دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

b-رنگ‌آمیزی گراف‌ها

فاطمه شاه حسینی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

بهمن ۱۳۹۳

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر میثم علیشاهی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر و فرزند عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

فاطمه شاه حسینی
بهمن ۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه شاه‌حسینی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **b-رنگ‌آمیزی گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر میثم علیشاهی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه شاه حسینی
بهمن ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

هدف این پایان‌نامه بررسی یکی از حالت‌های رنگ‌آمیزی گراف‌های ساده به نام b-رنگ‌آمیزی است. b-رنگ‌آمیزی راس‌های گراف را به مجموعه‌هایی مستقل به نام کلاس‌های رنگی طوری افراز می‌کند، که در هر کلاس رنگی راسی وجود دارد که آن راس، در بقیه کلاس‌های رنگی دارای همسایه باشد. در ادامه بزرگترین افراز را برای برخی گراف‌های خاص مانند گراف‌های کنسر با پارامترهای n و k، ($K(n,k)$)، گراف‌های d-منتظم و گراف بدست آمده از حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر ماکسیمم مقدار k که گراف G دارای b-رنگ‌آمیزی با k رنگ باشد را مشخص می‌کنیم و آن را عدد b-رنگی نامیده و با $\varphi(G)$ نمایش می‌دهیم.

کلمات کلیدی:

b-رنگ‌آمیزی، عدد b-رنگی، b-غالب، گراف کنسر، گراف d-منتظم، حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌ها.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. فاطمه شاه‌حسینی، معصومه ولی‌زاده مقدم، "b - رنگ‌آمیزی در گراف‌ها"، دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک، تهران ۱۳۹۳

۲. معصومه ولی‌زاده مقدم، فاطمه شاه‌حسینی، "رنگ‌آمیزی پویای لیستی گراف‌ها "، دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک، تهران ۱۳۹۳

مقدمه

در دنیای اطراف ما مسایل فراوانی وجود دارند که می‌توان توسط نموداری متشکل از مجموعه نقاط به‌علاوه خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می‌کنند، به توصیف آنها پرداخت. به عنوان مثال، برای نشان دادن رابطه دوستی بین یک دسته از انسان‌ها می‌توانیم هر شخص را با یک نقطه و رابطه دوستی بین افراد را با یک خط متصل بین آنها مشخص کرد. چنین نمودارهایی را گراف می‌نامند. نقاط، مجموعه راس‌ها و خطوط اتصال، مجموعه یال‌های گراف را تشکیل می‌دهند.
یکی از مسایل گراف‌ها رنگ‌آمیزی آنها است که هدف اصلی این مبحث بیان حالتی از رنگ‌آمیزی به‌نام b-رنگ‌آمیزی می‌باشد.
k-رنگ‌آمیزی مجاز گراف G یعنی اعداد ۱ تا k را به راس‌های گراف G طوری اختصاص داد که هیچ دو راس مجاوری رنگ یکسان دریافت نکرده باشند. مینیمم مقدار k در رنگ‌آمیزی فوق را عدد رنگی گراف می‌نامیم.
در سال ۲۰۰۴ لواژ [۲] عدد رنگی گراف‌های کنسر [۳] با پارامترهای n و k، ($K(n,k)$)، را مشخص کرد. گراف کنسر گرافی است که مجموعه راس‌های آن زیر مجموعه‌های k-عضوی از مجموعه $\{1,2,\ldots,n\}$ هستند و دو راس مجاورند اگر و تنها اگر مجموعه‌های نظیرشان از هم جدا باشند.
در سال ۱۹۹۹ ایروینگ [۴] و منلوو [۵] b-رنگ‌آمیزی گراف‌ها را بررسی کردند.
b-رنگ‌آمیزی گراف G با k رنگ عبارت است از k-رنگ‌آمیزی مجازی از راس‌های G به طوری که در هر کلاس رنگی i راس x_i وجود دارد که این راس در همه $k-1$ کلاس رنگی دیگر دارای همسایه باشد. ماکسیمم مقدار k در چنین رنگ‌آمیزی را عدد b-رنگی گراف می‌نامیم و با $\varphi(G)$ نمایش می‌دهیم. در فصل اول عدد b-رنگی گراف‌های کنسر را بررسی می‌کنیم. مرجع اصلی مورد استفاده برای این فصل [۷] است.
در سال ۲۰۰۴ کویدر [۶] به بررسی عدد b-رنگی گراف‌های منتظم پرداخت. کویدر ثابت کرد که عدد b-رنگی گراف‌های d-منتظم با کمر حداقل شش برابر $d+1$ است.
در فصل دوم به جزییات این قضیه اشاره شده است. مرجع اصلی این فصل [۱] است.
در فصل سوم با توجه به [۱۳] عدد b-رنگی گراف به‌دست آمده از حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌های خاص مانند K_n, P_n, C_n را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

[۲] Lovasz
[۳] kneser
[۴] Irving
[۵] Manlove
[۶] Kouider

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و نمادهای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

k-رنگ‌آمیزی مجاز گراف G یعنی اعداد ۱ تا k را به راس‌های گراف G طوری اختصاص داد که هیچ دو راس مجاوری رنگ یکسان دریافت نکرده باشند. مینیمم مقدار k در رنگ‌آمیزی فوق را عدد رنگی گراف می‌نامیم.
در سال ۲۰۰۴ لوواژ عدد رنگی گراف‌های کنسر را مشخص کرد.
گراف کنسر گرافی است که مجموعه راس‌های آن زیر مجموعه‌های k-عضوی از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ هستند و دو راس مجاورند اگر و تنها اگر مجموعه‌های نظیرشان از هم جدا باشند.
در سال ۱۹۹۹ ایروینگ و منلوو b-رنگ‌آمیزی گراف‌ها را بررسی کردند.
b-رنگ‌آمیزی گراف G با k رنگ عبارت است از k-رنگ‌آمیزی مجازی از راس‌های G به طوری که در هر کلاس رنگی i راس x_i وجود دارد که این راس در همه $k - ۱$ کلاس رنگی دیگر دارای همسایه باشد.
ماکسیمم مقدار k در چنین رنگ‌آمیزی را عدد b-رنگی گراف، $\varphi(G)$، می‌نامیم.
در سال ۲۰۰۴ کویدر به بررسی عدد b-رنگی گراف‌های منتظم پرداخت. کویدر ثابت کرد که عدد b-رنگی گراف‌های d-منتظم با کمر حداقل شش برابر $d + ۱$ است.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. گراف:
گراف G سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$، متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ی راس‌ها، مجموعه‌ی $E(G)$ی یال‌ها مجزا از $V(G)$، و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G، یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از راس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و u و v راس‌هایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$،

آن‌گاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند، راس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. طوقه: یک یال با دو سر یکسان، طوقه نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. گشت[۱]: در گراف G، دنباله‌ی ناتهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲\cdots e_kv_k$ که جمله‌های آن متناوبا راس‌ها و یال‌ها هستند، به قسمی که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، $v_i, v_{i-۱}$ باشد را گشتی از $v_۰$ به v_k گویند.

تعریف ۴.۲.۱. گشت بسته: گشت بسته است اگر طول آن مثبت بوده، ابتدا و انتهای آن یکسان باشند.

تعریف ۵.۲.۱. گذر[۲]: اگر یال‌های $e_۱, e_۲, \cdots, e_k$ در گشت W متفاوت باشند، W را گذر می‌نامند.

تعریف ۶.۲.۱. مسیر[۳]: اگر راس‌های گشت W متفاوت باشند، W را مسیر می‌نامند.

تعریف ۷.۲.۱. طول مسیر: به تعداد یال‌های مسیر، طول مسیر گفته می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. دور[۴]: مسیر بسته‌ای که ابتدا و راس‌های داخلی آن متمایز باشند، دور نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. مدار [۵] : گشت بسته‌ای که از هر یال یک‌بار عبور کند، مدار نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۲.۱. مولفه‌ی گراف G: افرازی از مجموعه‌ی رئوس V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_۱, V_۲, \cdots, V_\omega$ وجود دارد به‌طوری‌که دو راس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_۱], G[V_۲], \cdots, G[V_\omega]$ مولفه‌های گراف G نامیده می‌شوند. تعداد مولفه‌های G را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

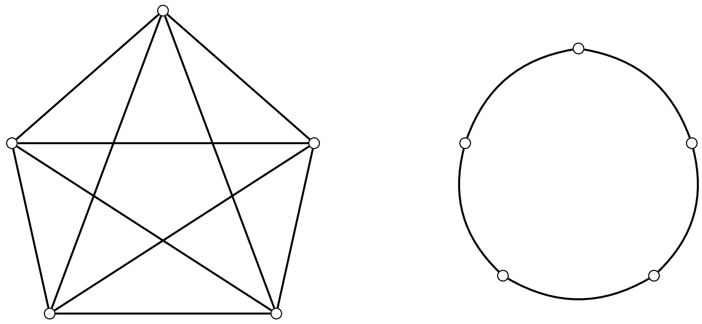
تعریف ۱۱.۲.۱. گرافی که فاقد طوقه باشد و بین هر دو راس آن بیش از یک یال موجود نباشد را **گراف ساده** می‌نامیم.

در طول این پایان‌نامه تمام گراف‌ها را ساده فرض می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. گرافی که در آن هر دو راس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف **کامل** نامیده می‌شود. گراف کامل n راسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

همچنین منظور از P_n و C_n به‌ترتیب مسیر و دور n راسی هستند.
شکل زیر گراف کامل $K_۵$ و دور $C_۵$ را نشان می‌دهد.

[۱] walk
[۲] trail
[۳] path
[۴] cycle
[۵] circuit



شکل زیر مسیر $P_{۵}$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۳.۲.۱. تعدا یال‌های گذرنده از هر راس v از گراف G را درجه آن راس نامیده و آن را با $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات راس‌های گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. گرافی که درجه هر راس آن d باشد، گراف **d-منتظم** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۲.۱. مجموعه‌ای از راس‌های که با راس v از گراف G مجاور باشند را **همسایگی** راس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. گراف G همبند نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر دو راس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد.

قضیه ۱۷.۲.۱. در هر گراف G با e یال داریم:

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = ۲e.$$

تعریف ۱۸.۲.۱. **زیرگراف** ازگراف G، گرافی مانند H است که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq V(G)$.

تعریف ۱۹.۲.۱. زیرگراف فراگیر [6] : اگر $H \subseteq G$ و $V(H) = V(G)$ باشد، H زیرگراف فراگیر G نامیده می‌شود.

تعریف ۲۰.۲.۱. مجموعه S را زیرمجموعه ناتهی از V فرض می‌کنیم. زیرگراف G را که مجموعه راس‌هایش S و مجموعه یال‌هایش، زیرمجموعه‌ای از یال‌های G باشد به‌طوری که هر دو انتهایش در S قرار دارند، **زیرگراف القا شده توسط** S نامیده و با $G[S]$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۱.۲.۱. هر زیرگراف کامل گراف G را **خوشه** گراف G می‌نامیم.

[6] spanning subgraph

تعریف ۲۲.۲.۱. گراف‌های G و H را درنظر بگیرید. **حاصل‌ضرب دکارتی** آنها را که به صورت $G\Box H$ می‌نویسیم، گرافی با مجموعه راس‌های $V(G)\times V(H)$ می‌باشد که در آن راس (u,v) مجاور راس (u',v') است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد.

۱) $u=u'$ و $vv'\in E(H)$.

۲) $v=v'$ و $uu'\in E(G)$.

تعریف ۲۳.۲.۱. زیرمجموعه‌ای از یال‌های G که هیچ دوتایی از آنها راس مشترک نداشته باشند **تطابق** نام دارد. تعداد یال‌های تطابق را **اندازه تطابق** می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض G گرافی ناهمبند باشد. بخش‌های همبند گراف را **مولفه همبندی** گراف G می‌نامیم. دراین صورت می‌توان گراف را به مولفه‌های همبندی‌اش افراز کرد و رابطه هم‌ارزی را وجود مسیر بین دو مولفه درنظر گرفت.

تعریف ۲۵.۲.۱. زیرمجموعه S از راس‌های گراف G را **مجموعه مستقل** می‌نامیم، هرگاه هیچ دو راسی در مجموعه S مجاور نباشند، یعنی برای هر راس $v\in S$ داشته باشیم $|N(v)\cap S|=0$.

تعریف ۲۶.۲.۱. یک **k-رنگ‌آمیزی مجاز** گراف G به تابع $c:V(G)\longrightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ گفته می‌شود به‌طوری که به ازای هر دو راس مجاور u و v داریم $c(u)\neq c(v)$. در حقیقت برای هر i، $1\leq i\leq k$، مجموعه $c^{-1}(i)$ مجموعه‌ای مستقل و غیرتهی است که آن را **کلاس رنگی** i می‌نامیم.

مینیمم مقدار k که G، $k-$رنگ‌پذیر مجاز باشد را **عدد رنگی** گراف G نامیده و با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

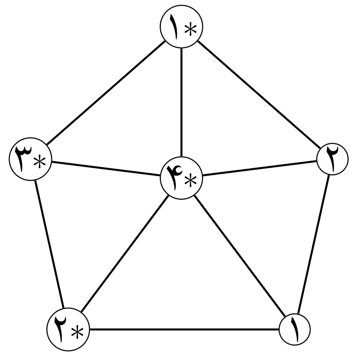
تعریف ۲۷.۲.۱. b**-رنگ‌آمیزی** گراف G با k رنگ، k-رنگ‌آمیزی مجازی از راس‌های G است به طوری که در هر کلاس رنگی i راس x_iای وجود دارد که این راس در همه $k-1$ کلاس رنگی دیگر دارای همسایه باشد. راس x_i را راس b**-غالب** و مجموعه راس‌های $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ را سیستم b-غالب می‌نامیم.

تعریف ۲۸.۲.۱. عدد b-رنگی گراف G عبارت است از ماکسیمم مقدار kای که G دارای b-رنگ‌آمیزی با k رنگ باشد و با $\varphi(G)$ نمایش داده می‌شود.

کران موجود برای $\varphi(G)$ عبارت است از:

$$\chi(G)\leq\varphi(G)\leq\Delta(G)+1 \tag{1.1}$$

گراف زیر را با رنگ‌های $\{1,2,3,4\}$ رنگ‌آمیزی کرده‌ایم که راس‌های b-غالب با ستاره مشخص شده‌اند.



تعریف ۲۹.۲.۱. یک L-لیست‌دهی برای گراف G، عبارت است از یک نگاشت L که به هر راس v از G، مجموعه رنگ‌های مجاز $L(v)$ را نسبت می‌دهد.

تعریف ۳۰.۲.۱. L-رنگ‌آمیزی، رنگ‌آمیزی c از راس‌های G است که برای هر راس v از G داریم $c(v) \in L(v)$. اگر G یک L-رنگ‌آمیزی شده باشد آن را L-رنگ‌پذیر می‌نامیم. G را k-رنگ‌پذیر لیستی گوییم هرگاه برای هر L-لیست‌دهی که $|L(v)| \geq k$، برای هر $v \in V(G)$، گراف G، L-رنگ‌پذیر باشد. عدد رنگی لیستی $\chi_L(G)$، کوچکترین عدد صحیح k است که G گرافی k-رنگ‌پذیر-لیستی باشد.

الگوریتم گریدی

در این روش راس‌های گراف n راسی با اندیس‌های $1, 2, \ldots, n$ اندیس‌گذاری می‌شود، سپس رنگ‌آمیزی به ترتیب اندیس‌ها طوری انجام می‌شود که رنگ راس i کوچکترین شماره رنگی است به طوری که در راس‌های قبلی مجاور با اندیس کمتر بکار نرفته باشد.

قضیه ویزینگ:

فرض G گرافی همبند غیر از گراف کامل و فاقد دور فرد باشد. آنگاه G گرافی Δ-رنگ‌پذیر-لیستی است.[۴، ۱۵]

قرارداد ۳۱.۲.۱. $\lfloor x \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ به ترتیب بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x و کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با x را نمایش می‌دهند.

فصل ۲

b- رنگ‌آمیزی گراف‌های کنسر

فرض کنید G گرافی ساده با مجموعه راس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. یک k-رنگ‌آمیزی مجاز گراف G به تابع $c : V(G) \longrightarrow \{۱, ۲, \ldots, k\}$ گفته می‌شود به‌طوری که به ازای هر دو راس مجاور u و v داریم $c(u) \neq c(v)$. در حقیقت برای هر i، $۱ \leq i \leq k$، مجموعه $c^{-۱}(i)$ مجموعه‌ای مستقل و غیرتهی است که آن را کلاس رنگی i می‌نامیم.

تعریف ۳۲.۰.۲. عدد رنگی گراف G عبارت است از مینیمم مقدار k که G، k-رنگ‌پذیر مجاز باشد و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

یک b-رنگ‌آمیزی گراف G با k رنگ، k-رنگ‌آمیزی مجازی از راس‌های G است به طوری که در هر کلاس رنگی i راس x_iای وجود دارد که این راس در همه $k - ۱$ کلاس رنگی دیگر دارای همسایه باشد. راس x_i را راس b-غالب و مجموعه راس‌های $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_k\}$ را سیستم b-غالب می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۰.۲. عدد b-رنگی گراف G عبارت است از ماکسیمم مقدار k که G دارای b-رنگ‌آمیزی با k رنگ باشد و با $\varphi(G)$ نمایش داده می‌شود.[۵]

کران موجود برای $\varphi(G)$ عبارت است از: [۶، ۹]

$$\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + ۱ \qquad (۱.۲)$$

تعریف ۳۴.۰.۲. گراف G را b-پیوسته گویند هرگاه برای هر k که $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$، b-رنگ‌آمیزی با k رنگ وجود داشته باشد.

همه گراف‌ها b-پیوسته نیستند. برای مثال مکعب ۳-بعدی $Q_۳$، b-پیوسته نیست چون $\chi(Q_۳) = ۲$ و $\varphi(Q_۳) = ۴$ اما $Q_۳$، b-رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ ندارد.

تعریف ۳۵.۰.۲. $S = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ و V مجموعه همه‌ی زیرمجموعه‌های k-عضوی S که $k \leq \frac{n}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. گراف کنسر[۱] با پارامترهای n و k، گرافی است با مجموعه راس‌های V، و دو راس آن

[۱] Kneser

مجاورند اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های متناظرشان از هم جدا باشند. این گراف را با $K(n,k)$ نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم که[۱۲]

$$\chi(K(n,k)) = n - ۲k + ۲$$

۱.۲ سیستم سه‌گانه استاینر

در این بخش تعریف‌های لازم و ساختار سیستم سه‌گانه استاینر[۲] را معرفی می‌کنیم که در اثبات قضیه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

شبه‌گروه از مرتبه n دوتایی $(Q,\circ)$ است که Q مجموعه‌ای از اندازه n و " $\circ$ " عملی دوتایی برروی Q است، به طوری که برای هر دو عضو $a,b \in Q$ معادله $a \circ x = b$ و $y \circ a = b$ دارای جواب منحصر به فرد باشد.

شبه‌گروه $(Q,\circ)$ با $Q = \{۱,۲,\ldots,n\}$ را خودتوان می‌نامیم اگر $i \circ i = i$ برای $۱ \leq i \leq n$ و تعویض‌پذیر می‌نامیم اگر $i \circ j = j \circ i$ برای همه $۱ \leq i,j \leq n$.

شبه‌گروه $(Q,\circ)$ با $Q = \{۱,۲,\ldots,۲n\}$ را نیم خودتوان گویند اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$ داشته باشیم $i \circ i = (n \circ i) \circ (n \circ i) = i$. اگر $Q' \subseteq Q$ آنگاه شبه‌گروه $(Q',\circ)$ را زیر شبه‌گروه $(Q,\circ)$ می‌نامیم.

مثال ۱.۱.۲. گروه جمعی $(\mathbb{Z}_n,+)$ را با $n = ۲k+۱$ در نظر می‌گیریم. چون n فرد است برای هر $i,j \in \mathbb{Z}_n$ که $i \neq j$ لذا $۲i \neq ۲j$. بنابراین جایگشت σ برروی مجموعه $\{۱,۲,\ldots,n\}$ چنان موجود است که برای هر $i \in \mathbb{Z}_n$ داریم $\sigma(۲i) = i$. شبه‌گروه $(Q_۱,\circ)$ که $Q_۱ = \mathbb{Z}_n$ و $i \circ j = \sigma(i+j)$ برای هر $i,j \in \varphi_۱$ را تعریف می‌کنیم. این شبه‌گروه یک شبه‌گروه تعویض‌پذیر خودتوان است.

مثال ۲.۱.۲. گروه جمعی $(\mathbb{Z}_n,+)$ را با $n = ۲k$ در نظر می‌گیریم. در این مورد برای هر $۱ \leq i \leq k$ داریم:

$$i + i = (i+k) + (i+k) = ۲i.$$

جایگشت σ برروی مجموعه $\{۱,۲,\ldots,n\}$ را طوری در نظر می‌گیریم که برای هر $۱ \leq i \leq k$ داشته باشیم $\sigma(۲i) = i$. حال شبه‌گروه $(Q_۲,\circ)$ که $Q_۲ = \mathbb{Z}_n$ و $i \circ j = \sigma(i+j)$ برای هر $i,j \in Q_۲$ را تعریف می‌کنیم. این شبه‌گروه، شبه‌گروه تعویض‌پذیر نیم خودتوان است.

طرح با پارامترهای $t-(n,k,\lambda)$ جفت مرتبی به صورت (S,B) است که S مجموعه‌ای از n نقطه یا نشانه و B خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k-عضوی از S به نام بلوک هستند که هر t عضو از S باهم به طور دقیق در λ بلوک از B وجود دارند. اگر $\lambda = ۱$ این طرح را سیستم استاینر و اگر $k = ۳$ سیستم

[۲] Steiner Triple Systems

سه‌گانه می‌نامیم. طرح با پارامترهای $t = ۲, k = ۳, \lambda = ۱$ با n نقطه را سیستم سه‌گانه استاینر از مرتبه n می‌نامیم و با $STS(n)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۲. سیستم سه‌گانه استاینر از مرتبه n وجود دارد اگر و تنها اگر $n \equiv ۱,۳ (mod\ ۶)$. [۱۱]

۱.۱.۲ ساختار بوس : $n \equiv ۳\ (mod\ ۶)$

فرض $n = ۶k+۳$ و $(Q, \circ)$ شبه‌گروه تعویض‌پذیر خودتوان از مرتبه $۲k+۱$ باشد. $S = Q \times \{۱, ۲, ۳\}$ تعریف می‌کنیم. اعضای S را با x_i که، $x \in Q$ و $i \in \{۱, ۲, ۳\}$، مشخص کرده و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مدل ۱ : $۱ \le i \le ۲k + ۱,\ \{i_۱, i_۲, i_۳\} \in \mathrm{B}$

مدل ۲ : $۱ \le i < j \le ۲k + ۱,\ \{i_۱, j_۱, (i \circ j)_۲\}, \{i_۲, j_۲, (i \circ j)_۳\}, \{i_۳, j_۳, (i \circ j)_۱\} \in \mathrm{B}$

(S,B) فوق سیستم سه‌گانه استاینر از مرتبه $۶k + ۳$ است. این ساختار را بوس[۳] می‌نامیم.[۱۱]

۲.۱.۲ ساختار اسکولم : $n \equiv ۱\ (mod\ ۶)$

فرض $n = ۶k + ۱$ و $(Q, \circ)$ شبه‌گروه تعویض‌پذیر نیم خودتوان از مرتبه $۲k$ باشد و تعریف می‌کنیم

$$S = \{\infty\} \cup (Q \times \{۱, ۲, ۳\})$$

اعضای S را با x_i که، $x \in Q$ و ،$i \in \{۱, ۲, ۳\}$ مشخص کرده و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مدل ۱ : $۱ \le i \le k,\ \{i_۱, i_۲, i_۳\} \in \mathrm{B}$

مدل ۲ : $۱ \le i \le k,\ \{\infty, (k+i)_۱, i_۲\}, \{\infty, (k+i)_۲, i_۳\}, \{\infty, (k+i)_۳, i_۱\} \in \mathrm{B}$

مدل ۳ : $۱ \le i < j \le ۲k,\ \{i_۱, j_۱, (i \circ j)_۲\}, \{i_۲, j_۲, (i \circ j)_۳\}, \{i_۳, j_۳, (i \circ j)_۱\} \in \mathrm{B}$

(S,B) فوق سیستم سه‌گانه استاینر از مرتبه $۶k + ۱$ است. این ساختار را اسکولم[۴] می‌نامیم.[۱۱]

در بالا سیستم سه‌گانه استاینر از مرتبه $n \equiv ۱, ۳\ (mod\ ۶)$ را معرفی کردیم. اگرچه $STS(۶k+۵)$ وجود ندارد، ساختار بسیار نزدیک به آن را می‌سازیم.

