



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

یک ضابطه‌ی مینیمکس برای بهترین تقریب
توابع $f \in C([0, 1])$

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

دانشجو

سمیه میرزائی

دی ۱۳۹۳

تقدیم به آنان که می‌خوانند بیشتر بدانند

سپاس‌گزاری...

سپاس و ثنا یگانه ایزد را که ذات وجودم در تلالو حضورش نورانی می‌شود و نگاه خسته‌ام از جوشش مهرش جان می‌گیرد. سپاس می‌گویم او را که یگانه‌ترین در عظمت، تنهاترین در اوج و پاک‌ترین در وجود است.

اکنون که به لطف حق تعالی نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده، وظیفه خود می‌دانم مراتب سپاس‌گزاری خویش را حضور:

- استاد ارجمندم، آقای دکتر مهدی ایرانمنش به عنوان استاد راهنما که چون چراغی روشنگر راهم بودند و با راهنمایی‌های ارزشمند خود در انجام هر چه بهتر این پژوهش مرا یاری نمودند،
- اساتید بزرگوار، آقایان دکتر احمد زیره و دکتر علیرضا خدّامی که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند،
- پدر و مادر مهربانم که همواره حامی من بوده‌اند،

اعلام نمایم.

سمّه مرزائی
دقی ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب سیمه میرزائی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان یک ضابطه‌ی مینیماکس برای بهترین تقریب توابع $f \in C([0, 1])$ ، تحت راهنمایی دکتر مهدی ایرانمنش متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر به دانشگاه شاهرود تعلق دارد و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه شاهرود” یا “Shahrood University” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیمه میرزائی
دتی ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم نشان دهیم اگر تابع f در $L_p([0, 1])$ باشد و f_p بهترین تقریب f توسط توابع نانزولی در $L_p([0, 1])$ باشد، آنگاه $f_* = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ موجود است که تابع f_* بهترین تقریب f توسط توابع نانزولی در $C([0, 1])$ است و یک فرمول دقیق برای f_* ارائه می‌دهیم. همچنین الگوریتم رمز را بیان نموده و چند جمله ای تقریب به دست آمده از این الگوریتم را با چند جمله ای تقریب چیشف مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: بهترین تقریب، L_p -بهترین تقریب، چند جمله ای چیشف، الگوریتم رمز.

فهرست مطالب

۱	تعاریف مقدماتی و مفاهیم اولیه	۱
۲	۱.۱ مقدمه	۱.۱
۷	۲.۱ بهترین تقریب	۲.۱
۹	۲ فرمول مینیماکس برای $C([0, 1])$ - بهترین تقریب طبیعی توسط توابع صعودی	۲
۱۰	۱.۲ مقدمه	۱.۲
۱۱	۲.۲ وجود و یکتایی Φ - بهترین تقریب	۲.۲
۱۵	۳.۲ همگرایی یکنواخت بهترین تقریب توسط توابع صعودی	۳.۲
۳۲	۴.۲ مشخصه سازی برای φ - بهترین تقریب	۴.۲
۳۹	۵.۲ فرمول‌های مینیماکس برای بهترین تقریب‌های صعودی طبیعی	۵.۲
۴۱	۶.۲ یک ویژگی مینیمم کننده‌ی f_∞	۶.۲
۴۵	۳ تقریب مینیماکس و الگوریتم رِمَز	۳
۴۶	۱.۳ تعاریف اولیه	۱.۳
۴۹	۲.۳ مشخصه سازی بهترین تقریب	۲.۳
۵۴	۳.۳ یافتن بهترین تقریب توابع در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها با روشی عددی	۳.۳
۵۷	۱.۳.۳ الگوریتم رِمَز	۱.۳.۳
۶۳	مراجع	
۶۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۶۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

تعاريف مقدماتى و مفاهيم اوليه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان برخی تعاریف اولیه مانند نرم، فضای اندازه، بهترین تقریب و بعضی مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصل های آینده خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X فضای برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ را یک نرم روی X می نامیم هرگاه

$$1. \quad \|x\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0.$$

$$2. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X \text{ به ازای هر}$$

$$3. \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ و } x \in X \text{ به ازای هر}$$

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را فضای برداری نرم دار می نامیم و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. منظور از یک متر روی مجموعه X تابعی مانند $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ است به قسمی که برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

$$1. \quad d(x, y) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = y.$$

$$2. \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$3. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

$d(x, y)$ را فاصله x از y می نامیم.

مجموعه X مجهز به یک متر را فضای متریک می نامیم.

به عنوان مثال روی فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی فاصله $[0, 1]$ می توان دو متر به صورت زیر تعریف کرد

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$$

هر فضای خطی نرم دار را می توان به عنوان فضای متریک در نظر گرفت که در آن فاصله هر دو نقطه x, y به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف می شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X, Y دو فضای خطی نرم دار باشند. گوئیم X به طور ایزومتریک با Y ایزومورف است هرگاه تبدیل خطی یک به یک و پوشایی مانند $T : X \rightarrow Y$ موجود باشد که حافظ نرم باشد یعنی

$$\forall x \in X \quad \|T(x)\| = \|x\|.$$

تعریف ۴.۱.۱. گردایه‌ای مانند τ از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک توپولوژی بر X می‌نامیم هرگاه ویژگی‌های زیر را داشته باشد

$$1. \emptyset, X \in \tau$$

۲. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ اگر $V_i \in \tau$ آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$.

۳. اگر $\{V_\alpha\}$ گردایه‌ای دلخواه از اعضای τ باشد آنگاه $\bigcup_{\alpha} V_\alpha \in \tau$.

تعریف ۵.۱.۱. اگر τ توپولوژی بر X باشد X را فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای غیر تهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی X گردایه‌ای غیر تهی مانند $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ است هرگاه دو ویژگی زیر را داشته باشد

$$1. \text{ اگر } E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \text{ آنگاه } \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$$

$$2. \text{ اگر } E \in \mathcal{A} \text{ آنگاه } E^c \in \mathcal{A}$$

که در آن $P(X)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های X و E^c متمم مجموعه‌ی E است.

به ویژه $\mathcal{A}$ یک σ -جبر است هرگاه تحت اجتماع شمارا بسته باشد. یعنی برای هر دنباله‌ی $\{E_i\}$ از مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$ داشته باشیم $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و $M \subset P(X)$ یک σ -جبر از زیر مجموعه‌های X باشد. زوج (X, M) را فضای اندازه پذیر می‌نامیم. همچنین عناصر M را مجموعه‌های اندازه پذیر می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم (X, M) فضای اندازه پذیر باشد. تابع $\mu : M \rightarrow [0, \infty)$ را یک اندازه روی M می‌نامیم هرگاه

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

۲. اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دو به دو مجزا روی M باشد آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

به ویژه (X, M, μ) را فضای اندازه می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد. اگر $\mu(X) < \infty$ آنگاه μ یک اندازه‌ی متناهی نامیده می‌شود. همچنین اگر $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ به طوری که برای هر j ، $E_j \in M$ و $\mu(E_j) < \infty$ آنگاه μ اندازه‌ی σ -متناهی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم (X, M, μ) فضای اندازه باشد. مجموعه‌ی $E \in M$ با شرط $\mu(E) = 0$ مجموعه‌ی پوچ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. اندازه‌ای که حوزه‌ی تعریف آن همه‌ی زیرمجموعه‌های پوچ را شامل باشد اندازه‌ی کامل نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم (X, M) فضای اندازه‌پذیر باشد. اندازه‌ی علامت‌دار روی (X, M) تابعی به صورت

$$\nu : M \longrightarrow [-\infty, +\infty]$$

است که

$$\nu(\emptyset) = 0 \quad (۱)$$

(۲) حداکثر یکی از دو مقدار $\pm\infty$ را می‌پذیرد.

(۳) اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دو به دو مجزا در M باشد آنگاه $\nu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$ که سری $\sum_1^\infty \nu(E_j)$ وقتی $\nu(\bigcup_1^\infty E_j)$ متناهی است، همگرای مطلق است.

هر نگاشت $f : X \rightarrow Y$ بین دو مجموعه‌ی دلخواه X, Y یک نگاشت $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X)$ که برای هر $E \in P(Y)$ به صورت $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$ تعریف شده است را القا می‌کند که حافظ اجتماع، اشتراک و متمم است. در نتیجه اگر N یک σ -جبر روی Y باشد آنگاه $\{f^{-1}(E) : E \in N\}$ یک σ -جبر روی X است.

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر (X, M) و (Y, N) دو فضای اندازه‌پذیر باشند نگاشت $f : X \rightarrow Y$ را (M, N) -اندازه‌پذیر (و یا به طور خلاصه اندازه‌پذیر) نامیم هرگاه برای هر $E \in N$ داشته باشیم $f^{-1}(E) \in M$. اگر (X, M) یک فضای اندازه باشد تابع حقیقی یا مختلط-مقدار f روی X یک تابع M -اندازه‌پذیر (یا اندازه‌پذیر) نامیده می‌شود هرگاه یک تابع $(M, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ یا $(M, \mathbb{B}_{\mathbb{C}})$ -اندازه‌پذیر باشد. که در آن $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ و $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}$ به عنوان σ -جبر روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ در نظر گرفته می‌شوند.

تذکر ۱۴.۱.۱. اگر (X, M) فضایی اندازه‌پذیر و $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد آنگاه شرایط زیر معادلند

۱. f تابعی M -اندازه‌پذیر است.

$$۲. \text{ برای هر } \alpha \in \mathbb{R}, f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \{x : f(x) < \alpha\} \in M$$

$$۳. \text{ برای هر } \alpha \in \mathbb{R}, \{x : f(x) \leq \alpha\} \in M$$

$$۴. \text{ برای هر } \alpha \in \mathbb{R}, \{x : f(x) > \alpha\} \in M$$

$$۵. \text{ برای هر } \alpha \in \mathbb{R}, \{x : f(x) \geq \alpha\} \in M$$

□

برهان. رجوع شود به [۴] صفحه ۶۹.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $E \subseteq X$ و I_E را تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی E می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

تعریف ۱۶.۱.۱. تابع پله‌ای عبارت است از ترکیب خطی دلخواه با ضرایب مختلط از توابع مشخصه روی مجموعه‌های واقع در M . یعنی

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I_{E_i}(x).$$

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر ϕ ترکیب خطی متناهی با ضرایب مختلط از توابع مشخصه روی مجموعه‌های واقع در M باشد آن را تابع ساده می‌نامیم. یعنی

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{E_i}(x).$$

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم ϕ تابعی ساده باشد. اینتگرال ϕ نسبت به μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

تعریف ۱۹.۱.۱. اگر $f : X \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع اندازه‌پذیر مثبت و $E \in M$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{0 \leq \phi \leq f} \int_E \phi \, d\mu$$

و $\int_E f \, d\mu$ را اینتگرال لبگ f روی E نسبت به اندازه‌ی μ می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم $1 \leq p < \infty$ و (X, M, μ) فضای اندازه‌پذیر باشد. برای هر تابع اندازه‌پذیر دلخواه روی X مانند f نرمی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

در این صورت فضای

$$L_p(X, M, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} ; \|f\|_p < \infty\}$$

یک فضای نرم‌دار (حتی باناخ) می‌باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱. اگر f تابعی اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی X باشد آنگاه $\|f\|_{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\infty} := \inf \{M : \mu(\{t \in X : |f(t)| > M\}) = 0\}$$

با این قرار داد که $\inf \emptyset = \infty$. $\|f\|_{\infty}$ را سوپرنرم اساسی f می‌نامیم و گاهی به صورت زیر می‌نویسیم

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)|.$$

اکنون L_∞ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L_\infty = L_\infty(X, M, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

قرارداد می‌کنیم اگر دو تابع تقریباً همه جا با هم مساوی باشند آنگاه یک عضو را در L_∞ تعریف کنند. در نتیجه $f \in L_\infty$ اگر و تنها اگر تابع اندازه پذیر و کراندار g وجود داشته باشد به طوری که تقریباً همه جا داشته باشیم $f = g$.

تعریف ۲۲.۱.۱. اگر f تابعی اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی X باشد تعریف می‌کنیم

$$\text{ess inf}(f) = \sup\{M \geq 0 : \mu(\{t \in X : f(t) < M\}) = 0\}.$$

لم ۲۳.۱.۱. (لم فاتو) فرض کنیم L^+ مجموعه‌ی تمام توابع اندازه پذیر از X به توی $[0, \infty]$ باشد. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در L^+ باشد آنگاه

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

□

برهان. رجوع شود به [۴] صفحه‌ی ۸۱.

نتیجه ۲۴.۱.۱. اگر $\{f_n\} \subset L^+$ و $f \in L^+$ و تقریباً همه جا $f_n \rightarrow f$ آنگاه داریم

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

□

برهان. رجوع شود به [۴] صفحه‌ی ۸۱.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های غیر تهی، $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ و نگاشت $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ نگاشت تصویر α ام باشد. اگر برای هر $\alpha \in A$ ، M_α یک σ -جبر روی X_α باشد آنگاه σ -جبر حاصل ضربی روی X توسط مجموعه‌ی $\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in M_\alpha, \alpha \in A\}$ تولید می‌شود. این σ -جبر را برای حالتی که $A = \{1, 2, \dots, n\}$ باشد به صورت $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم (X, M, μ) و (Y, N, ν) فضاهای اندازه باشند. یک مستطیل اندازه‌پذیر را مجموعه‌ای به صورت $A \times B$ که $A \in M$ و $B \in N$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از اجتماع مجزا و متناهی مستطیل‌های اندازه‌پذیر باشد و البته σ -جبری که تولید می‌کند $M \otimes N$ باشد. اگر $E \subset X \times Y$ اجتماع مجزا از مستطیل‌های $A_1 \times B_1, \dots, A_n \times B_n$ باشد و قرار دهیم

$$\pi(E) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \nu(B_j)$$

آنگاه π اندازه‌ای روی $X \times Y$ القا می‌کند که آن را حاصل ضرب μ و ν می‌نامیم و با $\mu \times \nu$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۷.۱.۱. (قضیه فوینی) فرض کنیم (X, M, μ) و (Y, N, ν) دو فضای اندازه‌ی σ -متناهی باشند. اگر f تابعی اینتگرال‌پذیر مختلط مقدار روی $X \times Y$ باشد (یعنی $f \in L^1(\mu \times \nu)$) آنگاه تساوی زیر برقرار است

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int \left[\int f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y).$$

□

برهان. رجوع شود به [۴].

۲۰۱. بهترین تقریب

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد. به ازای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از X مانند Y ، فاصله‌ی Y تا نقطه‌ی $x \in X - Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x, Y) := \inf_{y \in Y} d(x, y) = \inf_{y \in Y} \|y - x\|.$$

که البته به جای $d(x, Y)$ گاهی از نماد $d_Y(x)$ نیز استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنیم X فضای نرم دار باشد و $\emptyset \neq Y \subseteq X$. در این صورت خواهیم داشت

$$(الف) \quad d(x + y, Y + y) = d(x, Y), \quad x, y \in X$$

$$(ب) \quad d(\alpha x, \alpha Y) = |\alpha| d(x, Y), \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ و } x \in X$$

که در آن $Y + y$ و αY به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Y + y = \{y' + y : y' \in Y\}.$$

$$\alpha Y = \{\alpha y : y \in Y\}.$$

برهان. رجوع شود به [۳] صفحه‌ی ۲۵. □

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $Y \subseteq X$ و $x \in X$. عنصر $y_* \in Y$ را بهترین تقریب نقطه‌ی x در مجموعه‌ی Y گوئیم هرگاه

$$d(x, Y) = \|x - y_*\|.$$

مجموعه‌ی تمام عناصر بهترین تقریب برای x در مجموعه‌ی Y را با نماد $P_Y(x)$ نشان می‌دهیم. به عبارتی

$$P_Y(x) = \{y' \in Y : d(x, y') = d(x, Y)\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. زیر مجموعه‌ی ناتهی Y از X را مجموعه‌ی پروکسیمینال (یا مجموعه‌ی تقریب) نامیم هرگاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $P_Y(x) \neq \emptyset$. اگر $P_Y(x)$ شامل تنها یک نقطه باشد مجموعه‌ی Y را چپیشف می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X, Y فضاهاى برداری باشند. تابع $f : X \rightarrow Y$ را تابع محدب می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

فصل ۲

فرمول مینیماکس برای $C([0, 1])$ - بهترین
تقریب طبیعی توسط توابع صعودی

۱.۲ مقدمه

تابع صعودی $g \in L_p([0, 1])$ را یک $L_p([0, 1])$ -بهترین تقریب برای $f \in L_p([0, 1])$ توسط توابع صعودی نامیم هرگاه برای هر تابع صعودی $h \in L_p([0, 1])$ داشته باشیم

$$\int_0^1 |f - g|^p dx \leq \int_0^1 |f - h|^p dx$$

به طور مشابه تابع صعودی $g \in C([0, 1])$ را یک $C([0, 1])$ -بهترین تقریب برای $f \in C([0, 1])$ توسط توابع صعودی نامیم هرگاه برای هر تابع صعودی h داشته باشیم

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f - g| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f - h|.$$

فرض کنیم $f \in C([0, 1])$ و تابع f_* نشان‌دهنده‌ی بهترین تقریب f توسط توابع صعودی در $C([0, 1])$ باشد. برای $f \in L_p([0, 1])$ فرض کنیم تابع f_p نشان‌دهنده‌ی بهترین تقریب f توسط توابع صعودی در $L_p([0, 1])$ باشد. لندرس^۱ و راگ^۲ وجود چنین توابع بهترین تقریب را برای f توسط توابع صعودی ثابت کردند، هم‌چنین نشان دادند هرگاه $1 < p < \infty$ آنگاه $L_p([0, 1])$ -بهترین تقریب توسط توابع صعودی یکتاست ([۵]).

دارست^۳ و سهب^۴ ثابت کردند که $L_p([0, 1])$ -بهترین تقریب f در مجموعه‌ی توابع صعودی (یعنی f_p) وقتی $p \rightarrow \infty$ به تابع f_* به طور یکنواخت همگراست ([۲]). یعنی نشان می‌دهیم تساوی $f_* := \lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ برقرار است که f_* همان $C([0, 1])$ -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی است.

در این فصل یک ضابطه‌ی دقیق برای تابع f_* ارائه می‌دهیم. در واقع اولین هدف این است که نشان دهیم $f_* = f_\infty = f^\infty$ و دومین هدف این است که ثابت کنیم f_∞ یک ویژگی مینیم‌کننده دارد؛ به طور دقیق‌تر نشان خواهیم داد برای $x \in \mathcal{F}_\infty$ داریم $f_\infty(x) = f(x)$ و اگر $a, b \in \mathcal{F}_\infty$ با فرض این که $a < b$ آنگاه f_∞ یک $C([a, b])$ -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی است. f_∞ را $C([0, 1])$ -بهترین تقریب طبیعی برای f توسط توابع صعودی می‌نامیم.

نمادهای $f - \infty$ و f^∞ در صفحه‌ی ۴۱ و نماد $\mathcal{F}_\infty$ در صفحه‌ی ۳۸ بعد از بیان مقدمات لازم، معرفی خواهند شد.

D. Landers^۱L. Rogge^۲R. Dorst^۳S. Sahab^۴

۲.۲ وجود و یکتایی Φ -بهترین تقریب

در این بخش ابتدا برخی تعاریف مقدماتی را یاد آوری نموده و سپس به اثبات وجود و یکتایی Φ -بهترین تقریب می پردازیم.

فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه و $M = M(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ مجموعه‌ی تمام کلاسهای μ -هم ارزی از توابع حقیقی مقدار $\mathcal{A}$ -اندازه پذیر باشد. به عبارتی

$$M := \{g : f = g \text{ (a.e.) و } g \text{ تابعی } \mathcal{A}\text{-اندازه پذیر باشد}\}.$$

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه‌ی $C \subset M$ شبکه نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f, g \in C$ داشته باشیم

$$f \wedge g = \min(f, g) \in C \quad \text{و} \quad f \vee g = \max(f, g) \in C.$$

همچنین $C \subset M$ یک σ -شبکه کامل نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله‌ی $f_n \in C$ ($n \in \mathbb{N}$) داشته باشیم

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in C \quad \text{و} \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in C.$$

تعریف ۲.۲.۲. برای تابع اندازه پذیر $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ تعریف می‌کنیم

$$L_\Phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in M : \int \Phi(\alpha|f|)d\mu < \infty \text{ برای برخی از } \alpha \text{ ها}\}.$$

برای تابع $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ که $\Phi(x) = x^p$ و $p \geq 1$ فضای $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ به فضای لبگ $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ تبدیل می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. مجموعه‌ی $C \subset L_\Phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ را Φ -بسته می‌نامیم هرگاه برای دنباله‌ی $\{f_n\}$ در C گزاره‌ی زیر برقرار باشد

$$f_n \uparrow f \in L_\Phi \quad \text{یا} \quad f_n \downarrow f \in L_\Phi \implies f \in C.$$

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنیم $C \subset L_\Phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ و $f \in L_\Phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ داده شده باشند، اگر تابع $g \in C$ در شرط زیر صدق کند

$$\int \Phi(|f - g|)d\mu = \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|)d\mu \quad (۱.۲)$$

را یک Φ -بهترین تقریب f در C می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام $g \in C$ را که در شرط (۱.۲) صدق کند را با $\mu_\Phi(f/C)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\Phi(x) = x^p$ و $p > 0$ آن را با $\mu_p(f/C)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. تابع پیوسته $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ با شرط $\Phi(0) = 0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$ را یک μ -تابع می‌نامیم هرگاه داشته باشیم

$$0 \leq f \leq g, \quad f, g \in M(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \int \Phi(g)d\mu < \infty \implies \int \Phi(f)d\mu < \infty.$$

حال مثال‌هایی از μ -توابع ارایه می‌دهیم :

مثال ۶.۲.۲. (i) فرض کنیم $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ تابع محدب با شرط $\Phi(0) = 0$ و Φ تابع متحد صفر نباشد. برای هر فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ تابع Φ یک μ -تابع است.

