دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

الگوریتم ژنتیک و کاربرد آن در کنترل سیستم های خطی همزمان

استاد راهنما
دکتر حجت احسنی طهرانی
استاد مشاور
دکتر علی مس فروش
دانشجو
زری شجاعی مقدم

۱۳۹۳

تقدیم به محضر مولایم آقا اباعبدالله و
ساحت مقدس اربابم امام زمانم.

تقدیم به

آرامشم ... مادرم،

تکیه گاهم ... پدرم،

امیدهای زندگیم ... خواهران و برادرانم،

اسوه صبرم ... استادم،

به مصداق (من لم یشکر الخالق لم یشکر المخلوق)

به پاس زندگی بخش بودن بدون چشم داشتشان،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان در این روزگاران سرد،

و شکر بیکران خالقم که با هدیه این بهترین مخلوقاتش به من برای همیشه مرا سپاسگزار خویش کرد.

زری شجاعی مقدم

۱۳۹۳

تعهد نامه

اینجانب **زری شجاعی مقدم** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **الگوریتم ژنتیک و کاربرد آن در کنترل سیستم های خطی همزمان** ، تحت راهنمایی **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زری شجاعی مقدم
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه، چند روش را برای کمینه کردن نورم ماتریس پسخورد حالت شرح می دهیم.اهمیت این مساله از این جهت است که کمتر کردن نورم این ماتریس اغلب هزینه و وقت کمتری نیاز دارد.الگوریتم ژنتیک، برای کنترل همزمان سیستم های خطی به کار رفته است.کنترل این سیستم ها با الگوریتم ژنتیک نیاز به یک سری معادلات و نامعادلات دارد. الگوریتم ژنتیک از جواب این معادلات و نامعادلات استفاده کرده و تابع جدیدی با استفاده از جواب آنها می سازد، که جواب آن نسبت به جوابهای مسئله قبلی بهتر است. الگوریتم ژنتیک یک الگوریتم تصادفی مبتنی بر تکرار است که در آن می توان با افزایش محدودیت ها و حتی گرفتن بازه کوچکتر از بازه مستطیلی دلخواه داده شده جواب ایده آل تری را به دست آورد. در این پایان نامه یک روش تحلیلی برای پیدا کردن جواب به کار رفته است، سپس یک روش عددی جهت بهتر شدن جواب ارائه شده است. در انتهای هر بخش برای شرح بیشتر مثالی آورده شده است.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. احسنی طهرانی. ح، شجاعی مقدم. ز،حسینی نیا حسن کیاده. ب، (۱۳۹۳)، "کنترل همزمان سیستم های تاخیری گسسته زمانی به وسیله الگوریتم ژنتیک با ماتریس پس خورد حالت"، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران،۲۳۴-۲۳۲ ، سمنان.

۲. حسینی نیا حسن کیاده. ب، احسنی طهرانی. ح، شجاعی مقدم. ز، (۱۳۹۳)، " محاسبه ماتریس پسخورد حالت خطی در مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی"، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران، ۱۰۶-۱۰۴، سمنان.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

مسئله کنترل همزمان سیستم های خطی از سالها پیش قابل توجه نویسندگان زیادی بوده است. در سال ۱۹۶۳، سعادت جو، کرباسی و درهمی کنترل همزمان سیستم های خطی را با پس خورد حالت انجام دادند [۱]. کنترل همزمان چند سیستم یعنی پیدا کردن یک ماتریس پس خورد حالت یا خروجی برای کنترل چند سیستم می باشد.

p سیستم ثابت زمانی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_k(t) = A_k x_k(t) + B_k u_k(t) \quad k = ۱, ۲, \ldots, p$$

که در آن، $x_k \in \mathbb{R}^n$ ها بردارهای حالت و $u_k \in \mathbb{R}^m$ بردارهای ورودی است. A_k ها و B_k ها به ترتیب ماتریس‌هایی ثابت با اندازه‌های $n \times n$ و $n \times m$ هستند.

برای پایداری این p سیستم باید ماتریس کنترل‌گر پسخورد حالت F با قانون کنترل $u_k = F x_k(t)$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته همه سیستم ها در داخل محدوده‌ای معین و از پیش تعیین شده در سمت چپ صفحه‌ی مختلط قرار گیرند. در سال ۱۹۹۲، پورتر و بریری یک طرح ژنتیکی برای کنترل سیستم های چند متغیره با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه ارائه دادند [۶]. به دنبال آن، کرباسی و بل در سال ۱۹۹۴ روشی جدید جهت تخصیص مقادیر ویژه پارامتری به ماتریس کنترل پس خورد حالت، مطرح کردند [۳]. در همان سال کرباسی و سعادت جو روشی پارامتری جهت تخصیص مقادیر ویژه با ماتریس پس خورد خروجی کشف کردند [۲].

مسأله ای که چند دهه اخیر بسیار قابل توجه نویسندگان قرار گرفته، مساله کمتر کردن نرم ماتریس پس خورد حالت و ماتریس پس خورد خروجی می باشد. این مسأله بدین جهت حائز اهمیت است که به دست آوردن ماتریس پس خورد با مینیمم نرم، قطعا هزینه کمتر و در بسیاری موارد حتی به صرف وقت کمتر نیاز دارد. پیرامون این مسأله، کرباسی در سال ۲۰۰۱ یک الگوریتم برای مینیمم سازی کنترل گرهای پس خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه به جویندگان این موضوع عرضه کرد [۱۸]. سعادت جو، درهمی و کرباسی همچنین در سال ۲۰۱۱، پایدارسازی سیستم های چند متغیره خطی را با بهبود زمان پاسخ با استفاده از الگوریتم ژنتیک مطرح کردند [۲۰]. یک روش برای محاسبه مینیمم حساسیت در کنترل پس خورد حالت در سال ۲۰۰۷، توسط کرباسی و سلطانیان به جهان علم عرضه شد [۱۹].

همچنین پژوهش های بسیار دیگری جهت مینیمم سازی نرم ماتریس پس خورد حالت و خروجی انجام شده است.
ساختار کلی این پایان نامه به شرح زیر است:

- در فصل اول این پایان نامه تمامی تعاریف و مطالبی را که شاید برای خواننده قابل فهم نباشد، آورده شده است.

- در فصل دوم توضیحاتی در مورد الگوریتم ژنتیک آورده شده است.

- در فصل سوم، ابتدا چگونگی محاسبه ماتریس پس خورد حالت پارامتری ارائه شده است. این بخش آغازی است برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت که در فصل های بعدی به صورت مستقیم یا غیر مستقیم از آن استفاده شده است. یک سیستم ثابت زمانی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و A و B به ترتیب ماتریس‌های $n \times n$ و $n \times m$ با درایه‌های ثابت هستند.
برای پایداری این سیستم باید ماتریس پس‌خورد حالت F در قانون کنترل $u = Fx(t)$ را به گونه‌ای یافت که همه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ در داخل محدوده معین و از پیش تعیین شده قرار گیرد.
در اینجا فرض بر این است که A می‌تواند منفرد نیز باشد، و در مورد B داریم:

$$rank(B) = m \quad m \leqslant n$$

در این بخش، ابتدا با استفاده از تبدیل T زوج (B, A) را به فرم استاندارد اشلون تبدیل کرده و سپس با استفاده از ماتریس تبدیل S فرم استاندارد اشلون را به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم و با استفاده از آن ماتریس پس‌خورد حالتی را که همه مقادیر ویژه را به صفر می‌برد محاسبه می‌کنیم، پس از آن ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری غیرخطی را برای مقادیر ویژه غیر صفر تعیین می‌کنیم و سپس روشی جدید جهت محاسبه مینیمم حساسیت در ماتریس پس خورد حالت مطرح شده است.

- در فصل چهارم، شیوه ای نوین برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت در سیستم های مختلف آورده شده، به گونه ای که نرم آن کمترین مقدار ممکن شود و در بخشی از آن از الگوریتم ژنتیک برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت همزمان استفاده شده است.

- در فصل پنجم، ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی با دو روش محاسبه می شود و نرم این دو با هم مقایسه می گردد.

۱.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. ماتریس $m \times n$ به نام A روی میدان F ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) آرایه‌ای مستطیلی از m سطر و n ستون با درایه‌هایی متعلق به F و به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

چنین ماتریسی که به صورت $A = (a_{ij})$ نیز نوشته می‌شود، را ماتریسی از مرتبه $m \times n$ می‌نامیم. ماتریسی که تعداد سطرها وستون‌هایش با هم برابر باشد را ماتریس مربعی می نامیم.

ماتریس پایین مثلثی: اگر تمام درایه های بالای قطر اصلی در یک ماتریس مربعی صفر باشد، ماتریس پایین مثلثی است. یعنی، $i < j \Longrightarrow a_{ij} = ۰$.
ماتریس بالا مثلثی: اگر تمام درایه های پایین قطر اصلی در یک ماتریس مربعی صفر باشد، ماتریس بالامثلثی است. یعنی، $i > j \Longrightarrow a_{ij} = ۰$.
ماتریس متعامد: اگر در ماتریس مربعی A داشته باشیم، $AA^t = A^tA = I$ به آن ماتریس متعامد گویند.
ماتریس هسنبرگی ماتریس مربعی A بالاهسنبرگی است، هرگاه به ازای $i > j + ۱$ داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$. ترانهاده یک ماتریس بالاهسنبرگی پایین هسنبرگی است، یعنی ماتریس $A = (a_{ij})$ پایین هسنبرگی است، اگر به ازای $j > i + ۱$ داشته باشیم، $a_{ij} = ۰$. یک ماتریس مربعی که هم بالاهسنبرگی و هم پایین هسنبرگی باشد، سه قطری است.