طرح متعادل زوجی یا **PBD** [۵] جفت مرتب (S,B) است که S مجموعه‌ای متناهی از نقاط و B اجتماعی از زیرمجموعه‌های S به نام بلوک می‌باشند به طوری که هر جفت از اعضای مجزای S باهم به طور دقیق در یک بلوک از B وجود دارند. وقتی $|S| = n$ آن را با PBD(n) نشان می‌دهیم.

برای $n \equiv ۵\ (mod\ ۶)$ یک PBD از مرتبه n با یک بلوک از اندازه پنج و بقیه از اندازه سه به نام ۳-بلوک‌ها، می‌سازیم.

[۳] Bose

[۴] Skolem

[۵] Pairwise Balanced Design

۳.۱.۲ ساختار $n = ۶k + ۵$

$(Q, \circ)$ را شبه‌گروه تعویض‌پذیر خودتوان از مرتبه $۲k+۱$ و α را جایگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(۱,۲)(۲,۳)\ldots(۲k-۱,۲k)(۲k+۱)$$

$S = \{\infty_۱, \infty_۲\} \cup (Q \times \{۱,۲,۳\})$ قرار دهید، عضو دلخواه $Q \times \{۱,۲,۳\}$ را با x_i نشان می‌دهیم که $x \in Q$ و $i \in \{۱,۲,۳\}$. $\mathbf{B}$ شامل بلوک‌های زیر است:

مدل ۱ : $\{\infty_۱, \infty_۲, (۲k+۱)_۱, (۲k+۱)_۲, (۲k+۱)_۳\} \in \mathbf{B}$

مدل ۲ : $۱ \leq i \leq k, \{\infty_۱, (۲i-۱)_۱, (۲i-۱)_۲\}, \{\infty_۱, (۲i-۱)_۳, (۲i)_۱\}, \{\infty_۱, (۲i)_۲, (۲i)_۳\},$
$\{\infty_۲, (۲i-۱)_۲, (۲i-۱)_۳\}, \{\infty_۲, (۲i)_۱, (۲i)_۲\}, \{\infty_۲, (۲i-۱)_۱, (۲i)_۳\} \in \mathbf{B}$

مدل ۳ : $۱ \leq i < j \leq ۲k+۱, \{i_۱, j_۱, (i\circ j)_۲\}, \{i_۲, j_۲, (i \circ j)_۳\}, \{i_۳, j_۳, (\alpha(i\circ j))_۱\} \in \mathbf{B}$

پس $(S,\mathbf{B})$ یک $PBD(۶k+۵)$ به طور دقیق با یک بلوک از اندازه پنج و بقیه از اندازه سه است.

برای نتیجه‌گیری این بخش به بعضی سیستم‌های سه‌گانه استاینر که شامل سیستم سه‌گانه استاینر دیگری است، نیاز داریم که آن را زیرسیستم می‌نامند.

قضیه ۴.۱.۲. [۳]

(i) برای هردو عدد صحیح $n, m \equiv ۱,۳ (mod ۶)$ که $n \geq (۲m+۱)$، $STS(n)$ شامل زیرسیستم $STS(m)$ وجود دارد.

(ii) برای هردو عدد صحیح $n, m \equiv ۵ (mod ۶)$ که $n \geq (۲m+۱)$، $PBD(n)$ شامل $PBD(m)$ وجود دارد.

شبه‌گروه استاینر $(Q, \circ)$ شبه‌گروهی تعویض‌پذیر است، هرگاه برای هر $i, j \in Q$ داشته باشیم $i \circ i = i$ و $(i \circ j) \circ j = i$.

سیستم سه‌گانه استاینری مفروض است. شبه‌گروه استاینری به وسیله دستگاه $x \circ y = z$ می‌سازیم که $\{x, y, z\}$ بلوکی از STS یا $x = y = z$ باشد. همچنین PBD با بلوکی از اندازه پنج و بقیه از اندازه سه و شبه‌گروه تعویض‌پذیر خودتوان از مرتبه پنج مفروض است، $(Q', \circ')$، شبه‌گروه تعویض‌پذیر خودتوانی به وسیله دستگاه $x \circ y = z$ می‌سازیم که $\{x, y, z\}$ بلوکی سه عضوی از PBD یا $x = y = z$ و $x \circ y = x \circ' y$ باشد که $\{x, y\}$ هردو در بلوک اندازه پنج هستند. لذا گزاره زیر را داریم.

گزاره ۵.۱.۲. برای هر عدد صحیح فرد n، $n \neq ۵$، شبه‌گروه تعویض‌پذیر خودتوانی از مرتبه n شامل زیر شبه‌گروهی از مرتبه سه، وجود دارد.

۲.۲ عدد b -رنگی گراف‌های کنسر

در این بخش $\varphi(K(۲k+۱,k))$ را برای هر k و $\varphi(K(n,۲))$ را برای هر n مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. برای هر عدد صحیح $k \geq ۳$،

$$\varphi(K(۲k+۱,k)) = k+۲.$$

برهان. می‌دانیم

$$\Delta(K(۲k+۱,k)) = k+۱$$

لذا طبق نامساوی ۱.۲ داریم

$$\varphi(K(۲k+۱,k)) \leq k+۲.$$

برای اثبات تساوی، b-رنگ‌آمیزی برای $K(۲k+۱,k)$ با $k+۲$ رنگ به شرح زیر ارایه می‌دهیم. برای i که $۱ \leq i \leq k$، کلاس رنگی i را شامل مجموعه راس‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$\{\{k+۱,k+۲,\dots,۲k+۱\}\setminus\{k+i\}\}\cup\{\{۱,۲,\dots,k\}\setminus\{i\}\cup\{k+j\} \mid ۱\leq j\leq k+۱, j\neq i\}$$

کلاس رنگی $k+۱$ شامل مجموعه راس‌های

$$\{k+۱,k+۲,\dots,۲k\}\cup\{\{۱,۲,\dots,k\}\setminus\{j\}\cup\{k+j\} \mid ۱\leq j\leq k\}$$

و کلاس رنگی $k+۲$ شامل مجموعه $\{\{۱,۲,\dots,k\}\}$ است.

حال رنگ‌آمیزی را کامل می‌کنیم. فرض $A \subseteq \{۱,۲,\dots,۲k+۱\}$ راسی متفاوت از راس‌های کلاس‌های رنگی فوق باشد. اگر $۲k+۱ \in A$، عدد صحیح $i \in A^c \cap \{۱,۲,\dots,k\}$ را انتخاب کرده و A را به کلاس رنگی i اضافه می‌کنیم. اگر $۲k+۱ \notin A$ و $۲k \in A$ آنگاه عدد صحیح $i \in A^c\cap\{۱,۲,\dots,k\}, i\neq k$ را انتخاب کرده و A را به کلاس رنگی i اضافه می‌کنیم. اگر $۲k, ۲k+۱ \notin A$ آنگاه A را به کلاس رنگی $k+۲$ اضافه می‌کنیم. پس راس‌ها در هر کلاس رنگی دو به دو اشتراک ناتهی دارند. لذا چنین رنگ‌آمیزی مجاز است.

در این رنگ‌آمیزی مجاز مجموعه راس‌های

$$\{\{k+۱,k+۲,\dots,۲k+۱\}\setminus\{k+i\},\ ۱\leq i\leq k+۱, \{۱,۲,\dots,k\}\}$$

سیستمی b-غالب را تشکیل می‌دهند. زیرا راس $\{۱,۲,\dots,k\}$ برای هر $۱\leq i\leq k+۱$ مجاور با همه راس‌های $\{k+۱,k+۲,\dots,۲k+۱\}\setminus\{k+i\}$ است.
از طرفی برای عدد صحیح ثابت $۱\leq i_۰\leq k+۱$ راس $\{k+۱,k+۲,\dots,۲k+۱\}\setminus\{k+i_۰\}$ مجاور با راس‌های $\{۱,۲,\dots,k\}$ و $\{۱,۲,\dots,k\}\setminus\{i\}\cup\{k+i_۰\}$ که $۱\leq i\leq k$، $i\neq i_۰$، بوده و برای $۱\leq i_۰\leq k$، با راس $\{۱,۲,\dots,k\}\setminus\{i_۰\}\cup\{k+i_۰\}$ مجاور است. لذا در رنگ‌آمیزی فوق هر کلاس رنگی دارای راسی است که در بقیه کلاس‌های رنگی دارای همسایه خواهد بود. □

تذکر ۱. با توجه به تعریف $STS(n)$، هر سیستم سه‌گانه استاینر از مرتبه n معادل یک تجزیه شده یالی از گراف کامل K_n به مثلث‌هاست.

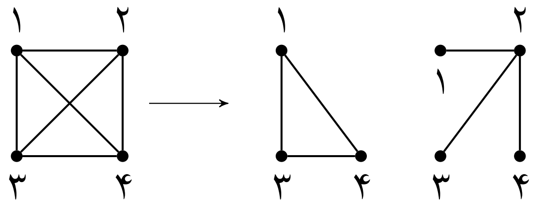
تذکر ۲. هر راس در $K(n,۲)$ که زیرمجموعه ۲-عضوی از مجموعه $\{۱,۲,\dots,n\}$ می‌باشد، مطابق با یالی در گراف کامل K_n با مجموعه راس‌های $\{۱,۲,\dots,n\}$ است. از اینرو دو راس از $K(n,۲)$ مجاور هستند اگر و تنها اگر یال‌های نظیرشان در K_n مجاور نباشند.

تذکر ۳. اگر A زیرمجموعه‌ای مستقل از راس‌های $K(n,۲)$ باشد آنگاه همه راس‌های A یا دو به دو عضوی مشترک دارند، مانند a، یا $A = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$، برای $a,b,c \in \{۱,۲,\dots,n\}$ خواهد بود. به عبارت دیگر مجموعه‌های مستقل از راس‌های $K(n,۲)$، مطابق با زیرگراف ستاره با مرکزیت a یا زیرگراف مثلثی، در گراف K_n می‌باشد. مجموعه‌های مستقل مطابق با زیرگراف ستاره را کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکزیت a و مطابق با زیرگراف مثلثی را کلاس رنگی مثلثی می‌نامیم. ازطرفی برای سهولت مجموعه مستقل $\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ را با $\{a,b,c\}$ نمایش می‌دهیم. چون هر رنگ‌آمیزی مجاز افرازی از راس‌ها به مجموعه‌های مستقل است، هر رنگ‌آمیزی مجاز از $K(n,۲)$ را می‌توان به عنوان تجزیه شده یالی از گراف کامل K_n به زیرگراف‌های ستاره و مثلث در نظر گرفت.

مثال ۲.۲.۲. گراف کنسر $K(۴,۲)$ را در نظر می‌گیریم.

$$V(K(۴,۲)) = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۴)\}$$

گراف کامل $K_۴$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه یالی کرد



لذا طبق تذکر ۳ گراف کنسر $K(۴,۲)$ را با دو رنگ زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.

$$[۱] = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\}$$

$$[۲] = \{(۲,۳),(۲,۴),(۳,۴)\}$$

تعریف ۳.۲.۲. مجموعه‌ای از راس‌های S را مجموعه غالب می‌نامیم هرگاه هر راسی که در S نیست، همسایه‌ای در S داشته باشد. مجموعه غالب S در G را مجموعه غالب مستقل می‌نامیم هرگاه راس‌های S دو به دو نامجاور باشند. گزاره‌ای در مورد مجموعه‌های غالب گراف‌های کنسر در زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۴.۲.۲. $S = \{۱,۲,\dots,n\}$را درنظر می‌گیریم. اگر T زیرمجموعه‌ای از S با اندازه $۲k-۱$ باشد، آنگاه مجموعه همه زیرمجموعه‌های kـعضوی T مجموعه‌ای غالب مستقل در $K(n,k)$ تشکیل می‌دهند.

برهان. با توجه به فرض داریم $T \subseteq S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $|T| = ۲k - ۱$، و A را راسی در $K(n, k)$ در نظر می‌گیریم که $A \nsubseteq T$. بنابراین $|A \cap T| \leq k - ۱$ و زیرمجموعه kـعضوی از T مانند B موجود است که $A \cap B = \emptyset$. لذا راس A و B در $K(n, k)$ مجاور هستند. به طور بدیهی هر دو زیرمجموعه kـعضوی از T با هم اشتراک دارند، بنابراین آنها در $K(n, k)$ مجاور نیستند. $\square$

قضیه ۵.۲.۲. اگر $(S, \mathbf{B})$ یک سیستم استاینر $(۱, ۱ - ۲k, n) - k$ باشد، آنگاه $\varphi(K(n, k)) \geq |\mathbf{B}|$.

برهان. فرض $\mathbf{B} = \{B_۱, B_۲, \ldots, B_{|\mathbf{B}|}\}$ باشد. برای هر $۱ \leq i \leq |\mathbf{B}|$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های kـعضوی B_i را به عنوان کلاس رنگی i تعریف می‌کنیم. چون $|B_i| = ۲k - ۱$، با توجه به گزاره ۴.۲.۲، هر کلاس رنگی i مجموعه‌ای مستقل از راس‌ها می‌باشند، لذا این افراز رنگ‌آمیزی مجازی از $K(n, k)$ است. از طرفی با توجه به گزاره، هر کلاس رنگی i مجموعه‌ای غالب است. لذا هر عضو از کلاس رنگی j همسایه‌ای در همه کلاس‌های رنگی دیگر دارد. از اینرو، این افراز b-رنگ‌آمیزی از $K(n, k)$ توسط $|\mathbf{B}|$ رنگ خواهد بود. $\square$

لم ۶.۲.۲. فرض‌کنید c رنگ‌آمیزی مجازی از $K(n, ۲)$ و $A_۱, A_۲, \ldots, A_t$ کلاس‌های رنگی ستاره‌ای به ترتیب با مرکزیت‌های $a_۱, a_۲, \ldots, a_t$ باشند که $|A_i| \geq ۳$ برای هر $۱ \leq i \leq t$ است. آنگاه c یک b-رنگ‌آمیزی از $K(n, ۲)$ است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند.

(i) $a_۱, a_۲ \ldots, a_t$ متمایز هستند.

(ii) هر زیرمجموعه ۲-عضوی از مجموعه $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_t\}$ در $\cup_{k=۱}^{t} A_k$ قرار دارد.

(iii) برای هر $۱ \leq i \leq t$، موجود است $x_i \notin \{a_۱, a_۲, \ldots, a_t\}$ به‌طوری که $\{a_i, x_i\} \in A_i$.

برهان. فرض c، b-رنگ‌آمیزی مجازی از $K(n, ۲)$ باشد. فرض $a_i = a_j$ برای $i \neq j$ باشد. پس $A_i \cup A_j$ مجموعه‌ای مستقل در $K(n, ۲)$ خواهد بود. یعنی کلاس رنگی A_i فاقد راسی است که همسایه‌ای در کلاس رنگی A_j داشته باشد و این تناقض با b-رنگ‌آمیزی c دارد. پس $a_i \neq a_j$ برای هر $۱ \leq i \neq j \leq t$.

حال زیرمجموعه ۲-عضوی دلخواه $\{a_i, a_j\}$ از مجموعه $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_t\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\{a_i, a_j\} \notin \cup_{k=۱}^{t} A_k$، آنگاه این راس در کلاس رنگی مثلثی مانند $\{a_i, a_j, b\}$ قرار دارد. در این کلاس رنگی، راس‌های $\{a_i, a_j\}$ و $\{a_i, b\}$ راس‌های b-غالب نیستند چون آنها در کلاس رنگی A_i همسایه‌ای ندارند. راس $\{a_j, b\}$ هم راس b-غالب نیست چون در کلاس رنگی A_j همسایه‌ای ندارد و این یک تناقض است. بنابراین برای همه i, jها $\{a_i, a_j\} \in \cup_{k=۱}^{t} A_k$ است. چون در هر کلاس رنگی ستاره‌ای A_i باید راس b-غالب داشته باشیم، شرط (iii) برقرار است.

حال فرض که c رنگ‌آمیزی مجاز از $K(n, ۲)$ باشد که در شرایط (i)، (ii) و (iii) صدق می‌کند. کافیست نشان دهیم که در هر کلاس رنگی c راسی b-غالب داریم.

در کلاس رنگی ستاره‌ای A_i که $۱ \leq i \leq t$ راس $\{a_i, x_i\}$ راسی b-غالب است چون در هر کلاس رنگی A_j که $j \neq i$، راس $\{a_j, y\}$ که $y \neq a_i, x_i$ وجود دارد. ازطرفی با توجه به گزاره ۴.۲.۲، هر کلاس رنگی مثلثی مجموعه‌ای غالب است. بنابراین، راس $\{a_i, x_i\}$ همسایه‌ای در همه کلاس‌های رنگی دارد.
ازطرفی برای هر کلاس رنگی مثلثی $\{a, b, c\}$، با توجه به شرط (ii) داریم

$$|\{a, b, c\} \cap \{a_۱, a_۲, \dots, a_t\}| \leq ۱.$$

بنابراین حداقل دو عضو مانند a و b که $a, b \notin \{a_۱, a_۲, \dots, a_t\}$ وجود دارد. چون $|A_i| \geq ۳$، راس $\{a, b\}$ در همه کلاس‌های رنگی ستاره‌ای دارای همسایه است. از طرفی با توجه به گزاره ۴.۲.۲ هر کلاس رنگی مثلثی مجموعه‌ای غالب است. پس راس $\{a, b\}$ راسی b-غالب است. □

گزاره ۷.۲.۲. اگر $n \equiv ۵ \ (mod\ ۶)$ آنگاه $\varphi(K(n, ۲)) \geq \frac{n(n-۱)}{۶} - \frac{۱}{۳}$.

برهان. اگر $n \equiv ۵ \ (mod\ ۶)$ آنگاه باتوجه به ساختار $۶k + ۵$ بخش ۳.۱.۱، PBD(n) با یک بلوک از اندازه پنج مانند $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و بلوک‌های ۳-عضوی آن را در نظر می‌گیریم. در این ساختار تعداد ۳-بلوک‌ها $\frac{n(n-۱)}{۶} - \frac{۱۰}{۳}$ است. حال b-رنگ‌آمیزی $K(n, ۲)$ را ثابت می‌کنیم. هر بلوک ۳-عضوی را به عنوان کلاس رنگی مثلثی در نظر می‌گیریم و بقیه کلاس‌های رنگی را به صورت

$$\{\{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۴\}, \{۱, ۵\}\}, \{\{۲, ۳\}, \{۲, ۴\}, \{۲, ۵\}\}, \{\{۳, ۴\}, \{۳, ۵\}, \{۴, ۵\}\}$$

تعریف می‌کنیم. این یک تجزیه شده یالی از گراف کامل K_n به ستاره‌ها و مثلث‌ها است. پس طبق تذکر ۳ این رنگ‌آمیزی مجازی از $K(n, ۲)$ است. بعلاوه، این رنگ‌آمیزی در شرایط لم ۶.۲.۲ صدق می‌کند، پس b-رنگ‌آمیزی از $K(n, ۲)$ داریم. بنابراین

$$\varphi(K(n, ۲)) \geq \frac{n(n-۱)}{۶} - \frac{۱۰}{۳} + ۳ = \frac{n(n-۱)}{۶} - \frac{۱}{۳}.$$

□

قضیه ۸.۲.۲. برای هر عدد صحیح مثبت n که $n \neq ۸$ داریم:

$$\varphi(K(n, ۲)) = \begin{cases} \lfloor \frac{(n-۱)(n-۲)}{۶} \rfloor + ۳ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \lfloor \frac{n(n-۱)}{۶} \rfloor & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

برهان. حالت ۱. n زوج باشد.
ابتدا کران بالایی برای $\varphi(K(n, ۲))$ پیدا می‌کنیم. فرض c یک b-رنگ‌آمیزی از $K(n, ۲)$ به وسیله φ رنگ و t کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکزیت $۱, \dots, t$ به‌ترتیب با اندازه $n_۱, \dots, n_t$ باشند. آنگاه

$$|V(K(n, ۲))| = \binom{n}{۲} = \sum_{i=۱}^{t} n_i + ۳(\varphi - t). \qquad (۲.۲)$$

باتوجه به تذکر ۳، رنگ‌آمیزی c معادل با تجزیه شده یالی از گراف کامل K_n به ستاره‌ها و مثلث‌ها است. برای هر راس $i \in V(K_n)$، تعداد یال‌های متلاقی با i در مثلث‌های تجزیه شده زوج است. چون

n زوج است، یک یال متلاقی با i در زیرگراف ستاره تجزیه شده، خواهیم داشت. بنابراین، برای هر $t+1 \leq i \leq n$ یک راس در $K(n,2)$ شامل i در کلاس رنگی ستاره‌ای ۱ تا t وجود دارد. بعلاوه، با توجه به لم ۶.۲.۲، هر زیرمجموعه ۲-عضوی از مجموعه $\{1,2,\dots,t\}$ در کلاس رنگی ستاره‌ای قرار دارند. بنابراین، داریم

$$\sum_{i=1}^{t} n_i \geq (n-t) + \frac{t(t-1)}{2} = n + \frac{t(t-3)}{2}.$$

از اینرو

$$\binom{n}{2} \geq n + \frac{t(t-9)}{2} + 3\varphi.$$

پس

$$\varphi \leq \frac{n(n-3)}{6} - \frac{t(t-9)}{6}.$$

مینیمم عبارت $t(t-9)$ در $t=4$ و $t=5$ اتفاق می‌افتد. بنابراین،

$$\varphi \leq \lfloor \frac{n(n-3)}{6} + \frac{10}{3} \rfloor = \lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{6} \rfloor + 3. \qquad (3.2)$$

حال کران پایینی برای $\varphi(K(n,2))$ می‌یابیم.