(ii) فرض کنیم $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ تابعی پیوسته باشد که $\Phi(0) = 0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$. اگر Φ صعودی باشد آنگاه Φ برای هر فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ یک μ -تابع است.

برهان. (i) با توجه به این که هر تابع محدب $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ با شرط $\Phi(0) = 0$ و $\Phi \neq 0$ پیوسته و صعودی است و در $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$ صدق می‌کند، نتیجه حاصل می‌شود.

(ii) چون Φ تابعی صعودیست برای $0 \leq f \leq g$ داریم $\Phi(f) \leq \Phi(g)$. با توجه به نامساوی اخیر $\int \Phi(f) d\mu \leq \int \Phi(g) d\mu$ و اکنون با فرض $\int \Phi(g) d\mu < \infty$ نتیجه می‌شود Φ یک μ -تابع است.

□

تذکر ۷.۲.۲. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه و Φ یک μ -تابع باشد. آنگاه $L_\Phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای خطی و شبکه است.

در قضیه‌ی زیر وجود Φ -بهترین تقریب برای تابع $f \in L_\Phi$ در مجموعه‌ی C اثبات می‌شود.

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه و Φ یک μ -تابع باشد. آنگاه برای هر شبکه Φ -بسته $C \subset L_\Phi$ و $\emptyset \neq C$ و هر $f \in L_\Phi$ یک Φ -بهترین تقریب برای f در C وجود دارد. به عبارت دیگر $\mu_\Phi(f/C) \neq \emptyset$.

برهان. فرض کنیم $a = \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu$. برای $a = \infty$ نتیجه بدیهی است. زیرا در این صورت تمام توابع موجود در C بهترین تقریب برای f خواهند بود.

حال اگر $a < \infty$ آنگاه $h_n \in C$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$\int \Phi(|f - h_n|) d\mu \leq a + \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

قرار می‌دهیم $g = \lim_{n \in \mathbb{N}} h_n$ و ثابت می‌کنیم $g \in \mu_\Phi(f/C)$. برای $k, n \in \mathbb{N}$ که $k \leq n$ تعریف می‌کنیم

$$g_{k,n} = \inf \{h_j : k \leq j \leq n\}$$

و

$$g_k = \inf_{j \geq k} h_j.$$

چون $g_{k,n+1} = g_{k,n} \wedge h_{n+1}$ داریم

$$\Phi(|f - g_{k,n+1}|) + \Phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|) = \Phi(|f - g_{k,n}|) + \Phi(|f - h_{n+1}|) \quad (3.2)$$

چون $g_{k,n} \vee h_{n+1} \in C$ خواهیم داشت

$$a = \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu \leq \int \Phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|) d\mu.$$

از نامساوی اخیر و رابطه‌ی (۲.۲) برای $k \leq n$ نتیجه می‌شود

$$\int \Phi(|f - h_{n+1}|)d\mu \leq a + \frac{1}{p^{n+1}} \leq \int \Phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|)d\mu + \frac{1}{p^{n+1}}.$$

$$\int \Phi(|f - h_{n+1}|)d\mu \leq \int \Phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|)d\mu + \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (۴.۲)$$

هم‌چنین با اینتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۳.۲) و با استفاده از رابطه‌ی (۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} & \int \Phi(|f - g_{k,n+1}|)d\mu + \int \Phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|)d\mu \\ &= \int \Phi(|f - g_{k,n}|)d\mu + \int \Phi(|f - h_{n+1}|)d\mu \\ &\leq \int \Phi(|f - g_{k,n}|)d\mu + \int \Phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|)d\mu + \frac{1}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\int \Phi(|f - g_{k,n+1}|)d\mu \leq \int \Phi(|f - g_{k,n}|)d\mu + \frac{1}{p^{n+1}} \quad n \geq k \quad (۵.۲)$$

حال برای $n = k$ داریم

$$g_{k,k} = \inf\{h_j : j = k\} = h_k \implies g_{k,k} = h_k.$$

و برای $n \geq k$ داریم

$$n+1 \geq n \geq k \implies \frac{1}{p^{n+1}} \leq \frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{p^k}.$$

پس با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲) داریم

$$\int \Phi(|f - g_{k,n+1}|)d\mu \leq \int \Phi(|f - h_k|)d\mu + \frac{1}{p^k}. \quad (۶.۲)$$

هرگاه $n \rightarrow \infty$ آنگاه $g_{k,n+1} \downarrow g_k$ زیرا بنا به تعریف g_k و $g_{k,n+1}$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g_{k,n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{h_j : k \leq j \leq n+1\}) = \inf\{h_j : k \leq j < \infty\} \\ &= \inf\{h_j : k \leq j\} = g_k. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به پیوستگی تابع Φ خواهیم داشت $\Phi(|f - g_{k,n+1}|) \rightarrow \Phi(|f - g_k|)$ حال با استفاده از لم فاتو و رابطه‌ی (۶.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \int \Phi(|f - g_k|)d\mu &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \int \Phi(|f - g_{k,n+1}|)d\mu \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \left(\int \Phi(|f - h_k|)d\mu + \frac{1}{p^k} \right) \\ &= \int \Phi(|f - h_k|)d\mu + \frac{1}{p^k}. \end{aligned}$$

لذا داریم

$$\int \Phi(|f - g_k|) d\mu \leq \int \Phi(|f - h_k|) d\mu + \frac{1}{p_k} < \infty. \quad (7.2)$$

اکنون از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم $f - g_k \in L_\Phi$.

چون $f \in L_\Phi$ فضای خطی است در نتیجه $g_k \in L_\Phi$.

چون C یک شبکه Φ -بسته و $g_{k,n} \in C$ است، نتیجه می‌گیریم به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $g_k \in C$. از طرفی

زیرا $g_k \uparrow g$ $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{j \geq k} \{h_j\} = \varliminf_{j \in \mathbb{N}} \{h_j\} = g.$$

حال با توجه به پیوستگی تابع Φ داریم

$$\Phi(|f - g_k|) \rightarrow \Phi(|f - g|).$$

اینک از لم فاتو و روابط (۲.۲) و (۷.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \int \Phi(|f - g|) d\mu &\leq \lim_{k_o \rightarrow \infty} \inf_{k \geq k_o} \int \Phi(|f - g_k|) d\mu \\ &\leq \lim_{k_o \rightarrow \infty} \inf_{k \geq k_o} \left(\int \Phi(|f - h_k|) d\mu + \frac{1}{p_k} \right) \\ &= \lim_{k_o \rightarrow \infty} \inf_{k \geq k_o} \int \Phi(|f - h_k|) d\mu + \lim_{k_o \rightarrow \infty} \inf_{k \geq k_o} \frac{1}{p_k} \leq a. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\int \Phi(|f - g|) d\mu \leq \varliminf_{n \in \mathbb{N}} \int \Phi(|f - h_k|) d\mu \leq a < \infty. \quad (8.2)$$

بنابر این $f - g \in L_\Phi$ که از آن نتیجه می‌شود $g \in L_\Phi$.

حال چون $g_k \in C$ و اینکه $g_k \uparrow g$ و C یک شبکه Φ -بسته است، نتیجه می‌گیریم $g \in C$.

□

بنابراین رابطه‌ی (۸.۲) نتیجه می‌دهد $g \in \mu_\Phi(f/C)$.

در ادامه یکتایی Φ -بهترین تقریب را نشان می‌دهیم. برای هر $f \in L_\Phi$ که در مجموعه‌ی

$$D_\Phi(C) = \{g \in L_\Phi : \int \Phi(|g - h|) d\mu < \infty, h \in C\}$$

قرار نگیرد، داریم $\mu_\Phi(f/C) = C$. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم اگر $f \in D_\Phi(C)$ آنگاه Φ -بهترین تقریب f در C به صورت منحصر بفرد تعریف شود.

نتیجه ۹.۲.۲. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه و $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ تابع اکیدا محدب با شرط $\Phi(0) = 0$ باشد و همچنین $\emptyset \neq C \subset L_\Phi$ شبکه Φ -بسته محدب باشد. آنگاه برای هر $f \in D_\Phi(C)$ یک Φ -بهترین تقریب یکتا برای f در C موجود است.

برهان. طبق مثال (۶.۲.۲) و قضیه (۸.۲.۲) داریم $\mu_\Phi(f/C) \neq \emptyset$. حال فرض کنیم $f \in D_\Phi(C)$ و $g_1, g_2 \in \mu_\Phi(f/C)$ و با فرض خلف $g_1 \neq g_2$. پس خواهیم داشت

$$g_1, g_2 \in C \implies \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in C.$$

چون $f \in D_\Phi(C)$ و Φ اکیدا محدب است برای $\frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ داریم

$$\begin{aligned} \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu &\leq \int \Phi \left(\left| f - \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right| \right) d\mu \\ &= \int \Phi \left(\left| \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}g_1 \right) + \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}g_2 \right) \right| \right) d\mu \\ &< \frac{1}{2} \int \Phi(|f - g_1|) d\mu + \frac{1}{2} \int \Phi(|f - g_2|) d\mu \\ &= \frac{1}{2} \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu + \frac{1}{2} \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu \\ &= \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu. \end{aligned}$$

در نتیجه $\inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu < \inf_{h \in C} \int \Phi(|f - h|) d\mu$ که این تناقض است لذا یکتایی ثابت می‌شود. $\square$

۳.۲ همگرایی یکنواخت بهترین تقریب توسط توابع صعودی

در ابتدا به چند تعریف مورد نیاز در این بخش اشاره می‌کنیم:

تعریف ۱.۳.۲. فضای متریک X را فضای تام (باناخ) می‌نامیم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع حقیقی مقدار $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه‌ی $x \in X$ شبه پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ و هر همسایگی باز از x مثل U یک مجموعه‌ی باز ناتهی مانند $G \subseteq U$ موجود باشد به طوری که

$$\forall y \in G \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

هر تابع پیوسته تابعی شبه پیوسته است.

تعریف ۳.۳.۲. زیرمجموعه‌ی C از فضای X را یک مخروط محدب می‌نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha, \beta \geq 0 \implies \alpha x + \beta y \in C$$

فرض کنیم Q نشان دهنده‌ی فضای باناخ (با نرم $\sup$) از توابع شبه پیوسته روی فاصله‌ی $[0, 1]$ باشد و C نشان دهنده‌ی زیر فضای تشکیل شده از توابع پیوسته باشد. فرض کنیم M نشان دهنده‌ی مخروط محدب بسته در Q متشکل از توابع صعودی باشد. برای $f \in Q$ و $1 \leq p < \infty$ فرض کنیم f_p نشان دهنده‌ی L_p -بهترین تقریب برای f توسط عناصر M باشد. قصد داریم نشان دهیم دنباله‌ی f_p

همگرای یکنواخت به L_∞ - بهترین تقریب f است. یعنی اگر $f \in C$ آنگاه به ازای هر $p, f_p \in C$ و در نتیجه $f_\infty \in C$. در اینجا به بیان برخی مقدمات لازم توجه می‌پردازیم:

فرض کنیم P نشان دهنده مجموعه‌ی تمام افرازهای $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ از فاصله‌ی $[0, 1]$ باشد که در آن $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ و I_E تابع مشخصه روی زیر مجموعه‌ی E از $[0, 1]$ باشد (یعنی

$$I_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}.$$

فرض کنیم S زیر فضای خطی چگال از توابع ساده پله ای مانند f به فرم زیر باشد

$$f = \sum_{i=0}^n a_i I_{[t_i]} + \sum_{i=1}^n b_i I_{(t_{i-1}, t_i]}$$

توابع اندازه پذیر لبگ و کراندار f از فضای Q را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$[f] = \{g \in Q : f = g \text{ a.e.}, g \text{ اندازه پذیر}\}.$$

که $[f]$ متناظر با اعضای L_∞ است.

فرض کنیم Q^* نشان دهنده فضای از توابع $f \in Q$ باشد به طوری که داشته باشیم $f(0) = f(0^+) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y)$ و برای $0 < x \leq 1$ $f(x) = f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ و هم چنین قرار می‌دهیم $S^* = S \cap Q^*$ و $M^* = M \cap Q^*$.

تعریف ۴.۳.۲. اگر افراز $\pi \in P$ موجود باشد به طوری که تابع f به صورت

$$f = a_0 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=1}^n a_i I_{(t_{i-1}, t_i]}$$

روی تمام فاصله‌های افراز π تقریباً همه جا ثابت باشد آنگاه گوییم $f \in S_\pi^*$.

برای تابع کراندار f و $\pi \in P$ ، $\bar{f}_\pi \in S^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bar{f}_\pi(x) = \begin{cases} \sup\{f(y) : y \in [t_0, t_1]\} & x \in [t_0, t_1] \\ \sup\{f(y) : y \in (t_{i-1}, t_i]\} & x \in (t_{i-1}, t_i] \quad \forall i > 1 \end{cases}$$

با جای‌گذاری $\inf$ به جای $\sup$ در تعریف فوق $\underline{f}_\pi$ تعریف می‌شود.

لم ۵.۳.۲. تابع f در Q^* است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ افراز $\pi \in P$ موجود باشد به طوری که

$$0 \leq \bar{f}_\pi - \underline{f}_\pi < \varepsilon.$$

بنابر این $\lim_{\pi} \bar{f}_\pi = \lim_{\pi} \underline{f}_\pi = f$ (به طور یکنواخت) که نشان دهنده حد مجموعه‌ی جهت دار است.

چون فضای L_p برای $1 < p < \infty$ فضای باناخ محدب است برای هر $f \in Q^*$ نزدیکترین نقطه‌ی یکتایی مانند $f_p \in M^*$ موجود است. نشان می‌دهیم وقتی $p \rightarrow \infty$ آنگاه f_p به تابعی که آن را با f_∞ نشان می‌دهیم (و L_∞ - بهترین تقریب f توسط عناصر M^* است) همگرای یکنواخت است. برای اثبات همگرایی $\{f_p\}_{p>1}$ تعاریف و قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۶.۳.۲. فرض کنیم $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه ای جزئی مرتب و متناهی باشد و تابع حقیقی مقدار $f = \{f_i\}_{i=1}^n = \{f(x_i)\}_{i=1}^n$ روی X تعریف شده باشد. برای هر p که $1 < p < \infty$ ، p -نرم وزن دار f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\omega_p} = \left[\sum_{i=1}^n \omega_{p,i} |f_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (9.2)$$

که $\omega_p = \{\omega_{p,i}\}_{i=1}^n > 0$ تابع وزن دار روی X داده شده است. به طور مشابه اگر $\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^n$ تابع وزن دار باشد نرم یکنواخت وزنی $\|\cdot\|_{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \omega_i |f_i| \quad (10.2)$$

تعریف ۷.۳.۲. زیرمجموعه‌ی $L \subset X$ را یک مجموعه‌ی رو به پایین نامیم اگر $x_i \in L$ و $x_j \in X$ و $x_j \leq x_i$ آنگاه نتیجه بگیریم $x_j \in L$.

تعریف ۸.۳.۲. زیر مجموعه‌ی $U \subset X$ را یک مجموعه‌ی رو به بالا نامیم اگر $x_i \in U$ و $x_j \in X$ و $x_j \geq x_i$ آنگاه نتیجه بگیریم $x_j \in U$.

تعریف ۹.۳.۲. تابع $h = \{h_i\}_{i=1}^n = \{h(x_i)\}_{i=1}^n$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر $x_i, x_j \in X$ که $x_i \leq x_j$ داشته باشیم $h(x_i) = h_i \leq h_j = h(x_j)$. کلاسی از تمام توابع صعودی روی مجموعه‌ی X را با $\mathcal{M}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۳.۲. فرض کنیم تابع $f = \{f_i\}_{i=1}^n$ روی X داده شده باشد. برای هر p که $1 < p < \infty$ تابع $g_p = \{g_{p,i}\}_{i=1}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} g_{p,i} &= \max_{(U:i \in U)} \min_{(L:i \in L)} U_p(L \cap U) \\ &= \min_{(L:i \in L)} \max_{(U:i \in U)} U_p(L \cap U) \end{aligned} \quad (11.2)$$

که L, U به ترتیب مجموعه‌های رو به بالا و مجموعه‌های رو به پایین هستند و $U_p(L \cap U)$ یک عدد حقیقی یکتاست که برای یک عدد حقیقی u ، مقدار $\sum_{j \in L \cap U} \omega_{p,j} |f_j - u|^p$ را مینیمم می‌کند. به عبارت دیگر $U_p(L \cap U) = \min \sum_{j \in L \cap U} \omega_{p,j} |f_j - u|^p$.

تذکر ۱۱.۳.۲. فرض کنیم $f = \{f_i\}_{i=1}^n$ داده شده باشد. آنگاه g_p تابع صعودی یکتایی است که در شرط زیر صدق می‌کند

$$\|f - g_p\|_{\omega_p} = \inf \{ \|f - h\|_{\omega_p} : h \in \mathcal{M} \}.$$

یا به طور معادل

$$\left[\sum_{i=1}^n \omega_{p,i} |f_i - g_{p,i}|^p \right]^{\frac{1}{p}} = \inf \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \omega_{p,i} |f_i - h_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} : \{h_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{M} \right\}. \quad (12.2)$$

تعریف ۱۲.۳.۲. فرض کنیم تابع $f = \{f_i\}_{i=1}^n$ روی مجموعه‌ی X تعریف شده باشد. برای هر $i \leq n$ تابع $g_\infty = \{g_{\infty,i}\}_{i=1}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} g_{\infty,i} &= \lim_{p \rightarrow \infty} g_{p,i} = \max_{(U:i \in U)} \min_{(L:i \in L)} U_\infty(L \cap U) \\ &= \min_{(L:i \in L)} \max_{(U:i \in U)} U_\infty(L \cap U) \end{aligned} \quad (13.2)$$

که $U_\infty(L \cap U)$ یک عدد حقیقی یکتاست که برای هر عدد حقیقی u ، مقدار $\max_{j \in L \cap U} \omega_j |f_j - u|$ را مینیمم می‌کند.

قضیه ۱۳.۳.۲. (قضیه یوب‌هایا)^۵ فرض کنیم تابع f و مجموعه‌ی X به صورت بالا تعریف شوند. برای هر p که $1 < p < \infty$ ، فرض کنیم $\omega_p = \{\omega_{p,i}\}_{i=1}^n > 0$ تابع وزن‌دار باشد و هم چنین اگر برای هر i تابع وزنی مانند $\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^n > 0$ موجود باشد به طوری که در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$0 < \liminf_{p \rightarrow \infty} (\omega_{p,i} / \omega_i^p) \leq \limsup_{p \rightarrow \infty} (\omega_{p,i} / \omega_i^p) < \infty. \quad (14.2)$$

آنگاه توابع صعودی g_p ، $1 < p < \infty$ که توسط رابطه‌ی (۱۱.۲) تعریف می‌شوند و در رابطه‌ی (۱۲.۲) صدق می‌کنند، به تابع صعودی $g_\infty = \{g_{\infty,i}\}_{i=1}^n$ همگرا خواهند شد و این تابع در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\|f - g_\infty\|_\infty = \inf\{\|f - h\|_\infty : h \in \mathcal{M}\}.$$

یا به طور معادل

$$\max_{1 \leq i \leq n} \omega_i |f_i - g_{\infty,i}| = \inf\{\max_{1 \leq i \leq n} \omega_i |f_i - h_i| : \{h_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{M}\}. \quad (15.2)$$

□

برهان. رجوع شود به [۱۲].

لم ۱۴.۳.۲. اگر $f \in S_\pi^*$ آنگاه برای هر $1 < p < \infty$ داریم $f_p \in S_\pi^*$.

برهان. فرض خلف: گیریم $f_p \notin S_\pi^*$ لذا برای حداقل یک فاصله مانند $(t_{j-1}, t_j]$ از افراز π تابع f_p تقریباً همه جا ثابت نیست. یعنی برای مقدار ثابت a داریم

$$\mu\{t \in (t_{j-1}, t_j] : f_p(t) = a\} = 0$$

حال فرض کنیم

$$\begin{aligned} l &= \text{ess inf}\{f_p(t) : t_{j-1} < t \leq t_j\} \\ &= \sup\{a \geq 0 : \mu(\{t \in (t_{j-1}, t_j] : f_p(t) < a\}) = 0\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} u &= \text{ess sup}\{f_p(t) : t_{j-1} < t \leq t_j\} \\ &= \inf\{a \geq 0 : \mu(\{t \in (t_{j-1}, t_j] : f_p(t) > a\}) = 0\}. \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان نشان داد $l < u$.

حال $\epsilon \in [l, u]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$|f_j - \epsilon| = \inf\{|f_j - r| : r \in [l, u]\}.$$

اینک تابع صعودی f_p^* که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f_p^*(t) = \begin{cases} \epsilon & t_{j-1} < t \leq t_j \\ f_p(t) & o.w \end{cases}$$

یک L_p -بهترین تقریب بهتری برای f است زیرا

$$\begin{aligned} \|f - f_p^*\|_p &= \left[\sum_{i=1, i \neq j}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f_i - f_p(t)|^p dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f_j - \epsilon|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &< \left[\sum_{i=1, i \neq j}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f_i - f_p(t)|^p dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f_j - f_p(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f - f_p\|_p. \end{aligned}$$

پس داریم

$$\|f - f_p^*\|_p < \|f - f_p\|_p.$$

که این در تناقض با L_p -بهترین تقریب بودن تابع f_p است. این تناقض نشان می‌دهد که f_p باید روی هر فاصله‌ی $(t_{j-1}, t_j]$ با مقدار ثابت باشد بنا براین $f_p \in S_\pi^*$. $\square$

قضیه ۱۵.۳.۲. فرض کنیم $f \in S_\pi^*$ به صورت زیر داده شده باشد

$$f = f_1 I_{[\circ, t_1]} + \sum_{i=2}^n f_i I_{(t_{i-1}, t_i]} \quad (۱۶.۲)$$

برای هر p ، $1 < p < \infty$ و هر i فرض کنیم $\omega_p = \{\omega_{p,i}\}_{i=1}^n$ به صورت زیر تعریف شود

$$\omega_{p,i} = t_i - t_{i-1} \quad (۱۷.۲)$$

و هم چنین $g_p = \{g_{p,i}\}_{i=1}^n$ همان تابع تعریف شده در رابطه‌ی (۱۱.۲) باشد. آنگاه f_p که به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_p = g_{p,1} I_{[\circ, t_1]} + \sum_{i=2}^n g_{p,i} I_{(t_{i-1}, t_i]} \quad (۱۸.۲)$$

یک L_p -بهترین تقریب برای f است.

