بازه $[0,1]$ پیوسته باشد، آن‌گاه نشان دهید که دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها، مانند $\{P_n\}$ وجود دارد بطوری‌که $P_n \Rightarrow f$.

راه‌حل: بدون این‌که به کلیت مسئله خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که $f(0) = f(1) = 0$ و f در خارج از $[0,1]$ صفر تعریف می‌شود. چندجمله‌ای $\{Q_n\}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

و اعداد نامنفی c_n را طوری اختیار می‌کنیم که

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

پس با تعریف دنبالهٔ $\{P_n\}$ بصورت

$$\{P_n\} = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)dt \qquad (0 \le x \le 1)$$

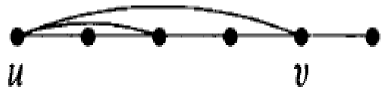
و ادامه اثبات ثابت می‌شود که $P_n \Rightarrow f$. [۲۸]

وضعیت وجودی مفاهیم در دانش ریاضی ترکیبیات چیست؟

گفته شد که بحث اصلی ترکیبیات مبتنی بر شمارش حالت‌ها، بدون شمردن است. منظور از شمردن ایجاد تناظر یک‌به‌یک بین عناصر یک مجموعه شمارش‌پذیر با مجموعه اعداد طبیعی است.

مثال ۸.۶.۴. اگر G یک گراف ساده متناهی باشد که در آن هر رأس دارای درجه حداقل K است، آن‌گاه مسیری به طول حداقل K در G وجود دارد. اگر $K \geqslant 2$ ، آن‌گاه G دوری به طول حداقل $K+1$ نیز در G وجود دارد.

راه‌حل: چون $V(G)$ متناهی است، می‌توان طولانی‌ترین مسیر P را در G انتخاب کرد. «طولانی‌ترین» مستلزم آن است که P را نمی‌توان بسط داد، و از این‌رو هر همسایه یک نقطهٔ پایانی u از P نیز به P تعلق دارد، چون u دارای حداقل K همسایه است، P باید حداقل K رأس به‌جز u داشته باشد (زیرا G ساده است). بنابراین P دارای طول حداقل K است. اگر $K \ge 2$ ، آن‌گاه یالی از u تا دورترین همسایه‌اش v در امتداد P یک دور به‌اندازه کافی طولانی را با u,v–تکه از P کامل می‌کند. [۲۹]



شکل ۹.۴: مربوط به مثال ۸.۶.۴

۳.۶.۴ روندها و روش‌ها در مسائل بهینه سازی

مسائل بهینه‌سازی، مسائلی هستند که در آن مؤثرترین الگوی مفروض، موردنظر می‌باشد، که برخی از این مسائل بهینه سازی ترکیبیاتی با بررسی شبکه‌ها حل می‌شوند، مانند: تحلیل شبکه‌های کارها، مسائل شارش ماکسیمم روی شبکه‌های حمل‌ونقل و مسایل تخصیص بهینه. [۲]
اکنون بیان مختصری از مسأله تخصیص شغل و مسأله تخصیص بهینه را ارائه می‌دهیم، که خود این مسائل نیازمند معرفی قضیه هال می‌باشند.

در بسیاری از کاربردها، پیداکردن تطابقی از گراف G که تمام رأس‌های X را آلوده کند، موردنظر می‌باشد، که مسئلهٔ تخصیص شغل، نمونه‌ای از این دسته می‌باشد. شرط لازم وکافی برای چنین گراف‌هایی نخستین بار توسط هال (۱۹۳۵) ارائه شده است.

قضیه ۹.۶.۴. *قضیه هال:* *فرض کنید G یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y باشد، در این‌صورت G دارای تطابقی است که تمام رأس‌های X را آلوده می‌کند اگروتنها اگر داشته باشیم*

$$\forall S \subseteq X : \qquad |N(S)| \geqslant |S|$$

[۶]

مسأله تخصیص شغل: در یک شرکت معین، nکارگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برای n کار $y_1, y_2, \ldots, y_n$ موجودند و هر کارگر قادر است که یک یا تعداد بیشتری کار را انجام دهد. آیا می‌توان تمام کارها را بین این افراد تقسیم کرد به‌طوری‌که هر کس قادر به انجام کاری که به ان گماشته شده، باشد؟
یک گراف دوبخشی G با دو بخش X و Y می‌سازیم به‌طوری‌که $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ و X_i به Y_j متصل باشد، اگروتنها اگر X_i قادر به انجام کار Y_j باشد.بدین ترتیب مسأله تبدیل می‌شود به تعیین اینکه آیا G دارای تطابق کاملی هست یا خیر؟
طبق قضیه هال، یا G دارای چنین تطابقی هست یا زیرمجموعه‌ای مانند S در X وجود دارد که $|N(S)| < |S|$.
برای حل مسئله تخصیص از الگوریتم مجارستانی استفاده می‌شود. الگوریتم موردنظر، یا یک تطابق از G که تمام رأس‌های X را آلوده می‌کند، پیدا می‌نماید یا در صورت عدم وجود چنین تطابقی زیرمجموعه‌ای مانند S از X پیدا می‌کند بطوریکه $|N(S)| < |S|$ باشد. [۶]

مسأله تخصیص بهینه: در برخی کارها ممکن است که کارآیی کارگرها برای شغل‌های مختلف نیز مهم باشد. به‌عنوان مثال این کارآیی را می‌توان بر اساس سودی که عاید شرکت می‌شود محاسبه نمود. در این حالت هدف کلی در تحقق کارها این است که به بیشترین مجموعه کارآیی کارگرها برسیم. مسأله یافتن

چنین تخصیصی به‌عنوان مسأله تخصیص بهینه شناخته می‌شود، که برای این کار، الگوریتم کان-مانکرز یک الگوریتم خوب می‌باشد. [۶]

۷.۴ برخی از کاربردهای قضیهٔ هال در ترکیبیات

قضیهٔ هال که در بخش قبلی بیان شد، اینک بعضی از کاربردهای آن را در ذیل ارائه می‌شود.

- ساختن مربع‌های لاتین و کامل کردن آن‌ها
- ماتریس‌های (۱-۰)
- وجود ترنسورسال [۱۲] (دستگاه نمایندگان متمایز) مشترک برای دو خانواده از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مفروض

- **مربع‌های لاتین**

از جمله قدیمی‌ترین اشیای ترکیبیاتی، که مطالعه آن‌ها ظاهراً از دوران باستان متداول بوده است؛ مربع‌های لاتین هستند. برای به‌دست آمدن یک مربع لاتین باید $n^۲$ خانهٔ یک آرایه مربعی $n\times n$ را طوری با عددهای $۱,۲,\ldots,n$ پرکرد که هر عدد دقیقاً یک بار در هر سطر و ستون ظاهر شود، به‌عبارت دیگر، هر یک از سطرها و ستون‌ها جایگشتی از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشند. n را **مرتبهٔ لاتین** می‌نامند. [۴]

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

شکل ۱۰.۴: یک مربع لاتین از مرتبه ۴

یک **مستطیل لاتین** $m\times n$، یک ماتریس $m\times n$، $M=(m_{i,j})$ است که درایه‌های آن اعداد صحیحی هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

۱) $۱\leqslant m_{i,j}\leqslant n$

۲) هیچ دو عنصری در یک سطر یا ستون قرار دارند، مساوی نیستند.

شرایط (۱) و (۲) ایجاب می‌کنند که $m\leqslant n$، اگر $m=n$ مستطیل لاتین را مربع لاتین می‌نامند.

اینک این سوال را می‌توان مطرح کرد که در چه شرایطی می‌توان یک مستطیل لاتین $m\times n$، که $m<n$،

---
[۱۲] SDR

$m-n$ سطر جدید اضافه کرد تا به یک مربع لاتین رسید؟ لازم به ذکراست که جواب همواره مثبت است و برای اثبات این مسئله می‌توان به مرجع [۳۱] صفحه ۱۴۸ مراجعه کرد. پس به این ترتیب با کمک قضیه هال، می‌توان یک مستطیل لاتین را به مربع لاتین تبدیل کرد. [۳۱]

نظریهٔ ترنسورسال: اگر E یک مجموعه متناهی و ناتهی باشد، و $\mathscr{S}=(S_1,S_2,\dots,S_m)$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی از E (که الزاماً متمایز نیستند) باشد. در این صورت یک ترنسورسال (دستگاه نمایندگان متمایز) از $\mathscr{S}$، مجموعه‌ای از n عنصر متمایز از E است، که هر کدام به یکی از S_i تعلق دارد.

◂◂ماتریس‌های (۰و۱)

یکی از راه‌های مطالعهٔ ترنسورسال‌های خانوادهٔ $\mathscr{S}=(s_1,s_2,\dots,s_m)$، از زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ مطالعه ماتریس وقوع این خانواده است.

ماتریس $m\times n$، $A=(a_{i,j})$ که در آن $a_{ij}=1$ اگر $e_j\in S_i$ باشد، و در غیر این‌صورت $a_{ij}=0$. این ماتریس را که عناصر آن ۰ و ۱ هستند، ماتریس (۰و۱) می‌گویند. اگر رتبهٔ جمله‌ای A را بیشترین تعداد ۱ در A تعریف کنیم که هیچ دوتای آن‌ها در یک سطر و یک ستون واقع نباشد، آنگاه $\mathscr{S}$ دارای یک ترنسورسال خواهد بود اگرو فقط اگر رتبهٔ جمله‌ای A، m باشد.

به عنوان دومین کاربرد قضیه هال، حکم مشهوری در مورد ماتریس‌های (۰ و ۱) به‌نام قضیه کونیک-اگروری [13] ثابت می‌شود که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مرجع [۳۱] صفحه ۱۴۹ مراجعه کرد. [۳۱]

◂◂◂ وجود ترنسورسال مشترک

اگر E یک مجموعه ناتهی متناهی باشد و $\mathscr{S}=(S_1,S_2,\dots,S_m)$ و $\mathscr{F}=(F_1,F_2,\dots,F_m)$ دو خانواده از زیرمجموعه‌های ناتهی E باشند، می‌خواهیم بدانیم چه موقع یک ترنسورسال مشترک برای $\mathscr{S}$ و $\mathscr{F}$ وجود دارد؟ یعنی مجموعه‌ای از m عنصر متمایز از E که هم ترنسورسال $\mathscr{S}$ باشند و هم ترنسورسال $\mathscr{F}$.

یک **نمونه کاربردی** برای این مورد، استفاده در **مسائل جدول زمانی** می‌باشد. مثلاً اگر E مجموعه زمان‌هایی باشد که دروس ارائه می‌شوند و S_i نشانگر اوقاتی باشد که m استاد مایل به تدریس هستند و T_i مجموعه ساعاتی که کلاس خالی وجود دارد، آنگاه ترنسورسال مشترک $\mathscr{S}$ و $\mathscr{F}$ امکان تدریس هر استاد را در یک کلاس درس موجود در زمان مناسب فراهم می‌کند. در حقیقت طبق قضیه زیر می‌توان یک شرط لازم و کافی برای آن که دو خانواده دارای ترنسورسال مشترک باشند در نظرگرفت.

قضیه ۱.۷.۴. *فرض کنید E یک مجموعه ناتهی متناهی باشد و $\mathscr{S}=(S_1,S_2,\dots,S_m)$ و $\mathscr{F}=(F_1,F_2,\dots,F_m)$ دو خانواده از زیرمجموعه‌های ناتهی E باشند، در این‌صورت $\mathscr{S}$ و $\mathscr{F}$ دارای ترنسورسال مشترک هستند اگر و فقط اگر برای تمام زیرمجموعه‌های A و B از $\{1,2,\dots,m\}$ داشته‌باشیم:*

$$|(\cup_{i\in A}S_i)\cap(\cup_{j\in B}F_j)|\geqslant|A|+|B|-m$$

برای اثبات این قضیه می‌توان به مرجع [۳۱] صفحه ۱۵۰ مراجعه کرد.

اگر در این قضیه $\forall 1\leqslant j\leqslant m\;;\quad F_j=E$ قراردهیم، قضیه هال حاصل می‌شود. [۳۱]

[13] Egervary

۸.۴ روش‌های کلی اثبات در ترکیبیات

الف: روش‌های استنتاجی

یکی از روش‌های اصلی مسئله حل‌کردن ریاضی روشی است که آن را استنتاج می‌نامیم. راه‌حلی استنتاجی، یک روش حل‌کردن مسئله یا ثابت‌کردن جواب با استفاده از دنباله‌ای سرراست از محاسبات یا نتیجه‌گیری‌های منطقی است که از فرض آغاز، و به نتیجه منجر می‌شود.

تعریف ۱.۸.۴. راه‌حل استنتاجی از سه بخش مهم تشکیل می‌شود:

۱. فرض: آغاز یا شروع مسئله

۲. دنبالهٔ گام‌های میانی: هر گام یا محاسبه را باید بتوان بر اساس ادعاهایی که قبلا ثابت شده‌اند یا دیگر اطلاعات واقعی توجیه کرد.

۳. حکم: گزاره پایانی که پاسخ مسئله را به‌دست می‌دهد.

هنگامی‌که به مسئله‌ای برای نخستین بار برمی‌خوریم بیشتر وقت‌ها شروع مسئله و هدف موردنظر را می‌دانیم و باید دنبالهٔ گام‌های میانی را به‌دست آوریم. بعضی راه‌حل‌ها خودبه‌خود به شکل پشت‌سرهم ظاهر می‌شوند اما در حالت کلی نمی‌توان روشی برای به‌دست‌آوردن همه راه‌حل‌های استنتاجی ارائه کرد و مسئله حل‌کردن با بررسی و تجزیه و تحلیل راه‌حل‌های تعداد زیادی مسئله فراگرفته می‌شود.

ب: روش استقرا

استقرا روشی الگوریتمی است برای اثبات این‌که راه‌حلی همیشه درست است. به این طریق از اثبات این‌که، حکم اولیه درست است شروع شده و بعد ثابت می‌شود که چه‌طور همیشه می‌توان درستی هر حکمی (به‌جز اولی) را از درستی حکم پیش از آن نتیجه گرفت.

ج: روش تقسیم مسئله‌های شمارشی پیچیده به بخش‌های کوچک‌تر.

در برخی مسائل شمارشی بزرگ و پیچیده، بهتر است که مسئله‌ها به قسمت‌های کوچک‌تر شکسته شوند و هر بخش به‌طور جداگانه حل شود و در نهایت جواب این مسئله‌ها با توجه به اصول اساسی شمارش (اصل ضرب یا اصل جمع) با هم ترکیب شوند.