۲.۱ دترمینان ماتریس

برای توضیحات بیشتر در مورد این قسمت به [۱۷] مراجعه کنید.
برای هر ماتریس مربعی A اسکالر منحصربه فردی وابسته به این ماتریس، یافت می‌شود که دترمینان A نامیده می شود و با $\det(A)$ نمایش داده می شود. برای ماتریس A از مرتبه ۲×۲ ، $\det(A) = \mathrm{a}_{۱۱}\mathrm{a}_{۲۲} - \mathrm{a}_{۱۲}\mathrm{a}_{۲۱}$ ، برای ماتریس A از مرتبه ۳×۳ ، $\det(A) = \mathrm{a}_{۱۱}\det(A_{۱۱}) - \mathrm{a}_{۱۲}\det(A_{۱۲}) + \mathrm{a}_{۱۳}\det(A_{۱۳})$ که در آن $A_{۱i}$ زیرماتریس ۲×۲ است و از حذف سطر اول و ستون iام به‌دست آمده است. این تعریف به آسانی می‌تواند تعمیم داده شود. بنابراین برای ماتریس $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij})$ از مرتبه $n \times n$ داریم:

$$\det(A) = (-۱)^{i+۱}a_{i۱}\det(A_{i۱}) + (-۱)^{i+۲}a_{i۲}\det(A_{i۲}) + \ldots + (-۱)^{i+n}a_{in}\det(A_{in}),$$

که در آن A_{ij} زیرماتریسی از A از مرتبه $(n - ۱)$ می‌باشد و از حذف سطر iام و ستون jام به‌دست می‌آید.

قضیه ۱.۲.۱. خواص ساده زیر، برای دترمینان برقرار است:

۱. $\det(A) = \det(A)^T$.

۲. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ که در آن α یک اسکالر است.

۳. $\det(AB) = \mathrm{detA}.\mathrm{detB}$.

۴. اگر دو سطر یا ستون A یکسان باشند آن‌گاه $\det(A) = 0$.

۵. اگر B ماتریس به‌دست آمده از A با تعویض دو سطر یا دو ستون باشد آن‌گاه $\det(B) = -\det(A)$.

۶. دترمینان ماتریس مثلثی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطری آن می‌باشد.

۳.۱ مقدار ویژه و بردار ویژه و معادله مشخصه

برای توضیحات بیشتر در مورد این قسمت به [۱۷] مراجعه کنید.
دستگاه معادلات $A_{n\times n}X_{n\times 1} = b_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان به صورت نگاشتی در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفت، که بردار X را به بردار b تبدیل می کند. در این نگاشت ها مواردی وجود دارد که تنها اندازه ی بردار X را تغییر می دهد و امتداد آن حفظ می شود. به عبارت دیگر b به صورت مضربی از بردار X تعریف می شود. در این صورت نگاشت حاصل به صورت زیر تعریف می شود.

$$AX = \lambda X$$

بردارهای X_i غیر صفر که چنین خاصیتی دارند را بردارهای ویژه [۱] ماتریس $A_{n\times n}$ و ضرایب ثابت λ_i را مقادیر ویژه [۲] ماتریس $A_{n\times n}$ گویند. با توجه به تعریف داریم، $(\lambda_i - A)X_i = 0$ حال اگر $det(\lambda I - A)$ را بسط دهیم، چند جمله ای مشخصه [۳] به صورت زیر بیان می شود:

$$det\ (\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \cdots + C_{n-1}\lambda + C_n$$

که به آن چند جمله ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ می گویند. ریشه های چند جمله ای مشخصه همان مقادیر ویژه خواهند بود که تعدادشان n تاست.
نکته۱: برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ معادله مشخصه $\mid \lambda I - A \mid = 0$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به فرم مختلط $\alpha \pm i\beta$ است.
نکته ۲: اگر بردار v_i یک بردار ویژه برای ماتریس A باشد، آنگاه برای هر اسکالر مخالف صفر مانند α

[۱] eigenvector
[۲] eigenvalue
[۳] polynomial Charactristic

حاصل αv_i نیز یک بردار ویژه برای آن خواهد بود.
نکته ۳: اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A و بردار V بردار ویژه نظیر آن باشد، در این صورت λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k متناظر با با بردار ویژه نظیر خواهد بود. (k مقدار صحیح مثبت خواهد بود.)
برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$det\ A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

چند جمله ای مشخصه برای هر ماتریس $A_{n\times n}$ یک چند جمله ای از مرتبه n است.

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1}\lambda + C_1\lambda + C_n$$

این چند جمله ای را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ای هستند که می توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند.
حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ را قرار دهیم، مقدار $|A|$ به دست می آید:

$$det\ A = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

نکته ۴: اگر λ_i یک مقدار ویژه ناصفر برای ماتریس A باشند، λ_i^{-1} یک مقدار ویژه برای ماتریس A^{-1} خواهد بود.
نکته ۵: در ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

۴.۱ فضای برداری

برای توضیحات بیشتر در مورد این قسمت به [۱۷] مراجعه کنید.
فضای برداری V روی میدان F عبارت است از مجموعه V از اشیا که بردار نامیده می‌شوند، همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که به‌ترتیب به هر دو عضو x و y از V عضو منحصربه فرد $x+y$ از V و به‌ازای هر عضو $\mathrm{a} \in \mathrm{F}$ و $\mathrm{x} \in \mathrm{V}$ عضو منحصربه فرد $ax \in \mathrm{V}$ را نسبت می‌دهند، یا به عبارتی نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

تعریف ۱.۴.۱. زیرمجموعه W از فضای برداری V روی میدان F زیرفضای V نامیده می‌شود هرگاه W با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی V ، یک فضای برداری روی میدان F باشد.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم V فضای برداری و S یک زیرمجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $\nu \in V$ را ترکیب خطی از اعضای V گوییم، اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند $u_n, \ldots, u_1$ و اسکالرهای

$a_1, \ldots, a_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که،

$$\nu = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n.$$

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنید، S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، آن‌گاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای V است.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید، S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۴.۱. زیرمجموعه متناهی S از فضای V را وابسته خطی گوییم، هرگاه تعداد متناهی از بردارهای $u_1, \ldots, u_n$ در S و اسکالرهای $a_1, \ldots, a_n$ که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشند به‌طوری‌که،

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0.$$

همچنین در این‌صورت گوییم، اعضای S وابسته خطی‌اند.

مجموعه S را که وابسته خطی نباشد، مستقل خطی گویند.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنید، V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه S را پایه V گوییم، هرگاه S یک زیرمجموعه مستقل خطی V باشد که Vرا تولید می‌کند.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، تعداد بردارهای پایه V را بعد فضایV نامیده و با $\dim \mathrm{V}$ نشان می‌دهند.

۱.۴.۱ رتبه یک ماتریس

فرض کنید، A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ باشد. آن‌گاه زیرفضای بوجود آمده، توسط بردارهای سطری A فضای سطری نامیده می‌شود. زیرفضای بوجود آمده، توسط ستون‌های A فضای ستونی A نامیده می‌شود. برد A همان فضای ستونی A می‌باشد. رتبه یک ماتریس، بعد فضای ستونی A می باشد و با $\mathrm{rank}(A)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۸.۴.۱. معکوس ماتریس. ماتریس A از مرتبه $n \times n$ معکوس‌پذیر است، اگر ماتریس B از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد که،

$$AB = BA = I,$$

و با A^{-1} نمایش داده می‌شود. معکوس ماتریس منحصربه فرد است و ماتریس معکوس‌پذیر اغلب ماتریس نامنفرد نامیده می‌شود.

$R(A)$ برای محاسبه رتبه [۴] A و $N(A)$ برای محاسبه فضای پوچی [۵] A استفاده می شود. فضای پوچی مجموعه تمام پاسخ های غیر صفر معادله همگن $AX = 0$ است. اگر تنها پاسخ معادله $AX = 0$

[۴] rank
[۵] space Null or Kernel

همان پاسخ بدیهی صفر باشد، رتبه ماتریس A کامل است. فضای پوچی A یک زیر فضا از فضای n بعدی است.

$$\mathrm{R}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{به ازای هر برداری مانند}\},$$
$$\mathrm{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

تعریف ۹.۴.۱. ماتریس‌های متشابه. دو ماتریس A و B متشابه نامیده می‌شوند، اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته به قسمی که،

$$T^{-1}AT = B,$$

یک خاصیت مهم ماتریس‌های متشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هست.

۵.۱ نرم ماتریس

نگاشت $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، به طوری که:

۱. $\| A \| \geqslant 0$ به ازای $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $\| A \| = 0$ اگر و فقط اگر، $A = 0$.

۲. $\| \alpha A \| = |\alpha| \, \| A \|$ به ازای $\alpha \in A$ و $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. (خاصیت همگنی[۶])

۳. به ازای $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ داریم: $\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|$.
(نامساوی مثلثی)

تعریف ۱.۵.۱. نرم فروبینوس[۷] نرم

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^2} = tr(AA^H)$$

که یک نرم ماتریسی است، نرم فروبینوس (نرم اقلیدسی در (C^{n^2})[۸] نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید، $\|\cdot\|$ یک نرم برداری باشد، تابع

$$\| A \| = Sup \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \qquad \| x \| \neq 0 \tag{1.1}$$

یک نرم ماتریسی است که نرم ماتریس القایی [۹] (نرم ماتریسی طبیعی) [۱۰] نامیده می‌شود.

---

[۶] Homogenouse
[۷] norm Frobenious
[۸] norm Euclidean
[۹] matrix norm Indiced
[۱۰] matrix norm Natural

نرم یک [۱۱] و نرم بی‌نهایت [۱۲] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\| A \|_۱ = max \sum_{i=۱}^{n} | a_{ij} | \qquad ۱ \leqslant j \leqslant n$$

$$\| A \|_\infty = max \sum_{j=۱}^{n} | a_{ij} | \qquad ۱ \leqslant i \leqslant n$$

۶.۱ تعاریف و پیش نیازهای کنترل:

برای توضیحات بیشتر در مورد این قسمت به [۲۱] مراجعه کنید. بخش مهمی از هر مسئله‌ی کنترلی، مدل سازی آن سیستم است. هدف به دست آوردن ساده ترین بیان ریاضی است که پاسخ سیستم فیزیکی به تمام ورودیهای مورد نظر را بطور مناسب پیش‌بینی کند. بحث ما به سیستم‌هایی که توسط معادلات دیفرانسیل معمولی بیان می‌شوند، محدود خواهد شد. بنابراین اگر،

$$x_۱(t), x_۲(t), \ldots, x_n(t)$$

متغیرهای حالت در زمان t و

$$u_۱(t), u_۲(t), \ldots, u_n(t)$$

ورودیهای کنترل در زمان t باشند، آنگاه سیستم ممکن است با n معادله دیفرانسیل مرتبه اول بیان شود.

$$\begin{aligned} \dot{x_۱}(t) &= a_۱(x_۱(t), x_۲(t), \ldots, x_n(t), u_۱(t), u_۲(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \dot{x_۲}(t) &= a_۲(x_۱(t), x_۲(t), \ldots, x_n(t), u_۱(t), u_۲(t), \ldots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x_n}(t) &= a_n(x_۱(t), x_۲(t), \ldots, x_n(t), u_۱(t), u_۲(t), \ldots, u_m(t), t) \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

بردار

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

را به عنوان بردار حالت سیستم و

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_۱(t) \\ u_۲(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

[۱۱] I-norm

[۱۲] Infinity-norm

را به عنوان بردار کنترل تعریف خواهیم کرد. آنگاه، معادلات حالت می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \qquad (۳.۱)$$

در مبحث کنترل خطی: معادلات حالت

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (۴.۱)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (۵.۱)$$

توصیف کننده سیستم های چند متغیره ای هستند که در آنها t متغیر زمان، $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ بردار حالت [۱۳]، $u \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ بردار ورودی و $y \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ بردار خروجی است. ماتریس‌های $A(t)$ و $B(t)$ و $C(t)$ و $D(t)$ را ماتریس‌های سیستم، می‌نامیم که به ترتیب دارای ابعاد $n \times n$ و $n \times m$ و $p \times n$ و $p \times m$ می‌باشند.