برهان. طبق لم قبل داریم $f_p \in S_\pi^*$. برای هر i قرار می‌دهیم

$$x_i = \frac{(t_i + t_{i-1})}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

و

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

تابع حقیقی مقدار متناهی $\{f_i\}_{i=1}^n$ را روی X در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $h = \{h_i\}_{i=1}^n$ تابعی صعودی روی X باشد (که برای هر $i < j$ داریم $h_i \leq h_j$). سپس با جایگزین کردن مقدار $\omega_{p,i}$ در تساوی (۱۲.۲) داریم

$$\left[\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) |f_i - g_{p,i}|^p \right]^{\frac{1}{p}} = \inf \left\{ \left[\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) |f_i - h_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} : \{h_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{M} \right\}.$$

و طبق تعریف $\inf$ داریم

$$\left[\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) |f_i - g_{p,i}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) |f_i - h_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

که معادلت با

$$\left[\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f_i - g_{p,i}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f_i - h_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

طبق تعریف $\|\cdot\|_p$ نتیجه می‌شود

$$\|f - f_p\|_p \leq \|f - h\|_p.$$

پس f_p یک L_p -بهترین تقریب برای f است، که در آن تابع صعودی h که متعلق به S_π^* می‌باشد، به صورت زیر است

$$h = h_1 I_{[0, t_1]} + \sum_{i=2}^n h_i I_{(t_{i-1}, t_i]}.$$

□

تعریف ۱۶.۳.۲. فرض کنیم $f \in S_\pi^*$ ، $f_p = g_{p,1} I_{[0, t_1]} + \sum_{i=2}^n g_{p,i} I_{(t_{i-1}, t_i]}$ و $g_{\infty,i} = \lim_{p \rightarrow \infty} g_{p,i}$ داده شده باشد. تعریف می‌کنیم

$$f_\infty = g_{\infty,1} I_{[0, t_1]} + \sum_{i=2}^n g_{\infty,i} I_{(t_{i-1}, t_i]}.$$

قضیه ۱۷.۳.۲. فرض کنیم $f \in S_\pi^*$ و $f_p = g_{p,1} I_{[0, t_1]} + \sum_{i=2}^n g_{p,i} I_{(t_{i-1}, t_i]}$ در این صورت هرگاه $p \rightarrow \infty$ آنگاه تابع f_p به تابع صعودی $f_\infty \in S_\pi^*$ همگرا خواهد شد. به علاوه f_∞ یک L_∞ -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی است.

برهان. فرض کنیم π افرازی دلخواه باشد و برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $x_i = \frac{(t_i + t_{i-1})}{2}$ و قرار می‌دهیم $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $\omega_p = \{\omega_{p,i}\}_{i=1}^n$ تابع وزن دار باشد. با به کار بردن قضیه (۱۳.۳.۲) برای هر i ، $\omega_i = 1$ است اگر و تنها اگر $\lim_{p \rightarrow \infty} \inf (\omega_{p,i} / \omega_i^p) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sup (\omega_{p,i} / \omega_i^p) < \infty$. در این حالت طبق قضیه (۱۳.۳.۲) داریم $g_p = \{g_{p,i}\}_{i=1}^n$ به $g_\infty = \{g_{\infty,i}\}_{i=1}^n$ که در رابطه‌ی (۱۳.۲)

داده شده است، همگرا می‌باشد. لذا داریم

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} f_p &= \lim_{p \rightarrow \infty} g_{p,1} I_{[0,t_1]} + \sum_{i=2}^n \lim_{p \rightarrow \infty} g_{p,i} I_{(t_{i-1}, t_i]} \\ &= g_{\infty,1} I_{[0,1]} + \sum_{i=2}^n g_{\infty,i} I_{(t_{i-1}, t_i]} \\ &= f_{\infty}.\end{aligned}$$

و این یعنی $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ موجود است. با جای‌گزینی مقدار $\omega_i = 1$ در رابطه‌ی (۱۵.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f_i - g_{\infty,i}| = \inf \{ \max_{1 \leq i \leq n} |f_i - h_i| : \{h_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{M} \} \quad (۱۹.۲)$$

و طبق تعریف اینفیم داریم

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f_i - g_{\infty,i}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |f_i - h_i|.$$

فرض کنیم h یک تابع صعودی روی $[0, 1]$ باشد. نشان می‌دهیم تابعی صعودی مثل $g \in S_{\pi}^*$ موجود است به طوری که

$$\|f - g\|_{\infty} \leq \|f - h\|_{\infty}.$$

به این منظور برای $i = 1, 2, \dots, n$ تعریف می‌کنیم

$$g_i = \left\{ \frac{1}{2} [esssup(h(x)) + essinf(h(x))] : t_{i-1} < x \leq t_i \right\}.$$

می‌دانیم

$$essinf(h(x)) \leq esssup(h(x)).$$

طبق تعریف فوق برای هر i داریم

$$essinf(h(x)) \leq g_i \leq esssup(h(x))$$

پس

$$-esssup(-h(x)) \leq g_i \leq -essinf(-h(x))$$

در نتیجه

$$esssup(-h(x)) \geq -g_i \geq essinf(-h(x))$$

و از این‌جا

$$f_i - g_i \leq f_i + esssup(-h(x)) = esssup(f_i - h(x)).$$

لذا داریم

$$|f_i - g_i| \leq esssup|f_i - h(x)|, \quad t_{i-1} < x \leq t_i.$$

پس

$$\max |f_i - g_i| \leq \max |f_i - h(x)| \implies \|f - g\|_{\infty} \leq \|f - h\|_{\infty}.$$

حال تابع g را روی $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g = g_1 I_{[0, t_1]} + \sum_{i=2}^n g_i I_{(t_{i-1}, t_i]}.$$

پس $g \in S_\pi^*$ و از نامساوی اخیر و رابطه‌ی (۱۹.۲) حاصل می‌شود

$$\|f - f_\infty\| \leq \|f - g\|_\infty \leq \|f - h\|_\infty.$$

و به این ترتیب ثابت می‌شود که f_∞ یک L_∞ -بهترین تقریب برای f توسط عناصر S_π^* است. $\square$

تذکر ۱۸.۳.۲. فرض کنیم $f \in S^*$. در این صورت افزای مانند π از $[0, 1]$ موجود است به طوری که $f \in S_\pi^*$.

با استفاده از لم (۱۴.۳.۲) و حکم قضایای (۱۵.۳.۲) و (۱۷.۳.۲) $-L_p$ بهترین تقریب f_p توسط توابع صعودی را برای f پیدا کردیم و نشان دادیم تابع صعودی $f_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ خوش تعریف است.

حال f را با f_π نمایش می‌دهیم تا مشخص کند که $f \in S_\pi^*$.

به طور مشابه قرار می‌دهیم

$$f_{\pi,p} = (f_\pi)_p. \quad (20.2)$$

و سپس

$$f_{\pi,\infty} = (f_\pi)_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} f_{\pi,p}. \quad (21.2)$$

نتایج فوق را به Q^* فضای تمام توابع حقیقی مقدار شبه پیوسته که در فقط در نقطه‌ی صفر پیوستگی از راست و در سایر نقاط $(0, 1]$ پیوستگی از چپ دارند، تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۱۹.۳.۲. (a) فرض کنیم f و g از عناصر Q^* باشند. اگر $f \leq g$ آنگاه برای هر p که $1 < p < \infty$ داریم

$$f_p \leq g_p. \quad (22.2)$$

(b) برای هر مقدار ثابت c و هر $f \in Q^*$ و $1 < p < \infty$ داریم

$$(f + c)_p = f_p + c. \quad (23.2)$$

برهان. رجوع شود به [۶] صفحه‌ی ۳۶۶ قضیه‌ی ۳ قسمت (ii). $\square$

تعریف ۲۰.۳.۲. فرض کنیم $f \in Q^*$ و $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ افزای روی $[0, 1]$ باشد. نوسان f روی $[t_0, t_1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{O}(f, [t_0, t_1]) = \sup\{(f(x) - f(y)) : x, y \in [t_0, t_1]\}.$$

و برای هر $i = 2, 3, \dots, n$ نوسان f روی افراز $(t_{i-1}, t_i]$ به صورت زیر است

$$\tilde{O}(f, (t_{i-1}, t_i]) = \sup\{(f(x) - f(y)) : x, y \in (t_{i-1}, t_i]\}.$$

و سرانجام نوسان f روی افراز π را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{O}(f, \pi) = \max\{\tilde{O}(f, [t_0, t_1]), \tilde{O}(f, (t_{i-1}, t_i]) : i = 2, 3, \dots, n\}. \quad (24.2)$$

از این تعریف واضح است که

$$\tilde{O}(f, \pi) \geq \tilde{O}(f, [t_0, t_1]).$$

لم ۲۱.۳.۲. فرض کنیم $\pi' = \{t'_i\}_{i=0}^{n'}$ تقریبی از $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ باشد (می نویسیم $\pi' < \pi$) ، آنگاه داریم

$$\tilde{O}(f, \pi') \leq \tilde{O}(f, \pi). \quad (۲۵.۲)$$

برهان. اگر $t'_1 \leq t_1$ آنگاه $[t'_0, t'_1] \subseteq [t_0, t_1]$ از تعاریف فوق واضح است که

$$\begin{aligned} \tilde{O}(f, [t'_0, t'_1]) &= \sup\{(f(x) - f(y)) : x, y \in [t'_0, t'_1]\} \\ &\leq \sup\{(f(x) - f(y)) : x, y \in [t_0, t_1]\} \\ &= \tilde{O}(f, [t_0, t_1]) \leq \tilde{O}(f, \pi). \end{aligned}$$

حال اگر فرض کنیم $2 \leq k' \leq n'$ طبق تعریف بودن π' حداقل یک k با شرط $1 \leq k \leq n$ موجود است به طوری که $(t'_{k'-1}, t'_{k'}) \subseteq (t_{k-1}, t_k]$ مجدداً از تعاریف فوق نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \tilde{O}(f, (t'_{k'-1}, t'_{k'}]) &= \sup\{(f(x) - f(y)) : x, y \in (t'_{k'-1}, t'_{k'}])\} \\ &\leq \sup\{(f(x) - f(y)) : x, y \in (t_{k-1}, t_k]\} \\ &= \tilde{O}(f, (t_{k-1}, t_k]) \\ &\leq \tilde{O}(f, \pi). \end{aligned}$$

از روابط بالا نتیجه می گیریم

$$\max\{\tilde{O}(f, (t'_{k'-1}, t'_{k'}]), \tilde{O}(f, [t'_0, t'_1])\} \leq \tilde{O}(f, \pi)$$

لذا

$$\tilde{O}(f, \pi') \leq \tilde{O}(f, \pi).$$

و به این ترتیب حکم ثابت می شود. $\square$

تذکر ۲۲.۳.۲. فرض کنیم $f \in Q^*$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت افزاز π موجود است به طوری که

$$\tilde{O}(f, \pi) < \epsilon.$$

به علاوه اگر $0 < \epsilon' < \epsilon$ آنگاه می توانیم تقریبی مانند π' از افزاز π را بیابیم به طوری که داشته باشیم

$$\tilde{O}(f, \pi') < \epsilon'.$$

به عبارت دیگر با تقریب های بیشتری از افزاز π می توانیم $\tilde{O}(f, \pi')$ هر چقدر که می خواهیم کوچکتر کنیم و این را به صورت زیر نمایش می دهیم

$$\lim_{\pi} \tilde{O}(f, \pi) = 0.$$

تعریف ۲۳.۳.۲. فرض کنیم $f \in Q^*$ و $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ افزازی روی $[0, 1]$ باشد. فرض کنیم $\bar{f}_\pi$ و $\underline{f}_\pi$ توابع پله ای باشند که به صورت زیر تعریف می شوند

$$\bar{f}_\pi = \bar{a}_1 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=2}^n \bar{a}_i I_{(t_{i-1}, t_i]} \quad (۲۶.۲)$$

و

$$\underline{f}_\pi = \underline{a}_1 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=2}^n \underline{a}_i I_{(t_{i-1}, t_i]} \quad (27.2)$$

که در آن‌ها $\bar{a}_i$ و $\underline{a}_i$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\bar{a}_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} < x \leq t_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

و

$$\underline{a}_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} < x \leq t_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

طبق تذکر (۱۸.۳.۲) تعریف می‌کنیم

$$\bar{f}_{\pi,p} = (\bar{f}_\pi)_p \quad (28.2)$$

و

$$\underline{f}_{\pi,p} = (\underline{f}_\pi)_p \quad (29.2)$$

و

$$\bar{f}_{\pi,\infty} = (\bar{f}_\pi)_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{f}_{\pi,p} \quad (30.2)$$

و

$$\underline{f}_{\pi,\infty} = (\underline{f}_\pi)_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \underline{f}_{\pi,p} \quad (31.2)$$

لم ۲۴.۳.۲. برای هر p که $1 < p < \infty$ روابط زیر برقرار است

$$0 \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \tilde{O}(f, \pi) \quad (32.2)$$

و

$$0 \leq \bar{f}_{\pi,\infty} - \underline{f}_{\pi,\infty} \leq \tilde{O}(f, \pi). \quad (33.2)$$

برهان. فرض کنیم $x \in [0, 1]$. طبق تعریف افراز حداقل یک $j \leq n$ موجود است به طوری که

$$x \in (t_{j-1}, t_j]$$

بنابر این برای هر $x \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} &= \sup\{f(y_1) : t_{j-1} < y_1 \leq t_j\} - \inf\{f(y_2) : t_{j-1} < y_2 \leq t_j\} \\ &= \sup\{f(y_1) : t_{j-1} < y_1 \leq t_j\} - (-\sup\{-f(y_2) : t_{j-1} < y_2 \leq t_j\}) \\ &= \sup\{f(y_1) : t_{j-1} < y_1 \leq t_j\} + \sup\{-f(y_2) : t_{j-1} < y_2 \leq t_j\} \\ &= \sup\{f(y_1) - f(y_2) : y_1, y_2 \in (t_{j-1}, t_j]\} \\ &= \tilde{O}(f, (t_{j-1}, t_j]) \leq \tilde{O}(f, \pi) \end{aligned}$$

لذا برای هر $x \in [0, 1]$ داریم

$$\bar{f}_\pi(x) \leq \underline{f}_\pi(x) + \tilde{O}(f, \pi).$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$\bar{f}_\pi \leq \underline{f}_\pi + \tilde{O}(f, \pi).$$

اینک طبق گزاره‌ی (۱۹.۳.۲) قسمت (a) داریم

$$(\bar{f}_\pi)_p \leq (\underline{f}_\pi + \tilde{O}(f, \pi))_p.$$

و حال طبق تعریف و قسمت (b) از گزاره‌ی (۱۹.۳.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\circ \leq \bar{f}_{\pi,p} \leq (\underline{f}_\pi + \tilde{O}(f, \pi))_p = \underline{f}_{\pi,p} + \tilde{O}(f, \pi) \quad (۳۴.۲)$$

لذا

$$\circ \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \tilde{O}(f, \pi).$$

در انتها با حدگیری از رابطه‌ی فوق وقتی $p \rightarrow \infty$ داریم

$$\circ \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{f}_{\pi,p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \underline{f}_{\pi,p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{O}(f, \pi).$$

لذا خواهیم داشت

$$\circ \leq \bar{f}_{\pi,\infty} - \underline{f}_{\pi,\infty} \leq \tilde{O}(f, \pi).$$

□

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

لم ۲۵.۳.۲. فرض کنیم $f \in Q^*$ و $\pi < \pi'$. آنگاه خواهیم داشت

$$\underline{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi,p} + \tilde{O}(f, \pi). \quad (۳۵.۲)$$

$$\underline{f}_{\pi,\infty} \leq \underline{f}_{\pi',\infty} \leq \bar{f}_{\pi',\infty} \leq \bar{f}_{\pi,\infty} \leq \underline{f}_{\pi,\infty} + \tilde{O}(f, \pi). \quad (۳۶.۲)$$

برهان. برای تظریف π' از افراز π داریم $t'_1 \leq t_1$ و در نتیجه $(t_0, t'_1] \subseteq (t_0, t_1]$. لذا

$$\inf\{f(x) : t_0 < x \leq t_1\} \leq \inf\{f(x) : t_0 < x \leq t'_1\} \Rightarrow \underline{a}_1 \leq \underline{a}'_1$$

برای i' دلخواه که $2 \leq i' \leq n'$ ، یک i هست به طوری که $1 < i \leq n$ و $(t'_{i'-1}, t'_{i'}] \subseteq (t_{i-1}, t_i]$.

پس خواهیم داشت

$$\inf\{f(x) : t_{i-1} < x \leq t_i\} \leq \inf\{f(x) : t'_{i'-1} < x \leq t'_{i'}\} \Rightarrow \underline{a}_i \leq \underline{a}'_{i'}$$

در نتیجه داریم

$$\underline{f}_\pi = \underline{a}_1 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=2}^n \underline{a}_i I_{(t_{i-1}, t_i]} \leq \underline{a}'_1 I_{[t'_0, t'_1]} + \sum_{i'=2}^n \underline{a}'_{i'} I_{(t'_{i'-1}, t'_{i'}]} = \underline{f}_{\pi'}.$$

هم‌چنین برای هر i' داریم

$$\underline{a}'_{i'} = \inf\{f(x) : t'_{i'-1} < x \leq t'_{i'}\} \leq \sup\{f(x) : t'_{i'-1} < x \leq t'_{i'}\} = \bar{a}'_{i'}$$

در نتیجه داریم

$$\underline{a}'_1 I_{[t'_0, t'_1]} + \sum_{i'=2}^n \underline{a}'_{i'} I_{(t'_{i'-1}, t'_{i'}]} \leq \bar{a}'_1 I_{[t'_0, t'_1]} + \sum_{i'=2}^n \bar{a}'_{i'} I_{(t'_{i'-1}, t'_{i'}]}.$$

لذا طبق تعریف (۲۶.۲) و (۲۷.۲) داریم

$$\underline{f}_{\pi'} \leq \bar{f}_{\pi'}.$$

و برای همان i' داریم $(t'_{i'-1}, t'_{i'}) \subseteq (t_{i-1}, t_i]$ در نتیجه
 $\bar{a}'_{i'} = \sup\{f(x) : t'_{i'-1} < x \leq t'_{i'}\} \leq \sup\{f(x) : t_{i-1} < x \leq t_i\} = \bar{a}_i$.

در نتیجه داریم

$$\bar{a}'_{i'} I_{[t'_{i'}, t'_i]} + \sum_{i'=2}^n \bar{a}'_{i'} I_{(t'_{i'-1}, t'_{i'}]} \leq \bar{a}_1 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=2}^n \bar{a}_i I_{(t_{i-1}, t_i]}.$$

و مجدداً طبق تعاریف داریم

$$\bar{f}_{\pi'} \leq \bar{f}_{\pi}.$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$\underline{f}_{\pi} \leq \underline{f}_{\pi'} \leq \bar{f}_{\pi'} \leq \bar{f}_{\pi}.$$

حال از گزاره‌ی (۱۹.۳.۲) و رابطه‌ی (۳۴.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\underline{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi,p} + \tilde{O}(f, \pi).$$

که همان رابطه‌ی (۳۵.۲) است و با حدگیری از این رابطه داریم

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \underline{f}_{\pi,p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \underline{f}_{\pi',p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{f}_{\pi',p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{f}_{\pi,p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \underline{f}_{\pi,p} + \tilde{O}(f, \pi).$$

و از اینجا

$$\underline{f}_{\pi,\infty} \leq \underline{f}_{\pi',\infty} \leq \bar{f}_{\pi',\infty} \leq \bar{f}_{\pi,\infty} \leq \underline{f}_{\pi,\infty} + \tilde{O}(f, \pi).$$

□

و حکم تمام می‌شود.