حالت ۱.۱. $n=6k$.

$STS(6k-3)$ با ساختار بوس را در نظر می‌گیریم. چنان‌چه که در بخش ۱.۱.۱ نشان داده شد، در این ساختار $2k-1$ بلوک از هم جدا در مدل ۱ وجود دارند.

بلوک‌ها را با $\{a_1,b_1,c_1\},\{a_2,b_2,c_2\},\dots,\{a_{2k-1},b_{2k-1},c_{2k-1}\}$ درنظر می‌گیریم. با توجه به تذکر ۱، این STS یک تجزیه شده یالی از گراف کامل K_{n-3} به مثلث‌ها است. حالا سه نقطه a,b,c را اضافه کرده و $K(n,2)$ را با $3 + \frac{n(n-3)}{6} = \varphi_0$ رنگ، رنگ‌آمیزی مجاز کرده‌ایم یا به طور هم‌ارز یال‌های گراف کامل K_n را به φ_0 ستاره و مثلث، تجزیه می‌کنیم.

هر بلوک از مدل ۲ در $STS(6k-3)$ را به عنوان کلاس رنگی مثلثی در نظر می‌گیریم. کلاس‌های رنگی دیگر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

کلاس رنگی A شامل

$$\{a,c_1\},\{a,c_2\},\dots,\{a,c_{2k-1}\},\{a,b\}.$$

کلاس رنگی B شامل

$$\{b,a_1\},\{b,a_2\},\dots,\{b,a_{2k-1}\},\{b,c\}.$$

کلاس رنگی C شامل

$$\{c,b_1\},\{c,b_2\},\dots,\{c,b_{2k-1}\},\{c,a\}.$$

همچنین برای هر i که $۱ \leq i \leq ۲k-۱$، سه کلاس رنگی مثلثی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\{a, a_i, b_i\}, \{b, b_i, c_i\}, \{c, c_i, a_i\}.$$

در $STS(۶k-۳)$ تعداد بلوک‌ها $\frac{(n-۳)(n-۴)}{۶}$ است، که $\frac{n-۳}{۳} = ۲k-۱$ بلوک در مدل ۱ هستند. بنابراین، تعداد کلاس‌های رنگی در رنگ‌آمیزی مشخص فوق

$$\frac{(n-۳)(n-۴)}{۶} - \frac{n-۳}{۳} + ۳ + ۳\frac{n-۳}{۳} = \frac{n(n-۳)}{۶} + ۳ = \varphi_۰$$

است.

برای $n = ۶$، واضح است که این رنگ‌آمیزی یک b-رنگ‌آمیزی از $K(۶,۲)$ توسط شش رنگ است. برای $k \geq ۲$، تنها سه کلاس رنگی استارلایک داریم و این رنگ‌آمیزی در شرایط لم ۶.۲.۲ صدق می‌کند، پس رنگ‌آمیزی مفروض b-رنگ‌آمیزی از $K(n,۲)$ است. لذا

$$\varphi \geq \frac{n(n-۳)}{۶} + ۳ = \lfloor \frac{(n-۱)(n-۲)}{۶} \rfloor + ۳.$$

حالت ۱.۲ . $k \geq ۲$, $n = ۶k+۲$ یا $n = ۶k+۴$.

$STS(n-۱)$ را با ساختار مفروض بوس یا اسکولم بخش ۱.۱.۰ در نظر می‌گیریم. از طرفی در این ساختار سه بلوک از هم جدا $\{a,b,c\}, \{a',b',c'\}, \{a'',b'',c''\}$ را مطرح می‌کنیم که $\{a,a',a''\}$ خود یک بلوک است. حال نقطه جدید d را اضافه می‌کنیم و b-رنگ‌آمیزی برای گراف کنسر $K(n,۲)$ با $\varphi_۰ = \frac{(n-۱)(n-۲)}{۶} + ۳$ رنگ به شرح زیر ارایه می‌دهیم.

هر بلوک در $STS(n-۱)$ بجز چهار بلوک $\{a,b,c\}, \{a',b',c'\}, \{a'',b'',c''\}, \{a,a',a''\}$ را به عنوان کلاس رنگی در نظر می‌گیریم و کلاس‌های رنگی زیر را اضافه می‌کنیم.

کلاس رنگی A شامل

$$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,a'\}.$$

کلاس رنگی Bشامل

$$\{a',b'\}, \{a',c'\}, \{a',a''\}.$$

کلاس رنگی C شامل

$$\{a'',b''\}, \{a'',c''\}, \{a'',a\}.$$

کلاس رنگی D شامل $\{d,x\}$ که $x \notin \{b,b',b'',c,c',c''\}$.

در آخر سه کلاس رنگی مثلثی $\{b,c,d\}, \{b',c',d\}, \{b'',c'',d\}$ را اضافه می‌کنیم. تعداد این کلاس‌های رنگی برابر است با $\frac{(n-۱)(n-۲)}{۶} - ۴ + ۴ + ۳ = \frac{(n-۱)(n-۲)}{۶} + ۳ = \varphi_۰$.

تنها چهار کلاس رنگی ستاره‌ای داریم و این رنگ‌آمیزی در شرایط لم (۶.۲.۲) صدق می‌کند. لذا، رنگ‌آمیزی مفروض یک b-رنگ‌آمیزی از $K(n,۲)$ می‌باشد. بنابراین، $\varphi \geq \lfloor \frac{(n-۱)(n-۲)}{۶} \rfloor + ۳$.

حالت ۲. n فرد باشد.

ابتدا کران بالایی برای $\varphi(K(n,2))$ پیدا می‌کنیم. فرض c یک b-رنگ‌آمیزی از گراف $K(n,2)$ با $\varphi=\varphi(K(n,2))$ رنگ و t کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکزیت $1,2,\ldots,t$ به‌ترتیب از اندازه $n_1,\ldots,n_t$ باشد. آنگاه،

$$|V(K(n,2))| = \binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{t} n_i + 3(\varphi - t) \tag{۴.۲}$$

با توجه به لم ۶.۲.۲، هر زیر مجموعه ۲-عضوی از مجموعه $\{1,2,\ldots,t\}$ در کلاس رنگی ۱ تا t قرار دارد و در کلاس رنگی i باید راس b-غالبی مانند $\{i,x\}$ که $x\in\{t+1,t+2,\ldots,n\}$ داشته باشیم. لذا،

$$\sum_{i=1}^{t} n_i \geq \frac{t(t-1)}{2} + t = \frac{t(t+1)}{2}.$$

بنابراین،

$$\binom{n}{2} \geq 3\varphi + \frac{t(t+1)}{2} - 3t = 3\varphi + \frac{t(t-5)}{2}.$$

پس،

$$\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6} - \frac{t(t-5)}{6}.$$

مینیمم عبارت $t(t-5)$ در $t=2$ و $t=3$ اتفاق می‌افتد. لذا $\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6}+1$.

حال ثابت می‌کنیم $\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6}$. فرض $\varphi = \frac{n(n-1)}{6}+1$، که $t=2$ یا $t=3$ است. برای هر راس $i\in V(K_n)$، تعداد یال‌های متلاقی i در مثلث‌های تجزیه شده مقداری زوج است. چون n فرد می‌باشد، تعداد یال‌های متلاقی i در ستاره‌های تجزیه شده هم زوج خواهد شد. به طور هم‌ارز، در b-رنگ‌آمیزی از $K(n,2)$ تعداد راس‌های شامل i در کلاس‌های رنگی ستاره‌ای تعدادی زوج هستند.

اگر $t=3$ آنگاه با توجه به شرایط (ii) و (iii) لم ۶.۲.۲، راس‌های $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ در $K(n,2)$ در کلاس‌های رنگی ستاره‌ای با مرکزیت ۱ و ۲ و یا ۳ وجود دارند و برای هر i که $1\leq i\leq 3$، راس $\{i,x\}$ در کلاس‌های رنگی ستاره‌ای وجود دارد که $x\neq 1,2,3$. پس باتوجه به بحث فوق، برای هر i که $1\leq i\leq 3$، حداقل دو راس $\{i,x\}$ و $\{i,y\}$، که $x,y\neq 1,2,3$، در کلاسهای رنگی ستاره‌ای وجود دارند. بنابراین، $\sum_{i=1}^{3} n_i \geq 3+2\times 3 = 9$. پس با توجه به رابطه ۴.۲ داریم:

$$\binom{n}{2} \geq 9 + 3(\varphi - 3) = 3\varphi.$$

لذا، $\varphi \leq \frac{n(n-1)}{6}$، که تناقض با فرض دارد.

$t=2$ فرض می‌کنیم. با توجه به شرایط (ii) و (iii) لم ۶.۲.۲، کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکز ۱، شامل راس $\{1,2\}$ و حداقل یک راس بیشتر مانند راس $\{1,3\}$ است. چون تعداد یال‌های متلاقی i

در ستاره‌های تجزیه‌شده زوج است، لذا اگر راس $\{۱, i\}$ در $K(n, ۲)$ در کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکز ۱ وجود داشته باشد، آنگاه راس $\{۲, i\}$ در کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکز ۲ وجود خواهد داشت. اگر راس‌های $\{۲, ۳\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۲\}$ تنها راس‌ها در کلاس‌های رنگی ستاره‌ای باشند، آنگاه در این کلاس‌ها راس b-غالب موجود نیست. بنابراین، کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکز ۱ و در نتیجه، کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکز ۲ هریک شامل حداقل بیشتر از دو راس هستند. لذا، $\sum_{i=۱}^{۲} n_i \geq ۱ + ۲ \times ۳ = ۷$. بنابراین، با توجه به رابطه ۴.۲ داریم:

$$\binom{n}{۲} \geq ۷ + ۳(\varphi - ۲) = ۳\varphi + ۱.$$

پس $\frac{n(n-۱)}{۶} \leq \varphi$، که تناقض با فرض دارد.
بنابراین $\lfloor \frac{n(n-۱)}{۶} \rfloor \leq \varphi$. اگر $n \equiv ۱, ۳ (mod\ ۶)$ آنگاه $STS(n)$ وجود دارد. لذا باتوجه به گزاره ۴.۲.۲ داریم:

$$\varphi \geq \frac{n(n-۱)}{۶} - \frac{۱}{۳}.$$

در نتیجه

$$\varphi = \lfloor \frac{n(n-۱)}{۶} \rfloor.$$

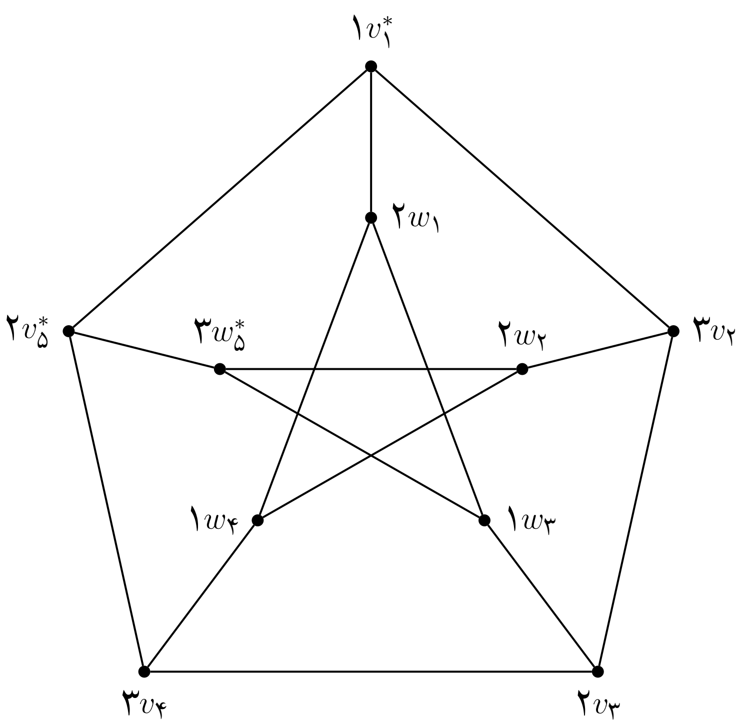
□

چون گراف پترسن گراف کنسر $K(۵, ۲)$ است، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۹.۲.۲. اگر P گراف پترسن باشد آنگاه $\varphi(P) = ۳$.

$$V(P) = \{v_۱ = \{۱, ۲\}, v_۲ = \{۳, ۵\}, v_۳ = \{۲, ۴\}, v_۴ = \{۱, ۵\}, v_۵ = \{۳, ۴\},$$

$$w_۱ = \{۴, ۵\}, w_۲ = \{۱, ۴\}, w_۳ = \{۱, ۳\}, w_۴ = \{۲, ۳\}, w_۵ = \{۲, ۵\}\}$$



راس‌های ستاره‌دار راس‌های b-غالب گراف P هستند.

گراف $K(۸,۲)$ استثنا است.

گزاره ۱۰.۲.۲. $\varphi(K(۸,۲)) = ۹$

برهان. برای اثبات این گزاره، اثبات حالت ۱ قضیه ۸.۲.۲ را در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه ۳.۲ داریم

$$\varphi(K(۸,۲)) \le ۱۰$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $t = ۴$ یا $t = ۵$. فرض b-رنگ‌آمیزی از $K(۸,۲)$ با ده رنگ موجود باشد و $A_۱, A_۲, \dots, A_t$ کلاس‌های رنگی ستاره‌ای به‌ترتیب با مرکزهای $۱,۲,\dots,t$ باشند.
اگر $t = ۴$ آنگاه با توجه به تساوی ۲.۲، $\sum_{i=۱}^{۴} n_i = ۱۰$. با توجه به شرایط (ii) و (iii) لم ۶.۲.۲، هر زیر مجموعه ۲-عضوی از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴\}$ در $\cup_{i=۱}^{۴} A_i$ قرار دارد و برای هر $۱ \le i \le ۴$ وجود دارد $x_i \notin \{۱,۲,۳,۴\}$ به‌طوری که $\{i,x_i\} \in A_i$. از طرفی $n-t$ و تعداد راس‌های شامل i در کلاس‌های رنگی مثلثی مقداری زوج هستند. پس حداقل دو راس $\{i,x_i\},\{i,y_i\}$ که $x_i,y_i \notin \{۱,۲,۳,۴\}$ در کلاس‌های رنگی ستاره‌ای وجود دارند. ازاینرو، $\sum_{i=۱}^{۴} n_i = ۱۰ \ge ۶+۴\times ۲ = ۱۴$ که تناقض است.
اگر $t = ۵$ آنگاه با توجه به تساوی ۲.۲، $\sum_{i=۱}^{۵} n_i = ۱۳$. از طرفی، شبیه بالا باتوجه به شرایط (ii) و (iii) لم ۶.۲.۲، $\sum_{i=۱}^{۵} n_i = ۱۳ \ge ۱۰ + ۵$، که تناقض است. پس $\varphi(K(۸,۲)) \le ۹$.
b-رنگ‌آمیزی از$K(۸,۲)$ با ۹ رنگ را ارایه می‌دهیم. ابتدا $STS(۷)$ را در نظر می‌گیریم و نقطه‌ای از آن را

حذف می‌کنیم. تجزیه‌ای از $K_۶$ به چهار مثلث و ۱-فاکتور به نام $F = \{\{a_۱, b_۱\}, \{a_۲, b_۲\}, \{a_۳, b_۳\}\}$ باقی می‌ماند. در ادامه دو نقطه جدید a و b را اضافه می‌کنیم و مثلث‌های تجزیه‌شده گراف $K_۶$ را به عنوان کلاس‌های رنگی مثلثی درنظر گرفته و کلاس‌های رنگی مثلثی

$$\{a, a_۱, b_۱\}, \{a, a_۲, b_۲\}, \{b, a_۳, b_۳\}$$

و کلاس‌های رنگی ستاره‌ای

$$\{\{a, a_۳\}, \{a, b_۳\}, \{a, b\}\}, \{\{b, a_۱\}, \{b, b_۱\}, \{b, a_۲\}, \{b, b_۲\}\}$$

را تعریف می‌کنیم.
این رنگ‌آمیزی مجازی از $K(۸, ۲)$ است که در شرایط لم ۶.۲.۲ صدق می‌کند، پس b-رنگ‌آمیزی با نه رنگ داریم. $\square$

لم ۱۱.۲.۲. فرض s عدد صحیح مثبت باشد. اگر $r \geq ۲s + ۱$، آنگاه تابع $g : \binom{[r]}{s} \longrightarrow \binom{[r]}{۲s}$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند.

(i) برای هر مجموعه $A \in \binom{[r]}{s}$ داریم $A \subset g(A)$.

(ii) برای هر دو مجموعه $A, B \in \binom{[r]}{s}$ داریم $g(A) \neq g(B)$ هرگاه $A \cap B = \emptyset$.

که علامت $[m]$ نشان دهنده مجموعه $\{۰, ۱, ۲, \ldots, m-۱\}$ و علامت $\binom{X}{n}$ نشان دهنده همه زیرمجموعه‌های n -عضوی از مجموعه X است.

برهان. برای هر مجموعه $A \in \binom{[r]}{s}$، فرض $d(A)$ کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که

$$|A \cup \{minA + ۱, minA + ۲, \ldots, minA + d(A)\}| = ۲s.$$

که عبارت $min\ A$ یعنی کوچکترین عضو A و جمع‌ها به پیمانه r هستند. حال برای هر مجموعه $A \in \binom{[r]}{s}$، تعریف می‌کنیم

$$g(A) = A \cup \{minA + ۱, minA + ۲, \ldots, minA + d(A)\}.$$

برای هر $A \in \binom{[r]}{s}$ واضح است که $A \subset g(A)$. همچنین برای هر دو مجموعه $A, B \in \binom{[r]}{s}$، اگر $A \cap B = \emptyset$، آنگاه $minA \neq minB$. بدون کاستن از کلیت $minA > minB$ فرض می‌کنیم. چون $r \geq ۲s + ۱$ می‌توان نتیجه گرفت که $minA - ۱ \notin g(A)$. حال اگر $g(A) = g(B)$، آنگاه باید داشته باشیم $\{minA - ۱, minA\} \subseteq g(B) = g(A)$ که تناقض است. در نتیجه $g(A) \neq g(B)$. $\square$

قضیه ۱۲.۲.۲. فرض $n \geq ۳$ عددی صحیح باشد. اگر $m \geq ۲n$، آنگاه $\varphi(K(m, n)) \geq ۲\binom{\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor}{n}$.

برهان. برای $۲n \leq m \leq ۲n + ۱$ واضح است. لذا، فرض $m \geq ۲n + ۲$.
مجموعه های $X = \{۰, ۱, \ldots, \lfloor \frac{m}{۲} \rfloor - ۱\}$ و $Y = \{\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor, \lfloor \frac{m}{۲} \rfloor + ۱, \ldots, ۲\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor - ۱\}$ را تعریف

می‌کنیم. همچنین تابع دوسویی $\mathfrak{f} : X \longrightarrow Y$ را در نظر می‌گیریم که برای هر $x \in X$ ، $\mathfrak{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. نشان می‌دهیم که b-رنگ‌آمیزی $h : V(K(m,n)) \to \binom{[m]}{n}$ با $2\binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{n}$ رنگ وجود دارد. سه حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت (۱) m زوج و n فرد باشد ($m = 2r$ و $n = 2s+1$).

در این حالت داریم $X = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ و $Y = \{r, r+1, \ldots, 2r-1\}$. برای هر راس $A \in V(K(m,n))$ اگر $A \subseteq X$ یا $A \subseteq Y$ آنگاه $h(A) = A$ تعریف می‌کنیم. اگر $s+1 \leq |A \cap X| \leq 2s$ ($s+1 \leq |A \cap Y| \leq 2s$)، آنگاه $h(A) = B$ تعریف می‌کنیم که B، زیر مجموعه n-عضوی دلخواهی از Y (از X) است به طوری که $\mathfrak{f}(A \cap X) \cup (A \cap Y) \subseteq B$ ($(A \cap X) \cup \mathfrak{f}^{-1}(A \cap Y) \subseteq B$).

مجاز بودن رنگ‌آمیزی h را بررسی می‌کنیم. $2\binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{n}$ رنگ نیاز داریم. حال نشان می‌دهیم که هر راس $A \in V(K(m,n))$ که $A \subseteq X$ یا $A \subseteq Y$، راسی غالب است. بدون کاستن از کلیت، فرض $A \subseteq X$ باشد. $B \in V(K(m,n))$ که $B \subseteq X$ یا $B \subseteq Y$ را درنظر می‌گیریم. اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه واضح است که B همسایه‌ای از A است و همچنین $h(B) = B$. حال فرض کنید $A \cap B \neq \emptyset$ ($A \neq B$). کافی است نشان دهیم راس $C \in V(K(m,n))$ وجود دارد به‌طوری که C با A مجاور است و $h(C) = B$ می‌باشد. فرض $i \in B \setminus A$. مجموعه $C \stackrel{\text{def}}{=} \{i\} \cup \mathfrak{f}(B \setminus \{i\})$. از تعریف h داریم $h(C) = B$. پس h یک b-رنگ‌آمیزی است.

حالت (۲) m و n زوجند ($m = 2r$ و $n = 2s$).

در این حالت $X = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ و $Y = \{r, r+1, \ldots, 2r-1\}$ هستند. برای هر راس $A \in V(K(m,n))$ اگر $A \subseteq X$ یا $A \subseteq Y$، $h(A) = A$ تعریف می‌کنیم. اگر $s+1 \leq |A \cap X| < 2s$ ($s+1 \leq |A \cap Y| < 2s$)، آنگاه $h(A) \stackrel{\text{def}}{=} B$ که B زیرمجموعه n-عضوی دلخواهی از Y (از X) است چنان چه $\mathfrak{f}(A \cap X) \cup (A \cap Y) \subseteq B$ ($(A \cap X) \cup \mathfrak{f}^{-1}(A \cap Y) \subseteq B$).

اگر $|A \cap X| = |A \cap Y|$ و $A \cap X = \mathfrak{f}^{-1}(A \cap Y)$، آنگاه $h(A) \stackrel{\text{def}}{=} g(A \cap X)$ که $g : \binom{X}{s} \to \binom{X}{2s}$ تابعی است که در شرایط لم قبل صدق می‌کند. اگر $|A \cap X| = |A \cap Y|, A \cap X \neq \mathfrak{f}^{-1}(A \cap Y)$ و $min((A \cap X) \Delta \mathfrak{f}^{-1}(A \cap Y)) \in A \cap X$ ($min((A \cap X) \Delta \mathfrak{f}^{-1}(A \cap Y)) \in \mathfrak{f}^{-1}(A \cap Y)$)، آنگاه $h(A) \stackrel{\text{def}}{=} B$ که B زیر مجموعه n-عضوی دلخواهی از Y (از X) است که $\mathfrak{f}(A \cap X) \cup (A \cap Y) \subseteq B$ ($(A \cap X) \cup \mathfrak{f}^{-1}(A \cap y) \subseteq B$). مانند حالت یک، می‌توان نشان داد h یک b-رنگ‌آمیزی با $2\binom{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{n}$ رنگ است.