تعریف ۱.۶.۱. مجموعه مقادیر $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ را حالت سیستم می‌گوییم. اگر در لحظه $t = t_0$ این مقادیر معین باشد و به ازای $t \geqslant t_0$ ورودی‌های سیستم نیز معلوم باشند، در هر لحظه $t \geqslant t_0$ این مجموعه مشخص می‌گردد.

تعریف ۲.۶.۱. اگر همه ماتریس‌های سیستم معادلات (۴.۱) و (۵.۱) ثابت باشند، آنگاه سیستم را یک سیستم کنترل ناوردای زمانی [۱۴] می‌گویند.

تعریف ۳.۶.۱. سیستم کنترل مجموعه معادلات (۴.۱) و (۵.۱) را یک سیستم خطی پیوسته - زمانی می‌گویند.

تعریف ۴.۶.۱. سیستم گسسته زمانی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

$$y(i) = Cx(i) + Du(i)$$

قرارداد:

سیستمهای مورد بحث در این پایان نامه، سیستم های خطی، چند متغیره، پیوسته-زمانی و ناوردای زمانی می‌باشند.

تعریف ۵.۶.۱. کنترل پذیری: سیستم خطی ناوردای زمانی (۴.۱) را به ازای $t \geqslant t_0$ با حالت اولیه $x(t_0) = x_0$ در نظر می گیریم. هرگاه، ورودی $u(t)$ که $t \in [t_0, t_1]$ حالت اولیه x_0 را در زمان t به حالت تعادل منتقل نماید، حالت x_0 را در زمان t_0 کنترل پذیر گویند. اگر تمام مقادیر x_0 به ازای هر t_0 کنترل پذیر باشد، سیستم را کاملا کنترل پذیر یا به طور ساده، کنترل پذیر گویند.

تعریف ۶.۶.۱. سیستم خطی ناوردای زمانی را کاملا کنترل پذیر [۱۵]گوییم، اگر و تنها اگر برای ماتریس

---
[۱۳] vector state
[۱۴] invariant Time
[۱۵] Controllable

کنترل پذیری

$$Q = [B \mid AB \mid A^{2}B \mid \ldots \mid A^{n-1}B]_{n\times nm} \tag{۶.۱}$$

داشته باشیم:

$$rank(Q) = n$$

اگر سیستم فقط دارای یک ورودی باشد یعنی؛ $m = 1$ شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری سیستم این است که ماتریس Q نامنفرد باشد.
کنترل پذیری یک سیستم اهمیتی اساسی دارد، زیرا مسائلی مورد مطالعه قرار می گیرد که در آنها هدف، انتقال سیستم از یک حالت اولیه دلخواه به حالت تعادل می‌باشد. در نتیجه کنترل پذیری شرط لازم وجود جواب است.

تعریف ۷.۶.۱. سیستم خطی ناوردای

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۷.۱}$$

با قانون کنترل $u(t) = Ky(t)$ را که در آن A و B و C به ترتیب ماتریس‌های $n \times n$ و $n \times m$ و $p \times n$ می‌باشند را در نظر می‌گیریم. اگر بتوان هر حالت $x(t)$ را با مشاهده $y(t)$ در فاصله زمانی محدود $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ تعیین کرد، سیستم را کاملا مشاهده پذیرگویند.

قضیه ۸.۶.۱. سیستم تعریف شده (۷.۱) را کاملا مشاهده پذیر گوییم، اگر و تنها اگر برای ماتریس مشاهده پذیری

$$E = [C^T \mid A^TC^T \mid \ldots \mid (A^T)^{n-1}C^T]_{n\times np}$$

داشته باشیم:

$$rank(E) = n$$

مفهوم مشاهده پذیری نیز همچون کنترل پذیری بسیار مهم است، زیرا مشکل کنترل پس خورد حالت در عمل این است که برخی از متغیرهای حالت، در دسترس مستقیم قرار ندارند. بنابراین برای ساختن سیگنال های کنترل باید این متغیرهای خارج از دسترس را تخمین زد.
پایداری سیستم های کنترل: در طراحی سیستم کنترل، شناخت اجزای سیستم برای پیش بینی رفتار دینامیکی سیستم لازم است. مهمترین مشخصه رفتار دینامیکی سیستم های کنترل، پایداری مطلق است. یک سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی در صورتی پایدار است که هنگام اعمال شرایط اولیه به آن به حالت تعادل برگردد. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی حالتی است که در صورت ورودی ثابت و نبود اغتشاش، حالت و خروجی در همان حالت ثابت باقی بماند.
تعاریف مختلفی برای پایداری سیستم ها ارائه شده است. ایده کلی این تعاریف را می توان بدین صورت بیان کرد: مجموعه ای از معادلات دینامیکی یک سیستم فیزیکی داده شده اند، تعیین کنید آیا سیستم حول نقطه تعادل خود خوش رفتار است؟

۷.۱ تعاریف پایداری

معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ معادله متناظر با یک سیستم غیر خطی تغییر پذیر وابسته به زمان است. t متغیر زمان، $x(t)$ بردار ستونی تغییرپذیر با زمان و بردار حالت n بعدی، $u(t)$ نشانگر متغیر ورودی یا کنترل و f تابع غیر خطی توصیف کننده سیستم است.

تعریف ۱.۷.۱. قضیه اصلی پایداری لیاپانوف سیستم داده شده زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

$$f(\circ, t) = \circ$$

اگر تابع اسکالری مانند $V(x)$ وجود داشته باشد که مشتقات جزئی آن پیوسته باشد.
الف) $V(x, t)$ معین مثبت باشد.
ب) $\dot{V}(x, t)$ معین منفی باشد.

آنگاه حالت تعادل مبدأ دارای پایداری مجانبی یکنواخت است.

یعنی اگر برای یک سیستم مشخص بتوان تابع اسکالر معین $V(x)$ را به گونه ای یافت که مشتق زمانی آن روی یک مسیر، همواره منفی باشد آنگاه $V(x)$ با گذشت زمان کوچکتر می شود و سرانجام به صفر می رسد و از آنجایی که $V(x)$ معین مثبت است، لذا مبدأ دارای حالت پایداری مجانبی یکنواخت است.
به عنوان مثال، در یک سیستم خطی مستقل زمانی $\dot{x} = Ax$ شرط لازم و کافی پایداری آن است که قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه A منفی باشد.
برای فرار از محاسبه مقادیر ویژه، سیستم توصیف شده به فرم $\dot{x}(t) = Ax(t)$ که در آن x بردار حالت و A یک ماتریس ثابت نامنفرد است، شرط لازم و کافی برای پایداری حالت تعادل $x = \circ$ آن است که به ازای هر ماتریس هرمیتی یعنی؛ $A = A^\star = (\bar{A}^T)$ و ماتریس معین مثبت Q ماتریس هرمیتی P موجود باشد به گونه ای که،

$$A^T P + PA = -Q$$

یک سیستم کنترل خطی را پایدار بحرانی گوییم، هرگاه نوسانات خروجی برای همیشه ادامه یابد و در صورتی ناپایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن، خروجی به طور بیکران واگرا شود.

$$u(t) = Kx(t) \tag{۸.۱}$$

اگر متغیر ورودی $u(t)$ را متناسب با بردار حالت $x(t)$به صورت زیر تعریف کنیم، ماتریس $K \in \mathbb{R}^n$ را ماتریس پس خورد حالت و رابطه فوق را قانون کنترل می نامیم. چنانچه $u(t)$ متناسب با بردار خروجی $y(t)$ انتخاب شود، یعنی $u(t) = Ky(t)$ آنگاه سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس خورد خروجی و $K \in \mathbb{R}^{m\times p}$ را ماتریس پس خورد خروجی گویند.
با ترکیب معادلات (۴.۱) و (۸.۱) رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \tag{۹.۱}$$

در این رابطه، ماتریس A را ماتریس حلقه باز و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه باز سیستم گویند. همچنین ماتریس $A + BK$ را ماتریس حلقه بسته و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه

بسته می گویند .