قضیه ۲۶.۳.۲. فرض کنیم $f \in Q^*$ و f_p یک L_p -بهترین تقریب f باشد. در این صورت

$$\lim_{\pi} \bar{f}_{\pi,p} = \lim_{\pi} \underline{f}_{\pi,p} = f_p. \quad (۳۷.۲)$$

برهان. از رابطه‌ی (۳۵.۲) در لم (۲۵.۳.۲) برای افراز $\pi < \pi'$ داریم

$$\underline{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi,p} + \tilde{O}(f, \pi).$$

پس

$$-\underline{f}_{\pi,p} \geq -\underline{f}_{\pi',p} \geq -\bar{f}_{\pi',p} \geq -\bar{f}_{\pi,p} \geq -\underline{f}_{\pi,p} - \tilde{O}(f, \pi).$$

طرفین نامساوی فوق را با $\bar{f}_{\pi,p}$ جمع می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$\bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} - \tilde{O}(f, \pi) \leq \bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p}$$

در نتیجه

$$0 \leq \bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \tilde{O}(f, \pi).$$

و اما از ملاحظه‌ی (۲۲.۳.۲) نتیجه می‌گیریم

$$0 \leq \bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_{\pi',p} \leq \tilde{O}(f, \pi) < \epsilon$$

$$\lim_{\pi} \tilde{O}(f, \pi) = 0$$

پس برای هر $\epsilon > 0$ به شرطی که π به طور مناسب انتخاب شود، داریم

$$0 \leq \bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_{\pi',p} < \epsilon$$

چون $\epsilon > 0$ دلخواه است پس

$$\lim_{\pi} \bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_{\pi',p} = 0 \Rightarrow \lim_{\pi} \bar{f}_{\pi,p} = \bar{f}_{\pi',p}$$

بنابراین $\lim_{\pi} \bar{f}_{\pi,p} = \bar{f}_p$ موجود است. به طور مشابه خواهیم داشت

$$\underline{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi',p} \leq \bar{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi,p} + \tilde{O}(f, \pi).$$

با جمع کردن طرفین نامساوی فوق با $-\underline{f}_{\pi,p}$ به دست می آوریم

$$\underline{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi',p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \bar{f}_{\pi',p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \underline{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} + \tilde{O}(f, \pi)$$

در نتیجه

$$0 \leq \underline{f}_{\pi',p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \bar{f}_{\pi',p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \bar{f}_{\pi,p} - \underline{f}_{\pi,p} \leq \tilde{O}(f, \pi) < \epsilon.$$

پس نتیجه می شود

$$\lim_{\pi'} \underline{f}_{\pi',p} - \underline{f}_{\pi,p} = 0$$

که نتیجه می دهد $\lim_{\pi} \underline{f}_{\pi,p} = \underline{f}_p$ موجود است. با حدگیری از رابطه ی (۳۲.۲) از لم (۲۴.۳.۲) داریم

$$\lim_{\pi} \bar{f}_{\pi,p} - \lim_{\pi} \underline{f}_{\pi,p} = 0$$

و از روابط فوق نتیجه می گیریم

$$\bar{f}_p - \underline{f}_p = 0.$$

پس می توانیم بنویسیم

$$\bar{f}_p = \underline{f}_p = f_p^*.$$

و اکنون لازم است نشان دهیم $f_p^* = f_p$. برای این منظور فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت افراز π موجود است به طوری که

$$\bar{f}_{\pi} < f + \epsilon \quad \text{و} \quad f < \underline{f}_{\pi} + \epsilon.$$

و حالا طبق قسمت (a) از گزاره ی (۱۹.۳.۲) داریم

$$(\bar{f}_{\pi})_p < (f + \epsilon)_p \quad \text{و} \quad f_p < (\underline{f}_{\pi} + \epsilon)_p$$

و از رابطه ی (۲۳.۲) داریم

$$\bar{f}_{\pi,p} < f_p + \epsilon \quad \text{و} \quad f_p < \underline{f}_{\pi,p} + \epsilon.$$

و با حدگیری روی π خواهیم داشت

$$\lim_{\pi} \bar{f}_{\pi,p} < \lim_{\pi} (f_p + \epsilon) = \lim_{\pi} f_p + \epsilon \quad \text{و} \quad \lim_{\pi} f_p < \lim_{\pi} (\underline{f}_{\pi,p} + \epsilon) = \lim_{\pi} \underline{f}_{\pi,p} + \epsilon$$

در نتیجه برای ϵ دلخواه داریم

$$f_p^* < f_p, \quad f_p < f_p^*.$$

در نتیجه $f_p = f_p^*$ و حکم تمام می شود.

□

قضیه ۲۷.۳.۲. فرض کنیم $f \in Q^*$ و f_p یک L_p -بهترین تقریب برای f باشد. در این صورت

$$\lim_{\pi} \bar{f}_{\pi, \infty} = \lim_{\pi} \underline{f}_{\pi, \infty} = f_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p.$$

برهان. برای هر افراز π که به طور مناسب انتخاب شود و هر تقریب π' ($\pi < \pi'$) طبق رابطه‌ی

(۳۶.۲) از لم (۲۵.۳.۲) داریم

$$\underline{f}_{\pi, \infty} \leq \underline{f}_{\pi', \infty} \leq \bar{f}_{\pi', \infty} \leq \bar{f}_{\pi, \infty} \leq \underline{f}_{\pi, \infty} + \tilde{O}(f, \pi).$$

پس

$$-\underline{f}_{\pi, \infty} \geq -\underline{f}_{\pi', \infty} \geq -\bar{f}_{\pi', \infty} \geq -\bar{f}_{\pi, \infty} \geq -\underline{f}_{\pi, \infty} - \tilde{O}(f, \pi).$$

با جمع طرفین نامساوی فوق با $\bar{f}_{\pi, \infty}$ داریم

$$\bar{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \geq \bar{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi', \infty} \geq \bar{f}_{\pi, \infty} - \bar{f}_{\pi', \infty} \geq \bar{f}_{\pi, \infty} - \bar{f}_{\pi, \infty} \geq \bar{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} - \tilde{O}(f, \pi)$$

$$0 \leq \bar{f}_{\pi, \infty} - \bar{f}_{\pi', \infty} \leq \bar{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi', \infty} \leq \bar{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \tilde{O}(f, \pi) < \epsilon.$$

بنابراین $\lim_{\pi} \bar{f}_{\pi, \infty} = \bar{f}_{\infty}$ موجود است.

به طور مشابه اگر π به صورتی مناسب انتخاب شود داریم

$$\underline{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \underline{f}_{\pi', \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \bar{f}_{\pi', \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \bar{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \underline{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} + \tilde{O}(f, \pi).$$

لذا خواهیم داشت

$$0 \leq \underline{f}_{\pi', \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \bar{f}_{\pi', \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \bar{f}_{\pi, \infty} - \underline{f}_{\pi, \infty} \leq \tilde{O}(f, \pi) < \epsilon.$$

بنابراین $\lim_{\pi} \underline{f}_{\pi, \infty} = \underline{f}_{\infty}$ موجود است. و حالا با حدگیری از رابطه‌ی $\tilde{O}(f, \pi)$ داریم

$$\bar{f}_{\infty} = \underline{f}_{\infty} = f_{\infty}.$$

حال لازم است نشان دهیم f_p همگرای یکنواخت به f_{∞} است. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. برای یک افراز مناسب π طبق قضیه (۲۶.۳.۲) برای هر p که $1 < p < \infty$ داریم

$$|f_p - \bar{f}_{\pi, p}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

همچنین داریم

$$|\bar{f}_{\pi, \infty} - f_{\infty}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

چون $\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{f}_{\pi, p} = \bar{f}_{\pi, \infty}$ لذا طبق تعریف یک عدد حقیقی مانند $p_0 > 1$ موجود است به طوری که برای هر $p > p_0$ داریم

$$|\bar{f}_{\pi, p} - \bar{f}_{\pi, \infty}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

با ترکیب سه نامساوی اخیر نتیجه می‌شود که برای هر $p > p_0$

$$\begin{aligned} |f_p - f_{\infty}| &= |f_p - \bar{f}_{\pi, p} + \bar{f}_{\pi, p} - \bar{f}_{\pi, \infty} + \bar{f}_{\pi, \infty} - f_{\infty}| \\ &\leq |f_p - \bar{f}_{\pi, p}| + |\bar{f}_{\pi, p} - \bar{f}_{\pi, \infty}| + |\bar{f}_{\pi, \infty} - f_{\infty}| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

و به این ترتیب ثابت می‌شود $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p = f_{\infty}$

نتیجه ۲۸.۳.۲. فرض کنیم $f, g \in Q^*$ در این صورت

(a) اگر روی $[0, 1]$ ، $f \leq g$ باشد آنگاه $f_\infty \leq g_\infty$.

(b) اگر c یک مقدار ثابت حقیقی باشد آنگاه $(f + c)_\infty = f_\infty + c$.

برهان. طبق فرض اگر $f \leq g$ آنگاه با استفاده از گزاره (۱۹.۳.۲) داریم $f_p \leq g_p$. حال با حدگیری از نامساوی اخیر نتیجه می شود $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p \leq \lim_{p \rightarrow \infty} g_p$. بنابراین طبق قضیه (۲۷.۳.۲) خواهیم داشت $f_\infty \leq g_\infty$.

و مجدداً طبق گزاره (۱۹.۳.۲) داریم

$$(f + c)_p = f_p + c \implies \lim_{p \rightarrow \infty} (f + c)_p = \lim_{p \rightarrow \infty} (f_p + c) = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p + c$$

و از اینجا داریم $(f + c)_\infty = f_\infty + c$ و اثبات تمام می شود. $\square$

قضیه ۲۹.۳.۲. فرض کنیم $f \in Q^*$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت f_p نیز تابعی پیوسته است.

برهان. فرض کنیم x یک نقطه دلخواه اما ثابت در فاصله $(0, 1)$ باشد و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. برای تابع f_p می توان نوشت

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_p(y)| &= |f_p(x) - \bar{f}_{\pi,p}(x) + \bar{f}_{\pi,p}(x) - \bar{f}_{\pi,p}(y) + \bar{f}_{\pi,p}(y) - f_p(y)| \\ &\leq |f_p(x) - \bar{f}_{\pi,p}(x)| + |\bar{f}_{\pi,p}(x) - \bar{f}_{\pi,p}(y)| + |\bar{f}_{\pi,p}(y) - f_p(y)| \end{aligned} \quad (38.2)$$

طبق قضیه (۲۶.۳.۲) می دانیم که برای هر $y \in [0, 1]$ داریم

$$f_p(y) = \lim_{\pi} \bar{f}_{\pi,p}(y)$$

بنابر این می توانیم افراز $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ را طوری انتخاب کنیم که

(۱) هر یک از جملات اول و سوم سمت راست نامساوی (۳۸.۲) از $\frac{\epsilon}{3}$ کمتر شود.

(۲) $\bar{f}_\pi$ به صورت زیر نوشته شود

$$\bar{f}_\pi = \bar{a}_1 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=2}^n \bar{a}_i I_{(t_{i-1}, t_i]}. \quad (39.2)$$

با توجه به پیوستگی یکنواخت f روی $[0, 1]$ برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت

$$|\bar{a}_i - \bar{a}_{i-1}| < \frac{\epsilon}{9} \quad (40.2)$$

لذا رابطه (۳۸.۲) برای هر $y \in [0, 1]$ به صورت زیر در می آید

$$|f_p(x) - f_p(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + |\bar{f}_{\pi,p}(x) - \bar{f}_{\pi,p}(y)|. \quad (41.2)$$

حال نشان می دهیم عددی حقیقی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که برای هر $y \in (x - \delta, x + \delta)$ داشته باشیم

$$|\bar{f}_{\pi,p}(x) - \bar{f}_{\pi,p}(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (42.2)$$

برای نشان دادن این رابطه ابتدا $\bar{f}_\pi$ را به صورت داده شده در رابطه‌ی (۳۹.۲) در نظر می‌گیریم، سپس $\bar{f}_{\pi,p}$ برای اعداد حقیقی $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ باید به صورت زیر باشد

$$\bar{f}_{\pi,p} = b_1 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=2}^n b_i I_{(t_{i-1}, t_i]} \quad (۴۳.۲)$$

حال دو حالت زیر را برای نقطه‌ی x در نظر می‌گیریم:

(الف) برای برخی از $j \leq n$ داشته باشیم $t_{j-1} < x < t_j$. برای هر $y \in (t_{j-1}, t_j)$ طبق رابطه‌ی (۴۳.۲) داریم

$$\bar{f}_{\pi,p}(y) = b_1(\circ) + \dots + b_{j-1}(\circ) + b_j(1) + b_{j+1}(\circ) + \dots + b_n(\circ) = b_j$$

در نتیجه

$$|\bar{f}_{\pi,p}(x) - \bar{f}_{\pi,p}(y)| = |b_j - b_j| = \circ.$$

حال فرض کنیم $\delta = \min\{(x - t_{j-1}), (t_j - x)\}$. برای x مورد نظر و هر $y \in (x - \delta, x + \delta)$ رابطه‌ی (۴۱.۲) به صورت زیر می‌شود

$$|f_p(x) - f_p(y)| < \left(\frac{2}{3}\epsilon\right) + \circ < \epsilon$$

که این پیوستگی تابع f_p در نقطه‌ی x را در این حالت نشان می‌دهد.

(ب) برای برخی از $j < n$ داشته باشیم $x = t_j$. حال با توجه به رابطه‌ی (۴۳.۲) مجدداً برای هر $y \in (t_{j-1}, x]$ داریم

$$|\bar{f}_{\pi,p}(x) - \bar{f}_{\pi,p}(y)| = |b_j - b_j| = \circ.$$

در این صورت با همان δ تعریف شده‌ی فوق پیوستگی نتیجه می‌شود. اما اگر $y \in (x, t_{j+1}]$ را در نظر بگیریم آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$|\bar{f}_{\pi,p}(y) - \bar{f}_{\pi,p}(x)| = \bar{f}_{\pi,p}(y) - \bar{f}_{\pi,p}(x) = b_{j+1} - b_j.$$

با فرض خلف قرار می‌دهیم

$$b_{j+1} - b_j > \frac{\epsilon}{3}.$$

در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\frac{\epsilon}{3} < b_{j+1} - b_j = (b_{j+1} - \bar{a}_{j+1}) + (\bar{a}_{j+1} - \bar{a}_j) + (\bar{a}_j - b_j).$$

چون $\frac{\epsilon}{9} < (\bar{a}_{j+1} - \bar{a}_j)$ از رابطه‌ی (۴۰.۲) بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم

$$b_{j+1} - \bar{a}_{j+1} > \frac{\epsilon}{9} \quad (۴۴.۲)$$

در این حالت قرار می‌دهیم

$$b_{j+1}^* = b_{j+1} - \frac{\epsilon}{9} \quad (۴۵.۲)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} b_{j+1}^* - b_j &= (b_{j+1} - b_j) - \frac{\epsilon}{9} \\ &> \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{9} = \frac{2\epsilon}{9} > 0. \end{aligned}$$

تابع پله ای صعودی $\bar{f}_{\pi,p}^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bar{f}_{\pi,p}^* = b_1 I_{[t_0, t_1]} + \sum_{i=2}^j b_i I_{(t_{i-1}, t_i]} + b_{j+1}^* I_{(t_j, t_{j+1}]} + \sum_{i=j+2}^n b_i I_{(t_{i-1}, t_i]}.$$

پس

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_{\pi,p}^* - \bar{f}_\pi\|_p^p &= \sum_{i=1}^j (t_i - t_{i-1}) |b_i - \bar{a}_i|^p + (t_{j+1} - t_j) |b_{j+1}^* - \bar{a}_{j+1}|^p \\ &+ \sum_{i=j+2}^n (t_i - t_{i-1}) |b_i - \bar{a}_i|^p. \end{aligned} \quad (46.2)$$

در حالی‌که

$$\|\bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_\pi\|_p^p = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) |b_i - \bar{a}_i|^p \quad (47.2)$$

اما با در نظر گرفتن (44.2) و (45.2) نتیجه می‌گیریم

$$b_{j+1}^* - \bar{a}_{j+1} = b_{j+1} - \frac{\epsilon}{9} - \bar{a}_{j+1} = (b_{j+1} - \bar{a}_{j+1}) - \frac{\epsilon}{9} > \frac{\epsilon}{9} - \frac{\epsilon}{9} = 0.$$

که معادل است با این‌که

$$0 < b_{j+1}^* - \bar{a}_{j+1} < b_{j+1} - \bar{a}_{j+1}.$$

یا

$$|b_{j+1}^* - \bar{a}_{j+1}|^p < |b_{j+1} - \bar{a}_{j+1}|^p.$$

که از مقایسه با روابط (46.2) و (47.2) نتیجه می‌گیریم

$$\|\bar{f}_{\pi,p}^* - \bar{f}_\pi\|_p < \|\bar{f}_{\pi,p} - \bar{f}_\pi\|_p.$$

که یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و لذا برای تمام $y \in (x, t_{j+1}]$ می‌توانیم

نتیجه بگیریم

$$|\bar{f}_{\pi,p}(y) - \bar{f}_{\pi,p}(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

فرض کنیم $\delta = \min\{(x - t_{j-1}), (t_{j+1} - x)\}$ در نتیجه رابطه‌ی (41.2) برای هر $y \in (x - \delta, x + \delta)$ به صورت زیر می‌شود

$$|f_p(x) - f_p(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

و لذا برهان کامل می‌شود.

□

نتیجه ۳۰.۳.۲. اگر تابع f پیوسته باشد آنگاه تابع $f_p = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ پیوسته است.

□

برهان. چون f_∞ حد یکنواخت از توابع پیوسته است لذا باید پیوسته باشد.

۴.۲ مشخصه سازی برای φ - بهترین تقریب

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضایی با اندازه‌ی متناهی کامل و $M = M(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ نشان دهنده‌ی تمام توابع $\mathcal{A}$ -اندازه پذیر حقیقی مقدار باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ یک σ -شبکه نامیده می‌شود هرگاه $\emptyset, \Omega \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ تحت اجتماع شمارا و اشتراک شمارا بسته باشد.

تعریف ۲.۴.۲. مجموعه‌ی $\mathcal{L}$ یک σ -شبکه کامل نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{L}$ یک σ -شبکه باشد و برای هر $c \subset \mathcal{L}$ که $\mu(c \Delta c') = 0$ نتیجه بگیریم $c' \in \mathcal{L}$.

برای σ -شبکه $\mathcal{L}$ نماد $\bar{\mathcal{L}}$ نشان دهنده‌ی σ -شبکه‌ای به صورت $\{D : \Omega \setminus D \in \mathcal{L}\}$ است.

تعریف ۳.۴.۲. تابع f را $\mathcal{L}$ -اندازه پذیر می‌نامیم اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\{x \in \Omega : f(x) > a\} \in \mathcal{L}$.

از حالا به بعد فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ نشان دهنده‌ی یک σ -شبکه کامل باشد. فرض کنیم تابع $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ویژگی‌های زیر را داشته باشد

(۱) برای هر $a \in \mathbb{R}$ تابع $\varphi(\cdot, a)$ تابعی اندازه پذیر باشد.

(۲) $\varphi(\omega, a) = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$ باشد.

(۳) $\varphi(\omega, \cdot)$ تابعی زوج، ناصفر و محدب باشد.

φ_+ نشان دهنده‌ی مشتق راست φ نسبت به متغیر دوم و φ_- نشان دهنده‌ی مشتق چپ φ نسبت به دومین متغیر باشد.

تعریف ۴.۴.۲. برای تابع φ با مشخصات مذکور فضای L_φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L_\varphi := \{f \in M \mid \exists \lambda > 0 : \int_\Omega \varphi(\omega, \lambda f(\omega)) d\mu < \infty\}$$

اگر φ مستقل از متغیر اول باشد آنگاه برای $\varphi(x) = x^p$ فضای L_φ به فضای L_p تبدیل می‌شود.

اغلب به جای $\int_\Omega \varphi(\omega, f(\omega)) d\mu$ می‌نویسیم $\int_\Omega \varphi(\omega, f) d\mu$.

لم ۵.۴.۲. اگر $f, g \in L_\varphi$ آنگاه $\varphi_+(\omega, f(\omega))g(\omega)$ تابعی اینتگرال پذیر است.

□

برهان. رجوع شود به [۷] لم ۲.۵.

برای هر σ -شبکه $\mathcal{L}$ مخروط محدب بسته متشکل از تمام توابع $\mathcal{L}$ -اندازه پذیر در L_φ را با $L_\varphi(\mathcal{L})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۴.۲. $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$ یک φ -بهترین تقریب برای $f \in L_\varphi$ است اگر

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g) d\mu = \min_{h \in L_\varphi(\mathcal{L})} \int_{\Omega} \varphi(\omega, f - h) d\mu$$

مجموعه‌ی تمام φ -بهترین تقریب‌های $f \in L_\varphi(\mathcal{L})$ را با $\mu(f, \mathcal{L})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۴.۲. فرض کنیم ν یک اندازه‌ی علامت‌دار روی $\mathcal{A}$ باشد. می‌گوییم $C \in \mathcal{L}$ یک مجموعه‌ی ν -مثبت است هرگاه به ازای هر $D \in \bar{\mathcal{L}}$ داشته باشیم $\nu(C \cap D) \geq 0$.

مجموعه‌ی $C \in \mathcal{L}$ را ν -منفی می‌نامیم هرگاه برای هر $D \in \bar{\mathcal{L}}$ داشته باشیم $\nu(C \cap D) \leq 0$.

فرض کنیم $f \in L_\varphi$ برای هر $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$ و هر $a \in \mathbb{R}$ اندازه‌هایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(۱)

$$\mu_g^+(A) = \int_A \varphi_+(\omega, f - g) d\mu \quad \text{و} \quad \mu_g^-(A) = \int_A \varphi_-(\omega, f - g) d\mu.$$

(۲)

$$\mu_a^+(A) = \int_A \varphi_+(\omega, f - a) d\mu \quad \text{و} \quad \mu_a^-(A) = \int_A \varphi_-(\omega, f - a) d\mu.$$

لم ۸.۴.۲. برای هر $f \in L_\varphi$ و هر $a \in \mathbb{R}$ داریم $\mu_a^+ = \mu_a^-$.

برهان. رجوع شود به [۷] لم ۲.۸. □

تعریف ۹.۴.۲. برای هر $f \in L_\varphi$ تعریف می‌کنیم

$$C(f) := \{a : \mu_a^+ = \mu_a^-\}$$

تعریف ۱۰.۴.۲. فرض کنیم $\{\nu_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ خانواده‌ای از اندازه‌ها روی Ω باشد. تابع $\mathcal{L}$ -اندازه پذیر g را تابع لبگ رادون-نیکودیم (تابع LRN) از $\{\nu_a\}$ می‌نامیم هرگاه

(الف) برای هر $a \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{g > a\}$ ، ν_a -مثبت باشد.

(ب) برای هر $b \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{g < b\}$ ، ν_b -منفی باشد.

