دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری در مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر علی مس‌فروش

دانشجو

بهاره حسین‌نیای حسن‌کیاده

۱۳۹۳

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است.

به استوارترین تکیه گاهان، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

همسرم که نشانه ی لطف الهی در زندگیم است.

خواهرانم که همراهان همیشگی و صفایشان مایه آرامش من است.

که هر آنچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما.

بوسه بر دستان پر مهرتان

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند، شمارندگان شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان حق او گزاردن نتوانند.

سپاسگزار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده می‌شوم و از دیگری جاودانه.

استاد مهربانم، جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت.

پدر و مادری که تار مویی از آن‌ها به پای من سیاه نماند.

همسرم که در تمام طول تحصیل با قلبی آکنده از عشق و معرفت، همراه و همگام من بوده‌است.

سرکار خانم ندا طهماسبی و برادر مهربانم، نوید رضایی به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی‌چشم داشتشان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند.

بهاره حسین نیای حسن کیاده
۱۳۹۳

تعهد نامه

اینجانب بهاره حسین‌نیای حسن‌کیاده دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری در مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی ، تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

بهاره حسین‌نیای حسن‌کیاده
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، یافتن ماتریس پسخورد حالت را برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی شرح می‌دهیم. مسئله ثابت نگه داشتن یک بخش از طیف ماتریس حلقه باز سیستم خطی با کنترل پسخورد حالت و خارج کردن باقیمانده طیف را مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی می‌نامند. اصل این مسئله برای سیستم‌هایی به کار می‌رود که به طور کامل پایدار نیستند و تعدادی از مقادیر ویژه طیف حلقه باز، که تنها همین مقادیر نیاز به تخصیص دوباره دارند، در ناحیه پایداری قرار ندارند. از آن‌جایی که این مسئله در نظریه کنترل و بهینه سازی از اهمیت بالایی برخوردار است، روش‌های گوناگونی برای حل آن ارائه شده‌است که در ابتدای این پایانامه برخی از آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به اختصار روش به کار برده شده در این پایانامه به گونه‌ای است که با استفاده از بردارهای ویژه سمت چپ وابسته به مقادیر ویژه ناپایدار ، مسئله را به یک مسئله تخصیص مقدار ویژه تبدیل می‌کنیم و با کاربرد تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، ماتریس پسخورد حالتی را محاسبه می‌کنیم که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد.
از آن‌جایی که مینیمم‌سازی نورم ماتریس پس‌خورد حالت در بهینه سازی سیستم کنترل خطی، دارای اهمیت فراوانی است، با استفاده از روش پیشنهادی و گراف انتقال حالت، ماتریس پس خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که دارای کم‌ترین نورم است. در ادامه نیز روشی نو برای یافتن ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی ارائه می‌دهیم. در انتهای هر بحث، برای شرح بیش‌تر مثال عددی نیز آورده شده‌است.

کلمات کلیدی: پایداری، تخصیص مقادیر ویژه جزئی، ماتریس پسخورد حالت، تبدیلات تشابهی، گراف انتقال حالت، مینیمم نورم.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. حسین‌نیای حسن‌کیاده. ب و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۳)، "محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی در مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی"، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، ص ۱۰۷-۱۰۴، سمنان.

۲. حسین‌نیای حسن‌کیاده. ب و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۳)، "تخصیص مقادیر ویژه جزئی پارامتری غیر خطی"، پنجمین همایش آنالیز عددی و کاربردهای آن،ص ۳۱-۲۸، دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان.

۳. حسین‌نیای حسن‌کیاده. ب و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۳)، "تخصیص مقادیر ویژه جزئی در سیستم‌های کنترل خطی با استفاده از ماتریس پسخورد حالت"، پنجمین همایش آنالیز عددی و کاربردهای آن،ص ۲۷-۲۴، دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان.

۴. شجایی مقدم ممرآبادی. زری و حسین‌نیا حسن‌کیاده. ب، (۱۳۹۳)، "کنترل همزمان سیستم‌های تاخیری گسسته زمانی به وسیله الگوریتم ژنتیک با ماتریس پسخورد حالت " ، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران،ص ۲۸، سمنان.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی[۱]، یکی از مسائل اساسی در نظریه کنترل و بهینه سازی می‌باشد که از دیرباز مورد توجه نویسندگان و محققان بوده است. این مسئله برای دستگاه‌های کنترل خطی به‌کار می‌رود که نزدیک به پایداری هستند. به‌عبارت دیگر دستگاه‌هایی که طیف ماتریس حلقه باز به‌طور کامل در ناحیه پایداری قرار ندارد و لازم است که برای پایدارسازی دستگاه بخشی از طیف ماتریس حلقه باز آن را تغییر داد.

بسیاری از برنامه‌های عملی مانند، سازه‌های بزرگ و پراکنده، شبکه‌های برق، خطوط نیرو، شبکه‌های کامپیوتری، ... باعث ایجاد ماتریس‌های بزرگ و اسپارس و مشکلات فراوانی می‌شود که روش‌های عددی مرسوم برای تخصیص مقدار ویژه، به خوبی عمل نمی‌کنند.

در بسیاری از این مسائل کاربردی، تنها تعداد اندکی از مقادیر ویژه که مسئول بی‌ثباتی می‌باشند، نیاز به تغییر دارند. بدیهی است که تخصیص کامل مقادیر ویژه در مورد زمانی که فقط تعداد اندکی از مقادیر ویژه نامطلوب هستند، مناسب نیست. در چنین مواقعی، مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی برای دستگاه کنترل خطی به میان می‌آید. در چند دهه اخیر روش‌های مختلفی برای حل این مسئله پیشنهاد شده‌است. یک روش پیشنهادی برای حل این مسئله استفاده از الگوریتم آرنولدی است که توسط سعد[۲] و داتا [۳] [۸] ارایه شده‌است و به حل معادله سیلوستر [۴] دستگاه کنترل خطی با استفاده از الگوریتم آرنولدی می‌پردازد، سپس مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را توسط جواب این معادله حل می‌نماید. سعد [۲۲] نیز با استفاده از تجزیه شور جزئی برای ماتریس A^T و کاربرد مسئله معکوس مقدار ویژه، به حل این مسئله پرداخت. د. کالواتی[۵] و ب. لوییز [۶] [۲] از روش فرایند آرنولدی به‌طور ضمنی دوباره آغاز شده برای حل این مسئله استفاده نمودند. این روش، پایه‌ای روی همان روش

---

[۱] Partial eigenvalue assignment problem

[۲] Yousef Saad

[۳] B. N.Datta

[۴] Silvester equation

[۵] D.Calvetti

[۶] B.Lewis

آرنولدی است که داتا و سعد آن را به‌کار بردند، با این تفاوت که در فرایند آرنولدی به‌طور ضمنی دوباره آغاز شده بعد از اجرای $2m$ مرحله چنانچه m مقدار ویژه به‌دست آمده ماتریس دارای قسمت حقیقی مثبت باشند، فرایند از $l = min\{k, m\}$ (k تعداد مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس A) دوباره با تعریف بردار آغازین انجام می‌شود. گرچه این روش کاراتر از روش آرنولدی است اما محاسبات آن بسیار طولانی است. محمد.ا.رمضان [۷] و اهاب ا.ال-سعید [۸] [۲۰] الگوریتمی را ارایه دادند که در آن با تعریف $f^T = \beta Y_1^H A$ (Y_1^H ماتریس بردار ویژه‌های چپ وابسته به $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$) و محاسبه پارامتر β، بردار پس خورد حالت را می‌توان به‌صورتی به‌دست آورد که مقادیر ویژه موردنظر را به دستگاه اختصاص می‌دهد، در ادامه نیز نشان دادند که بردار پس خورد حالت حقیقی است.

در این پایان‌نامه نیز روشی جدید برای به‌دست آوردن ماتریس پسخورد حالت حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی شرح می‌دهیم.

- در ادامه فصل یک، تعاریف مقدماتی مورد نیاز را شرح می‌دهیم.

- در فصل دوم، مسئله تخصیص مقادیر ویژه، مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی و یکتایی جواب را در هر دو مسئله، به‌طور کامل در دستگاه های کنترل خطی مورد بررسی قرار داده‌ایم و برخی روش‌های موجود برای حل این مسئله با مثال ارایه شده‌است.

- در فصل سوم، با استفاده از مقادیر ویژه مثبت ماتریس حلقه باز دستگاه و بردارهای ویژه سمت چپ متناظر با مقادیر ویژه مثبت، ماتریس حلقه باز دستگاه را به ماتریس‌هایی با ابعاد کوچک‌تر تجزیه کرده و سپس توسط ماتریس‌های جدید ماتریس افزوده‌ای تشکیل داده، با استفاده از عملیات تشابهی ماتریس افزوده را به‌فرم استاندارد اشلون و سپس به‌فرم همدم برداری تبدیل می کنیم. با استفاده از این مفاهیم، ماتریس پس‌خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که مقادیر ویژه دلخواه را به دستگاه اختصاص دهد. در ادامه نیز مثال و نمودار پایداری را برای شرح روش می‌آوریم.

- در فصل چهارم، مینیمم‌سازی نورم ماتریس پس‌خورد حالت را بررسی می‌کنیم. بدین منظور، ابتدا به پارامتری‌سازی ماتریس پس‌خورد حالت می‌پردازیم، زیرا پارامتری‌سازی در بهینه‌سازی ماتریس پس‌خورد حالت مؤثر است. بنابراین در این فصل ابتدا با استفاده از روش شرح داده شده در فصل سوم و گراف انتقال حالت، ماتریس پس خورد حالت پارامتری را که مقادیر ویژه مورد نظر را به دستگاه اختصاص دهد، به‌دست می‌آوریم. سپس ماتریس پس‌خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که نورم کمینه داشته باشد.

- در فصل پنجم، ماتریس پسخورد پارامتری غیر خطی را با روش جدید به‌دست می‌آوریم. در انتهای فصل نیز با مثال عددی این روش را تشریح می‌کنیم.

---

[۷] Mohamed.A.Ramadan

[۸] EhabA. El - Sayed

۲.۱ تعاریف مقدماتی

۱.۲.۱ بردار

برای توضیحات بیشتر این مبحث به [۱۸] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ای منظم از اعداد را بردار نامند و این اعداد عناصر بردار نامیده می‌شوند. بردار v با داشتن n عنصر به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

بردار v بالا به صورت $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ نیز نوشته می‌شود.

بردار اشاره شده به صورت (۱.۱)، بردار ستونی و ترانهاده آن، بردار سطری نامیده می‌شود. مجموعه همه بردارهای حقیقی با بعد n را با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند. ترانهاده بردار v را با v^T و ترانهاده - مزدوج مختلط v را با v^H نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. ضرب داخلی دو بردار u و v، ضرب اسکالر نامیده می‌شود:

$$\langle u, v\rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \cdots + \bar{u}_n v_n$$

تعریف ۳.۲.۱. طول بردار v با $\|v\|$ نشان داده می‌شود و برابر $\sqrt{v^H v}$ است.

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2}$$

۲.۲.۱ ماتریس

تعریف ۴.۲.۱. A مجموعه‌ای از mn عنصر مرتبط در یک آرایه مستطیلی، متشکل از m سطر و n ستون است که یک ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

که به صورت $A = (a_{ij})_{m\times n}$، ($i = 1, 2, \ldots, m$، $j = 1, 2, \ldots, n$) نیز نشان داده می‌شود. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$، با عناصر طبیعی، با $\mathbb{R}^{m\times n}$ و مجموعه همه ماتریس‌ها، با عناصر مختلط، با $\mathbb{C}^{m\times n}$ نشان داده می‌شوند.

ماتریس A با تعداد سطر و ستون برابر، ماتریس مربعی نامیده می‌شود. ماتریس مربعی که تمام عناصر روی قطر اصلی آن یک و سایر عناصر آن صفر باشد را ماتریس واحد می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

جمع دو ماتریس $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ یک ماتریس است که در آن:
$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

اگر c یک اسکالر باشد، سپس cA یک ماتریس است:
$$cA=(ca_{ij})$$

ترانهاده ماتریس ، $A_{m\times n}$ یک ماتریس $n\times m$ است و با A^T نشان داده می‌شود.
$$A^T=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۱} & \dots & a_{m۱} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{۱n} & a_{۲n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ترانهاده مزدوج ماتریس A، ماتریس $A^H=(\bar{A})^T$ است که در آن $\bar{A}$، ماتریس تشکیل شده از ماتریس A است که عناصر آن، مزدوج مختلط شده‌اند. ماتریس مربعی A متقارن است، اگر $A=A^T$ باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A ماتریس مربعی $m\times n$ و B ماتریس $n\times p$ باشد. سپس ضرب AB، یک ماتریس $m\times p$ است که به صورت زیر به‌دست می‌آید:
$$AB=(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}) \quad ; \quad i=۱,۲,\cdots,m, j=۱,۲,\cdots,p$$

اگر b یک بردار ستونی باشد، Ab یک بردار ستونی است.

تعریف ۶.۲.۱. [۱۸]نورم ماتریس[۹]، نگاشت $\|\ .\ \|: R^{m\times n}\longrightarrow R$ است به‌طوری‌که:

۱. $\| A \|\geq ۰$، به ازای $A\in R^{m\times n}$ و $\| A \|=۰$ اگروفقط اگر $A=۰$ ،

۲. $\| \alpha A \|=|\alpha|\ \| A \|$ به ازای $\alpha\in R$ و $A\in R^{m\times n}$ (خاصیت همگنی)،

۳. $\| A+B \|\leq\| A \|+\| B \|$ به ازای $A,B\in R^{m\times n}$ (نامساوی مثلثی) .

۴. $\| A.B \|\leq\| A \|\ .\ \| B \|$

تعریف ۷.۲.۱. نورم
$$\| A \|_F=\sqrt{\sum_{i,j=۱}^{n} \|a_{ij}\|^{۲}}=tr(AA^H), \tag{۲.۱}$$
که یک نورم ماتریسی است، نورم فروبینیوس[۱۰] (یا نورم اقلیدسی[۱۱] در $C^{n^۲}$) نامیده می‌شود[۱۸].

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنید $\|\ .\ \|$ یک نورم برداری باشد، تابع
$$\| A \|=\sup_{x\neq ۰}\frac{\| Ax \|}{\| x \|}, \tag{۳.۱}$$

[۹] Matrix norm
[۱۰] Frobenius norm
[۱۱] Euclidean norm

یک نورم ماتریسی است که نورم ماتریسی القایی [۱۲] (نورم ماتریسی طبیعی [۱۳]) نامیده می‌شود [۱۸].

برهان. ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که (۳.۱) هم ارز

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|,$$

است. در واقع، برای هر $x \neq 0$ بردار واحد $u = \frac{x}{\|x\|}$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که (۳.۱) به‌صورت

$$\| A \| = \sup_{\|u\|=1} \| Au \| = \| Aw \|, \quad \| w \| = 1. \tag{۴.۱}$$

باشد. حال نشان می‌دهیم (۳.۱) (یا به‌طور معادل (۴.۱)) یک نورم است. با استفاده از تعریف ۶.۲.۱ داریم:

۱. اگر $\| Ax \| \geq 0$ ، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| \geq 0$. به‌علاوه

$$\| A \| = \sup_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = 0 \Longleftrightarrow \| Ax \| = 0, \quad x \neq 0$$

و $Ax = 0$ برای $x \neq 0$ اگروتنهااگر $A = 0$؛ بنابراین $A = 0 \Leftrightarrow \| A \| = 0$.

۲. اسکالر α را در نظر می‌گیریم، پس

$$\| \alpha A \| = \sup_{\|x\|=1} \| \alpha Ax \| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = |\alpha| \| A \| .$$

۳. سرانجام، خاصیت نامساوی مثلثی برقرار است. زیرا، با استفاده از تعریف سوپریمم، اگر $x \neq 0$ آن‌گاه

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leq \| A \| \Longrightarrow \| Ax \| \leq \| A \| \| x \|,$$

بنابراین، با فرض x با نورم یک، به‌دست می‌آوریم:

$$\| (A+B)x \| \leq \| Ax \| + \| Bx \| \leq \| A \| + \| B \|,$$

در نتیجه

$$\| A+B \| = \sup_{\|x\|=1} \| (A+B)x \| \leq \| A \| + \| B \| .$$

□

تعریف ۹.۲.۱. نورم یک [۱۴] و نورم بینهایت [۱۵] به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\| A \|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} | a_{ij} |, \quad \| A \|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | . \tag{۵.۱}$$

[۱۲] Induced matrix norm
[۱۳] Natural matrix norm
[۱۴] 1-norm
[۱۵] Infity norm

و به‌ترتیب نورم مجموع ستونی [۱۶] و نورم مجموع سطری [۱۷] نیز نامیده می‌شوند.
به‌علاوه داریم: $\| A^T \|_\infty = \| A \|_۱$ و اگر A خودمزدوج یا متقارن حقیقی باشد $\| A \|_\infty = \| A \|_۱$.

تعریف ۱۰.۲.۱. برای هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$، اسکالر منحصربه‌فردی را به عنوان دترمینان می‌توان نسبت داد که به صورت $\det(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}(-۱)^{i+j}\det(A_{ij}) \qquad (۶.۱)$$

که در آن A_{ij}، ماتریس مربعی $(n-۱)\times(n-۱)$ است که از حذف سطر iام و ستون jام از ماتریس $A_{n\times n}$ به‌دست می‌آید.

خواص دترمینان عبارت است از:

۱. با تعویض جای دو سطر یا ستون در ماتریس A، تنها علامت دترمینان ماتریس A تغییر می‌کند.

۲. $\det(A) = \det(A)^T$.

۳. اگر یک سطر یا ستون ماتریس در اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در k ضرب می‌شود.

۴. برای دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم: $|AB| = |A|.|B|$.

۵. اگر یک ماتریس دو سطر یا ستون یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.

۶. اگر تمامی درایه‌های ماتریس مربعی $A_{n\times n}$، در اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در k^n ضرب خواهد شد: $|kA| = k^n|A|$.

۷. دترمینان ماتریس مثلثی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطری آن می‌باشد.

۳.۲.۱ فضای برداری

تعاریف و قضایای این فصل از [۱۸] و [۴] گرفته شده‌است.

تعریف ۱۱.۲.۱. یک فضای برداری مانند V، بر روی میدان F، مجموعه‌ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب، شرایط زیر را برآورده می‌سازند:

۱. $\forall u, v \in V \Longrightarrow u+v \in V$.

۲. $\forall u \in V, \forall \alpha \in F \Longrightarrow \alpha u \in V$.

۳. $\forall u, v \in V \Longrightarrow u+v = v+u$.

[۱۶] Column sum norm

[۱۷] Row sum norm

۴. $\forall u, v, w \in V \Longrightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$.

۵. $\forall u \in V, \exists ۰ \in V \Longrightarrow u + ۰ = ۰ + u = u$.

۶. $\forall u \in V, \exists -u \in V \Longrightarrow u + (-u) = (-u) + u = ۰$.

۷. $\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in F \Longrightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

۸. $\forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in F \Longrightarrow \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

۹. $\forall u \in V, \forall ۱ \in F \Longrightarrow ۱u = u$.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F و S یک زیرمجموعه غیر تهی از V باشد، S را یک زیرفضا از V می‌نامند، هرگاه:

۱. $\forall s, t \in S \longrightarrow s + t \in S$.

۲. $\forall s \in S, \forall \alpha \in F \longrightarrow \alpha s \in S$.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم V فضای برداری و S یک زیرمجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $\nu \in V$ را ترکیب خطی از اعضای V گوییم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند $u_۱, \ldots, u_n$ و اسکالرهای $a_۱, \ldots, a_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که:

$$\nu = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \ldots + a_nu_n.$$

قضیه ۱۴.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، آن‌گاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای V است.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲.۱. زیرمجموعه S از فضای V را در نظر بگیرید. برای اسکالرهای c_i، $(i = ۰, ۱, \ldots, n)$، اگر معادله به شکل

$$\forall u_۱, u_۲, \cdots, u_n \in S \quad , \quad c_۱u_۱ + c_۲u_۲ + \cdots + c_nu_n = ۰$$

فقط به شرط این‌که $c_۱ = c_۲ = \ldots = c_n = ۰$ برقرار باشد، آنگاه بردارهای $u_۱, u_۲, \ldots, u_n$ را مستقل خطی نامند.

در غیراین‌صورت بردارهای $u_۱, u_۲, \ldots, u_n$ را وابسته خطی گویند.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه S را پایه V گوییم هرگاه S یک زیرمجموعه مستقل خطی باشد که V را تولید می‌کند.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد تعداد بردارهای پایه V را بعد فضای V نامیده و با $\dim V$ نشان می‌دهند.

رتبه، برد و فضای پوچ ماتریس

تعریف ۱۹.۲.۱. رتبه ماتریس A برابر با ماکزیمم تعداد ستون‌های یا سطرهای مستقل خطی در آن ماتریس است که با $\operatorname{rank}(A)$ نشان داده می‌شود.

$$A_{n\times n} \quad \text{غیر منفرد} \quad \longrightarrow |A| \neq 0 \longrightarrow \operatorname{rank}(A) = n \quad (\text{رتبه کامل})$$

$$A_{m\times n} \to \begin{cases} \operatorname{rank}(A) = \min(m,n) \longrightarrow (\text{رتبه کامل}) \\ \operatorname{rank}(A) < \min(m,n) \longrightarrow (\text{نقص رتبه}) \end{cases}$$

نکته ۲۰.۲.۱. رتبه یک ماتریس معادل با بعد فضای گسترده آن ماتریس است.

$$\dim[\mathrm{R}(A)] = \operatorname{rank}(A)$$

تعریف ۲۱.۲.۱. فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$، نگاشت خطی به صورت زیر است:

$$\mathrm{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

نکته ۲۲.۲.۱. فضای پوچ، مجموعه تمامی پاسخ‌های غیر صفر معادله همگن $Ax = 0$ است و اگر تنها جواب معادله $Ax = 0$، همان جواب بدیهی صفر باشد، رتبه A، کامل است.