۸.۱ کنترل سیستم خطی با پس خورد حالت

یکی از ساده ترین انتخابهایی که برای بردار ورودی $u(t)$ وجود دارد انتخاب آن متناسب با بردار حالت $x(t)$ است. یعنی؛

$$u(t) = Kx(t) \tag{۱۰.۱}$$

و یا متناسب با بردار خروج

$$u(t) = Ky(t) \tag{۱۱.۱}$$

است. در حالت نخست ماتریس K کنترل گر حالت (پس خورد حالت) و در حالت دوم کنترل گر خروجی نامیده می شود. حال داریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t) = \Gamma x(t) \tag{۱۲.۱}$$

ماتریس A را ماتریس حلقه باز سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه باز سیستم می نامند.
ماتریس $\Gamma = A + BK$ را ماتریس حلقه بسته سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه بسته سیستم می نامند.
در واقع، با تعیین ماتریس K ورودی های سیستم تعیین می شوند و ماتریس K برای یک سیستم بعضی رفتارهای سیستم را مشخص می کند که در زیر نمونه ای از آن را بیان می کنیم.

$$x(i + ۱) = Ax(i) + Bu(i) \tag{۱۳.۱}$$

$$u(i) = Kx(i) \tag{۱۴.۱}$$

$$x(i + ۱) = Ax(i) + BKx(i) = (A + BK)x(i) \tag{۱۵.۱}$$

فرض کنید، K به گونه ای تعیین شده باشد که شعاع طیفی $A + BK$ بزرگتر از واحد باشد، در این صورت $A + BK$ دارای مقدار ویژه ای با قدر مطلق بزرگتر از واحد می باشد و علاوه بر این فرض کنید، a این مقدار ویژه از آن و b بردار ویژه نظیر این مقدار ویژه باشد و همچنین فرض کنید، b بردار حالت اولیه سیستم باشد، در این صورت با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون داریم:

$$x(k) = (A + BK)^k x(\circ) \Longrightarrow x(k) = a^k b \tag{۱۶.۱}$$

با توجه به اینکه $\| a \| >$ ۱ بنابراین

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x(k) \longrightarrow \infty \tag{۱۷.۱}$$

که برای یک سیستم گسسته معمولا چنین وضعی مطلوب نیست و دیگر سیستم تحت کنترل نخواهد بود. بنابراین در این حالت می خواهیم K را به گونه ای تعیین کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم

دارای قدرمطلق کمتر از واحد باشند و یا به عبارت دیگر،

$$\rho(A + BK) < ۱ \quad (۱۸.۱)$$

باشد که این مساله را مساله تخصیص مقادیر ویژه می نامند.
در حالتی که سیستم حالت به صورت $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ باشد داریم،

$$x(t) = x(۰)\exp^{\Gamma t} \quad (۱۹.۱)$$

بدیهی است چنانچه تمام مقادیر ویژه Γ در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند، آنگاه

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t) = x(۰), \ \lim_{t \longrightarrow \infty} \exp^{\Gamma t} = ۰ \quad (۲۰.۱)$$

و بنا بر تعریف سیستم تحت کنترل خواهد بود، به عبارت دیگر در صورتی که قسمت حقیقی مقادیر ویژه منفی باشد سیستم را پایدار نامند و در صورتی که صفر باشد سیستم را به طور مجانبی پایدار و در صورتی که مثبت باشد سیستم را ناپایدار گویند.

فصل ۲

الگوریتم ژنتیک

۱.۲ مقدمه

الگوریتم ژنتیک [۱] یک تکنیک جستجو در علم رایانه برای یافتن راه حل تقریبی مسائل بهینه سازی و جستجوست. الگوریتم ژنتیک نوع خاصی از الگوریتم های تکامل است که از تکنیک های زیست شناسی مانند وراثت و جهش استفاده می کند. این الگوریتم برای اولین بار توسط جان هلند [۲] ، معرفی شد. در واقع الگوریتم های ژنتیک از اصول انتخاب طبیعی داروین برای یافتن فرمول بهینه جهت پیش بینی تطبیق با الگو استفاده می کنند. در سال ۱۹۷۰-۱۹۸۰ کارهای نظری زیادی در زمینه الگوریتم های ژنتیک صورت گرفت. از آن به بعد از الگوریتم ژنتیک در کارهای مختلف به صورت آزمایشی استفاده شد. به طور مثال، الگوریتم ژنتیک در حل مسائلی چون نحوه مکان یابی تلمبه خانه های نفت، تنظیم اشعه ایکس، طراحی تراشه های کامپیوتر و بررسی حالت پایداری در لوله های گاز به کار برده شد. امروزه علاوه بر مهندسان کامپیوتر افراد دیگری در رشته های مهندسی صنایع، برق، مدیریت و غیره از آن به عنوان ابزاری در حل مسائل بهینه سازی استفاده می کنند.
مطالب این فصل از [۲۴] انتخاب شده است.

۲.۲ الگوریتم های تکاملی

از سال ۱۹۶۰ به بعد محققان تصمیم گرفتند از زندگی انسان برای حل مسائل بهینه سازی تقلید کنند. در هوش مصنوعی الگوریتم ژنتیک یک تکنیک برنامه نویسی است که از تکامل ژنتیکی به عنوان یک الگوی حل مسئله استفاده می کند. مسئله ای که باید حل شود، دارای ورودی هایی می باشد که طی یک فرایند الگوبرداری شده از تکامل ژنتیکی توسط تابع ارزیاب [۳] مورد ارزیابی قرار می گیرد و چنان چه

[۱] Algorithms Genetic
[۲] Holland John
[۳] feetness

شرط خروج مسئله فراهم شده باشد، الگوریتم خاتمه می یابد. الگوریتم ژنتیک به طور کلی یک الگوریتم مبتنی بر تکرار است که اغلب بخش های آن به صورت فرایندهای تصادفی انتخاب می شوند.
هنگامی که لغت تنازع بقا به کار می رود، اغلب بار ارزش منفی آن به ذهن می آید. شاید همزمان قانون جنگل به ذهن برسد و حکم بقای قوی ترها. البته همیشه هم قوی ترها برنده نبوده اند. مثلا دایناسورها با وجود جثه عظیم و قوی تر بودن و طی روندی کاملا طبیعی بازی بقا و ادامه نسل را واگذار کردند. در حالی که موجودات بسیار ضعیف تر از آن حیات وحش را ادامه دادند. ظاهرا طبیعت، بهترین را براساس هیکل انتخاب نمی کند. در واقع درست تر آن است که بگوییم طبیعت مناسب ترین را انتخاب می کند نه قوی ترین را.
قانون انتخاب طبیعی بدین صورت است تنها گونه هایی از یک جمعیت ادامه نسل می دهند که بهترین خصوصیات را داشته باشند و آنهایی که این خصوصیات را نداشته باشد به ترتیب در طی زمان از بین می روند.
الگوریتم های ژنتیک از جمله الگوریتم های جستجوی تصادفی است که ایده آن برگرفته از طبیعت می باشد. الگوریتم های ژنتیک برای روش های کلاسیک بهینه سازی در حل مسائل خطی، محدب و برخی از مشکلات مشابه بسیار موفق بوده است. ولی الگوریتم های ژنتیک برای حل مسائل گسسته و غیر خطی بسیار کاراتر می باشند.
به عنوان مثال می توان به مسئله فروشنده دوره گرد اشاره کرد، در طبیعت با استفاده از ترکیب، کروموزوم های بهتر و نسل های بهتری پدید می آید. در این بین گاهی اوقات جهش هایی نیز در کروموزوم ها روی می دهد که ممکن است باعث بهتر شدن نسل بعدی شود. الگوریتم ژنتیک نیز با استفاده از این ایده اقدام به حل مسئله می کند.

۳.۲ ساختار الگوریتم های ژنتیکی

به طور کلی الگوریتم های ژنتیکی از اجزای زیر تشکیل شده است:

- کروموزوم [۴] : در الگوریتم های ژنتیکی هر کرومورزوم نشاندهنده یک نقطه در فضای جستجو و یک راه حل ممکن برای مسئله موردنظر است. خود کروموزوم ها (راه حلها) از تعداد ثابتی ژن [۵] (متغیر) تشکیل شده است. برای نمایش کروموزوم ها از کدگذاری دودویی (رشته های بیتی) استفاده می شود.

- جمعیت [۶] : مجموعه ای از کروموزوم ها یک جمعیت را تشکیل می دهند. با تأثیر عملگرهای ژنتیکی بر روی هر جمعیت، جمعیت جدیدی با همان تعداد کروموزوم تشکیل می شود.

- تابع برازندگی: به منظور حل هر مسئله با استفاده از الگوریتم های ژنتیکی باید یک تابع برازندگی

[۴] Choromosome
[۵] Gene
[۶] Population

برای آن مسئله ابداع شود. برای هر کروموزوم این تابع عددی غیر منفی را بر می گرداند که نشاندهنده شایستگی یا توانایی فردی آن کروموزوم است.

- عملگرهای ژنتیکی: در الگوریتم های ژنتیکی در طی مرحله تولید مثل [۷] از عملگرهای ژنتیکی استفاده می شود. با تأثیر این عملگرها بر روی یک جمعیت نسل بعدی آن جمعیت تولید می شود. عملگرهای انتخاب [۸] ، ادغام [۹] و جهش [۱۰] معمولا بیشترین کاربرد را در الگوریتم های ژنتیکی دارند.

۴.۲ عملگرهای ژنتیکی

- عملگر انتخاب: این عملگر از بین کروموزوم های موجود در یک جمعیت تعدادی کروموزوم را برای تولید مثل انتخاب می کنند. کروموزوم های برازنده تر شانس بیشتری دارند تا برای تولید مثل انتخاب شوند.
- عملگر ادغام: بر روی یک زوج کروموزوم از نسل مولد عمل کرده و یک زوج کروموزوم جدید تولید می کنند، عملگرهای ادغام متعددی از قبیل ادغام تک نقطه ای وادغام دو نقطه ای وجود دارد.
- عملگر جهش: پس از اتمام عمل ادغام، عملگر جهش بر روی کروموزوم ها اثر داده می شود. این عملگر یک ژن از یک کروموزوم را به طور تصادفی انتخاب نموده، سپس محتوای آن ژن را تغییر می دهد.

یک راه حل برای حل مسئله این است که به صورت پارامترهایی نشان داده می شود که به آن کروموزوم یا ژنوم گویند. کروموزوم ها به شکل یک رشته ساده از داده ها نمایش داده می شوند. در ابتدا چندین مشخصه به صورت تصادفی برای ایجاد نسل اول تولید می شوند، در طول هر نسل هر کدام از مشخصه ها ارزیابی می شود و ارزش هر نسل توسط تابع تناسب اندازه گیری می شود. برای هر فرد یک جفت والد انتخاب می شود. انتخاب ها به گونه ای هستند که مناسب ترین عناصر انتخاب می شوند تا حتی ضعیفترین عناصر هم شانس انتخاب داشته باشند. چندین الگوی انتخاب وجود دارد: الگوی چرخ رولت و الگوی انتخاب مسابقه ای.