لم ۱۱.۴.۲. فرض کنیم $f \in L_\varphi$ و $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ یک σ -شبکه باشد و $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

$$(۱) \quad g \in \mu(f, \mathcal{L})$$

$$(۲) \quad \text{برای هر } h \in L_\varphi(\mathcal{L}) \text{ داریم}$$

(a)

$$\int_{\{g > h\}} \varphi_+(\omega, f - g)(g - h) d\mu \geq 0$$

(b)

$$\int_{\{g < h\}} \varphi_-(\omega, f - g)(g - h) d\mu \geq 0$$

برهان. فرض کنیم $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$. تابع M را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$M(t) = \int \varphi(\omega, f - g - t(h - g)) d\mu.$$

تابع M تابعی محدب است زیرا برای هر $\lambda \in (0, 1)$ داریم

$$\begin{aligned} \lambda M(t_1) + (1 - \lambda)M(t_2) &= \\ \lambda \int \varphi(\omega, f - g - t_1(h - g)) d\mu + (1 - \lambda) \int \varphi(\omega, f - g - t_2(h - g)) d\mu &= \\ \int (\lambda \varphi(\omega, f - g - t_1(h - g)) + (1 - \lambda) \varphi(\omega, f - g - t_2(h - g))) d\mu &= \\ \geq \int \varphi(\lambda(\omega, f - g - t_1(h - g)) + (1 - \lambda)(\omega, f - g - t_2(h - g))) d\mu &= \\ = \int \varphi(\omega, f - g - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)(h - g)) d\mu &= \\ = M(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2). \end{aligned}$$

در این صورت تابع g یک φ -بهترین تقریب است اگر و تنها اگر $M'_+(\circ) \geq \circ$ (که M'_+ نشان دهنده مشتق راست از M است).

حال فرض کنیم گزاره (۱) برقرار باشد لذا بنا بر ادعای فوق $M'_+(\circ) \geq \circ$ به عنوان نتیجه‌ای از لِم (۵.۴.۲) نامساوی اخیر نتیجه می‌دهد

$$\circ \leq \int_{\{g > h\}} \varphi_+(\omega, f - g)(g - h) d\mu + \int_{\{g < h\}} \varphi_-(\omega, f - g)(g - h) d\mu.$$

نامساوی‌های (a) و (b) با جای‌گذاری $h \vee g$ و $h \wedge g$ به جای h در نامساوی اخیر به‌دست می‌آیند. از سوی دیگر (a) و (b) نتیجه می‌دهند که $M'_+(\circ) \geq \circ$ پس $g \in \mu(f, \mathcal{L})$. $\square$

قضیه ۱۲.۴.۲. فرض کنیم $f \in L_\varphi$ و $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ یک σ -شبکه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

$$(۱) \quad g \in \mu(f, \mathcal{L})$$

(۲) برای هر $a \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{g > a\}$ مجموعه‌ای μ_g^+ -مثبت و مجموعه‌ی $\{g < a\}$ مجموعه‌ای μ_g^- -منفی است.

(۳) برای خانواده‌ی $\{\mu_a^\pm\}_{a \in \mathbb{R}}$ تابع g تابعی LRN است.

برهان. • (۱ $\leftarrow$ ۲) فرض کنیم $D \in \bar{\mathcal{L}}$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. مجموعه‌ی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A := \{g > a\}.$$

و برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم

$$A_n := \{g > a + \frac{1}{n}\}.$$

تابع g_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g_n(\omega) := \begin{cases} g(\omega) & \omega \notin A \cap D \\ a & \omega \in (A - A_n) \cap D \\ g(\omega) - \frac{1}{n} & \omega \in A_n \cap D \end{cases}$$

که $g_n \in L_\varphi(\mathcal{L})$. حال این g_n را در قسمت (۲) (a) لم (۱۱.۴.۲) جایگزین می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \circ &\leq \int_{\{g > g_n\}} \varphi_+(\omega, f - g)(g - g_n) d\mu \\ &= \int_{(A \setminus A_n) \cap D} \varphi_+(\omega, f - g)(g - a) d\mu + \int_{A_n \cap D} \varphi_+(\omega, f - g)(g - g + \frac{1}{n}) d\mu. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\circ \leq \int_{(A \setminus A_n) \cap D} \varphi_+(\omega, f - g)(g - a) d\mu + \frac{1}{n} \int_{A_n \cap D} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu.$$

با ضرب کردن نامساوی بالا در n و حدگیری وقتی که $n \rightarrow \infty$ داریم

$$\circ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{(A \setminus A_n) \cap D} \varphi_+(\omega, f - g)(g - a) d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n \cap D} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu$$

پس

$$\int_{A \cap D} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu \geq \circ \Rightarrow \mu_g^+(A \cap D) \geq \circ.$$

و این طبق تعریف این یعنی مجموعه‌ی $\{g > a\}$ مجموعه‌ای μ_g^+ -مثبت است.

به طور مشابه مجموعه‌ی $\{g < a\}$ مجموعه‌ای μ_g^- -منفی است. نشان می‌دهیم برای هر $D \in \bar{\mathcal{L}}$

$$\mu_g^-(\{g < a\} \cap D) \leq \circ, \text{ پس طبق تعریف باید نشان دهیم}$$

$$\mu_g^-(\{g < a\} \cap D) = \int_{\{g < a\} \cap D} \varphi_-(\omega, f - g) d\mu \leq \circ.$$

قرار می‌دهیم $A = \{g < a\}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنیم

$$A_n := \{g < a - \frac{1}{n}\}.$$

این بار تابع g_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g_n(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & \omega \notin A \cap D \\ a & \omega \in (A - A_n) \cap D \\ g(\omega) + \frac{1}{n} & \omega \in A_n \cap D \end{cases}$$

با جای‌گذاری g_n در قسمت (۲) (a) لم (۱۱.۴.۲) داریم

$$\int_{\{g < g_n\}} \varphi_-(\omega, f - g)(g - g_n) d\mu \geq \circ$$

$$\circ \leq \int_{(A \setminus A_n) \cap D} \varphi_-(\omega, f - g)(g - a) d\mu + \int_{A_n \cap D} \varphi_-(\omega, f - g)(g - g + \frac{1}{n}) d\mu.$$

با ضرب طرفین نامساوی فوق در n و حدگیری وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{(A \setminus A_n) \cap D} \varphi_-(\omega, f - g)(g - a) d\mu + (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n \cap D} \varphi_-(\omega, f - g) d\mu.$$

در نتیجه

$$-\int_{A \cap D} \varphi_-(\omega, f - g) d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_{A \cap D} \varphi_-(\omega, f - g) d\mu \leq 0.$$

پس مجموعه‌ی $\{g < a\}$ مجموعه‌ای μ_g^- منفی است.

- (۲ ← ۳) فرض کنیم $a \in C(f)$ و گزاره‌ی (۲) برقرار باشد. برای اینکه ثابت کنیم تابع g تابعی LRN است باید نشان دهیم برای $a \in C(f)$ مجموعه‌ی $\{g > a\}$ مجموعه‌ای $\mu_a^\pm$ مثبت و $\{g < a\}$ مجموعه‌ای $\mu_a^\pm$ منفی است. نشان می‌دهیم مجموعه‌ی $\{g > a\}$ مجموعه‌ای μ_a^+ مثبت است. فرض کنیم $D \in \bar{\mathcal{L}}$ و $g > a$. پس $f - g < f - a$ و چون φ_+ تابعی یکنواست پس

$$\int_{\{g > a\} \cap D} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu < \int_{\{g > a\} \cap D} \varphi_+(\omega, f - a) d\mu$$

و طبق فرض (۲) داریم

$$0 \leq \int_{\{g > a\} \cap D} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu.$$

پس

$$\int_{\{g > a\} \cap D} \varphi_+(\omega, f - a) d\mu \geq 0.$$

لذا $\{g > a\}$ مجموعه‌ای μ_a^+ مثبت است و از آنجا که طبق تعریف (۹.۴.۲) داریم $\mu_a^+ = \mu_a^-$ پس μ_a^- منفی نیز می‌باشد. به طور مشابه ثابت می‌شود $\{g < a\}$ مجموعه‌ای $\mu_a^\pm$ منفی است.

- (۲ ← ۳) برای $a \in \mathbb{R}$ و $D \in \bar{\mathcal{L}}$ و $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم
- $$A := \{a < g\} \cap D.$$

و

$$A_{k,n} := \{a + \frac{k}{n} < g \leq a + \frac{(k+1)}{n}\} \cap D.$$

چون برای خانواده‌ی $\{\mu_a^\pm\}_{a \in \mathbb{R}}$ تابع g تابعی LRN است پس طبق تعریف برای هر $a \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{g > a\}$ مجموعه‌ای μ_a^+ مثبت است از جمله برای $a + \frac{k}{n} \in \mathbb{R}$ و مجموعه‌ی دلخواه $A_{k,n}$ داریم

$$\mu_{a+\frac{k}{n}}^+(A_{k,n}) = \int_{A_{k,n}} \varphi_+(\omega, f - a - \frac{k}{n}) d\mu \geq 0.$$

از یکنوایی φ_+ داریم

$$\int_{A_{k,n}} \varphi_+(\omega, f - g + 1/n) d\mu \geq 0.$$

حال با جمع‌بندی روی $k = 0, 1, \dots$ داریم

$$\int_A \varphi_+(\omega, f - g + 1/n) d\mu \geq 0$$

چون φ_+ تابعی از راست پیوسته است با حدگیری وقتی $n \rightarrow \infty$ نتیجه می گیریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_+(\omega, f - g + 1/n) d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_{\{g > a\} \cap D} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu \geq 0$$

پس

$$\mu_g^+(D \cap \{a < g\}) \geq 0.$$

و این یعنی $\{g > a\}$ مجموعه ای μ_g^+ است. به طور مشابه ثابت می شود $\{g < a\}$ مجموعه ای μ_g^- است.

• (۲ ← ۱) فرض کنیم $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$. با اینتگرال گیری روی a در نامساوی

$$\int_{\{h < a\} \cap \{a < g\}} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu \geq 0$$

و کاربرد قضیه فوبینی داریم

$$\int \int_{\{h < a < g\}} \varphi_+(\omega, f - g) da d\mu = \int \varphi_+(\omega, f - g)(g - h) d\mu \geq 0.$$

که نامساوی (۲) (a) لم (۱۱.۴.۲) می باشد. نامساوی (۲) (b) از لم (۱۱.۴.۲) به طور مشابه بدست می آید. لذا $g \in \mu(f, \mathcal{L})$.

□

حال فرض کنیم f تابعی در $C([0, 1])$ باشد. بهترین تقریب f در $L_p([0, 1])$ توسط توابع صعودی را با f_p نمایش می دهیم. نشان می دهیم $f_* := \lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ موجود است و f_* بهترین تقریب f در $C([0, 1])$ توسط توابع صعودی است.

تعریف ۱۳.۴.۲. فرض کنیم $S := \{(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1] : a < b\}$. برای $f \in L_p([0, 1])$ و $(a, b) \in S$ و $1 < p < \infty$ مقدار ثابت یکتایی که $L_p([a, b])$ -بهترین تقریب برای f توسط توابع ثابت می باشد را با $m_p^f(a, b) = m_p(a, b)$ نمایش می دهیم. m_p توسط تساوی زیر مشخص می شود

$$\int_a^b \varphi_p(f - m_p(a, b)) dx = 0 \quad (۴۸.۲)$$

که

$$\varphi_p(y) := |y|^{p-1} \operatorname{sign}(y)$$

به طور مشابه برای $f \in C([0, 1])$ با جایگزینی $C([0, 1])$ به جای $L_p([0, 1])$ در تعریف قبلی داریم

$$m_\infty^f(a, b) = m_\infty(a, b).$$

که در این حالت داریم

$$m_\infty(a, b) = \frac{1}{2} \left(\max_{[a, b]} f + \min_{[a, b]} f \right).$$

تابع $m_p : S \rightarrow \mathbb{R}$ برای $1 < p \leq \infty$ پیوسته است.

برای $1 < p \leq \infty$ و $x \in (0, 1)$ دو تابع به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f_p(x) := \sup_{a < x} \inf_{b > x} m_p(a, b)$$

$$f^p(x) := \inf_{b>x} \sup_{a<x} m_p(a, b).$$

در ادامه به بیان و اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که به ویژگی‌های مقدماتی از توابع f_p و f^p اشاره می‌کند که بعداً به آنها نیاز خواهیم داشت.

قضیه ۱۴.۴.۲. برای $1 < p \leq \infty$

(۱) f_p و f^p توابع صعودی هستند.

(۲) برای تمام $x \in (0, 1)$ داریم $f_p \leq f^p$.

برهان. (۱) فرض کنیم $x, y \in (0, 1)$ و $x < y$.

$$\begin{aligned} \inf_{b>x} m_p(a, b) &\leq \inf_{b>y} m_p(a, b) \implies \sup_{a<x} \inf_{b>x} m_p(a, b) \leq \sup_{a<x} \inf_{b>y} m_p(a, b) \\ &\leq \sup_{a<y} \inf_{b>y} m_p(a, b). \end{aligned}$$

بنابراین $f_p(x) \leq f_p(y)$ و این یعنی تابع f_p تابعی صعودی است. به طور مشابه ثابت می‌شود تابع f^p نیز تابعی صعودی است.

(۲) برای اثبات گزاره‌ی (۲) فرض کنیم $x \in (0, 1)$. چون برای هر $a < x < b$ داریم $m_p(a, b) \geq \inf_{c>x} m_p(a, c)$ پس

$$\sup_{a<x} m_p(a, b) \geq \sup_{a<x} \inf_{c>x} m_p(a, c) = f_p(x).$$

بنابراین

$$f^p(x) = \inf_{b>x} \sup_{a<x} m_p(a, b) \geq f_p(x).$$

و به این ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود.

□

چون توابع f_p و f^p توابعی صعودی و کراندارند، می‌توانیم این توابع را در نقاط 0 و 1 به طور پیوسته توسعه دهیم. از حالا به بعد این توابع را روی $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۵.۴.۲. برای $x \in (0, 1)$ مجموعه‌های $\mathcal{F}_p$ و $\mathcal{F}_\infty$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F}_p = \{x \in (0, 1) : m_p(a, x) \leq m_p(x, b) ; \forall a \in [0, x), \forall b \in (x, 1]\}.$$

$$\mathcal{F}_\infty = \{x \in (0, 1) : m_\infty(a, x) \leq m_\infty(x, b) ; \forall a \in [0, x), \forall b \in (x, 1]\}.$$

برای $1 < p \leq \infty$ و $0 < a < b < 1$ مجموعه‌های $\mathcal{F}_p \cap [a, b]$ زیر مجموعه‌هایی فشرده از $[0, 1]$ هستند. زیرا این مجموعه‌ها زیرمجموعه‌های بسته‌ای از مجموعه‌ی فشرده $[0, 1]$ هستند.

تعریف ۱۶.۴.۲. فرض کنیم $(a, b) \in S$. گوئیم تابع صعودی $g \in L_p([a, b])$ یک L_p -بهترین تقریب برای $f \in L_p([a, b])$ توسط توابع صعودی است اگر برای هر تابع صعودی $h \in L_p([a, b])$ داشته باشیم

$$\int_a^b |f - g|^p dx \leq \int_a^b |f - h|^p dx.$$

به طور مشابه گوئیم تابع صعودی $g \in C([a, b])$ یک C -بهترین تقریب برای $f \in C([a, b])$ توسط توابع صعودی است اگر برای هر تابع صعودی h داشته باشیم

$$\max_{a \leq x \leq b} |f - g| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f - h|.$$

اولین هدف در ادامه این است که نشان دهیم $f_* = f_\infty = f^\infty$ و بعد ثابت می‌کنیم f_∞ یک ویژگی مینیمم‌کننده دارد. به طور دقیق تر نشان می‌دهیم برای هر $x \in \mathcal{F}_\infty$ ، $f_\infty(x) = f(x)$ و اگر $a, b \in \mathcal{F}_\infty$ و $a < b$ آنگاه f_∞ یک C -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی است. f_∞ را C -بهترین تقریب طبیعی برای f توسط توابع صعودی می‌نامیم.

۵.۲ فرمول‌های مینیماکس برای بهترین تقریب‌های صعودی طبیعی

این بخش را با اثبات قضایایی برای L_p -بهترین تقریب برای $1 < p < \infty$ آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۵.۲. فرض کنیم $f \in L_p([0, 1])$ و $1 < p < \infty$. آنگاه $f_p = f^p$ (a.e) که f_p یک $L_p([0, 1])$ -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی است.

برهان. فرض کنیم تابع g یک $L_p([0, 1])$ -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی و تقریباً همه جا تعریف شده و در نقطه‌ی $x \in (0, 1)$ پیوسته باشد. قرار می‌دهیم $\alpha = g(x)$. فرض کنیم $\delta > 0$. از قضیه‌ی (۱۲.۴.۲) نتیجه می‌گیریم که برای هر $b > x$

$$\int_{\{g \geq \alpha - \delta\} \cap (0, b)} \varphi_p(f - \alpha + \delta) dx \geq 0. \quad (۴۹.۲)$$

چون برای $1 < p < \infty$ ، φ_p اکیدا صعودی است نامساوی فوق و رابطه‌ی (۴۸.۲) نتیجه می‌دهد که برای هر $b > x$

$$m_p(\{g \geq \alpha - \delta\} \cap (0, b)) \geq \alpha - \delta.$$

در نتیجه

$$\inf_{b > x} m_p(\{g \geq \alpha - \delta\} \cap (0, b)) \geq \alpha - \delta.$$

مشاهده می‌کنیم که مجموعه‌ی $\{g \geq \alpha - \delta\}$ یک فاصله با نقطه‌ی انتهایی چپ کمتر از x است. بنابراین

$$f_p(x) = \sup_{a < x} \inf_{b > x} m_p(a, b) \geq g(x) - \delta.$$

چون δ یک مقدار مثبت دلخواه است و g تقریباً همه جا پیوسته است، نتیجه می‌گیریم

$$g(x) \leq f_p(x) \quad (a.e)$$

مجدداً برای $x \in (0, 1)$ و $a < x$ و $\delta > 0$ دلخواه، چون g بهترین تقریب است طبق قضیه (۱۲.۴.۲) داریم

$$\int_{\{g \leq \alpha + \delta\} \cap (0, b)} \varphi_p(f - \alpha - \delta) dx \geq 0.$$

پس

$$m_p(\{g \leq \alpha + \delta\} \cap (0, b)) \leq \alpha + \delta \implies \sup_{a < x} m_p(\{g \leq \alpha + \delta\} \cap (0, b)) \leq \alpha + \delta$$

مجموعه‌ی $\{g \leq \alpha + \delta\}$ فاصله‌ای با نقطه انتهایی راست بیشتر از x است. داریم

$$f^p(x) = \inf_{b > x} \sup_{a < x} m_p(a, b) \leq g(x) + \delta$$

چون δ یک مقدار دلخواه و تابع g تقریباً همه جا پیوسته است نتیجه می‌گیریم

$$f^p(x) \leq g(x) \quad (a.e.).$$

رسیدیم به این که $f^p \leq g(x) \leq f_p(x)$ پس $f^p \leq f_p$ از طرفی طبق قضیه (۱۴.۴.۲) داشتیم $f_p \leq f^p$ لذا تساوی حاصل می‌شود. $\square$

لم ۲.۵.۲. فرض کنیم $f \in C([0, 1])$. آنگاه برای $0 \leq a < b \leq 1$ حد زیر یکنواخت است

$$\lim_{p \rightarrow \infty} m_p(a, b) = m_\infty(a, b).$$

برهان. اگر a, b اعدادی ثابت باشند، تساوی فوق برقرار است. نشان می‌دهیم برای هر نقطه a, b حد فوق یکنواخت است. با فرض خلف گیریم $\epsilon > 0$ و دنباله‌ای مانند p_k همگرا به ∞ و دنباله‌های a_k و b_k که $0 \leq a_k < b_k \leq 1$ موجود باشند به طوری که

$$|m_{p_k}^f(a_k, b_k) - m_\infty^f(a_k, b_k)| \geq \epsilon. \quad (50.2)$$

تابع f_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_k(x) := f(a_k + (b_k - a_k)x).$$

به این ترتیب برای هر $1 < p \leq \infty$ داریم

$$m_p^f(a_k, b_k) = m_p^{f_k}(0, 1). \quad (51.2)$$

چون تابع f تابعی کراندار و پیوسته است دنباله‌ی $\{f_k\}$ نیز دنباله‌ای کراندار و همپیوسته است. از قضیه آرزولا-آسکولی نتیجه می‌شود که تابع $g \in C([0, 1])$ و زیر دنباله‌ای از $\{f_k\}$ موجود است که به تابع $g \in C([0, 1])$ همگراست.

برای سهولت فرض کنیم f_k به $g \in C[0, 1]$ همگرا باشد. k را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_k - g| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (52.2)$$

و

$$|m_{p_k}^g(0, 1) - m_\infty^g(0, 1)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (53.2)$$

از نامساوی (۵۲.۲) برای هر $1 < p \leq \infty$ داریم

$$|m_p^{f_k}(0, 1) - m_p^g(0, 1)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (54.2)$$

از آنجا که روابط (۵۱.۲) و (۵۴.۲) برای هر p از جمله برای p_k و ∞ برقرارند، داریم

$$\begin{aligned} & |m_{p_k} f(a_k, b_k) - m_\infty f(a_k, b_k)| = \\ & |m_{p_k} f(a_k, b_k) - m_{p_k} g(\circ, 1) + m_{p_k} g(\circ, 1) - m_\infty g(\circ, 1) + m_\infty g(\circ, 1) - m_\infty f(a_k, b_k)| \\ & \leq |m_{p_k} f_k(\circ, 1) - m_{p_k} g(\circ, 1)| + |m_{p_k} g(\circ, 1) - m_\infty g(\circ, 1)| + \\ & |m_\infty g(\circ, 1) - m_\infty f_k(\circ, 1)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

لذا $|m_{p_k} f(a_k, b_k) - m_\infty f(a_k, b_k)| < \epsilon$ که این در تناقض با رابطه‌ی (۵۰.۲) است پس فرض خلف باطل و یکنواختی حد ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۳.۵.۲. فرض کنیم $f \in C([0, 1])$. آنگاه $f^\infty = f_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ که در آن f_∞ یک $C([0, 1])$ -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی است.