برای هر ماتریس A از مرتبه $m \times n$، زیرفضای وابسته به فضای پوچ ماتریس وجود دارد که برد A نام دارد و توسط $\mathrm{R}(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$\mathrm{R}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax, \ \ x \in \mathbb{R}^n \text{به ازای هر برداری مانند}\},$$

تعریف ۲۳.۲.۱. ماتریس A از مرتبه $n \times n$، معکوس‌پذیر است اگر ماتریس B از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد به طوری‌که:

$$AB = BA = I$$

و توسط A^{-1} نمایش داده می‌شود. معکوس ماتریس منحصربه فرد است و ماتریس معکوس‌پذیر اغلب ماتریس نامنفرد نامیده می‌شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. دو ماتریس A و B مشابه نامیده می‌شوند اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته به قسمی که:

$$T^{-1}AT = B$$

یک خاصیت مهم ماتریس‌های مشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

تعریف ۲۵.۲.۱. مجموعه بردارهای $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد است اگر $\nu_i^T\nu_j = 0$ باشد، به علاوه اگر $\nu_i^T\nu_j = 1$ به ازای هر i، آن‌گاه آن‌ها را یکامتعامد نامند. یک پایه برای زیرفضا که یکامتعامد نیز باشد، پایه یکامتعامد برای زیرفضا نامیده می‌شود.

معرفی چند ماتریس خاص

۱. ماتریس قطری[۱۸]: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های آن به جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشد.

$$A = \operatorname{diag}(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{nn}) = \quad , \quad a_{ij} = ۰ \quad i \neq j$$

۲. ماتریس بالامثلثی[۱۹]: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است.

$$U = \begin{cases} a_{ij} & i \leqslant j \\ ۰ & i > j \end{cases}$$

۳. ماتریس پایین‌مثلثی[۲۰]: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.

$$L = \begin{cases} a_{ij} & i \geqslant j \\ ۰ & i < j \end{cases}$$

۴. ماتریس متعامد[۲۱]: ماتریس A متعامد است، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده کند:

$$A^T A = AA^T = I$$

۵. ماتریس هسنبرگی: ماتریس مربعی A بالاهسنبرگی است هرگاه به ازای $i > j + ۱$، $a_{ij} = ۰$. ترانهاده یک ماتریس بالاهسنبرگی پایین هسنبرگی است، یعنی ماتریس $A = (a_{ij})$ پایین هسنبرگی است اگر $a_{ij} = ۰$ به ازای $j > i + ۱$. یک ماتریس مربعی که هم بالاهسنبرگی و هم پایین هسنبرگی باشد، سه قطری است.

۴.۲.۱ بردار ویژه ومقدار ویژه

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. چندجمله‌ای $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$، چند جمله‌ای مشخصه نامیده می‌شود.

صفر های چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه A هستند. این معادل است با:

$\lambda \in \mathbb{C}$، یک مقدار ویژه از ماتریس A است، اگر وتنها اگر، بردار غیر صفر x وجود داشته‌باشد، به‌طوری‌که:

$$Ax = \lambda x$$

[۱۸] Diagonal

[۱۹] Upper triangular

[۲۰] Lower triangular

[۲۱] Orthogonal

تعریف ۲۷.۲.۱. بردار $x \neq 0$، بردار ویژه ماتریس A است، اگر:

$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۲۸.۲.۱. بردار $y \neq 0$، بردار ویژه چپ نامیده می‌شود، اگر:

$$y^H A = \lambda y^H$$

نکته ۲۹.۲.۱. برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ معادله مشخصه $\mid \lambda I - A \mid = 0$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به صورت مختلط $\alpha \pm i\beta$ است.

برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\mid A \mid = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

چند جمله ای مشخصه برای هر ماتریس $A_{n\times n}$ یک چند جمله ای از مرتبه n است.

$$\mid \lambda I - A \mid = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0$$

این چند جمله ای را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mid \lambda I - A \mid = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ای هستند که می توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ را قرار دهیم، مقدار $\mid A \mid$ به دست می آید:

$$\mid A \mid = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

نکته ۳۰.۲.۱. در ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

۵.۲.۱ دستگاه کنترل خطی

تعاریف و قضایای این بخش از [۶] و [۵] انتخاب شده‌است.

دستگاه یک بعدی

- برای بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی، معادله دیفرانسیل آن را به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{۷.۱}$$

که در آن

- t متغیر زمان،
- $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت،
- $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل ،
- $y(t)$ یک بردار r بعدی متغیر با زمان به‌نام بردار خروجی

هستند.

در حالتی‌که ماتریس‌های A وB و C و D مستقل از t و ثابت باشند، دستگاه حاصل را دستگاه خطی ناوردای زمان[22] می‌نامیم.

معادله (۷.۱) را معادله دستگاه پیوسته گویند.

برای برخی از دستگاه‌ها، بردار حالت یا بردار ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه‌گیری نیستند، بلکه در دنباله‌ای از نقاط t_i، $i = ۰, ۱, \ldots, n$ این کمیت‌ها در دسترس است. در این موارد، معادله دیفرانسیل حالت دستگاه به طور هم‌ارز به صورت معادله تفاضلی مرتبه اول زیر است:

$$\begin{cases} x(i+۱) = Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) = Cx(i) + Du(i) \end{cases} \quad (۸.۱)$$

که در آن $x(i)$ و $u(i)$ به ترتیب، بردارهای حالت و ورودی در زمان t_i هستند.

نکته ۳۱.۲.۱. برخی از دستگاه‌ها ذاتا گسسته زمانی هستند و تغییر حالت دستگاه فقط در نقاط زمانی خاصی صورت می‌پذیرد. در این حالت، دستگاه به صورت گسسته خطی زیر است:

$$x(k+۱) = Ax(k) + Bu(k) \quad (۹.۱)$$

۶.۲.۱ کنترل‌پذیری

دستگاه توصیف شده با معادله (۷.۱) ، کنترل‌پذیر نامیده می‌شود، اگر با شروع از حالت اولیه $x(۰)$، با انتخاب ورودی مناسب $u(t)$، $۰ \leqslant t \leqslant t_۱$، در زمان متناهی $t_۱$، بتوان دستگاه را به هر گام نهایی $x_۱ = x(t_۱)$ هدایت کرد.

نکته ۳۲.۲.۱. کنترل‌پذیری دستگاه (۷.۱)، اغلب به کنترل‌پذیری زوج (A, B) اشاره دارد.

نکته ۳۳.۲.۱. حالت ماتریس A در دستگاه پیوسته زمانی (۷.۱) و یا به طور معادل، مقدار ویژه λ از A، کنترل‌پذیر است، اگر بردار ویژه سمت چپ متناظر با λ با ستون‌های ماتریس B نامتعامد باشد. در غیر این صورت، غیر قابل کنترل هستند.

[22] Time invariant

ماتریس کنترل‌پذیری

برای دستگاه توصیف شده با معادله تفاضلی (۷.۱) ماتریس کنترل‌پذیری را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^{۲}B & \dots & A^{n-۱}B \end{bmatrix} \tag{۱۰.۱}$$

قضیه ۳۴.۲.۱. (معیار کنترل‌پذیری دستگاه پیوسته زمانی)[۵]
فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $(m \leqslant n)$ باشد، عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱. دستگاه (۷.۱) کنترل‌پذیر است.

۲. ماتریس کنترل‌پذیری $Q_{n\times nm}$، رتبه کامل n است.
$$\mathrm{rank}(Q) = n$$

۳. اگر (λ, x)، جفت ویژه ماتریس A^T باشند، به این معنی که $x^TA = \lambda x^T$، آنگاه:

$$x^TB \neq ۰$$

۴. برای هر مقدار ویژه λ از ماتریس A ،

$$\mathrm{rank}(A - \lambda I, B) = n$$

۵. با انتخاب مناسب ماتریس K، مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ را می‌توان به مقادیر دلخواه تخصیص داد.

برهان. در اینجا تنها اثبات هم ارزی قسمت دوم به سوم و برعکس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای ادامه اثبات می‌توانید به [۵] مراجعه کنید. فرض می‌کنیم $t_۰ = ۰$، $x(۰) = ۰$ را در نظر می‌گیریم.
۳ $\longrightarrow$ ۲: x را بردار ویژه A^T متناظر با مقدار ویژه λ در نظر می‌گیریم، یعنی
$$x^TA = \lambda x^T.$$

به برهان خلف فرض می‌کنیم $x^TB = ۰$ آن‌گاه

$$x^TQ = [x^TB, \lambda x^TB, \lambda^{۲}x^TB, \dots, \lambda^{n-۱}x^TB] = ۰. \tag{۱۱.۱}$$

چون ماتریس Q، رتبه کامل است پس، $x = ۰$ خواهد بود که این یک تناقض است.
۲ $\longrightarrow$ ۳: فرض کنید هیچ‌یک از بردارهای ویژه A با ستون‌های B متعامد نباشد. اما رتبه Q برابر $k < n$ باشد. بنابراین ماتریس نامنفرد T وجود دارد [۵] به‌طوری‌که:

$$\bar{A} = TAT^{-۱} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{۱۱} & \bar{A}_{۱۲} \\ ۰ & \bar{A}_{۲۲} \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_{۱} \\ ۰ \end{bmatrix}, \tag{۱۲.۱}$$

به‌طوری‌که $\bar{A}_{۲۲}$ از مرتبه $(n-k)$ است و $k = \mathrm{rank}(Q)$.

v_2 را بردار ویژه $(\bar{A}_{22})^T$ متناظر با مقدار ویژه λ در نظر می‌گیریم، آن‌گاه

$$(\bar{A})^T \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^T & 0 \\ \bar{A}_{21}^T & \bar{A}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_{22}^T v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

به‌علاوه

$$[0, v_2^T] \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

یعنی، بردار ویژه $\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$ از $(\bar{A})^T$ وجود دارد که با ستون‌های B متعامد است. بنابراین زوج $(\bar{A}, \bar{B})$ کنترل‌پذیر نیست که تناقض است زیرا تبدیل تشابهی کنترل‌پذیری را تغییر نمی‌دهد. □

۷.۲.۱ ناورداهای کرونکر

ماتریس کنترل‌پذیری

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \qquad (۱۳.۱)$$

را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم $b_1, \dots, b_m$ به‌ترتیب ستون‌های اول تا m ام ماتریس B باشند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m & Ab_1 & \dots & Ab_m & \dots & A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}, \qquad (۱۴.۱)$$

از آن‌جایی‌که دستگاه کنترل‌پذیر است، پس می‌توان n ستون از اولین ستون‌های Q را طوری به‌دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان‌تر، ستون‌های Q را در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m \\ Ab_1 & \dots & Ab_m \\ A^2b_1 & \dots & A^2b_m \\ \vdots & & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}. \qquad (۱۵.۱)$$

با شروع از گوشه سمت چپ بالای بلوک به‌طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردار قبل وابسته خطی‌اند، از بلوک حذف می‌کنیم و اگر بردار حذف شد همه‌ی بردارهای واقع در زیر آن نیز از بلوک حذف می‌شوند و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی n بردار باشد. در این‌حالت همه‌ی بردارهای باقیمانده غیر از n بردار به‌دست آمده را از بلوک حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون‌های ماتریس P قرار دهیم آن‌گاه P معکوس‌پذیر خواهد بود و تبدیل موردنظر به‌دست می‌آید.

$$P = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m & Ab_1 & \dots & Ab_m & \dots & A^{p_1-1}b_1 & \dots & A^{p_m-1}b_m \end{bmatrix}. \qquad (۱۶.۱)$$

تعریف ۳۵.۲.۱. در رابطه (۱۵.۱) به هر ستون از بلوک که متناظر ستونی از ماتریس B است عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$۱ \leq p_i \leq n \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m \tag{۱۷.۱}$$

این p_i ها را ناورداهای کرونکر می‌نامیم. از طرفی p_i تعداد بردارهای باقیمانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد بردارهای واقع در ستون‌های بلوک برابر است با :

$$p_۱ + p_۲ + \ldots + p_m, \tag{۱۸.۱}$$

از طرفی این تعداد برابر n است، در نتیجه

$$p_۱ + p_۲ + \ldots + p_m = n, \tag{۱۹.۱}$$

در کنترل بهینه به‌دنبال یافتن ماتریس F به‌گونه‌ای هستیم که حالت دستگاه را در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v به صفر میل نماید (به حالت تعادل برسد). v را اندیس کنترل‌پذیری می نامیم. تعریف می‌کنیم:

$$v = \max\{p_i \mid \ i = ۱, \ldots, m\}, \tag{۲۰.۱}$$

تعریف ۳۶.۲.۱. ناورداهای کرونکر (B, A) را منظم گوییم هرگاه اختلاف بین $\max$ و $\min$ آن‌ها حداکثر یک باشد. در غیر این‌صورت ناورداهای کرونکر را نامنظم گویند.

۸.۲.۱ پایداری

تعاریف و قضایای این بخش از [۶] و [۵] انتخاب شده‌است.

تعریف ۳۷.۲.۱. معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x(t))$ را در نظر بگیرید. نقطه x_e را نقطه تعادل می‌نامند، هرگاه:

$$f(x_e) = ۰$$

تعریف ۳۸.۲.۱. دستگاه دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)), \\ x(t_۰) = x_e = ۰ \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{۲۱.۱}$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گوییم، اگر به ازای $t_۰$ و $\epsilon > ۰$ ، برای تمامی $t \geq t_۰$:

$$\exists \delta_\epsilon > ۰; \forall \parallel x(t_۰) - x_e \parallel < \delta(\epsilon) \longrightarrow \parallel x(t) - x_e \parallel \leq \epsilon$$

دستگاه خطی پیوسته (۷.۱) را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم بردار حالت $x(t)$ مشخص باشد و انتخاب می‌کنیم:

$$u(t) = v(t) - Kx(t) \tag{۲۲.۱}$$

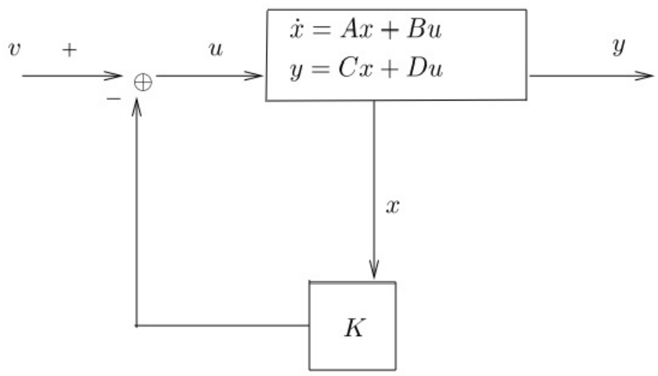
که در آن، K یک ماتریس ثابت و $v(t)$ یک بردار ورودی مرجع است که می‌توان آن را صفر در نظر گرفت.

از جاگذاری معادله (۲۲.۱) در دستگاه (۷.۱) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= (C - DK)x(t) + Dv(t) \end{aligned} \tag{۲۳.۱}$$

سپس مسئله پایداری دستگاه (۷.۱)، به مسئله پیدا کردن ماتریس K، به‌گونه‌ای که دستگاه (۲۳.۱) پایدار باشد، تبدیل می‌شود. به بیان دیگر:

با توجه به جفت ماتریس (A, B)، ماتریس پسخورد حالت K را به‌گونه‌ای می‌یابیم که $A - BK$ پایدار باشد. گرافیک مسئله پسخورد حالت را می‌توان به شرح زیر نشان داد.



شکل ۱.۱: ساختار پسخورد حالت

تعریف ۳۹.۲.۱. دستگاه (۲۳.۱) یک دستگاه حلقه بسته و ماتریس $A - BK$ را ماتریس حلقه بسته می‌نامند.

پایداری و کنترل‌پذیری

در این قسمت، شرایط کافی و لازم برای آن‌که زوج ماتریس (A, B)، جفت پایدار باشند را بیان می‌کنیم:

قضیه ۴۰.۲.۱. [۵] موارد زیر معادلند:

- جفت (A, B) پایدار هستند.
- برای هر $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0$، $\operatorname{rank}(A - \lambda I, B) = n$. به عبارت دیگر، حالت‌های ناپایدار ماتریس A، قابل کنترل هستند.

• برای هر λ و $x \neq 0$ که $x^H A = \lambda x^H$ و $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$، داریم:
$$x^H B \neq 0$$

نتیجه ۴۱.۲.۱. اگر زوج (A, B) کنترل‌پذیر باشند، آنگاه این زوج باید پایدار باشد.

نتیجه بالا این نکته را بیان می‌کند که کنترل‌پذیری بر پایداری دلالت دارد . عکس این مطلب ممکن است صحیح نباشد. یعنی، ممکن است دستگاه کنترل‌پذیر نباشد اما پایدار باشد.

نکته ۴۲.۲.۱. پایداری تضمین شده‌است، زمانی که حالت‌های ناپایدار، کنترل‌پذیر باشند.

۹.۲.۱ پایداری با معادله لیاپانوف

برای پیدا کردن ماتریس پسخورد پایدار K برای جفت (A, B) داده شده، می توانیم فرض کنیم، جفت (A, B) کنترل‌پذیر است. در قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌شود، نشان می‌دهیم چگونه یک زوج کنترل‌پذیر با استفاده از معادله لیاپانوف به پایداری می‌رسد.

قضیه ۴۳.۲.۱. [۵] فرض کنید (A, B) کنترل‌پذیر باشد و فرض کنید که β یک اسکالر باشد، به‌گونه‌ای که:
$$\beta > |\lambda_{\max}(A)|$$

که $\lambda_{\max}(A)$، مقدار ویژه‌ای از ماتریس A است که دارای بزرگ‌ترین بخش حقیقی است. فرض کنید K را به صورت زیر تعریف کنیم:
$$K = B^T Z^{-1} \tag{۲۴.۱}$$

که Z در معادله لیاپانوف زیر صدق می‌کند.
$$-(A + \beta I)Z + Z[-(A + \beta I)]^T = -2BB^T \tag{۲۵.۱}$$

بنابراین $A - BK$ پایدار است و (A, B) نیز به پایداری می‌رسد.

برهان. از آن‌جایی که $\beta > |\lambda_{\max}(A)|$، ماتریس $-(A + \beta I)$ پایدار است. همچنین، از آن‌جایی که (A, B) کنترل‌پذیر است، جفت $(-(A + \beta I), B)$ نیز کنترل‌پذیر است. بنابراین معادله لیاپانوف (۲۵.۱) دارای جواب متقارن متناهی مثبت منحصربه‌فرد Z است. معادله (۲۵.۱) را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:
$$(A - BB^T Z^{-1})Z + Z(A - BB^T Z^{-1})^T = -2\beta Z \tag{۲۶.۱}$$

با قرار دادن معادله (۲۴.۱) در معادله بالا داریم:
$$(A - BK)Z + Z(A - BK)^T = -2\beta Z \tag{۲۷.۱}$$

فرض کنید، μ مقدار ویژه‌ای از ماتریس $A - BK$ باشد و y بردار ویژه متناظر با این مقدار ویژه باشد. سپس ضرب هر دو طرف معادله (۲۶.۱)، ابتدا از سمت چپ در y^H و سپس از سمت راست در y، می‌دهد:
$$2\mathrm{Re}(\mu) y^H Z y = -2\beta y^H Z y \tag{۲۸.۱}$$

از آن‌جایی که Z مثبت متناهی است، $y^H Z y > 0$ و در نتیجه $\mathrm{Re}(\mu) < 0$. بنابراین $A - BK$ پایدار است. □

الگوریتم روش معادله لیاپانوف برای پایداری

فرض کنید (A, B) زوج کنترل‌پذیر باشد. الگوریتم زیر، ماتریس پسخورد حالت پایاساز را محاسبه می‌کند.[۵]

گام اول: عدد β را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\beta > |\lambda_{\mathrm{Max}}(A)|$.

گام دوم: معادله لیاپانوف (۲۵.۱) را برای Z حل می‌کنیم.

گام سوم: ماتریس پسخورد حالت پایاساز را محاسبه می‌کنیم.

$K = B^T Z^{-۱}$

قضیه ۴۴.۲.۱. دستگاه خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{۲۹.۱}$$

این دستگاه پایدار به مفهوم لیاپانوف است اگر و فقط اگر:

الف) کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی غیرمثبت داشته باشد.

ب) آن دسته از مقادیر ویژه A که قسمت‌های حقیقی صفر دارند صفرهای ساده چندجمله‌ای مشخصه باشند. به‌عبارت دیگر در تبدیل A به فرم جردن مرتبه بلوک‌های جردن متناظر با مقادیر ویژه‌ای که قسمت‌های حقیقی آن صفر است، یک باشد.

فصل ۲

تخصیص مقدار ویژه جزئی

در این فصل، ابتدا دستگاه کنترل خطی و مسئله تخصیص مقدار ویژه (EVA)[۱] و تخصیص مقدار ویژه جزئی (PEVA)[۲]را معرفی کرده و به بررسی وجود و یکتایی جواب برای مسائل فوق می‌پردازیم. در ادامه مروری بر روش‌های ارائه شده قبلی برای حل مسئله $PEVA$ خواهیم داشت. در پایان چند مثال عددی برای این مسائل ارائه می‌دهیم.