حالت (۳) m فرد است ($m = 2r+1$).

فرض $h : V(K(m-1,n)) \longrightarrow \binom{[m-1]}{n}$ یک b-رنگ‌آمیزی برای گراف کنسر $K(m-1,n)$ تعیین شده در حالت‌های مذکور باشد. حال h را با $h' : V(K(m,n)) \longrightarrow \binom{[m]}{n}$ ادامه می‌دهیم.

تعریف می‌کنیم:

$$h'(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h(A) & m-1 \notin A \\ \{m-n, m-n+1, \ldots, m-1\} & m-1 \in A. \end{cases}$$

واضح است که h' یک رنگ‌آمیزی مجازی برای گراف کنسر $K(m,n)$ است. همچنین هر راس $A \in V(K(m,n))$ که $A \subseteq X$ یا $A \subseteq Y$ راسی b-غالب است. بعلاوه راس

$$\{m-n, m-n+1, \ldots, m-1\}$$

هم راسی b-غالب برای کلاس رنگی جدید است. پس h'، b-رنگ‌آمیزی است. □

۳.۲ b-پیوستگی گراف $K(n,2)$

در این بخش ثابت می‌کنیم که برای $n \geq 17$، $K(n,2)$ گرافی b-پیوسته است.

لم ۱.۳.۲. **(a)** فرض $n = 6k+1$ یا $n = 6k+3$ و $(S,\mathbf{B})$ یک *STS(n)* باشد. همچنین فرض T زیرمجموعه‌ای از $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ و t تعداد بلوک‌های $\mathbf{B}$ بر روی نقاط T باشند که :

(i) $|T| = m \geq 3$

(ii) برای هر $i \in T$ وجود دارد $j \in T$ به طوری که عضو سوم بلوک شامل j, i در T نیست.

آنگاه b-رنگ‌آمیزی برای $K(n,2)$ با $(\frac{m(m-3)}{2} - 2t) - \varphi$ رنگ وجود دارد که $\varphi = \varphi(K(n,2))$.

(b) فرض کنید $n = 6k+5$ و $(S,\mathbf{B})$ طرح متعادل زوجی، *PBD(n)*، با یک بلوک از اندازه پنج مانند $\{1, 2, n, n-1, n-2\}$ و بقیه بلوک‌های ۳-عضوی باشند. فرض T زیرمجموعه‌ای از $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ و t تعداد بلوک‌های ۳-عضوی از $\mathbf{B}$ بر روی نقاط T باشند که:

(i) $|T| = m \geq 3$.

(ii) $1, 2 \in T$ و $n-2, n-1, n \notin T$.

(iii) برای هر $i \in T$ که $i \neq 1, 2$ وجود دارد $j \in T$ به طوری که عضو سوم بلوک شامل j, i در T نیست.

آنگاه b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K(n,2)$ با $(\frac{m(m-3)}{2} - 2t + 1) - \varphi$ رنگ وجود دارد که $\varphi = \varphi(K(n,2))$.

برهان. فرض c یک b-رنگ‌آمیزی از $K(n,2)$ توسط φ رنگ مطابق با STS(n) یا PBD(n) (قضیه ۵.۲.۲ و گزاره ۷.۲.۲ را ببینید) باشد.

در حالت $n = 6k+5$ مرکزیت کلاس‌های رنگی ستاره‌ای را روی نقاط ۱ و ۲ می‌سازیم.

$T=\{۱,۲,\ldots,m\}$ را فرض کنید. b-رنگ‌آمیزی c را در نظر می‌گیریم و همه کلاس‌های رنگی مثلثی شامل راس $\{i,j\}\subseteq T$ را حذف می‌کنیم.

(a). چون هر راس $\{i,j\}\subseteq T$ در یک کلاس رنگی مثلثی قرار دارد و به طور دقیق t مثلث بر روی نقاط T وجود دارند، تعداد کلاس‌های رنگی مثلثی حذف شده $\frac{m(m-۱)}{۲}-۳t+t$ است. m کلاس رنگی جدید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}[\, i\,;۳\leq i\leq m-۲\,]&=\{\{i,j\}\mid i+۱\leq j\leq m\},\\ [۱]&=\{\{۱,j\}\mid ۲\leq j\leq m-۲\},\\ [۲]&=\{\{۲,j\}\mid ۳\leq j\leq m-۱\},\\ [m-۱]&=\{\{m-۱,m\},\{m-۱,۱\}\},\\ [m]&=\{\{m,۱\},\{m,۲\}\}.\end{aligned}$$

اگر راس $\{i,x\}$ که $i\in T$ و $x\notin T$ در کلاس رنگی حذف شده باشد آنگاه این راس را به کلاس رنگی i اضافه می‌کنیم. این m کلاس رنگی جدید با کلاس‌های رنگی قبلی رنگ‌آمیزی مجاز جدیدی با $\varphi-(\frac{m(m-۱)}{۲}-۲t)+m$ رنگ برای گراف $K(n,۲)$ تشکیل می‌دهند.

(b). چون هر راس $\{i,j\}\subseteq T$ به‌جز $\{۱,۲\}$ در یک کلاس رنگی مثلثی قرار داشته و به طور دقیق t کلاس رنگی مثلثی بر روی نقاط T وجود دارد لذا تعداد مثلث‌های حذف شده $\frac{m(m-۱)}{۲}-۱-۳t+t$ است. حال $m-۲$ کلاس رنگی جدید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[\, i\,;۳\leq i\leq m\,]=\{\{i,j\}\mid i+۱\leq j\leq m\}\cup\{\{i,۱\},\{i,۲\}\}$$

و اگر راس $\{i,x\}$ که $i\in T$ و $x\notin T$ در کلاس رنگی حذف شده باشد آنگاه این راس را به کلاس رنگی i اضافه می‌کنیم. این $m-۲$ کلاس رنگی جدید با کلاس‌های رنگی قبلی رنگ‌آمیزی مجاز جدیدی با
$\varphi-(\frac{m(m-۱)}{۲}-۱-۲t)+m-۲$ رنگ ارایه می‌دهند.
رنگ‌آمیزی‌های تعیین شده در حالت‌های (a) و (b)، در شرایط لم ۶.۲.۲ صدق می‌کنند بنابراین یک b-رنگ‌آمیزی هستند.

□

لم ۲.۳.۲. فرض $n\geq ۱۳$ عددی فرد و $k=\lfloor n/۶\rfloor$ باشد. برای هر عدد فرد $۵\leq m\leq k+۵$ و برای هر $۰\leq t\leq\frac{۳m-۱۱}{۲}$ که $(m,t)\neq(۵,۲),(۷,۵),(k+۵,۰)$ وجود دارد $STS(n)$ یا $PBD(n)$ و مجموعه T که در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند.

برهان. $l=\lfloor n/۳\rfloor$ قرار دهید. با توجه به n، از ساختار بوس، ساختار اسکولم یا ساختار $۶k+۵$ در بخش ۱.۱.۰۱ و شبه‌گروه مثال ۱.۱.۰۲ استفاده می‌کنیم و STS(n) یا PBD(n) می‌سازیم.
اگر $t=۰$ آنگاه به آسانی می‌توان مجموعه T با پارامترهای (m,t) را پیدا کرد. فرض $۵\le m\le k+۵$ و فرد باشد.

(a) اگر $۱\le t\le \frac{m-۵}{۲}$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$T=\{l_۱,i_۱,(l-i)_۱\mid ۱\le i\le t\}\cup\{j_۱\mid t+۱\le j\le m-۴-t\}\cup\{(\sigma(l))_۲,۱_۳,(\sigma^{-۱}(k+۲)-۱)_۳\}$$

(b) اگر $\frac{m-۵}{۲}<t<m-۵$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$T=\{l_۱,i_۱,(l-i)_۱\mid ۱\le i\le \frac{m-۵}{۲}\}\cup\{(\sigma(l))_۲,(\sigma(۲(m-۵-t)))_۲,(\sigma(m-۵))_۲,(\sigma(۲l-m+۵))_۲\}$$

(c) اگر $m-۵\le t<۳(\frac{m-۵}{۲})$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$T=\{l_۱,i_۱,(l-i)_۱\mid ۱\le i\le \frac{m-۵}{۲}\}\cup\{(\sigma(l))_۲,(\sigma(۳(m-۵)-۲t))_۲,(\sigma(۲l-m+۵))_۲\}$$

(d) اگر $۳(\frac{m-۵}{۲})\le t\le ۲m-۱۱$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$T=\{l_۱,i_۱,(l-i)_۱\mid ۱\le i\le \frac{m-۵}{۲}\}\cup\{(\sigma(l))_۲,(\sigma(۱))_۲,(\sigma(l-۱))_۲,(\sigma(۴(m-۵)-۲t))_۲\}$$

مجموعه‌های T مشخص شده فوق در شرایط لم ۱.۳.۰۲ صدق می‌کنند. اگر $m\ge ۱۱$ باشد آنگاه $\frac{۳m-۱۱}{۲}\ge ۲m-۱۱$ پس برای هر $۱۱\le m\le k+۵$ و $۰\le t\le\frac{۳m-۱۱}{۲}$ تعریف شده‌ایم.
با توجه به ساختار فوق مجموعه T برای

$$(m=۹,۰\le t\le ۷),(m=۷,۰\le t\le ۳),(m,t)=(۵,۰)$$

وجود دارد.
برای $(m,t)=(۵,۱)$ فرض $T=\{۱_۱,(l-۱)_۱,(\sigma(l))_۲,۱_۲,(l-۱)_۲\}$.
برای $(m,t)=(۷,۴)$ فرض $T=\{۱_۱,(l-۱)_۱,۲_۱,(l-۲)_۱(\sigma(l))_۲,(\sigma(۱))_۲,(\sigma(l-۱))_۲\}$.
حال برای پارامترهای $(m,t)=(۹,۸)$ مجموعه T را می‌یابیم. چون $m\le k+۵$ داریم $n\ge ۲۵$.
حال اگر $n\equiv ۱,۳\ (mod۶)$ آنگاه با توجه به قضیه ۴.۱.۰۲، $STS(n)$ شامل $STS(۹)$ بر روی مجموعه $T_۰=\{۱,۲,\ldots,۹\}$ وجود دارد. پس مجموعه $T=T_۰\cup\{۱۰\}-\{۹\}$ مجموعه مورد نظر با پارامترهای $(m,t)=(۹,۸)$ می‌باشد.
اگر $n\equiv ۵\ (mod۶)$ آنگاه شبه‌گروه تعویض‌پذیر خودتوان شامل زیر شبه‌گروه از مرتبه سه را مطرح می‌کنیم (گزاره ۵.۱.۰۲ را ببینید). بدون کاستن از کلیت می‌توان $\{۱,۲,۳\}$ را به عنوان زیر شبه‌گروه از مرتبه سه فرض کرد. لذا با توجه به نقش این شبه‌گروه بر روی ساختار $۶k+۵$ (بخش ۱.۱.۰۱ را ببینید) PBD(n) را می‌سازیم و $T=\{\infty_۱,\infty_۲,۳_۱,i_۱,i_۲,i_۳\mid i=۱,۲\}$ تعریف می‌کنیم. مجموعه T مجموعه مورد نظر است. □

لم ۳.۳.۲. فرض $n \geq 13$ عددی فرد و $k = \lfloor n/6 \rfloor$ باشد. برای هر عدد زوج $4 \leq m \leq k+5$ و هر عدد $0 \leq t \leq m-4$ یک *STS(n)* یا *PBD(n)* و مجموعه T که در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند، وجود دارد. از طرفی هرگاه $n \geq 19$ و $n \neq 6k+5$، *STS(n)* و مجموعه T برای $(m,t) \in \{(6,4),(8,8)\}$ وجود دارد.

برهان. $l = \lfloor n/3 \rfloor$ قرار دهید. STS(n) یا PBD(n) را مانند اثبات لم ۲.۳.۲ در نظر می‌گیریم.
اگر $t=0$ به آسانی می‌توان T با پارامترهای (m,t) پیدا کرد. فرض $4 \leq m \leq k+5$ که m زوج است.

(a) اگر $1 \leq t \leq \frac{m-4}{2}$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$T=\{l_1,i_1,(l-i)_1 \mid 1 \leq i \leq t\} \cup \{j_1 \mid t+1 \leq j \leq m-4-t\} \cup \{(\sigma(l))_2, 1_3, (\sigma^{-1}(k+2)-1)_3\}.$$

(b) اگر $\frac{m-4}{2} < t < m-4$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$T=\{l_1,i_1,(l-i)_1 \mid 1 \leq i \leq \frac{m-4}{2}\} \cup \{(\sigma(l))_2, (\sigma(2(m-4-t)))_2, (\sigma(m-4))_2\}.$$

(c) اگر $t=m-4$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$T=\{l_1,i_1,(l-i)_1 \mid 1 \leq i \leq \frac{m-4}{2}\} \cup \{(\sigma(l))_2, (\sigma(1))_2, (\sigma(m-4))_2\}.$$

مجموعه T مشخص شده فوق در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند. $n \geq 19$ و $n \neq 6k+5$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های T با پارامترهای $(m,t) = (6,4),(8,8)$ را می‌سازیم.
با توجه به قضیه ۴.۱.۲، $STS(n)$ شامل $STS(7)$ برروی نقاط $\{1,2,\ldots,7\}$ وجود دارد. فرض $T=\{1,2,\ldots,6\}$ باشد به وضوح T مجموعه‌ای است با پارامترهای $(m,t)=(6,4)$ که در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند.
همچنین $STS(n)$ شامل $STS(9)$ برروی نقاط $\{1,2,\ldots,9\}$ وجود دارد. فرض $T=\{1,2,\ldots,8\}$ باشد T مجموعه‌ای است با پارامترهای $(m,t)=(8,8)$ که در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند. □

قضیه ۴.۳.۲. برای هر $n \geq 17$ گراف کنسر $K(n,2)$ گرافی b-پیوسته است.

برهان. برای حالت‌های زوج و فرد n قضیه را ثابت می‌کنیم.
فرض $X(n)$ مجموعه xهایی باشد که b-رنگ‌آمیزی برای $K(n,2)$ با x رنگ وجود داشته باشد.
حالت ۱. n فرد باشد.
در این حالت با استقرا روی n قضیه را اثبات می‌کنیم. برای هر $n \geq 19$ فرض می‌کنیم که گراف $K(n-2,2)$ گرافی b-پیوسته باشد. بنابراین با توجه به تعریف و قضیه ۸.۲.۲ برای هر عدد x که $n-4 \leq x \leq \lfloor\frac{(n-2)(n-3)}{6}\rfloor$ داریم $x \in X(n-2)$. b-رنگ‌آمیزی برای $K(n-2,2)$ با x رنگ درنظر می‌گیریم و b-رنگ‌آمیزی برای $K(n,2)$ با $x+2$ رنگ ارایه می‌دهیم.
برای این منظور دو کلاس رنگی $\{\{n,i\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ و $\{\{n-1,i\} \mid 1 \leq i \leq n-2\}$ را

اضافه می‌کنیم. این رنگ‌آمیزی در شرایط لم ۶.۲.۲ صدق می‌کند پس b-رنگ‌آمیزی است.
برای اثبات b-پیوستگی $K(n,۲)$ کافی است ثابت کنیم برای هر x که

$$۳+\lfloor\frac{(n-۲)(n-۳)}{۶}\rfloor \leq x \leq \lfloor\frac{n(n-۱)}{۶}\rfloor=\varphi$$

داریم $x\in X(n)$.
$\psi=\lfloor\frac{n(n-۱)}{۶}\rfloor-\lfloor\frac{(n-۲)(n-۳)}{۶}\rfloor-۳$ قرار دهید.
ادعا. برای هر $۰\leq x\leq\psi$ داریم $\varphi-x\in X(n)$.
اثبات ادعا. فرض $\mathbb{A}$ مجموعه همه اعداد مثبت x باشد به طوری که وجود داشته باشد مجموعه $T\subseteq\{۱,۲,\ldots,n\}$ با پارامترهای (m,t) و $x=\frac{m(m-۳)}{۲}-۲t$ وجود داشته که در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند.
حالت ۱.۱. $n=۶k+۱$ **یا** $n=۶k+۳$ **برای** $k\geq۳$.
باتوجه به قسمت (a) لم ۱.۳.۲ کافی است نشان دهیم که برای $۱\leq x\leq\psi$ داریم $x\in\mathbb{A}$. با توجه به لم ۳.۳.۲ مجموعه T با پارامترهای $(m,t)=(۸,۸),(m,t)=(۶,۴)$ وجود دارد. لذا $۱,۴\in\mathbb{A}$. از طرفی با توجه به لم ۲.۳.۲ برای هر عدد فرد $۵\leq m\leq k+۵$ داریم:

$$\frac{m(m-۳)}{۲},\frac{m(m-۳)}{۲}-۲,\ldots,\frac{m(m-۳)}{۲}-(۳m-۱۱)=\frac{(m-۳)(m-۶)}{۲}+۲\in\mathbb{A}.$$

همچنین با توجه به لم ۳.۳.۲ برای هر عدد زوج $۴\leq m\leq k+۵$ داریم:

$$\frac{m(m-۳)}{۲},\frac{m(m-۳)}{۲}-۲,\ldots,\frac{m(m-۳)}{۲}-(m-۴)=\frac{(m-۱)(m-۴)}{۲}\in\mathbb{A}.$$

بنابراین $۱,۲,۳,۴,\ldots,\frac{(k+۳)k}{۲}+۱\in A$. چون $\frac{(k+۳)k}{۲}+۱\geq۴k-۲\geq\psi$ پس حکم برقرار است.
حالت ۲.۱. $n=۶k+۵$.
باتوجه به قسمت (b) لم ۱.۳.۲ کافیست نشان دهیم که برای هر عدد $۰\leq x\leq\psi-۱$ داریم $x\in\mathbb{A}$. تمام فرضیات حالت ۱.۱ بدرستی در این حالت هم صدق می‌کند، بجز مجموعه T با پارامترهای $(m,t)=(۶,۴),(۸,۸)$. لذا داریم $\{۱,۲,۳,\ldots,\psi-۱\}-\{۱,۴\}\subseteq\mathbb{A}$. همچنین مجموعه T با پارامترهای $(m,t)=(۳,۰)$ که در شرایط قسمت (b) لم ۱.۳.۲ صدق می‌کند، وجود دارد. پس $۰\in\mathbb{A}$.

برای کامل کردن اثبات نشان می‌دهیم که $\varphi-۲$ و $\varphi-۵$ عضو $X(n)$ هستند. شبه‌گروه مثال ۱ را در نظر می‌گیریم و PBD(n) را با استفاده از ساختار $۶k+۵$ می‌سازیم. فرض c یک b -رنگ‌آمیزی از گراف $K(n,۲)$ مطابق با این PBD توسط φ رنگ باشد (گزاره ۷.۲.۲) که $\infty_۱,\infty_۲$ مرکزهای کلاس‌های رنگی ستاره‌ای آن می‌باشند. $T=\{\infty_۱,\infty_۲,(۲k+۱)_۱,۲_۱,۱_۲\}$ قرار دهید، همه کلاس‌های رنگی مثلثی شامل راس $\{i,j\}\subseteq T$ را حذف می‌کنیم و سه کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکزیت‌های $۱_۲,۲_۱,(۲k+۱)_۱$

را تعریف می‌کنیم. کلاس‌های رنگی مثلثی حذف شده به صورت زیر هستند

$$\{(۲k+۱)_۱, ۲_۱, ۱_۲\}\ ,\ \{\infty_۱, ۲_۱, ۱_۳\}\ ,\ \{\infty_۲, ۲_۱, ۲_۲\}\ ,\ \{\infty_۱, ۱_۲, ۱_۱\}\ ,\ \{\infty_۲, ۱_۲, ۱_۳\}$$

لذا رنگ‌آمیزی جدید، b-رنگ‌آمیزی با $\varphi - ۵ + ۳$ رنگ است.
$T = \{\infty_۱, \infty_۲, ۲_۱, ۲_۲, ۲_۳, (۲k+۱)_۲, (۲k+۱)_۳\}$ قرار دهید و همه کلاس‌های رنگی مثلثی شامل راس $\{i,j\} \subseteq T$ را حذف کرده و پنج کلاس رنگی ستاره‌ای با مرکزهای

$$۲_۱, ۲_۲, ۲_۳, (۲k+۱)_۲, (۲k+۲)_۱$$

را تعریف می‌کنیم. چون ده کلاس رنگی مثلثی حذف شده داریم، b-رنگ‌آمیزی برای $K(n,۲)$ با $\varphi - ۵$ رنگ ارایه داده‌ایم. پس ادعا ثابت شد.
برای کامل کردن استقرا باید b-پیوستگی $K(۱۷,۲)$ را نشان دهیم.
باتوجه به لم ۲.۳.۲ و ۳.۳.۲ مجموعه T با پارامترهای (m,t) که در شرایط لم ۱.۳.۲ صدق کند، وجود دارد جدول (۱.۲) را نگاه کنید. مقدارهای جدول $x = \frac{m(m-۳)}{۲} - ۲t + ۱$ هستند. بنابراین با توجه به قسمت (b) لم ۱.۳.۲ برای مقدارهای x مشخص شده در جدول (۱.۲) داریم $\varphi(K(۱۷,۲)) - x = ۴۵ - x \in X(۱۷)$. همچنین در حالت ۱.۲ هم ثابت شد که $\varphi(K(۱۷,۲)) - ۲$ و $\varphi(K(۱۷,۵)) - ۵$ عضو $X(۱۷)$ هستند. لذا برای هر i که $۳۴ \leq i \leq ۴۵$ داریم $i \in X(۱۷)$.
به طور مشابه با توجه به قسمت (a) لم ۱.۳.۲ برای مقدارهای x مشخص شده در جدول (۱.۲) داریم: $\varphi(K(۱۵,۲)) - x - ۱ = ۳۴ - x \in X(۱۵)$. بنابراین برای هر $۲۵ \leq i \leq ۳۵$ و $i \neq ۳۱, ۳۴$ داریم $i \in X(۱۵)$.
باتوجه به بحثی مشابه برای هر $۱۶ \leq i \leq ۲۶$ و $i \neq ۲۲, ۲۵$ داریم $i \in X(۱۳)$. ثابت شد که اگر $x \in X(n-۲)$ آنگاه $x + ۲ \in X(n)$. لذا برای هر $۲۰ \leq i \leq ۳۷$ و $i \neq ۲۶, ۳۳$ داریم $i \in X(۱۷)$. با توجه به لم ۲.۳.۲ برای $n = ۱۳, ۱۵, ۱۷$ مجموعه $T \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$ با پارامترهای $(m,t) = (۹,۸)$ وجود دارد. بنابراین با توجه به لم ۱.۳.۲ داریم $۳۳ \in X(۱۷)$ و $۲۴ \in X(۱۵)$ و $۱۵ \in X(۱۳)$ پس $۲۶, ۱۹ \in X(۱۷)$.
در آخر برای $n = ۱۳$ مجموعه T با پارامترهای $(m,t) = (۷,۱), (۹,۷)$ وجود دارد بنابراین $۱۴, ۱۳ \in X(۱۳)$ پس $۱۸, ۱۷ \in X(۱۷)$. یک b-رنگ‌آمیزی با شانزده کلاس رنگی ستاره‌ای می‌سازیم لذا $۱۶ \in X(۱۷)$. پس $K(۱۷,۲)$ گرافی b-پیوسته است.