مثال ۲.۸.۴. مسئله تقسیم کردن مکعبی $۳ \times ۳ \times ۳$ (مانند مکعب روبیک) به ۲۷ مربع کوچک‌تر را درنظر بگیرید. توجه کنید که در شکل زیر شش برش– دوتا افقی، دو تا از یک پهلو به پهلوی دیگر و دو تا از جلو به عقب – کافی است که مکعب اولیه را به ۲۷ مکعب کوچک‌تر تقسیم کند. با وجود این اگرجابه‌جایی تکه‌ها در مراحل میانی (میان برش‌ها) مجاز باشد آیا با کمتر از شش برش هم می‌توان این کار را انجام داد؟

راه‌حل: یک برش حداکثر یک وجه جدید روی هر مکعب تکی ایجاد می‌کند. بنابراین برای جداکردن مکعب‌های گوشه‌ای سه برش لازم است زیرا سه وجه آن‌ها به وجه مکعبی دیگر نچسبیده است

شکل ۱۱.۴: مربوط به مثال ۲.۸.۴

و سه وجه دیگرشان این‌طور نیستند. به همین ترتیب برای جداکردن مکعب‌های وسط هر یال چهار برش، برای مکعب‌های وسط هر وجه پنج برش و برای مکعب غیرقابل رؤیت مرکزی شش برش لازم است. به این ترتیب تکه‌های مکعب اولیه در میان‌برش‌ها هرطور هم که چیده شوند، کمتر از شش برش برای تکه تکه کردن مکعب ۳ × ۳ × ۳ به ۲۷ مکعب کوچک کافی نیست. [۱۴]

۹.۴ بررسی روش‌های اثبات بعضی از قضایا در گراف

مشابه روندی که در فصل ۳ و بر روی کتاب‌های جبر و اصول آنالیز انجام شد، در این بخش نیز مطالعه‌ای بر روی قضیه‌های کتاب نظریه گراف و کاربردهای آن نوشتهٔ باندی - مورتی صورت گرفته و نتایج در جدول‌های مجزی در ذیل ارائه شده است.
جدول ۳.۴ مربوط به قضیه‌هایی است که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.
جدول ۴.۴ مربوط به قضیه‌هایی است که با روش استقرا اثبات شده‌اند.
جدول ۵.۴ مربوط به قضیه‌هایی است که با روش برهان خلف اثبات شده‌اند.

جدول ۳.۴: قضیه‌های گراف

قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۲۴	۱-۱	درجه رئوس	$\sum_{v\in V} d(v) = 2\varepsilon$
۲	۳۰	۲-۱	دورها	یک گراف دو بخشی است اگر و فقط اگر هیچ دور فردی نداشته باشد
۳	۳۹	۳-۱	لم اشپرنر	هر برچسب زنی معتبر برای هر زیر تقسیم ساده از یک مثلث، تعداد فردی مثلث متشخص دارد.
۴	۴۶	۴-۲	یال برشی	یک گراف همبند درخت است اگر و فقط اگر هر یال ان یک یال برشی باشد.
۵	۴۷	۵-۲	یال برشی	اگر T یک درخت فراگیر از گراف همبند G باشد و e یک یال از G باشد که در T نیست، آنگاه $T+e$ شامل یک دور یکتا خواهد بود.
۶	۴۸	۶-۲	باندها	اگر T یک درخت فراگیر از گراف همبند G باشد و e یک یالی از T باشد، در این‌صورت: $\bar{T}+e$ شامل یک باند یکتا از G خواهد بود.
۷	۵۱	۷-۲	راس برشی	اگر $d(v) > 1$ باشد آنگاه راس v از درخت G یک راس برشی از G است.
۸	۵۳	۸-۲	تعداد درخت‌های فراگیر G	اگر e یک یال پیوندی از G باشد، داریم $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*) **قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۹	۵۵	۲-۹	تعداد درخت‌های فراگیر G	$\tau(k_n) = n^{n-۲}$
۱۰	۶۸	۳-۲	همبندی	اگر گراف G با شرط $۳ \geqslant v$ ، ۲-همبند باشد آنگاه هردو راس G حداقل توسط دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل هستند.
۱۱	۸۷	۴-۱	گراف اویلری	اگر گراف همبند ناتهی، اویلری باشد آنگاه گراف دارای هیچ راس فردی نیست.
۱۲	۸۰	۴-۲	گراف همیلتنی	اگر G همیلتنی باشد، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه سره ناتهی s از v داریم: $\omega(G-s) \leqslant \|s\|$
۱۳	۸۷	۴-۶	گراف همیلتنی	اگر G یک گراف ساده ناهمیلتنی با شرط $۳ \geqslant v$ باشد آنگاه G توسط یک $C_{m,v}$ فراگرفته درجه‌ای است.
۱۴	۱۰۰	۵-۱	تطابق	تطابق M در G یک تطابق ماکزیمم است اگر و فقط اگر G شامل هیچ مسیر M-افزوده‌ای نباشد.
۱۵	۱۰۲	۵-۲	تطابق و پوشش در گراف دوبخشی	فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y باشد دراین‌صورت اگر G دارای تطابق کاملی باشد که تمام راس‌های X را آلوده کند آنگاه به ازای هر $S \subseteq X$ داریم:$\|N(S)\| \geqslant \|S\|$
۱۶	۱۰۵	۵-۳	تطابق و پوشش در گراف دوبخشی	در یک گراف دوبخشی تعداد یال ها در یک تطابق ماکزیمم برابر تعداد راس‌ها در یک پوشش مینیمم است.
۱۷	۱۱۹	۵-۵	برچسب‌زنی	فرض کنید l یک برچسب‌زنی راسی امکان‌پذیر از G باشد، اگر G_l شامل یک تطابق کامل مانند M^* باشد آنگاه یک تطابق بهینه از G خواهد بود.
۱۸	۱۲۷	۷ ۱-۶	عدد رنگی یالی	اگر G دوبخشی باشد، آنگاه $\chi\prime = \Delta$
۱۹	۱۳۳	۶-۳	تطابق مجزا	اگر G یک گراف دوبخشی با شرط $P \leqslant \Delta$ باشد، آنگاه تطابق مجزای $M_۱, M_۲, \ldots, M_p$ از G وجود دارند بطوری‌که $E = M_۱ \cup M_۲ \ldots M_p$ و به ازای هر $۱ \leq i \leq p$ $[\frac{\epsilon}{p}] \leq \|M_i\| \leq [\frac{\epsilon}{p}]$
۲۰	۱۳۸	۷-۱	مجموعه مستقل	مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه مستقل از G است اگر و فقط اگر $V \diagup S$ یک پوشش از G باشد.
۲۱	۱۴۰	۷-۲	مجموعه مستقل	اگر $\delta > ۰$باشد آنگاه $\beta\prime + \alpha\prime = V$
۲۲	۱۴۱	۷-۳	مجموعه مستقل	در یک گراف دوبخشی G با $\delta > ۰$ ، تعداد راس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم با تعداد یال‌ها در یک پوشش یالی مینیمم برابر است.
۲۳	۱۴۲	۷-۴	خوشه‌ها	به ازای هر دو عدد صحیح $L \geq ۲$ و $K \geq ۲$ داریم: $r(K,L) \leq r(K,L-۱) + (K-۱,L)$ بعلاوه اگر هر دو زوج باشند،نامساوی اکید برقرار می‌شود.
۲۴	۱۴۶	۷-۶	خوشه‌ها	$r(K,K) \geq ۲^{\frac{k}{۲}}$
۲۵	۱۴۷	۷-۷	خوشه‌ها	$r(k_۱,\ldots,k_n) \leq r(k_۱-۱,k_۲,\ldots,k_m) + r(k_۱,k_۲-۱,\ldots,k_m) + \ldots + r(k_۱,k_۲,\ldots,k_m-۱) - m + ۲$
۲۶	۱۵۱	۷-۹	مجموعه های مستقل و خوشه‌ها	اگر G یک گراف ساده‌ای باشد که شامل هیچ $K_{m+۱}$-ای نیست در این‌صورت $\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(T_{m,v})$ و بعلاوه داریم اگر و تنها اگر $G \cong T_{m,v}$
۲۷	۱۵۳	۷-۱۰	مجموعه های مستقل و خوشه‌ها	فرض کنید $\{s_۱,s_۲,\ldots,s_n\}$ یک افراز دلخواه از مجموعه $\{۱,۲,\ldots,r_n\}$ باشد. در این‌صورت به ازای یک مقدار i ، s_i شامل سه عدد صحیح x,y,z است که در معادله $x+y=z$ صدق می‌کنند.
۲۸	۱۵۵	۷-۱۱	مجموعه های مستقل و خوشه‌ها	اگر$\{x_۱,x_۲,\ldots,x_n\}$ مجموعه‌ای از نقاط با قطر ۱ در صفحه باشد، آنگاه بیشترین تعداد زوج نقاطی که فاصله آن‌ها بیشتر از$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است برابر$[\frac{n^۲}{۳}]$ است.بعلاوه، به ازای هر عدد n ، مجموعه‌ای به‌صورت $\{x_۱,x_۲,\ldots,x_n\}$ با قطر ۱ وجود دارد که فاصله بین دقیقا $[\frac{n^۲}{۳}]$ زوج نقطه آن بیشتر از $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است.
۲۹	۱۶۲	۸-۳	گراف -بحرانی	فرض کنید G یک گراف K-بحرانی با ۲-برش راسی $\{u,v\}$ باشد در این‌صورت:الف) $G = G_۱ \cup G_۲$ ، که در آن G_i ، یک $\{u,v\}$-مولفه از نوع i i=۱،۲ است و ب) هم $G_۱ + uv$ و هم $G_۲.uv$ ، k بحرانی هستند.

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*) **قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۳۰	۱۶۵	۸-۴	رنگ‌آمیزی راسی	اگر G یک گراف ساده همبند باشد که نه دور فرد و نه گراف کامل است، در این‌صورت داریم $\chi \leq \Delta$.
۳۱	۱۶۷	۸-۵	مشتق گراف	اگر G یک گراف ۴-رنگی باشد، آنگاه G شامل مشتقی از K_4 است.
۳۲	۱۷۰	۸-۶	چندجمله‌ای رنگی	اگر G ساده باشد،آنگاه به ازای هر یال e از داریم: $\pi_k(G) = \pi_k(G-e) - \pi_k(G.e)$
۳۳	۱۸۵	۹-۲	گراف مسطح	گراف G قابل نشاندن در صفحه است اگر و فقط اگر قابل نشاندن روی کره باشد.
۳۴	۱۸۷	۹-۳	گراف مسطح	فرض کنید V یک راس از گراف مسطح G باشد. در این‌صورت G را می‌توان به‌نحوی در صفحه نشاند که V روی وجه بیرونی نشاندن قرار گیرد.
۳۵	۱۸۹	۹-۴	گراف مسطح	اگر G یک گراف مسطح باشد، داریم $\sum_{f\in F} d(f) = 2\epsilon$
۳۶	۱۹۵	۹-۶	پل‌ها	اگر دو پل هم‌پوشانی داشته باشند، یا درگیرند، یا ۳-پل‌های هم ارز هستند.
۳۷	۱۹۵	۹-۷	پل‌ها	اگر پل B دارای سه راس اتصال v_1, v_2, v_3 باشد در این‌صورت راسی مانند v_0 در $V(B) \setminus V(C)$ و سه مسیر P_1, P_2, P_3 در B وجود دارد که راس V_0 را به‌ترتیب به v_1, v_2, v_3 وصل می‌کنند و به ازای هر $i \neq j$ ، فقط در راس v_0 مشترک
۳۸	۱۹۹	۹-۹	پل‌ها	یک پل درونی، که از تمام پل‌های بیرونی اجتناب کند، انتقال‌پذیر است.
۳۹	۲۱۲	۹-۱۳	گراف مسطح‌شده همیلتنی	فرض کنید G یک گراف مسطح‌شده بدون طوقه با یک دور همیلتنی C باشد، در این‌صورت داریم: $\sum_{i=1}^{v}(i-2)(\phi'_i - \phi''_i) = 0$
۴۰	۲۱۶	۹-۱۴	نشاندن مسطح از گراف	اگر $H^{\sim}$ ، G-مجاز باشد آنگاه به ازای هر پل B از H داریم $F(B,H^{\sim}) \neq \phi$
۴۱	۲۲۷	۱۰-۱	گراف جهت‌دار	گراف جهت‌دار D شامل مسیر جهت‌داری به طول $\chi - 1$ است.
۴۲	۲۴۱	۱۰-۶	گراف جهت‌دار	فرض کنید G یک گراف ۲-همبند یالی با یک گذرگاه، اویلری باشد در این‌صورت G دارای یک جهت دهی k -همبند کمانی است.
۴۳	۲۴۳	۱۰-۷	گراف جهت‌دار	فرض کنید که D یک تورنمنت قویاً همبند با $v \geqslant 5$ و A ماتریس مجاورت D باشد. در این‌صورت داریم $A^{d+3} \geqslant 0$ که در آن d برابر قطر جهت‌دار D می‌باشد.
۴۴	۲۵۴	۱۱-۱	برش‌ها	به ازای هر شاره f و هر برش $K = (s,\bar{s})$ در N داریم: $valf \leqslant Capk$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر هر کمان $(s,\bar{s})$ ، f-اشباع شده و هر کمان $(s,\bar{s})$ ، f-صفر باشد.
۴۵	۲۵۷	۱۱-۲	شاره ماکزیمم	شاره f در N ماکزیمم است اگر و فقط اگر N دارای هیچ مسیر f-افزایشی نباشد.
۴۶	۲۶۵	۱۱-۴	شبکه	فرض کنید x,y دو راس از گراف جهت‌دار D باشد. در این‌صورت بیشترین تعداد (x,y)-مسیرهای جهت‌دار کمان-مجزا در D برابر است با کمترین تعداد کمان هایی که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام (x,y)-مسیرهای جهت‌دار D می‌شود.
۴۷	۲۶۶	۱۱-۵	شبکه	
۴۸	۲۶۶	۱۱-۶	شبکه	
۴۹	۲۶۷	۱۱-۷	شبکه	
۵۰	۲۶۸	۱۱-۸	شبکه	یک شاره امکان در N وجود دارد اگر و فقط اگر به ازای هر $S \subseteq V$داشته باشیم $C(S,\bar{S}) \geqslant \delta(Y \cap \bar{S}) - \sigma(X \cap \bar{S})$
۵۱	۲۷۰	۱۱-۹	شبکه	
۵۲	۲۸۰	۱۲-۱	فضاهای باندها	فرض کنید M ماتریس وقوع گراف جهت دار D باشد. در این‌صورت ، فضای سطری M و مکمل متعامد آن است.
۵۳	۲۸۱	۱۲-۲	ماتریس پایه	فرض کنید B و C به ترتیب ماتریس پایه φ و φ باشد در این‌صورت به ازای هر $S \subseteq A$ داریم:الف) ستون‌های $B\|S$ مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر S بی‌دور باشد. ب) ستون‌های $C\|S$ مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر S شامل هیچ باندی نباشد.

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*) **قضایایی که با روش برهان مستقیم اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۵۴	۲۸۵	۱۲-۳	هنگ	ماتریس پایه B ، یک هنگ است.
۵۵	۲۸۵	۱۲-۳	تعداد درخت های فراگیر	$\tau(G) = detBB'$

پایان جدول

جدول ۴.۴: قضیه‌های گراف

قضایایی که با روش استقرا اثبات شده‌اند.

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۴۴	۲-۲	درخت‌ها	هر درخت غیربدیهی، حداقل دو راس درجه یک دارد.
۲	۶۶	۳-۱	همبندی $k \leq k\prime \leq \delta$	
۳	۶۸	۳-۲	بلوک	گراف G با شرط $v \geq 3$ ، ۲-همبند است اگر و فقط اگر هر دو راس G حداقل توسط دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل باشند.
۴	۱۴۶	۷-۵	اعداد رمزی	$r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$
۵	۱۴۹	۷-۸	قضیه توران	اگر G گراف ساده‌ای باشد که شامل هیچ k_{m+1} ای نیست، در این‌صورت G توسط یک گراف m-بخشی کامل H ، فراگرفته درجه‌ای خواهد بود. علاوه بر این اگر دنباله درجه‌های H و G یکسان باشند داریم $G \cong H$
۶	۱۷۰	۸-۶	چند جمله‌ای رنگی	$\Pi_{k(G)} = \Pi_{k(G-e)} - \Pi_{k(G.e)}$
۷	۸-۷	۱۷۴	عدد رنگی	به ازای هر عدد صحیح مثبت k ، یک گراف k رنگی وجود دارد که شامل هیچ مثلثی نیست.
۸	۱۹۱	۹-۵	گراف‌های مسطح شده	(فرمول اویلر) اگر G یک گراف مسطح شده همبند باشد داریم: $v - \varepsilon + \varphi = 2$
۹	۲۲۹	۱۰-۲	گراف جهت‌دار	گراف جهت‌دار بدون طوقه D ، دارای مجموعه مستقلی مانند است، بطوری‌که هر راس D که در S نیست،توسط مسیر جهت‌داری به طول حداکثر ۲، از یک راس S قابل دستیابی است.
۱۰	۲۳۱	۱۰-۳	دور جهت‌دار	هر راس از یک تورنمنت قویاً همبند D با $v \geq 3$ ، درون یک k-دور جهت دار با شرط $3 \leq k \leq v$ قرار دارد.
۱۱	۲۴۰	۱۰-۵	گراف جهت‌دار	اگر G ۲-همبند یالی باشد، انگاه G دارای یک جهت‌دهی قویاً همبند است.