دستگاه کنترل خطی متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(\circ) = x_\circ; \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که در آن A ،یک ماتریس $n \times n$ بزرگ ، B ماتریس $n \times m$، C ماتریسی $r \times n$، D ماتریسی $n \times m$، $x(t)$ بردار ستونی n بعدی مرسوم به بردار حالت و $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی مرسوم به بردار ورودی است که با زمان تغییر می‌کند.

۱.۲ تخصیص مقدار ویژه

مسئله تخصیص مقدار ویژه یک مسئله اساسی در طراحی دستگاه کنترل است که به‌طور گسترده در هر دو زمینه تئوری و محاسباتی مورد مطالعه قرار گرفته است.

مسئله تخصیص مقدار ویژه در مکان‌های خاص موردنظر، در صفحه مختلط با استفاده از قانون کنترل (۲۲.۱)، مسئله تخصیص مقدار ویژه با پسخورد حالت یا به اختصار (EVA) نامیده می‌شود. در این قسمت به بیان دقیق مسئله به زبان ریاضی می‌پردازیم:

تعریف ۱.۱.۲. در دستگاه خطی زیر داریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۲.۲}$$

[۱] Eigenvalue assignment

[۲] Partial eigenvalue assignment

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $S = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$، که S نسبت به ترکیب مختلط بسته است.

برای ادامه باید $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که:

$$\Omega(A - BK) = S \tag{۳.۲}$$

به طوری‌که:

- $\Omega(\mathbb{R})$، پایه‌ای برای طیف $\mathbb{R}$ است.
- K ماتریس پسخورد حالت نامیده می‌شود.

۱.۱.۲ وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقدار ویژه

در این بخش وجود و یکتایی جواب را برای مسئله تخصیص مقدار ویژه بررسی می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا به بیان مفهوم کنترل‌پذیری می‌پردازیم که برای بررسی این دو ویژگی بسیار مهم است.

قضیه ۲.۱.۲. [۵] دستگاه (۲.۲) یا به طور معادل زوج ماتریس (A, B) نسبت به مقدار ویژه λ از ماتریس A کنترل‌پذیر است، اگر:

$$\forall y \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad y^H B \neq 0 \quad \text{به طوری که} \quad y^H A = \lambda y^H \tag{۴.۲}$$

تعریف ۳.۱.۲. دستگاه (۲.۲) یا زوج ماتریس (A, B) نسبت به زیرمجموعه $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ از طیف ماتریس A به طور جزئی کنترل‌پذیر است، اگر نسبت به هر مقدار ویژه λ_j، $j = 1, 2, \ldots, p$ کنترل‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۱.۲. دستگاه (۲.۲) یا زوج ماتریس (A, B) به طور کامل کنترل‌پذیر است، هرگاه نسبت به هر مقدار ویژه از ماتریس A کنترل‌پذیر باشد.

قضیه ۵.۱.۲. (وجود و یکتایی برای مسئله تخصیص مقدار ویژه):[۹] برای هر مجموعه دلخواه S، مسئله تخصیص مقدار ویژه برای زوج ماتریس (A, B) حل‌پذیر است اگر و تنها اگر زوج (A, B) به طور کامل کنترل‌پذیر باشد. جواب یکتا است اگر و تنها اگر دستگاه تک ورودی باشد(B یک بردار باشد). در حالت چند ورودی، در صورتی که جواب وجود داشته باشد، بی‌نهایت جواب موجود است.

برای اثبات به [۵] یا [۳] مراجعه شود.

۲.۲ تخصیص مقدار ویژه جزئی

در این بخش ابتدا به بیان اصل مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی می‌پردازیم. سپس مشابه قضیه (۵.۱.۲)، وجود و یکتایی جواب را برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزیی بررسی می‌کنیم.

به طور کلی، زوج ماتریس (A, B) را در نظر بگیرید. طیف‌های

$$\Omega(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\} \tag{۵.۲}$$

و

$$S = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\} \tag{۶.۲}$$

تحت ترکیب مختلط بسته هستند. ماتریس پسخورد حالت F را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که:

$$\Omega(A - BF) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} \tag{۷.۲}$$

مسئله ثابت نگه داشتن یک بخش از طیف ماتریس حلقه‌باز دستگاه خطی با ماتریس کنترل حالت، خارج کردن باقیمانده طیف و جایگزین کردن آن با طیف پایدار مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی نامیده می‌شود. اصل این مسئله برای دستگاه‌هایی به کار می‌رود که به طور کامل پایدار نیستند و تعدادی از مقادیر ویژه طیف ماتریس حلقه باز (ماتریس A)، که تنها همین مقادیر نیاز به تخصیص دارند، در ناحیه پایداری قرار ندارند. بسیاری از محققان، الگوریتمی برای حل مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی طراحی کرده‌اند([۸]، [۱۹]، [۲۲]). مسئله تخصیص مقادیر ویژه، نخستین بار توسط سعد و داتا[۳]، مطرح شده‌است[۸]. در این روش پیشنهادی، ابتدا به حل معادله سیلوستر $AX - XH = GC$ پرداخته می‌شود. (H، یک ماتریس بالا هسنبرگی است که با استفاده از الگوریتم آرنولدی[۴] ساخته شده‌است. طیف H برابر $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است. ماتریس G یک ماتریس خاص به صورت $G = (0, 0, \dots, 0, b)$ و X یک ماتریس نرمال شده است که، توسط ماتریس نرمال v، که در $V^H AV = H$ صدق می‌کند، به دست می‌آید.) با این روش، بردار پسخورد حالت $f = Xe_m$، که $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$ است را محاسبه می‌کنیم. در این حالت طیف مقادیر ویژه $A - bf^T$، شامل $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است. یکی از روش‌های پیشنهادی، به طور عمده بر اساس مفهوم نرمال‌کردن با استفاده از الگوریتم آرنولدی[۱۹] یا روش دیگر با استفاده از تجزیه جزئی QR [۲۲] است.

۱.۲.۲ وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی

قضیه ۱.۲.۲. [۹] ماتریس قطری $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$ که شامل مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ از ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ است را در نظر بگیرید، به‌گونه‌ای که مجموعه‌های $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ و $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ از هم گسسته هستند.

فرض کنید که مقادیر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P$ به $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ تغییر یابد و باقی مقادیر ویژه ماتریس A یعنی مقادیر $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ ثابت بماند. در نتیجه مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی به ازای هر انتخاب مقدار ویژه $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ برای زوج (A, B) دارای جواب است اگر و تنها اگر زوج (A, B) به‌طور جزئی نسبت به مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P\}$ کنترل‌پذیر باشد. جواب منحصربه‌فرد است، اگر و تنها اگر دستگاه، یک دستگاه تک ورودی کاملا کنترل‌پذیر باشد. در حالت چند ورودی و تک ورودی‌ها، زمانی که دستگاه کاملا کنترل‌پذیر نباشد، در صورت وجود جواب، بی‌نهایت جواب وجود دارد.

برهان. ابتدا ضرورت را اثبات می‌کنیم. برهان خلف: فرض کنید زوج (A, B) به ازای برخی از λ_j کنترل‌پذیر نباشد($1 \leqslant j \leqslant p$)، در نتیجه:

---

[۳] Saad and Datta

[۴] Arnoldi’s algorithm

$$\exists y \neq 0 \quad \text{به طوری که} \quad y^H B = 0, \quad y^H(A - \lambda_j I) = 0 \tag{۸.۲}$$

رابطه بالا به این معنا است که برای هر F، داریم: $y^H(A - BF - \lambda_j I) = 0$. در نتیجه با این فرض که λ_j مقدار ویژه ماتریس حلقه بسته $A - BF$ است، نمی‌تواند دوباره تخصیص داده شود.

کفایت: تعریف می‌کنیم $\Lambda_1 = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ و $\Lambda_2 = diag(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$. اکنون باید نشان دهیم ماتریس پسخورد حالت Fای وجود دارد به‌طوری‌که مقادیر ویژه دلخواهی را به جای Λ_1 تخصیص می‌دهد، در حالی که تمام مقادیر ویژه دیگر را بدون تغییر باقی می‌گذارد.

فرض کنید $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ به ترتیب ماتریس‌های بردارهای ویژه سمت راست و سمت چپ ماتریس A باشند و فرض کنید که $Y_1 = (y_1, y_2, \dots, y_p)$. از آن‌جایی که $Y^H X = I$ و $Y^H A X = diag(\Lambda_1, \Lambda_2)$، در نتیجه از کنترل‌پذیری جزئی جفت ماتریس (A, B) نسبت به مقادیر ویژه Λ_1 ، کنترل‌پذیری جزئی زوج $(diag(\Lambda_1, \Lambda_2), Y^H B)$ نسبت به همان مقادیر را نتیجه می‌گیریم.
بنابراین، زوج $(\Lambda_1, Y_1^H B)$ کاملا کنترل‌پذیر است، زیرا: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \bigcap \{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} = \emptyset$.

بنابه قضیه (۵.۱.۲)، ماتریس پسخورد حالت Φ وجود دارد به‌طوری‌که، ماتریس حلقه بسته $\Lambda_1 - {Y_1}^H B\Phi$ دارای مقادیر ویژه $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$F = \Phi {Y_1}^H \tag{۹.۲}$$

پس مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته همان مقادیر مورد نیاز است:

$$\begin{aligned} \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} &= \Omega(diag(\Lambda_1, \Lambda_2) - Y^H B(\Phi, 0)) = \\ &\Omega(Y^H(A - B((\Phi, 0)Y^H))X) = \Omega(A - B(\Phi {Y_1}^H)). \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

در مواردی که دستگاه تک‌ورودی کاملا کنترل‌پذیر باشد، جواب منحصربه‌فرد است. زمانی که چند ورودی باشد، بی‌نهایت جواب وجود دارد که به‌طور مستقیم از قضیه (۵.۱.۲) نتیجه می‌شود.

در ادامه نشان می‌دهیم که ممکن است بی‌نهایت جواب برای دستگاه تخصیص مقدار ویژه جزئی وجود داشته باشد، زمانی‌که B یک بردار (موارد تک ورودی) باشد و مقدار ویژه λ_k کنترل ناپذیر برای $k \geqslant p$ وجود داشته‌باشد.

(K^{th}، متناظر است با بردار ویژه سمت راست y_k، به گونه‌ای که ${y_k}^H A = \lambda_k {y_k}^H$ و ${y_k}^H B = 0$.)

فرض کنید که F، یک ماتریس پسخورد حالت برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی باشد. Y_c و X_c که به ترتیب بردارهای ویژه سمت چپ و راست ماتریس حلقه‌بسته $A_c = A - BF$ هستند را تعریف می‌کنیم.
به‌وضوح ${y_k}^H A_c = {y_k}^H(A - BF) = \lambda_k y_k$ و در نتیجه y_k،kامین ستون Y_c است.

فرض کنید $F_\alpha = \alpha {y_k}^H$، که در آن α عددی دلخواه است. از (۱۰.۲) می‌توان نشان داد که با استفاده از ماتریس پسخورد حالت F_α، مقادیر ویژه $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ از A_c بدون تغییر باقی می‌ماند. علاوه‌براین، مقدار ویژه λ_k از A_c نیز با استفاده از ماتریس پسخورد حالت F_α بدون تغییر می‌ماند. زوج (A_c, B) نسبت به مقدار ویژه λ_k، طبق قسمت ضرورت این قضیه، کنترل‌پذیر نیست.

$$\Omega(A-BF)=\Omega(A_c)=\Omega(A_c-BF_\alpha)=\Omega(A-B(F+\alpha {y_k}^H)) \tag{۱۱.۲}$$

در نتیجه اگر F یک جواب باشد، بنابراین $F+\alpha {y_k}^H$ نیز به ازای هر α دلخواه، یک جواب است. □

۳.۲ روش‌های قبلی ارائه شده

در این بخش به بیان مختصری از روش‌های عددی می‌پردازیم که پیش از این برای حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی مطرح شده‌است.

۱.۳.۲ روش روابط متعامد

اساس این روش بر پایه روابط متعامد بین بردارهای ویژه ماتریس A است([۴]، [۲۴]). درک این روش تنها با داشتن دانش‌جزئی از مبحث مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A حاصل می‌شود. برای بیان روش، ابتدا روابط متعامد بین بردارهای ویژه، برای مسئله مقادیر ویژه $Ax=\lambda x$ را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. اسکالر λ یک مقدار ویژه از A است. بردار غیر صفر Y را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که:

$$Y^H A=\lambda Y^H \tag{۱۲.۲}$$

Y بردارویژه سمت چپ وابسته به مقدار ویژه λ و Y^H، مزدوج ترانهاده بردار Y است.

تعریف ۲.۳.۲. جفت (λ, X) و (λ, Y)، جفت ویژه سمت راست و چپ ماتریس A است.

قضیه ۳.۳.۲. [۲۰] فرض کنید $\lambda_۱,\lambda_۲,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A و X، Y نیز بردارهای ویژه سمت راست و چپ ماتریس A باشد. در نظر می‌گیریم:

$$\{\lambda_۱,\lambda_۲,\ldots,\lambda_m\}\cap\{\lambda_{m+۱},\ldots,\lambda_n\}=\phi \tag{۱۳.۲}$$

تعریف می‌کنیم:

$$Y=(Y_۱,Y_۲),\quad X=(X_۱,X_۲) \tag{۱۴.۲}$$

که در آن

$$X_۱=(x_۱,x_۲,\ldots,x_m),\quad X_۲=(x_{m+۱},\ldots,x_n) \tag{۱۵.۲}$$

$$Y_۱=(y_۱,y_۲,\ldots,y_m),\quad Y_۲=(y_{m+۱},\ldots,y_n) \tag{۱۶.۲}$$

به طوری‌که:

$$ {Y_۱}^H X_۲=۰,\quad {Y_۱}^H A X_۲=۰ \tag{۱۷.۲}$$

اگر علاوه‌بر فرضیات بالا، ماتریس A حقیقی متقارن باشد، آن‌گاه([۴] ، [۲۴]):

$$ {X_۱}^T X_۲=۰,\quad {X_۱}^T A X_۲=۰ \tag{۱۸.۲}$$

فرضیات قضیه (۳.۳.۲) را در نظر بگیرید و فرض می‌کنیم، $\Lambda_{n\times n}$، ماتریس قطری تشکیل شده از مقادیر ویژه ماتریس A باشد، به طوری‌که:

$$\Lambda = diag(\Lambda_۱, \Lambda_۲) \tag{۱۹.۲}$$

$$\Lambda_۱ = diag(\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_m), \quad \Lambda_۲ = diag(\lambda_{m+۱}, \dots, \lambda_n) \tag{۲۰.۲}$$

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_m\} \cap \{\lambda_{m+۱}, \dots, \lambda_n\} = \phi$ و f بردار پسخورد حالت باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^T = \beta {Y_۱}^H A. \tag{۲۱.۲}$$

در این صورت برای هر انتخاب از β، آخرین $(n-m)$ مقدار ویژه، یعنی $\lambda_{m+۱}, \dots, \lambda_n$ از ماتریس $A-bf^T$، برابر همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند[۲۰].

برهان. فرض کنید (X, Λ)، جفت ماتریس بردارهای ویژه - مقادیر ویژه ماتریس A باشند، در نتیجه:

$$AX - X\Lambda = ۰ \tag{۲۲.۲}$$

هدف اثبات رابطه زیر است:

$$(A - bf^T)X_۲ - X_۲\Lambda_۲ = ۰. \tag{۲۳.۲}$$

با جایگذاری $f^T = \beta {Y_۱}^H A$ در سمت چپ معادله (۲۳.۲) داریم:

$$(A - bf^T)X_۲ - X_۲\Lambda_۲ = AX_۲ - X_۲\Lambda_۲ - b\beta({Y_۱}^H AX_۲). \tag{۲۴.۲}$$

از قضیه(۳.۳.۲) داریم:

$${Y_۱}^H AX_۲ = ۰, \quad AX_۲ - X_۲\Lambda_۲ = ۰ \tag{۲۵.۲}$$

بنابراین

$$(A - bf^T)X_۲ - X_۲\Lambda_۲ = ۰ \tag{۲۶.۲}$$

در نتیجه قضیه ثابت می‌شود. □

برای استفاده از قضیه بالا جهت حل مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی، ابتدا نیاز به به‌دست آوردن β داریم. اگر چنین β وجود داشته‌باشد، ماتریس بردارهای ویژه $Z \in \mathbb{C}^{n\times m}$،

$$Z = (z_۱, z_۲, \dots, z_m), \quad z_j \neq ۰ \qquad (j = ۱, ۲, \dots, m).$$

و ماتریس $D = diag(\mu_۱, \mu_۲, \dots, \mu_m)$ وجود دارد، به طوری‌که:

$$(A - bf^T)Z - ZD = ۰. \tag{۲۷.۲}$$

با جایگذاری $f^T = \beta {Y_۱}^H A$ در معادله (۲۷.۲) داریم:

$$AZ - b\beta {Y_۱}^H AZ - ZD = ۰ \tag{۲۸.۲}$$

سپس

$$AZ - ZD = b\beta {Y_۱}^H AZ = b\beta W^H = bC^H \tag{۲۹.۲}$$

که $W^H = Y_۱{}^H AZ$ و $C = W\beta^H$ بردار هستند. برای به‌دست آوردن بردار ویژه Z، بردار C را به صورت $C = (۱, ۱, \dots, ۱)^T$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت، معادله (۲۹.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$AZ - ZD = b(۱, ۱, \dots, ۱) \tag{۳۰.۲}$$

برای هر بردار ویژه z_j، می‌توان معادله زیر را حل نمود:

$$(A - \mu_j I)z_j = b \quad , \quad j = ۱, ۲, \dots, m \tag{۳۱.۲}$$

از این طریق بردارویژه Z را محاسبه کرده و از رابطه $W^H = Y_۱{}^H AZ$، پس از به‌دست آوردن W، با حل دستگاه خطی مربعی $m \times m$ زیر، β^H را به‌دست می‌آوریم.

$$W\beta^H = (۱, ۱, \dots, ۱)^T \tag{۳۲.۲}$$

از این‌رو می‌توان f را محاسبه نمود. در قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌شود، به طور صریح و روشن می‌توان β را به‌دست آورد.

قضیه ۵.۳.۲. [۲۰] فرض کنید برای $۱ \leqslant i \leqslant n$ از معادله (۲۲.۲) داشته باشیم: $Ax_i = \lambda_i x_i$ و f انتخابی از معادله (۲۱.۲) باشد. فرض می‌کنیم β_j اجزای تشکیل دهنده β باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\beta_j = \frac{۱}{b^T \hat{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j} \prod_{i=۱, i\neq j}^{m} \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} \tag{۳۳.۲}$$

در این صورت ماتریس حلقه‌بسته $A - bf^T$ دارای طیف $\{\mu_۱, \mu_۲, \dots, \mu_m, \lambda_{m+۱}, \dots, \lambda_n\}$ است و اولین m مقادیر ویژه در معادله زیر صدق می‌کند.

$$(A - \mu_j I)z_j = b \quad , \quad j = ۱, ۲, \dots, m. \tag{۳۴.۲}$$

برهان. برای اثبات تنها نیاز به نشان دادن معادله زیر داریم.

$$\Phi_k(\beta) = [(A - bf^T) - \mu_k I]z_k \quad , \quad k = ۱, ۲, \dots, m. \tag{۳۵.۲}$$

که در آن:

$$(A - \mu_k I)z_k = b \tag{۳۶.۲}$$

در معادله رابطه (۳۵.۲)، $f^T = \beta Y_۱{}^H A$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\Phi_k(\beta) = [(A - \mu_j I) - b\beta Y_۱{}^H A]z_k. \tag{۳۷.۲}$$

با توجه به معادله (۳۶.۲) و جایگذاری آن داریم:

$$\Phi_k(\beta) = b - [b\beta Y_۱{}^H A]z_k. \tag{۳۸.۲}$$

در ادامه معادله (۲.۳۳) را در معادله (۲.۳۸) جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\Phi_k(\beta) &= b - \left[b(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b^T\bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} Y_1{}^H A) \right] z_k \\ &= b - \left[b(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b^T\bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} y_j{}^H (\lambda_j - \mu_k)) \frac{A}{\lambda_j} \right] z_k \\ &= b - \left[b(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b^T\bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i}) y_j{}^H (\lambda_j - \mu_k) \frac{A}{\lambda_j} \right] z_k. \end{aligned} \tag{۲.۳۹}$$

از Jامین ستون $Y^H A = Y^H \lambda$ می‌توان نوشت:

$$y_j{}^H I = y_j{}^H \frac{A}{\lambda_j}, \qquad \lambda_j \neq 0. \tag{۲.۴۰}$$

برای هر انتخاب از $1 \leqslant k, j \leqslant m$، داریم:

$$y_j{}^H (A - \mu_k I) = y_j{}^H \left(A - \mu_k (\frac{A}{\lambda_j}) \right). \tag{۲.۴۱}$$

سپس

$$y_j{}^H (A - \mu_k I) = y_j{}^H (\lambda_j - \mu_k)(\frac{A}{\lambda_j}). \tag{۲.۴۲}$$

با جایگذاری معادله (۲.۴۲) در (۲.۳۹) داریم:

$$\Phi_k(\beta) = b - \left[b(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b^T\bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{i=1, i\neq j,k}^{m} \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i}) y_j{}^H (A - \mu_k I) \right] z_k. \tag{۲.۴۳}$$

با توجه به معادله (۲.۳۶) داریم:

$$\begin{aligned}\Phi_k(\beta) &= b - b \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b^T\bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{i=1, i\neq j,k}^{m} \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} y_j{}^H b \\ &= b - b \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b^T\bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{i=1, i\neq j,k}^{m} \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i} (b^T \bar{y}_j)^T \end{aligned} \tag{۲.۴۴}$$

در نتیجه

$$\Phi_k(\beta) = b(1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\prod_{i=1, i\neq k}^{m} \lambda_j - \mu_i}{\prod_{i=1, i\neq j}^{m} \lambda_j - \lambda_i}) \tag{۲.۴۵}$$

در مرجع [۷] ثابت شده‌است که برای هر مجموعه $\{\lambda_i\}_{i=1}^{m}$ و $\{\mu_i\}_{i=1}^{m}$، که λ_iها مشخص هستند، داریم:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\prod_{i=1, i\neq k}^{m} \lambda_j - \mu_i}{\prod_{i=1, i\neq j}^{m} \lambda_j - \lambda_i} = 1, \qquad k = 1, 2, \cdots, m. \tag{۲.۴۶}$$

در نتیجه $\Phi(k)(\beta)$ به صفر میل می‌کند و اثبات کامل می‌شود. □

از روی معادله (۲.۳۳) روشن است که شرایط کافی برای وجود β و در نتیجه حل مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی عبارت است‌از:

- $\lambda_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$.