---

[۷] Reproduction
[۸] Selection
[۹] Crossover
[۱۰] Mutation

۵.۲ مکانیسم نمونه گیری

مکانیسم نمونه گیری به چگونگی انتخاب کروموزوم ها از فضای نمونه گیری مربوط می شود و دارای رویکرد زیر می باشد:

۱.۵.۲ انتخاب چرخ رولت

انتخاب چرخ رولت [۱۱] اولین بار توسط هلند پیشنهاد شد. یکی از مناسب ترین انتخاب های تصادفی بوده که ایده آن احتمال انتخاب می باشد. احتمال انتخاب هر کروموزوم براساس برازندگی آن محاسبه می شود؛ بطوریکه اگر f_k مقدار برازندگی کروموزوم k ام باشد، احتمال بقای متناظر با آن کروموزوم عبارتند از:

$$P_k = f_k / \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad (n = pop - size) \tag{۱.۲}$$

حال کروموزوم ها را براساس p_k مرتب کرده و q_k که همان مقادیر تجمعی p_k می باشد، به صورت زیر به دست می آید:

$$q_k = \sum_{i=1}^{k} p_i \tag{۲.۲}$$

در روش انتخاب چرخ رولت به این صورت عمل می شود که برای انتخاب هر کروموزوم ابتدا یک عدد تصادفی بین صفر و یک تولید شده و سپس عدد مذکور در هر بازه ای که قرار گرفت، کروموزوم متناظر با آن انتخاب می شود. البته روش پیاده کردن چرخ رولت به این شکل است یک دایره را در نظر گرفته و آن را به تعداد کروموزوم ها طوری تقسیم می کنیم که هر بخش متناظر با مقدار برازندگی کروموزوم مربوطه باشد. حال چرخ را چرخانده و هر کجا چرخ متوقف شد به شاخص چرخ نگاه کرده و کروموزوم مربوط به آن بخش انتخاب می شود. این فرایند باعث به وجود آمدن نسل جدیدی از کروموزوم ها می شود که با نسل قبلی کاملا متفاوت است. کل فرایند برای نسل بعدی هم تکرار می شود، جفت ها برای ترکیب انتخاب می شوند، جمعیت نسل سوم به وجود می آید و ...، این فرایند تکرار می شود تا این که به آخرین مرحله برسیم.
در مورد مسائل بهینه سازی توابع این شاخص ها همان تابع هدف مسئله است. در این گونه مسائل بعد از تبدیل کروموزوم به مجموعه جواب مسئله که به آن فنوتایپ [۱۲] گویند و پس از قرار دادن آن در تابع هدف مسئله مقدار برازندگی کروموزوم حاصل می شود. بسته به این که مسئله کمینه سازی یا بیشینه سازی باشد، کروموزوم های دارای برازش کمتر یا بیشتر مناسب تر خوانده می شوند.

شرایط خاتمه الگوریتم های ژنتیک:

[۱۱] Selection Wheel Roulette
[۱۲] phonotype

- بودجه اختصاص داده شده تمام شود.
- یک فرد (فرزند تولید شده) پیدا شود که مینیمم (کمترین) ملاک را برآورده کند.
- بیشترین درجه برازش فرزندان حاصل شود به گونه ای که دیگر نتیجه بهتری حاصل نشود.
- بازرسی دستی
- ترکیبی از موارد بالا

فصل ۳

یک روش جدید برای محاسبه مینیمم حساسیت در ماتریس پس‌خورد حالت

۱.۳ مقدمه

یک سیستم ثابت زمانی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و A و B به ترتیب ماتریس‌های $n \times n$ و $n \times m$ با درایه‌های ثابت هستند.

برای پایداری این سیستم باید ماتریس پس‌خورد حالت F در قانون کنترل $u = Fx(t)$ را به گونه‌ای یافت که همه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ در داخل محدوده معین و از پیش تعیین شده قرار گیرد.

در اینجا فرض بر این است که A می‌تواند منفرد نیز باشد، و در مورد B داریم: $m \leqslant n \quad rank(B) = m$

در این بخش، ابتدا با استفاده از تبدیل T زوج (B, A) را به فرم استاندارد اشلون تبدیل کرده و سپس با استفاده از ماتریس تبدیل S فرم استاندارد اشلون را به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم و با استفاده از آن ماتریس پس‌خورد حالتی را که همه مقادیر ویژه را به صفر می‌برد محاسبه می‌کنیم، پس از آن ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری غیرخطی را برای مقادیر ویژه غیر صفر تعیین می‌کنیم و در پایان یک روش جدید برای محاسبه مینیمم حساسیت در ماتریس پس‌خورد حالت ارائه می‌دهیم.

۲.۳ تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون

فرض کنید، T تبدیلات تشابهی باشد که بر فضای حالت $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است. معادله حالت به صورت

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (۱.۳)$$

است. حال فرض کنید، بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود یعنی؛

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \tag{۲.۳}$$

در نتیجه،

$$x(t) = T\hat{x}(t) \tag{۳.۳}$$

با جایگذاری در معادله (۱.۳) خواهیم داشت:

$$T\dot{\hat{x}}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در T^{-1} خواهیم داشت:

$$\dot{\hat{x}}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \tag{۴.۳}$$

تعریف می کنیم:

$$\hat{A} = T^{-1}AT \qquad \hat{B} = T^{-1}B \tag{۵.۳}$$

با جایگذاری در معادله (۴.۳) خواهیم داشت:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \tag{۶.۳}$$

اگر هدف کنترل حالت و رساندن حالت به نقطه تعادل (صفر) باشد، با توجه به رابطه فوق می‌توان، در فضای حالت $\hat{x}$ را به صفر رساند. بدیهی است که $x(t)$ نیز در فضای اولیه به تعادل خواهد رسید.
بنابراین، حل مسئله با زوج (B, A) با حل همان مسئله با زوج $(\hat{B}, \hat{A})$ هم ارز است. ماتریس T را می‌توان به صورت منحصر بفردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد. به این ترتیب که n ستون اول مستقل خطی ماتریس کنترل پذیری Q را ستون‌های ماتریس T قرار می‌دهیم. فرض کنید، $b_1, b_2, \ldots, b_m$ به ترتیب ستون‌های اول تا m ام ماتریس B باشد، بنابراین می‌توان، ماتریس Q را به صورت زیر نمایش داد.

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots, A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1, & \ldots & b_m, & Ab_1, & \ldots, & Ab_m, & A^{n-1}b_1, & \ldots, & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}$$

از آنجایی که، سیستم کنترل پذیر است، پس می‌توان، n ستون از اولین ستون‌های Q را به طوری به دست آورد که مستقل خطی باشد، برای نمایش آسانتر ستون‌های Q در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد، آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\begin{matrix} b_1, & b_2, & \ldots & b_m \\ Ab_1 & Ab_2 & \ldots & Ab_m \\ A^2b_1 & A^2b_2 & \ldots & A^2b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & A^{n-1}b_2 & \ldots & A^{n-1}b_m \end{matrix}$$

با شروع از گوشه چپ بالایی بلوک به طرف راست و پایین بردارهایی که با بردارهای قبلش وابسته خطی‌اند را حذف می‌کنیم و اگر برداری حذف شد، همه بردارهای واقع در زیر آن نیز از بلوک حذف می‌شوند.
این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که n بردار مستقل خطی به دست آید و بقیه بردارهای باقیمانده را حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را مرتبا ستون‌های ماتریس T قرار دهیم، آنگاه T معکوس پذیر خواهد بود و تبدیل به دست آمده، تبدیل مورد نظر خواهد بود.

$$T = [b_1, b_2, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, A^{p_1 - 1} b_1, \dots, A^{p_m - 1} b_m]$$

ناورداهای کرونکر: اعداد $P_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ که در بخش قبل به بردارهای ستونی متناظر b_i در ماتریس تبدیل T مربوط می‌شوند را ناوردای کرونکر زوج (B, A) می‌نامیم.
واضح است که،

$$1 \leqslant P_i \leqslant n \qquad \sum_{i=1}^{m} = n$$

.

تعریف ۱.۲.۳. ناوردای کرونکر زوج کنترل پذیر (A, B) را منظم می‌نامیم، هرگاه اختلاف بین ماکزیمم و مینیمم آنها حداکثر برابر واحد باشد و در غیر این صورت، آن را نامنظم می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۳. در $\nu = max\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ ، ν را اندیس کنترل پذیری سیستم می‌نامیم، زیرا هر بردار غیر صفری در فضای حالت را می‌توان در حداکثر ν واحد زمانی برای سیستم‌های گسسته به حالت تعادل رساند.

در حالت برابر بودن ناورداهای کرونکر که حالت خاصی از ناورداهای کرونکر می‌باشد، نمی‌توان با ورودیهای متفاوت سیستم را به حالت تعادل رساند و مجموعه‌ای از ورودیهای منحصر بفرد برای آن به دست می‌آید.
فرض کنید، برای زوج کنترل پذیر (B, A) ناوردای کرونکر منظم باشد، می‌توان در صورت لزوم ستون‌های ماتریس B را جابجا کرد و یا بطور معادل، ماتریس B را با ماتریس BP که $P_{m \times m}$ یک ماتریس جایگشتی است و با جابجایی ستون‌های B ایجاد می‌شود تعویض کرد. ناورداهای کرونکر (BP, A) در رابطه زیر صدق کند:

$$\hat{P}_1 \geqslant \hat{P}_2 \geqslant \dots \geqslant \hat{P}_m$$

واضح است، اگر زوج (B, A) کنترل پذیر باشد، آنگاه زوج (BP, A) نیز کنترل پذیر است و برعکس. همچنین اندیس کنترل پذیری دو زوج با یکدیگر برابر است.
تذکر: حل مسئله کنترل سیستم به روش پس‌خورد حالت برای زوج (B, A) با حل مسئله برای زوج (BP, A) معادل است، هرگاه P یک ماتریس معکوس پذیر باشد.
فرض کنیم، ناورداهای کرونکر زوج (B, A) منظم باشند و به صورت زیر مرتب شده باشند:

$$P_1 \geqslant P_2 \geqslant \dots \geqslant P_m$$

که در آن،

$$P_۱ = P_۲ = \ldots = P_r = q + ۱$$

و

$$P_{r+۱} = \ldots = P_m = q$$

$$s = m - r \qquad q = [\frac{n}{m}]$$

با توجه به تعریف ناورداهای کرونکر نتیجه می‌گیریم، r تا از این ناورداهای کرونکر برابر $q + ۱$ و s تای دیگر برابر q خواهند بود. $r + s = m$.