پایان جدول

جدول ۴.۵: قضیه‌های گراف

قضایایی که با روش برهان خلف اثبات شده‌اند.

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۱	۴۳	۲-۱	درخت‌ها	در یک درخت، هر راس با یک مسیر یکتا به یکدیگر متصل‌اند.
۲	۴۶	۲-۳	یال برشی	اگر یال e یک یال برشی باشد، آنگاه e درون هیچ دوری از G نمی‌باشد.
۳	۴۸	۲-۶	باند	اگر T یک درخت فراگیر از گراف همبند G بوده و e یالی از T باشد، در این‌صورت همدرخت $\bar{T}$ ، شامل هیچ باندی از G نیست.
۴	۶۰	۲-۱۰	درخت بهینه	هر درخت فراگیر $T^* = G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{v-1}\}]$ که با الگوریتم کروسکال ساخته شود، یک درخت بهینه است.
۵	۷۴	۳-۳	همبندی	گراف $H_{m,n}$ ، m-همبند است.
۶	۷۸	۴-۱	تورهای اویلری	اگر G یک گراف همبند ناتهی باشد که دارای هیچ راس فردی نباشد آنگاه گراف G اویلری است.
۷	۸۲	۴-۳	گراف همیلتنی	اگر G یک گراف ساده با شرط $v \geq 3$ و $\delta \geq \frac{v}{2}$ باشد در این‌صورت Gهمیلتنی است.

ادامه در صفحه بعدی

(*ادامه جدول صفحه قبل*) **قضایایی که با روش برهان خلف اثبات شده‌اند.**

ردیف	صفحه	شماره قضیه	موضوع مورد بحث	صورت قضیه یا نام قضیه
۸	۸۴	۴-۴	گراف همیلتنی	یک گراف ساده همیلتنی است اگر و فقط اگر بستار آن همیلتنی باشد.
۹	۸۵	۵-۴	گراف همیلتنی	فرض کنید G یک گراف ساده با دنباله درجه‌های $(d_1, d_2, \ldots, d_v)$ باشد بطوریکه $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_v$ و $v \geq 3$. اگر هیچ مقدار m-ای کوچک‌تر از $\frac{v}{2}$ وجود نداشته باشد که $d_m \leq m$ و $d_{v-m} \leq v-m$ آن‌گاه G همیلتنی خواهد بود.
۱۰	۹۱	۷-۴	تور اویلری	اگر G اویلری باشد، آن‌گاه هر گذرگاهی که توسط الگوریتم فلوری در G ، ساخته شود یک تور اویلری در G است.
۱۱	۱۰۷	۴-۵	تطابق کامل	اگر به ازای هر $S \subset V$ داشته باشیم $o(G-S) \leq \lvert S \rvert$ آن‌گاه G دارای تطابق کامل است.
۱۲	۱۲۸	۲-۶	رنگ‌آمیزی	اگر G ساده باشد، در این‌صورت یا $\chi' = \Delta$ یا $\chi' = \Delta + 1$
۱۳	۱۶۰	۱-۸	رنگ‌آمیزی	اگر G ، k-بحرانی باشد، آن‌گاه $\delta \geq k - 1$
۱۴	۱۶۲	۲-۸	گراف بحرانی	هر گراف بحرانی یک بلوک است.
۱۵	۱۸۳	۱-۹	گراف مسطح	K_5 نامسطح است.
۱۶	۱۹۷	۸-۹	گراف مسطح	یل‌های درونی (بیرونی) از یکدیگر اجتناب می‌کنند.
۱۷	۲۰۲	۱-۱۰	گراف مسطح	یک گراف مسطح است اگر و فقط اگر شامل هیچ زیرگرافی از K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.
۱۸	۲۰۶	۱۱-۹	گراف مسطح	هر گراف مسطح ، ۵-رنگ‌پذیر راسی است.
۱۹	۲۰۸	۱۲-۹	گراف مسطح	اگر هر گراف مسطح ۳-منتظم ۲-همبند یالی ساده، ۳-رنگ پذیر یالی باشد آن‌گاه هر گراف مسطح، ۴-رنگ‌پذیر یالی است.
۲۰	۲۳۲	۴-۱۰	گراف جهت‌دار	اگر D قوی و $\min\{\delta^-, \delta^+\} \geq \frac{v}{2} \geq 1$ باشد آن‌گاه Dشامل یک دور همیلتی جهت‌دار است.

پایان جدول

فصل ۵

ارتباط ترکیبیات با سایر مفاهیم ریاضی

۱.۵ رابطه ترکیبیات و گراف با سایر رشته‌ها

ارتباط مسائل ترکیبیات با دیگر رشته‌ها و مفاهیم، از دو منظر زیر قابل طرح است:

۱.۱.۵ الف: استفاده ترکیبیات از مفاهیم و موضوعات سایر رشته‌ها

استفاده ترکیبیات از مفاهیم و موضوعات سایر رشته‌ها، یعنی در طرح مسائل ترکیبیات از مفاهیم اساسی تئوری مجموعه‌ها، رابطه‌ها، تابع‌ها، توزیع‌ها، انتساب‌ها، جایگشت‌ها، ساختارهای جبری و ...استفاده می شود.

مجموعه‌ها و شمارش:

اندازه مجموعه A که آن را با $|A|$ نشان می‌دهیم تعداد اشیای مجموعه است. هنگام شمارش تعداد اشیای مجموعه‌ای بزرگ از اشیا ممکن است آسان‌تر باشد که مجموعه موردنظر به شکل اجتماع دو مجموعه کوچک‌تر که شمارش تعداد اشیای آن‌ها آسان‌تر است در نظر بگیریم. در این‌صورت مسئله اولیه را می‌توان با استفاده از دستور اصل جمع حل کرد. [۱۴]

تابع ها و شمارش: وقتی f تابعی از مجموعه متناهی A به مجموعه متناهی B باشد بعضی وقت‌ها ممکن است نتوان هیچ اطلاعاتی درباره اندازه‌های نسبی A و B پیدا کرد. به‌رغم این، وقتی f تابعی یک‌به‌یک باشد هر عضو A تصویری متمایز در B دارد؛ به این ترتیب $|A| \leq |B|$. وقتی هم که f تابعی پوشا باشد به هر عضو متمایز B دست‌کم یک عضو A نسبت داده می‌شود و بنابراین $|B| \leq |A|$. وقتی f تابعی دوسویی باشد هم یک‌به‌یک است و هم پوشا و در نتیجه $|B| = |A|$. به‌ویژه یک بخش مهم این ارتباط میان تابع‌ها و شمارش را اصل تناظر می‌نامند.

اصل تناظر: اگر تابعی دوسویی از مجموعه A به مجموعه B وجود داشته باشد آن‌وقت $|A| = |B|$. [۱۴]

۲.۱.۵ ب: کاربرد مفاهیم و روندهای ترکیبیات در سایر رشته‌ها

ترکیبیات در بسیاری از رشته‌هایی که در آن‌ها به نوعی با مباحث شمارشی و بهینه‌سازی، مطرح شده‌است، کاربرد دارد. بعضی از این رشته‌ها عبارتند از: علوم رایانه، نظریه گراف، تحقیق در عملیات، صنایع، نظریه اعداد، احتمال، شیمی، زیست شناسی و بعضی از سایر رشته‌ها. به عنوان مثال:

الف- کاربرد ترکیبیات در علوم رایانه: کاربرد ترکیبیات در علوم رایانه بیشتر مبتنی بر مباحث شمارشی و الگوریتمی است. بعضی از جنبه‌های کاربرد ترکیبیات در علوم رایانه به دلایل ماهیت موضوعات، به صورت زیر می‌باشد.

۱. چون داده‌هایی که در رایانه ذخیره می‌شوند باید متناهی باشند.

۲. الگوریتم‌ها باید در تعدادی متناهی مرحله اجرا شوند.

۳. آرایش‌های به صورت صفر و یک (دنباله‌های دودویی) نقش مهمی در پیش‌بینی حجم داده‌ها، تعداد حالت‌ها و مطالعات رایانه‌ای دارد.

۴. محاسبه کارایی الگوریتم‌ها.

۵. ذخیره و بازیابی اطلاعات (ساختمان داده‌ها) (موضوعی محوری در بهینه‌سازی ترکیبیاتی است.)

۳.۱.۵ رابطه بین نظریه گراف و تحقیق در عملیات

رابطه بین نظریه گراف و تحقیق در عملیات را می‌توان در مسائل شبکه‌ها ملاحظه کرد. در این مسائل، مقداری موجودی (مثل الکتریسیته، کالای مصرفی، شخص یا وسیله نقلیه، یک پیام) را از نقطه‌ای به نقطه دیگر به کمک بستر شبکه موجود، انتقال داده می‌شود به طوری که این کار به کارآترین صورت ممکن انجام شود به این معنی که هم تأمین خدمت مناسب برای کاربر شبکه و هم استفاده از تسهیلات بستر انتقالی شبکه (که ممکن است پر هزینه هم باشد) به بهترین نحو انجام شود. در بهینه‌سازی ترکیبیاتی به دنبال مدل‌سازی تنظیمات شبکه واقعی به صورت موجودات ریاضیاتی شناخته شده در مسائل جریان شبکه هستند تا بتوانند به کمک الگوریتم های مختلف، مدل نتیجه شده فعلی را مورد مطالعه قراردهند و در نهایت بهترین تصمیم را در مورد تنظیمات شبکه بگیرند. دامنه مسائل شبکه در راس چندین رشته مختلف تحقیقی شامل: ریاضی کاربردی، علوم کامپیوتر، مهندسی، مدیریت و تحقیق در عملیات قرار دارد. در تمام مسائل شبکه، ازگراف به عنوان ابزاری ریاضی و کارا استفاده می‌شود. فعالیت‌های موجود در شبکه به سبک فعلی، به دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ برمی‌گردد؛ زمانی که بهینه‌سازی به عنوان شاخه تحقیقی مجزا توسعه پیدا کرد و با پیوستن به انقلاب کامپیوتری، منجر به تشکیل ابزاری قدرتمند در حل محاسبات علمی و مدیریتی شد. در این مباحث، سه دسته از مسائل مطرح است. [۱۵]

۱- مسئله کوتاهترین مسیر[۱]: بهترین مسیر برای رسیدن از نقطه‌ای از شبکه به نقطه دیگر چیست به طوری‌که هزینه حرکت از هر مسیر در نظر گرفته شود.

[۱] Short Path Problem

۲- مسئله بیشتری جریان[۲]: اگر هر مسیر، ظرفیتی برای انتقال جریان داشته باشد، بیشترین جریان ممکنی که می شود بین دو نقطه از شبکه انتقال داد چقدر است؟

۳- مسئله جریان با کمترین هزینه[۳]: اگر هم‌زمان هم هزینه و هم ظرفیت مسیر را لحاظ کنیم و نیاز داشته باشیم تا واحدهایی از کالا را از نقطه یا نقاطی از شبکه به نقطه یا نقاطی دیگر از شبکه انتقال دهیم، چگونه می‌توانیم این کار را با کمترین هزینه انجام دهیم؟ [۱۵]

ب- کاربرد ترکیبیات در تحقیق در عملیات: مدل مفیدی برای بسیاری از مسئله‌های ترکیبیاتی، گرافی جهت‌دار است که در آن به هر کمان وزنی عددی نسبت داده می‌شود. برای اشاره کردن به گرافی جهت‌دار که کمان‌هایش وزن دارند اصطلاح **شبکه** را به‌کار می‌بریم. در شبکه‌ها وزن هر مسیر جهت دار را برابر با مجموع وزن‌های کمان‌های آن مسیر تعریف می‌کنیم.

بیشتر وقت‌ها پروژه‌ای بزرگ از تعدادی کارهای کوچک‌تر تشکیل می‌شود که به‌هم مربوط‌اند. به رغم این‌که بعضی از این کارها ممکن است همزمان پیش بیایند اما بیشتر وقت‌ها یک کار باید حتی پیش از آن که دیگری آغار شود، پایان یابد. **تحلیل پروژه** یکی از چندین مسئله عملی است که در آن شبکه‌ها به‌کار می‌آیند. در طراحی پروژه، شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن هر کمان نشان‌دهنده یک کار است. وزن هر کار برآوردی از مدت زمان لازم برای اتمام آن کار است. مهم‌ترین هدف این تحلیل پیداکردن برنامه‌ریزی برای کارهای موردنظر است که کل مدت زمان لازم برای اتمام پروژه به حداقل برسد.

علاوه بر موارد فوق کاربردهای متقابلی از ترکیبیات در سایر موضوعات و گاهی بالعکس کاربردهای روش‌های سایر موضوعات در ترکیبیات (مانند روش احتمالی) مانند موارد ذیل وجود دارد.