- λ_iها، $(i = ۱, ۲, \dots, m)$ متمایز هستند.
- بردار b و $\bar{y}_j$، $(j = ۱, ۲, \dots, m)$ نسبت به هم نامتعامد هستند.

مثال ۶.۳.۲. ماتریس $A_{۴\times۴}$ و $b_{۴\times۱}$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ & -۱ \\ -۲ & -۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس A برابر $\{-۴/۵۷۳۲, -۰/۸۳۲۶+۰/۳۶۳۷i, -۰/۸۳۲۶-۰/۳۶۳۷i, ۴/۲۳۸۴\}$ است، مقدار ویژه دلخواه $\mu = -۱$ را در نظر بگیرید. با روش روابط متعامد ماتریس پسخورد حالت f را به گونه‌ای به‌دست می‌آوریم که، در طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A - bf$، $\mu = -۱$، جایگزین $\lambda_۴ = ۴/۲۳۸۴$ شود.

حل. ابتدا بردار ویژه سمت چپ متناظر با مقدار ویژه $\lambda = ۴/۲۳۸۴$ را به دست می‌آوریم.

$$y_۴ = \begin{bmatrix} -۰/۰۴۵۹ \\ -۰/۰۳۶۱ \\ -۰/۹۸۰۲ \\ ۰/۱۸۹۰ \end{bmatrix}.$$

اکنون با استفاده از $y_۴$، β را طبق معادله (۳۳.۲) تعیین می‌کنیم:

$$\beta = \frac{۱}{b^T \bar{y}_۴} \frac{\lambda_۴ - \mu}{\lambda_۴} = ۱۷/۴۳۱۶$$

در انتها ماتریس پسخورد f برابر است با:

$$f^T = \beta {y_۴}^H A$$

$$= ۱۷/۴۳۱۶ \begin{bmatrix} -۰/۰۴۵۹ & -۰/۰۳۶۱ & -۰/۹۸۰۲ & ۰/۱۸۹۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ & -۱ \\ -۲ & -۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۳۳۸۸۷ & -۲/۶۶۵۳ & -۷۲/۴۱۷۸ & ۱۳/۹۶۲۷ \end{bmatrix}$$

باید به این نکته توجه داشته باشیم که این روش برای ماتریس‌هایی با اندازه بزرگ مناسب نیست. زیرا پیدا کردن مؤلفه‌های β_j و در نتیجه پیدا کردن f دشوار خواهد بود.

۲.۳.۲ روش تجزیه شور جزئی

برای توضیح این روش، ابتدا تجزیه شور جزئی[۵] و سپس اصل روند روش را بیان می‌کنیم.

[۵] Partial Shur decomposition

قضیه ۷.۳.۲. برای هر ماتریس مربعی A، $n \times n$ یک ماتریس یکانی Q وجود دارد، به‌طوری‌که:

$$Q^H A Q = R, \tag{۴۷.۲}$$

ماتریسی بالا مثلثی است[۲۳].

برهان. از استقرا روی n، اثبات را انجام می‌دهیم. به وضوح برای $n = ۱$ نتیجه برقرار است. فرض کنید برای $n - ۱$ نیز برقرار باشد، اکنون برای $A_n \times n$ ثابت می‌کنیم. u را یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه λ از A در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که $\| u \|_۲ = ۱$. ابتدا بردار u را با یک مجموعه یکا متعامد، کامل می‌کنیم. یعنی فرض کنید $U = [u, v]$، یک ماتریس $n \times n$ یکانی باشد. آنگاه:

$$AU = [\lambda u, Av], \tag{۴۸.۲}$$

و بنابراین:

$$U^H A U = \begin{bmatrix} u^H \\ v^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda u & Av \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & u^H A v \\ ۰ & v^H A v \end{pmatrix}. \tag{۴۹.۲}$$

از آن‌جایی حکم برای ماتریس $(n - ۱) \times (n - ۱)$ برقرار است، در نتیجه برای ماتریس $B = v^H A v$ که $(n - ۱) \times (n - ۱)$ بعدی است، یک ماتریس یکانی $(n - ۱) \times (n - ۱)$، $Q_۱$ موجود است به‌طوری‌که، $Q_۱{}^H B Q_۱ = R_۱$ بالامثلثی است.

اکنون ماتریس $\hat{Q}_۱$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که $n \times n$ است.

$$\hat{Q}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & Q_۱ \end{bmatrix}. \tag{۵۰.۲}$$

رابطه (۴۹.۲) را از سمت چپ در $Q_۱{}^H$ و از سمت راست در $\hat{Q}_۱$ ضرب می‌کنیم. آن‌گاه ماتریسی که حاصل می‌شود یک ماتریس بالامثلثی است و برای ماتریس A، با در نظر گرفتن $Q = \hat{Q}_۱$ که یک ماتریس یکانی است، نتیجه حاصل می‌شود. □

با توجه به این‌که ماتریس R یک ماتریس مثلثی و مشابه ماتریس A است، در نتیجه درایه‌های روی قطر اصلی R برابر مقادیر ویژه ماتریس A است. برای هر $p \leqslant n$، زیرفضای تولید شده توسط p ستون اول Q، تحت A ناورداست. در واقع رابطه $AQ = QR$ نتیجه می‌دهد که:

$$\forall ۱ \leqslant j \leqslant p; \quad Aq_j = \sum_{i=۱}^{j} r_{ij} q_i. \tag{۵۱.۲}$$

با فرض $Q = [q_۱, q_۲, \ldots, q_p]$ و این‌که R_p زیر ماتریس اصلی پیشرو و از بعد p ماتریس R باشد، می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر نوشت:

$$AQ_p = Q_p R_P, \tag{۵۲.۲}$$

که تجزیه شور جزئی نامیده می‌شود. بردارهای q_i را بردارهای شور می‌نامند. ساده‌ترین حالت این تجزیه زمانی است که $p = ۱$ است که در آن $q_۱$ یک بردار ویژه است. بردارهای شور یکتا نیستند و به مرتبه‌ای که برای مقادیر ویژه انتخاب می‌شود، وابسته‌اند.

برای حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی به روش شور جزئی، به فضای چپ ناوردای ماتریس A وابسته به مقادیر ویژه $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_p$ نیاز داریم[۲۳]. در این روش ابتدا تجزیه شور جزئی ماتریس A^T را به صورت $A^TQ = QR$ محاسبه می‌کنیم.

که در آن Q یک ماتریس $n \times p$ است به‌طوری‌که ستون‌های Q، تشکیل یک پایه متعامد برای زیر فضای چپ وابسته به λ_i، $(۱ \leqslant i \leqslant p)$ را می‌دهند و R یک ماتریس بالامثلثی $p \times p$ است. با در نظر گرفتن ماتریس $Z = A - BF^T$ و تعریف ماتریس پسخورد به صورت زیر است:

$$F = QS. \tag{۵۳.۲}$$

می‌توان نوشت:

$$Z^TQ = (A^T - FB^T)Q = QR - QSB^TQ = Q(R - SE^T) = Q{C_p}^T, \tag{۵۴.۲}$$

که در معادله بالا داریم:

$$C_p = R^T - ES^T, \quad E = Q^TB, \tag{۵۵.۲}$$

است.

از آنجایی‌که $Z = QC_pQ^T$ است، دو ماتریس Z و C_p مشابه بوده و در نتیجه p مقدار ویژه ماتریس Z با مقادیر ویژه ماتریس C_p برابر می‌باشد، لذا می‌توان مسئله تخصیص را به صورت زیر در نظر گرفت. ابتدا ماتریس S را به گونه‌ای می‌یابیم که ماتریس $C_p = Q^TZQ$ دارای مقادیر ویژه $\{\mu_۱, \mu_۲, \dots, \mu_p\}$ باشد. با توجه به قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌شود، می‌توان ماتریس S را طوری اختیار کرد که مقدار ویژه λ_i، $(۱ \leqslant i \leqslant p)$، از A را به μ_i، $(۱ \leqslant i \leqslant p)$، تغییر داد و مابقی مقادیر ویژه A بدون تغییر باقی می‌ماند.

قضیه ۸.۳.۲. فرض کنید S ماتریسی باشد که در معادله (۵۵.۲) صدق کند و F از (۵۴.۲) به‌دست آید، آن‌گاه ماتریس $A - BF^T$ دارای مقادیر ویژه $\{\mu_۱, \mu_۲, \dots, \mu_p, \lambda_{p+۱}, \dots, \lambda_n\}$ است[۲۲].

برهان. فرض کنید $w = [w_۱, w_۲, \dots, w_{n-p}]$ بردارهای شور باقیمانده λ_i،$(i > p)$ باشد. به عبارت دیگر w یک پایه متعامد از متمم متعامد $spanQ$ است، به طوری‌که $X = [Q, w]$ یکانی است.

با استفاده از (۵۴.۲) داریم:

$$Q^TZ^TQ = {C_p}^T; \quad w^TZ^TQ = ۰. \tag{۵۶.۲}$$

با استفاده از (۵۳.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} Q^TZ^Tw = Q^T(A^T - QSB^T)w = \\ Q^TA^Tw - SB^Tw = Q^TA^Tw + E^T, \end{aligned} \tag{۵۷.۲}$$

$$\begin{aligned} w^TZ^Tw = w^T(A^T - QSB^T)w = \\ w^TA^Tw - w^TQSB^Tw = w^TA^Tw, \end{aligned} \tag{۵۸.۲}$$

بنابراین

$$X^T Z X = \begin{pmatrix} C_p & ۰ \\ w^T A Q + E & w^T A w \end{pmatrix}, \tag{۵۹.۲}$$

و اثبات کامل می‌شود. □

در نتیجه مسئله تبدیل به پیدا کردن ماتریس S می‌شود، به‌طوری‌که ماتریس حلقه بسته $R^T - ES^T$ دارای مقادیر ویژه μ_i، $(۱ \leqslant i \leqslant p)$ باشد.

مثال ۹.۳.۲. ماتریس A و b را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۴ & ۶ & ۳ & ۳ & ۶ & ۲ & ۶ & ۸ \\ ۳ & ۷ & ۶ & ۸ & ۵ & ۹ & ۰ & ۸ & ۱ & ۴ \\ ۶ & ۶ & ۲ & ۹ & ۱ & ۳ & ۵ & ۹ & ۰ & ۹ \\ ۶ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۷ & ۸ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۵ & ۵ & ۴ & ۹ & ۱ & ۲ & ۵ & ۸ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۵ & ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۹ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۹ & ۶ & ۵ & ۳ & ۵ & ۷ & ۶ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۹ & ۷ & ۹ & ۱ & ۰ & ۲ & ۷ & ۷ \\ ۷ & ۱ & ۳ & ۶ & ۱ & ۴ & ۴ & ۹ & ۲ & ۵ \\ ۷ & ۶ & ۰ & ۷ & ۱ & ۰ & ۶ & ۶ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۹ \\ ۱ \\ ۹ \\ ۶ \\ ۰ \\ ۲ \\ ۵ \\ ۹ \\ ۹ \end{bmatrix}.$$

طیف مقادیر ویژه A عبارت است از:

$$\{۴۲/۶۷۸۰, ۶/۲۱۵۵ \pm ۲/۳۲۱۰i, ۱/۰۳۷۷, -۹/۹۹۷۰,$$
$$-۱/۸۸۶۰ \pm ۵/۳۱۷۸i, -۰/۷۹۶۱, -۳/۲۹۰۸ \pm ۰/۶۱۹۸i\}.$$

ماتریس پسخورد حالت f را به‌گونه‌ای می‌یابیم که در طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته $A - bf$، مجموعه دلخواه $\{-۰/۵, -۲, -۱ \mp ۰/۳i\}$، جایگزین $\{۴۲/۶۷۸۰, ۶/۲۱۵۵ \pm ۲/۳۲۱۰i, ۱/۰۳۷۷\}$، شود.

حل. ماتریس‌های Q ، R از تجزیه شور جزئی به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$Q = \begin{bmatrix} -۰/۳۳۴۰ & ۰/۰۱۵۴ + ۰/۰۲۰۰i & ۰/۰۱۵۶ - ۰/۰۳۶۷i & -۰/۲۸۵۰ \\ -۰/۲۳۶۵ & -۰/۵۳۰۲ - ۰/۰۰۴۵i & -۰/۳۵۲۰ + ۰/۱۵۰۹i & ۰/۱۳۴۹ \\ -۰/۲۹۰۰ & ۰/۲۴۰۵ - ۰/۱۸۱۷i & ۰/۱۰۹۹ + ۰/۲۲۹۶i & ۰/۴۳۵۱ \\ -۰/۴۰۹۲ & ۰/۰۲۲۶ + ۰/۰۱۹۹i & ۰/۰۲۰۳ - ۰/۰۳۸۴i & ۰/۲۵۶۷ \\ -۰/۲۵۹۶ & -۰/۱۴۳۹ - ۰/۳۱۱۸i & -۰/۱۷۹۵ + ۰/۵۴۴۸i & -۰/۲۲۱۱ \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} ۴۲/۶۷۸۰ & ۳/۹۹۰۱ + ۰/۴۴۷۱i & ۲/۷۶۰۵ - ۱/۸۰۵۴i & -۱/۱۱۵۳ + ۰/۰۰۰۰i \\ -۰/۰۰۰۰ - ۰/۰۰۰۰i & ۶/۲۱۵۵ + ۲/۳۲۱۰i & ۱/۲۵۶۴ - ۲/۲۳۰۳i & -۰/۵۰۹۸ - ۰/۳۴۳۵i \\ -۰/۰۰۰۰ + ۰/۰۰۰۰i & -۰/۰۰۰۰ - ۰/۰۰۰۰i & ۶/۲۱۵۵ - ۲/۳۲۱۰i & -۰/۲۴۴۳ + ۰/۴۱۹۴i \\ -۰/۰۰۰۰ - ۰/۰۰۰۰i & -۰/۰۰۰۰ - ۰/۰۰۰۰i & -۰/۰۰۰۰ + ۰/۰۰۰۰i & ۱/۰۳۷۷ + ۰/۰۰۰۰i \end{bmatrix}$$

ماتریس E و S نیز برابر است با :

$$E=\begin{bmatrix} -۱۸/۹۲۷۰ \\ -۴/۱۸۹۳+۰/۱۳۷۳i \\ -۲/۸۰۸۵+۱/۳۵۶۷i \\ ۶/۲۲۶۴ \end{bmatrix},$$

$$S^t=\begin{bmatrix} -۳/۸۳۶۴ & ۱/۷۵۹۲+۰/۲۱۵۴i & ۱/۲۲۲۰-۰/۸۲۵۶i & ۰/۰۰۲۱ \end{bmatrix}$$

در انتها با قرار دادن $f=QS$، ماتریس پسخورد حالت به‌دست می‌آید.

$$f=\begin{bmatrix} ۱/۳۶۱۷ \\ -۰/۵۸۰۸ \\ ۱/۴۴۲۲ \\ ۱/۶۷۰۹ \\ ۰/۰۰۶۲ \\ ۰/۲۷۹۳ \\ ۲/۳۸۳۳ \\ ۱/۸۶۳۹ \\ ۱/۵۴۰۵ \\ ۱/۱۶۸۰ \end{bmatrix}.$$

فصل ۳

تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این فصل ابتدا به بیان فرم استاندارد اشلون و همدم برداری زوج (A, B) می‌پردازیم. سپس، چگونگی محاسبه ماتریس پسخورد حالت را برای مبحث تخصیص مقدار ویژه صفر و تخصیص مقدار ویژه دلخواه، برای ماتریس حلقه‌بسته در مسئله تخصیص مقدار ویژه غیرجزئی بیان می‌کنیم. در انتها نیز حل مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی غیر پارامتری را با استفاده از تبدیلات تشابهی بیان شده، مطرح می‌کنیم. در پایان برای کمک به درک بیشتر این روش، به ارائه مثال عددی می‌پردازیم.

۱.۳ فرم استاندارد اشلون

فرض کنید که T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده‌است. معادله حالت دستگاه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{۱.۳}$$

حال فرض می‌کنیم بردار حالت دستگاه توسط ماتریس تبدیل $T^{-۱}$ به فضای جدید تبدیل شود، یعنی:

$$\hat{x}(t) = T^{-۱}x(t) \quad \text{یا} \quad x(t) = T\hat{x}(t). \tag{۲.۳}$$

با جایگذاری (۲.۳) در معادله حالت (۱.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T\dot{\hat{x}}(t) &= AT\hat{x}(t) + Bu(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) &= T^{-۱}AT\hat{x}(t) + T^{-۱}Bu(t). \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

با در نظر گرفتن $\hat{A} = T^{-۱}AT$ و $\hat{B} = T^{-۱}B$ در معادله (۳.۳) داریم:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \tag{۴.۳}$$

ماتریس تبدیل T را می‌توان به‌صورت منحصربه‌فردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد. به‌این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس Q را ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم. در این صورت فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = [b_1\ b_2 \dots b_m \dots A^{q-1}b_1 \dots A^{q-1}b_r\ A^{q-1}b_{r+1} \dots A^{q-1}b_m\ A^q b_1 \dots A^q b_r].$$

ماتریس افزوده $[B, A]$، که دارای n سطر و $n+m$ ستون است را تشکیل می‌دهیم. اگر ماتریس $[T^{-1}B, T^{-1}AT]$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-1}[B, AT] &= T^{-1}[b_1\ b_2 \dots b_m\ Ab_1 \dots A^q b_1 \dots A^q b_r\ A^q b_{r+1} \dots A^q b_m\ A^{q+1}b_1 \dots A^{q+1}b_r] \\ &= T^{-1}[T, A^q b_{r+1} \dots A^{q+1}b_r] = [I, T^{-1}A^q b_{r+1} \dots T^{-1}A^{q+1}b_r] = [I_{n\times n}, V_{n\times m}]. \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

اکنون تبدیلات تشابهی سطری و ستونی نظیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱.

$$r(i) \longleftrightarrow r(j), \quad c(i) \longleftrightarrow c(j)$$

۲.

$$r(i) \longleftrightarrow ar(i), \quad c(i) \longleftrightarrow \frac{1}{a}c(i)$$

۳.

$$r(i) \longleftrightarrow r(i) + kr(j), \quad c(j) \longleftrightarrow c(j) - kc(i)$$

در صورتی که بخواهیم زوج (B, A) را به فرم استاندارد اشلون $[I, V]$ تبدیل نماییم، ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I]$ را تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس Q و ستونی مقدماتی نظیر روی ماتریس A حاصل در هر مرحله، n ستون اول ماتریس Q را به I تبدیل می‌کنیم. در این‌صورت ماتریس افزوده $\hat{Q}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n\times m}, T^{-1}], \tag{۶.۳}$$

که ماتریس های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به صورت زیر هستند:

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} 0_{m\times m} & 0 & \dots & 0_{m\times r} & {v^{(1)}}_{m\times m} \\ I_m & 0 & \dots & 0 & {v^{(2)}}_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & I_m & \dots & 0 & {v^{(3)}}_{m\times m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & {v^{(q)}}_{m\times m} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times m} & \dots & I_r & {v^{(q+1)}}_{r\times m} \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{B}=\begin{bmatrix} I_m \\ 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} \\ \vdots \\ 0_{m\times m} \\ 0_{r\times m} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

مثال ۱.۱.۳. فرم استاندارد اشلون زوج (B, A)، در دستگاه خطی زیر را به‌دست می‌آورید.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل.

$$Q=\left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -2 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c(1)+c(2)\to c(1)\, on A]{r(2)-r(1)\to r(2)\, on(Q)} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \vdots & 0 & 2 & 2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2c(2)\to c(2)\, on A]{-\frac{1}{2}r(2)\to r(2)\, on(Q)} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c(2)+2c(1)\to c(2)\, on A]{r(1)-2r(2)\to r(1)\, on(Q)} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3c(3)\to c(3)\, on A]{-\frac{1}{3}r(3)\to r(3)\ on(Q)} \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & -6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c(۳)+۲c(۱)\to c(۳)\, on A]{r(۱)-۲r(۳)\to r(۱)\, on(Q)} \left[\begin{array}{cc:cccc:ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۱۶}{۳} & -۹ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & ۳ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۴ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{array}\right] = \hat{Q} = [I, V, T^{-۱}].$$

۲.۳ فرم همدم برداری

یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی مانند S را در نظر می‌گیریم که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده‌است. اکنون بردار حالت دستگاه که در بخش ۱.۳ آن را به فرم استاندارد اشلون در آوردیم، توسط ماتریس تبدیل $S^{-۱}$ به فضای جدید تبدیل می‌گردد:

$$\tilde{x}(t) = S^{-۱}\hat{x}(t) = S^{-۱}T^{-۱}x(t) \qquad (۸.۳)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} S\dot{\tilde{x}}(t) &= \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ \Rightarrow\ \dot{\tilde{x}}(t) &= S^{-۱}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-۱}\hat{B}u(t) \end{aligned} \qquad (۹.۳)$$

با در نظر گرفتن $\tilde{A} = S^{-۱}\hat{A}S = S^{-۱}T^{-۱}ATS$ و $\tilde{B} = S^{-۱}\hat{B} = S^{-۱}T^{-۱}B$ در معادله (۹.۳) داریم:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \qquad (۱۰.۳)$$

زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$، فرم همدم برداری زوج (B, A) می‌باشد[۱۰]. از آن‌جایی که معادلات (۱.۳) و (۱۰.۳) هم‌ارز یکدیگر هستند، جواب آن‌ها نیز یکسان است.