و اگر $r = ۰$ باشد، آنگاه $P_۱ = P_۲ = \ldots = P_m$ فرم استاندارد اشلون می تواند به طور عددی با انجام عملیات سطری تشابهی روی زوج (B, A) و به دنبال آن، عملیات ستونی تشابهی، تنها روی ماتریس A به دست آید.

حال اگر، عملیات ستونی مشابه بر روی یک ماتریس $n \times n$ انجام شود، ماتریس تبدیل T بدون احتیاج به تشکیل ماتریس کنترل پذیری به سادگی به دست می آید. به عبارت دیگر، برای تبدیل زوج (B, A) به $(\hat{B}, \hat{A})$ ماتریس افزوده $[B, A, I_n]$ را در نظر می گیریم و عملیات تشابهی زیر را تعریف می کنیم:

۱. ضرب یا تقسیم یک سطر از Q به کمیت اسکالر $K \neq ۰$ و به دنبال آن، تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس A

$$Row(i) \longrightarrow Row(i) \times k \qquad on \;\; Q$$

$$Column(i) \longrightarrow Column(i)/k \qquad on \;\; A$$

۲. تفاضل مضربی از سطر i ام ماتریس Q از سطر j ام آن و به دنبال آن، جمع همان مضرب از ستون j ام ماتریس A با ستون i ام ماتریس A.

$$Row(j) \longrightarrow Row(j) - kRow(i) \qquad on \;\; Q$$

$$Column(i) \longrightarrow Column(i) + kColumn(j) \qquad on \;\; A$$

۳. جابجایی سطر i ام و سطر j ام از ماتریس Q و به دنبال آن، جابجایی ستون j ام و ستون i ام از ماتریس A

$$Row(i) \longleftrightarrow Row(j) \qquad on \;\; A$$

$$Column(j) \longleftrightarrow Column(i) \qquad on \;\; Q$$

بدین سان $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-۱}]$ به دست می آید. اگر عملیات ستونی در ماتریس I_n ذخیره شود، ماتریس تبدیل T به دست خواهد آمد.

مثال ۳.۲.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$x(i + ۱) = Ax(i) + Bu(i)$$

که در آن،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد اشلون را با استفاده از عملیات تشابهی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$Q = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۲ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r(۲)\to r(۳) on Q]{C(۲)\to C(۳) on A} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & -۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r(۲)-۴r(۴)\to r(۲) on Q]{C(۴)+۴C(۲)\to C(۴) on A} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۵ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r(۳)-r(۴)\to r(۳) on Q]{C(۴)+C(۳)\to C(۴) on A} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۵ & -۴ & ۱ & -۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$T^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳.۳ فرم همدم برداری اولیه

فرض کنید، S تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است و بردار حالت سیستمی که به فرم استاندارد اشلون است، توسط ماتریس S^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی؛

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۷.۳)$$

با جایگذاری $\tilde{x}(t)$ در معادله (۱.۳) خواهیم داشت:

$$S\dot{\tilde{x}}(t) = \hat{A}\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (۸.۳)$$

با ضرب طرفین بالا، در S^{-1} خواهیم داشت:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \quad (۹.۳)$$

قرار می دهیم،

$$\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS \quad (۱۰.۳)$$

$$\tilde{B} = S^{-1}T^{-1}B \quad (۱۱.۳)$$

با جایگذاری در معادله (۹.۳) خواهیم داشت:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (۱۲.۳)$$

به گونه ای که زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ به فرم همدم برداری اولیه خواهد بود. حل معادله سیستم (۱۲.۳) هم ارز با حل معادله (۱.۳) است.

در حقیقت برای تبدیل (B, A) به $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را در نظر گرفته و عملیات تشابهی را روی آن انجام داده تا به فرم استاندارد اشلون تبدیل شود یعنی؛ $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ سپس ماتریس $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ را در نظر گرفته و با استفاده از عملیات تشابهی آن را به فرم همدم برداری تبدیل می کنیم. یعنی؛ $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$ در حالتی که ناورداهای کرونکر منظم باشد، فرم همدم برداری به صورت

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}$$

که در آن، B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی و معکوس پذیر است و G_0 ماتریس دلخواه $m \times n$ و G_1 ماتریس $(n-m) \times n$ است که دارای خصوصیات زیر می‌باشد:

۱. آخرین ستون بلوک G_1 مساوی صفر است.

۲. بقیه ستون‌های G_1 ستون‌هایی از ماتریس I_{n-m} است.

۳. اگر $e_1, e_2, \ldots, e_{n-m}$ به ترتیب ستون‌های اول تا $n-m$ ام ماتریس I_{n-m} باشند، آنگاه این بردارها به ترتیب اندیس‌شان در ستون‌های G_1 ظاهر می‌شوند، یعنی اگر $i < j$ آنگاه e_i در G_1 قبل از e_j قرار می‌گیرد.

با استفاده از فرم استاندارد اشلون، به دست آمده در مثال قبل فرم همدم برداری را به دست می‌آوریم.

$$\hat{Q}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۵ & -۴ & ۱ & -۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن فرم همدم برداری ابتدا اعمال ستونی مقدماتی روی ماتریس $\hat{A}$ و سپس اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس $\hat{Q}$ انجام می‌شود.

$$\xrightarrow[C(۳)-C(۱)\rightarrow C(۳) on \hat{A}]{r(۱)+r(۳)\rightarrow r(۱) on \hat{Q}}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۵ & -۵ & ۱ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C(۴)+C(۱)\rightarrow C(۴) on \hat{A}]{r(۱)-r(۴)\rightarrow r(۱) on \hat{Q}}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & -۵ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C(۴)-۴C(۲)\rightarrow C(۴) on \hat{A}]{r(۲)+۴r(۴)\rightarrow r(۲) on \hat{Q}}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & -۵ & -۴ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ \dots & \dots \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \tilde{B}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۴ & ۴ & ۵ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad S^{-۱}T^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

لذا ناورداهای کرونکر زوج $(\tilde{B},\tilde{A})$ منظم هستند و عبارتند از: $p_۱=۲, p_۲=۲$

۴.۳ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله ماتریس پس خورد حالت

هدف از کنترل یک سیستم، یافتن ماتریس پس خورد حالت K در فضای تبدیل (B,A) است، به گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته

$$\Gamma=A+BK \qquad (۱۳.۳)$$

در مجموعه از پیش تعریف شده $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ مرسوم به طیف مقادیر ویژه [1] با این خاصیت که، λ_i ها یا حقیقی‌اند و یا به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند، قرارگیرند. این مساله را تخصیص مقادیر ویژه گویند.

برای یافتن K ی که در رابطه

$$P_n(s) = det(sI - A - BK) \tag{۱۴.۳}$$

صدق کند، به گونه ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته Γ در مجموعه فوق باشد، روش زیر را داریم: کرباسی و بل در [۳] نشان داده‌اند که ساده ترین راه آن است که در فضای تبدیل یافته $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ماتریس $\tilde{K}$ را به گونه‌ای بیابیم که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته

$$\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} \tag{۱۵.۳}$$

همان مقادیر ویژه مورد نظر باشد. بدین سان ماتریس

$$\tilde{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} & O_{m,n} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \tag{۱۶.۳}$$

را در نظر بگیرید. در واقع،

$$\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} \tag{۱۷.۳}$$

اگر ماتریس قطری

$$D = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \tag{۱۸.۳}$$

D با Γ_0 جمع شود، بدیهی است که مقادیر ویژه ماتریس مجموع همان مقادیر ویژه D خواهد بود، زیرا

$$\tilde{V} = \tilde{\Gamma}_0 + D \tag{۱۹.۳}$$

(۱۹.۳) یک ماتریس پایین مثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن همان طیف مقادیر ویژه λ_i می تواند باشد. بنابراین، مقادیر ویژه $\tilde{V}$ نیز در مجموعه $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ می باشند. حال اگر عملیات تشابهی

$$C(j) = C(j) - \lambda_j C(i) \tag{۲۰.۳}$$

و به دنبال آن،

$$r(i) = r(i) + \lambda_j r(j) \tag{۲۱.۳}$$

را به ازای $i = j - m \quad j = n, n-1, \ldots, m$ در $\tilde{V}$ انجام دهیم، به $\tilde{A}_\lambda$ تبدیل می شود که از نظر ساختاری هم ارز $\tilde{A}$ است. بدین معنی که،

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} & G_\lambda & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \tag{۲۲.۳}$$

است. چون ماتریس $\tilde{A}_\lambda$ از ماتریس $\tilde{V}$ با استفاده از عملیات تشابهی به دست آمده است، بدیهی است که مقادیر ویژه تغییر نمی کنند. بنابراین، مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ برابر با مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{V}$ است. از این رو،

$$\tilde{K} = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda) \tag{۲۳.۳}$$

---

[1] eigenvalue spectrum

ماتریس پس خورد حالت در فضای $(\tilde{B}, \tilde{A})$ است.
برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت در فضای (B, A) داریم،

$$K_p = \tilde{K}T^{-1} = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1} \tag{۲۴.۳}$$

که آن را ماتریس پس خورد حالت اولیه، [۲] می نامیم، زیرا از فضای تبدیل یافته ای که در مبنای پایه است، موسوم به فضای حالت اولیه به دست آمده است.

۱.۴.۳ محاسبه ماتریس پس خورد حالت پارامتری غیرخطی

در (۲۲.۳) G_λ را که یک ماتریس $m \times n$ و درایه های آن پارامتری است را در نظر می گیریم.