- کاربرد ترکیبیات در نظریه اعداد

- کاربرد ترکیبیات در احتمال

- کاربرد ترکیبیات در رشته‌های مدیریت و صنایع

- کاربرد ترکیبیات در شیمی

- کاربرد ترکیبیات در علوم اجتماعی و علوم زیست

۴.۱.۵ رابطهٔ بین نظریه گراف و زیست‌شناسی

در یک مسابقه دوره‌ای تنیس، هر بازیکن باید با هر بازیکن دیگربازی کند و هیچ تساوی مجاز نیست. فرض می‌شود هر راس گراف سودار نمایانگر یک بازیکن باشد. اگر v و w را شکست دهد، پاره‌خطی سودار از راس v به سوی راس w رسم می‌شود. گراف سودار حاصل کامل است و تحت عنوان گراف غلبه مسابقه شناخته می‌شود. [۲]

۵.۱.۵ رابطهٔ بین نظریه گراف و شیمی

کیلی به‌وسیلهٔ گراف (ساختار درخت‌ها) فرمولی برای محاسبه ایزومرهای متمایز هیدروکربن های اشباع نشده C_nH_{2n+2} به‌دست آورد و آن‌را گسترش داد. $(n \in Z^+)$

[۲] Maximum flow Problem

[۳] Minimum cost flow Problem

۲.۵ ترکیبیات و منطق

نقش منطق ریاضیات در برهان‌های ترکیبیاتی (بیان برخی از مبانی منطق – به‌ویژه برخی از قاعده‌های استنتاج لازم برای اثبات قضایای ریاضی) اولین مطالعه نظام‌مند استدلال منطقی می‌باشد و در کارهای فیلسوف یونانی، ارسطو یافت شده است. این نوع منطق به صورتی اصلاح شده تا قرون وسطی و در سراسر این قرون آموخته‌شد. ریاضی‌دان آلمانی لایبنیتس را غالباً اولین شخصی می‌دانند که به صورت جدی، بسط منطق نمادی را به عنوان زبان علمی جهانی پیگیری کرده‌است و این مطلب را در رساله‌اش در فن ترکیب [۴] بیان کرده است. پژوهش او در زمینه منطق نمادی، تکان قابل ملاحظه‌ای به آفرینش این نظام ریاضیاتی داده است. جورج بول در رساله تحلیل ریاضیاتی منطق در ۱۸۴۷، کوششی در جهت حساب استدلال منطقی ارائه کرد و در همین سال، دمورگن (۱۸۰۶–۱۸۷۱) منطق صوری، یا حساب استنتاج، لازم و محتمل را انتشار داد و این رساله کار بول را به صورتی قابل ملاحظه گسترش داد. [۲۳]

اهمیت برهان

در ریاضیات، برهان، مرجعیت‌بخش چیزی است که اگر آن چیز به عنوان یک عقیدهٔ محض (بدون استفاده از برهان) بیان شود ممکن است مورد قبول قرار نگیرد. برهان، نه‌تنها تجسم‌بخش قدرت و عظمت و استدلال محض است، بلکه می‌تواند برتر از آن نیز می‌باشد.
همان‌طورکه بیان شد، برهان، الهام‌بخش اندیشه‌های جدید ریاضیات است. مفهوم برهان تنگاتنگ مفهوم قضیه، به پیش می‌رود. قضیه، گزاره‌ای ریاضیاتی است که راستی آن از راه استدلال منطقی، یعنی، برهان تنفیذ می‌شود. [۲۳]
مبانی منطق: وقتی ریاضی‌دانی می‌خواهد برهانی را برای وضعیت مفروضی تهیه کند، باید دستگاهی از منطق را به‌کار برد. بنابراین منطق ریاضیات برای اخذ تصمیم درباره اینکه آیا حکمی یا پیامدی منطقی از یک یا چند حکم دیگر نتیجه می شود یا نه، به‌کار می‌رود. [۲۳]

نکات مهم در فرآیند برهان

۱–عدم استفاده از قاعده‌های منطقی به روشی خودکار.
۲–تحلیل و جستجو برای درک وضعیت داده شده.
۳–برخوردار بودن از صفاتی نظیر بصیرت و خلاقیت.
۴–صرفا تلاش محض در کاربرد فرمول‌ها، یا استمداد از قائده‌ها فرد را، خواه در اثبات نتایج و قضایا، خواه در انجام مسائل شمارش، به سرمنزل مقصود نمی‌رساند.
۵–وجود هیچ رابطه‌ای علّی بین گزاره‌ها ضروری نیست.

[۴] DE Arte com binatoria

۶-هیچ فهرستی از قائده‌ها وجود ندارد که بتوان با استفاده از آن‌ها حکم کرد که آیا گزاره مفروض قضیه هست یا خیر.
۷-ساختن برهان، مهارتی است که شخص، با بررسی دقیق ساختار برهان‌های صحیح و یافتن و نوشتن برهان‌های گزاره‌هایی که قضیه بودن برخی از آن‌ها از قبل معلوم‌اند، می‌آموزد. [۲۳]

۱.۲.۵ ادات و ابزار منطق

۱- گزاره‌ها، که به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند.
الف: گزاره‌های ساده، که نمی‌توان آن‌ها را به گزاره‌های ساده‌تری تجزیه کرد.
ب: گزاره‌های مرکب، که از گزاره‌ای ساده و به کمک ادات منطقی حاصل می‌شوند.
۲- عمل‌های منطقی شامل : نقیض - ترکیب عطفی - ترکیب فصلی
۳- استلزام
راه مهم دیگری برای ساختن گزاره‌ای مرکب از دو گزارهٔ p و q وجود دارد. این راه عبارت است از گزاره استلزام:«اگر p، آنگاه q» یا (p مستلزم qاست) که با $p \to q$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۵. گزاره مرکب: گزاره‌هایی را که می‌توان از ترکیب گزاره‌های دیگر به‌دست آورد، گزاره‌های مرکب گویند.[۲]

۴- هم‌ارزي
$q \iff p$ (pاگر و تنها اگر q) یا (p شرط لازم و کافی برای q)
۵- گزاره‌نما: جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد.
۶- سورها: گزاره نماها برای xای یا xهایی نمی‌تواند درست باشد.

تعریف ۲.۲.۵. راستگو: گزاره‌ای مرکب را که همواره، بدون توجه به ارزش‌های راستی گزاره‌های مؤلفه‌ای آن، راست باشد را راستگو [۵] می‌نامند.[۲]

تعریف ۳.۲.۵. تناقض: به گزاره‌ای مرکب که همواره دروغ باشد یک تناقض [۶] می‌گویند. [۲۳]

می‌توان با استفاده از مفاهیم راستگو و استلزام بیان کرد که منظور از یک قضیه چیست؟

۲.۲.۵ روش اثبات یک حکم یا قضیه

به عنوان مثال می‌خواهیم نشان دهیم دهیم که گزاره $q \Longrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$ قضیه است.

راه‌حل:
در این‌جا گزاره‌های $p_1, p_2, \ldots, p_n$ معرف فرض‌های استلزام‌اند. این گزاره‌ها غالباً از

[۵] tautology
[۶] contradiction

۱- تعریف‌های مربوط به موضوع تحت مطالعه
۲- اصلهای موضوع: یعنی گزاره‌هایی در زمینه موضوع که بدون برهان پذیرفته شده‌اند
۳- و قضایایی که قبلا ثابت شده‌اند، استخراج می‌شوند.
پس برای آن‌که ثابت کنیم گزاره بالا، یک قضیه است باید نشان دهیم که وقتی تمام فرض‌های $p_1, p_2, \ldots, p_n$ راست باشند، آنگاه q نیز راست است. (توجه کنید که اگر یکی از گزاره‌های $p_1, p_2, \ldots, p_n$ دروغ باشد آن‌گاه استلزام

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Longrightarrow q$$

خودبه‌خود راست است.
بنابراین یک راه اثبات حکم مفروض به عنوان قضیه این است که نشان دهیم استلزام

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Longrightarrow q$$

یک راستگو است.)
قضیه فوق یک استلزام منطقی به‌صورت $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Longrightarrow q$ است که راستی p_i ها به راستی q منجر می‌شود. [۲۳]
چند قاعدهٔ استنتاج به‌طور خلاصه در جدول ۱.۵ ارائه می‌شود.

تعریف ۴.۲.۵. گزاره‌های منطقاً هم‌ارز: دو گزاره s_1 و s_2را منطقاً هم‌ارز گویند و می‌نویسند $s_1 \Leftrightarrow s_2$ وقتی که ارزش راستی s_1 و s_2 دقیقاً یکی باشد.

[۲۳]

تعریف ۵.۲.۵. گزاره‌نما: یک جمله خبری، یک گزاره نماست اگر
۱- شامل یک یا چند متغیر باشد.
۲- گزاره نباشد.
۳- وقتی به صورت گزاره درآید که به جای متغیرهای آن انتخاب‌هایی مجاز قرار گیرند.

۳.۲.۵ مسئله صدق پذیری در منطق:

جدول درستی گزاره‌ای مرکب که دارای n گزارهٔ اتمی به‌عنوان گزاره‌های مؤلفه‌ای است، 2^n سطر خواهد داشت. مسئله صدق‌پذیری برای گزاره‌ای مرکب مانند p عبارت است از مسئله
(۱) یافتن اینکه آیا ارزش‌های راستی برای مؤلفه‌های اتمی p وجود دارد که به ازای آن‌ها p راست باشد و
(۲) به‌دست آوردن گزاره‌های اتمی راست و گزاره اتمی دروغ، در صورت وجود، که از گزاره مرکب مورد بحث، گزاره‌های راست می‌سازند. تنها روش شناخته شده برای بررسی مسئله صدق‌پذیری گزاره‌ای که دارای n گزاره اتمی است عبارت است از تشکیل یک جدول ارزش که همه 2^n حالت ممکن را دارا باشد و واقعا وقتی n بزرگ است این کار سخت می‌شود.[۲]

جدول ۱.۵: قاعده‌های استنتاج مورد استفاده در مباحث ریاضی و ترکیبیات

نام قاعده	استلزام منطقی وابسته یا هم‌ارزی منطقی	قاعده استنتاج
قاعده وضع مقدم (قیاس استثنایی)	$[p\wedge(p\to q)]\Rightarrow q$	p $\dfrac{p\to q}{\therefore q}$
قانون قیاس	$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\Rightarrow(p\to r)$	$p\to q$ $\dfrac{q\to r}{\therefore p\to r}$
قیاس رفع یا قاعدهٔ رفع تالی	$[(p\to q)\wedge\bar q]\Rightarrow\bar p$	$p\to q$ $\dfrac{\bar q}{\therefore \bar p}$
قاعده ترکیب عطفی		p $\dfrac{q}{\therefore p\wedge q}$
برهان خلف	$(\bar s\Rightarrow F_\circ)\Rightarrow(s\Leftrightarrow T_\circ)$	$\dfrac{\bar s\Rightarrow F_\circ}{\therefore s}$
موردی خاص از برهان خلف	$[(p\wedge\bar q)\Rightarrow F_\circ]\Rightarrow(p\Rightarrow q)$	$\dfrac{p\wedge\bar q\Rightarrow F_\circ}{\therefore p\Rightarrow q}$
قاعده ساده‌سازی ترکیب عطفی	$(p\wedge q)\Rightarrow q$	$\dfrac{p\wedge q}{\therefore p}$
قاعده بسط فاصل	$p\Rightarrow p\vee q$	$\dfrac{p}{\therefore p\vee q}$
قاعده قیاس فاصل	$[(p\vee q)\wedge\bar p]\Rightarrow q$	$p\vee q$ $\dfrac{\bar p}{\therefore q}$
قاعده برهان شرطی	$[p\to(q\to r)]\Leftrightarrow[(p\wedge q)\to r]$	$p\wedge q$ $\dfrac{p\to(\to r)q}{\therefore r}$
قاعده برهان به‌وسیلهٔ موارد	$[(p\to r)\wedge(q\to r)]\Rightarrow[(p\vee q)\to r]$	$p\to r$ $\dfrac{q\to r}{\therefore (p\vee q)\to r}$
قاعده قیاس ذوحدّین موجبه	$[(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(p\vee r)]\Rightarrow(q\vee s)$	$p\to q$ $r\to s$ $\dfrac{p\vee r}{\therefore q\vee s}$
قاعده قیاس ذوحدّین سالبه	$[(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(\bar q\vee\bar s)]\Rightarrow(\bar p\vee\bar s)$	$p\to q$ $r\to s$ $\dfrac{\bar q\vee\bar s}{\therefore \bar p\vee\bar r}$

۴.۲.۵ کاربرد سورها

بسیاری از اصل‌های موضوع، تعریف‌ها و قضایا در ریاضیات متضمن گزاره‌هایی هستند که گزاره‌نماهای مسوّرند، که از دو نوع سور نتیجه می‌شوند:
۱- سور وجودی
۲- سور عمومی

تعریف ۶.۲.۵. سور وجودی: در گزاره برای xی، $P(x)$، سور وجودی «برای xی» به کار می‌رود که می‌توان آن‌را به صورت «برای حداقل یک x» یا «xی وجود دارد به قسمی‌که» هم بیان کرد. این سور به صورت نمادی به شکل $\exists x$ نوشته می‌شود. بنابراین گزارهٔ «برای xی، $P(x)$» به‌صورت نمادی به شکل $\exists x P(x)$ درمی‌آید.

[۲۳]

تعریف ۷.۲.۵. سور عمومی را به صورت $\forall x$نشان می دهند و می‌خوانند «برای همه xها » یا « برای هر x» خلاصه‌ای از مطالب در باره سورها در جدول ۲.۵ ارائه می‌شود.

۳.۵ ترکیبیات و نظریه مجموعه‌ها

۱.۳.۵ نظریه مجموعه‌ها

تاریخچه: جبر نظریهٔ مجموعه‌ها در طی سده نوزدهم و اوایل سده بیستم توسعه یافت، بعداً افراد دیگری اندیشه‌های او را بسط دادند و سعی کردند ابهام را از جبر مقدماتی بزدایند و آن‌را در قالب اصل موضوعی دقیق بریزند، اما تا زمانی که بول بررسی قوانین اندیشه خود را منتشر کرد و در آن جبری را که با مجموعه‌ها و منطق سروکار داشت به صوت رسمی عرضه کرد، کار پیکاک و معاصرانش توسعه پیدا نکرد. [۲۳] رهیافت شهودی برای نظریه مجموعه‌ها، از زمانی پذیرفته شد که کانتور مجموعه را در ۱۸۹۵به راهی قابل قیاس با «احساس » غریزی تعریف کرد . «احساس غریزی» ما این است که مجموعه باید گردایه‌ای خوش تعریف از اشیاء باشد. این اشیاء را عنصر می‌نامند و می‌گویند عضوهای مجموعه‌اند. صفت «خوش تعریف» ایجاب می‌کند که برای هر شئ مورد نظر بتوانیم تعیین کنیم که آیا در مجموعهٔ تحت بررسی قرار دارد یا نه.)
اما، تعریف او یکی از مشکلات دست وپاگیری بود که کانتور هرگز نتوانست به طور کامل آن‌را از نظریه مجموعهٔ خود حذف کند. در دهه ۱۸۷۰، وقتی کانتور سری‌های مثلثاتی و سری‌های اعداد حقیقی را تحقیق می‌کرد، به ابزاری نیاز داشت که اندازه‌های مجموعه‌های نامتناهی اعداد را با هم مقایسه کند. نظریه مجموعه‌ها، متناهی و نامتناهی، در اصل به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات مورد توجه قرار گرفت. در اواخر قرن گذشته، نظریه به صورتی جامع پذیرفته شد، اما پارادوکس راسل نشان داد که نظریه مجموعه‌ها، به صورتی که در ابتدا مطرح شده بود، از نظر درونی ناسازگار است . وایتهد و راسل نظریه انواع را ارائه دادند. این نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها، از جمله فرمول‌بندی‌های دیگر قرن بیستم بود که گرفتاری پارادوکس راسل را نداشت. [۲۳]

جدول ۲.۵: جدول درباره سورها

حکم	چه موقع راست است؟	چه موقع دروغ است؟
$\exists x P(x)$	برای (حداقل یک) a در عالم سخن، $p(a)$ راست است.	برای هر a در عالم سخن، $P(a)$ دروغ است.
$\forall x P(x)$	برای هر مقدار a از عالم سخن $P(a)$ راست است.	حداقل یک مقدار a از عالم سخن وجود دارد که به‌ازای آن $P(a)$ دروغ است.
$\exists x P(\bar{x})$	برای حداقل یک انتخاب a در عالم سخن، $P(a)$ دروغ است، پس نقیض آن، $P(\bar{a})$ راست است.	برای هر مقدار a از عالم سخن $P(a)$ راست است.
$\forall x P(\bar{x})$	برای هر مقدار a از عالم سخن، $P(a)$ دروغ است، و نقیض آن $P(\bar{a})$ راست است.	حداقل یک مقدار a از عالم سخن وجود دارد که به‌ازای آن $P(\bar{a})$ دروغ است و $P(a)$ راست است.