برهان. طبق تعریف داریم

$$f_p(x) = \sup_{a < x} \inf_{b > x} m_p(a, b) \quad \text{و} \quad f^p(x) = \inf_{b > x} \sup_{a < x} m_p(a, b).$$

با حدگیری از روابط فوق و طبق لم (۲.۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} f_p(x) &= \sup_{a < x} \inf_{b > x} \lim_{p \rightarrow \infty} m_p(a, b) \\ &= \sup_{a < x} \inf_{b > x} m_\infty(a, b) = f_\infty. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} f^p(x) &= \inf_{b > x} \sup_{a < x} \lim_{p \rightarrow \infty} m_p(a, b) \\ &= \inf_{b > x} \sup_{a < x} m_\infty(a, b) = f^\infty. \end{aligned}$$

طبق قضیه‌ی (۱.۵.۲) از اینکه $f^p = f_p$ داریم

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f^p(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p(x) \implies f^\infty = f_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p(x).$$

$\square$

۶.۲ یک ویژگی مینیمم کنندهی f_∞

ابتدا ملاحظه‌ی زیر را که در آینده به کار می‌آید بیان می‌نمائیم:

تذکر ۱.۶.۲. اگر $f \in C([0, 1])$ و $0 \leq a < x < b \leq 1$ آنگاه

$$\min\{m_\infty(a, x), m_\infty(x, b)\} \leq m_\infty(a, b) \leq \max\{m_\infty(a, x), m_\infty(x, b)\}. \quad (۵۵.۲)$$

قضیه ۲.۶.۲. فرض کنیم $f \in C([0, 1])$ در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند

$$(۱) \text{ برای هر } x \in \mathcal{F}_\infty \text{ داریم } f(x) = f_\infty(x).$$

(۲) اگر $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_\infty$ و $\alpha < \beta$ ، آنگاه f^∞ یک $-C([\alpha, \beta])$ -بهترین تقریب طبیعی برای f توسط توابع صعودی است.

(۳) f^∞ در هر مولفه‌ی همبندی از $\mathcal{F}_\infty \setminus (0, 1)$ ثابت است.

برهان. (۱) برای هر $x \in (0, 1)$ داریم

$$\inf_{b>x} m_\infty(x, b) \leq f(x) \leq \sup_{a<x} m_\infty(a, x).$$

هم چنین داریم

$$f_\infty(x) = \sup_{a<x} \inf_{b>x} m_\infty(a, b) \geq \inf_{b>x} m_\infty(x, b)$$

$$f^\infty(x) = \inf_{b>x} \sup_{a<x} m_\infty(a, b) \leq \sup_{a<x} m_\infty(a, x).$$

از طرفی طبق قضیه‌ی (۱۴.۴.۲) و لم (۲.۵.۲) داریم

$$f_\infty \leq f^\infty.$$

پس

$$\inf_{b>x} m_\infty(x, b) \leq f_\infty(x) \leq f^\infty(x) \leq \sup_{a<x} m_\infty(a, x).$$

از آنجایی که $x \in \mathcal{F}_\infty$ طبق تعریف (۱۵.۴.۲) پس $m_\infty(a, x) \leq m_\infty(x, b)$ لذا داریم

$$\sup_{a<x} m_\infty(a, x) \leq m_\infty(x, b) \implies \sup_{a<x} m_\infty(a, x) \leq \inf_{b>x} m_\infty(x, b)$$

در نتیجه $\sup_{a<x} m_\infty(a, x) = \inf_{b>x} m_\infty(x, b)$ و از اینجا نتیجه می شود

$$f_\infty(x) = \sup_{a<x} m_\infty(a, x) = \inf_{b>x} m_\infty(x, b) \text{ و } f(x) = \sup_{a<x} m_\infty(a, x) = \inf_{b>x} m_\infty(x, b)$$

پس $f(x) = f_\infty(x)$ و حکم تمام می شود.

(۲) برای اثبات گزاره‌ی (۲) فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_\infty$ و $\alpha < \beta$ و $x \in (\alpha, \beta)$ باشد. نقاط

$a, b \in (0, 1)$ را طوری در نظر می گیریم که $a < x < b$ باشد. حال فرض کنیم $a < \alpha$

آنگاه از این که $\alpha \in \mathcal{F}_\infty$ رابطه‌ی (۵۵.۲) نتیجه می دهد که $m_\infty(a, b) \leq m_\infty(\alpha, b)$. بنابراین

$$\sup_{a<x} m_\infty(a, b) = \sup_{\alpha \leq a<x} m_\infty(a, b)$$

به همین ترتیب می توان نشان داد

$$\inf_{b>x} \sup_{a<x} m_\infty(a, b) =$$

$$\inf_{b>x} \sup_{\alpha \leq a<x} m_\infty(a, b) = \inf_{\beta \geq b>x} \sup_{\alpha \leq a<x} m_\infty(a, b).$$

بنابر این در واقع تحدید تابع f^∞ به فاصله‌ی $[\alpha, \beta]$ ، همان تابع f^∞ است که در فاصله‌ی $[\alpha, \beta]$ در نظر گرفته شده باشد. بنابراین طبق قضیه (۳.۵.۲) روی این فاصله نتیجه می‌شود که f_∞ یک $C([\alpha, \beta])$ -بهترین تقریب برای f توسط توابع صعودی است.

(۳) و اکنون گزاره‌ی (۳) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم I یک مولفه‌ی همبندی از $\mathcal{F}_\infty \setminus (0, 1)$ باشد. چون مجموعه‌ی $\mathcal{F}_\infty$ در $(0, 1)$ به طور نسبی بسته است، پس I باید بفرم یک فاصله‌ی باز مثل $I = (a_0, b_0)$ باشد؛ که در آن $0 \leq a_0 < b_0 \leq 1$. حال (با فرض خلف) فرض کنیم f^∞ روی (a_0, b_0) ثابت نباشد. بنابراین $m \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که f^∞ روی $[a_0 + 1/m, b_0 - 1/m]$ ثابت نیست. فرض کنیم $\{p_n\}$ دنباله‌ای باشد که هرگاه $n \rightarrow \infty$ آنگاه $p_n \rightarrow \infty$. چون f^{p_n} به تابع f^∞ همگراست، پس می‌توانیم فرض کنیم که f^{p_n} روی $[a_0 + 1/m, b_0 - 1/m]$ ثابت نیست. بنابر این برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha_n \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که نقطه‌ی انتهایی چپ از مجموعه‌ی $\{f^{p_n} \geq \alpha_n\}$ درون فاصله‌ی $[a_0 + 1/m, b_0 - 1/m]$ قرار می‌گیرد. این نقطه را x_n می‌نامیم. از قضیه (۱۲.۴.۲) برای هر $a \in [0, x_n)$ و هر $b \in (x_n, 1]$ داریم

$$\int_{x_n}^b \varphi_{p_n}(f - \alpha_n) dx \geq 0 \quad \text{و} \quad \int_a^{x_n} \varphi_{p_n}(f - \alpha_n) dx \leq 0.$$

نامساوی قبل و تساوی (۴۸.۲) ایجاب می‌کند که برای هر $a \in [0, x_n)$ و هر $b \in (x_n, 1]$ داشته باشیم

$$m_{p_n}(a, x_n) \leq \alpha_n \leq m_{p_n}(x_n, b).$$

در نتیجه $x_n \in \mathcal{F}_{p_n}$. فرض کنیم x نقطه‌ی حدی دنباله‌ی x_n باشد با استفاده از لم (۲.۵.۲) و پیوستگی تابع m_p نتیجه می‌گیریم که $x \in \mathcal{F}_\infty \cap (a_0, b_0)$ است که این در تناقض با این واقعیت است که (a_0, b_0) را یک مولفه‌ی همبندی از $\mathcal{F}_\infty \setminus (0, 1)$ فرض کرده بودیم. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

□

فصل ۳

تقریب مینیماکس و الگوریتم رِمَز

پیشگفتار

با روش‌های ریاضی هر پدیده را می‌توان بر حسب توابع پایه (مانند توابع مثلثاتی یا چند جمله‌ای) تقریب زد. حال این‌که پدیده مورد نظر را با چه تابعی تقریب بزنیم به رفتار آن پدیده بستگی دارد که به کدام نوع از توابع پایه نزدیک‌تر است. سوالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که هدف از تقریب یک تابع توسط یک چند جمله‌ای چیست؟ پاسخ این‌که اینتگرال‌گیری و مشتق‌گیری توابع چند جمله‌ای از سایر توابع ساده‌تر است و همچنین کامپیوتر آنها را به‌طور دقیق‌تر ارزیابی و مقدار دهی می‌کند و عملیات مورد نظر را ساده‌تر انجام می‌دهد.

مسأله‌ی بهترین تقریب در مجموعه‌ی چند جمله‌ای‌ها از دیدگاه‌های متفاوتی بررسی شده است. ساده‌ترین حالت تقریب با چند جمله‌ای‌ها تعیین خط مماس برای یک تابع مشتق‌پذیر در نقطه‌ای مانند x_0 است. در واقع خط مماس در نقطه‌ی x_0 ساده‌ترین چند جمله‌ای از درجه‌ی ۱ است که تابع f را در نزدیکی x_0 به خوبی تقریب می‌زند.

۱.۳ تعاریف اولیه

مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی پیوسته روی فاصله‌ی بسته $[a, b]$ را با نماد $C([a, b])$ نمایش می‌دهیم و به هر $f \in C([a, b])$ نرم سوپریم آن یعنی $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ را مربوط می‌کنیم که نرم یکنواخت یا نرم چبیشف نام دارد.

تعریف ۱.۱.۳. تابع $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ که $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی و x متغیری حقیقی است، یک چند جمله‌ای نام دارد. اگر $a_n \neq 0$ آنگاه p یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n است. فضای تمام چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی n را با P_n نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ آنگاه $p \in P_n$.

فرض کنیم $Y = P_n$ لذا به‌عنوان زیرفضایی از $C([a, b])$ باشد. در این صورت P_n زیر فضایی متناهی‌البعد از فضای $C([a, b])$ با بعد دقیقاً $n + 1$ است که $P_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ است و متناهی‌البعد بودن فضای P_n نقش مهمی در مسأله‌ی تقریب چبیشف ایفا می‌کند.

تعریف ۲.۱.۳. تابع اینتگرال‌پذیر $w(x)$ را روی فاصله‌ی $[a, b]$ وزن‌دار می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $w(x) \geq 0$ و روی هر زیر فاصله از $[a, b]$ داشته باشیم $w(x) \neq 0$.

تعریف ۳.۱.۳. به چند جمله‌ای‌هایی مانند $p_n(x)$ که روی $[a, b]$ تعریف می‌شوند و در تساوی زیر صدق می‌کنند، چند جمله‌ای‌های متعامد می‌گوییم

$$\int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = \delta_{mn}$$

که در آن $m \neq n$ و $w(x)$ تابع وزن‌دار و δ_{mn} همان دلتای کرونیکر است.

دسته ای از چند جمله ای های متعامد، چند جمله ای های چبیشف نوع اول هستند که به صورت زیر تعریف می شوند.

تعریف ۴.۱.۳. چند جمله ای چبیشف نوع اول یک چند جمله ای از درجه ی n بر فاصله ی $[0, 1]$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad n = 0, 1, \dots$$

صفرهای $T_n(x)$ عبارتند از

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0 \rightarrow n \arccos x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

پس برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ ریشه ها به صورت $x_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ نوشته می شوند که در فاصله ی $[-1, 1]$ قرار می گیرند و متمایزند.

با توجه به این که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ و $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

تعدادی از چند جمله ای های چبیشف نوع اول عبارتند از

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

یکی از ویژگی های چند جمله ای چبیشف نوع اول این است که در رابطه ی بازگشتی زیر صدق می کند

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1$$

برای اثبات رابطه ی فوق از روابط زیر استفاده می کنیم

$$\begin{cases} \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \end{cases}$$

از مجموع دو رابطه ی فوق داریم

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta.$$

با فرض $\theta = \arccos x$ داریم $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ حال برای $n \geq 1$ داریم

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta = 2xT_n(x).$$

لذا رابطه ی زیر برقرار است

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

اگر $T_n(x)$ چند جمله ای چبیشف نوع اول از درجه ی n باشد، T' همان مشتق T چند جمله ای از درجه ی

$n-1$ است. با مشتق گیری از رابطه ی $T_n(x) = \cos n\theta$ نسبت به x داریم

$$\frac{1}{n} T'_n(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

این چند جمله ای را چند جمله ای چبیشف نوع دوم می نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$U_n(\cos \theta) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

لم ۵.۱.۳. فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد باشد، در این صورت تمام نرم‌ها روی V معادلند. یعنی اگر $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_1$ نرم‌هایی روی V باشند، آنگاه ثابت‌هایی مثل $0 < A, B < \infty$ موجودند به طوری که برای تمام $x \in V$ داریم

$$A\|x\| \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|$$

برهان. فرض کنیم V فضایی n -بعدی باشد و $\|\cdot\|$ نرمی روی V و $e_1, \dots, e_n$ پایه‌ای برای V باشد. برای هر $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in V$ نرمی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|_1 := \sum_{i=1}^n |a_i| = \|(a_i)_{i=1}^n\|_1.$$

اکنون نشان می‌دهیم دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|$ معادلند. نشان دادن یک طرف نامساوی ساده است. توجه داریم که

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|e_i\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right) \sum_{i=1}^n |a_i| = B \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|_1$$

برای نشان دادن طرف دیگر نامساوی ابتدا یک تناظر بین $\mathbb{R}^n$ و V برقرار می‌کنیم. واضح است نگاشت $(a_i)_{i=1}^n \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i e_i$ یک به یک و پوشاست و به علاوه این تناظر یک طول‌پایی بین $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ و $(V, \|\cdot\|_1)$ است. حال تابع $x \rightarrow \|x\|$ روی فضای $(V, \|\cdot\|_1)$ پیوسته است زیرا با فرض $\delta = \frac{\epsilon}{B}$ برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه داریم

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \leq B \|x - y\|_1 \quad \forall x, y \in V$$

بنابراین تابع پیوسته‌ی $\|\cdot\|$ روی مجموعه‌ی فشرده‌ی $S = \{x \in V : \|x\|_1 = 1\}$ مقدار مینیم خود را اخذ می‌کند. به ویژه $0 < A$ طوری موجود است که $\|x\| \geq A$ هرگاه $\|x\|_1 = 1$. اکنون نامساوی دیگر از همگنی نرم حاصل می‌شود

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq A \implies \|x\| \geq A \|x\|_1$$

و به این ترتیب $A\|x\|_1 \leq \|x\| \leq B\|x\|_1$ معادل بودن دو نرم را نشان می‌دهد. $\square$

نتیجه ۶.۱.۳. فرض کنیم Y فضایی نرم‌دار متناهی البعد باشد و $M > 0$. در این صورت هر گوی بسته $\{y \in Y : \|y\| \leq M\}$ فشرده است.

برهان. رجوع شود به [۱] صفحه‌ی ۴. $\square$

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنیم Y زیر فضایی متناهی البعد از فضای نرم‌دار خطی X باشد و $x \in X - Y$. آنگاه $y^* \in Y$ (که لزوماً یکتا نیست) موجود است به طوری که

$$\|x - y^*\| = \min_{y \in Y} \|x - y\|$$

یعنی بهترین تقریب برای x از اعضای Y موجود است.

برهان. در ابتدا توجه داریم چون $0 \in Y$ نزدیک‌ترین نقطه مثل y^* (در صورت وجود) در رابطه‌ی $\|x - y^*\| \leq \|x\| = \|x - 0\|$ صدق خواهد کرد. بنابراین کافی است y^* را در میان $y \in Y$ بیابیم

که در رابطه‌ی $\|x - y\| \leq \|x\|$ صدق کند.

طبق نامساوی مثلثی داریم

$$\|x - y\| \leq \|x\| \implies \|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \leq 2\|x\|.$$

بنابراین می‌توانیم y ‌های بدست آمده را در مجموعه‌ی فشردگی زیر محدود کنیم

$$K = \{y \in Y : \|y\| \leq 2\|x\|\}.$$

در انتها تنها کافیست توجه کنیم که تابع $f(y) = \|x - y\|$ با فرض $\delta = \epsilon$ پیوسته است زیرا

$$|f(y) - f(z)| = |\|x - y\| - \|x - z\|| \leq \|y - z\| < \epsilon$$

و حال تابع پیوسته f روی مجموعه‌ی فشردگی K مینیم خود یعنی $y^* \in K$ را اخذ می‌کند و داریم

$$\min_{y \in Y} f(y) = f(y^*) \text{ یعنی } \|x - y^*\| = \min_{y \in Y} \|x - y\|.$$

نتیجه ۸.۱.۳. برای هر تابع $f \in C([0, 1])$ و هر عدد مثبت n ، چند جمله‌ای $p_n^* \in P_n$ که لزوماً یکتا نیست موجود است به طوری که

$$\|f - p_n^*\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|.$$

برهان. از آنجایی که P_n زیرفضایی متناهی البعد با بعد دقیقاً $n + 1$ از فضای خطی نرم‌دار $C([0, 1])$ است طبق قضیه‌ی قبل نتیجه واضح است. $\square$

این نتیجه نمی‌گوید که p_n^* یک چند جمله‌ای از درجه‌ی دقیقاً n است بلکه می‌گوید یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر n است.

برای مثال بهترین تقریب برای تابع $f(x) = x$ توسط یک چند جمله‌ای از درجه‌ی حداکثر ۳ البته همان $p(x) = x$ است و مثلاً بهترین تقریب برای تابع $f(x) = |x|$ تابع ثابت $p(x) = \frac{1}{2}$ است.

۲.۳. مشخصه سازی بهترین تقریب

ما می‌خواهیم مسأله‌ی بهترین تقریب را برای تابع f داده شده در مجموعه‌ی $C([a, b])$ توسط عناصر P_n در نظر بگیریم. تا اینجا می‌دانیم که این مسأله حداقل یک جواب دارد که ما آن را p_n^* می‌نامیم. قرار می‌دهیم

$$E_n(f) = \min_{p \in P_n} \|f - p\| = \|f - p_n^*\|.$$

چون برای هر n داریم $P_n \subset P_{n+1}$ پس برای هر n ، $E_n(f) \geq E_{n+1}(f)$ ، در این صورت می‌توان نشان داد $E_n(f) \rightarrow 0$.

قضیه ۱.۲.۳. (قضیه تقریب وایرستراس) فرض کنیم f تابعی پیوسته روی فاصله‌ی $[a, b]$ باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$ چند جمله‌ای $p(x)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in [a, b]$ خواهیم داشت

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

□

برهان. رجوع شود به [۱۰].

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنیم f تابعی پیوسته روی فاصله‌ی $[a, b]$ باشد که لزوماً $f \notin P_n$ و $p = p_n^*$ بهترین تقریب f در P_n باشد آنگاه حداقل دو نقطه متمایز $x_1, x_2 \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_1) - p(x_1) = -(f(x_2) - p(x_2)) = \|f - p\|$$

یعنی $f - p$ هر دو مقدار $\pm \|f - p\|$ را اخذ می‌کند.

برهان. قرار می‌دهیم $E = E_n(f) = \|f - p\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$ اگر حکم قضیه نادرست باشد آنگاه باز هم می‌توان فرض کرد برای یک x_1 رابطه‌ی $f(x_1) - p(x_1) = E$ برقرار باشد. داریم $e = \min_{a \leq x \leq b} (f(x) - p(x)) > -E$ پس $E + e \neq 0$ و هم چنین $q = p + \frac{(E+e)}{2}$ عضوی از P_n است که $q \neq p$. ادعا می‌کنیم q تقریب بهتری نسبت به p برای f است.

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| = E &\geq f(x) - p(x) \geq e = \min_{a \leq x \leq b} (f(x) - p(x)) \\ E - \left(\frac{E+e}{2}\right) &\geq f(x) - p(x) - \left(\frac{E+e}{2}\right) \geq e - \left(\frac{E+e}{2}\right) \\ \left(\frac{E-e}{2}\right) &\geq f(x) - q(x) \geq -\left(\frac{E-e}{2}\right) \implies |f(x) - q(x)| \leq \left(\frac{E-e}{2}\right). \end{aligned}$$

با ماکسیم گیری روی x (برای $a \leq x \leq b$) و طبق تعریف نرم نتیجه می‌شود

$$\|f - q\| \leq \left(\frac{E-e}{2}\right) < E = \|f - p\|$$

□

که در تناقض با بهترین تقریب بودن p است لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنیم تابع g در $C([a, b])$ داده شده باشد. گوییم $x \in [a, b]$ یک نقطه (+) برای g (به‌طور مشابه نقطه (-) برای g) است هرگاه $g(x) = \|g\|$ (به‌طور مشابه هرگاه $g(x) = -\|g\|$).

تعریف ۴.۲.۳. مجموعه‌ای از نقاط مجزا $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ مجموعه‌ی متناوب برای g نامیده می‌شود اگر x_i ها به طور متناوب نقطه (+) و نقطه (-) باشند. یعنی اگر $|g(x_0)| = \|g\|$ آنگاه برای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $g(x_i) = -g(x_{i-1})$.

با استفاده از این علائم ما قادر به مشخصه سازی چند جمله‌ای بهترین تقریب خواهیم بود.

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنیم $f \in C([a, b])$ که لزوماً $f \notin P_n$ و $p = p_n^*$ بهترین تقریب f در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های P_n باشد. آنگاه مجموعه‌ای متناوب برای تابع $f - p$ شامل حداقل $n + 2$ نقطه موجود است.

برهان. اگر $f \in P_n$ آنگاه $\|f - p\| = 0$ در این صورت واضح است که $\|f - p\|$ را می‌توان به طور متناوب مثبت و منفی فرض کرد. پس فرض کنیم $f \notin P_n$ و بنابراین $E = E_n(f) = \|f - p\| > 0$.