	m				
t	۳	۴	۵	۶	۷
۰	۱	۳	۶	۱۰	-
۱			۴	۸	۱۳
۲				۶	۱۱
۳					۹
۴					۷

شکل ۱.۲: مقدارها از رابطه $\frac{m(m-۳)}{۲} - ۲t + ۱$ به دست می‌آیند

حالت ۲. n **زوج باشد.**
فرض $n \geq ۱۸$ عددی زوج باشد. آنگاه $K(n-۱, ۲)$ گرافی b-پیوسته است پس برای $x \in X(n-۱)$ داریم $n-۳ \leq x \leq \lfloor\frac{(n-۱)(n-۲)}{۶}\rfloor$.
کلاس رنگی جدید $\{\{n,i\} \mid ۱ \leq i \leq n-۱\}$ را به رنگ‌آمیزی اضافه می‌کنیم. این b-رنگ‌آمیزی از $K(n,۲)$ توسط $x+۱$ رنگ است. از اینرو برای هر y که

$$n-۲ \leq y \leq \lfloor\frac{(n-۱)(n-۲)}{۶}\rfloor + ۱ = \varphi - ۲$$

داریم

$$y \in X(n).$$

کافی است ثابت کنیم $\lfloor\frac{(n-۱)(n-۲)}{۶}\rfloor + ۲ \in X(n) = \varphi - ۱$. برای این منظور b-رنگ‌آمیزی گراف $K(n,۲)$ با φ رنگ ارایه شده در اثبات قضیه ۸.۲.۲ را در نظر می‌گیریم. دو کلاس رنگی مثلثی $\{a,x,y\}$ و $\{b,x,z\}$ را فرض می‌کنیم به طوری که b, a مرکزهای کلاس‌های رنگی ستاره‌ای B, A باشند. این کلاس‌های رنگی مثلثی را حذف کرده و کلاس رنگی ستاره‌ای جدید $\{\{x,y\},\{x,z\},\{x,a\},\{x,b\}\}$ را اضافه می‌کنیم. درآخر راس $\{a,y\}$ را به کلاس رنگی ستاره‌ای A و راس $\{b,z\}$را به کلاس رنگی ستاره‌ای B اضافه می‌کنیم. رنگ‌آمیزی تعیین شده در شرایط لم ۶.۲.۲ صدق می‌کند پس b-رنگ‌آمیزی با $\varphi - ۱$ رنگ برای گراف $K(n,۲)$ ارایه دادیم. □

فصل ۳

b- رنگ‌آمیزی گراف‌های منتظم

گراف G را d-منتظم نامیم هرگاه درجه هر راس آن d باشد. توجه کنید که در هر گراف d-منتظم G داریم:

$$m(G) = d + ۱.$$

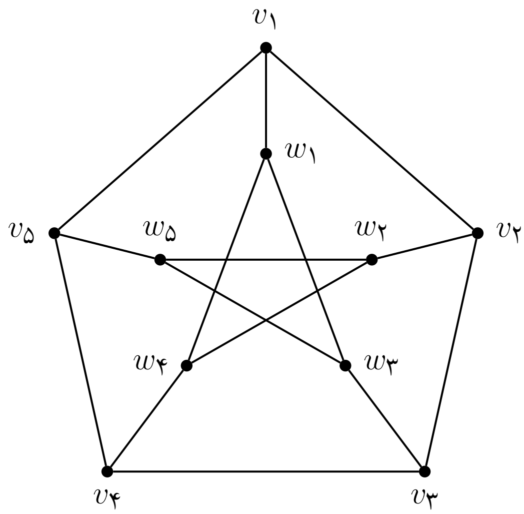
که $m(G)$ بزرگترین مقدار k است که G دارای k راس از درجه حداقل $k - ۱$ باشد.

۱.۳ نتایج مقدماتی

برای $k \geq ۳$، C_kرا دایره‌ای با k راس قرار دهید.

قضیه ۱.۱.۳. عدد b-رنگی گراف پترسن سه است.

برهان. فرض G گراف پترسن با مجموعه راس‌های $\{v_۱, \dots, v_۵, w_۱, \dots, w_۵\}$ باشد. می‌دانیم $\chi(G) = ۳$ لذا $\varphi(G) \geq ۳$. فرض که G را با چهار رنگ b-رنگ‌آمیزی کنیم. برای $j = ۱, \dots, ۴$ راس b-غالب از رنگ j را d_j می‌نامیم و $D = \{d_۱, \dots, d_۴\}$ قرار می‌دهیم. توجه کنید که هر راس d_j باید به‌طور دقیق یک همسایه در کلاس‌های رنگی غیر از j داشته باشد.
فرض D مجموعه‌ای مستقل باشد. می‌توان $D = \{v_۱, v_۳, w_۴, w_۵\}$ فرض کرد که $d_۱ = v_۱, d_۳ = v_۳$ $d_۲ = w_۴, d_۴ = w_۵$. بدون کاستن از کلیت، به راس $v_۲$ رنگ ۲ می‌دهیم لذا راس $w_۲$ نمی‌تواند رنگ ۲ بگیرد. چون راس $v_۱$، راسی b-غالب است باید همسایه‌ای از رنگ ۴ داشته باشد که فقط $w_۱$ می‌تواند باشد و همسایه‌ای از رنگ ۳، که فقط $v_۵$ است. چون $v_۳$ راسی b-غالب است، باید همسایه‌ای از رنگ ۴ داشته باشد که فقط $v_۴$ است و همسایه‌ای از رنگ ۱ که فقط $w_۳$ است. اما $w_۵$ همسایه‌ای از رنگ ۲ نمی‌تواند داشته باشد پس تناقض است. پس D نمی‌تواند مجموعه‌ای مستقل باشد.
فرض $d_۱, d_۲$ مجاور باشند، $d_۱ = v_۱$ و $d_۲ = v_۲$ (چون همه یال‌های گراف پترسن نقش یکسانی دارند). هر راسی را که $d_۳$ بگیریم، دور $C_۵$ شامل $d_۱, d_۲, d_۳$ وجود دارد. چون همه $C_۵$های گراف پترسن نقش



یکسانی دارند، پس می‌توان d_3 را یکی از v_3, v_4, v_5 فرض کرد. دو حالت داریم.

حالت ۱ : $d_3 = v_3$.

چون v_2، راسی b-غالب است، باید همسایه‌ای از رنگ ۴ داشته باشد که فقط راس w_2 می‌تواند باشد. یکی از v_4, v_5، فرض v_5، رنگ ۴ را نمی‌تواند اختیار کند. چون v_1، راسی b-غالب است، باید همسایه‌ای از رنگ ۴ داشته، که فقط w_1 است و همسایه‌ای از رنگ ۳، که فقط v_5 است. چون v_3، راسی b-غالب است، باید همسایه‌ای از رنگ ۴ داشته، که فقط v_4 و همسایه‌ای از رنگ ۱ ، که w_3 است. توجه کنید که w_5 فقط می‌تواند رنگ ۲ را دریافت کند. اما راس‌هایی که رنگ ۴ گرفته‌اند، w_1, w_2, v_4 هستند و راس دیگری نیست، و هر کدام از این سه راس دو همسایه با رنگ یکسان دارند، پس هیچ کدام از آنها نمی‌توانند راس b-غالب باشند، که تناقض است.

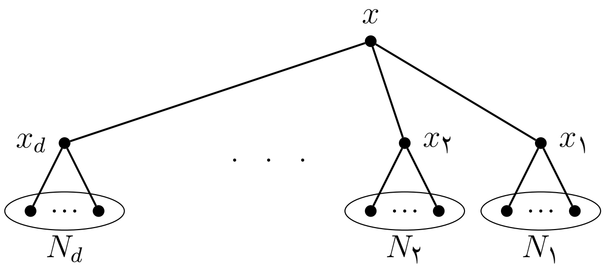
حالت ۲ : $d_3 = v_4$.

چون v_1، راسی b-غالب است، باید مجاور با راسی از رنگ ۳ باشد که فقط w_1 است و همسایه‌ای از رنگ ۴، که v_5 است. ازطرفی v_2 همسایه‌ای از رنگ ۳ دارد که w_2 است و همسایه‌ای از رنگ ۴، که v_3 است. اما v_4 دو همسایه با رنگ یکسان دارد، پس نمی‌تواند b-غالب باشد، که تناقض است. $\square$

تعریف ۲.۱.۳. اندازه کوچکترین دور در گراف G را **کمر** G گویند و با $g(G)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۳.۱.۳. هر گراف d-منتظم G با $g(G) \geq 6$ یک b-رنگ‌آمیزی با $d+1$ رنگ دارد.

برهان. فرض x راسی از G باشد، و $x_1, \dots, x_d$ همسایه‌های آن باشند. برای هر $i = 1, \dots, d$، $N_i = N(x_i) \setminus \{x\}$ قرار دهید. چون گراف G دوری به طول سه ندارد لذا هر N_i مجموعه‌ای مستقل است. برای هر $i \neq j$، N_i و N_j از هم جدا هستند چون در غیر این صورت G باید دوری به طول چهار داشته باشد و یالی بین آنها نیست چون G دوری به طول پنج ندارد. با $d+1$ رنگ $0, 1, \dots, d$ به شرح زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم.



رنگ ۰ را به x و رنگ i را به x_i برای $i = ۱, \ldots, d$ اختصاص می‌دهیم. و راس‌های N_i را با رنگ‌های $\{۱, \ldots, d\} \setminus \{i\}$ به طور متوالی رنگ‌آمیزی کرده و راس‌های باقی‌مانده را با روشی دلخواه بارنگ‌های $\{۰, \ldots, d\}$ به طوری که هر دو راس مجاور رنگ‌های متفاوت می‌گیرند، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. پس b-رنگ‌آمیزی با $d + ۱$ رنگ داریم که راس‌های $x, x_۱, \ldots, x_d$ راس‌های b-غالب خواهند بود. $\square$

قضیه ۴.۱.۳. [۸] اگر G گرافی d-منتظم با کمر حداقل پنج که شامل $C_۶$ نیست، باشد. آنگاه

$$\varphi(G) = d + ۱.$$

قضیه ۴.۱.۳ را با استفاده از قضیه کلاسیک ویزینگ [۱] در مورد رنگ‌آمیزی لیستی، اثبات می‌کنیم.

برهان. قضیه برای $d = ۰, ۱$ به طور بدیهی برقرار است. اگر $d = ۲$ آنگاه G اجتماعی از دایره‌های از هم جدا به طول پنج یا بیشتر خواهد بود. پس $\varphi(G) = ۳$. در واقع، برای b-رنگ‌آمیزی با سه رنگ، کافی است رنگ‌های $۱, ۲, ۳, ۱, ۲$ را به پنج راس متوالی بر روی دایره‌ای از G داده و باقیمانده G را با رنگ‌های $۱, ۲, ۳$ رنگ‌آمیزی مجاز کنیم. حال فرض $d \geq ۳$ باشد.

راس v از G را در نظر می‌گیریم و همسایه‌های آن را مجموعه $N(v) = \{v_۱, \ldots, v_d\}$ فرض کنید. برای هر $i = ۱, \ldots, d$، $N_i = N(v_i) \setminus \{v\}$ قرار دهید، و فرض G_v زیرگرافی از G القا شده توسط $N_۱ \cup \ldots \cup N_d$ باشد. راس x از زیرگراف G_v را در نظر می‌گیریم. پس $x \in N_i$ برای برخی $i \in \{۱, \ldots, d\}$. راس x در N_i همسایه‌ای ندارد، چون G دارای دوری به طول سه نیست. راس x نمی‌تواند دو همسایه $y, z \in N_j (j \neq i)$ داشته باشد، چون راس‌های x, y, v_j, z تشکیل دوری به طول چهار در G می‌دهند. و x نمی‌تواند با راس‌های $y \in N_j, z \in N_k$ (i, j, k متفاوتند) مجاور باشد، چون راس‌های x, y, v_j, v, v_k, z روی دوری به طول شش قرار دارند. بنابراین در G_v هر راس درجه‌ای حداکثر یک دارد.

برای $i = ۱, \ldots, d$، مجموعه $E_i = \{xy \mid x, y \in N(v_i) \setminus \{v\}, x \neq y\}$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه فرض H_v گرافی باشد که توسط G_v تعیین شده و به مجموعه یال‌هایش همه اعضای $E_۱ \cup \ldots \cup E_d$ را اضافه کرده‌ایم (پس هر N_i خوشه‌ای در H_v است). هر راس در H_v درجه‌ای حداکثر $d - ۱$ دارد. بنابراین اگر $d \geq ۴$، آنگاه بزرگترین خوشه در H_v توسط مجموعه‌های N_i $(i = ۱, \ldots, d)$ القا می‌شوند، که از اندازه $d - ۱$ هستند. و اگر $d = ۳$ آنگاه بزرگترین خوشه‌ها در H_v از اندازه دو هستند. ادعا می‌کنیم:

$$\chi_L(H_v) \leq d - ۱ \qquad (۱.۳)$$

[۱] vizing

برای اثبات ادعا برهان خلف می‌گیریم. چون ماکسیمم درجه در H_v حداکثر $d-۱$ می‌باشد، با توجه به قضیه ویزینگ باید دو حالت داشت،

(a). مولفه H_v گراف کامل K_d است،
یا

(b). $d-۱=۲$ و مولفه H_v دور فرد هستند.

حالت (a) همواره ممکن است، چون بزرگترین خوشه در H_v از اندازه $d-۱$ است. پس فرض حالت (b) برقرار باشد. لذا $d=۳$، درنتیجه گراف H_v شش راس دارد، پس تنها دور فرد ممکن در H_v، $C_۵$ است، اما برخی راس‌های این $C_۵$ دو همسایه در G_v دارند، و تناقض است. پس ۱.۳ برقرار است.
لیست واگذاری L را برروی H_v به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.
اگر x راسی از زیرگراف H_v باشد، لذا $x \in N_i$ برای برخی $i \in \{۱,\ldots,d\}$ خواهد بود، لذا لیست $L(x)=\{۱,\ldots,d\}\setminus\{i\}$ را به x اختصاص می‌دهیم. بنابراین برای هر راس x از H_v داریم $|L(x)|=d-۱$. با توجه به رابطه ۱.۳، L-رنگ‌آمیزی c در H_v وجود دارد. c را برای رنگ‌آمیزی G ادامه می‌دهیم. رنگ ۰ را به v و رنگ i را به v_i $(i=۱,\cdots,d)$ نسبت داده و سپس راس‌های باقیمانده را با دستور دلخواهی رنگ‌آمیزی می‌کنیم. لذا G را با $d+۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم، و بدیهی است که راس‌های $v,v_۱,\ldots,v_d$ راس‌های b-غالب هستند. بنابراین $\varphi(G)=d+۱$. □

قضیه ۵.۱.۳. فرض G گرافی d-منتظم با کمر $g(G)\geq ۵$، غیر از گراف پترسن، باشد، و $d\leq ۶$. آنگاه $\varphi(G)=d+۱$.

برهان. روی مقدارهایی که درجه می‌گیرد بحث می‌کنیم.
حالت ۱ : اگر $d=۱$ آنگاه G تطابق است و $\varphi(G)=۲=d+۱$.
حالت ۲ : اگر $d=۲$ آنگاه G اجتماعی از دایره‌های از هم جدا به طول حداقل پنج می‌باشد. برای تعیین b-رنگ‌آمیزی با سه رنگ می‌توان رنگ‌های ۲, ۱, ۳, ۲, ۱ را به پنج راس متوالی بر روی دایره G اختصاص داد و راس‌های باقیمانده را با رنگ‌های ۳, ۲, ۱ با روش گریدی رنگ‌آمیزی کرد.
در قضیه ۳.۱.۳ برای $g(G)\geq ۶$ حکم ثابت شده است در این صورت G را شامل دوری به‌طول پنج فرض می‌کنیم و در حالت‌های ۵, ۴, ۳ زیر، دور C را شامل راس‌های $x_۱,\ldots,x_۵$ از گراف G درنظر می‌گیریم.
حالت ۳ : $d=۳$.

برای هر $i=۱,\ldots,۵$ فرض راس u_i همسایه‌ای از راس x_i باشد که در دور C نیست. فرض یال $u_iu_{i+۲}$ برای هر $i=۱,\ldots,۵$ وجود داشته باشد. پس راس‌های $x_۱,\ldots,x_۵,u_۱,\ldots,u_۵$ گراف پترسن را تشکیل می‌دهند و مولفه مربوط شده به G را می‌سازند. چون G خود گراف پترسن نیست، باید مولفه دیگری مانند Z داشته باشد. در این حالت، رنگ ۱ را به راس‌های $x_۱,x_۴$ و رنگ ۲ را به

راس‌های $x_۲, u_۵$ و رنگ ۳ را به راس‌های $x_۳, u_۱$ و رنگ ۴ را به راس‌های $x_۵, u_۲, u_۳$ و برخی راس z از Z اختصاص می‌دهیم و همسایه‌های راس z را با رنگ‌های ۳, ۲, ۱ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. پس راس‌های $z, x_۳, x_۲, x_۱$ راس‌های b-غالب به‌ترتیب با رنگ‌های ۴, ۳, ۲, ۱ را تشکیل می‌دهند، و این رنگ‌آمیزی تعمیمی از رنگ‌آمیزی G توسط چهار رنگ با روش گریدی است.
حال فرض می‌کنیم که $u_۱u_۳$ یالی از G نباشد. b-رنگ‌آمیزی با چهار رنگ می‌سازیم به طوری که راس‌های $u_۲, x_۳, x_۲, x_۱$ راس‌های b-غالب به‌ترتیب با رنگ‌های ۴, ۳, ۲, ۱ باشند. برای این کار، رنگ ۱ را به راس‌های $x_۱, x_۴$ و رنگ ۲ را به راس $x_۲$ و رنگ ۳ را به راس‌های $x_۳, x_۵$ و رنگ ۴ را به راس‌های $u_۱, u_۲, u_۳$ اختصاص می‌دهیم. ملاحظه کنید که راس‌های $x_۱, x_۲, x_۳$ با رنگ‌های ۳, ۲, ۱ راس‌های b-غالب هستند. حال راس $u_۲$ را مطرح می‌کنیم. فرض راس‌های a, b دو همسایه از راس $u_۲$ غیر از $x_۲$ باشند. (ممکن است که $\{a, b\} \cap \{u_۴, u_۵\} \neq \emptyset$.) توجه کنید که a, b با $x_۱, x_۲, x_۳$ مجاور نیستند، چون G فاقد دور به طول سه یا چهار است. بعلاوه، به دلیل مشابه، هریک از a, b با حداکثر یکی از $x_۴, x_۵$ مجاورت دارند، به عبارت دیگر مجموعه یال بین $\{a, b\}$ و $\{x_۴, x_۵\}$ تطابقی از اندازه حداکثر دو تشکیل می‌دهند. پس امکان دارد رنگ ۱ را به یکی از a, b و رنگ ۳ را به دیگری اختصاص دهیم. حالا $u_۲$ راسی b-غالب با رنگ ۴ خواهد بود. پس این رنگ‌آمیزی می‌تواند تعمیمی از رنگ‌آمیزی G با چهار رنگ توسط روش گریدی باشد.

حالت ۴ : $d = ۴$.
برای هر $i = ۱, \ldots, ۵$، فرض A_i دو همسایه راس x_i باشند که در C قرار ندارند. اندیس‌ها به پیمانه پنج می‌باشند. چون G دوری به طول سه یا چهار را شامل نیست، داریم:

(۲) A_i مجموعه‌ای مستقل است.

(۳) $A_i \cap A_j = \emptyset$ اگر $i \neq j$.

(۴) بین A_i و $A_{i+۱}$ یالی وجود ندارد.

G را با پنج رنگ b-رنگ‌آمیزی می‌کنیم به طوری که $x_۵, \ldots, x_۱$ راس‌های b-غالب به‌ترتیب با رنگ‌های ۵, ... ,۱ باشند. برای هر $i = ۱, \ldots, ۵$ به راس x_i رنگ i را اختصاص داده و دو راس A_i را با رنگ‌های $i + ۲$ و $i + ۳$ (پیمانه پنج) رنگ‌آمیزی می‌کنیم. باتوجه به (۴) و این واقعیت که دو رنگ داده شده به راس‌های A_i با دو رنگ داده شده به $A_{i+۲}$ و همچنین $A_{i+۳}$ متفاوت هستند. به طور یقین دو راس مجاور در $A_۱ \cup \ldots \cup A_۵$ رنگ‌های یکسانی دریافت نمی‌کنند. بنابراین همه راس‌ها در $A_۱, \ldots, A_۵$ رنگ‌آمیزی شده‌اند و همسایه‌های آن هریک از $x_۱, \ldots, x_۵$ همه رنگ‌ها غیر رنگ خودشان را دریافت کرده‌اند. چون راس‌های رنگ نشده از درجه چهار هستند، می‌توان آنها را متوالی با پنج رنگ با روش گریدی رنگ‌آمیزی کرد. لذا b-رنگ‌آمیزی برای G با پنج رنگ ارایه دادیم.
حالت ۵ : $d = ۵$.

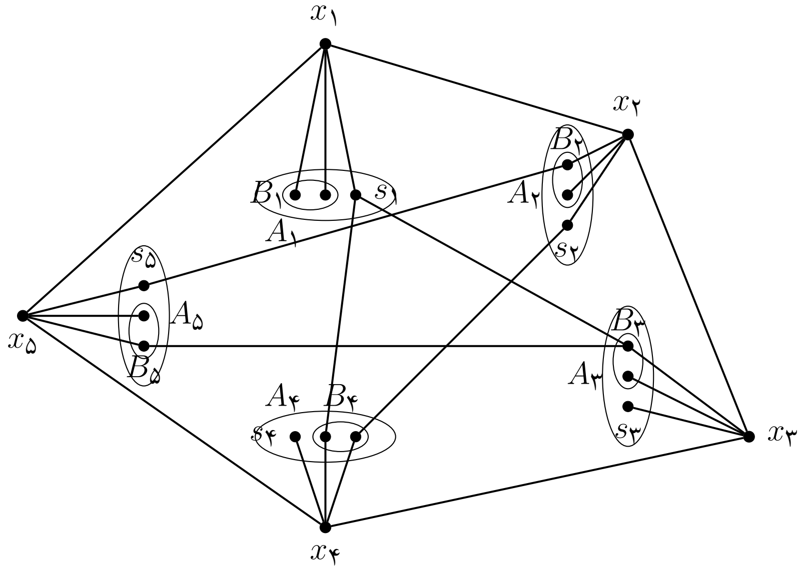
برای $i = ۱, \dots, ۵$، فرض A_i مجموعه سه همسایه راس x_i باشد که در دور C قرار ندارند. چون G دوری به طول سه یا چهار را ندارد، به سادگی داریم:

(۵) A_i مجموعه‌ای مستقل است.

(۶) $A_i \cap A_j = \emptyset$ اگر $i \neq j$.

(۷) بین A_i و $A_{i+۱}$ یالی وجود ندارد.