۲.۳.۵ مجموعه

زیربنای ریاضیاتی که ما در جبر، هندسه، ترکیبیات، و تقریباً در همه زمینه‌های دیگر ریاضیات عصر حاضر مطالعه می‌کنیم، مفهوم مجموعه است. غالباً این مفهوم، برای فرمول‌بندی اختصاری عناوین ریاضی‌ای که بررسی می‌شوند، ساختاری زیربنایی فراهم می‌کند .
سعی در تعریف مجموعه کار مشکلی است، و غالباً به استفادهٔ دوری از واژه‌های مترادفی نظیر «رده، گردایه، و انبوهه» منجر می شود. وقتی به مطالعه هندسه پرداخته شود، برای درک مفاهیم نقطه، خط، و وقوع از شهود استفاده می‌شود. سپس با تکیه بر این مفاهیم شهودی و چند اصل موضوع به تعریف اصطلاحات جدید و اثبات قضایا پرداخته می‌شود. در مطالعه نظریه مجموعه‌ها، نیز برای بیان مفاهیم عنصر، مجموعه، و عضویت از شهود استفاده شود.
مفهوم مجموعه به صورت شهودی ودر قالب واژه گردایه در مبحث شمارش مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مبحث گزاره‌ها از مفهوم مجموعه به عنوان عالم سخن برای گزاره نماها استفاده می‌شود. [۲۳]
نظریه مجموعه‌ها به‌خاطر نفوذپذیری بی‌شمار آن در تفکرات ریاضی در سال‌های اخیر دامنهٔ تحقیق آن اهمیت خاصی پیدا کرده است. درک واقعی هر شاخه‌ای از ریاضیات جدید نیاز به معلوماتی از نظریه مجموعه‌ها دارد. زیرا آن شالوده مشترک عرصه‌های مختلف ریاضیات می‌باشد. مجموعه‌ها برای دسته‌بندی اشیاء متمایز به‌کار می‌رود.[۲]

تعریف‌های بازگشتی مجموعه‌ها: تعریف‌های بازگشتی یک مجموعه شامل سه قسمت زیر است:

۱: بخش پایه: این بخش بیان می‌کند که عناصر معینی متعلق به آن مجموعه‌ای هستند که قصد تعریف آن‌را داریم.

۲: بخش استقرا (بازگشت): این بخش بیان می‌کند که همواره با استفاده از عناصر موجود در آن مجموعه، عناصر بیشتری از آن را به‌دست می‌آوریم.

۳: بخش بستار: این بخش بیان می‌کند که تنها عناصر آن مجموعه آن‌هایی هستند که به طریق (۱) و (۲) به‌دست می‌آید. [۲]

۴.۵ ترکیبیات و رابطه‌ها و تابع‌ها

صورت لاتین واژه خطی «تابع» را لایبتنیس در ۱۶۹۴ برای نشان دادن کمیتی مربوط خم (نظیر شیب خم، یا مختصات نقطه ای از خم) به‌کار برده است. برنولی در ۱۷۱۸، تابع را به عنوان عبارتی جبری که از مقادیر مثبت و یک متغیر تشکیل شده در نظر گرفته است و پس از آن اویلر معادله‌ها و فرمول‌هایی را که شامل مقادیر ثابت و متغیر بودند ارائه داده است. در ۱۸۳۷ دیریکله فرمول‌بندی دقیق‌تری از مفاهیم متغیر، تابع و تناظر بین متغیر مستقل x و متغیر وابسته y وقتی $y = f(x)$ پی‌ریزی کرد. کار دیریکله بر بستگی بین دو مجموعه از اعداد تاکید داشت و مربوط به وجود فرمول یا عبارتی که دو مجموعه را به هم مربوط کند نبود. با پیشرفت های نظریه اعداد درقرن های ۱۹ و ۲۰، تعمیم تابع به صورت نوعی خاص از رابطه درآمد. ددکیند، یک مجموعهٔ نامتناهی را به صورت مجموعه‌ای تعریف کرد که می‌توان آن را در تناظر یک‌به‌یک با زیرمجموعه‌ای سره از خودش قرار داد.
جمیز استرلینگ در بسط تابع‌های مولد پیشگام بوده است و اعداد استرلینگ را ابداع کرده است.
جبر، مثلثات و حساب دیفرانسیل و انتگرال همگی با تابع‌ها سروکار دارند. اما، در اینجا تابع‌ها را از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها، که تابع‌های متناهی را شامل می‌شود مطالعه کرده و مفاهیم جدید شمارش دوباره معرفی می‌شود. [۲۳]

۱.۴.۵ نقش رابطه‌ها و توابع در ترکیبیات

الف: **حاصل‌ضرب‌های دکارتی در رابطه‌ها:**

تعریف ۱.۴.۵. حاصل ضرب دکارتی: برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \aleph$، حاصل‌ضرب دکارتی یا خارجی A و B که با $A \times B$ نشان داده می‌شود برابر است با $\{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ عنصرهای $A \times B$ را جفت‌های مرتب می‌گویند. برای $(a,b)(c,d) \in A \times B$ ، برابری $(a,b) = (c,d)$ برقرار است اگر و تنها اگر $c = a$, $d = b$

اگرA, B متناهی باشند از اصل ضرب نتیجه می‌شود که $|A \times B| = |A| \times |B|$ گرچه عموما $A \times B = B \times A$ برقرار نیست، اما داریم $|A \times B| = |B \times A|$ ، همچنین اگر چه $A, B \subseteq \aleph$ ولی برقراری $A \times B \subseteq \aleph$ الزامی نیست . بنابراین $\aleph$ الزاماً تحت این عمل بسته نیست.
تعریف حاصلضرب دکارتی، یا خارجی برای بیش از دو مجموعه نیز قابل تعمیم است. [۲۳]

تعریف ۲.۴.۵. رابطه‌ای از A به B: برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \aleph$ هر زیر مجموعه $A \times B$ را رابطه‌ای از A به B می‌نامند.

تعریف ۳.۴.۵. رابطه دوتایی: هر زیر مجموعه $A \times A$ را رابطه دوتایی بر A می‌گویند.

اکنون مثالی برای حاصل ضرب‌های دکارتی و رابطه‌ها در ترکیبیات ارائه می‌دهیم.

مثال ۴.۴.۵. برای مجموعه‌های متناهی A, B با $|A| = m$ و $|B| = n$ تعداد2^{mn} رابطه از A به B وجود دارند که رابطه تهی و خود رابطه $A \times B$ نیز از آن جمله‌اند. چون طبق تعریف بالا هر زیر مجموعه از $A \times B$ یک رابطه است، و تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر است با $2^{|A \times B|}$.

مثال ۵.۴.۵. تعداد زیرمجموعه‌های، مجموعه n عضوی A برابر با ۲^n است. $(|A| = n)$
طبق قضیهٔ دوجمله‌ای برای ترکیب‌ها داریم: ۲^n=$(۱ + ۱)^n$= $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} \dots + \binom{n}{n}$

تعریف ۶.۴.۵. تابع یا نگاشت: برای مجموعه‌های ناتهی A و B تابع یا نگاشت f از A به B که آن‌را با $f : A \longrightarrow B$ نشان می‌دهند، رابطه‌ای از A به B است که اولاً همه عناصر A ظاهر می‌شوند و ثانیاً هر یک از عناصر A دقیقاً یک بار به عنوان اولین مولفه هر زوج مرتب در این رابطه ظاهر می‌شوند.

ب: **تعداد تابع‌ها از A به B:** فرض کنید A و B مجموعه‌هایی با $|A| = m$ و $|B| = n$ عنصر باشند در نتیجه، اگر$A = \{a_۱, a_۲, \dots a_m\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, \dots, b_n\}$ یک تابع نوعی $f : A \longrightarrow B$ را می‌توان با $(a_۱, x_۱), (a_۲, x_۲), \dots, (a_m, x_m)$ بیان کرد به جای $x_۱$ می‌توان هر یک از n عنصر B را انتخاب کرد و سپس همین کار را برای $x_۲$ انجام داد. (می‌توان به جای $x_۲$ هر عنصر دلخواه B را برگزید به قسمی‌که ممکن است به جای $x_۱$ و $x_۲$ یک عنصر از B را انتخاب کرد.) این فرایند انتخاب را تا آنجا ادامه داد که سرانجام یکی از n عنصر B به جای X_m انتخاب شود. بدین طریق، با استفاده از اصل ضرب، تعداد $|B|^{|A|}= n^m$ تابع از A به B وجود دارد.

تعریف ۷.۴.۵. تابع یک‌به‌یک:

تابع یک‌به‌یک: تابع $f : A \longrightarrow B$ را یک‌به‌یک (انژکتیو) می‌نامند اگر هر عنصر B حداکثر یک بار به عنوان نگارهٔ یک عنصر A ظاهر شود اگر A و B متناهی باشند و $f : A \longrightarrow B$ یک‌به‌یک باشد، باید داشته باشیم : $|A| \le |B|$.

برای مجموعه‌های کلی A و B اگر $f : A \longrightarrow B$ یک‌به‌یک باشد. آن‌گاه به ازای $a_۱, a_۲ \in A$ رابطه زیر برقرار است:

$$f(a_۱) = f(a_۲) \Longrightarrow a_۱ = a_۲$$

[۲۳]

ج: **تعداد توابع یک‌به‌یک**

تعداد توابع یک‌به‌یک : برای مجموعه‌های $A = a_۱a_۲, \dots a_m$ و $B = b_۱, b_۲, \dots, b_n$ و $m \le n$ تابع یک‌به‌یک $f : A \longrightarrow B$ بصورت $(a_۱, x_۱), (a_۲, x_۲), \dots, (a_m, x_m)$ است که در آن n انتخاب بر ای $x_۱$ (یعنی ، هر عنصر B) $n - ۱$ انتخاب برای $x_۲$ (یعنی هر عنصر B به استثنای عنصری که به جای $x_۱$ انتخاب شده است)، $n - ۲$انتخاب برای $x_۳$ ، و نظایر آن تا، سرانجام $n - (m - ۱) = n - m + ۱$ انتخاب برای x_m وجود دارد . بنابر اصل ضرب تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از A بهB برابر است با

$$n(n - ۱)(n - ۲) \dots (n - m + ۱) = \frac{n!}{(n - m)!} = p(n, m) = p(|A|, |B|).$$

تعریف ۸.۴.۵. تابع پوشا: اگر $f : A \longrightarrow B$ ، f را پوشا می‌نامند، اگر $f(A) = B$ (یعنی اگر برای هر $b \in B$ ، حداقل یک $a \in A$ با شرط $f(a) = b$ وجودداشته باشد.)

د: **تعداد توابع پوشا:** برای مجموعه‌های متناهی Bو A با $|A| = m \geq n = |B|$ ، **تعداد تابع‌های** پوشا از A به B برابراست با

$$\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-۱}(n-۱)^m + \binom{n}{n-۲}(n-۲)^m - \dots$$
$$+(-۱)^{n-۲}\binom{n}{۲}۲^m + (-۱)^{n-۱}\binom{n}{۱}۱^m$$
$$= \sum_{k=۰}^{n-۱}(-۱)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m$$
$$= \sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

تعریف ۹.۴.۵. عدد نوع دوم استرلینگ به طور کلی، برای $m \geq n$ ، تعداد

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

راه برای توزیع m شی مختلف در n ظرف شماره‌دار (اما از هر لحاظ دیگر همانند) وجود دارد بدون اینکه ظرفی خالی بماند. اگر شماره‌ها را از ظرف‌ها حذف کنیم به قسمتی که کاملاً همانند باشند، ملاحظه می‌کنیم که یک توزیع در این n ظرف همانند (غیر خالی)، متناظر با $n!$ از این گونه توزیع در ظرف‌های شماره دار است. لذا، تعداد راه‌های توزیع m شی متمایز در n ظرف همانند بدون اینکه ظرفی خالی بماند برابر است با

$$\frac{۱}{n!}\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

این عدد را با $S(m,n)$ نشان می‌دهند، و آن‌را عدد نوع دوم استرلینگ می‌نامند.

توجه می‌کنیم که برای $|A| = m \geq n = |B|$، تعداد تابع‌های پوشا از A به B برابر است با $n!S(m,n)$ [۲۳]

کاربرد تابع در الگوریتم

۱- تابع پیچیدگی زمان الگوریتم
۲- تابع پیچیدگی فضای الگوریتم
نماد« Oبزرگ » را باخمن [۷] درکتابش به نام نظریه تحلیلی شمارش در ۱۸۹۲ وارد کرد. این نماد درکار تقریب، در زمینه‌هایی مثل تحلیل الگو ریتم و آنالیز عددی شهرت یافت. به طورکلی نماد $f \in O(g)$ نشان

[۷] Bachman

می دهد که تابع f صراحتاً مشخص نیست، اما کران مرتبهٔ بزرگی f را به‌دست می‌دهد. [۲۳]

برخی از ویژگیهای الگوریتم کلی

- دقت تک تک دستورهای گام‌به‌گام.
- ورودی آماده برای الگوریتم، و خروجی که بعداً الگوریتم به‌دست می‌دهد .
-توانایی الگوریتم برای حل نوع معینی از مسائل و نه تنها حالت‌های خاص آن مسائل.
- یکتایی نتایج واسط و نهایی، بر اساس ورودی .
- ماهیت متناهی بودن الگوریتم بدین معنا که پس از اجرای تعدادی متناهی از دستورها، ختم شود.

۲.۴.۵ ماشین‌های متناهی-حالت و نظریه زبان‌ها

تاریخچه: با استفاده از نظریه مقدماتی مجموعه‌ها و تابع‌های متناهی، می‌توان بعضی مفاهیم مجرد را ترکیب و ابزار رقمی نظیر تشخیص دهنده‌های دنباله‌ای و تاخیرها را مدل‌بندی کرد. [۲۳] در تعریف ماشین‌های متناهی حالت کاربرد مفاهیم تابع‌ها و مجموعه‌ها در قالب یک مدل انتزاعی بررسی می‌شود.

تعریف ۱۰.۴.۵. یک ماشین متناهی حالت، همان طور که از نامش پیداست، دارای تعدادی متناهی از حالت‌های درونی است که اطلاعات معینی را، وقتی در حالت خاصی است، به یاد می‌آورد.

مطالب نظری مورد نیاز از مجموعه‌ها برای تعریف ورودی معتبر برای ماشین‌های متناهی حالت

تعریف ۱۱.۴.۵. **زبان:** نظریهٔ مجموعه‌ای از رشته‌ها می‌باشد .

دنباله‌های نمادها، یا نویسه‌ها، نقشی کلیدی در پردازش اطلاعات بوسیله کامپیوتر دارند. چون برنامه‌های کامپیوتری بر حسب دنباله‌های متناهی (نویسه ها) نمادها قابل بیان‌اند، پس برای گرداندن چنین دنباله‌های متناهی، یا رشته‌ها به راهی جبری نیاز است.

تعریف ۱۲.۴.۵. **الفبا:** مجموعه متناهی ناتهی نمادها را، یک الفبا می‌نامند .

تعریف ۱۳.۴.۵. **رابطه‌های هم‌ارزی:** رابطه‌ای روی مجموعه متناهی A رابطه هم‌ارزی است اگر و تنها اگر، گراف مربوطه‌اش، متشکل از اجتماع مجزای گراف‌های کاملی باشد که در هر رأس طوقه‌هایی به آن‌ها اضافه شده است.