۱.۲.۳ به‌دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی

اگر ناورداهای کرونکر نامنظم باشد، با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس $\hat{A}$ و سطری مقدماتی نظیر آن روی کل ماتریس $\hat{Q}$، می‌توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آن را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{۰m\times m} \\ \cdots\cdots \\ ۰_{(n-m)\times m} \end{bmatrix} \qquad (۱۱.۳)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_{۰m\times n} & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I_{(n-m)} & & ۰_{(n-m)\times m} \end{bmatrix} \qquad (۱۲.۳)$$

مثال ۱.۲.۳. برای مثال (۱.۱.۳)، فرم همدم برداری را به‌دست آورید.

$$\hat{Q}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \vdots & ۰ & -\frac{۱۶}{۳} & -۹ & \vdots & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & ۳ & \vdots & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۴ & \vdots & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[onA]{c(۳)-۴c(۱)\to c(۳)} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \vdots & ۰ & -\frac{۱۶}{۳} & -۹ & \vdots & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & ۳ & \vdots & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۰ & \vdots & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow[on\hat{Q}]{r(۱)+۴r(۲)\to r(۱)} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \vdots & ۴ & ۰ & -۹ & \vdots & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & ۳ & \vdots & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۰ & \vdots & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow[onA]{c(۲)-\frac{۴}{۳}c(۱)\to} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \vdots & ۴ & -\frac{۱۶}{۳} & -۹ & \vdots & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & ۳ & \vdots & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & ۰ & ۰ & \vdots & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow[on\hat{Q}]{r(۱)+\frac{۴}{۳}r(۲)\to r(۱)} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۳} & \vdots & ۴ & -\frac{۸}{۳} & -۵ & \vdots & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & -۱ \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & ۳ & \vdots & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & ۰ & ۰ & \vdots & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۳} \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \hat{A}=\begin{bmatrix} ۴ & -\frac{۸}{۳} & -۵ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$S^{۱}T^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

برای معادله (۱.۳)، قانون کنترل را به صورت $U(t)=Kx(t)$ تعریف می‌کنیم و به طور مشابه برای معادله (۴.۳)، قانون کنترل به صورت $U(t)=\tilde{K}\tilde{x}(t)$ تعریف می‌شود که $\tilde{K}$ ماتریس پسخورد حالت معادله دستگاه تبدیل شده به فرم همدم برداری است. با جایگذاری $S^{-۱}T^{-۱}x(t)$ به جای $\tilde{x}$ خواهیم داشت:

$$U(t)=\tilde{K}S^{-۱}T^{-۱}x(t) \tag{۱۳.۳}$$

فرض کنید:

$$K=\tilde{K}S^{-۱}T^{-۱} \tag{۱۴.۳}$$

که آن را ماتریس پسخورد اولیه زوج (A, B) می‌نامیم.

در صورتی که $\tilde{K}$ را به صورت $-B_\circ^{-1}G_\circ$ تعریف نماییم، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}_p = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ صفر است.

$$\tilde{\Gamma}_p = \begin{bmatrix} & G_\circ & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I & & \circ \end{bmatrix}_{n\times n} + \begin{bmatrix} B_\circ \\ \cdots\cdots \\ \circ \end{bmatrix}_{n\times m} (-B_\circ^{-1}G_\circ) = \begin{bmatrix} & \circ_{m\times n} & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I_{(n-m)} & & \circ_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

نتیجه ۲.۲.۳. به دلیل مشابه بودن Γ با $\tilde{\Gamma}$، تمامی مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته $\Gamma = A + BK$ نیز صفراند.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}BKTS = S^{-1}T^{-1}(A+BK)TS \\ &= (TS)^{-1}(A+BK)TS = (TS)^{-1}QTS \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

۳.۳ بیان روش جدید با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این بخش با استفاده از بردارهای ویژه سمت چپ وابسته به مقادیر ویژه ناپایدار دستگاه، ابتدا مسئله را به یک مسئله تخصیص مقدار ویژه تبدیل می‌کنیم و سپس با بکاربردن تبدیلات تشابهی در دستگاه کنترل خطی، ماتریس پسخورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که مقادیر ویژه مطلوب را به ماتریس حلقه بسته اختصاص دهد.

۱.۳.۳ تخصیص مقدار ویژه جزئی غیر پارامتری

ماتریس $A_{n\times n}$ و ماتریس $B_{n\times m}$ در دستگاه خطی پیوسته (۱.۳) را در نظر بگیرید.

فرض می‌کنیم که $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \ldots, \lambda_n\}$، مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ است، به طوری که $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ و $\{\lambda_{p+1}, \ldots, \ldots, \lambda_n\}$ از هم گسسته هستند.

فرض می‌کنیم $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس حلقه باز (ماتریس A) باشد. مقادیر ویژه دلخواه $s = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ که تحت ترکیب مختلط بسته هستند، را در نظر می‌گیریم که $m \leqslant p$ است.

برای شروع روش جدید، ابتدا نیازمند به‌دست آوردن بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A هستیم. این بردارها را به صورت:

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{۱۶.۳}$$

نمایش می‌دهیم.

در (۱۶.۳)، $y_1, y_2, \ldots, y_p$ بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A، متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ است که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$Y_۱ = (y_۱, y_۲, \ldots, y_p) = \begin{bmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & \ldots & y_{۱p} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & \ldots & y_{۲p} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n۱} & y_{n۲} & \ldots & y_{np} \end{bmatrix}. \qquad (۱۷.۳)$$

در ادامه ماتریس $Y_۱^H$ را به‌دست می‌آوریم. ماتریس‌های $\Lambda_۱ = diag\{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_p\}$ و $Y_۱^H B$ را در نظر می‌گیریم که به شکل زیر هستند:

$$(Y_۱^H B)_{p\times m} = \begin{bmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & \ldots & y_{۱p} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & \ldots & y_{۲p} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n۱} & y_{n۲} & \ldots & y_{np} \end{bmatrix}_{p\times n} \times \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \ldots & b_{۱m} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \ldots & b_{۲m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n۱} & b_{n۲} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} \qquad (۱۸.۳)$$

$$\Lambda_۱ = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & \ldots & & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & ۰ & \ldots & ۰ \\ \vdots & & & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \ldots & & \lambda_p \end{bmatrix}_{p\times p} \qquad (۱۹.۳)$$

هدف از کنترل دستگاه در این قسمت، ابتدا یافتن ماتریس پسخورد حالت K است به گونه‌ای‌که، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ + Y_۱^H BK$ در مجموعه تعیین شده $s = \{\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p\}$ باشند.

نخست با استفاده از تبدیلات تشابهی که در بخش ۱.۳ بیان شده‌است، فرم استاندارد اشلون و سپس مانند بخش ۲.۳ فرم همدم برداری زوج $(Y_۱^H B, \Lambda_۱)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\widetilde{Y_۱^H B} = \begin{bmatrix} (Y_۱^H B)_{۰_{m\times m}} \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Lambda}_۱ = \begin{bmatrix} & G_{۰_{(m\times p)}} \\ I_{p-m} & ۰_{(p-m)\times m} \end{bmatrix} \qquad (۲۰.۳)$$

ماتریس پسخورد اولیه $\widetilde{F}_p = -((Y_۱^H B)_۰)^{-۱} G_۰$ را محاسبه نموده به گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\widetilde{\Lambda}_۱ + (\widetilde{Y_۱^H B})\widetilde{F}_p$، همگی صفر هستند. سپس ماتریس حلقه بسته

$$\widetilde{\Gamma}_۰ = \widetilde{\Lambda}_۱ + (\widetilde{Y_۱^H B})\widetilde{F}_p = \begin{bmatrix} & ۰ & \\ & \cdots\cdots & \\ I & & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۲۱.۳)$$

را محاسبه می‌کنیم. اکنون ماتریس قطری D را به صورت

$$D = diag\{\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p\} \qquad (۲۲.۳)$$

تشکیل داده و با $\widetilde{\Gamma}_۰$ جمع می‌کنیم و آن را A_μ می‌نامیم.

$$A_\mu = \widetilde{\Gamma}_\circ + D = \begin{bmatrix} \mu_1 & \circ & \dots & & & & \circ \\ \circ & \mu_2 & \circ & & \dots & & \circ \\ \circ & & \ddots & & & & \circ \\ \circ & \dots & & \mu_m & & & \\ & & & \dots\dots\dots & & & \\ 1 & \circ & \dots & \circ & \mu_{m+1} & \dots & \circ \\ \circ & \ddots & & \circ & \circ & \ddots & \circ \\ \circ & \dots & & 1 & \circ & \dots & \mu_p \end{bmatrix} \qquad (۲۳.۳)$$

به وضوح مقادیر ویژه ماتریس A_μ مجموعه $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ می‌باشد.

اکنون عملیات تشابهی $\begin{cases} c(j) = c(j) - \mu c(i) \\ r(i) = r(i) + \mu c(j) \end{cases}$ را بر روی ماتریس A_μ انجام می‌دهیم. با انجام این عملیات A_μ به فرم همدم برداری $\widetilde{A}_\mu$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\widetilde{A}_\mu = \begin{bmatrix} & G_{\mu_{(m\times p)}} & \\ I_{p-m} & & \circ_{(p-m)\times m} \end{bmatrix} \qquad (۲۴.۳)$$

از آن‌جایی که $\widetilde{A}_\mu$ و A_μ مشابه‌اند، مقادیر ویژه آن‌ها نیز یکسان است. یعنی مقادیر $\widetilde{A}_\mu$ نیز مجموعه $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ است. در ادامه ماتریس پسخورد حالت $\widetilde{K}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{K} = ((Y_1{}^H B)_\circ)^{-1}(-G_\circ + G_\mu) = -((Y_1{}^H B)_\circ)^{-1} G_\circ + ((Y_1{}^H B)_\circ)^{-1} G_\mu = \widetilde{F}_p + \widetilde{K}_\mu \qquad (۲۵.۳)$$

به وضوح مقادیر ویژه ماتریس $\widetilde{\Gamma}_\mu = \widetilde{\Lambda}_1 + (\widetilde{Y_1{}^H B})\widetilde{K}$، طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است.

$$\widetilde{\Gamma}_\mu = \widetilde{\Lambda}_1 + (\widetilde{Y_1{}^H B})\widetilde{K} = \begin{bmatrix} & G_{\circ_{(m\times p)}} & \\ I_{p-m} & & \circ_{(p-m)\times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (Y_1{}^H B)_{\circ_{m\times m}} \\ \circ \end{bmatrix} ((Y_1{}^H B)_\circ{}^{-1}(-G_\circ + G_\mu)) \qquad (۲۶.۳)$$

$$= \begin{bmatrix} & G_\mu & \\ I_{p-m} & & \circ_{(p-m)\times m} \end{bmatrix} = \widetilde{A}_\mu \qquad (۲۷.۳)$$

تعریف می‌کنیم:

$$K = \widetilde{K} T^{-1} \qquad (۲۸.۳)$$

که در رابطه بالا T^{-1} ماتریس تبدیلی است که از فرم همدم برداری به‌دست آوردیم. لذا، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = \Lambda_1 + Y_1{}^H BK$ نیز طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ می‌باشد.

در انتها، ماتریس پسخورد حالت مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = K \times Y_1{}^H \qquad (۲۹.۳)$$

با تعریف ماتریس F به صورت (۲۹.۳)، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A+BF$، برابر طیف

$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\}$$

می‌شود.

$$\Omega(A+BF) = \Omega(A+BKY_1{}^H) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\} \quad (۳۰.۳)$$

۴.۳ الگوریتم روش

ورودی‌ها:

◁ ماتریس $A_{n\times n}$،

◁ ماتریس $B_{n\times m}$،

◁ مجموعه $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$، که تحت ترکیب مختلط بسته هستند،

◁ مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ از مجموعه مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\}$، از ماتریس A و بردارهای ویژه سمت چپ $Y_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ ماتریس A، متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

خروجی: ماتریس پسخورد حالت F، به طوری‌که طیف ماتریس حلقه بسته $A+BF$ برابر

$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\}.$$

فرضیات:

- زوج (A, B) به صورت جزئی نسبت به مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ قابل کنترل است.

- مجموعه‌های $\{\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\}$ ، $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ و $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ مستقل و جدا از هم هستند.

گام اول:

محاسبه ماتریس‌های $\Lambda_1 = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ و $Y_1{}^H B$.

گام دوم:

به‌دست آوردن ماتریس پسخورد K، به گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_1 + Y_1{}^H BK$ برابر طیف $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ باشد.

گام سوم:

عبارت $F = K \times Y_1{}^H$ را تشکیل می‌دهیم.

۵.۳ مثال عددی

مثال ۱.۵.۳. دستگاه خطی پیوسته زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{۷\times۷}$ و $B \in \mathbb{R}^{۷\times۲}$، به صورت زیر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۳ & ۷ & ۰ & ۱۰ \\ ۷ & ۵ & ۰ & ۱ & ۷ & ۹ & ۲ \\ ۹ & ۳ & ۱۷ & ۳ & ۱۱ & ۲ & ۴ \\ ۸ & ۰ & ۱ & ۰ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۷ & ۱۳ & ۱ & ۳ & ۲ & ۱۶ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۰ & ۳ & ۹ & ۰ & ۴ \\ ۱۹ & ۳ & ۰ & ۲ & ۰ & ۱۱ & ۱ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۹ & ۷ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۷ \\ ۰ & ۷ \\ ۳ & ۱ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix}$$

طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌باز برابر:

$$\begin{aligned} L &= L_۱ \cap L_۲ \\ &= \{۲۹/۱۶۲۰, ۱۶/۴۸۶۸, ۸/۹۵۵۸\} \cap \{-۱۸/۶۷۲۵, -۰/۸۴۸۷, -۶/۱۲۲۸, -۳/۹۶۰۶\} \end{aligned}$$

مجموعه دلخواه $S = \{-۹, -۲, -۷\}$ را در نظر بگیرید. ماتریس پسخورد حالت F را به گونه‌ای به‌دست می‌آوریم که، طیف ماتریس حلقه بسته $A + BF$ برابر $S \cup L_۲$ باشد.

حل.

با توجه به نکته‌های (۴۳.۲.۱) و (۳۴.۲.۱)، ابتدا باید نشان دهیم زوج ماتریس (A, B) به ازای مقادیر ویژه مثبت ۲۹/۱۶۲۰, ۱۶/۴۸۶۸, ۸/۹۵۵۸، کنترل پذیر هستند. یعنی باید نشان دهیم:

$$y_i{}^H B \neq ۰, \quad i = ۱, ۲, ۳$$

$y_۱$، $y_۲$، $y_۳$ به ترتیب بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A متناظر با مقادیر ویژه مثبت۲۹/۱۶۲۰، ۱۶/۴۸۶۸ و ۸/۹۵۵۸ هستند.

$$Y_۱ = \begin{bmatrix} ۰/۴۸۶۵ & ۰/۲۵۴۷ & ۰/۵۹۳۸ \\ ۰/۴۴۵۷ & ۰/۴۵۰۲ & -۰/۵۲۸۳ \\ ۰/۰۵۲۱ & -۰/۶۲۰۷ & ۰/۰۱۰۳ \\ ۰/۱۸۷۳ & ۰/۱۱۳۶ & ۰/۱۰۹۱ \\ ۰/۴۴۵۹ & ۰/۲۰۴۹ & -۰/۱۹۲۲ \\ ۰/۴۹۴۷ & ۰/۵۰۲۴ & -۰/۲۴۸۵ \\ ۰/۲۸۸۷ & ۰/۱۹۹۴ & ۰/۵۰۷۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{bmatrix},$$

$$y_۱{}^H B = \begin{bmatrix} ۸/۴۲۰۷ & ۱۰/۲۳۷۰ \end{bmatrix} \neq ۰, \quad y_۲{}^H B = \begin{bmatrix} ۶/۲۵۳۹ & ۴/۰۳۲۰ \end{bmatrix} \neq ۰$$

$$y_۳{}^H B = \begin{bmatrix} -۱/۰۹۱۴ & -۱/۳۴۴۴ \end{bmatrix} \neq ۰$$

در نتیجه پایداری تضمین شده است، بنابر این الگوریتم روش را اجرا می‌کنیم:

گام اول:

$$\Lambda_۱ = \begin{bmatrix} ۲۹/۱۶۲۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۶/۴۸۶۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸/۹۵۵۸ \end{bmatrix}$$

$$Y_۱{}^H B = \begin{bmatrix} -۸/۴۷۰۷ & -۱۰/۲۳۷۰ \\ -۶/۲۵۳۹ & -۴/۰۳۲۰ \\ ۱/۰۹۱۴ & ۱/۳۴۴۴ \end{bmatrix}$$

گام دوم:

پس از به‌دست آوردن فرم همدم برداری ماتریس‌های $\Lambda_۱$ و $Y_۱{}^H B$، ماتریس پسخورد حالت Fp که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ + Y_۱{}^H BFp$ را به صفر و ماتریس حلقه‌بسته K که طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ + Y_۱{}^H BK$ را به $\{-۷, -۲, -۹\}$ می‌برد را به‌دست می‌آوریم.

$$Fp = \begin{bmatrix} -۲/۳۴۳۳ & -۵/۴۶۰۳ & -۱۴/۳۷۵۲ \\ -۲/۲۱۸۴ & ۴/۵۵۷۹ & ۸/۸۹۹۳ \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -۵/۲۹۸۶ & -۶/۰۲۹۲ & -۲۵/۹۱۱۸ \\ -۲/۳۷۰۶ & ۵/۱۱۰۸ & ۱۰/۸۸۶۶ \end{bmatrix}.$$

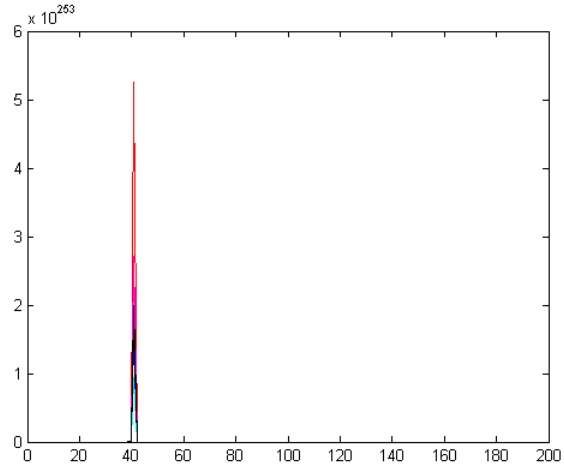
گام سوم:

در انتها قرار می‌دهیم:

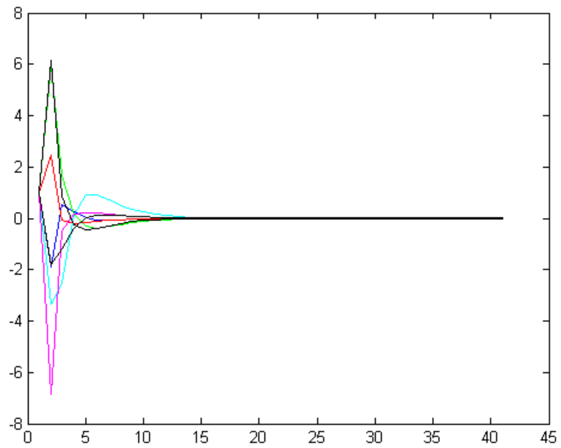
$$F = KY_۱{}^H = \begin{bmatrix} -۱۹/۵۰۰۴ & ۸/۶۱۲۸ & ۳/۱۹۹۳ & -۴/۵۰۵۰ & ۱/۳۸۰۷ & ۰/۷۸۸۰ & -۱۵/۸۸۳۸ \\ ۶/۶۱۳۱ & -۴/۵۰۶۷ & -۳/۱۸۳۶ & ۱/۳۲۴۸ & -۲/۱۰۱۵ & -۱/۳۰۹۹ & ۵/۸۶۰۳ \end{bmatrix},$$

$$\Omega(A+BF) = \{-۱۸/۶۷۲۵, -۹/۰۰۱۰, -۶/۹۹۹۰, -۶/۱۲۲۸, -۰/۸۴۸۷, -۲/۰۰۰۰, -۳/۹۶۰۶\}$$
$$\simeq \{-۱۸/۶۷۲۵, -۹, -۷, -۶/۱۲۲۸, -۰/۸۴۸۷, -۲, -۳/۹۶۰۶\}.$$

در ادامه نمودارهای پایداری مثال فوق آورده شده‌است. نمودار اول مربوط به نمودار حالت $e^{At}x_۰$ و نمودار دوم مربوط به نمودار حالت $e^{(A+BF)t}x_۰$ مسئله است:



شکل ۱.۳: نمودار حالت مربوط به ورودی $u = ۰$



شکل ۲.۳: نمودار حالت مربوط به ورودی $u = Fx(t)$ بدون کاهش نورم

فصل ۴

کمینه سازی نورم ماتریس پسخورد حالت در مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی با پارامتر خطی

در این فصل ابتدا با استفاده از نظریه گراف و تعریف مربوط به گراف و ماتریس متناظر با آن، گراف متناظر با ماتریس $A + BF_p$ را شرح داده و سپس از نظریه گراف برای به‌دست آوردن ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی در مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی استفاده می‌کنیم. در انتها تلاش می‌کنیم تا نورم ماتریس پسخورد حالت را برای مسئله تخصیص مقدار ویژه به کم‌ترین مقدار برسانیم. این کاهش نورم را با یک مثال عددی در انتهای فصل به وضوح نشان داده‌ایم.