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \tag{۲۵.۳}$$

حال با توجه به اینکه مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{A}_\lambda$ باید در طیف Λ قرار گیرد و به منظور تعیین رابطه بین درایه های g_{ij} باید قرار دهیم:

$$det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = P_n(\lambda) = 0 \tag{۲۶.۳}$$

با بسط این دترمینان چند جمله ای درجه ی n به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_n(\lambda) = det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n\lambda) \tag{۲۷.۳}$$

حال با توجه به اینکه، ریشه های این چند جمله ای باید همان مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ که اعداد حقیقی و مختلط در طیف Λ هستند، باشند می توان نوشت:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \tag{۲۸.۳}$$

حال با مساوی قرار دادن دو رابطه (۲۷.۳) و (۲۸.۳) می توان ضرایب $(i = 1, 2, \ldots, n)$ C_i را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$C_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \tag{۲۹.۳}$$

$$C_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_i\lambda_j + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \sum_{i=j\ i<j}^{n} \lambda_i\lambda_j \tag{۳۰.۳}$$

$$\vdots$$

$$C_n = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \tag{۳۱.۳}$$

حال با محاسبه $det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I)$ و روابط (۲۹.۳) و (۳۰.۳) و (۳۱.۳) و معادل سازی ضرایب، n معادله به صورت زیر به دست می آید:

---

[۲] primary state feedback matrix

$$\begin{aligned} f_۱(g_{۱۱}, g_{۱۲}, \ldots, g_{mn}) &= C_۱ \\ f_۲(g_{۱۱}, g_{۱۲}, \ldots, g_{mn}) &= C_۲ \\ &\vdots \\ f_n(g_{۱۱}, g_{۱۲}, \ldots, g_{mn}) &= C_n \end{aligned} \tag{۳۲.۳}$$

در این روش، یک سیستم غیرخطی از n معادله با $n \times m$ مجهول به دست می آید. با انتخاب $N = n(m - ۱)$ مجهول به صورت دلخواه حل سیستم امکان پذیر خواهد بود. بنابراین انتخاب های مختلف جواب های متفاوتی به دست می دهند. در پی آن هستیم ماتریس پس خورد حالتی را به دست آوریم که نزدیکترین جواب به پاسخ مورد نظر باشد. به این منظور از یک عدد شرطی استفاده می کنیم که فرمول آن مرتبط با بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه داده شده است. این کار را کرباسی و سلطانیان در سال ۲۰۰۲ انجام داده اند [۱۹]. حال برای بررسی تخصیص مقادیر ویژه به یاد داشته باشید که برای جفت کنترل پذیر (A, B) و D باید ماتریس حقیقی K را پیدا کنیم به گونه ای که،

$$(A + BK)X = XD \tag{۳۳.۳}$$

که در آن،

$$D = diag(\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n) \tag{۳۴.۳}$$

از (۲۸.۳) متوجه می شویم که ستون های $x_j\ (j = ۱, ۲, \ldots, n)$ از ماتریس X بردارهای ویژه ماتریس $\Gamma = A + BK$ متناظر با مقادیر ویژه λ_j هستند.

به طور مشابه، سطرهای $(y_j)^t\ (j = ۱, ۲, \ldots, n)$ از ماتریس $Y^t = X^{-۱}$ متناظر با بردارهای ویژه چپ هستند. ویکینسون [۳] حساسیت مقادیر ویژه λ_j را در آشفتگی عناصر A و B و K براساس قدرمطلق عدد شرطی $C_j = ۱/S_j$ که در آن،

$$S_j = \frac{|\ (y_j)^t x_j\ |}{\|\ y_j\ \|_۲ \|\ x_j\ \|_۲} \leqslant ۱ \tag{۳۵.۳}$$

نشان داده است [۲۳].

$$max\ C_j \leqslant K_۲(A) = \|\ x\ \|_۲ \|\ x^{-۱}\ \|_۲ \tag{۳۶.۳}$$

$K_۲(X)$ عدد شرطی ماتریس $X = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ است.

برای λ_j ، حساسیت S_j کسینوس زاویه بین بردار ویژه چپ و بردار ویژه راست متناظر با λ_j است. عدد شرطی بزرگ منجر به افزایش حساسیت مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته می شود. بنابراین، یک جنبه مهم تخصیص مقادیر ویژه دستیابی به عدد شرطی کوچک برای ماتریس بردارهای ویژه سیستم حلقه بسته است.

الگوریتم زیر، برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت با مینیمم حساسیت به کار می رود:

هدف: به دست آوردن پارامترهای g_{ij} برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت K به منظور مینیمم سازی

---
[۳] Wikinson

عدد شرطی ماتریس بردار ویژه X سیستم حلقه بسته یعنی؛ به دست آوردن K با مینیمم حساسیت.

ورودی: جفت کنترل پذیر (B, A) و طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{\lambda_۱, \dots, \lambda_n\}$.

گام ۱: $B_۰^{-۱}$ ، $G_۰$ و $T^{-۱}$ را می یابیم.

گام ۲: ضرایب معادله مشخصه که ریشه هایش همان مقادیر ویژه خواسته شده در طیف Λ هستند را به دست می آوریم.

گام۳: چندجمله ای مشخصه $\tilde{A}_\lambda$ را به دست می آوریم.

گام ۴: سیستم غیر خطی از معادلات وابسته به پارامترهای g_{ij} را با محاسبه ضرایب چند جمله ای مشخصه به دست آمده در گام ۲ و۳ می سازیم.

گام ۵: همه جواب های ممکن، برای سیستم غیر خطی از معادلات به دست آمده در گام ۴ را پیدا می کنیم.

گام ۶: یک عدد شرطی بزرگ را به عنوان کران بالا تعیین می کنیم. سپس یکی از جواب های پارامتریک را انتخاب می کنیم. مقادیر تصادفی را برای پارامترهای آزاد این جواب پارامتری طراحی می کنیم و ماتریس پس خورد حالت K ی متناظر با عدد شرطی را برای ماتریس بردار ویژه X از سیستم حلقه بسته را به دست می آوریم.

مثال ۱.۴.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -۰/۹۹۷۰ & ۰/۰۰۱۰ & ۰/۰۵۱۷ & -۰/۳۴۰۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰/۷۳۸۰ & -۱/۱۵۰۰ & ۰ & -۲/۶۹۰۰ \\ -۰/۵۰۶۰ & ۰/۱۳۸۰ & ۰ & ۵/۹۱۰۰ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰/۰۲۴۶ & ۰ & ۰/۰۷۵۵ \\ -۰/۷۴۲۰ & ۵/۲۲۰۰ & ۴/۴۸۰۰ \\ ۰/۹۸۴۰ & ۰/۰۹۹۸ & -۵/۰۳۰۰ \\ ۰/۰۲۴۶ & ۰ & ۰/۰۷۵۵ \end{bmatrix}$$

به وسیله نرم افزار مطلب به دست می آوریم:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -۱۵/۳۴۶۳ & -۲/۰۹۰۹ & -۱/۵۲۹۳ & -۴/۰۷۲۸ \\ -۰/۶۰۰۷ & -۰/۰۶۸۸ & -۰/۰۸۷۸ & ۰ \\ ۱۸/۷۹۱۹ & ۲/۱۶۴۷ & ۳/۴۹۴۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -۰/۸۲۳۲ & ۰/۶۲۲۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل تشابهی که جفت کنترل پذیر (B, A) را به فرم همدم برداری $(\tilde{B}, \tilde{A})$ تبدیل می کند به شکل زیر است:

$$T^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱/۱۹۲۴ & -۰/۳۳۲۷ & ۰/۱۲۵۶ & -۱۵/۱۷۸۰ \\ -۰/۳۳۲۹ & ۰/۱۵۸۳ & ۰/۱۸۸۵ & -۰/۳۱۰۸ \\ ۱۲/۹۸۲۰ & ۰/۳۷۵۲ & -۰/۰۰۷۲ & ۱۲/۴۴۲۷ \\ -۲/۴۲۸۵ & ۰ & ۰ & ۲/۴۲۸۵ \end{bmatrix}$$

از ما خواسته شده که طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{-۱, -۲, -۳, -۰/۵\}$ را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهیم. از (۲۷.۳) و (۲۸.۳) معادلات زیر را به دست می آوریم:

$$-(g_{۱۱} + g_{۲۲} + g_{۳۳}) = ۶/۵ \qquad (۳۷.۳)$$

$$\begin{aligned} g_{۱۱}g_{۲۲} - g_{۳۱}g_{۱۳} - g_{۱۲}g_{۲۱} - g_{۲۳}g_{۳۲} + \\ g_{۱۱}g_{۳۳} - g_{۲۲}g_{۳۳} - g_{۱۴} = ۱۴ \end{aligned} \tag{۳۸.۳}$$

$$\begin{aligned} -g_{۱۲}g_{۲۴} - g_{۱۳}g_{۳۴} + g_{۲۲}g_{۱۴} + g_{۱۴}g_{۳۳} - g_{۳۱}g_{۱۲}g_{۲۳} + \\ g_{۳۱}g_{۱۳}g_{۲۲} - g_{۲۱}g_{۳۲}g_{۱۳} + g_{۱۱}g_{۳۲}g_{۲۳} - g_{۱۱}g_{۲۲}g_{۳۳} + \\ g_{۲۱}g_{۱۲}g_{۳۳} = ۱۱/۵ \end{aligned} \tag{۳۹.۳}$$

$$\begin{aligned} g_{۳۲}g_{۱۳}g_{۳۴} + g_{۱۲}g_{۲۴}g_{۳۳} - g_{۱۲}g_{۲۳}g_{۳۴} - g_{۳۲}g_{۱۳}g_{۲۴} + \\ g_{۳۲}g_{۱۴}g_{۲۳} - g_{۲۲}g_{۱۴}g_{۳۳} = ۳ \end{aligned} \tag{۴۰.۳}$$

که شامل چهار معادله و دوازده مجهول است. تمام جواب های ممکن را به دست می آوریم. در این روش، از سیستم معادلات غیر خطی (۳۷.۳) تا (۴۰.۳) روابط پارامتری و برای هر کدام از آنها یک مینیمم مقدار برای عدد شرطی می تواند به دست آید. همه اعداد شرطی که مینیمم حساسیت را برای هر جواب پارامتری تولید می کنند، در جدول زیر آمده است:

جدول ۱ در این جدول اعداد شرطی از چپ به راست افزایش یافته است.