ویژگی‌های خاص روابط هم‌ارزی عبارتند از:
۱- بازتابی
۲-تقارنی
۳-پاد تقارنی

۴-ترایایی
اساساً یک رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه A تعمیم برابری است، این رابطه، مشخصه «همانند بودن» را بین عناصر A القا می‌کند. لذا، این مفهوم «همانند بودن» موجب می‌شود که مجموعه Aبه زیر مجموعه‌هایی به نام رده‌های هم‌ارزی افراز شود. برعکس، ملاحظه می‌شود که افراز مجموعه A یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A را به‌وجود می‌آورد. افراز یک مجموعه در بسیاری از مباحث ریاضی و علم کامپیوتر ظاهر می‌شود. در علم کامپیوتر، بسیاری از الگوریتم‌های جستجوگر، متکی بر تکنیکی هستند که اندازه مجموعه مفروض A را که مورد بررسی قرار می‌گیرد، پیوسته تقلیل می‌دهد و با افراز A به زیرمجموعه‌های کوچک و کوچک‌تر، شیوهٔ جستجوگر را به طریقی کاراتر به کار می‌برند. هر افراز جدید، افراز قبلی را بهبود می‌بخشد که این خود کلید لازم در فرآیند مینیمم‌سازی برای ماشین‌های متناهی – حالت است. [۲۳]

۳.۴.۵ رابطه‌ها و ماتریس‌ها

بین رابطه‌ها در مجموعه‌ای متناهی ، گراف‌های جهت‌دار، و ماتریس‌های (۰ و ۱) وابستگی برقرار است. ماتریس‌های (۰۱) آرایه‌هایی مستطیلی از اطلاع دربارهٔ رابطه و گراف را فراهم و ثابت می‌کنند که در بعضی از محاسبات کمک کننده‌اند. راه دیگر ذخیره اطلاع درباره گراف، نمایش فهرست مجاورت است.

۴.۴.۵ اصل شمول و عدم شمول در ترکیبیات

تاریخچه: اصل شمول و عدم شمول، در نوشته‌های مختلف تحت نام‌هایی نظیر(روش غربال) یا (اصل رده‌بندی فرضی) وجود دارد. یک صورت نظریهٔ مجموعه‌ای این اصل، که با اجتماع‌ها و اشتراک‌ها سروکار دارد. در اصول شانس‌ها (۱۷۱۸) درباره نظریه احتمال آمده است. کمی قبل از آن (۱۷۱۳) پی‌یر ریمون دمونمور، اندیشهٔ زیربنایی این اصل را در حل مساله‌ای که عموماً به مساله پریش‌ها معروف است به‌کار برد. اصل شمول و عدم شمول بوسیله نمودارهای ون بدست می آید با استفاده از این اصل، هر مساله را می‌توان بر حسب شرط‌ها و زیرمجموعه‌ها بیان کرد و با استفاده از فرمول‌های شمارش، درباره جایگشت‌ها و ترکیب‌ها برخی مسائل فرعی ساده‌تر حل می‌شود و به این اصل این توانایی را می‌دهد که شمارش کامل را به عهده بگیرد. در نتیجه می‌توان مسائل متنوعی را در زمینه‌های نظریه اعداد و نظریه گراف حل کرد. [۲۳]

۵.۵ اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول [۸] یکی از مهم‌ترین روش‌های **شمارش** می‌باشد. اصل شمول و عدم شمول برای شمارش اعضایی از یک مجموعه که ویژگی‌های خاصی دارند به‌کار می‌رود.

[8] Principle of Inclusion and Exclusion

این اصل با تعدادی شرط و هم‌چنین مجموعه‌ای از اشیاء به بررسی تعداد اشیائی می‌پردازد که این شروط برای آن‌ها برقرار باشد. به عنوان نمونه، مجموعه اعدادی از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بر ۲، ۳و ۵ بخش‌پذیرند. این اصل در نظریه اعداد از جمله فرمول انعکاس موبیوس و هم‌چنین در نظریه گراف کاربرد دارد. از نظر تاریخی، این بخش در سال ۱۷۱۸ به صورت یک نظریه در کتابی درسی اثر آبراهام دموآور بیان شده است، اما زیر بنای اصلی این اصل را جیمز سیلوستر (۱۸۹۷-۱۸۱۴) نهاده است. [۱۵]
ساده‌ترین شکل اصل شمول و عدم شمول همان اصل متمم می‌باشد. این اصل را می توان به این صورت بیان کرد که اگر S مجموعه‌ای متناهی و A زیرمجموعه ای از آن باشد، آن‌گاه تعداد اعضایی از S که در مجموعه Aنیستند برابر است با $|S|-|A|$.

قضیه ۱.۵.۵. ***(اصل شمول و عدم شمول)*** *فرض کنید روی مجموعه متناهی S، t ویژگی $c_1, c_2, \dots, c_t$ تعریف شده باشند. در این‌صورت تعداد اعضایی از S که هیچ یک از این t ویژگی را ندارند برابر است با*

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\dots\bar{c}_t) = S_0 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^t S_t = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i S_i$$

که اعداد $S_0, S_1, \dots, S_t$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$S_0 = N = |S|$
$S_1 = N(c_1) + N(c_2) + \dots + N(c_t) = \sum_{i=1}^{t} N(c_i)$
$S_2 = N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \dots + N(c_{t-1}c_t) = \sum_{1\le i<j\le t} N(c_ic_j)$
$\vdots$
$S_t = N(c_1c_2\dots c_t)$

[۱۹]

قضیه ۲.۵.۵. ***صورت دیگری از اصل شمول و عدم شمول:*** *فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی باشد و $A_1, A_2, \dots, A_t$ زیر مجموعه‌هایی از S باشند. فرض کنید*

$T_0 = |S|$
$T_1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_t|$
$T_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A - 3| + \dots + |A_{t-1} \cap A_t|$
$\vdots$
$T_t = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t|$

در این‌صورت تعداد اعضایی از S که در $\bigcup_{i=1}^{t} A_i$ قرار ندارند برابر است با

$$T_0 - T_1 + T_2 - \dots + (-1)^t T_T = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i T_t$$

که اثبات این قضیه به روش ترکیبیاتی در زیر ارائه می‌شود.

برهان: *ویژگی‌های $c_1, c_2, \dots, c_t$ به این‌صورت تعریف می‌شوند: اگر $x \in S$، می‌گوییم x ویژگی c_i را*

دارد اگر $x \in A_i$ $(i = ۱, ۲, \ldots, t)$. *در این صورت مشخص است که*

$$N(c_i) = |A_i|$$
$$N(c_i c_j) = |A_i \cap A_j|$$
$$\vdots$$

بنابراین

$$S_۰ = |S| = T_۰$$
$$S_۱ = N(c_۱) + N(c_۲) + \ldots + N(c_t) = |A_۱| + |A_۲| + \ldots + |A_t| = T_۱$$
$$\vdots$$
$$S_t = N(c_۱ c_۲ c_۳ \ldots c_t) = |A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_t| = T_t$$

پس به‌ازاء هر $۰ \le i \le t$، $S_i = T_i$. *در نتیجه بنابر قضیه ۱.۵.۵ ، تعداد اعضایی از* S *که در هیچ یک از* A_i *ها قرار ندارند برابر است با*

$$N(\bar{c}_۱ \bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_t) = \sum_{i=۰}^{t} (-۱)^i S_i$$
$$= \sum_{i=۰}^{t} (-۱)^i T_i$$

و قضیه ثابت می‌شود. [۱۹]

۶.۵ کاربردهای‌اصل شمول و عدم شمول

به‌طور خلاصه برخی از کاربردهای اصل شمول و عدم شمول عبارتند از:

۱. محاسبه تعداد جواب‌های معادلات و ترکیب‌های با تکرار[۱۹]

۲. حل مسایلی در نظریه اعداد[۱۹]

۳. محاسبه تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی. [۱۹]

۴. اثبات اتحادهای ترکیبیاتی، به‌ویژه اتحادهایی که در آن‌ها مجموعه‌های متناوب، ظاهر می‌شوند نیز با این روش اثبات می‌شوند.[۱۹]

۵. محاسبه تعداد اعداد اول در مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$
[۱۹]

۶. استفاده در چندجمله‌ای‌های رخ
چند جمله ای‌های رخ ما را قادر می‌سازند که برخی از مسائل ترکیباتی را حل کنیم.

چندجمله‌ای رخ:
اگر صفحه شطرنجی C از زیرصفحه‌های دوبه‌دو مجزی $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ ساخته شده‌باشد آن‌گاه $r(C,x) = r(C_۱,x)r(c_۲x)\ldots, r(C_n,x)$ به فرض داشتن یک صفحه شطرنجی بزرگ، آن به زیرصفحه‌های کوچک‌تری تفکیک می‌شود که چندجمله‌ای‌های رخی آن‌ها را می‌توان با تجسس، تعیین کرد، که در این‌جا $r(C,x)$ چندجمله‌ای رخی برای صفحه شطرنجی C می‌باشد که برای هر $k \geqslant ۰$ ضریب x^k، تعداد راه‌هایی است که می‌توان k رخی را که باهم برخورد ندارند در صفحه Cی شطرنج قرار داد. وقتی اندازه صفحه زیاد شود، می‌توان صفحه بزرگ را به زیرصفحه‌های کوچک‌تر تفکیک کرد. برای $k\varepsilon Z^+$، می‌خواهیم تعداد راه‌هایی را بیابیم که k رخ می‌توانند براین صفحه شطرنج قرار گیرند به‌قسمی که هیچ دوتای آن‌ها نتوانند به هم برخورد کنند، یعنی هیچ دوتای آن‌ها در یک سطر یا ستون صفحه شطرنج نباشد. این تعداد را با r_k نشان می‌دهند. ($r_۱$ تعداد خانه‌ها صفحه می‌باشد.) [۳۰]

۷. محاسبه تعداد پریش‌ها

به عنوان کاربردی از اصل شمول و عدم شمول به محاسبه تعداد پریش‌ها و مسائل مرتبط با آن می‌پردازیم.
جایگشتی مانند $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد مجموعه $\{۱,۲,\ldots,n\}$ در نظر بگیرید.
می گوییم عدد i نقطه ثابت این جایگشت است، هرگاه $a_i = i$. این جایگشت یک پریش نامیده می‌شود، هرگاه هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد، یا بطور معادل به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داشته باشیم $a_i \neq i$. تعداد پریش‌های $\{۱,۲,\ldots,n\}$ را با D_n نمایش می دهیم.
با استفاده از اصل شمول و عدم شمول می‌توان فرمولی برای D_n بدست آورد.

قضیه ۱.۶.۵. *با تعریف بالا،*
$$D_n = n!(\frac{۱}{۰!} - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \ldots + (-۱)^n\frac{۱}{n!}) = n!\sum_{r=۰}^{n}\frac{(-۱)^r}{r!}$$

راه‌حل: *S را مجموعهٔ همهٔ جایگشت‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ می‌گیریم. دراین‌صورت $S_۰ = |S| = n!$. عضوی از S مانند $a_۱a_۲\ldots a_n$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم این عضو دارای ویژگی c_i است هرگاه i نقطهٔ ثابت آن باشد، یعنی $a_i = i \quad (i = ۱,۲,\ldots,n)$. بنابر تعریف، D_n برابر تعداد اعضایی از S است که هیچ یک از ویژگی‌های $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ را ندارند، یعنی*
$$D_n = N(\bar{c_۱}\bar{c_۲}\ldots\bar{c_n})$$

پس
$$D_n = \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r S_r$$

$N(c_۱)$ برابر تعداد جایگشت‌هایی مانند $a_۱a_۲\ldots a_n$ از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است که $a_۱ = ۱$؛ پس $N(c_۱) = (n-۱)!$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $N(c_i) = (n-i)!$، $i = ۱,۲,\ldots,n$. در نتیجه
$$S_۱ = N(c_۱) + \ldots + N(c_n) = n(n-۱)!$$

$N(c_۱c_۲)$ برابر تعداد جایگشت‌هایی مانند $a_۱a_۲\ldots a_n$ از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است که $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$. پس $N(c_۱c_۲) = (n-۲)!$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود
$$N(c_ic_j) = (n-۲)!, \qquad ۱ \leq i < j \leq n$$

در نتیجه

$$S_۲ = \sum_{۱\leq i<j\leq n} N(c_i c_j) = \binom{n}{۲}(n-۲)! = \frac{n!}{۲!(n-۲)!}(n-۲)! = \frac{n!}{۲!}$$

به‌طور کلی برای محاسبهٔ S_r فرض کنید $c_{i_۱}, c_{i_۲}, \dots, c_{i_r}$، r ویژگی از $c_۱, c_۲, \dots, c_n$ باشند. تعداد اعضایی از S که این r خاصیت را دارند برابر تعداد جایگشت‌هایی مانند $a_۱a_۲\dots a_n$ از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ است که $a_{i_۱} = i_۱$، $a_{i_۲} = i_۲$، ... و $a_{i_r} = i_r$. پس

$$N(c_{i_۱}, \dots, c_{i_r}) = (n-r)!$$

چون S_r شامل $\binom{n}{r}$ جمله به صورت $N(c_{i_۱}, \dots, c_{i_r})$ است، پس

$$S_r = \sum N(c_{i_۱}, \dots, c_{i_r}) = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!(n-r)!}(n-r)! = \frac{n!}{r!}$$

درنتیجه

$$D_n = \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r S_r = \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r \frac{n!}{r!} = n!\sum_{r=۰}^{n}\frac{(-۱)^r}{r!}$$

[۱۹]

۱.۶.۵ نقش توابع مولد در ترکیبیات:

در اوایل قرن سیزدهم لئوناردو [۹] پسیایی ریاضی دان ایتالیایی در کتاب حسابش برای اولین بار مطالعه دنباله $۰, ۱, ۱, ۲, \dots$ را، که می‌توان آن را به صورت بازگشتی $F_۰ = ۱, F_۱ = ۱, F_{n+۲} = F_{n+۱} + F_n$ به ازای $n \geqslant ۰$ نیز نشان داد، شروع کرد. این دنباله را اعداد فیبوناتچی [۱۰] نامیدند. اگر فرمول

$$F_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n\right] \qquad n \geqslant ۰$$

را در نظر بگیریم، به دست می‌آوریم

$$F_۰ = ۱, F_۲ = ۱, F_۳ = ۲, F_۴ = ۳, \dots$$

این فرمول هرعدد فیبوناتچی را به صورت تابعی از n معین می‌کند.
مطالعه تابع‌های مولد معمولی و نمایی تکنیکی توانا فراهم کرده است که وحدت بخش مفاهیم مبانی اصلی شمارش و رابطه و تابع‌ها و اصل شمول وعدم شمول است. از تعمیم چندجمله‌ای‌ها به سری‌های توانی و بسط قضیه دوجمله‌ای به $(۱ + x)^n$ برای مواردی که در آن‌ها n مثبت و یا حتی n یک عدد صحیح نباشد، ابزارهای لازم برای محاسبه ضریب‌ها در تابع‌های مولد را به‌دست می‌دهد. این تلاش ارزشمند است زیرا محاسبات چیزی که اجرا می‌شود هم فرآیندهای انتخابی را که نیاز به بررسی دارد، را به حساب آورده است.