۱.۴ ماتریس و گراف

تعریف ۱.۱.۴. گراف از مجموعه غیر تهی به نام رئوس و مجموعه دیگری به نام یال تشکیل شده‌است که هر یال با دو رأس مشخص می‌شود. یکی از این رئوس را ابتدای یال و دیگری را انتهای یال می‌نامند. گراف را با حرف g و رئوس را با نماد e_i نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۴. تعداد یال‌های تشکیل دهنده یک مسیر در گراف را طول مسیر می‌نامند و آن را با L_i نشان می‌دهیم.

رئوس در گرافی که در ادامه با آن سروکار داریم، پایه‌های استاندارد $\mathbb{R}^n$ به انضمام صفر است. مسیرهایی از این گراف مورد توجه ما خواهند بود که انتهای آنها به صفر برسند. اگر مسیری از e_i به صفر وجود داشته باشد، آن‌گاه e_i با صفر مرتبط است.

برای هر گراف n رأسی g، ماتریس $n \times n$، G وجود دارد به طوری‌که، اگر یالی از e_i به e_j وجود داشته باشد، $G_{ij} = ۱$ و اگر از e_i به e_j یالی وجود نداشته‌باشد، $G_{ij} = ۰$ خواهد شد. (که G_{ij}، درایه سطر iام و ستون jام ماتریس $n \times n$، G است.) به‌طور مشابه می‌توان با داشتن یک ماتریس $n \times n$، با درایه‌های صفر و یک، گرافی n رأسی متناظر نمود. به صورتی که به ازای درایه $G_{ij} = ۱$، یالی از رأس e_i به e_j رسم نمود و برای $G_{ij} = ۰$، یعنی از رأس e_i به e_j یالی وجود ندارد.

۲.۴ گراف مربوط به ماتریس $A + BF_p$

زوج (A, B) را در دستگاه خطی (۱.۳) در نظر بگیرید. با استفاده از روش تبدیلات تشابهی فصل قبل، ماتریس پسخورد F_p را از فرم همدم برداری این زوج به‌دست می‌آوریم. همان گونه که پیش از این نشان داده‌ایم، درایه‌های ماتریس حلقه بسته $A + BF_p$، صفر یا یک است. در نتیجه می‌توان گرافی برای آن متناظر نمود به طوری که رئوس آن را بردارهای پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ به انضمام بردار صفر تشکیل می‌دهند[۱۲]. به این ترتیب که ابتدا، m رأس ورودی $e_۱, e_۲, \ldots, e_m$ را در نظر می‌گیریم. سپس دو حالت زیر به وجود می‌آید:

۱. از رأس e_i به رأس e_j یالی در نظر گرفته می‌شود، اگر:
$$(A + BF_p)e_i = e_j$$

۲. بین رأس e_i و صفر رأسی فرض می‌کنیم، اگر وتنها اگر:
$$(A + BF_p)e_i = ۰$$

از آن‌جایی که ماتریس $A + BF_p$ پوچ توان است، از هر رأس غیر صفر گراف g متناظر آن، مسیری به رأس صفر وجود دارد. علاوه‌براین، در گراف g هیچ حلقه و دوری وجود ندارد. در نتیجه طبق مطالب گذشته، L_i را ماکسیمم فاصله رأس e_i با رأس صفر در نظر می‌گیریم و می‌توان گفت:

۱. هر L_i عدد صحیحی است که:
$$۱ \leqslant L_i \leqslant n \tag{۱.۴}$$

۲. اندیس پوچ توانی ماتریس $A + BF_p$ عبارت است از:
$$\vartheta = max\{L_۱, L_۲, \ldots, L_m\}$$

۳. در گراف g، به هیچ یک از رئوس $e_۱, e_۲, \ldots, e_m$ یالی منتهی نمی‌شود.
$$max\{L_۱, L_۲, \ldots, L_m\} = max\{L_۱, L_۲, \ldots, L_m, L_{m+۱}, \ldots, L_n\}$$

۳.۴ ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی

برای تعیین جایگاه پارامترهای خطی در ماتریس پسخورد حالت، ماتریس حلقه بسته $\widetilde{\Gamma}_۰ = \widetilde{\Lambda}_۱ + (\widetilde{Y_۱{}^H B})\widetilde{F}_p$ را در فضای همدم برداری تشکیل می‌دهیم. همان گونه که در فصل قبل بیان شد، از آن‌جایی که درایه‌های این ماتریس صفر و یک است، گراف متناظر با این ماتریس را رسم می‌نماییم.

با توجه به این که درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $\widetilde{\Gamma}_۰$ همگی صفر هستند و این ماتریس، ماتریسی مثلثی است، گراف متناظر با این ماتریس، شامل هیچ حلقه و دوری نیست و برگشت از روی یال امکان ندارد. از هر رأس غیر صفر، مسیری به رأس صفر وجود دارد و اندیس پوچ توانی $\widetilde{\Gamma}_۰$، بزرگ‌ترین طول مسیر از یک رأس ورودی تا رأس صفر است.

اکنون ماتریس G_α ،$m \times p$ با درایه‌های صفر را در نظر بگیرید. سپس برای یافتن پارامترها، یال‌هایی از هر رأس به رأس‌های دیگر رسم می‌کنیم، به گونه‌ای که:

۱. ابتدای هر یال، یکی از m ورودی گراف باشد و انتهای آن یال ورودی یا گره‌های دیگر باشد.

۲. یال‌ها را به گونه‌ای رسم کنیم که در گراف ایجاد دور ننمایند.

۳. یال‌ها نباید روی هم قرار گیرند.

۴. اگر از رئوسی که اندیس آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی m است، یالی به رئوس دیگر وصل گردد، آن‌گاه این یال‌های اضافی بیانگر پارامترهای خطی می‌باشد.

هنگامی که از رأس e_i به رأس e_j یالی اضافی کنیم، درایه (i,j) ماتریس G_α را پارامتر g_{ij} قرار می‌دهیم. به این ترتیب پارامترهای مؤثر ماتریس G_α تعیین شده و واضح است که این ماتریس منحصربه‌فرد نیست.

نکته ۱.۳.۴. برای به‌دست آوردن گراف متناظر با ماتریس حلقه بسته $A + BF_p$، اگر ناوردهای کرونکر منظم باشد، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} \widetilde{\Gamma}_\circ e_i = e_{i+m} & ; \quad i+m \leqslant p \\ \widetilde{\Gamma}_\circ e_i = \circ & ; \quad i+m > p \end{cases} \tag{۲.۴}$$

اکنون ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی که مقادیر ویژه $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p$ را به ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ - {Y_۱}^H BK$ اختصاص می‌دهد، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} K &= F_p + K_\mu + K_\alpha \\ &= -({Y_۱}^H B)_\circ^{-۱} G_\circ + ({Y_۱}^H B)_\circ^{-۱} G_\mu + ({Y_۱}^H B)_\circ^{-۱} G_\alpha \\ &= ({Y_۱}^H B)_\circ^{-۱}(-G_\circ + G_\mu + G_\alpha) \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

در انتها با استفاده ازماتریس K که در معادله (۳.۴) به‌دست آمد، ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = K{Y_۱}^H \tag{۴.۴}$$

$$\Omega(A + BF) = \Omega(A + BK{Y_۱}^H) \tag{۵.۴}$$

در ادامه هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت F است به گونه‌ای که نورم آن مینیمم شود. با نگاهی به رابطه (۴.۴)، بسیار واضح است که ماتریس پسخورد حالت جزئی F، با ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی K رابطه مستقیم دارد و با توجه به رابطه (۳.۴) که داریم:

$$K = ({Y_۱}^H B)_\circ^{-۱}(-G_\circ + G_\mu + G_\alpha) \tag{۶.۴}$$

برای رسیدن به هدف مینیمم کردن نورم ماتریس پسخورد حالت F، می‌توان از مینیمم کردن نورم ماتریس K استفاده نمود. از آن‌جایی که اندازه ماتریس K می‌تواند بسیار کوچک‌تر از ماتریس F باشد، این کار از نظر زمان و هزینه بسیار بهینه‌تر است.

در نتیجه هدف یافتن پارامترهای ماتریس پسخورد حالت K است، به‌گونه‌ای که نورم آن کمترین مقدار ممکن شود.

۴.۴ الگوریتمی برای مینیمم کردن کنترل‌گر پسخورد حالت در مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی

در این قسمت هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت $({Y_1}^H B)_0^{-1}(-G_0 + G_\mu + G_\alpha)T^{-1}$، به‌گونه‌ای است که نورم آن کمترین مقدار خود باشد. یعنی مینیمم کردن عبارت زیر:

$$\|K\| = trac[KK^t] \tag{۷.۴}$$

یک راه برای به‌دست آوردن چنین ماتریسی، استفاده از معادله زیر است:

$$\frac{\partial \|K\|^2}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \tag{۸.۴}$$

که در آن، α_iها نشان دهنده پارامترهای خطی ماتریس پسخورد حالت هستند که متعلق به ماتریس G_α است. اکنون مجموعه‌ای از r معادله خطی به‌دست می‌آید که دارای r مجهول است. از آن‌جایی که، با افزایش پارامترها، به‌دست آوردن مشتقات جزئی $\|K\|$ برحسب هر پارامتر بسیار دشوار خواهدبود، در ادامه روشی برای مینیمم‌سازی ماتریس پسخورد حالت K بیان می‌کند که در آن مجموعه‌ای مطلوب از مقادیر که پیش از این ذکر شد، به ماتریس حلقه بسته اختصاص داده می‌شود[۱۱].

زیر ماتریس G_α، که شامل مؤلفه‌های غیر صفر G_α،(یعنی پارامترهای g_{ij})، است را در نظر بگیرید. این زیر ماتریس را H می‌نامیم و عناصر آن را با h_{sr} نشان‌می‌دهیم، که در سطر sام و ستون rام قرار دارد. به‌وضوح، در حاصل‌ضرب $({Y_1}^H B)_0^{-1} G_\alpha T^{-1}$، ستون s از ماتریس $({Y_1}^H B)_0^{-1}$ و سطر r از ماتریس T^{-1}، پارامترهای ناصفر تولید می‌کنند که با عناصر متناظر K_p، که برابر $({Y_1}^H B)_0^{-1}(-G_0 + G_\mu)T^{-1}$ است، جمع می‌شوند. ستون‌های $({Y_1}^H B)_0^{-1}$ را که با سطرهای h_{sr} سازگارند، در ماتریس V و سطرهای T^{-1} را که با ستون‌های h_{sr} سازگار هستند را در ماتریس W قرار می‌دهیم. بنابراین ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی مؤثر، عبارت است‌از:

$$K = K_p + VHW \tag{۹.۴}$$

مؤلفه‌های ماتریس فوق عبارت است‌از:

$$k_{ij} = k_{p_{ij}} + v_{is} h_{sr} w_{rj} \tag{۱۰.۴}$$

که نورم فروبنیوس [۱] K به صورت زیر است:

$$\|K\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} {k_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (k_{p_{ij}} + v_{is} h_{sr} w_{rj})^2 \tag{۱۱.۴}$$

[۱] Frobenius

برای مینیمم کردن باید معادله (۸.۴)، برای هر $s \leqslant m$ و $r \leqslant n$، برقرار باشد.

مشتق‌گیری از نورم K، نسبت به هر یک از پارامترهای h_{sr}، به صورت زیر است:

$$2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{si}(k_{p_{ij}} + v_{is}h_{sr}w_{rj})w_{jr} = 0 \qquad (۱۲.۴)$$

یا

$$2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{si}k_{p_{ij}}w_{jr} + v_{si}v_{is}h_{sr}w_{rj}w_{jr} = 0 \qquad (۱۳.۴)$$

در نمادگذاری ماتریس، $\sum_{i=1}^{m} v_{si}v_{is}$ را با V^tV نشان می‌دهیم که یک ماتریس وارون‌پذیر $s \times s$ است و آن را P می‌نامیم. $\sum_{j=1}^{n} w_{rj}w_{jr}$ را با WW^t نمایش می‌دهیم که یک ماتریس وارون‌پذیر $r \times r$ است و آن را با Q نمایش می‌دهیم. (زیرا ستون‌های V و سطرهای W، به ترتیب بردارهای مستقل به‌دست آمده از ماتریس‌های $(Y_1{}^HB)_\circ^{-1}$ و T^{-1} هستند.)

اکنون معادله (۱۳.۴) را بازنویسی می‌کنیم:

$$2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_{is})^tK_p(w_{rj})^t + (v_{is})^tv_{is}Hw_{rj}(w_{rj})^t = 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_{is})^tK_p(w_{rj})^t + PHQ = 0 \qquad (۱۴.۴)$$

قرار می‌دهیم:

$$C = V^tK_pW^t \qquad (۱۵.۴)$$

با جایگذاری (۱۵.۴) در معادله (۱۴.۴) داریم:

$$C + PHQ = 0 \longrightarrow H = -P^{-1}CQ^{-1} \qquad (۱۶.۴)$$

۵.۴ مقایسه نورم ماتریس پسخورد حالت در مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی غیر پارامتری و پارامتری خطی

در این بخش با ارائه یک مثال که در ادامه بیان می‌کنیم، نشان می‌دهیم با پارامتری سازی ماتریس پسخورد حالت می‌توان نورم ماتریس پسخورد حالت را به مقدار قابل توجهی کاهش داد و لذا انرژی و یا هزینه ورودی $u(t) = Fx(t)$، به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

۶.۴ مثال عددی

مثال ۱.۶.۴. مثال (۱.۵.۳) را در نظر بگیرید. همان گونه که در آن مثال به‌دست آورده‌ایم، ماتریس پسخورد حالت K_1 که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_1 + Y_1{}^HBK_1$ را به طیف $\{-9, -2, -7\}$ و ماتریس پسخورد حالت تخصیص جزئی F_1، که مقادیر ویژه ماتریس $A + BF_1$ را به

$$\{-9, -2, -7, -18/6725, -6/11228, -0/8487, -3/9606\}$$

می‌برد، به صورت زیر است:

$$K_۱ = \begin{bmatrix} -۵/۲۹۸۶ & -۶/۰۲۹۲ & -۲۵/۹۱۱۸ \\ -۲/۳۷۰۶ & ۵/۱۱۰۸ & ۱۰/۸۸۶۶ \end{bmatrix}$$

$$F_۱ = K_۱ {Y_۱}^H = \begin{bmatrix} -۱۹/۵۰۰۴ & ۸/۶۱۲۸ & ۳/۱۹۹۳ & -۴/۵۰۵۰ & ۱/۳۸۰۷ & ۰/۷۸۸۰ & -۱۵/۸۸۳۸ \\ ۶/۶۱۳۱ & -۴/۵۰۶۷ & -۳/۱۸۳۶ & ۱/۳۲۴۸ & -۲/۱۰۱۵ & -۱/۳۰۹۹ & ۵/۸۶۰۳ \end{bmatrix}$$

و

$$\|K_۱\| = ۲۹/۷۶۷۶, \quad \|F_۱\| = ۲۹/۱۱۵۸$$

برای به‌دست آوردن ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی، در حالتی که شرط بهینه زمانی مهم باشد، گراف حالت انتقال سیستم و ماتریس گراف متناظر G_α به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{tikzcd} e_۱ \arrow[r] \arrow[d, dashed] & e_۳ \arrow[dr] & \\ e_۲ \arrow[rr] & & o \end{tikzcd}$$

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & g_{۱۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

برای محاسبه پارامتر ماتریس G_α، از روش بخش ۴.۴، کرباسی[2]، استفاده می‌کنیم.

ستون اول ماتریس $({Y_۱}^H B)_۰^{-۱}$ را در ماتریس V و سطر دوم ماتریس $T^{-۱}$ را در ماتریس W قرار می‌دهیم و داریم:

$$P = V^t V = \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix}, \quad Q = W W^t = \begin{bmatrix} ۱/۰۶۹۶ \end{bmatrix}$$

و

$$C = V^t K_۱ W^t = \begin{bmatrix} ۲۷/۰۱۲۰ \end{bmatrix}, \quad H = -P^{-۱} C Q^{-۱} = \begin{bmatrix} -۲۵/۲۵۳۶ \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس G_α، به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & -۲۵/۲۵۳۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$K_۲ = ({Y_۱}^H B)_۰^{-۱} (-G_۰ + G_\mu + G_\alpha) T^{-۱} = \begin{bmatrix} -۷/۲۱۹۷ & ۰/۹۵۲۴ & -۰/۸۱۷۶ \\ -۲/۳۷۰۶ & ۵/۱۱۰۸ & ۱۰/۸۸۶۶ \end{bmatrix}$$

$$F_۲ = K_۲ {Y_۱}^H = \begin{bmatrix} -۳/۷۵۵۳ & -۲/۳۵۷۱ & -۰/۹۷۵۷ & -۱/۳۳۳۳ & -۲/۸۶۷۰ & -۲/۸۸۹۹ & -۲/۳۰۹۴ \\ ۶/۶۱۲۹ & -۴/۵۰۷۱ & -۳/۱۸۳۶ & ۱/۳۲۴۳ & -۲/۱۰۲۳ & -۱/۳۱۰۴ & ۵/۸۶۰۷ \end{bmatrix}$$

و

$$\|K_۲\| = ۱۲/۳۲۸۸, \quad \|F_۲\| = ۱۰/۹۵۶۳$$

در حالتی که بهینه زمانی مورد توجه نباشد:

---

[2] Karbassi

$$\begin{tikzcd} e_{۱} \arrow[r] & e_{۳} \arrow[dr] & \\ e_{۲} \arrow[u, dashed] \arrow[ur, dashed] \arrow[rr] & & o \end{tikzcd}$$

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ g_{۲۱} & ۰ & g_{۲۳} \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش ۴.۴، ستون دوم ماتریس $(Y_{۱}{}^H B)_{۰}{}^{-۱}$ را در ماتریس V و سطر اول و سوم ماتریس $T^{-۱}$ را در ماتریس W قرار می‌دهیم و داریم:

$$P = V^t V = \begin{bmatrix} ۲/۴۸۱۰ \end{bmatrix}, \quad Q = WW^t = \begin{bmatrix} ۰/۱۸۶۶ & ۰/۰۱۸۵ \\ ۰/۰۱۸۵ & ۰/۰۰۲۰ \end{bmatrix}$$

و

$$C = V^t K_{۱} W^t = \begin{bmatrix} ۱۷/۴۳۱۷ & ۱/۸۹۵۲ \end{bmatrix} \; H = -P^{-۱} C Q^{-۱} = \begin{bmatrix} ۶/ ۲۵۷۶ & -۴۲/ ۳۵۵۸ \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس G_α، در این حالت، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۶/۲۵۷۶ & ۰ & -۴۲/۳۵۵۸ \end{bmatrix}$$

$$K_{۳} = \begin{bmatrix} -۳/۴۲۳۲ & -۶/۱۶۰۶ & -۵/۱۳۲۲ \\ -۳/۹۱۱۶ & ۵/۲۱۸۷ & -۶/۱۸۸۴ \end{bmatrix}$$

$$F_{۳} = K_{۳} Y_{۱}{}^H = \begin{bmatrix} -۶/۲۸۲۲ & -۱/۵۸۸۱ & ۳/۵۹۲۹ & -۱/۹۰۱۰ & -۱/۸۰۲۹ & -۳/۵۱۳۳ & -۴/۸۲۱۶ \\ -۴/۲۴۸۵ & ۳/۸۷۵۶ & -۳/۵۰۷۰ & -۰/۸۱۴۹ & ۰/۵۱۴۵ & ۲/۲۲۴۶ & -۳/۲۲۹۸ \end{bmatrix}$$

و

$$\|K_{۳}\| = ۹/۵۷۳۰, \quad \|F_{۳}\| = ۱۰/۱۸۲۷$$

فصل ۵

پارامتری سازی غیر خطی در مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی

پارامتر سازی کنترل‌گرهای پسخورد حالت با استفاده از مسئله تخصیص مقدار ویژه موضوع بسیاری از تحقیقات در دهه‌های اخیر بوده است. روش‌های مختلف تخصیص مقدار ویژه پارامتری برای دستگاه چندورودی در مقالات [۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۲۱]، [۲۵] بیان شده‌است. کرباسی و بل[۱]، در [۱۴] یک روش جدید برای پارامتری سازی کنترل‌گر پسخورد حالت معرفی کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که با استفاده از الگوریتم ساده بر پایه بردارهای به‌دست آمده از عملگرهای مقدماتی و ویژگی‌های ثابت‌های کرونکر، یک گروه از کنترل‌گرهای پارامتری، با پارامترهای خطی را می‌توان تولید کرد. موقعیت پارامترها را می‌توان با استفاده از گراف تبدیل حالت به دست آورد([۱۵]). در این مبحث با بسط روش کرباسی و بل، یک چارچوب کلی برای به‌دست آوردن کنترل‌گرهای پارامتری با استفاده از پارامترهای غیر خطی می‌سازیم([۱۲]،[۱۳]،[۱۴]). نشان می‌دهیم که این ماتریس کنترل‌گر در حالت طبیعی غیرخطی است و مجموعه‌ای از کنترل‌گرها با پارامترهای خطی، یک زیر مجموعه از این حالت پارامتری شده عمومی هستند. یک نتیجه قابل توجه از این مبحث، آن است که دستگاه معادلات غیرخطی برای تخصیص مقدار ویژه، برای جفت ماتریس (A, B) از دستگاه دلخواه و یک مجموعه دلخواه از مقادیر ویژه به شکل یکتا، با استفاده از ویژگی‌های ساختاری دستگاه تعیین می‌شود که در آن، ثابت کرونیکر همان‌گونه که در [۱۲] تعریف شده‌است، می‌باشد. در ابتدای این فصل با بیان قضیه‌ای از مقاله [۹]، یکی از روش‌های سابق برای حل پارامتری تخصیص مقدار ویژه جزئی، که توسط داتا[۲] مطرح شده‌است را بازگو می‌کنیم.