حال فاصله‌ی $[a, b]$ را به صورت $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ به فاصله‌های به اندازه‌ی کافی کوچک افراز می‌کنیم به طوری که برای تابع پیوسته یکنواخت $\varphi = f - p$ داشته باشیم

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{E}{4} \quad \forall x, y \in [t_i, t_{i+1}].$$

اگر $[t_i, t_{i+1}]$ شامل یک نقطه $(+)$ برای $\varphi = f - p$ باشد آنگاه φ روی تمام فاصله‌ی $[t_i, t_{i+1}]$ مثبت است. زیرا اگر x نقطه $(+)$ باشد طبق تعریف داریم $\varphi(x) = \|\varphi\| = \|f - p\| = E$ پس برای $x, y \in [t_i, t_{i+1}]$ داریم $|E - \varphi(y)| < \frac{E}{4}$ لذا

$$-\frac{E}{4} < E - \varphi(y) < \frac{E}{4} \implies -\frac{3E}{4} < -\varphi(y) < -\frac{E}{4} \implies \varphi(y) > \frac{E}{4} > 0.$$

به طور مشابه اگر $[t_i, t_{i+1}]$ شامل یک نقطه $(-)$ برای φ باشد آنگاه φ روی تمام $[t_i, t_{i+1}]$ منفی است. بنابراین هیچ فاصله‌ی $[t_i, t_{i+1}]$ نمی‌تواند هم شامل نقاط $(+)$ و هم نقاط $(-)$ باشد. زیرا در غیر این صورت اگر x یک نقطه $(+)$ و y نقطه‌ای $(-)$ روی فاصله‌ی $[t_i, t_{i+1}]$ باشند داریم $\varphi(x) = \|\varphi\| = E$ و $\varphi(y) = \|\varphi\| = -E$ پس $\varphi(x) - \varphi(y) = 2E$ و با توجه به شرط $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{E}{4}$ نتیجه می‌شود که $E < 0$ و این تناقض است.

می‌گوییم $[t_i, t_{i+1}]$ یک فاصله‌ی $(+)$ (به طور مشابه فاصله‌ی $(-)$) است اگر شامل یک نقطه‌ی $(+)$ (به طور مشابه نقطه‌ی $(-)$) برای $\varphi = f - p$ باشد. توجه داریم که هیچ فاصله‌ی $(+)$ و فاصله‌ی $(-)$ نمی‌توانند تداخل داشته باشند؛ به عبارتی فاصله‌ی $(+)$ و فاصله‌ی $(-)$ باید اکیدا مجزا باشند (توسط برخی فاصله‌هایی که شامل صفرهای φ هستند). حال این فاصله‌ها را از چپ به راست برچسب می‌دهیم و بدون ایجاد خللی در فرض فاصله‌ی علامتدار اولیه را $(+)$ فرض می‌کنیم. فرض می‌کنیم فاصله‌ها در برچسب گذاری مجدد ما به صورت زیر باشند

$$\begin{array}{ll} I_1, I_2, \dots, I_{k_1} & \text{فاصله‌های } (+) \\ I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \dots, I_{k_2} & \text{فاصله‌های } (-) \\ \vdots & \vdots \\ I_{k_{m-1}+1}, I_{k_{m-1}+2}, \dots, I_{k_m} & \text{فاصله‌ی } (-)^{m-1} \end{array}$$

که آخرین فاصله‌ی $(+)$ قبل از رسیدن به اولین فاصله‌ی $(-)$ I_{k_1+1} است. هم‌چنین فرض کنیم S نشان دهنده‌ی اجتماع تمام فاصله‌های علامت‌دار $[t_i, t_{i+1}]$ باشد، یعنی $S = \bigcup_{j=1}^m I_{k_j}$ و N نشان دهنده‌ی اجتماع تمام فاصله‌های بدون علامت $[t_i, t_{i+1}]$ باشد. بنابراین S, N مجموعه‌هایی فشرده‌اند که $S \cup N = [a, b]$. (توجه داریم که S و N کاملاً مجزا نیستند بلکه حداقل همپوش نیستند و درونشان مجزاست.)

اکنون هدف این است که نشان دهیم $m \geq n + 2$ (با وجودی که تا به حال طبق قضیه‌ی (۲.۲.۳) فقط می‌دانیم $m \geq 2$). حال (به فرض خلف) فرض کنیم $m < n + 2$ خواهیم دید به تناقض می‌رسیم. چون هر فاصله‌ی $(+)$ اکیدا مجزا از هر فاصله‌ی $(-)$ است می‌توانیم نقاط $z_1, z_2, \dots, z_{m-1} \in N$ را

طوری بیابیم که

$$\begin{aligned} \max I_{k_1} &< z_1 < \min I_{k_1+1} \\ \max I_{k_2} &< z_2 < \min I_{k_2+1} \\ &\vdots \\ \max I_{k_{m-1}} &< z_{m-1} < \min I_{k_{m-1}+1} \end{aligned}$$

حال چند جمله‌ای زیر را می‌سازیم

$$q(x) = (z_1 - x)(z_2 - x) \cdots (z_{m-1} - x)$$

تابع q از درجه‌ی حداکثر $m-1$ است و چون $m-1 \leq n$ پس $q(x) \in P_n$. قصد داریم نشان دهیم برای اسکالر λ که به طور مناسب انتخاب شود تابع $p + \lambda q \in P_n$ تقریب بهتری برای تابع f نسبت به p است. در ابتدا ادعا می‌کنیم q و $f-p$ علامت‌های مشابه‌ای دارند. واضح است که q در هیچ یک از فاصله‌های $(\pm)$ صفر نمی‌شود (زیرا صفرهای q دقیقاً درون فاصله‌های بی‌علامت اند). بنابراین روی این فاصله‌ها علامت q ثابت است. حال روی فاصله‌های $I_1, I_2, \dots, I_{k_1}$ تابع $q > 0$ است زیرا روی هر یک از این فاصله‌ها $(z_j - x) > 0$ و روی $I_{k_1+1}, \dots, I_{k_r}$ داریم $q < 0$ زیرا اینجا $(z_1 - x) < 0$ است در حالی که برای $j > 1$ داریم $(z_j - x) > 0$. حال λ را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $e = \max_{x \in N} |f(x) - p(x)|$ که N اجتماع تمام زیر فاصله‌های $[t_i, t_{i+1}]$ است که نه فاصله $(+)$ و نه فاصله $(-)$ اند. چون داریم

$$E = \|f - p\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \geq \max_{x \in N} |f(x) - p(x)| = e$$

بنابراین $e < E$. حال $\lambda > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\lambda \|q\| < \min\{E - e, \frac{E}{4}\}$. ادعا می‌کنیم برای این λ تابع $p + \lambda q$ تقریبی بهتر برای f نسبت به p است. (حالت اول) اگر $x \in N$ ساده است. زیرا در این صورت داریم

$$|f(x) - (p(x) + \lambda q(x))| \leq |f(x) - p(x)| + \lambda |q(x)| \leq e + \lambda \|q\| < E$$

(حالت دوم) اگر $x \notin N$ آنگاه x در یک فاصله $(+)$ یا یک فاصله $(-)$ است. به ویژه می‌دانیم $|f(x) - p(x)| > \frac{E}{4} > \lambda \|q\|$ و اینکه $f(x) - p(x)$ و $\lambda q(x)$ هم علامت اند. بنابراین

$$|f(x) - (p(x) + \lambda q(x))| = |f(x) - p(x)| - \lambda |q(x)| \leq E - \lambda \min_{x \in S} |q(x)| < E$$

چون q روی مجموعه‌ی S ناصفر است نامساوی فوق برقرار است. در این حالت هم به تناقض می‌رسیم لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

تذکر ۶.۲.۳. (۱) باید توجه کرد که عدد $n+2$ در اینجا دقیقاً $(1 + \dim P_n)$ است.

(۲) هم چنین توجه داریم که اگر $f - p_n^*$ به طور متناوب $n+2$ بار تغییر علامت دهد آنگاه $f - p_n^*$ باید حداقل $n+1$ صفر داشته باشد. بنابراین p_n^* دقیقاً در $n+1$ نقطه با f سازگار یا متحد است.

حال قصد داریم یکتایی بهترین تقریب چند جمله ای را ثابت کنیم.

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنیم تابع $f \in C[a, b]$ و خارج از P_n باشد. آنگاه بهترین تقریب تابع f در مجموعه ای چند جمله ای ها یعنی P_n یکتاست.

برهان. فرض کنیم p و q بهترین تقریب های f در P_n باشند و در رابطه ی زیر صدق کنند

$$\|f - p\| = \|f - q\| = E_n(f) = E$$

آنگاه خواهیم دید میانگین آنها $r = \frac{(p+q)}{2} \in P_n$ تقریب بهتری برای f است. زیرا داریم $f - r = \frac{(f-p)}{2} + \frac{(f-q)}{2}$ لذا $\|f - r\| \leq E$. طبق قضیه ی (۵.۲.۳) تابع $f - r$ مجموعه ای متناوب شامل $n + 2$ نقطه مانند $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ دارد. بنابراین برای هر i داریم

$$(f - p)(x_i) + (f - q)(x_i) = \pm 2E \quad (\text{متناوب})$$

در حالی که

$$-E \leq (f - p)(x_i), (f - q)(x_i) \leq E$$

و این یعنی برای هر i که $0 \leq i \leq n + 1$ داریم

$$(f - p)(x_i) = (f - q)(x_i) = \pm E \quad (\text{متناوب})$$

یعنی $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ مجموعه ای متناوب برای توابع $f - p$ و $f - q$ هستند. به ویژه چند جمله ای $q - p = (f - p) - (f - q)$ دارای $n + 2$ تا صفر است. چون $q - p \in P_n$ باید داشته باشیم $q - p = 0$. $\square$

قضیه ۸.۲.۳. فرض کنیم $f \in C[a, b]$ و $p \in P_n$. اگر $f - p$ شامل مجموعه ای متناوب با $n + 2$ نقطه (یا بیشتر) باشد، آنگاه p یک چند جمله ای بهترین تقریب برای f در مجموعه ای چند جمله ای های P_n است.

برهان. فرض کنیم $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ مجموعه ای متناوب برای $f - p$ باشد و فرض کنیم $q \in P_n$ تقریب بهتری برای f نسبت به p باشد، یعنی $\|f - q\| < \|f - p\|$. پس باید داشته باشیم

$$|f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\| > \|f - q\| = |f(x_i) - q(x_i)| \quad \forall i = 0, 1, \dots, n + 1$$

حال نامساوی $|a| > |b|$ نتیجه می دهد که a و $a - b$ باید هم علامت باشند. بنابراین $q - p = (f - p) - (f - q)$ باید هم علامت باشند و چون طبق فرض $f - p$ ، $n + 2$ بار به طور متناوب تغییر علامت می دهد پس $q - p$ نیز چنین است. لذا $q - p$ باید حداقل $n + 1$ صفر داشته باشد اما چون $q - p \in P_n$ باید $q = p$. بنابراین p بهترین تقریب f خارج از P_n است. $\square$

هنگامی که مجموعه ای برای $f - p_n^*$ با حداقل $n + 2$ نقطه متناوب در نظر گرفته می شود در واقع ممکن است بیشتر از $n + 2$ نقطه داشته باشد، بنابراین مجموعه های متناوب لزوماً یکتا نیستند. برای مثال تابع $f(x) = \sin x$ را روی $[-\pi, \pi]$ در نظر می گیریم، چون در ۸ نقطه f بین ± 1 متناوب است، نتیجه می گیریم $p^* = 0$ و تعداد $16 = 4 \times 4$ مجموعه ای متناوب متمایز شامل دقیقاً دو نقطه موجود است و علاوه بر این توجه داریم که ما دقیقاً داریم $p_1^* = \dots = p_4^* = 0$ اما $p_5^* \neq 0$. این بخش را با بیان مثالی به انتها می رسانیم.

مثال ۹.۲.۳. نشان دهید $p(x) = x - \frac{1}{8}$ بهترین تقریب خطی برای $f(x) = x^2$ روی فاصله‌ی $[0, 1]$ است.

برهان. تابع خطا $E(x) = f(x) - p(x)$ را تشکیل می‌دهیم و خواهیم داشت $E(x) = x^2 - x + \frac{1}{8}$. برای این تابع داریم $\|f - p\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)| = \frac{1}{8}$ همچنین مقدار تابع در نقاط $0, \frac{1}{4}, 1$ عبارت است از

$$(f - p)(0) = \frac{1}{8} = \|f - p\|$$

$$(f - p)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8} = -\|f - p\|$$

$$(f - p)(1) = \frac{1}{8} = \|f - p\|$$

و این یعنی تابع خطا روی فاصله‌ی مورد نظر شامل مجموعه‌ای متناوب با ۳ نقطه است. لذا طبق قضیه‌ی پیشین $p(x) = x - \frac{1}{8}$ بهترین تقریب برای تابع f است. $\square$

۳.۳ یافتن بهترین تقریب توابع در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها با روشی عددی

در این بخش به بیان الگوریتمی موسوم به الگوریتم ریمز می‌پردازیم و طی آن به بهترین تقریب توابع در مجموعه‌ی چند جمله‌ای‌ها دست می‌یابیم. قبل از بیان الگوریتم قضایا و تعاریف مورد نیازمان را مطرح نموده و بعد الگوریتم را بیان می‌کنیم و سپس مثالی ارائه می‌دهیم. فرض کنیم X فضای نرم‌دار خطی با عناصر f, g روی میدان اعداد حقیقی (یا مختلط) و V زیر فضای خطی n -بعدی از X باشد. تقریب خطی برای عناصر X به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۳. با مفروضات بالا برای هر $f \in X$ اگر عضوی مانند $g \in V$ موجود باشد به طوری که برای هر $h \in V$ داشته باشیم

$$\|g - f\| \leq \|h - f\|$$

آنگاه گوییم تابع g تقریبی خطی برای تابع f است.

برای تابع خطی f قرارداد می‌کنیم

$$\varrho_V(f) = \inf_{h \in V} \|h - f\|$$

اگر تابع f در مجموعه‌ی چند جمله‌ای‌ها تقریب زده شود به جای علامت $\varrho_V(f)$ از همان $E_n(f)$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۳. (قضیه هان-باناخ^۱) فرض کنیم M زیرفضایی از فضای خطی نرم‌دار X باشد و f_0 تابعی خطی روی M باشد به طوری که $\|f_0\| < \infty$. آنگاه تابع خطی F روی X موجود است به طوری که

$$F|_M = f_0, \quad \|F\| = \|f_0\|$$

□

برهان. رجوع شود به [۴].

قضیه هان-باناخ وجود تابع خطی F روی فضای X را تضمین می‌کند لذا قضیه‌ی بعد با توجه به قضیه هان-باناخ برقرار می‌شود.

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و V زیرفضایی از آن باشد و $\varrho_V(f) = \inf_{h \in V} \|h - f\|$. آنگاه برای هر $f \in X$ تابع خطی L روی X با ویژگی‌های

$$L(h) = 0 \quad \forall h \in V \quad (۱.۳)$$

و

$$\|L\| = \sup_{h \in X, \|h\|=1} |L(h)| \leq 1 \quad (۲.۳)$$

موجود است به طوری که $\varrho_V(f) = L(f)$.

برهان. فرض کنیم $f \in X$ و S زیر فضای تولید شده توسط V و f و هم‌چنین $d(f, V) = d > 0$ باشد. تابع خطی φ را برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $h \in V$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi(\alpha f + h) = \alpha d.$$

واضح است که $\varphi(h) = 0$ و $\varphi(f) = d$. طبق تعریف نرم می‌دانیم

$$\|\varphi\| = \sup \frac{|\varphi(\alpha f + d)|}{\|\alpha f + d\|} = \sup \frac{|\alpha|d}{|\alpha| \|f + \frac{h}{\alpha}\|} = \sup \frac{d}{\|f + \frac{h}{\alpha}\|}$$

حال اگر قرار دهیم $h' = \frac{h}{\alpha}$ از این‌که $d = d(f, V) = \inf_{h \in V} \|f - h\|$ نتیجه می‌گیریم برای هر $h \in V$ ، $d \leq \|f - h'\|$ از جمله برای h' داریم $d \leq \|f + h'\|$. با قرار دادن در نامساوی فوق داریم $\|\varphi\| \leq 1$ و حالا از قضیه هان-باناخ می‌توانیم φ را به یک تابع خطی مانند L روی X توسعه دهیم. در این صورت با فرض $\alpha = 0$ و $s = h \in S$ داریم

$$L(h) = \varphi(h) = 0$$

و با فرض $\alpha = 1$ و $h = 0$ داریم

$$\varphi(f) = d = \inf_{h \in V} \|f - h\| = \varrho_V(f)$$

□

هم‌چنین $\|L\| = \|\varphi\| \leq 1$.

تعریف ۴.۳.۳. به مجموعه‌ی مستقل خطی از توابع مثل $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ (که φ_i ها توابعی روی X اند) یک مجموعه‌ی چبیشف می‌گوییم هرگاه هر ترکیب خطی از φ_i مانند $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ که $a_i \in \mathbb{R}$ دارای حداکثر $n - 1$ ریشه باشد.

تعریف ۵.۳.۳. فضای تولید شده توسط مجموعه‌ی چبیشف $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ را فضای هار^۲ می‌نامیم

$$\text{فضای هار} := \{\phi : \phi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, a_i \in \mathbb{R}\}$$

اگر در یک مجموعه‌ی چبیشف یکی از φ_i ها تابع ثابت $\varphi(x) = 1$ باشد این مجموعه را مجموعه‌ی چبیشف با عنصر واحد می‌گوییم.

فرض کنیم V یک زیر فضای n -بعدی در $C[0, 1]$ باشد که در شرط هار صدق می‌کند و $\{h_i\}_{i=1}^n$ پایه‌ای برای V باشد. طبق قضیه‌ی (۳.۳.۳) برای $f \in C[0, 1]$ یک تابع خطی روی V وجود دارد که در شرط (۱.۳) و (۲.۳) صدق می‌کند. حال $n+2$ نقطه‌ی متمایز x_i را انتخاب کرده و برای $\lambda_i \in \mathbb{R}$ و $\lambda_i \neq 0$ و $h \in V$ تابع خطی L را به صورت

$$L(h) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i h(x_i)$$

می‌سازیم و نرم این تابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|L\| \leq \sum_{i=0}^{n+1} |\lambda_i|$$

و قرار می‌دهیم

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i h_j(x_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

و

$$\sum_{i=0}^{n+1} |\lambda_i| = 1 \quad (4.3)$$

بنابراین $|L(f)| \leq \varrho_V(f)$. پس به هر تابع خطی L یک $h \in V$ که در خاصیت زیر صدق کند، مربوط می‌شود

$$h(x_i) + \lambda \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = f(x_i) \quad i = 0, 2, \dots, n+1 \quad (5.3)$$

قضیه ۶.۳.۳. تابع h_0 بهترین تقریب تابع f در V است اگر و تنها اگر برای هر $h \in V$ نامساوی $\min_{x \in D} (f(x) - h_0(x))h(x) \leq 0$ برقرار باشد. در این رابطه D مجموعه‌ی نقاط اکسترم تابع خطی تقریب f یعنی $f - h_0$ است.

□

برهان. رجوع شود به [۹] قضیه‌ی ۱۸.

قضیه ۷.۳.۳. فرض کنیم تابع h وابسته به تابع خطی L به صورت زیر تعریف شود

$$h(x_i) + \lambda \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = f(x_i) \quad i = 0, 2, \dots, n+1$$

که λ عددی حقیقی و $\lambda_i \in \mathbb{R}$ در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\sum_{i=0}^{n+1} |\lambda_i| = 1.$$

آنگاه تابع h روی مجموعه نقاط x_i ($i = 0, 2, \dots, n+1$) دقیقاً با بهترین تقریب تابع f در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها برابر است.

برهان. فرض کنیم تابع h بهترین تقریب تابع f در مجموعه‌ی فوق نباشد. با استفاده از قضیه‌ی (۶.۳.۳)

$$(f(x_i) - h(x_i))h_0(x_i) > 0 \implies \lambda \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} h_0(x_i) > 0.$$

قرار می‌دهیم $\tilde{h} = \lambda h_0$ در این صورت برای هر $i = 0, 2, \dots, n+1$ داریم

$$\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \tilde{h}(x_i) > 0 \implies \lambda_i \tilde{h}(x_i) > 0 \implies \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \tilde{h}(x_i) > 0.$$

که نتیجه می‌دهد $L(\tilde{h}) > 0$ و این یعنی $L(\tilde{h}) \neq 0$ که این با رابطه‌ی (۳.۳) در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

۱.۳.۳ الگوریتم رمز

الگوریتم رمز یک الگوریتم تکراری است که اولین تکرار با یک مجموعه شامل $n+2$ نقطه در فاصله‌ای داده شده، آغاز می‌شود. در هر تکرار دو گام محاسبه می‌شود: در گام اول ضرایب را به گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که تابع خطا در $n+2$ نقطه داده شده مقدارهایی برابر و علامت‌هایی متناوب داشته باشد. اگر با این مجموعه از نقاط به هدف نرسیدیم به گام دوم می‌رویم و مجموعه‌ای جدید از نقاط را که شرایط را برآورده کند، جستجو می‌کنیم. در پایان این الگوریتم مقدار تابع خطا در مجموعه‌ی نهایی که شامل $n+2$ نقطه است، قدر مطلق ماکسیمم خطای تقریب را نشان می‌دهد. حال به توضیح الگوریتم می‌پردازیم: کار را با مجموعه‌ی M شامل $n+2$ نقطه‌ی دو به دو متمایز $x_i^{(0)} \in [a, b]$ شروع می‌کنیم به طوری که صعودی مرتب شده باشند یعنی

$$a \leq x_0^{(0)} \leq x_1^{(0)} \leq \dots \leq x_{n+1}^{(0)} \leq b$$

متناظر با این نقاط تابع $h_0 \in V$ را طوری در نظر می‌گیریم که در شرط زیر صدق کند

$$h_0(x_i^{(0)}) + (-1)^i \lambda_0 = f(x_i^{(0)}) \quad i = 0, 1, \dots, n+1 \quad (۶.۳)$$

که در آن $\lambda_0 = L_0(f)$ تابعی خطی است که در روابط (۳.۳) و (۴.۳) صدق می‌کند و بنابراین

$$|L_0(f)| \leq \inf_{h \in V} \|h - f\|$$

با استفاده از قضیه‌ی (۷.۳.۳) نتیجه می‌شود که تابع h_0 بهترین تقریب تابع f روی مجموعه‌ی M است. اکنون اگر $\|h_0 - f\| = |L_0(f)|$ آنگاه h_0 بهترین تقریب تابع f در فاصله‌ی $[a, b]$ است و اگر $\|h_0 - f\| > |L_0(f)|$ آنگاه یک نقطه مانند $\xi \in [a, b]$ موجود است به طوری که $|h_0(\xi) - f(\xi)| > |L_0(f)|$.