(۸) هر راس غیر x_i حداکثر یک همسایه در A_i دارد.



شکل ۱.۳: $d = ۵$

برای هر $i = ۱, \dots, ۵$ می‌توان یک همسایه s_i از x_i پیدا کرد به طوری که مجموعه $\{s_۱, \dots, s_۵\}$ مجموعه‌ای مستقل باشد. $s_۱ \in A_۱$، و سپس $s_۳ \in A_۳ \setminus N(s_۱)$ و $s_۵ \in A_۵ \setminus N(s_۳)$ و $s_۲ \in A_۲ \setminus N(s_۵)$ و $s_۴ \in A_۴ \setminus (N(s_۱) \cup N(s_۲))$ را انتخاب می‌کنیم. چنین راس‌هایی طبق (۷) و (۸) وجود دارند. این ساختار نشان می‌دهد که مجموعه $S = \{s_۱, \dots, s_۵\}$ مستقل است. راس $s_۱$ را $x_۶$ می‌نامیم. برای $i = ۱, \dots, ۵$ قرار دهید $B_i = A_i \setminus \{s_i\}$، پس $|B_i| = ۲$ و $B_۶ = N(x_۶) \setminus \{x_۱\}$ ، پس $|B_۶| = ۴$. (شکل (۱.۳)). چون G دوری به طول سه و چهار ندارد، داریم:

(۹) $B_۶$ مجموعه‌ای مستقل است.

(۱۰) $B_۶ \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup B_۵) = \emptyset$.

(۱۱) برای $i \in \{۳, ۴\}$ داریم $|B_۶ \cap B_i| \leq ۱$.

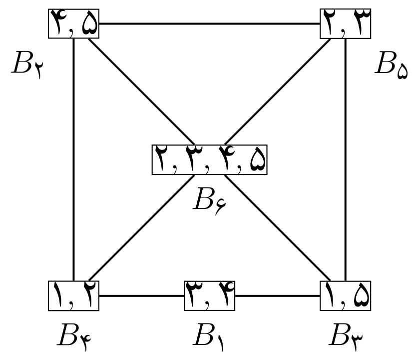
(۱۲) بین $B_۶$ و $B_۱$ یالی وجود ندارد.

(۱۳) هر راس غیر $x_۶$ حداکثر یک همسایه در $B_۶$ دارد.
شرط (۷) اشاره دارد که:

(۱۴) بین B_i و $B_{i+۱}$ ($i \in \{۱, \ldots, ۵\}$، پیمانه پنج) یالی وجود ندارد.
و شرط (۸) و (۱۳) اشاره دارند که:

(۱۵) یال‌های بین B_i و B_j تطابقی را تشکیل می‌دهند($i, j \in \{۱, \ldots, ۶\}, i \neq j$).

G را با شش رنگ b-رنگ‌آمیزی می‌کنیم به طوری که $x_۱, \ldots, x_۶$ راس‌های b-غالب به‌ترتیب با رنگ‌های $۱, \ldots, ۶$ باشند.
برای هر $i = ۱, \ldots, ۵$ به راس x_i رنگ i و رنگ ۶ را به راس‌های $S = \{s_۱, \ldots, s_۵\}$ اختصاص می‌دهیم. حال باید روشی پیدا کرد که رنگ‌های $i + ۲$ و $i + ۳$ (پیمانه پنج) را به دو راس از B_i برای هر $i = ۱, \ldots, ۵$ و رنگ‌های $۲, ۳, ۴, ۵$ را به چهار راس $B_۶$ اختصاص دهیم. این یک مساله رنگ‌آمیزی لیستی است، که هر راس از B_i ($i = ۱, \ldots, ۵$) لیستی از رنگ‌های مجاز $L_i = \{i + ۲, i + ۳\}$ و هر راس از $B_۶$ لیست $L_۶ = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$ را دارد. شکل (۳.۲) را مشاهده کنید. در این شکل هر جعبه، مجموعه B_i با لیست L_i را نمایش می‌دهد، و با توجه به شرط (۱۵)، خط بین دو جعبه نشان می‌دهد که ممکن است یالی بین مجموعه‌های متناظرشان باشد و شرط (۱۲) و (۱۴) علت این که خطی بین دو جعبه نیست را بیان می‌کند.
در طول اثبات می‌گوییم راس x رنگ j را **کم می‌کند** اگر این رنگ باید از لیست رنگ‌های مجاز راس



شکل ۳.۲: $d = ۵$

x برداشته شود چون رنگ j به همسایه‌ای از راس x واگذار شده است.
با توجه به (۱۱) $B_۶$ با هر یک از $B_۳, B_۴$ ممکن است راسی مشترک داشته باشد. فرض راس‌های $B_۶$ را a, b, c, d بنامیم چنان که: اگر $B_۶ \cap B_۳ \neq \emptyset$ آنگاه a راسی در این اشتراک باشد، و اگر $B_۶ \cap B_۴ \neq \emptyset$ آنگاه b راسی در این اشتراک باشد. رنگ‌های $۵, ۲, ۳, ۴$ را به‌ترتیب به a, b, c, d اختصاص می‌دهیم.

با توجه به (۱۴) و چون مجموعه رنگ‌هایی که به B_i و B_{i+2} داده‌ایم، از هم جدا هستند، یال‌های بین چنین دو مجموعه‌ای را نادیده می‌گیریم. با توجه به لیست‌های واگذاری مجموعه‌های $B_1, \ldots, B_5$ آنها را می‌توان مستقل از یکدیگر رنگ‌آمیزی کرد.
با توجه به (۱۲) دو راس از B_1 را با ۳٫۴ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. با توجه به رنگ‌آمیزی B_6 و شرط (۱۵)، برای هر $j \in \{4, 5\}$ حداکثر یک راس از B_2 رنگ j را کم می‌کند، و برای هر j آن راس متفاوت است. پس امکان دارد دو راس از B_2 را با ۴٫۵ رنگ‌آمیزی کنیم. به طور متشابه برای B_5 با رنگ‌های ۲٫۳ برقرار است. حال B_3 را مطرح می‌کنیم. اگر $a \in B_3$، آنگاه a راسی با رنگ ۵ در B_3 است و راس باقی‌مانده در B_3 را رنگ ۱ می‌توان داد. اگر $a \notin B_3$ آنگاه راسی از B_3 می‌تواند رنگ ۵ را کم کند، اما با توجه به روابط (۱۴) و (۱۵) هنوز ممکن است که دو راس از B_3 با ۱٫۵ رنگ‌آمیزی شوند. به طور متشابه برای B_4 با رنگ‌های ۱٫۲ برقرار است. بنابراین همه راس‌های $B_1, \ldots, B_6$ رنگی دریافت کرده‌اند، و هر یک از راس‌های $x_1, \ldots, x_6$ همسایه‌هایی از بقیه رنگ‌ها غیر رنگ خودش دارند. درآخر، چون راس‌های رنگ نشده از درجه پنج هستند، آنها را متوالی با شش رنگ، با روش گریدی می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. لذا G را با شش رنگ b-رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.

حالت ۶ : $d = 6$.

فرض G شامل دوری به طول شش باشد (برای دوری به طول پنج در قضیه ۴.۱.۳ ثابت شد). $x_1, \ldots, x_6$ را شش راس G فرض کنید که روی این دور قرار دارند. برای هر $i = 1, \ldots, 6$ فرض $A_i = N(x_i) \setminus \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$. پس $|A_i| = 4$. چون G دوری به طول سه و چهار را ندارد، لذا داریم:

(۱۶) A_i مجموعه‌ای مستقل است.

(۱۷) $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ و $A_i \cap A_{i+2} = \emptyset$.

(۱۸) $|A_i \cap A_{i+3}| \leq 1$.

(۱۹) بین A_i و A_{i+1} یالی وجود ندارد.

(۲۰) هر راس غیر x_i حداکثر یک همسایه در A_i دارد.

برای هر $i = 1, \ldots, 6$ همسایه‌ای از x_i به نام s_i را چنان می‌یابیم که مجموعه $S = \{s_1, \ldots, s_6\}$ مستقل باشد، به شرح زیر:

- اگر $A_1 \cap A_4 \neq \emptyset$، فرض s_1 و s_4 با راسی در $A_1 \cap A_4$ یکسان باشند. اگر $A_1 \cap A_4 = \emptyset$، فرض s_1 راسی در A_1 و s_4 راسی در $A_4 \setminus N(s_1)$ باشد. (s_4 با توجه به (۲۰) وجود دارد.)
- اگر $A_3 \cap A_6 \neq \emptyset$، فرض s_3 و s_6 با راسی در $A_3 \cap A_6$ یکسان باشند. دقت کنید که، با توجه به (۱۹) این راس با راس‌های s_1 و s_4 مجاور نیست. اگر $A_3 \cap A_6 = \emptyset$، فرض s_3 راسی در $A_3 \setminus N(s_1)$ و s_6 راسی در $A_6 \setminus (N(s_4) \cup N(s_3))$ باشند. (راس‌های s_3 و s_6 با توجه به (۲۰) وجود دارند.)

- اگر $A_5 \cap A_2 \neq \emptyset$، s_5 و s_2 را راسی در $A_5 \cap A_2$ یکسان فرض کنید. با توجه به (۱۹)، این راس‌ها با s_1, s_3, s_4, s_6 مجاور نیستند. اگر $A_5 \cap A_2 = \emptyset$، آنگاه با توجه به (۲۰)، حداقل دو راس در $A_5 \setminus (N(s_1) \cup N(s_3))$ و دو راس در $A_2 \setminus (N(s_4) \cup N(s_6))$ وجود دارند، و با توجه به (۲۰)، این چهار راس با راس‌های $s_5 \in A_5$ و $s_2 \in A_2$ مجاور نیستند.

این ساختار مجموعه $S = \{s_1, \ldots, s_6\}$ را مستقل می‌سازد. حال راس s_1 را x_7 می‌نامیم. برای $i = 1, \ldots, 6$، قرار دهید $B_i = A_i \setminus \{s_i\}$ پس $|B_i| = 3$. با توجه به (۱۷) و (۱۸)، $B_1, \ldots, B_6$ دو به دو از هم جدا هستند. فرض $B_7 = N(x_7) \setminus \{x_1\}$ پس $|B_7| = 5$. چون G دوری به طول سه و چهار را شامل نیست، لذا:

(۲۱) B_7 مجموعه‌ای مستقل است.

(۲۲) $B_7 \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_6) = \emptyset$.

(۲۳) $|B_7 \cap B_i| \leq 1$ برای $i \in \{3, 4, 5\}$.

(۲۴) بین B_7 و B_1 یالی موجود نیست.

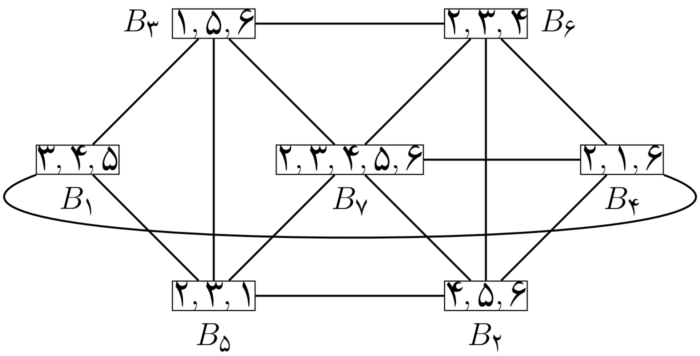
(۲۵) هر راس غیر x_7 حداکثر یک همسایه در B_7 دارد.
شرط (۱۹) اشاره دارد که :

(۲۶) بین B_i و B_{i+1} یالی وجود ندارد. ($i \in \{1, \ldots, 6\}$، $\bmod 6$).
شرط (۲۰) و (۲۵) اشاره دارد که:

(۲۷) یال‌های بین B_i و B_j تشکیل تطابق می‌دهند ($i, j \in \{1, \ldots, 7\}, i \neq j$).

(۲۸) اگر مجموعه‌های $X \subseteq B_i$ و $Y \subseteq B_j$ چنان باشند که $|X| > |Y|$، آنگاه برخی راس‌های X همسایه‌ای در Y ندارند.

برای G با هفت رنگ b-رنگ‌آمیزی می‌سازیم که $x_1, \ldots, x_7$ راس‌های b-غالب به‌ترتیب با رنگ‌های $1, \ldots, 7$ باشند. رنگ i را به راس x_i برای $i = 1, \ldots, 6$ و رنگ ۷ را به راس‌های $S = \{s_1, \ldots, s_6\}$ اختصاص می‌دهیم. حال باید روشی پیدا کرد که رنگ‌های $i+2, i+3, i+4$ (پیمانه شش) را به سه راس B_i برای $i = 1, \ldots, 6$، و رنگ‌های $2, 3, 4, 5, 6$ را به پنج راس B_7، اختصاص داد. این یک مساله رنگ‌آمیزی لیستی است، که به هر راس از $B_i (i = 1, \ldots, 6)$ لیستی از رنگ‌های مجاز $L_i = \{i+2, i+3, i+4\}$ و به هر راس از B_7 لیستی از رنگ‌های $L_7 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ را نسبت می‌دهد. شکل (۳.۳) را ببینید. در این شکل، هر جعبه مجموعه B_i با لیستش L_i را نشان می‌دهد. خط بین دو جعبه یعنی یالی بین مجموعه‌های متناظرشان با توجه به شرط (۲۷)، وجود دارد و با توجه



شکل ۳.۳: $d = 6$

به شرط (۲۴) و (۲۶)، خطی بین جعبه‌ها نیست.

با توجه به (۲۳)، ممکن است مجموعه B_7 راسی مشترک با مجموعه‌های B_3, B_4, B_5 داشته باشد. $|B_7 \cap B_3| \geq |B_7 \cap B_5|$ را فرض می‌کنیم. به عبارت دیگر، اگر B_7 یکی از B_3, B_5 را قطع کند آنگاه B_3 را قطع می‌کند. راس‌های a, b, c از B_7 را به شرح زیر تعریف می‌کنیم، که دو حالت داریم :

(i): $B_7 \cap B_4 \neq \emptyset$. فرض a راسی در $B_7 \cap B_4$ باشد. آنگاه، اگر $B_7 \cap B_3 \neq \emptyset$، فرض b راسی در $B_7 \cap B_3$ باشد (توجه کنید که b با توجه به (۱۹) همسایه‌ای در B_4 ندارد). در غیر اینصورت، فرض b راسی در $B_7 \setminus \{a\}$ باشد که در B_4 همسایه‌ای ندارد (با توجه به (۲۸) چنین راسی وجود دارد). اگر $B_7 \cap B_5 \neq \emptyset$، فرض c راسی در $B_7 \cap B_5$ و در غیر اینصورت، فرض c راسی در $B_7 \setminus \{a, b\}$ باشد.

(ii): $B_7 \cap B_4 = \emptyset$. اگر $B_7 \cap B_3 \neq \emptyset$، فرض b راسی در این اشتراک باشد (با توجه به (۱۹)، b همسایه‌ای در B_4 ندارد). در غیر اینصورت، فرض b راسی در B_7 باشد که همسایه‌ای در B_4 ندارد (با توجه به (۲۸) چنین راسی وجود دارد). پس، اگر $B_7 \cap B_5 \neq \emptyset$، فرض c راسی در این اشتراک، در غیر اینصورت، فرض c راسی در $B_7 \setminus \{b\}$ باشد. a را راسی در $B_7 \setminus \{b, c\}$ انتخاب می‌کنیم.

در همه حالت‌ها راس‌های a, b, c تعریف شده‌اند و متفاوتند چون B_3, B_4, B_5 دو به دو از هم جدا هستند و b همسایه‌ای در B_4 ندارد. پس راس $d \in B_7$ به صورت زیر انتخاب خواهد شد:
اگر $b \in B_3, c \in B_5$ و a همسایه‌ای به نام $v_5 \in B_5$ و v_5 همسایه‌ای به نام $v_3 \in B_3$ را دارد، آنگاه $d \in B_7 \setminus \{a, b, c\}$ را انتخاب می‌کنیم که مجاور با v_3 نیست (با توجه به (۲۸) چنین راسی وجود دارد). در غیر اینصورت فرض d راسی در $B_7 \setminus \{a, b, c\}$ باشد.
درآخر راس باقیمانده در B_7 را e قرار می‌دهیم. راس‌های e, d, c, b, a را به‌ترتیب با رنگ‌های ۲, ۶, ۳, ۵, ۴ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. راس $f_2 \in B_2$ که مجاور با e نیست، و راس $f_6 \in B_6$ که مجاور e یا f_2 نیست،

را انتخاب می‌کنیم، با توجه به (۲۰) چنین راس‌هایی وجود دارند. رنگ ۴ را به $f_۲$ و $f_۶$ می‌دهیم. فرض $i \in \{۱,\dots,۶\}$ باشد. با توجه به (۱۹) یالی بین B_i و $B_{i-۱} \cup B_{i+۱}$ وجود ندارد. بعلاوه، مجموعه رنگ‌هایی که به B_i و$B_{i+۳}$ داده می‌شود، از هم جدا هستند، پس می‌توان یال‌های بین این دو مجموعه را نادیده گرفت. بنابراین، می‌توان $B_۱ \cup B_۳ \cup B_۵$ و $B_۲ \cup B_۴ \cup B_۶$ را مستقل از یکدیگر رنگ‌آمیزی کرد.

$B_۲, B_۴, B_۶$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به رنگ‌آمیزی $B_۷$ و رابطه (۲۰) برای هر $j \in \{۵,۶\}$ حداکثر یک راس از $B_۲ \setminus \{f_۲\}$ رنگ j را کم می‌کند (برای هر j آن راس متفاوت است). پس امکان دارد که رنگ $۵,۶$ را به دو راس از $B_۲ \setminus \{f_۲\}$ اختصاص دهیم. به طور مشابه، برای هر $k \in \{۲,۳\}$ حداکثر یک راس در $B_۶ \setminus \{f_۶\}$ رنگ k را کم می‌کند (راسی متفاوت برای هر k)، پس امکان دارد رنگ $۲,۳$ را به $B_۶ \setminus \{f_۶\}$ اختصاص دهیم. t را راسی از $B_۶$ می‌نامیم که رنگ ۲ دریافت کرده باشد. پس t مجاور a نیست. با رنگ‌آمیزی راس‌هایی از $B_۴$ کار تمام است. ابتدا فرض می‌کنیم $a \in B_۴$ (حالت (i)). لذا a راسی با رنگ ۲ در $B_۴$ است (می‌دانیم a و t مجاور نیستند)، چون $|B_۴| = ۳$ و $a \in B_۴$ لذا دو راس در $B_۴ \setminus \{a\}$ رنگ ۲ را کم می‌کنند (چون $x_۴$ راسی b−غالب است). با توجه به رنگ‌آمیزی $B_۲ \cup B_۶$ و (۲۰)، حداکثر یک راس از $B_۴$ رنگی را می‌تواند کم کند (رنگ ۶)، و با انتخاب b راس دیگری در $B_۴$ نیست که رنگ ۶ را کم کند. پس امکان دارد که رنگ $۱,۶$ را به دو راس از $B_۴ \setminus \{a\}$ اختصاص دهیم. حال اگر $a \notin B_۴$ نباشد (حالت (ii)). با توجه به واگذاری $B_۷ \cup B_۲ \cup B_۶$ و با توجه به (۲۰)، حداکثر دو راس از $B_۴$ رنگ ۲ را کم می‌کنند، و با انتخاب b حداکثر یک راس رنگ ۶ را کم می‌کند. پس امکان دارد که رنگ‌های $۱,۲,۶$ را به راس‌های $B_۴$ اختصاص داد.

بنابراین، در هر یک از حالت‌ها همه راس‌های $B_۲ \cup B_۴ \cup B_۶ \cup B_۷$ رنگی دریافت کرده‌اند، و هریک از $x_۲, x_۴, x_۶, x_۷$ همسایه‌هایی از رنگ‌های غیر رنگ خودشان دارند.

حال $B_۳, B_۵$ را درنظر می‌گیریم. ابتدا فرض $c \in B_۵$، که اشاره به $b \in B_۳$ دارد چون $|B_۷ \cap B_۳| \geq |B_۷ \cap B_۵|$. لذا راس‌های $B_۳ \setminus \{b\}$ رنگ ۶ و به دلیل مشابه راس‌های $B_۵ \setminus \{c\}$ رنگ ۳ را کم می‌کنند. با توجه به واگذاری $B_۷$ حداکثر یک راس $v_۳$ از $B_۳ \setminus \{b\}$ یک رنگ (رنگ ۵) را کم می‌کند و حداکثر یک راس $v_۵$ از $B_۵ \setminus \{c\}$ رنگ ۲ را کم می‌کند. راس‌های $v_۳, v_۵$ را با رنگ ۱ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. توجه کنید که، با انتخاب d راس‌های $v_۳, v_۵$ ممکن است نامجاور فرض شوند. پس رنگ ۵ را به راس سوم از $B_۳$ و رنگ ۲ را به راس سوم از $B_۵$ می‌دهیم. حال $c \notin B_۵$ را فرض کنید. با توجه به رنگ‌آمیزی $B_۷$، برای هر $j \in \{۲,۳\}$ حداکثر یک راس در $B_۵$ رنگ j را کم می‌کند (راسی متفاوت برای هر j)، چون $|B_۵| = ۳$ لذا با کم شدن رنگ‌های $۳,۲$ راسی مانند $w_۵ \in B_۵$ باقی می‌ماند که این راس رنگی را کم نمی‌کند.