سپس با ارائه روشی نوین، پس از به‌دست آوردن ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی برای مسئله تخصیص مقدار ویژه، ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی را برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی به‌دست می‌آوریم و در انتها با یک مثال عددی چگونگی این روش را نشان می‌دهیم.

---

[۱] Karbassi and Bell

[۲] Datta

۱.۵ روش سیلوستر

زوج (A,B) را در دستگاه خطی (۷.۱) و مجموعه‌های $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ و $\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید، که دو مجموعه بالا، نسبت به ترکیب مختلط بسته باشند و ماتریس B، رتبه کامل باشد. همچنین فرض کنید که با در نظر گرفتن $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$، زوج (A,B) تا حدی کنترل‌پذیر و ماتریس حلقه بسته، یک مجموعه کامل از بردارهای ویژه باشد. $\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_p)$ را یک ماتریس در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که:

$$\gamma_j=\bar{\gamma_k} \quad \text{هرگاه} \quad \mu_j=\bar{\mu_k} \tag{۱.۵}$$

دو ماتریس قطری زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_2,\cdots,\lambda_p),\quad \Lambda_{c1}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p) \tag{۲.۵}$$

فرض کنید Z_1 یک جواب نامنفرد از معادله سیلوستر زیر باشد:

$$\Lambda_1 Z_1-Z_1\Lambda_{c1}={Y_1}^H B\Gamma \tag{۳.۵}$$

Φ را از دستگاه خطی $\Phi Z_1=\Gamma$ به‌دست می‌آوریم. سپس ماتریس پسخورد حقیقی F از رابطه $F=\Phi {Y_1}^H$ به‌دست می‌آید. عکس قضیه نیز صادق است[۹].

۱.۱.۵ الگوریتم روش سیلوستر

ورودی‌ها:

- ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times m}$.
- مجموعه $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\}$ تحت ترکیب مختلط بسته است.
- زیر مجموعه خود ترکیب $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p\}$ از طیف $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ ماتریس A و بردارهای ویژه راست وابسته مجموعه $\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}$.

خروجی: ماتریس پس‌خورد حالت F به طوری که ماتریس حلقه بسته $A-BF$، دارای مقادیر ویژه $\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p,\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n\}$ باشد.

فرضیات:

- زوج (A,B) نسبت به مقادیر ویژه $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ کنترل‌پذیر هستند.
- مجموعه‌های $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p\}$، $\{\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_n\}$ و $\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p\}$، گسسته هستند.

گام‌ها:

۱. $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$، $Y_1=(y_1,y_2,\cdots,y_p)$ و $\Lambda_{c1}=\mathrm{diag}=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p)$.

۲. انتخاب دلخواه بردارهای $m \times ۱$، $\gamma_۱, \gamma_۲, \dots, \gamma_p$ به گونه‌ای که $\bar{\mu_j} = \mu_k$ دلالت داشته باشد بر $\bar{\gamma_j} = \gamma_k$ و $\Gamma = (\gamma_۱, \gamma_۲, \dots, \gamma_p)$.

۳. جواب منحصر به فرد $Z_۱$ را از معادله سیلوستر زیر پیدا می‌کنیم.
$$\Lambda_۱ Z_۱ - Z_۱ \Lambda_{c۱} = {Y_۱}^H B \Gamma$$

۴. معادله $\Phi Z_۱ = \Gamma$ را برای به‌دست آوردن Φ حل می‌کنیم.

۵. قرار می‌دهیم:
$$F = \Phi {Y_۱}^H$$

.

۲.۵ چگونگی محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی

زوج (A, B) را در معادله حالت دستگاه خطی زیر در نظر بگیرید.
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۴.۵}$$

فرم همدم برداری زوج (A, B) را همان گونه که در بخش ۲.۳ شرح داده‌ایم، به‌دست می‌آوریم.

$$[B, A, I_n] \xrightarrow{T^{-۱}} [\tilde{B}, \tilde{A}, T^{-۱}] \tag{۵.۵}$$

سپس ماتریس پسخورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته را به صفر می‌برد، در فضای همدم برداری محاسبه نموده و آن را $\tilde{F_p}$ می‌نامیم. داریم:
$$\tilde{\Gamma}_۰ = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F_p} \tag{۶.۵}$$

اکنون ماتریس $\tilde{A}_\lambda$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{G_{\lambda_{m\times n}}} \\ I_{n-m} & ۰_{(n-m)\times m} \end{bmatrix} \tag{۷.۵}$$

که در آن G_λ، ماتریس $m \times n$ است، به‌طوری‌که درایه‌های آن پارامترهای g_{ij} در نظر گرفته می‌شوند.

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & \cdots & g_{۱n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m۱} & g_{m۲} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \tag{۸.۵}$$

با توجه به این‌که مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{A}_\lambda$، باید در طیف $\Lambda = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n\}$ قرار گیرد، بنابراین به منظور تعیین رابطه بین پارامترهای g_{ij} باید قرار دهیم:
$$\det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = P_n(\lambda) = ۰$$

با بسط دترمینان فوق خواهیم داشت:
$$P_n(\lambda) = (-۱)^n(\lambda^n + c_۱\lambda^{n-۱} + c_۲\lambda^{n-۲} + \cdots + c_{n-۱}\lambda + c_n) \tag{۹.۵}$$

با توجه به این‌که ریشه‌های این چندجمله‌ای باید همان مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ باشند، که اعداد حقیقی و مختلط در طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n\}$ هستند، می‌توان نوشت:

$$P_n(\lambda) = (-۱)^n(\lambda - \lambda_۱)(\lambda - \lambda_۲)\cdots(\lambda - \lambda_n) \tag{۱۰.۵}$$

که با استفاده از مساوی قرار دادن معادلات (۹.۵) و (۱۰.۵)، می‌توان ضرایب c_i، $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\begin{aligned}
c_۱ &= -(\lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n) = -\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \\
c_۲ &= \lambda_۱\lambda_۲ + \lambda_۱\lambda_۳ + \cdots + \lambda_{n-۱}\lambda_n = \sum_{i=۱, i\neq j}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} \lambda_i\lambda_j \\
&\vdots \\
c_k &= (-۱)^k \sum_{i=j=l=۱}^{n} \lambda_i\lambda_j\lambda_l \\
&\vdots \\
c_n &= (-۱)^n\lambda_۱\lambda_۲\cdots\lambda_n = (-۱)^n \prod_{i=۱}^{n} \lambda_i
\end{aligned} \tag{۱۱.۵}$$

با محاسبه $det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I)$ و روابط به‌دست آمده بالا، n معادله غیر خطی، به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}
f_۱(g_{۱۱}, g_{۱۲}, \cdots, g_{mn}) = c_۱, \\
\vdots \\
f_n(g_{۱۱}, g_{۱۲}, \cdots, g_{mn}) = c_n.
\end{cases} \tag{۱۲.۵}$$

در نتیجه، یک دستگاه معادلات غیر خطی خواهیم داشت که در آن، n معادله و mn مجهول داریم. لذا دستگاه فوق در صورت وجود جواب، دارای بی‌شمار جواب است.

اکنون باید $mn-n$ مجهول آن را آزاد در نظر بگیریم تا بتوان n مجهول آن را در صورت وجود به‌دست آورد. در ادامه می‌توان ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته $\Gamma = A + BK$ را در همان طیف Λ قرار می‌دهد، به صورت زیر تعیین نمود.

$$\widetilde{K} = B_۰^{-۱}(-G_۰ + G_\lambda) \quad , \quad K = \widetilde{K}T^{-۱} \tag{۱۳.۵}$$

$$\Longrightarrow K = B_۰^{-۱}(-G_۰ + G_\lambda)T^{-۱} = -B_۰^{-۱}G_۰T^{-۱} + B_۰^{-۱}G_\lambda T^{-۱} = F_p + K_\lambda \tag{۱۴.۵}$$

به‌طوری‌که K_λ، یک ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی است که مقادیر ویژه Λ را اختصاص می‌دهد و F_p ماتریس پسخورد حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته را به صفر می‌برد.

باید به این نکته توجه داشت که برای n و m بزرگ، محاسبه ضرایب c_i، $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ بسیار دشوار است. از این‌رو، با توجه به روش لوریير در محاسبه ضرایب c_i و معلوم بودن مقادیر ویژه، الگوریتم زیر را برای

محاسبه c_iها ارائه می‌دهیم:

$$\det(\widetilde{A}_\lambda - \lambda I) = (-۱)^n(\lambda^n + c_۱\lambda^{n-۱} + c_۲\lambda^{n-۲} + \cdots + c_n) \qquad (۱۵.۵)$$

$$c_۱ = -\mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda) \qquad (۱۶.۵)$$

$$c_۲ = -\frac{(c_۱\mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda) + \mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda^۲))}{۲} \qquad (۱۷.۵)$$

$$c_۳ = -\frac{(c_۲\mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda) + c_۱\mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda^۲) + \mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda^۳))}{۳} \qquad (۱۸.۵)$$

$$\vdots \qquad (۱۹.۵)$$

$$c_n = -\frac{(c_{n-۱}\mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda) + c_{n-۲}\mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda^۲) + \cdots + \mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda^n))}{n} \qquad (۲۰.۵)$$

از آن جایی که مقادیر ویژه $\widetilde{A}_\lambda$ معلوم است، لذا $\mathrm{trac}(\widetilde{A}_\lambda) = \sum_{i=۱}^n \lambda_i$ معلوم است.

در ادامه به بیان قضیه‌ای جهت محاسبه $trac(\widetilde{A}_\lambda^k)$ می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۵. اگر $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n\}$، مقادیر ویژه ماتریس A باشند، آنگاه $\{{\lambda_۱}^k, {\lambda_۲}^k, \ldots, {\lambda_n}^k\}$، مقادیر ویژه ماتریس A^k می‌باشد.

برهان. به ازای مقادیر ویژه λ از ماتریس A، بردار $x \neq ۰$ وجود دارد، به‌طوری‌که:

$$Ax = \lambda x \qquad (۲۱.۵)$$

دو طرف تساوی (۲۱.۵) را از سمت چپ در A ضرب می‌کنیم:

$$A^۲x = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^۲ x \qquad (۲۲.۵)$$

با ادامه این روند داریم:

$$\begin{aligned} A^۳x &= A\lambda^۲x = \lambda^۲Ax = \lambda^۳x \\ &\vdots \qquad\qquad (۲۳.۵) \\ A^kx &= A\lambda^{k-۱}x = \lambda^{k-۱}Ax = \lambda^kx \end{aligned}$$

□

مثال ۲.۲.۵. چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A را با توجه به این‌که مقادیر ویژه آن در طیف $\{-۱, -۲+i, -۲-i\}$ قرار گیرند، به‌دست آورید.

حل.

$$\det(A - \lambda I) = (-۱)^۳(\lambda^۳ + c_۱\lambda^۲ + c_۲\lambda + c_۳)$$

$$\mathrm{trac}(A) = -۵ \longrightarrow c_۱ = ۵$$

$$\mathrm{trac}(A^۲) = ۱ + (-۲+i)^۲ + (-۲-i)^۲ = ۷ \longrightarrow c_۲ = -\frac{(۵(-۵) + ۷)}{۲} = ۹$$

$$\mathrm{trac}(A^۳) = -۱ + (-۲+i)^۳ + (-۲-i)^۳ = -۵ \longrightarrow c_۳ = -\frac{(۹(-۵) + ۵(۷) - ۵)}{۳} = ۵$$

$$\det(A - \lambda I) = (-۱)^۳(\lambda^۳ + ۵\lambda^۲ + ۹\lambda + ۵)$$

۳.۵ ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی در مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی

ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times m}$ از دستگاه خطی پیوسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (۲۴.۵)$$

همانند قبل، فرض می‌کنیم مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌باز A، در طیف $\Omega = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+۱}, \ldots, \lambda_n\}$ باشد به‌طوری‌که، $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_p\}$ در ناحیه ناپایدار و $\{\lambda_{p+۱}, \ldots, \lambda_n\}$، در ناحیه پایداری قرار دارند. در این قسمت هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی F است، به‌گونه ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته $A + BF$ را به گونه‌ای تعیین کند که در آن، مقادیر $\{\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p\}$ که در ناحیه پایداری قرار دارند، جایگزین $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_p\}$ شوند. به عبارت دیگر:

$$\{\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p, \lambda_{p+۱}, \ldots, \lambda_n\} = \Omega(A + BF) \qquad (۲۵.۵)$$

برای رسیدن به هدف، ابتدا مانند بخش ۱.۳.۳، ماتریس $\Lambda_۱$ و بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A، متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_p\}$، که آن را در ماتریس $Y_۱$ قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم. زوج $(\Lambda_۱, {Y_۱}^H B)$را در نظر بگیرید. همانند بخش ۲.۵، ماتریس‌های $\widetilde{A}_{\mu_{p\times p}}$ و $G_{\mu_{m\times p}}$ را به‌دست آورده، که مقادیر ویژه ماتریس $\widetilde{A}_\mu$ باید برابر طیف $\{\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p\}$ باشند. از این طریق و با استفاده از ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه، مقادیر $c_۱$، $c_۲$، ... و c_p را به‌دست می‌آوریم. با این روند، پارامترهای مجهول G_μ را محاسبه می‌کنیم.

ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی، که مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته $\Lambda_۱ + {Y_۱}^H BK$ را در طیف $\{\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p\}$ قرار می‌دهد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = -({Y_۱}^H B)_\circ^{\ -۱} G_\circ T^{-۱} + ({Y_۱}^H B)_\circ^{\ -۱} G_\mu T^{-۱} \qquad (۲۶.۵)$$

در انتها با قرار دادن:

$$F = KY_۱^H \qquad (۲۷.۵)$$

ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به‌دست می‌آوریم. این ماتریس، طیف مقادیر ویژه ماتریس $A + BF$ را به $\{\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_p, \lambda_{p+۱}, \ldots, \lambda_n\}$ می‌برد.

۴.۵ مثال عددی

مثال ۱.۴.۵. فرض کنید ماتریس‌های A و B در دستگاه خطی پیوسته:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

به صورت زیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۳ & ۷ & ۰ & ۱۰ \\ ۷ & ۵ & ۰ & ۱ & ۷ & ۹ & ۲ \\ ۹ & ۳ & ۱۷ & ۳ & ۱۱ & ۲ & ۴ \\ ۸ & ۰ & ۱ & ۰ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۷ & ۱۳ & ۱ & ۳ & ۲ & ۱۶ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۰ & ۳ & ۹ & ۰ & ۴ \\ ۱۹ & ۳ & ۰ & ۲ & ۰ & ۱۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۹ & ۷ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۷ \\ ۰ & ۷ \\ ۳ & ۱ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix}$$

طیف مقادیر ویژه ماتریس A به صورت زیر است:

$$\{۲۹/۱۶۲۰, -۱۸/۶۷۲۵, ۱۶/۴۸۶۸, ۸/۹۵۵۸, -۰/۸۴۸۷, -۶/۱۲۲۸, -۳/۹۶۰۶\}$$

همان گونه که ملاحظه می‌کنید، مقادیر $\{۲۹/۱۶۲۰, ۱۶/۴۸۶۸, ۸/۹۵۵۸\}$ در سمت چپ صفحه مختلط قرار ندارند. مقادیر دلخواه $\{-۸, -۲/۳, -۰/۳\}$ را در نظر بگیرید. هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی F است، به‌گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A + BF$ برابر

$$\{-۸, -۲/۳, -۰/۳, -۱۸/۶۷۲۵, -۰/۸۴۸۷, -۶/۱۲۲۸, -۳/۹۶۰۶\}$$

باشد.

حل.

همان‌گونه که در مثال‌های فصل‌های گذشته نشان داده شد، با آگاهی از برقراری شرط کنترل‌پذیری زوج ماتریس (A, B) نسبت به مقادیر ویژه مثبت، داریم:

$$\Lambda_۱ = \begin{bmatrix} ۲۹/۱۶۲۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۶/۴۸۶۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸/۹۵۵۸ \end{bmatrix}$$

$${Y_۱}^H = \begin{bmatrix} ۰/۴۸۶۵ & ۷۰/۴۴۵۷ & ۷۰/۰۵۲۱ & ۷۰/۱۸۷۳ & ۰/۴۴۵۹ & ۰/۴۹۴۷ & ۰/۲۸۸۷ \\ ۰/۲۵۴۷ & ۰/۴۵۰۲ & -۰/۶۲۰۷ & ۰/۱۱۳۶ & ۰/۲۰۴۹ & ۰/۵۰۲۴ & ۰/۱۹۹۴ \\ ۰/۵۹۳۸ & -۰/۵۲۸۳ & ۰/۰۱۰۳ & ۷۰/۱۰۹۱ & -۰/۱۹۲۲ & -۰/۲۴۸۵ & ۰/۵۰۷۶ \end{bmatrix}$$

ماتریس پسخورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس $\Lambda_۱ - {Y_۱}^H B F_p$ را به صفر می‌برد، برابر:

$$F_p = \begin{bmatrix} -۲/۳۴۳۳ & -۵/۴۶۰۳ & -۱۴/۳۷۵۲ \\ -۲/۲۱۸۴ & ۴/۵۵۷۹ & ۸/۸۹۹۳ \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس

$$\widetilde{A}_\mu = \begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & g_{۱۳} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} & g_{۲۳} \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید.

$$\det(\widetilde{A}_\mu - \lambda I) = \begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22}-\lambda & g_{23} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(\lambda^3 - (g_{11}+g_{22})\lambda^2 + (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13})\lambda + g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23}).$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} g_{11}+g_{22} = -c_1 = \mu_1+\mu_2+\mu_3 = -10/6, \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} = c_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = 21/49, \\ g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23} = c_3 = -\mu_1\mu_2\mu_3 = 5/52. \end{cases}$$

دستگاه بالا یک دستگاه ۳ معادله، ۶ مجهول است. با انتخاب ۳ مجهول به‌صورت دلخواه، می‌توان مجهولات دیگر را محاسبه نمود. با انتخاب یکی از مجهولات آزاد به‌صورت $g_{11} = \mu_1 + \mu_3$، از دستگاه بالا داریم:

$$g_{22} = \mu_2 = -2/3 \qquad \text{(از معادله اول)}$$

$$g_{11}g_{22} = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 \rightarrow g_{13} = -g_{12}g_{21} - \mu_1\mu_3 \qquad \text{(معادله دوم)} \qquad (۲۸.۵)$$

$$g_{12}g_{23} = \mu_2 g_{13} + \mu_1\mu_2\mu_3 = -2/3(g_{13} + 2/4) \qquad \text{(معادله سوم)} \qquad (۲۹.۵)$$

با استفاده از معادلات (۲۸.۵) و (۲۹.۵) داریم:

$$g_{12}g_{23} = \mu_2(-g_{12}g_{21}) \rightarrow g_{23} = -\mu g_{21}$$

اکنون ماتریس G_μ، به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$G_\mu = \begin{bmatrix} -8/3 & g_{12} & -2/4 - g_{12}g_{21} \\ g_{21} & -2/3 & 2/3 g_{21} \end{bmatrix}$$

دو پارامتر g_{12} و g_{21} در ماتریس G_μ نیز آزاد هستند. با هر انتخاب برای این دو پارامتر، ماتریس K، مقادیر ویژه ماتریس $\Lambda_1 + {Y_1}^H BK$ را به $\{-8, -2/3, -0/3\}$ می‌برد.(k_{ij}ها، $i = \{1, 2\}$، $j = \{1, 2, 3\}$، درایه‌های ماتریس K هستند.)

$$k_{11} = -3/5599 - 0/2832 g_{21} + 0/0854 g_{12},$$

$$k_{12} = -6/1998 + 0/0164 g_{21} - 0/2512 g_{12},$$

$$k_{13} = -20/5481 - 0/6023 g_{21} - 0/99 g_{12} - 0/0425 g_{12}g_{21},$$

$$k_{21} = -2/3934,$$

$$k_{22} = 5/1938,$$

$$k_{23} = 11/1848.$$

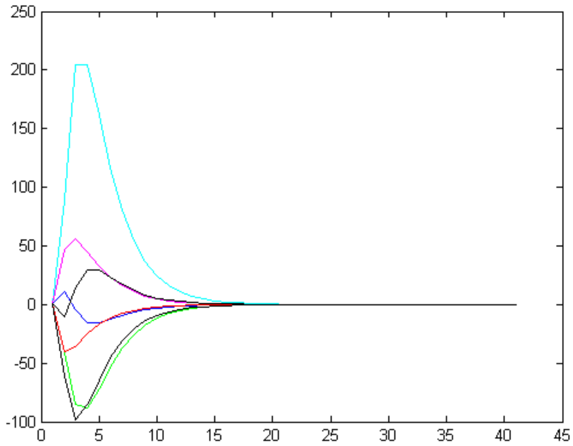
در انتها با تعریف ماتریس پسخورد حالت F به صورت زیر، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A + BF$ برابر $\{-8, -2/3, -0/3, -18/6725, -0/8487, -6/1228, -3/9606\}$ می‌شود.