هدف از الگوریتم رمز بدست آوردن مجموعه‌ای جدیدی از نقاط مانند M_1 از M است به طوری که مجدداً شامل $n+2$ نقطه باشد و تابع خطی $L_1(f)$ است به طوری که مقداری بزرگتر از $|L_0(f)|$

داشته باشد. برای نیل به هدف مزبور مجموعه‌ی $M_1 = \{x_i^{(1)}\}$ را با ویژگی‌های زیر تعریف می‌کنیم:
ابتدا برای سهولت قرار می‌دهیم $\varphi_0 = h_0 - f$ که تابع φ_0 در شرایط زیر صدق می‌کند

$$(1) \text{ برای } i = 0, 1, \dots, n+1 \text{ داریم } |\varphi_0(x_i^{(1)})| \leq |L_0(f)|$$

$$(2) \text{ برای حداقل یک عدد صحیح مانند } i = i_0 \text{ داریم } |\varphi_0(x_{i_0}^{(1)})| > |L_0(f)|$$

$$(3) \text{ برای } i = 0, 1, \dots, n+1 \text{ و ثابت } \xi \text{ که برابر با } \pm 1 \text{ است داریم}$$

$$\operatorname{sgn} \varphi_0(x_i^{(1)}) = \xi \operatorname{sgn} \varphi_0(x_i^{(0)})$$

قرار داد می‌کنیم زمانی که $\varphi = 0$ آنگاه $\operatorname{sgn} \varphi = 1$ حال اگر

$$L_0(\nu) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(0)} \nu(x_i^{(0)})$$

و

$$L_1(\nu) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} \nu(x_i^{(1)})$$

توابع خطی متناظر با مجموعه‌های M_0 و M_1 باشند آنگاه

$$\begin{aligned} L_1(f) &= \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} f(x_i^{(1)}) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} (h_0(x_i^{(1)}) - \varphi_0(x_i^{(1)})) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} h_0(x_i^{(1)}) - \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} \varphi_0(x_i^{(1)}) \\ &= - \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} |\varphi_0(x_i^{(1)})| \cdot \operatorname{sgn} \varphi_0(x_i^{(1)}) = - \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} |\varphi_0(x_i^{(1)})| \cdot \xi \operatorname{sgn} \varphi_0(x_i^{(0)}) \\ &= - \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} |\varphi_0(x_i^{(1)})| \cdot \xi \operatorname{sgn} (h_0(x_i^{(0)}) - f(x_i^{(0)})) = - \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} |\varphi_0(x_i^{(1)})| \cdot \xi \operatorname{sgn} L_0(f) \\ &> - \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} |L_0(f)| \cdot \xi \operatorname{sgn} L_0(f) = - \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} \xi L_0(f) = -\xi L_0(f) \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i^{(1)} = -\xi L_0(f) \\ &\implies |L_1(f)| > |L_0(f)|. \end{aligned}$$

حال با مجموعه‌ی M_1 آغاز می‌کنیم، بنابراین تابع $h_1 \in V$ وجود دارد به طوری که بهترین تقریب تابع f در مجموعه‌ی M_1 است. با ادامه‌ی این روند یک الگوریتم توصیف می‌شود که بعد از تعداد متناهی گام، دنباله‌ای از مجموعه‌های M_n و به ترتیب توابع خطی متناظرشان L_m تولید می‌شود که مقادیر $|L_m(f)|$ بطور یکنواخت صعودی هستند و همچنین دنباله‌ی توابع $h_m \in V$ به بهترین تقریب f در فضای V همگراست.

حال فرض کنیم فاصله‌ی $[a, b]$ داده شده باشد. قبلاً دیدیم چبیشف ثابت کرد که اگر p_n چندجمله‌ای تقریب از درجه‌ی n باشد آنگاه حداقل باید $(n+2)$ نقطه در این فاصله موجود باشند که تابع خطا مقدار ماکسیمم خود را اخذ کند به طوری که علامت‌ها متناوب باشند. برای $n = 3$ توسط تساوی‌های زیر داریم

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

$$F(x_i) - p_n(x_i) = (-1)^i E \quad i = 0, 1, \dots, n+1 \quad (۷.۳)$$

$$E = \pm \max_{a \leq x \leq b} |F(x) - p_n(x)|.$$

اکنون الگوریتم رمز را با $(n+2)$ نقطه‌ی دلخواه در فاصله‌ی داده شده آغاز می‌کنیم. هر تکرار دو گام دارد

در گام اول ضرایب را طوری محاسبه می‌کنیم که تابع خطا در $(n+2)$ نقطه‌ی داده شده مقدارهایی برابر و علامت‌هایی متناوب بگیرد

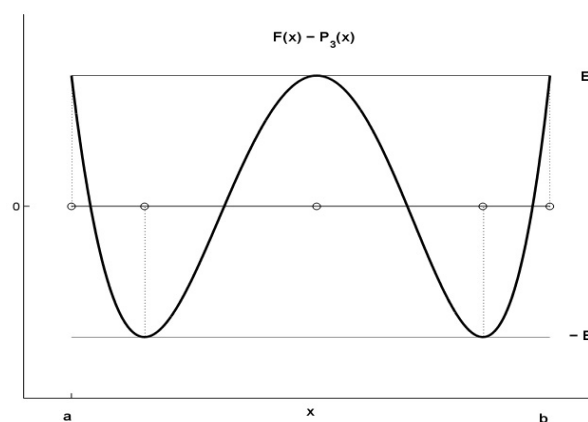
$$F(x_i) - p_n(x_i) = (-1)^i E \quad i = 0, 1, \dots, n+1 \quad (۸.۳)$$

$$F(x_i) - [c_0 + c_1(x_i - a) + c_2(x_i - a)^2 + \dots + c_n(x_i - a)^n] = (-1)^i E \quad (۹.۳)$$

برای $i = 0, 1, \dots, n+1$ قرار می‌دهیم $x_i - a = h_i$. در این صورت داریم

$$c_0 + c_1 h_i + \dots + c_n h_i^n + (-1)^i E = F(x_i) \quad (۱۰.۳)$$

رابطه‌ی (۱۰.۳) دستگاهی متشکل از $(n+2)$ معادله‌ی خطی با $(n+2)$ مجهول $\{c_0, c_1, \dots, c_n, E\}$ است. این دستگاه معادلات مستقل خطی اند ([۱۴]). بنابراین با کاربرد روش‌هایی از جبر خطی می‌توان آنها را حل کرد تا مقادیر ضرایب و همچنین میزان خطا در این $(n+2)$ نقطه‌ی داده شده را به دست آوریم.



بعد از گام اول ضرایب را به گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که تابع خطا در $(n+2)$ نقطه‌ی داده شده مقداری برابر و علامتی متناوب بگیرد. تا وقتی که اندازه‌ی این خطا برابر با اندازه‌ی ماکسیمم مطلق در فاصله‌ی داده شده‌ی $[a, b]$ نباشد شرایط تقریب هنوز برآورده نشده است. لذا حال نیاز داریم مجموعه‌ی جدیدی از نقاط را بیابیم.

گام دوم از الگوریتم رمز مجموعه‌ای از $(n+2)$ نقطه را پیدا می‌کند که در واقع این $(n+2)$ نقطه شرایط تقریب را برآورده می‌کند. گام دوم، گام معاوضه نامیده می‌شود. دو تکنیک معاوضه وجود دارد.

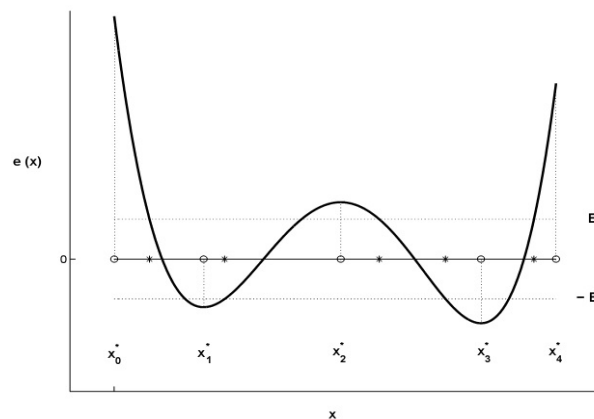
در تکنیک اول معاوضه تنها یک نقطه از $(n+2)$ نقطه‌ی مجموعه‌ی فعلی را عوض می‌کنیم تا به مجموعه‌ی جدیدی از نقاط برسیم در حالی که در دومین تکنیک معاوضه ما تمام $(n+2)$ نقطه‌ی مجموعه‌ی فعلی را عوض می‌کنیم تا به یک مجموعه‌ی جدید از نقاط برسیم. گام دوم را با توجه به این نکته آغاز می‌کنیم که تابع خطا در $(n+2)$ نقطه‌ی گام اول علامتی متناوب دارد، بنابراین تابع خطا $(n+1)$ ریشه دارد، یک ریشه

در هر یک از فاصله‌های $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, x_{n+1}]$ این ریشه‌ها با استفاده از روشهای عددی از قبیل روش‌های وتری یا روش نیم‌سازی قابل محاسبه‌اند. این ریشه‌ها را با $z_0, z_1, \dots, z_n$ نمایش می‌دهیم. حال فاصله‌ی $[a, b]$ را به $(n+2)$ فاصله بصورت $[a, z_0], [z_0, z_1], \dots, [z_{n-1}, z_n], [z_n, b]$ تقسیم می‌کنیم.

در هر یک از این فاصله‌ها نقطه‌ای را که تابع خطا مقدار ماکسیمم یا مینیمم خود را در آن اخذ کند، محاسبه می‌کنیم و این نقاط را با $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{n+1}^*$ نمایش می‌دهیم. گام قبلی را می‌توانیم بطور عددی با محاسبه‌ی ریشه‌های مشتق تابع خطا انجام دهیم (البته اگر چنین ریشه‌ای موجود باشد). بعبارت دیگر تابع خطا را در نقاط انتهایی هر یک از فاصله‌ها محاسبه می‌کنیم و نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که مقدار قدر مطلق آن بزرگتر باشد. k را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$k = \max_i |F(x_i^*) - p_n(x_i^*)|.$$

در تکنیک معاوضه تک نقطه‌ای ما نقطه‌ی x_k را با x_k^* عوض می‌کنیم در حالی‌که در تکنیک معاوضه‌ی چند تایی ما $(n+2)$ نقطه‌ی $\{x_i\}$ را با $\{x_i^*\}$ تعویض می‌کنیم. حال این مجموعه از $(n+2)$ را در گام اول از تکرار بعدی استفاده می‌کنیم. گام اول و دوم را تا زمانی تکرار می‌کنیم که اختلاف بین $(n+2)$ نقطه قبلی و $(n+2)$ نقطه‌ی جدید مقداری کمتر از آستانه‌ی داده شده باشد. شکل زیر به‌طور هندسی گام دوم برای چند جمله‌ای‌های درجه‌ی ۳ را نشان می‌دهد.



در پایان الگوریتم رمز برایمان شرایط تقریب چپیشف را برآورد می‌کند. از این رو مقدار تابع خطا در مجموعه‌ی پایانی از $(n+2)$ نقطه‌ی (E) معرف مقدار ماکسیمم مطلق از خطای تقریب است.

مثال ۸.۳.۳. برای مثال با استفاده از الگوریتم رمز چند جمله‌ای بهترین تقریب از درجه‌ی یک را برای تابع $f(x) = x^2$ روی فاصله‌ی $[0, 1]$ می‌یابیم.

تکرار اول از الگوریتم را این‌گونه آغاز می‌کنیم

فرض کنیم $p_1(x) = ax + b$ و $\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1\}$ را بعنوان مجموعه‌ی دلخواه آغازی از نقاط روی $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم. برای $i = 0, 1, 2$ داریم

$$F(x_i) - p_1(x_i) = (-1)^i E \implies x_i^2 - ax_i - b = (-1)^i E$$

برای $i = 0, 1, 2$ دستگاه زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} x_0^2 - ax_0 - b = (-1)^0 E \\ x_1^2 - ax_1 - b = (-1)^1 E \\ x_2^2 - ax_2 - b = (-1)^2 E \end{cases} \implies \begin{cases} -b = E \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a - b = -E \\ 1 - a - b = E \end{cases}$$

با حل دستگاه به دست می‌آوریم $a = 1$ ، $b = -\frac{1}{4}$ و $E = \frac{1}{4}$. لذا $p_1(x) = x - \frac{1}{4}$ و $E(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$. $f(x) - p_1(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$. ملاحظه می‌شود که تابع خطا در نقاط مجموعه‌ی $\{0, \frac{1}{4}, 1\}$ مقادیر برابر و علامتی متناوب می‌گیرد

$$E(x_0) = \frac{1}{4}, \quad E(x_1) = -\frac{1}{4}, \quad E(x_2) = \frac{1}{4}.$$

لذا $E(x)$ دو ریشه در فاصله‌های $[0, \frac{1}{4}]$ و $[\frac{1}{4}, 1]$ دارد. این ریشه‌ها عبارتند از $z_0 = \frac{1+\sqrt{\frac{5}{9}}}{4} \in [\frac{1}{4}, 1]$ و $z_1 = \frac{1-\sqrt{\frac{5}{9}}}{4} \in [0, \frac{1}{4}]$ حال فاصله‌ی $[0, 1]$ را به صورت زیر تقسیم می‌کنیم

$$[0, \frac{1-\sqrt{\frac{5}{9}}}{4}], [\frac{1-\sqrt{\frac{5}{9}}}{4}, \frac{1+\sqrt{\frac{5}{9}}}{4}], [\frac{1+\sqrt{\frac{5}{9}}}{4}, 1].$$

حالا روی هر یک از این فاصله‌ها مقدار مینیم یا ماکسیم تابع خطا به ترتیب عبارت است از

$$E(0) = \frac{1}{4}, \quad E(\frac{1}{4}) = -\frac{5}{36}, \quad E(1) = \frac{1}{4}.$$

حال قرار می‌دهیم $\{x_0^* = 0, x_1^* = \frac{1}{4}, x_2^* = 1\}$ و با این مجموعه تکرار دوم را آغاز می‌کنیم. دستگاه سه معادله سه مجهول را برای این نقاط تشکیل می‌دهیم

$$F(x_i^*) - p_1(x_i^*) = (-1)^i E \quad i = 0, 1, 2$$

$$\begin{cases} -b = E \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a - b = -E \\ 1 - a - b = E \end{cases} \implies a = 1, b = -\frac{1}{8}, E = \frac{1}{8}$$

در نتیجه $p_1(x) = x - \frac{1}{8}$ و تابع خطا $E(x) = x^2 - x + \frac{1}{8}$ در نقاط مزبور مقادیری برابر و علامت‌هایی متناوب می‌گیرد

$$E(x_0^*) = \frac{1}{8}, \quad E(x_1^*) = -\frac{1}{8}, \quad E(x_2^*) = \frac{1}{8}.$$

و اکنون تابع $E(x)$ در فواصل $[0, \frac{1}{4}]$ و $[\frac{1}{4}, 1]$ دو ریشه دارد

$$z_0^{**} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{4} \in [\frac{1}{4}, 1], \quad z_1^{**} = \frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{4} \in [0, \frac{1}{4}].$$

و حالا در دومین گام از تکرار دوم فاصله‌ی $[0, 1]$ را به صورت زیر تقسیم می‌کنیم

$$[0, \frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{4}], [\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{4}, \frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{4}], [\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{4}, 1].$$

با محاسبه مقدار مینیم و ماکسیم تابع خطای فعلی روی فاصله‌های بالا می‌بینیم مقدار $\frac{1}{8}$ با علامت متناوب به دست می‌آید و نقاط $0, \frac{1}{4}, 1$ مجدداً تکرار می‌شوند. لذا $p_1(x) = x - \frac{1}{8}$ چند جمله‌ای بهترین تقریب برای تابع $f(x) = x^2$ است.

مراجع

- [1] N. L. Carothers, *A Short Course On Approximation Theory*, Bowling Green State University, (2009).
- [2] R. Darst, S. Sahab, *Approximation Of Continuous And Quasi-Continuous Functions By Monotone Functions*, Journal Of Approximation Theory 38 (1983), 9-27.
- [3] F. Deutsch, *Best Approximation In Inner Product Spaces*, Springer-Verlage, (2001).
- [4] G. B. Folland, *Real Analysis Modern Techniques And Their Applications* 2nd Edition, Wiley, 1999.
- [5] D. Landers, L. Rogge, *Best Approximant In L_ϕ -Spaces*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 51 (1980), 215-237.
- [6] D. Landers And L. Rogge, *On Projection And Monotony In L_p -Spaces*, Ann. probab. 7 (1979), 363-369.
- [7] F. Mazzone, H. Cuenya, *A Characterization Of Best φ -Approximants With Applications To Multidimensional Isotonic Approximation*, Constructive Approximation 21 (2005), 207-223.
- [8] F. Mazzone, E. Schwindt, *A Minmax Formula For The Best Naturale $C[0,1]$ -Approximant By Nondecreasing Functions*, Academic Journal (2006), 171-178.
- [9] G. Meinardus, *Approximation Of Functions*, Theory And Numerical Methods. NewYork (1967).
- [10] T. J. Rivlin, *An Introduction To The Approximation Of Function*, Dover, NewYork, (1981).
- [11] Sherif A. Tawfik, *Minmax Approximation And Remez Algoritm*, (2005), 1-5.
- [12] V. A. Ubhaya, *Isotone Optimization, I*, Journal Of Approximation Theory 12 (1974), 146-159.
- [13] V. Ubhaya, *Isotone Optimization, II*, Journal Of Approximation Theory 12 (1974), 315-331.

-
- [14] L. Veidinger, *On The Numerical Determination Of The Best Approximations InThe Chebychev Sense*, Numerische Mathematik, 2, (1960), 99-105.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Remez Algorithm	الگوریتم رِمِز
Signed Measure	اندازه‌ی علامت‌دار
Error Function	تابع خطا
Quasi-Continuous Function	تابع شبه پیوسته
Nondecreasing Function	تابع صعودی
$\mathcal{L}$ -Measurable Function	تابع $\mathcal{L}$ -اندازه پذیر
Exchange Techniques	تکنیک معاوضه
Minimax Polynomial	چند جمله‌ای مینیماکس
Homogeneity Property	خاصیت همگنی
Approximation Error	خطای تقریب
(+) Interval	فاصله (+)
(-) Interval	فاصله (-)
Measure Space	فضای اندازه
μ -Equivalence Class	کلاس μ -هم ارزی
Upper Set	مجموعه‌ی رو به بالا
Lower Set	مجموعه‌ی رو به پایین
Alternating Set	مجموعه‌ی متناوب
ν -Positive Set	مجموعه‌ی ν -مثبت
ν -Negative Set	مجموعه‌ی ν -منفی
Φ -Closed Set	مجموعه‌ی Φ -بسته
Closed Convex Cone	مخروط محدب بسته
Connected Component	مولفه‌ی همبندی
Accumulation Point	نقطه‌ی حدی
Oscillation Of Function	نوسان تابع
Equicontinuous	هم پیوسته

Best L_∞ -Approximation	L_∞ -بهترین تقریب
Weighted p-Norm	p -نرم وزن‌دار
σ -Algebra	σ -جبر
σ -Lattice	σ -شبکه
σ -Complete Lattice	σ -شبکه کامل
Best φ -Approximant	φ -بهترین تقریب
μ -Function	μ -تابع

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accumulation Point	نقطه‌ی حدی
Alternating Set	مجموعه‌ی متناوب
Approximation Error	خطای تقریب
Best L_∞ -Approximation	L_∞ -بهترین تقریب
Best φ -Approximant	φ -بهترین تقریب
Closed Convex Cone	مخروط محدب بسته
Connected Component	مولفه‌ی همبندی
Error Function	تابع خطا
Equicontinuous	هم‌پیوسته
Exchange Techniques	تکنیک معاوضه
Homogeneity Property	خاصیت همگنی
Lower Set	مجموعه‌ی رو به پایین
Measure Space	فضای اندازه
Minimax Polynomial	چند جمله‌ای مینیماکس
Nondecreasing Function	تابع صعودی
Oscillation Of Function	نوسان تابع
Quasi-Continuous Function	تابع شبه پیوسته
Remez Algorithm	الگوریتم رِمَز
Signed Measure	اندازه‌ی علامت‌دار
Upper Set	مجموعه‌ی رو به بالا
Weighted p-Norm	p -نرم وزن‌دار
(+) Interval	فاصله (+)
(-) Interval	فاصله (-)
σ -Algebra	σ -جبر
σ -Complete Lattice	σ -شبکه کامل

σ -Lattice.....	σ -شبکه.....
ν -Negative Set	مجموعه‌ی ν -منفی.....
ν -Positive Set	مجموعه‌ی ν -مثبت.....
μ -Equivalence Class	کلاس μ -هم‌ارزی.....
μ -Function	μ -تابع.....
$\mathcal{L}$ -Measurable Function.....	تابع $\mathcal{L}$ -اندازه‌پذیر.....
Φ -Closed Set.....	مجموعه‌ی Φ -بسته.....

Aabstract

We show that if f is a function in $L_p([0, 1])$ and f_p is the best approximant to f in $L_p([0, 1])$ by nondecreasing functions, then the limit $f_* = \lim_{p \rightarrow \infty} f_p$ exists and f_* is a best approximant to f in $C([0, 1])$ by nondecreasing functions and Also we show an explici formula for the function f_* .

keywords: Beast Approximant, Best L_p -Approximant, Remez Algorithm, Chebyshev Polynomial.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
pure Mathematics

A Min Max Formula For The Best $C([0,1])$ -Approximant

Supervisor
Dr. Mahdi Iranmanesh

by
somayeh mirzaee

Dec 2014