چون $x_۳$ راسی b−غالب است لذا اگر $b \in B_۳$، آنگاه راس‌هایی از $B_۳ \setminus \{b\}$ رنگ ۶ را کم می‌کند، با توجه به واگذاری $B_۷$ و چون رنگ‌های مشترک $B_۳$ و $B_۷$ رنگ‌های $۶,۵$ بودند و از طرفی رنگ ۶ توسط راس b کم شده است لذا رنگ ۵ می‌ماند که حداکثر یک راس $v_۳$ از $B_۳ \setminus \{b\}$ رنگ ۵ را کم می‌کند. لذا

رنگ ۱ را به $v_۳$ و رنگ ۵ را به راس باقیمانده $B_۳$ می‌دهیم. با توجه به رنگ‌آمیزی $B_۳$ و به خاطر اینکه رنگ مشترک بین $B_۳$ و $B_۵$ رنگ ۱ است و با توجه به (۲۰) حداکثر یک راسی از $B_۵$ رنگ ۱ را کم می‌کند. لذا ممکن است راس‌های $B_۵$ را با رنگ‌های ۳,۲,۱ رنگ‌آمیزی کنیم. اگر $b \notin B_۳$، آنگاه برای هر $j \in \{۵,۶\}$ حداکثر یک راس $B_۳$ رنگ j را کم می‌کند (راسی متفاوت برای هر j)، لذا راسی مانند $w_۳ \in B_۳$ رنگی را کم نمی‌کند. با توجه به (۲۰)، در میان چهار راس از $(B_۳ \cup B_۵) \setminus \{w_۳, w_۵\}$، دو راس نامجاور وجود دارند، یکی در $B_۳$ و یکی در $B_۵$، که رنگ ۱ می‌گیرند. پس ممکن است رنگ ۵,۶ را به راس‌های باقی‌مانده $B_۳$ و رنگ ۲,۳ را به راس‌های باقی‌مانده $B_۵$ داد.
حال با $B_۱$ کار داریم. (۲۲) و (۲۴) برقرارند. با توجه به واگذاری $B_۳$، حداکثر یک راس در $B_۱$ رنگ ۵ را کم می‌کند و با توجه به واگذاری $B_۵$، حداکثر یک راس از $B_۱$ (ممکن است راس‌ها مشابه باشند) رنگ ۳ را کم می‌کند. پس می‌توانیم سه راس $B_۱$ را با ۳,۴,۵ رنگ‌آمیزی کنیم.
بنابراین همه راس‌های $B_۱ \cup B_۳ \cup B_۵$ رنگی گرفته‌اند، و هر یک از $x_۱, x_۳, x_۵$ همسایه‌هایی از همه رنگ‌ها غیر رنگ خودشان دارند.
درآخر، چون راس‌های رنگ نشده از درجه شش هستند، می‌توان آنها را متوالی با یکی از هفت رنگ، با روش گریدی رنگ‌آمیزی کرد. بنابراین با هفت رنگ G را b-رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. □

اثبات فوق تکنیکی را نشان می‌دهد که شاید نتوان تعمیمی به حالت‌های کلی داد. اثباتی مشابه توسط ویستین[۲] برای $d = ۷$ بیان شده است، اما حالت آنالیزی نشان می‌دهد که دست نیافتنی است.[۱۴، ۱۶]

[۲] Wisstein

فصل ۴

b- رنگ‌آمیزی حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌ها

۱.۴ مقدمه

تعریف ۱.۱.۴. گراف‌های G و H را درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب دکارتی آنها را که به صورت $G\square H$ می‌نویسیم، گرافی با مجموعه راس‌های $V(G)\times V(H)$ می‌باشد که در آن راس (u,v) مجاور راس (u',v') است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد.

۱) $u=u'$ و $vv'\in E(H)$.

۲) $v=v'$ و $uu'\in E(G)$.

اگر $|V(G_۱)|=m$ و $|V(G_۲)|=n$، مجموعه راس‌های گراف $G_۱\square G_۲$ را با آرایه $m\times n$ درنظر می‌گیریم که درایه‌های (i,j) متناظر با راس (i,j) است که $i\in V(G_۱)$ و $j\in V(G_۲)$، و هر ستون کپی از گراف $G_۱$ و هر سطر کپی از گراف $G_۲$ است. در بخش ۳.۴ که $G_۲=C_n$ همسایه‌های درایه (i,j) در سطر i درایه‌های $(i,j\pm ۱)$ هستند. در بخش ۴.۴ که $G_۲=P_n$، همسایه‌های درایه (i,j) در سطر i درایه‌های $(i,j\pm ۱)$، برای $۲\leq j\leq n-۲$ و $j=۱$ و $j=n$ به‌ترتیب $(i,۲)$ و $(i,j-۱)$ هستند. همه درایه‌های اول به پیمانه $|V(G_۱)|=m$ و درایه‌های دوم به پیمانه $|V(G_۲)|=n$ می‌باشند.[۱۰]

۲.۴ عدد b -رنگی گراف $K_m\square G$

در این بخش عدد b-رنگی حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌های کامل با گرافی دلخواه را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۴. اگر c یک b-رنگ‌آمیزی از گراف $K_m\square G$ با φ رنگ باشد که $\varphi>m$ و $v\in V(G)$ آنگاه ستون متناظر با راس v شامل حداکثر $d_G(v)$ راس b-غالب است.

برهان. با توجه به فرض که $\varphi > m$، بنابراین در b-رنگ‌آمیزی c حداقل یک رنگ وجود دارد که در ستون متناظر با راس v از گراف G ظاهر نشده است. این ستون را با K_m^v نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر این رنگ غایب باید در همسایه‌های راس‌های b-غالب در K_m^v ظاهر شده باشد، که در ستون‌های متفاوتی قرار دارند. لذا تعداد راس‌های b-غالب در K_m^v حداکثر $\mathrm{d}_G(v)$ است. $\square$

اگر $d = (d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنباله درجات گراف G با n راس باشد، آنگاه با توجه به گزاره ۱.۲.۴، در گراف $K_m \square G$ هر ستون که با $K_m^{(i)}$، $۱ \leq i \leq n$ نشان داده می‌شود شامل حداکثر d_i راس b-غالب است. لذا هر سیستم b-غالب G دارای حداکثر $\sum_{i=۱}^n d_i$ راس می‌باشد. [۱۰]

نتیجه ۲.۲.۴. اگر $d = (d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنباله درجات گراف G با n راس و e یال باشد، آنگاه

$$\varphi(K_m \square G) \leq \sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲e.$$

تعریف ۳.۲.۴. رنگ‌آمیزی مجاز جزیی گراف، واگذاری رنگ‌ها به برخی از راس‌های G است، به‌طوری که دو راس مجاور رنگ‌های متفاوتی دریافت کرده باشند.

تعریف ۴.۲.۴. فرض $S_۱, \ldots, S_n$ تعدادی مجموعه باشند. سیستم نمایندگی متمایز (SDR)[۱] برای این مجموعه‌ها n-تایی $(x_۱, \ldots, x_n)$ از عناصر است به طوری که $x_i \in S_i$ برای $i = ۱, \ldots, n$ و $x_i \neq x_j$ برای $i \neq j$.

قضیه ۵.۲.۴. خانواده‌ای از مجموعه‌های S_i دارای *SDR* می‌باشند اگر و تنها اگر در شرط زیر صدق کنند،

$$\forall I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\} \Longrightarrow |\cup_{i \in I} S_i| \geq |I|$$

شرط فوق به شرط **هال** [۲] معروف است.[۲]

لم ۶.۲.۴. فرض G گراف و m عدد صحیح مثبت باشد که $m \geq ۲\Delta(G)$. اگر c رنگ‌آمیزی مجاز جزیی از گراف $K_m \square G$ با m رنگ باشد، که در هر ستون راس رنگ نشده وجود ندارد یا حداقل $۲\Delta(G)$ راس رنگ نشده دارد. آنگاه c می‌تواند تعمیمی از یک رنگ‌آمیزی مجاز گراف $K_m \square G$ با m رنگ باشد.

برهان. در رنگ‌آمیزی مجاز جزیی گراف $K_m \square G$ با m رنگ، ستونی با $k \geq ۱$ راس رنگ نشده $v_۱, v_۲, \ldots, v_k$ که طبق فرض $k \geq ۲\Delta(G)$، درنظر می‌گیریم. بدون کاستن از کلیت k رنگ غایب را با $۱, ۲, \ldots, k$ بیان می‌کنیم. برای هر $i = ۱, \ldots, k$، فرض S_i مجموعه رنگ‌هایی باشد که برای رنگ‌آمیزی راس v_i می‌توان استفاده کرد. پس $S_i \subseteq \{۱, ۲, \ldots, k\}$. برای تعمیم این رنگ‌آمیزی به رنگ‌آمیزی مجازی از این ستون، کافی است SDRای از مجموعه خانواده‌های S_i, $۱ \leq i \leq k$ را پیدا کنیم. برای این منظور نشان می‌دهیم که خانواده‌ای از مجموعه‌های S_i، $۱ \leq i \leq k$ در شرط هال صدق

[۱] system of distinct representatives

[۲] Hall

می‌کنند. فرض $I\subseteq\{۱,۲,\dots,k\}$ که $|I|=r$.

اگر $r\le\Delta(G)$ آنگاه برای $i_\circ\in I$ داریم

$$|\cup_{i\in I}S_i|\ge|S_{i_\circ}|\ge k-\Delta(G)\ge\Delta(G)\ge r=|I|.$$

اگر $r>\Delta(G)$ آنگاه $\cup_{i\in I}S_i=\{۱,۲,\dots,k\}$. چون اگر رنگی مانند $i_\circ$ ، $۱\le i_\circ\le k$ در هیچ یک از مجموعه‌های S_i ، $i\in I$ ظاهر نشده باشد، آنگاه هر راس v_i ، $i\in I$، همسایه‌ای مانند u_i با رنگ $i_\circ$ در سطر شامل v_i، دارد. چون همه راس‌های u_i رنگ‌های یکسان دارند، آنها در ستون‌های متفاوتی قرار دارند. بنابراین باید $r=|I|\le\Delta(G)$، که تناقض است. لذا

$$|\cup_{i\in I}S_i|=k\ge|I|.$$

پس رنگ‌آمیزی هر ستون می‌تواند عمومیت یابد و اثبات تمام است. $\Box$

گزاره ۷.۲.۴. برای گراف‌های G و H، اگر گراف H' از جایگزین شدن یک یال در گراف H با مسیری به طول سه تعیین شود، آنگاه $\varphi(G\Box H')\ge\varphi(G\Box H)$.

برهان. یال $e=xy$ ازگراف H را درنظر می‌گیریم و مسیر $xwzy$ را جایگزین یال e کرده، گراف جدید را H' می‌نامیم. c را b-رنگ‌آمیزی از گراف $G\Box H$ با $\varphi(G\Box H)$ رنگ فرض خواهیم کرد و b-رنگ‌آمیزی c' را برای گراف $G\Box H'$ به شرح زیر ارایه می‌دهیم. رنگ‌های راس‌ها در ستون‌های متناظر با راس‌های x,y در رنگ‌آمیزی c را به‌ترتیب به راس‌های ستون‌های متناظر با z,w در گراف H' اختصاص می‌دهیم. راس‌های باقی‌مانده را مانند c رنگ‌آمیزی می‌کنیم. c' رنگ‌آمیزی مجاز است و سیستم b-غالب در c یک سیستم b-غالب در c' تشکیل می‌دهد. $\Box$

نتیجه ۸.۲.۴. برای هر عدد صحیح مثبت m,n؛

$$\varphi(K_m\Box C_{n+۲})\ge\varphi(K_m\Box C_n)\ ,\ \varphi(K_m\Box P_{n+۲})\ge\varphi(K_m\Box C_n).$$

برهان. فرض $\varphi(K_m\Box C_n)=k$. گراف $C_{n+۲}$ با جایگزینی یال $e=xy$ از C_n توسط مسیر $xwzy$ ایجاد شده است. پس باتوجه به گزاره فوق b-رنگ‌آمیزی c ازگراف $K_m\Box C_{n+۲}$ با k رنگ وجود دارد. ازطرفی باتوجه به اثبات گزاره ۷.۲.۴، دیدیم راس b-غالبی در ستون‌های متناظر با راس‌های w و z در رنگ‌آمیزی c وجود ندارد. پس همچنین c یک b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_m\Box P_{n+۲}$ است، که $P_{n+۲}$ توسط حذف یال wz در $C_{n+۲}$ ایجاد می‌شود. $\Box$

۳.۴ عدد b -رنگی گراف $K_m\Box C_n$

در این بخش مقدار دقیق $\varphi(K_m\Box C_n)$ را تعیین می‌کنیم. می‌دانیم $\chi(K_m\Box C_n)=m$ و $\Delta(K_m\Box C_n)=m+۱$. لذا چون $\chi(G)\le\varphi(G)\le\Delta(G)+۱$ داریم:

$$m\le\varphi(K_m\Box C_n)\le m+۲. \qquad (۱.۴)$$

برای اثبات دقیق این قضیه نیاز به لم زیر داریم.

لم ۱.۳.۴. اگر c یک b-رنگ‌آمیزی از گراف $K_m\Box C_n$ با k رنگ و S سیستم b-غالب آن باشد، به‌طوری که:

(i) راس b-غالبی مانند (r,s)، $r\neq m$، در کلاس رنگی x، وجود دارد که راس‌های (r,s) و $(r,s\pm 1)$ عضو S نباشند،

(ii) سطر m در S راسی ندارد،

(iii) وقتی n فرد باشد، $c(m,s-1)\neq x$.

آنگاه $\varphi(K_{m+1}\Box C_n)\geq k+1$.

برهان. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $(r,s)=(1,1)$. b-رنگ آمیزی c' از گراف $K_{m+1}\Box C_n$ با $k+1$ رنگ را به‌صورت زیر ارایه می‌دهیم.

$$c'(i,j)=\begin{cases} x & (i,j)=(m+1,1),\\ k+1 & (i,j)=(1,1),\\ k+1 & (i,j)=(m+1,2t), 1\leq t\leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor,\\ c(m,2t-1) & (i,j)=(m+1,2t-1), 2\leq t\leq \lceil\frac{n}{2}\rceil,\\ k+1 & (i,j)=(m,2t-1), 2\leq t\leq \lceil\frac{n}{2}\rceil,\\ c(i,j) & o.w.\end{cases}$$

از تعریف c' و باتوجه به شرط (iii) بدیهی است که c' رنگ‌آمیزی مجاز است. از طرفی به‌خاطر شرط (i) و (ii) و چون در رنگ‌آمیزی c' هر ستون راسی با رنگ $k+1$ دارد، هر راس در S راسی b-غالب در c' خواهد بود. همچنین راس $(1,1)$ راسی b-غالب با رنگ $k+1$ است. لذا c' یک b-رنگ‌آمیزی با $k+1$ رنگ می‌باشد. □

قضیه ۲.۳.۴. برای اعداد صحیح مثبت $m,n\geq 4$ داریم:

$$\varphi(K_m\Box C_n)=\begin{cases} m & m\geq 2n,\\ m+1 & m=2n-1,\\ m+2 & m\leq 2n-2.\end{cases}$$

برهان. فرض $m\geq 2n$.

باتوجه به نتیجه ۲.۲.۴ داریم

$$\varphi(K_m\Box C_n)\leq 2n.$$

از این‌رو باتوجه به ۱.۴

$$\varphi(K_m\Box C_n)=m.$$

حال فرض $m = 2n - 1$.
باتوجه به نتیجه ۲.۲.۴،
$$\varphi(K_m\Box C_n) \leq 2n = m + 1.$$
برای اثبات تساوی، b-رنگ‌آمیزی از $K_m\Box C_n$ با $m+1$ رنگ ارایه می‌دهیم. آرایه $(m+1)\times n$ را درنظر می‌گیریم و بعضی از درایه‌های این آرایه را به شرح زیر پر می‌کنیم. این رنگ‌آمیزی مجاز جزیی را با c نمایش می‌دهیم. همه مولفه‌های دوم به پیمانه n هستند، $1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ و $r = 0, 1$.
$$c(2\lceil \frac{j}{2} \rceil - r, j) = 2j - r,$$
$$c(2k, 2k - 2) = 4k - 1,$$
$$c(2k, 2k + 1) = 4k - 3,$$
$$c(m + 1, 2k - r) = 4k + 2r - 3.$$

اگر n فرد باشد همچنین تعریف می‌کنیم
$$c(m + 1, n) = c(n, n - 1) = c(n + 1, 1) = 4.$$
در شکل (۱.۴)، این آرایه با درایه‌های پر شده برای $n = 4$ نشان داده شده است. این آرایه با برخی

۱	۳		
۲	۴	۱	۳
		۵	۷
۵	۷	۶	۸
۳	۱	۷	۵

شکل ۱.۴: رنگ‌آمیزی مجاز جزیی از گراف $K_8\Box C_4$

درایه‌های پر شده یک رنگ‌آمیزی مجاز جزیی از گراف $K_{m+1}\Box C_n$ است، که هر ستون سه درایه پر دارد. چون $m = 2n - 1 \geq 7$، لذا هر ستون حداقل چهار راس رنگ نشده دارد. لذا باتوجه به لم ۶.۲.۴، c می‌تواند به رنگ‌آمیزی مجازی برای گراف $K_{m+1}\Box C_n$ با $k+1$ رنگ، تعمیم یابد. حال برای تعیین رنگ‌آمیزی مورد نظر، آخرین سطر را حذف می‌کنیم. توجه کنید که در رنگ‌آمیزی گراف $K_m\Box C_n$، هر ستون به‌طور دقیق یک رنگ غایب دارد. مجموعه راس‌های $\{(2\lceil \frac{j}{2} \rceil - r, j) \mid 1 \leq j \leq n,\ r = 0, 1\}$ سیستمی b-غالب تشکیل می‌دهند. چون برای $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$، رنگ غایب ستون $2k$ رنگ $4k - 3$ است که متعلق به راس‌های $(2k, 2k+1)$ و $(2k - 1, 2k - 1)$ می‌باشد و رنگ غایب ستون $2k - 1$

رنگ $۴k-۱$است که متعلق به راس‌های $(۲k,۲k-۲)$ و $(۲k-۱,۲k)$ می‌باشد. در شکل فوق راس‌های b-غالب مشخص شده‌اند.
حال فرض $۹\leq m\leq ۲n-۲$.
باتوجه به ۱.۴،

$$\varphi(K_m\square C_n)\leq m+۲$$

برای اثبات تساوی، b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_m\square C_n$ با $m+۲$ رنگ ارایه می‌دهیم. آرایه $(m+۲)\times n$ را درنظر می‌گیریم و برخی از درایه‌های آن را به شرح زیر پر خواهیم کرد. این رنگ‌آمیزی جزیی را با c نشان داده‌ایم. همه مولفه‌های دوم این آرایه به پیمانه n و مقدارها به پیمانه $m+۲$ هستند، $۱\leq k\leq\lceil\frac{m}{۴}\rceil$, $۱\leq j\leq\lceil\frac{m}{۲}\rceil+۱$ و $r=۰,۱$.

$$\begin{aligned}
c(۲\lceil\frac{j}{۲}\rceil-r,j)&=۲j-r,\\
c(۲k-r,۲k-۲)&=۴k+r-۱,\\
c(۲k-r,۲k+۱)&=۴k+r-۳,\\
c(m+۱,۲k-r)&=۴k+۲r-۳,\\
c(m+۲,۲k-r)&=۴k+۲r-۲.
\end{aligned}$$

اگر $m\equiv ۰,۳\ (mod\ ۴)$ آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}
c(\lceil\frac{m}{۲}\rceil+۲-r,\lceil\frac{m}{۲}\rceil)&=۶-r,\\
c(\lceil\frac{m}{۲}\rceil+۲-r,\lceil\frac{m}{۲}\rceil+۲)&=۵+r,\\
c(m+۱+r,\lceil\frac{m}{۲}\rceil+۱)&=۶-r.
\end{aligned}$$

در شکل (۲.۴)، این آرایه با درایه‌های پر شده برای $m=۹$ و $n=۶$ نشان داده شده است. براحتی می‌توان دید این آرایه با برخی درایه‌های پر شده یک رنگ‌آمیزی مجاز جزیی گراف $K_{m+۲}\square C_n$ است، که هر ستون چهار درایه پر شده دارد. چون $m\geq ۹$، هر ستون حداقل چهار راس رنگ نشده دارد. لذا باتوجه به لم ۶.۲.۴، c تعمیمی از رنگ‌آمیزی مجاز گراف $K_{m+۲}\square C_n$ با $m+۲$ رنگ می‌تواند باشد. حال برای حصول رنگ‌آمیزی مورد نظر، دو سطر آخر را حذف می‌کنیم. توجه کنید که در این رنگ‌آمیزی از گراف $K_m\square C_n$، هر ستون به‌طور دقیق دو رنگ غایب دارد. مشابه بالا براحتی می‌توان دید که مجموعه راس‌های

$$\{(۲\lceil\frac{j}{۲}\rceil-r,j)\mid ۱\leq j\leq\lceil\frac{m}{۲}\rceil+۱\ ,\ r=۰,۱\}$$

سیستم b-غالب می‌باشند. چون برای $۱\leq k\leq\lceil\frac{m}{۴}\rceil$، رنگ‌های غایب در ستون $۲k$ رنگ‌های $۴k-۳$ و $۴k-۲$ هستند، در صورتی که

$$c(۲k,۲k+۱)=c(۲k-۱,۲k-۱)=۴k-۳$$

۱	۳	۲			۴
۲	۴	۱			۳
	۸	۵	۷	۶	
	۷	۶	۸	۵	
۱۰			۱	۹	۱۱
۹			۱۱	۱۰	۱
۳	۱	۷	۵	۱۱	۹
۴	۲	۸	۶	۱	۱۰

شکل ۲.۴: رنگ‌آمیزی مجاز جزیی از گراف $K_{۱۱}\square C_۶$

و

$$c(۲k-۱,۲k+۱)=c(۲k,۲k-۱)=۴k-۲$$

را داریم. بعلاوه رنگ‌های غایب ستون $۲k-۱$ رنگ‌های $۴k-۱$ و $۴k$ هستند، که

$$c(۲k,۲k-۲)=c(۲k-۱,۲k)=۴k-۱$$

و

$$c(۲k-۱,۲k-۲)=c(۲k,۲k)=۴k.$$

حال فرض $۸\le m\le ۲n-۲$ و $۴\le m$.

در شکل (۳.۴)، b-رنگ‌آمیزی برای گراف‌های $K_۴\square C_n$ برای $n=۴,۵$ و $K_۷\square C_n$ برای $n=۵,۶$ را نشان می‌دهیم.