(f_{ij}ها، $i = \{1, 2\}$، $j = \{1, 2, \ldots, 7\}$، درایه‌های ماتریس F هستند.)

$$
\begin{aligned}
F &= KY_{۱}{}^{H}\\
f_{۱۱} &= -۱۵/۵۱۰۰ - ۰/۵۴۲g_{۲۱} - ۰/۶۱۲۳g_{۱۲} - ۰/۰۲۱۲g_{۱۲}g_{۲۱},\\
f_{۱۲} &= ۶/۵۵۲۹ + ۰/۲۱۹g_{۲۱} + ۰/۴۴۲۳g_{۱۲} + ۰/۰۲۴۳g_{۱۲}g_{۲۱},\\
f_{۱۳} &= ۳/۴۶۳۸ - ۰/۰۳۱۲g_{۲۱} + ۰/۱۴۶۵g_{۱۲},\\
f_{۱۴} &= -۳/۶۱۶۰ - ۰/۱۲۸۷g_{۲۱} - ۰/۱۵۲۱g_{۱۲},\\
f_{۱۵} &= ۱/۱۸۳ - ۰/۱۲۲g_{۲۱} + ۰/۱۷۱۷g_{۱۲} + ۰/۰۶۵۱g_{۱۲}g_{۲۱},\\
f_{۱۶} &= ۰/۳۲۰ + ۰/۰۱۱g_{۲۱} + ۰/۱۷۲۳g_{۱۲} + ۰/۰۱۴۳g_{۱۲}g_{۲۱},\\
f_{۱۷} &= -۱۲/۷۴۶۸ - ۰/۳۹۱۶g_{۲۱} - ۰/۵۳۱۲g_{۱۲} - ۰/۰۲۷۲g_{۱۲}g_{۲۱},\\
f_{۲۱} &= ۶/۷۳۲۵ + ۰/۳۸۱۲g_{۲۱},\\
f_{۲۲} &= -۴/۶۴۷۰ - ۰/۱۸۷۲g_{۲۱},\\
f_{۲۳} &= -۳/۲۳۳۲ + ۰/۰۱۶۵g_{۲۱},\\
f_{۲۴} &= ۱/۳۵۲۵ + ۰/۰۸۴۳g_{۲۱},\\
f_{۲۵} &= -۲/۱۳۲۰ - ۰/۰۱۱۲g_{۲۱},\\
f_{۲۶} &= -۱/۳۷۳۶ - ۰/۰۳۷۲g_{۲۱},\\
f_{۲۷} &= ۶/۰۵۱۲ + ۰/۳۲۱g_{۲۱}.
\end{aligned}
$$

به عنوان مثال، با در نظر گرفتن پارامترهای آزاد به صورت $g_{۱۲} = g_{۲۱} = ۰$، طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه‌بسته $A + BF$، با خطای بسیار ناچیز برابر مجموعه زیر می‌شود که متشکل از مقادیر پایدار اولیه ماتریس حلقه باز دستگاه و مقادیر دلخواه موردنظر هستند.

$$\{-۱۸/۶۷۲۵, -۸/۰۰۰۲, -۶/۱۲۲۸, -۰/۲۹۹۸, -۰/۸۴۸۷, -۲/۳۰۰, -۳/۹۶۰۶\} = \Omega(A+BF)$$



شکل ۱.۵: نمودار مربوط به ورودی $u(t) = Fx(t)$، برای ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی

فصل ۶

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای دستگاه‌های کنترل خطی مورد بررسی قرار گرفته‌است. با توجه به اهمیت این مسئله در نظریه کنترل و بهینه سازی، تاکنون روش‌های زیادی برای حل این مسئله ارائه شده است که ما به بررسی برخی از این روش‌ها پرداختیم. سپس روش دیگری که از جهاتی مناسب‌تر است را پیشنهاد کرده‌ایم که با استفاده از آن بتوان مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را برای دستگاه‌های کنترل خطی حل نمود.

همان‌طور که در فصل ۲ به آن اشاره شد، مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی در دستگاه‌هایی به کار برده می‌شود که تمامی مقادیر ویژه آن نیاز به تخصیص ندارند و تنها تعداد اندکی از مقادیر ویژه ناپایدار هستند و همین تعداد کم نیاز به تخصیص دوباره دارند.

در فصل ۳، روشی را پیشنهاد داده‌ایم که می‌توان با استفاده از آن، مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را حل نمود. بدین ترتیب ابتدا، مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز را در دستگاه کنترل خطی پیوسته در نظر گرفته و به دو مجموعه که یکی شامل مقادیر ویژه ناپایدار مثبت و دیگری، بقیه مقادیر ویژه که همگی منفی بوده‌اند را داراست، تفکیک کردیم. سپس با استفاده از ماتریس مربعی قطری که عناصر روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس حلقه باز است و ماتریسی که ستون‌های آن متشکل از بردارهای ویژه سمت چپ متناظر با مقادیر ناپایدار ماتریس حلقه باز است، مسئله را به یک مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی با ابعاد بسیار کمتر از مسئله اولیه تبدیل نموده و در نهایت با بهره‌گیری از تبدیلات تشابهی به حل مسئله برای ماتریس‌های جدید پرداختیم.

در فصل ۴، با توجه به این نکته که نورم کمینه ماتریس پس‌خورد حالت در کاهش هزینه دستگاه کنترل خطی بسیار مؤثر است، با استفاده از روش پیشنهادی ومفهوم گراف انتقال حالت، ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری را به‌دست آوردیم که مقادیر ویژه موردنظر را به دستگاه اختصاص می‌دهد. سرانجام، با توجه به الگوریتم ارایه شده برای کمینه کردن نورم ماتریس پس‌خورد حالت، توانستیم با کاهش نرم ماتریس پسخورد حالت مسئله تخصیص مقدار ویژه جدید، نورم ماتریس پسخورد حالت مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به حداقل برسانیم. در مثال‌های عددی به وضوح نشان داده‌ایم که هرچه تعداد پارامترها در ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری بیش‌تر باشد، نورم ماتریس کمتر می‌شود.

در فصل۵ نیز حل مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی با استفاده از ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی

با روش جدید بررسی شد.

همان‌طور که بیان شد، مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی یکی از پرکاربردترین و مهم‌ترین مسایل نظریه کنترل و بهینه‌سازی است. پس می‌توان از آن برای پایدارسازی دستگاه‌های مختلف استفاده کرد. در ادامه این پایان‌نامه می‌توان روی کمینه کردن نورم ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی کار کرد. همچنین از این مسئله می‌توان برای پایدارسازی دستگاه‌های دیگری مانند دستگاه‌های خطی دو بعدی، دستگاه‌های توسیع‌یافته[۱]، دستگاه‌های متناوب[۲] و ... بهره جست. به‌علاوه می‌توان این مسئله را با روش‌های دیگری مانند استفاده از تجزیه مقدار تکین[۳] (SVD) برای حل دستگاه نیز حل نمود.

[۱] Descriptor systems

[۲] Periodic systems

[۳] Singular value decomposition

پیوست آ

کد متلب

```
disp('          This is the given plant matrix A')
        disp('          *******************************')
       AA=[0 1 0 3 7 0 10;7 5 0 1 7 9 2;9 3 17 3 11 2 4;8 0 1 0 3 0 1;7 13 1 3 2 16 0;
                    1 7 0 3 9 0 4;19 3 0 2 0 11 1]

        disp('          This is the given input matrix B')
        disp('          *******************************')
                BB=[0 1;9 7;2 5;3 7;0 7;3 1;8 5]

        [V,d]=eig(AA');
        y1=V(:,[1 3 4 ])
        Y1=y1'
        A=[d(1,1) 0 0;0 d(3,3) 0;0 0 d(4,4)]
        B=-Y1*BB
        [n,m]=size(B);
        r=n+m;
        Q=[B,A];
        T1=eye(n);
       ----------------------
        i=1;j=1; tol=1e-6;
        while ( i<=n ) & ( j<=r )
               [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
               if  (q<=tol)
```

```
                Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
                j=j+1;
        else


                 if i~=k
                         Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
                         T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
                          Q(:,[i+m,k+m])=Q(:,[k+m,i+m]);
                 end

                  t=Q(i,j);
         Q(i,:)=Q(i,:)/t;
         Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
         T1(i,:)=T1(i,:)/t;


                    if i~=n
                            for k=i+1:n
                                       t=Q(k,i);
                                       if t~=0
                                      Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                                Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                                   T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                                       end
                            end
                   end
        i=i+1 ;
        j=j+1;
       end
  end
s=1;
  while s < n
        i=s+1 ;
```

```
        for j=i:r
                if Q(i,j)~=0
                        for k=1:s
                                if Q(k,j)~=0
                                     t=Q(k,j);
                                     Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                                 Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                               end
                        end
                break
               end
        end
    s=s+1;
end

for i=n:-1:m+1
         for  k=i:r
                 if Q(i,k)==1
                         for  j=k+1:r
                                 t=Q(i,j);
                                 Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                               Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                            T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
                              end
                              break
                       end
                end
  end

 disp('          This is the transformation matrix,T1')
 disp('          ************************************')

                       T1
```

```
 B1=Q(:,[1:m]);A1=Q(:,[m+1:r])
 B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
 G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
 Fp=F1*T1;

 disp('        This is the primdry feedback law ')
 disp('        ******************************* ')

 Fp

t1=cputime-t0

 D=[];landa=[];
 for i=1:n
        D(i,i)=input([' landa(',int2str(i),')=  ']);
        landa(i)=D(i,i);
    end

        Acap=A1;
        Bcap=B1;
        newF=Fp ;
 ac=Acap+Bcap*F1;
 ac1=ac+D;
 bc1=Bcap*bo;

 Qc=[bc1 ac1];

 for  i=n:-1:m+1
          for  k=1:r
                   if Qc(i,k)==1
                            for j=k+1:r
                                  t=Qc(i,j);
                                  Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
```

```
                                    Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
                                 end
                                 break
                           end
                   end
        end
        G2=Qc(1:m,m+1:r);
        Fc=bo*G2*T1;
     disp('    The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
     disp('    *****************************************************')
        Kp=newF+Fc
        disp('        with the closed-loop matrix ')
        disp('        *************************** ')
        gamac=A+B*Kp;
        disp('        checking the eigen values ')
        disp('        ************************* ')
        v=eig(gamac)'
        [u1,v1]=eig(gamac);
        c2=cond(u1)
        disp('       Frobenius norm of feedback matrix ')
        disp('       ********************************* ')
        Normkp=norm(Kp,'fro')
       disp('              frobenious norm of closed-loop matrix ')
       disp('              ************************************* ')
       Normgama=norm(gamac,'fro')

F=Kp*Y1'
disp('          This is the given plant matrix F')
        F
t0=cputime;
t1=cputime-t0;


S=A-B*F
```

```
x0=ones (7,1);
x=[]
for t=0:0.5:20
x=[x  expm(t*A)*x0];
end;
plot (t,x), hold on
pause
x0=ones (7,1);
x=[]
for t=0:0.5:20
x=[x  expm(t*S)*x0];
end;
plot(t,x)
```

مراجع

[1] Amin M. H. and Elabadall A. M. (1988) ”parametrization of a class of dead-beat controllers via the theory of decoupling” IEEE Transactions on Automatic control 33, pp 1185-1188.

[2] Calvetti D. and Lewis B. and Reichel L. (2001) Partial eigenvalue assignment for large linear control system, 8:1-16.

[3] Chen C. T. (1984) ”Linear system theory and design” CBC college publishing, New York.

[4] Datta B. N. (2010) ”Numerical Linear Algebra and Applications”, SIAM, 2edition.

[5] Datta B.N. (2002) ”Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis” Academic Press, New York.

[6] Datta B.N. (2003) ”Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis” elsevier academic press.

[7] Datta B. N. and Elhay S. Y. and Ram M. (1997) ”Ortogonality and Partial Pole Assignment for the Symmetric Definite Quadratic Pencil” Lin. Alg. Appl. 257, pp 29-48

[8] Datta B. N. and Saad Y. (1991) ”Arnoldi methods for large Sylvester-like observer matrix equation and partial pole placement” Lin. Alg. Appl., 154/156, pp 225-244.

[9] Datta B. N. and sarkissian D. R. (2004) ”Partial Eigenvalue Assignment in Linear Systems:Existence, Uniqueness and Numerical Solution” IEEE.

[10] Fateh M. M. and Ahsani Tehrani H. and Karbassi S. M. (2011) ”Repetitive control of electrically driven robot manipulators” IJSySc., pp 25–36.

[11] Karbassi S. M. (2001) ”An Algorithm for Minimizing the Norm of State Feedback Controllers in Eigenvalue Assignment” Com and math app 41, pp 1317-1326.

[12] Karbassi S. M. and Bell D.J. (1993) ”parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback–Part 1: Regular Kronecker invariants” Int. J. Control 57, pp 817-830.

[13] Karbassi S. M. and Bell D. J. (1993) ” Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state Feedback-Part 2” Irregular Kronecker invariants. Int. J. Control 57. pp 831-839.

[14] Karbassi S. M. and Bell D. J. (1994) ”New method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control” IEE Proc., D 141, pp 223-226. .

[15] Katayama H. and Ichikawa A. (1992) ”Pole assignment by state transition garph” IEEE, transactions on Automatic Contro., 37. pp 1196-1201.

[16] Katuski J. and Nichols N. K. and Van Dooren P. (1985) ”Robust pole assignments in linear state feedback” Int. J. Control., 41. pp 1129-1155.

[17] O’Reiiiy J. and Fahmy hI. bI. (1985) ”The minimum number of degrees of freedom in state feedback control” Int. .I . Control., 41. pp 749-768.

[18] Quarteroni A. and Sacco R. and Saleri F. (2006), ”Numerical mathematics”, Springer-Verlag New York, Inc.

[19] Ramadan M. A. (1995) ”On the projection methods for partial eigenvalue assignment in large systems” Bull FAC SCI Assiut Univ., 24 (2 – C), pp 103-112.

[20] Ramadan M.A. and El-Sayed E.A. (2006) ”Partial eigenvalue assignment problem of linear control systems using orthogonality relations”.

[21] Roppenecker G. (1986) ”On parametric state feedback design” Int. J. Control., 43, pp 793-804.

[22] Saad Y. (1988) ”Projection and deflation methods for partial pole assignment in linear state feedback”, IEEE Trans. Auto. Control, Vol. 33, No.3, pp 290-296.

[23] Saad Y. (2003) ”IteIterative Methods for Sparse Linear Systems”. SIAM, pp 234-240.

[24] Sarkissian D. R. (2001) ”Theory and Computations of Partial Eigenvalue and Eigenstructure Assignment Problems in Matrix Second-Order and Distributed-Parameter systems” Ph.D. thesis, Dept. of Mathematics, Northern Illinois, University, IL.

[25] Sebakhy O. A. and Abdel-Moneim M. (1979) ”State regulation in linear discrete-time system in minimum time” IEEE, Transactzons on Automatic Control., 24. pp 84-87.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آرایه .... Array
اسپارس .... Sparse
اسکالر .... Scaler
افقی .... Horizontal
بردار .... Vector
بردارویژه چپ .... Left eigenvector
بردارویژه راست .... Right eigenvector
بردار حالت .... State vector
بردار خروجی .... Output vector
پارامتری‌سازی .... Parameterisation
پارامترخطی .... Linear parameter
پایه .... Bases
پایدار مجانبی .... Asymptotically stable
پایداری .... Stablity
پس‌خورد .... Feedback
پیوسته زمانی .... Continous-time
تبدیلات تشابهی .... Similarity transation
تجزیه پذیر .... Decompositionable
تجزیه شور .... Schur decomposition
تخصیص .... Assignment
ترانهاده .... Transpose
ترکیب خطی .... Linear composition
تقریب .... Acsses
تک-ورودی .... Single-input
چندجمله‌ای مشخصه .... Characteristic equation

حل پذیر . . . . Solving
حلقه . . . . Loop
حلقه باز . . . . Open-loop
حلقه بسته . . . . Closed-loop
دترمینان . . . . Determinant
دوبعدی . . . . Tow-dimensional
رأس . . . . Vertex
رتبه . . . . Rank
زیرفضا . . . . Sub space
زیرماتریس . . . . Sub-matrix
طیف . . . . Spectrom
فرم همدم برداری . . . . Vector companion form
فرم استاندارد اشلون . . . . Standard echelon form
فضای برداری . . . . Vector space
فضای پوچ . . . . Null space
قانون کنترل . . . . Control low
کنترل‌پذیر . . . . Controlable
کنترل گر . . . . Controller
گسسته زمانی . . . . Descrit-time
گراف انتقال حالت . . . . State transition graph
عملیات سطری مقدماتی . . . . Elementary row operations
عمودی . . . . Vertical
ماتریس . . . . Matrix
ماتریس افزوده . . . . Augmented matrix
ماتریس قطری . . . . Diagonal matrix
ماتریس مثلثی . . . . Trianglar matrix
ماتریس مربعی . . . . Squar matrix
ماتریس متقارن . . . . Symmetric matrix
ماتریس همانی . . . . Identity matrix
ماتریس‌های متشابه . . . . Similarity matrix
ماتریس هسنبرگی . . . . Hessenberg matrix
ماتریس یکانی . . . . Unitary matrix

ماکسیمم	Maximum
مزدوج مختلط	Conjugated complex
مستقل خطی	Linear independed
متغیر کنترل	Control variable
مشاهده پذیر	Observation
مقدارویژه	Eigenvalue
معکوس	Inverse
مؤلفه	Component
میدان	Fild
ناوردای کرونکر	Kronecker invariant
نامنفرد	Nonsingular
نورم	Norm
نگاشت	Mapping
وابسته خطی	linear depended
وجود	Existence
هم‌ارز	Eqvalent
یکتایی	Uniqueness
یال	Edge
یکامتعامد	Orthonormal

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Acsses	تقریب
Array	آرایه
Assignment	تخصیص
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Bases	پایه
Characteristic equation	چندجمله‌ای مشخصه
Closed-loop	حلقه بسته
Component	مؤلفه
Control low	قانون کنترل
Controlable	کنترل‌پذیر
Controller	کنترل‌گر
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Control variable	متغیر کنترل
Continous-time	پیوسته زمانی
Decompositionable	تجزیه پذیر
Determinant	دترمینان
Descrit-time	گسسته زمانی
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Edge	یال
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی
Eigenvalue	مقدارویژه
Eqvalent	هم‌ارز
Existence	وجود
Fild	میدان

Feedback .... پس‌خورد
Hessenberg matrix .... ماتریس هسنبرگی
Horizontal .... افقی
Identity matrix .... ماتریس همانی
Inverse .... معکوس
Kronecker invariant .... ناوردای کرونکر
Left eigenvector .... بردارویژه چپ
Linear parameter .... پارامترخطی
Linear depended .... وابسته خطی
Linear composition .... ترکیب خطی
Linear independed .... مستقل خطی
Loop .... حلقه
Matrix .... ماتریس
Mapping .... نگاشت
Maximum .... ماکسیمم
Nonsingular .... نامنفرد
Norm .... نورم
Null space .... فضای پوچ
Observation .... مشاهده پذیر
Open-loop .... حلقه باز
Orthonormal .... یکامتعامد
Output vector .... بردار خروجی
Parameterisation .... پارامتری‌سازی
Rank .... رتبه
Right eigenvector .... بردارویژه راست
Scaler .... اسکالر
Schur decomposition .... تجزیه شور
Similarity transation .... تبدیلات تشابهی
Similarity matrix .... ماتریس‌های متشابه
Single-input .... تک-ورودی
Solving .... حل پذیر
Sparse .... اسپارس

Spectrom .... طیف

Squar matrix .... ماتریس مربعی

Stablity .... پایداری

Standard echelon form .... فرم استاندارد اشلون

State vector .... بردار حالت

State transition graph .... گراف انتقال حالت

Sub-matrix .... زیرماتریس

Sub space .... زیرفضا

Symmetric matrix .... ماتریس متقارن

Transpose .... ترانهاده

Trianglar matrix .... ماتریس مثلثی

Tow-dimensional .... دوبعدی

Uniqueness .... یکتایی

Unitary matrix .... ماتریس یکانی

Vector .... بردار

Vector companion form .... فرم همدم برداری

Vector space .... فضای برداری

Vertex .... رأس

Vertical .... عمودی

نمایه

Aabstract

In this thesis, we will introduce the detection of partial eigenvalues assingment problem. The problem of keeping one part of open-loop matrix spectrum of linear system constant, by controlling the state feedback and bring out the remaining spectrum is called ”partial eigenvalue assingment problem”. In fact this problem is used for such systems which are not completely stable and a number of open-loop spectrum eigenvalue that need re-allocation are not in stable region. Since this problem is very important in control and optimization theory numerous method have provided to solve it and some of them are investigated in this thesis. We then by using of left eigenvectors related to unstable eigenvalues, turn the problem to eigenvalue assingment problem and by making use of simillary transitions in linear control systems, we calculate the state feedback matrix which assigns desired eigenvalues to a close-loop system. Since making norm of state feedback matrix minimum is very important in optimization of linear control systems, by using of the proposed method and state transition graph, we obtain state feedback matrix which has the minimum norm. Then we introduce a new way to find non-linear parametric state feedback matrix. At the end of each section for more understanding of concepts, numerical examples are provided.

keywords: Stability, Partial eigenvalue assignment, State feedback matrix, Similarity transation, State transition graph, Minimizing the norm.

University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in Applied Mathematics

Computation of parametric state feedback matrix in partial eigenvalues assignment problem

Supervisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor

Dr. Ali Mesforush

by

Bahareh Hosseinnia Hasankiadeh

Decembr 2014