۲.۶.۵ نقش روابط بازگشتی در ترکیبیات :

تعریف ۲.۶.۵. رابطه بازگشتی ، فرمول بازگشتی برای محاسبهٔ تعداد طرق انجام فرایندی حاوی n شئ بر حسب تعداد طرق انجام آن با تعدادی کمتر از اشیاء است. این منطق بازگشتی مستتر در ساختن

[۹] leonard

[۱۰] Fibonatci

مدل بازگشتی مسئله شمارشی، همان منطقی هست که در طرح زیرروال‌های کامپیوتری بازگشتی که خود را فرا می‌خوانند، به‌کار می‌رود. ایدهٔ اساسی هر روند بازگشتی در علوم کامپیوتر این است که این روند خود را فرا می‌خوانند تا برای حل یک مسئله، مسائل مشابهی را که کوچک‌تر از مسئله اصلی‌اند حل کند. یکی از ویژگی‌های مهم بازگشت، مفهوم کارکردن از آخر به اول است. اما، نمی‌توان برنامه‌ای بازگشتی را برای محاسبهٔ مقادیر موجود در رابطه‌ای بازگشتی به‌کار برد زیرا روابط بازگشتی به معنای جدول‌بندی مقادیر در جهت پیشرونده است و نه برای محاسبهٔ بازگشتی پسرونده. [۲]

رابطه بازگشتی به صورت ابزاری دیگر برای حل مسائل ترکیبیاتی می‌باشد. در این مسائل وضعیتی مفروض تحلیل می‌شود و آن‌گاه نتیجه a_n را برحسب نتایج مربوط به اعداد صحیح و نامشخص کوچک‌تری بیان می‌شود. همین که رابطه بازگشتی تعیین شد، می‌توان آن‌را برای هرمقدار a_n (درجریان استدلال) حل کرد. وقتی به کامپیوتر دسترسی باشد، چنین رابطه‌هایی به‌ویژه قابل ارزیابی هستند. خصوصاً اگر نتوان آن‌ها را به صورتی صریح حل کرد. مطالعه رابطه‌های بازگشتی ممکن است به رابطه فیبوناتچی $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad n \geqslant 0$ بازگردد که آن‌را پیسایی بررسی کرده‌است. یکی از کاربردهای این دنباله، در نورشناسی است که در آن رابطه بازگشتی برای تعیین مسیر شعاعی که از یک رشته عدسی‌های نازک متساوی‌الفاصله می‌گذرد به‌کار رفته است.
کپلر [۱۱] نیز از این دنباله در مطالعاتش درباره چگونگی آرایشی برگ‌های درخت یا گل‌هایی که پیرامون ساقه‌اش جوانه می‌زنند به‌کاربرده است.
کاربردهای مربوط به نظریه احتمال را که با پیشامدهای بازگشتی، گام‌های تصادفی، و مسائل ورشکستگی سروکار دارند را نیز می‌توان نام برد. تکنیک‌های بازگشتی در تولید جایگشت‌ها، ترکیب‌ها و افراز اعداد صحیح نیز به‌کار می‌رود.

۳.۶.۵ نظریه گراف و ترکیبیات

تاریخچه: یکی دیگر از موضوعات ترکیبیات که از مفهوم رابطه‌های دودویی نتیجه می‌شود، مفهوم گراف است. برخلاف زمینه‌های دیگر ریاضیات، منشأ و آغاز گراف به زمان و مکان مشخصی باز می‌گردد: به سال ۱۷۳۶، به مسئله هفت پل کونیکسبرگ، که اویلر، آن‌را حل کرد. در ۱۷۵۲ قضیه اویلر برای گراف‌های هامنی مطرح شد. (این قضیه در اصل برای چندوجهی‌ها در نظرگرفته شده بود.) بعد از آن در ۱۸۴۷، کیرشهوف نوع خاصی از گراف را به‌نام درخت [۱۲] بررسی کرد، و از این مفهوم در کاربردهایی که با شبکه‌های الکتریکی سروکار دارند، در توسیع قانون‌های اهم برای جریان‌های الکتریکی استفاده کرد. در این دوره دو مفهوم اصلی دیگر نیز مطرح شد. مساله حدس چهاررنگ اولین موضوعی بود که گاتری آن‌را بررسی کرد. دومین مفهوم اصلی ،دورهمیلتنی بود، که همیلتن آن‌را برای معمای شگفت‌انگیزی که در آن از یال‌های دوازده وجهی منتظم استفاده می‌شود، به‌کار برد. مسئله مشخص‌کردن گراف‌های هامنی را کوراتوفسکی در ۱۹۳۰ حل کرد. اولین کتاب درباره نظریه گراف، به وسیله کونیش، پژوهشگر معروف در زمینه گراف نوشته شد.

[۱۱] kepler
[۱۲] tree

در نمایش هندسی گراف‌ها، ویژگی توپولوژيکي گراف‌ها بررسی می‌شود. این نظریه، موضوع مناسبی از ریاضیات است که در شاخه‌های مختلف از جمله در شیمی کاربردهاي گوناگونی دارد. نظریه گراف، اولین بار در سال ۱۷۳۶ توسط لئونهارد اویلر[۱۳] ریاضيدان سوئیسي ابداع شد و پس از آن کاربردهاي فراوانی در بیشتر علوم، به‌خصوص در علوم مهندسی پیدا کرد. اصطلاح گراف را نباید با واژه، نمودار مربوط اشتباه گرفت. گراف در نظریه گراف‌ها، مفهومی مجرد است و به مجموعه‌اي از نقاط (گره یا رأس) [۱۴] اطلاق مي شود که با خطوط یا یال [۱۵] به یکدیگر وصل شده اند. هر یال يك جفت رأس را به هم وصل مي‌کند. در سال ۱۹۳۰ با پیشرفت علوم کامپیوتر، رشد و پویایی آن سریع تر شد و علاقه شدید و مداوم به نظریه گراف‌ها به‌عنوان یک شاخه ریاضی نمایان شد. [۱۵]
امروزه نظریه گراف‌ها یکی از محبوب‌ترین و پربارترین شاخه‌های ریاضیات و علم کامپیوتر است. یکی از دلایل مهم این علاقه مجدد به نظریه گراف‌ها در قابلیت کاربرد آن در بسیاری از مسائل پیچیده و گسترده جامعه‌ی مدرن در زمینه‌های گوناگونی نظیر اقتصاد، توزیع خدمات، مدیریت، بازاریابی، مدل‌سازی انرژی، انتقال اطلاعات و برنامه‌ریزی حمل و نقل، که مشتی است از خروار، نهفته است. غالبا می‌توان این نوع مسائل را به صورت گراف‌ها و شبکه‌ها مدل‌سازی کرد. نظریه گراف‌ها را نخست و قبل از همه به عنوان ابزاری برای فرمول‌بندی مسائل و تعریف روابط متقابل ساختاری به‌کار می‌گیرند. به محض اینکه مسئله‌ای به زبان نظریه گراف‌ها فرمول‌بندی شود، درک کلی آن نسبتا آسان می‌شود. البته قدم بعدی عبارت خواهد بود از بررسی راه‌های جست‌وجوی جوابی برای مسئله. رشته نظریه گراف‌ها دارای شاخه‌های متفاوت است:

الف: جنبه‌های جبری

ب: جنبه‌های بهینه‌سازی[۲]

کاربردهای نظریه گراف: از نظریه گراف می‌توان در شبکه های الکتریکی، نظریه کدگذاری، پژوهش و تحقیق در عملیات، در برنامه‌ریزی‌های کامپیوتری، شیمی و نیز علوم اجتماعی استفاده کرد.
مساله فروشنده دوره گرد، وابستگی تنگاتنگی به دور همیلتنی در گراف دارد. این یک مسئله نظریه‌ای گراف است که هم در زمینه‌ی پژوهش در عملیات و هم در علم کامپیوتر مورد نیاز است. [۲۳]

کاربرد درخت ها در علم رایانه:

با ظهور کامپیوترهای رقمی کاربردهای بسیار دیگری برای درختها پیدا شد. انواع خاصی از درختان در مطالعه ساختارهای داده‌ها، جورکردن، و نظریه کدگذاری و درحل بعضی مسائل بهینه‌سازی به‌کار رفتند.
تاریخچه درخت: ساختاری که امروزه درخت نامیده می‌شود ابتدا به سال۱۸۴۷ در کار کیرشهوف در شبکه‌های الکتریکی ظاهرشد. درهمین زمان، مفهوم درخت در کتاب هندسه وضع، اثر کارل فن اشتات نیز دیده شد. در ۱۸۵۷ درخت‌ها مجددا به وسیله کیلی، که از این ساخت‌های قبلی، بی‌خبر بود، کشف

---

[۱۳] Euler (1707-1783)

[۱۴] Vertex

[۱۵] Edge

شد. کیلی اولین فردی بود که این ساختار را "درخت" نامید و در کاربردهای مربوط به ایزومرهای شیمیایی آن‌را به کار برد. او شمارش رده‌هایی از درخت‌ها را نیز بررسی کرد. کیلی در اولین اثرش درباره درخت‌ها، درخت‌های ریشه دار بدون برچسب را شمارش کرد. پس از آن بود که شمارش درخت‌های مرتب بدون برچسب انجام شد. دو تن از معاصران کیلی که آن‌ها غیردرخت‌ها را مطالعه کرده‌اند، کارل بورخارت [۱۶] و ژوردان [۱۷] بودند.

فرمول کیلی: اگر e یک یال پیوندی از گراف G باشد، داریم: $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$
بطوری‌که $\tau(G)$ تعداد درخت‌های فراگیر G می‌باشد.

فرمول $\tau(k_n) = n^{n-2}$ برای تعداد درخت های برچسب دار با n راس را در ۱۸۶۰ کارل بورخارت کشف کرد. کیلی بعدها در ۱۸۸۹ ساخت مستقلی از این فرمول را عرضه کرد.

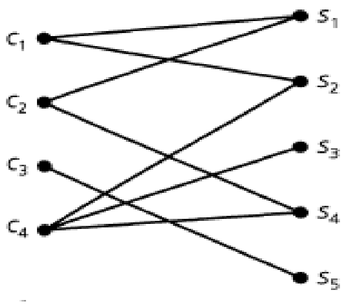
بهینه‌سازی وجور کردن: به‌وسیله ساختارهای درخت‌ها و گراف‌ها تکنیک‌هایی را می‌توان معرفی کرد که در زمینه ریاضیات پیش می‌آیند و به تحقیق در عملیات موسوم‌اند. این تکنیک‌ها با درنظر گرفتن گراف‌ها و گراف‌های چندگانه که عددی حقیقی و نامنفی به اسم وزن بر هر یال خود دارند، بعضی نتایج را بهینه می‌کند. این اعداد به اطلاعاتی نظیر فاصله بین رأس‌هایی که دو سر یال‌اند یا شاید به میزان بار قابل جابه‌جایی از رأسی به رأس دیگر در طول یالی که معرف یک بزرگ‌راه یا خط هوایی است وابسته‌اند. روش‌های بهینه‌سازی به وسیله گراف‌هایی که تهیه‌کننده چارچوب کارند، برای تسهیل اجرای کامپیوتری به روش الگوریتمی بسط یافته‌اند. از جمله مسائلی که تحلیل می شوند عبارت‌اند از تعیین:
۱- کوتاهترین فاصله بین رأس معین و هریک از رأس‌های دیگر در نوعی خاص از گراف جهت‌دار همبند بی‌طوقه.
۲- درختی فراگیر برای گراف یا گراف چندگانه مفروض که در آن مجموع وزن‌های یال‌ها در درخت مینیمال است.
۳- ماکسیمم مقدار باری که می‌توان از نقطهٔ آغاز (منبع) به نقطه پایان (چاه) انتقال داد، که در آن وزن یک یال معرف ظرفیت مجازی باری است که قرار است جابه‌جا شود.

۴.۶.۵ گراف‌های دوبخشی و نظریه جورسازی:

بر حسب تابع‌ها، جورسازی تابعی است که تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعهٔ X و زیرمجموعه Y برقرار می کند. وقتی جورسازی کامل باشد تابع یک‌به‌یک از X به Y تعریف شده است. مثال مربوط به شکل ۱.۵ شامل چنین تابعی است و جورسازی کامل است.
برای گراف دوبخشی $G = (V, E)$ که در آن V به صورت $X \cup Y$ افراز شده است. جورسازی کامل X و Y مستلزم این است که $|X| \leq |Y|$. اگر X بزرگ باشد، آنگاه ساختن چنین جورسازیی را نمی‌توان صرفا به وسیله مشاهده یا آزمایش و خطا انجام داد . [۲۴]
مثال زیر نمونه‌ای از مسئله جورسازی می‌باشد.

---
[۱۶] Carl borchatdt
[۱۷] Gordan

مثال ۳.۶.۵. مدرسه ای می خواهد چهار معلم برای آموزش دروس زیر استخدام کند: ریاضیات (s_1) درس کامپیوتر (s_2) شیمی (s_3) فیزیک (s_4) و زیست شناسی (s_5). چهار داوطلب که علاقه به تدریس در این مدرسه دارند عبارت اند: از خانم C (c_1) آقای R (c_2) خانم K (c_3) و خانم L (c_4). خانم C کارآموخته در ریاضیات و کامپیوتر است ؛ آقای R کارآموخته در ریاضیات و فیزیک است؛ خانم K دوره زیست شناسی ؛ و خانم L دوره های شیمی، فیزیک و کامپیوتر را گذرانیده‌اند. اگر مدرسه این چهار داوطلب را استخدام کند، آیا می‌تواند هر معلم را به تدریس (متفاوت) دروسی که در آن درس کارآموخته است بگمارد؟



شکل ۱.۵: مربوط به مثال ۳.۶.۵

این مسأله مثالی از وضعیتی کلی است که به مسأله تخصیص موسوم است. با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، همراه با چند جمله ای رخی می‌توان تعیین کرد که به چند راه، در صورت وجود، امکان دارد چهار معلم را به تدریس دروسی گمارد که هریک در آن کارآموخته باشد. اما، این تکنیک‌ها وسیله انجام هیچ کدام از این تخصیص‌ها را فراهم نمی‌کند. در شکل ۱.۵ این مسأله به وسیله گراف دوبخشی $G = (V, E)$ مدل‌بندی شده است که در آن، V به‌صورت $X \cup Y$ با $X = c_1, c_2, c_3, c_4$ و $Y = s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ افراز شده است. یال‌های $c_4, s_3, c_3, s_5, c_2, s_4, c_1, s_2,$ این تخصیص از X به Y را نشان می‌هند. [۲۴]

تعریف ۴.۶.۵. جورسازی: فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی دوبخشی باشد که V به صورت $X \cup Y$افراز شده است. (هر یال Vبه صورت x, y با $x \in X$ و $y \in Y$ است.)

الف: یک جورسازی در G، ساختن زیرمجموعه ای است از E به قسمی که هیچ دو یال و رأس X یا در رأس Y مشترک نباشد.

ب: یک جورسازی کامل از X به Y، جورسازی در G است به قسمی که هر $x \in X$ نقطه انتهایی یک یال باشد.

نظریه گراف به زمینه‌ای از ریاضیات به نام تحقیق در عملیات تبدیل شد که هر مبحث به روش الگوریتمی معرفی می‌شود.