۱	۳	۵	۶
۲	۶	۲	۳
۵	۴	۱	۴
۴	۲	۴	۲

۱	۳	۵	۲	۶
۲	۶	۴	۶	۳
۵	۴	۱	۵	۴
۴	۲	۶	۳	۵

۳	۲	۵	۹	۱
۴	۱	۴	۸	۲
۷	۵	۹	۴	۸
۶	۳	۸	۶	۷
۸	۴	۱	۲	۵
۹	۶	۷	۳	۴
۵	۸	۲	۷	۶

۱	۳	۲	۳	۷	۴
۲	۴	۱	۴	۸	۳
۷	۸	۵	۷	۶	۹
۹	۷	۶	۸	۵	۸
۵	۹	۴	۱	۹	۲
۶	۵	۹	۲	۳	۱
۸	۶	۳	۹	۴	۷

شکل ۳.۴: b -رنگ‌آمیزی از گراف‌های $K_۴\square C_n\ , n = ۴,۵$ و $K_۷\square C_n\ , n = ۵,۶$

در این رنگ‌آمیزی‌ها سیستم b-غالب S، مشخص شده است. آنگاه لم ۱.۳.۴ را دو بار برای رنگ‌آمیزی داده‌شده $K_۴\square C_۴$ بکارمی‌بریم بار اول برای $(r,s) = (۳,۴)$ و بار دوم برای $(r,s) = (۲,۳)$ و همچنین این لم را برای رنگ‌آمیزی مفروض گراف $K_۴\square C_۵$ یکبار برای $(r,s) = (۳,۴)$ و باردوم برای $(r,s) = (۳,۴)$ بکارمیبریم. علاوه بر این لم ۱.۳.۴ را برای رنگ‌آمیزی مفروض گراف‌های $K_۷\square C_۵$ و $K_۷\square C_۶$ برای $(r,s) = (۶,۵)$ بکاربرده و b-رنگ‌آمیزی مطلوب را برای گراف‌های $K_۸\square C_n\ , \ n = ۵,۶$ تعیین می‌کنیم. باتوجه به نتیجه ۸.۲.۴، برای تعیین b-رنگ‌آمیزی گراف $K_m\square C_n$ که $n \geq t$، کافی است b-رنگ‌آمیزی از گراف‌های $K_m\square C_t$ و $K_m\square C_{t+۱}$ را داشته باشیم. لذا برای b-رنگ‌آمیزی بدست آمده در بالا b-رنگ‌آمیزی‌های مطلوب گراف‌های $K_m\square C_n$ که $۴ \leq m \leq ۹$ و $m \leq ۲n - ۲$، را داریم. $\square$

۴.۴ عدد b -رنگی گراف $K_m\square P_n$

در این بخش، باتوجه به نتیجه بخش ۳.۲، مقدار دقیق $\varphi(K_m\square P_n)$ را تعیین می‌کنیم. می‌دانیم که $\chi(K_m\square P_n) = m$ و $\Delta(K_m\square P_n) = m + ۱$. چون $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + ۱$ داریم:

$$m \leq \varphi(K_m\square P_n) \leq m + ۲. \tag{۲.۴}$$

قضیه ۱.۴.۴. برای اعداد صحیح مثبت $m, n \geq ۴$:

$$\varphi(K_m\square P_n) = \begin{cases} m & m \geq ۲n - ۲, \\ m + ۱ & ۲n - ۵ \leq m \leq ۲n - ۳, \\ m + ۲ & m \leq ۲n - ۶. \end{cases}$$

برهان. فرض $m \geq ۲n - ۲$.
باتوجه به نتیجه ۲.۲.۴ داریم:

$$\varphi(K_m\square P_n) \leq ۲(n - ۱).$$

لذا باتوجه به ۲.۴، $\varphi(K_m\square P_n) = m$.
اگر $\varphi(K_m\square P_n) = m + ۲$ آنگاه در ستون‌های اولی و آخری از گراف $K_m\square P_n$ راس b-غالبی وجود ندارد، چون راس‌ها در اولین و آخرین ستون‌ها از درجه m هستند. از طرفی باتوجه به گزاره ۱.۲.۴، $n - ۲$ ستون دیگر هر کدام حداکثر دو راس b-غالب دارند. لذا $m + ۲ = \varphi(K_m\square P_n) \leq ۲(n - ۲)$.
از این‌رو برای $m \geq ۲n - ۵$، داریم $\varphi(K_m\square P_n) \leq m + ۱$.
حال فرض $۲n - ۵ \leq m \leq ۲n - ۳$، b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_m\square P_n$ با $m + ۱$ رنگ ارایه

می‌دهیم. دو حالت را مطرح می‌کنیم.
حالت ۱. ۳ $m = ۲n - ۳$.
رنگ‌آمیزی $c : V(K_m\Box P_n) \longrightarrow \{۱, ۲, \dots, m+۱\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c(i,j) = \begin{cases} m-۱ & (i,j) = (m,۱), \\ m+۱ & (i,j) = (۳j-۴, j),\ ۱ \le j \le n-۱, \\ m+۱ & (i,j) = (۳n-۶, n), \\ i+j-۱ \pmod{m} & o.w. \end{cases}$$

مجاز بودن این واگذاری برای رنگ‌آمیزی گراف $K_m\Box P_n$ کار آسانی است.
مجموعه $S = \{(m-۱,۱), (۳n-۵, n), (۳j-۵, j), (۳j-۳, j) \mid ۲ \le j \le n-۱\}$ (پیمانه m) سیستمی b-غالب را تشکیل می‌دهد. بدیهی است که هر راس غالب در ستون خودش $m-۱$ همسایه دارد، که در کلاس‌های رنگی متفاوتی قرار دارند. پس برای اینکه راسی b-غالب باشد کافی است با راسی از رنگی که در ستون خودش نیست، همسایه شود. رنگ‌های غایب در ستون j که $۲ \le j \le n-۱$، رنگ $۴j-۵$ و در ستون یک، رنگ m و در ستون n رنگ $۴n-۷$ می‌باشند. بعلاوه داریم:

$$c(m-۱, ۲) = m,$$
$$c(۳n-۵, n-۱) = ۴n-۷,$$
$$c(۳j-۵, j+۱) = ۴j-۵,$$
$$c(۳j-۳, j-۱) = ۴j-۵.$$

لذا مجموعه S سیستمی b-غالب از رنگ‌های $\{۱, ۲, \dots, m+۱\}$ تشکیل می‌دهد. در قسمت (a) شکل (۵.۴)، این رنگ‌آمیزی برای $m = ۵$ نشان داده شده است، که راس‌های b-غالب مشخص شده‌اند.
حال فرض $m = ۲n - ۵$.
یک b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_m\Box P_{n-۱}$ با $m+۱$ رنگ مانند فوق در نظر می‌گیریم. یک ستون به آن اضافه کرده و آن ستون را مانند ستون یک رنگ‌آمیزی می‌کنیم. این b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_m\Box P_n$ توسط $m+۱$ رنگ ایجاد می‌کند.
حالت ۲. ۴ $m = ۲n - ۴$.
در شکل (۴.۴)، $\varphi(K_۴\Box P_۴) = ۵$، راس‌های b-غالب مشخص شده‌اند.
فرض $n \ge ۵$، رنگ‌آمیزی $c : V(K_m\Box P_n) \longrightarrow \{۱, ۲, \dots, m+۱\}$ به صورت زیر را تعریف

۵	۲	۵	۴
۱	۳	۴	۱
۳	۵	۱	۲
۴	۱	۲	۳

شکل ۴.۴: b -رنگ‌آمیزی از گراف $K_۴\square P_۴$ توسط ۵ رنگ

می‌کنیم:

$$c(i,j)=\begin{cases} m-۱ & (i,j)=(m,۱),\\ m+۱ & (i,j)=(۳j-۴,j),\ ۱\le j\le \lceil\frac{n}{۲}\rceil,\\ m+۱ & (i,j)=(۳j-۵,j),\ \lceil\frac{n}{۲}\rceil+۱\le j\le n-۱,\\ m+۱ & (i,j)=(۳n-۷,n),\\ i+j-۱ \pmod m & o.w. \end{cases}$$

واگذاری فوق رنگ‌آمیزی مجازی برای گراف $K_m\square P_n$ است. مشابه حالت یک، مجموعه $\{(m-۱,۱),(۳n-۶,n),(۳j-۵,j),(۳j-۳,j),(i,۳i-۶)\mid \lceil\frac{n}{۲}\rceil+۱\le i\le n-۱,\ ۲\le j\le\lceil\frac{n}{۲}\rceil\}$ سیستمی b-غالب است. در قسمت (b) شکل (۵.۴)، این رنگ‌آمیزی برای $m=۶$ نشان داده شده، که راس‌های b-غالب مشخص شده است.

حال فرض $m\le ۲n-۶$.

۱	۲	۳	۶
۲	۶	۴	۵
۳	۴	۵	۱
۶	۵	۱	۲
۴	۱	۶	۳

(a)

۱	۲	۳	۷	۵
۲	۷	۴	۵	۷
۳	۴	۵	۶	۱
۴	۵	۶	۱	۲
۷	۶	۷	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

(b)

شکل ۵.۴: b -رنگی از گراف $K_۵\square P_۴$ و $K_۶\square P_۵$ توسط ۶ و ۷ رنگ

$n'=n-۲$ قرار دهید. چون $m\le ۲n'-۲$، باتوجه به قضیه ۲.۳.۴، $n'\ge ۴$ و $\varphi(K_m\square C_{n'})=m+۲$ و باتوجه به نتیجه ۸.۲.۴ داریم:

$$\varphi(K_m\square P_n)\ge m+۲$$

۵	۱	۶	۴	۶
۶	۲	۵	۳	۱
۴	۳	۴	۲	۴
۱	۴	۱	۶	۵

شکل ۶.۴: b -رنگی از گراف $K_۴\Box P_۵$ توسط ۶ رنگ

لذا باتوجه به ۲.۴ برای $n \geq ۶$ داریم:

$$\varphi(K_m\Box P_n) = m + ۲.$$

برای $n = ۵$ یک b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_m\Box P_n$ در شکل (۶.۴)، نشان داده‌ایم.

□

۵.۴ عدد b -رنگی گراف $K_n\Box K_n$

می‌دانیم $\chi(K_n\Box K_n) = n$ و $\Delta(K_n\Box K_n) = ۲n - ۲$. باتوجه به $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + ۱$ داریم $n \leq \varphi(K_n\Box K_n) \leq ۲n - ۱$.

لم ۱.۵.۴. فرض c، b-رنگ‌آمیزی از گراف $K_n\Box K_n$ با $۲n - ۱$ رنگ باشد. اگر دو راس (i, j) و (i, t) راس‌های b-غالب در b-رنگ‌آمیزی c باشند، آنگاه در ستون‌های j و t هیچ راس b-غالب دیگری وجود ندارد.

برهان. فرض c یک b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_n\Box K_n$ با $۲n - ۱$ رنگ باشد. واضح است که اگر راس (x, y) در رنگ‌آمیزی c، b-غالب باشد، آنگاه همه $۲n - ۲$ همسایه‌هایش باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. پس رنگ‌های راس‌ها در سطر x و در ستون y متفاوت هستند. باتوجه به فرض خلف راس‌های $(i, j), (i, t), (i', j)$, $i \neq i'$ را راس‌هایی b-غالب فرض می‌کنیم. چون راس (i, t) راسی b-غالب است، راس‌ها در سطر i و ستون t همگی رنگ‌های متفاوت دارند. بنابراین اگر $c(i', t) = a$ آنگاه راسی با رنگ a در سطر i نداریم. از طرفی چون راس (i, j) راسی b-غالب بود، باید در ستون j راسی با رنگ a داشته باشیم. حال در سطر i' و ستون j دو راس با رنگ a داریم. که تناقض با b-غالب بودن راس (i', j) دارد. به دلیل مشابه راس (i', t) برای $i \neq i'$، راسی b-غالب نیست. □

قضیه ۲.۵.۴. برای هرعدد صحیح مثبت $n \geq ۲$، داریم

$$\varphi(K_n\Box K_n) \leq ۲n - ۲.$$

برهان. می‌دانیم که $\varphi(K_n\Box K_n) \leq ۲n - ۱$. $\varphi(K_n\Box K_n) = ۲n - ۱$ قرار دهید و c را b-رنگ‌آمیزی با $۲n - ۱$ رنگ فرض کنید. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که سطرهای یک تا r هر یک حداقل

دو راس b-غالب و سطرهای $r+۱$ تا n هر یک حداکثر یک راس b-غالب دارند و راس‌های b-غالب موجود در r سطر اول را در s ستون اول فرض می‌کنیم. با توجه به لم ۱.۵.۴، در هر ستون j که $۱ \leq j \leq s$، فقط یک راس b-غالب وجود دارد. اگر $r = ۰$ یا $s = n$ آنگاه حداکثر n راس b-غالب داریم که تناقض است. اندازه سیستم b-غالب در رنگ‌آمیزی c حداکثر $s + (n-r)$ است. حال اگر $r > ۰$ و $s < n$، آنگاه تعداد راس‌های b-غالب حداکثر $s + (n-r) \leq ۲n - ۱ - r < ۲n - ۱$ است که با فرض تناقض دارد. $\square$

قضیه ۳.۵.۴. برای هر عدد صحیح مثبت $n \geq ۵$، داریم

$$\varphi(K_n \square K_n) \geq ۲n - ۳.$$

برهان. b-رنگ‌آمیزی c را با $۲n - ۳$ رنگ برای دو حالت n فرد و n زوج ارایه می‌دهیم. تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{فرد } x, \\ x - ۲ & \text{زوج } x. \end{cases}$$

حالت ۱. n فرد باشد.

در این حالت واگذاری $c : V(K_n \square K_n) \longrightarrow \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c(i,j) = \begin{cases} i + j - ۱ \pmod{n-۱} & i \leq j \leq n - i - ۱, \\ f(i+j) \pmod{n-۱} & n - i \leq j \leq n - ۲,\ i \leq j, \\ (i + j - ۲ \pmod{n-۲}) + (n-۱) & j < i \leq n - ۱,\ (i,j) \neq (n-۱, n-۲), \\ n - ۳ & (i,j) = (n-۱, n-۲). \end{cases}$$

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۱۱
۷	۳	۴	۵	۱	۲	۶
۸	۹	۵	۱	۶	۴	۱۰
۹	۱۰	۱۱	۶	۳	۱	۲
۱۰	۱۱	۷	۸	۲	۳	۹
۱۱	۷	۸	۹	۴	۱۰	۵
۶	۸	۲	۷	۹	۱۱	۱

(a)

۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۸
۸	۹	۳	۴	۵	۱	۲	۶
۹	۱۰	۱۱	۵	۱	۶	۴	۱۲
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۶	۳	۱	۲
۱۱	۱۲	۱۳	۷	۸	۲	۳	۹
۱۲	۱۳	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۴
۱۳	۷	۸	۹	۱۰	۴	۱۲	۵
۴	۶	۱۰	۲	۷	۱۱	۵	۱

(b)

شکل ۷.۴: b -رنگی از گراف $K_۷\Box K_۷$ و $K_۸\Box K_۸$ توسط ۱۱ و ۱۳ رنگ

برای ستون‌های $n-۱$ و n و سطر n، واگذاری c به صورت زیر است.

$$c(i,n-۱)=\begin{cases} ۲i-۲ \pmod{n-۱} & ۱\le i\le \frac{n-۱}{۲},\\ ۲i-۱ \pmod{n-۱} & \frac{n+۱}{۲}\le i\le n-۲,\\ ۲n-۴ & i=n-۱.\end{cases}$$

$$c(i,n)=\begin{cases} (۲i-۲ \pmod{n-۲})+(n-۱) & \text{فرد } i,\ i\le n-۲,\\ i-۲ \pmod{n-۱} & \text{زوج } i,\ i\le n-۲,\\ n-۲ & i=n-۱.\end{cases}$$

$$c(n,j)=\begin{cases} j-۱ \pmod{n-۱} & \text{فرد } j,\ j\le n-۳,\\ (۲j-۲ \pmod{n-۲})+(n-۱) & \text{زوج } j,\\ ۲n-۵ & j=n-۲,\\ ۱ & j=n.\end{cases}$$

واگذاری c یک b-رنگ‌آمیزی است و مجموعه‌ی زیر

$$S=\{(i,j),(j+۱,j)\mid ۱\le i\le n-۱,\ ۱\le j\le n-۲\}$$

سیستم b-غالب را تشکیل می‌دهند. چون راس‌ها در S همگی رنگ‌های متفاوتی دارند و برای هر راس در S رنگ‌ها در سطر و ستون آن راس بجز دوتای آخری با هم فرق دارند.

در قسمت (a) شکل (۷.۴)، این رنگ‌آمیزی برای $n=۷$ نشان داده شده است و راس‌های مشخص شده راس‌های b-غالب هستند. **حالت ۲.** n زوج است.

در این حالت واگذاری $c : V(K_n \square K_n) \longrightarrow \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c(i,j) = \begin{cases} i+j-۲ \pmod{n-۲} & i+۱ \le j \le n-i-۱, \\ f(i+j-۱) \pmod{n-۲} & n-i \le j \le n-۲,\ i+۱ \le j, \\ (i+j-۱ \pmod{n-۱}) + (n-۲) & j \le i \le n-۱,\ (i,j) \neq (n-۱, n-۲), \\ n-۴ & (i,j) = (n-۱, n-۲). \end{cases}$$

برای ستون‌های $n-۱, n$ و سطر n واگذاری c به صورت زیر است.

$$c(i,n-۱) = \begin{cases} ۲i-۲ \pmod{n-۲} & ۱ \le i \le \frac{n-۲}{۲}, \\ ۲i-۱ \pmod{n-۲} & \frac{n}{۲} \le i \le n-۳, \\ ۲n-۵ & i = n-۲, \\ ۲n-۴ & i = n-۱, \\ n-۳ & i = n. \end{cases}$$

$$c(i,n) = \begin{cases} (۲i \pmod{n-۱}) + (n-۲) & \text{فرد } i,\ i \le n-۲, \\ i-۲ \pmod{n-۲} & \text{زوج } i,\ i \le n-۲, \\ n-۳ & i = n-۱, \\ ۱ & i = n. \end{cases}$$

$$c(n,j) = \begin{cases} (۲j-۲ \pmod{n-۱}) + (n-۲) & \text{فرد } j,\ ۳ \le j \le n-۳, \\ j-۲ \pmod{n-۲} & \text{زوج } j,\ j \le n-۳, \\ n-۴ & j = ۱, \\ ۲n-۵ & j = n-۲. \end{cases}$$

c یک b-رنگ‌آمیزی است و مجموعه

$$S = \{(i,i), (j-۱, j) \mid ۱ \le i \le n-۱,\ ۲ \le j \le n-۲\} \cup \{(n-۱, n-۲)\}$$

سیستم b-غالب آن می‌باشد. چون راس‌ها در S همگی رنگ‌های متفاوتی دارند و برای هر راس در S، رنگ‌ها در سطر و ستون آن راس بجز دوتای آخر با هم فرق دارند.
قسمت (b) شکل (۷.۴)، چنین رنگ‌آمیزی را برای $n = ۸$ نشان می‌دهد.

$\square$

تذکر ۱.۴. برای $n = ۳$ b-رنگ‌آمیزی با چهار رنگ نامکن است، قسمت (a) شکل (۸.۴)، که راس‌های b-غالب مشخص شده‌اند، پس $\varphi(K_۳ \square K_۳) = ۳$.

١	٢	٣
۴	٣	١
٢	۴	؟

(a)

١	٢	٣	۴
۵	۴	١	٢
۶	۵	۴	٣
٣	۶	٢	١

(b)

شکل ۸.۴: b -رنگی از گراف $K_۳\square K_۳$ و $K_۴\square K_۴$

برای $n = ۴$ یک b-رنگ‌آمیزی برای گراف $K_۴\square K_۴$ با $۲n - ۲ = ۶$ رنگ وجود دارد، قسمت (b) شکل (۸.۴).

مراجع

[1] Mostafa Blidia, Frédéric Maffray, and Zoham Zemir. On b-colorings in regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157(8):1787–1793, 2009.

[2] Peter J Cameron. *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*. Cambridge University Press, 1994.

[3] Charles J Colbourn and Alexander Rosa. *Triple systems*. Clarendon Press Oxford, 1999.

[4] Sylvain Gravier. *Coloration et produits de graphes*. PhD thesis, 1996.

[5] Robert W Irving and David F Manlove. The b-chromatic number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 91(1):127–141, 1999.

[6] Ramin Javadi and Behnaz Omoomi. On b-coloring of cartesian product of graphs.

[7] Ramin Javadi and Behnaz Omoomi. On b-coloring of the kneser graphs. *Discrete mathematics*, 309(13):4399–4408, 2009.

[8] M Kouider and A El Sahili. About b-colouring of regular graphs. *Rapport de Recherche*, (1432), 2006.

[9] Mekkia Kouider and Maryvonne Mahéo. Some bounds for the< i> b</i>-chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 256(1):267–277, 2002.

[10] Mekkia Kouider and Maryvonne Mahéo. Some bounds for the< i> b</i>-chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 256(1):267–277, 2002.

[11] CC Lindner and CA Rodger. Design theory. 1997.

[12] László Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25(3):319–324, 1978.

[13] Behnaz Omoomi and Ramin Javadi. On the b-coloring of cartesian product of graphs.

[14] Peter Rowlinson and Irene Sciriha. Some properties of the hoffman-singleton graph. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1(2):438–445, 2007.

[15] Vadim G Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Diskret. Analiz*, 29(3):10, 1976.

[16] EW Weisstein. Hoffman-singleton graph. *From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld. wolfram. com/Hoffman-SingletonGraph. html.*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

b–رنگ آمیزی .... b-coloring
k–رنگ پذیر .... k-colorable
b–پیوستگی .... b-continuous

الف

استارلایک .... starlike
استقرا .... induction
اسکولم .... Skolem

ب

بلوک .... block
به‌ترتیب .... respectively
بوس .... Bose

ت

تجزیه شده .... decomposition

ج

جزیی .... partial

خ

خوشه .... clique

د

درجه .... degree
دنباله .... sequence
دور .... cycle

ر

راس .... vertex
راس‌ها .... vertices
رنگ‌آمیزی .... coloring

رنگ‌آمیزی مجاز .... proper coloring

ز

زیرگراف .... subgraph

زیرگراف القایی .... induced subgraph

زوج .... even

س

ساختار .... construction

ستاره .... star

ستون .... clumn

سطر .... row

سه‌گانه .... triple

ش

شرایط .... conditions

شرط هال .... Hall's condition

ض

ضرب دکارتی .... cartesian product

ع

عدد رنگی .... chromatic number

غ

غالب .... dominating

غایب .... missing

ف

فرد .... odd

ک

کلاس‌رنگی .... color class

کمر .... girth

گ

گراف .... graph

گراف پترسن .... Petersen graph

گراف ساده .... simple graph

گراف کامل .... complete graph

گراف کنسر .... kneser graph

گراف منتظم .... regular graph
گراف همبند .... connected graph

م

مثلث .... triangle
مجاور .... adjacent
مجموعه‌ی مستقل .... independent set
مسیر .... path
مولفه .... component

ه

همسایه .... neighbor

ی

یال .... edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

adjacent .... مجاور

B

b-chromatic number .... رنگی$b-$ عدد

b-coloring .... رنگ‌آمیزی$b-$

b-continuous .... پیوستگی$b-$

block .... بلوک

Bose .... بوس

C

Cartesian product .... ضرب دکارتی

chromatic number .... عدد رنگی

clique .... خوشه

clumn .... ستون

coloring .... رنگ آمیزی

color class .... کلاس رنگی

complete graph .... گراف کامل

component .... مولفه

condittions .... شرایط

connected graph .... گراف همبند

construction .... ساختار

cycle .... دور

D

degree .... درجات

decomposition .... تجزیه شده

dominating .... غالب

E

edge .... یال

even .... زوج

G

girth .... کمر

graph .... گراف

H

hall's condition .... شرط هال

I

independent set .... مجموعه مستقل

induced subgraph .... زیرگراف القایی

induction .... استقرا

K

k-colorable .... $k-$رنگ پذیر

k-coloring .... $k-$رنگ آمیزی

Kneser gragh .... گراف کنسر

M

missing .... غایب

N

neighbor .... همسایه

O

odd .... فرد

P

partial .... جزیی

petersen graph .... گراف پترسن

proper coloring .... رنگ آمیزی مجاز

R

regular graph .... گراف منتظم

row .... سطر

respectively .... به‌ترتیب

S

sequence .... دنباله

simple graph .... گراف ساده
Skolem .... اسکولم
star .... ستاره
starlike .... استارلایک
Steiner .... استاینر
subgraph .... زیرگراف
system .... کمر

T

triangle .... مثلث
triple .... سه‌گانه

V

vertex .... راس
vertice .... راس‌ها

نمایه

Abstract

The purpose of this thesis is to consider one state of coloring the graphs named b-coloring. This coloring partitions the vertexes of graph into independent sets named color classes in such away which there is a vertex in each classes. That vertex possesses a neighbor in rest of classes. In following we have considered the biggest partition for particular graphs such as canned ,regular and the graphs which are derived from the product of tow Cartesian graphs.

Keywords:

b-coloring; b-chromatic number; b-dominating system; cartesian product of graphs; regular graphs.

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

b-coloring of graphs

Fatemeh SHahosini

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

2015