۵.۶.۵ جبر بول و تابع های راه گزینی در ترکیبیات:

تاریخچه: مفهوم جدید جبر مجرد را جورج بول در مطالعه دستگاه‌های مجرد کلی‌اش در مقابل مثال‌های خاص این‌گونه دستگاه‌ها بوجود آورد. او در اثر خود، بررسی قانون‌های اندیشه در ۱۹۸۴، ساختار ریاضی را که اینک جبر بول نامیده می‌شود. فرمول‌بندی کرده اولین مقاله مهم در جبر بولی کاربردی شانول عرضه کرده، او جبر مدارهای راه‌گزینی را ابداع کرد و رابطه آن را با جبرمنطق نشان داد. تابع های راه‌گزینی را می‌توان به وسیله صورت‌های نرمال فصلی و عطفی آن‌ها نمایش داد. این صورت‌ها به ما اجازه می‌دهند که این گونه تابع‌ها را با استفاده از نمایه‌های ”دو دویی“ به صورتی فشرده بنویسیم.
فرآیند مینیمم‌سازی نشان می‌دهد که چگونه تابع بولی مفروضی را می‌توان به صورت مجموع مینیمال حاصل ضرب‌ها یا به صورت حاصل‌ضرب مینیمال مجموعه‌ها به دست آورد. بر خلاف حلقه‌های تعویض‌پذیر یکه‌دار که با هر اندازه ممکن پیش می‌آیند. جبر بولی می‌تواند تنها شامل ۲^n عنصر، $n \in Z^+$ باشد. [۲۴]

اصول نظریه کدگذاری: نظریه کدگذاری جبری یک مورد از ریاضیات کاربردی می‌باشد که در آن، ساختارهای جبری احتمال، و ترکیبیات همگی نقش اساسی دارند. هنگامی که در پی مدل‌بندی انتقاال اطلاعاتی هستیم که با یک رشته از ارقام ۰ و ۱ نشان داده می‌شوند، مطالب در سطح مقدماتی نگه داشته می‌شوند. [۲۴]

۷.۵ نتیجه‌گیری

به‌طور طبیعی، بررسی همه جانبه و کامل موضوع ساختارها، ویژگی‌ها و روش‌های اثبات ترکیبیات و گراف، در یک پایان‌نامه مقدور نمی‌باشد. در این پایان‌نامه، کلیّاتی از هر یک از موضوعات مطرح شده است. تکمیل این مباحث نیازمند به مطالعات گسترده و همکاری سایر همکاران و علاقه‌مندان می‌باشد. بعضی از جنبه‌های مهم این موضوعات به شرح ذیل می‌باشد.

۱- تبیین ساختارهای اصلی ترکیبیات. (ویژگی‌ها، تفاوت‌ها و شباهت‌ها)

۲- دسته‌بندی روش‌ها، تکنیک‌ها و اثبات‌های ترکیبیاتی.

۳- شیوه‌های به‌کارگیری ترکیبیات در سایر رشته‌ها. (در مباحث نظری و کاربردی)

۴- سایر مباحث مرتبط با این موضوع.

مراجع

[۱] آلاستار وود. (۱۳۸۳). **آنالیز عددی مقدماتی**. مترجم: علی مس‌فروش. ((ویراستار:دکترسیدعلی میرحسنی)). دانشگاه شاهرود.

[۲] اللهی، کاظم. **درآمدی بر منطق و مجموعه‌ها**. انتشارات آفتاب

[۳] ایستن، ار. (۱۳۷۴). **گراف و کاربردهای آن**. مترجم: محمدصادق منتخب. مرکز دانشگاهی تهران.

[۴] ایگنر، مارتین. تسیگلر، گونتر. **کتاب اثبات** . (۱۳۷۹). مترجم: سیامک کاظمی. (چاپ اول). واحد انتشارات دانش‌های بنیادی.

[۵] بالتیانسکی.و . گ – ویلکین. ن . یا (۱۳۶۳). **تقارن در جبر**. مترجم: پرویز شهریاری. (چاپ دوم)، انتشارات امیرکبیر تهران.

[۶] باندی – مورتی. (۱۳۸۳) . نظریه گراف ها و کاربردهای آن. مترجم: حمید ضرّابی‌زاده (چاپ سوم)، تهران: موئسسه فرهنگی هنری دیباگران.

[۷] بیتینگر، ماروین (۱۳۷۳). **منطق، اثبات و مجموعه‌ها**. (ویرایش دوم). مترجم: محمد مهدی ابراهیمی. (چاپ دوم), انتشارات دانشگاه پیام نور.

[۸] بیژن زاده، محمدحسن.(۱۳۸۶). **آشنایی با فلسفه ریاضی**. (چاپ دوم)، انتشارات دانشگاه پیام نور.

[۹] پوررضا، ابراهیم.(۱۳۷۷). **مبانی هندسه**. حسین سیف‌لو. انتشارات دانشگاه تبریز.

[۱۰] پولیا, جورج. (۱۳۶۸). **چگونه مساله را حل کنیم**. مترجم: آرام، احمد. (چاپ اول), موئسسه کیهان.

[۱۱] توماس. دبلیو. هانگرفورد. **جبر** ترجمه: علی اکبر عالم‌زاده و حسین ذاکری.

[۱۲] جودیت‌ان، سدربرگ. (۱۳۷۷). **مبحثی در هندسه نوین**. مترجم: محمود ،پارچه‌طلب. (چاپ اول)، انتشارات دانشگاه اراک.

[۱۳] جودیث، استویل – بوریس، ایگل . Iglewicz Boris ، Stoyle. Judith (۱۳۷۶). **مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی**. مترجم:غلامرضا یاسی‌پور. (چاپ دوم). انتشارات مدرسه.(وزارت آموزش و پرورش)

[۱۴] جکسون، بردلی. تورو، دمیتری. (۱۳۹۳). **مبانی ترکیبیات**. مترجم: مهرداد مسافر. (چاپ اول)، نشر علوم ریاضی ره‌آورد (وابسته به موئسسه فرهنگی فاطمی).

[۱۵] رحیمی شعرباف، صادق. (۱۳۹۳). **گامی در شناخت ریاضیات**. (چاپ اول)، دانشگاه شاهرود.

[۱۶] سموئل‌د. کونت، کارل دوبور. (۱۳۷۰). **آنالیز عددی مقدماتی (به شیوه الگوریتمی)** . مترجم: سراج‌الدین کاتبی(چاپ اول)، مرکز نشر دانشگاهی تهران. ((ویراستار:دکترمحمدهادی شفیعیها))

[۱۷] سومینسکسی, ایلیا سامویلویچ. گولووینا, لیدیا ایوانونا. یاگلوم, ایساک موسوویچ.(۱۳۷۷). **استقرا ریاضی**. مترجم: شهریاری، پرویز. (چاپ سوم), انتشارات خوارزمی.

[۱۸] شهریاری، پرویز. (۱۳۷۳). **روشهای جبر**. (چاپ نهم)، تهران: چاپخانه سپهر.

[۱۹] علیپور، علی‌رضا.(۱۳۸۱). **ترکیبیات** (چاپ اول)، تهران:انتشارات کیومرث.

[۲۰] علیپور، علی‌رضا.(۱۳۹۲). **روشهای ترکیبیات۱** (چاپ اول)، تهران: انتشارات علوم ریاضی رهاورد.

[۲۱] فرخو، لیدا. (۱۳۸۱). **ریاضی عمومی (۱)**. (چاپ ششم)، انتشارات دانشگاه پیام‌نور.

[۲۲] فلیسین، شاله. **فلسفه علمی یا شناخت روش علوم**. مترجم: یحیی مهدوی (چاپ پنجم)، انتشارات دانشگاه تهران.

[۲۳] گریمالدی، رالف. **ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی از دیدگاه کاربردی**. (۱۳۷۷). مترجم: دکتر علی عمیدی. (چاپ اول). (جلد اول). مرکز نشر دانشگاهی تهران.

[۲۴] گریمالدی، رالف. **ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی از دیدگاه کاربردی**. (۱۳۷۷). مترجم: دکتر علی عمیدی. (چاپ اول). (جلد دوم). مرکز نشر دانشگاهی تهران.

[۲۵] مایکل، سیپسر. (۱۳۸۵). **مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات**. مترجم: دکترمحمدحسن شیرعلی شهرضاد(چاپ اول). انتشارات دانشگاه یزد.

[۲۶] مصحفی، عبدالحسین. (۱۳۶۸). **منطق و استدلال ریاضی**. (چاپ دوم)، تهران: انتشارات فاطمی.

[۲۷] محمد مهدی، نصرآبادی.(۱۳۹۲). **ریاضیات گسسته**. (چاپ نهم)، انتشارات فاطمی.

[۲۸] والتر. رودین .**اصول آنالیز ریاضی**. مترجم: علی اکبر عالم زاده.

[۲۹] وست، داگلاس برنت. (۱۳۸۱). **آشنایی با نظریه گراف**. مترجم: بیژن شمس. انتشارات گسترش علوم پایه تهران.

[۳۰] ویکتور، برایانت. (۱۳۸۴). **جلوه‌هایی از ترکیبات**. مترجم: عباس ثروتی- مهدی محمدی .(چاپ سوم)، انتشارات دانش‌پژوهان جوان.

[۳۱] ویلسون، ربین ج. (۱۳۷۷). **درآمدی بر نظریه گراف**. مترجم: جعفر بی‌آزار. (چاپ اول)، انتشارات دانشگاه گیلان.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

آرایش دوری	circular arrangment
ارزش راستی	truth value
استقرا	induction
استقرای ریاضی	mathematical induction
استقرای کامل	complete induction
استلزام	impgication
الگوریتم تقسیم	division algorithm
انقباض	contraction
انقباض یالی	edge contraction
اشتراک	intersection
اصل	principle
اصل برهمنی	superposition principle
اصل شمول و طرد	inclusion-exclusion principle
اصل موضوع انتخاب	axiom of choice
افراز	partition

ب

بازگشتی	recursive

پ

پایه	basis
پریش	derangement
پوشش یالی	edge covering

ت

تابع	function
تابع پوشا	onto function

تابع واردن .... inverse function
تابع یک‌به‌یک .... one-to-one function
تحلیل .... analysis
تخصیص .... allocation
ترکیب .... combination
ترکیب عطفی .... conjunction
ترکیب فصلی .... disjunction
تناظر .... correspondence
تناظر دوسویی .... bijection correspondence
تناقض .... contradiction
تهی .... empty

ج

جایگشت .... permutation
جایگشت حلقه‌ای .... ring permutation
جایگشت دوه‌ای .... circular permutation
جبرگزاره‌ها .... algebra of propositions
جدول ارزش .... value table
جورسازی .... matching

ح

حاصل جمع .... sum
حاصل ضرب .... product
حاصل ضرب دکارتی .... Cartesian product
حلقه .... loop

خ

خوش تعریف .... well-defined

د

دنباله .... sequence
درخت .... tree
دوتایی .... binary
دور همیلتونی .... hamilton cycle

ر

رابطه بازگشتی .... recurrence relation

رابطه دوتایی .... binary relation
رابطه هم ارزی .... equivalence relation
راس .... vertex
راس‌های مجاور .... adjacent vertices
راستگو .... tautology
رشته .... string

ز

زیرمجموعه .... subset
زیرگراف .... subgraph

س

سری .... series
سری توانی .... power series
سور .... quantifier
سور عمومی .... universal quantifier
سور وجودی .... existential quantifier

ش

شبکه .... network
شرط .... condition
شرط آغازی .... initial condition
شرط کافی .... sufficient condition
شرط لازم .... necessary condition

ض

ضریب .... coefficient
ضریب دوجمله‌ای .... binomial coefficient

ع

عدد اصلی .... cardinal number
عکس نقیض .... contrapositive
عملگر .... operator

ف

فرض .... hypothesis
فرض استقرایی .... inductive hypothesis

ق

قاعده وضع مقدم .... modus ponens
قیاس .... syllogism
قیاس ذوحدین سالبه .... destructive dilemma
قیاس رفع .... modus tollens

ک

کوتاهترین مسیر .... shortest path

گ

گزاره .... proposition
گراف دوبخشی .... bipartite graph
گزاره مسور .... quantified statement
گشت .... walk

م

متعدی .... transitive
متقارن .... symmetric
مجموعه .... set
مسیر .... path
مجموعه توانی .... power set
مرحله استقرا .... induction step
مرحله پایه .... basis step
مسئله بهینه‌سازی .... optimization problem
مسئله شمارش .... counting problem
مسئله صدق‌پذیری .... satisfiability problem
معکوس .... inverse
منطق .... logic

ن

نتیجه .... conclusion
نگاشت .... mapping

و

وجه .... face

ی

یال برشی .... cut edge
یال شمول .... inclusive or

یال قوی .... strong edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

associative law .... قانون شرکت پذیری
acyclic graph .... گراف بی‌دور
addition rule .... قاعده جمع
adjacency matrix .... ماتریس مجاورت
adjacent .... مجاور
adjunction .... الحاق
admissible .... مجاز

algorithm .... الگوریتم
alternating path .... مسیر متناوب
analysis of algorithms .... تحلیل الگوریتم‌ها
associated graph .... گراف وابسته
augmenting path .... مسیر افزوده

base block .... بلوک پایه
basis matrix .... ماتریس پایه
bipartite graph .... گراف دوبخشی
bijection .... دوسویی
bipartition .... دوبخشی کردن
equivalence relation .... رابطه هم‌ارزی
block .... بلوک
bounded region .... ناحیه کراندار
function .... تابع
branch .... شاخه

Brooks theorem .... قضیه بروکس

cartesian product of tow graph .... حاصلضرب دکارتی دوگراف
Cayly colour graph .... گراف رنگ کیلی
Chinese postman problem .... مساله پستچی چینی
chromatic number .... عدد رنگی
classification .... دسته‌بندی
clique .... خوشه
clique number .... عدد خوشه‌ای
closed walk .... گشت بسته
closure of a graph .... بستار گراف
coding theory .... نظریه کدگذاری
colour .... رنگ
combination .... ترکیب
combinatorics .... ترکیبیات
complete graph .... گراف کامل
commtative law .... قانون تعویض‌پذیری
complete matching .... تطابق کامل
connectivity .... همبندی
contraction .... انقباض
corank .... همرتبه
counting rule .... قاعده شمارش
covering .... پوشش
cryptography .... رمزنگاری
cycle .... دور
cycle structure .... ساختار دورها

decision problems .... مسائل تصمیم
degree .... درجه راس
degree sequence .... دنباله درجه‌ها
design .... طرح
disconnected graph .... گراف ناهمبند

isomorphic graphs .... گراف‌های یکریخت
K-chromatic graph .... گراف k-رنگی

link .... یال پیوندی
loop .... طوقه

map colour theorem .... قضیه رنگ‌آمیزی نقشه
matching .... جورسازی
mapping .... نگاشت
minimization process .... فرآیند مینیمم سازی
multiplication .... قاعده ضرب

network .... شبکه

optimal assignment problem .... مساله تخصیص بهینه
ordered binary tree .... درخت دودویی مرتب
outdegree .... درجه خروجی

permutation matrix .... ماتریس جایگشت
personnel assignment problem .... مساله تخصیص شغل
pigenhole principle .... اصل لانه کبوتری
polynomial time algorithm .... الگوریتم با زمان چندجمله‌ای

rank .... رتبه
recurrence relations .... روابط بازگشتی
recursive .... بازگشتی

satisfiability .... صدق پذیری
shortest path problem .... مساله کوتاهترین مسیر

time complexity function .... تابع پیچیدگی زمان

مساله زمان‌بندی .... timetabling problem
درخت .... tree

درجه .... valency
راس .... vertex
رنگ آمیزی راسی .... vertex colouring
برش راسی .... vertex cut

گشت .... walk
ماتریس صفر-یک .... zero-one matrix

نمایه

Aabstract

This thesis concerns analytical methods of proofs in mathematics; in particular, combinatorics and graph theory. Some of the intended purpose as described in five chapters as follows.
In first chapter, We supply some general view of the concepts and methods of proofs in mathemaies. In particular, in combinatorics and graph theory.
In second chapter is concerned with familiarity of the topic and techniques of combinatorics argument.
Next chapter, we study the undrestanding of the caracteristics of the structure and we count some issues in this regrade.
Then, in Next chapter, we perusal some existenial issues in combinatorial proofs.
Finally, an intrudetion of some computer science application and algorithms will be presented.

keywords: Proof, Inductive method, Proof by making, Although proof, Combinatorics, Graph theory, The principle of inclusion, exclusion, Generation function, Argument, proof of the connections, Permutayions, Example violation Counting issues, Algorithm, Generating functions.

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Study of Methods of discussiones and Proofs in Combinatorics and graphs

Supervisor

Dr. Sadegh Rahimi Sherbaf

by

Khadijeh Shafiei Tavandari

2015