۳.۹۷۸۸	۴.۳۱۱۳	۴.۳۵۲۵	۴.۴۷۳۶	۵.۶۷۵۹	۶.۹۵۵۷
۷.۱۸۹۲	۷.۳۷۷۹	۷.۵۹۸۹	۷.۸۶۹۳	۸.۶۵۵۶	۸.۹۹۷۵
۹.۷۵۱۲	۱۰.۶۹۱۷	۱۰.۹۹۳۱	۱۱.۳۸۷۵	۱۱.۷۸۹۴	۱۲.۷۸۹۰
۱۲.۷۹۳۱	۱۸.۸۶۳۹	۲۱.۹۹۱۱	۲۲.۹۸۷۵	۲۷.۹۲۶۳	۲۸.۶۳۴۳
۲۹.۵۷۹۳	۲۹.۸۰۵۲	۳۰.۲۹۷۶	۳۱.۹۷۱۴	۳۲.۳۱۳۲	۳۶.۷۶۹۰
۳۷.۶۹۰۷	۴۲.۵۷۶۲	۵.۷۲۸۸	۵۰.۹۱۳۷	۵۰.۹۸۸۴	۵۴.۳۸۸۶
۵۴.۹۸۹۴	۸۱.۸۷۰۶	۸۳.۷۷۱۱	۹۹.۷۲۶۰	۱۵۲.۷۹۸۱	۱۵۶.۲۲۲۱

جواب پارامتری که پایین ترین مقدار را برای عدد شرطی به دست می دهد، پس از یک بررسی به صورت زیر به دست می آید:

$$g_{۲۳} = ۰ \qquad g_{۳۲} = ۰$$

و به صورت زیر تعریف می شود:

$$g_{۱۲} = a \quad g_{۱۳} = b \quad g_{۲۱} = c \quad g_{۲۲} = d \quad g_{۳۱} = e \quad g_{۳۳} = f$$

روابط پارامتری را به صورت زیر داریم:

$$g_{۱۱} = -(d + f + ۶/۵)$$

$$g_{۱۴} = -(f^{۲} + d^{۲} + ac + be + df + ۶/۵(f + d) + ۱۴$$

$$g_{۲۴} = (۲d^{۴} + ۱۳d^{۳} + ۲۸d^{۲} + ۲d^{۲}ac + ۲۳d - ۲acdf + ۶)/۲a(f - d)$$

$$g_{۳۴} = (۲f^{۴} + ۱۳f^{۳} + ۲۸f^{۲} + ۲f^{۲}be + ۲۳f - ۲bdef + ۶)/۲b(d - f)$$

سپس به دست می آوریم:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -۳٫۵۸۶۹ & ۰٫۴۳۷۰ & ۰٫۲۷۷۷ & -۱٫۷۹۵۳ \\ ۰٫۰۶۱۰ & -۱٫۹۸۴۸ & ۰ & ۰٫۱۶۹۹ \\ ۰٫۲۱۶۵ & ۰ & -۰٫۹۲۸۳ & ۰٫۴۳۳۴ \end{bmatrix} \quad (۴۱.۳)$$

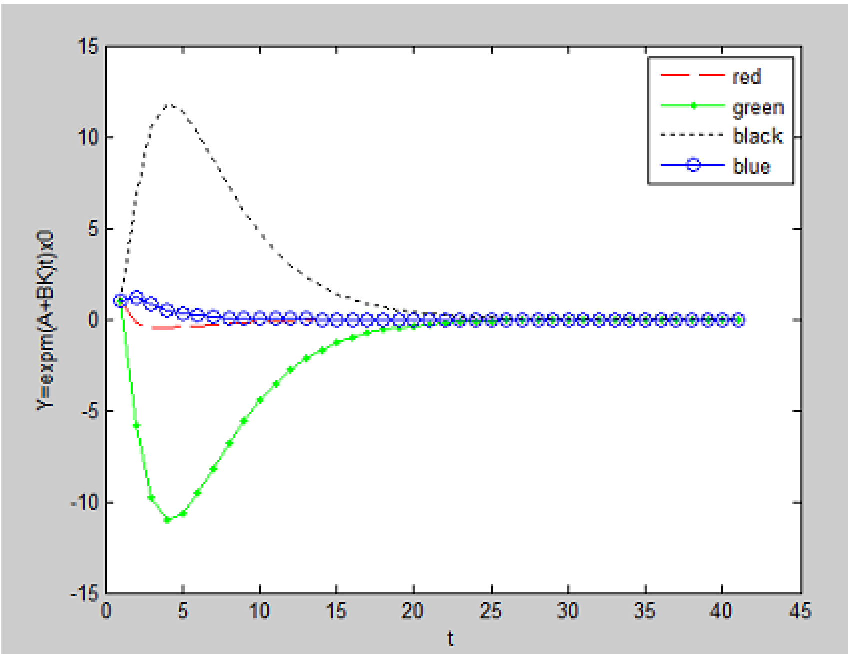
که ماتریس پس خورد حالت زیر را تولید می کند:

$$K = \begin{bmatrix} -۱۷٫۲۸۷۰ & ۰٫۱۳۱۲ & -۰٫۲۴۸۲ & -۱٫۲۵۹۸ \\ ۲٫۳۹۱۳ & -۰٫۳۵۰۴ & -۰٫۲۹۴۸ & -۰٫۴۱۹۶ \\ -۸۵٫۲۶۹۰ & -۰٫۶۰۹۲ & -۱٫۷۸۵۷ & ۵٫۳۳۵۴ \end{bmatrix} \quad (۴۲.۳)$$

$$A+BK = \begin{bmatrix} -۳٫۷۴۲۸ & ۰٫۰۴۶۶ & -۰٫۰۶۱۷ & -۰٫۹۶۰۶ \\ -۱٫۶۹۳۶ & -۰٫۷۸۹۳ & -۰٫۳۲۵۸ & -۱۱٫۷۹۳۱ \\ ۰٫۵۹۷۶ & -۱٫۲۹۴۴ & -۱٫۶۸۸۱ & ۱۲٫۲۸۳۰ \\ ۲٫۵۰۷۲ & -۰٫۰۰۵۱ & ۰٫۰۷۵۳ & -۰٫۴۶۹۹ \end{bmatrix}$$

$$eig(A+BK) = \{-۳٫۲۰۶۶, -۰٫۵۳۹۷, -۰٫۹۴۳۰, -۲٫۰۰۰۷\}$$

در حقیقت، ۳.۹۷۸۸ کوچک ترین مقدار برای عدد شرطی مسئله تخصیص مقادیر ویژه بالاست که به دست آمده است .



شکل ۱.۳: نمایش پایداری

حالت تعادل حالتی است که در صورت ورودی ثابت و نبود اغتشاش، حالت و خروجی در همان حالت ثابت باقی بماند و یک سیستم در صورتی پایدار است که هنگام اعمال شرایط اولیه به آن به حالت تعادل برگردد که آنچه مورد انتظار است در این نمودار برآورده شده است.

مثال ۲.۴.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 5.6790 & 0\\ 1.1360 & -3.1460\\ 1.1360 & 0\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix} 1.3800 & -0.2077 & 6.7150 & -5.6760\\ -0.5814 & -4.2900 & 0 & 0.6750\\ 1.0670 & 4.2730 & -6.6540 & 5.8930\\ 0.0480 & 4.2730 & 1.3430 & -2.1040\end{bmatrix}$$

با نرم افزار مطلب به دست می آوریم:

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \tilde{A}=\begin{bmatrix} -5.2582 & 0.2497 & -1.2409 & 2.6979\\ -1.3788 & -6.4098 & -11.0254 & 19.5352\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ماتریس تبدل تشابهی که جفت کنترل پذیر (B,A) را به $(\tilde{B},\tilde{A})$ تبدیل می کند، به صورت زیر است،

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} -0.0040 & 0.1839 & 0 & -0.0393\\ -0.0653 & 0.0098 & -0.3179 & 0.2687\\ -0.0071 & -0.0071 & 0 & 0.0356\\ -0.0473 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

از ما خواسته شده که طیف مقادیر ویژه $\Lambda=\{-0.2,-0.5,-5.0566,-8.6659\}$ را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد. معادلات غیر خطی زیر را از آن داریم:

$$-(g_{11}+g_{22})=14.4225 \tag{۴۳.۳}$$

$$g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}-g_{13}-g_{24}=53.5257 \tag{۴۴.۳}$$

$$g_{22}g_{13}-g_{12}g_{23}+g_{11}g_{24}-g_{14}g_{21}=32.0462 \tag{۴۵.۳}$$

$$g_{24}g_{13}-g_{14}g_{23}=4.3820 \tag{۴۶.۳}$$

که شامل چهار معادله و هشت مجهول است. دنباله افزایشی از اعداد شرطی که مینیمم حساسیت را برای جواب پارامتری دارد را در جدول ۲ نشان می دهیم:

جدول ۲: اعداد شرطی به ترتیب افزایشی از چپ به راست

۳.۱۷۸۱	۳.۴۱۸۹	۳.۴۹۶۵	۳.۵۲۶۸	۳.۶۶۱۳	۳.۶۷۸۹
۴.۳۹۲۹	۴.۳۹۴۵	۴.۸۷۵۷	۵۲.۹۵۶۶	۵۶.۹۲۶۸	

جواب پارامتری که مقدار بهینه را برای عدد شرطی پیدا شده از سیستم معادلات (۴۳.۳) تا (۴۶.۳) به دست می‌دهد به وسیله

$$g_{21}=a,\quad g_{22}=b,\quad ,g_{23}=c,\quad g_{24}=d$$

و

$$e=a^2d-abc-c^2$$

پیدا می‌شود. جواب‌های پارامتری دیگر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$g_{11} = -(b + 14.4225)$$

،

$$g_{12} = (-ad^2 - ab^2d - 14.4225abd - 53.5257ad - 4.3820a + 2bcd$$
$$+b^3c + 53.5257bc + 14.4225b^2c + 14.4225cd + 32.0462c)/e$$

،

$$g_{13} = (c^2d - abcd + 4.3820a^2 - 14.4225acd - 32.0462ac + b^2c^2$$
$$+14.4225bc^2 + 53.5257c^2)/e$$

،

$$g_{14} = (-abd^2 + 4.3820ab + 4.3820c + 53.5257cd + cd^2 - 32.0462ad$$
$$-14.4225ad^2 + 14.4225bcd + b^2cd)/e$$

سپس با استفاده از یک برنامه جستجو G_λ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -5.7182 & -0.3922 & -1.9530 & 0.2800 \\ -1.6602 & -8.7043 & 1.4452 & -2.4509 \end{bmatrix}$$

از (۲۳.۳) ماتریس پس‌خورد زیر تولید می‌شود:

$$K = \begin{bmatrix} 0.1632 & -0.0857 & 0.2041 & -0.1797 \\ 1.1024 & -0.1622 & 0.7296 & -0.1606 \end{bmatrix}$$

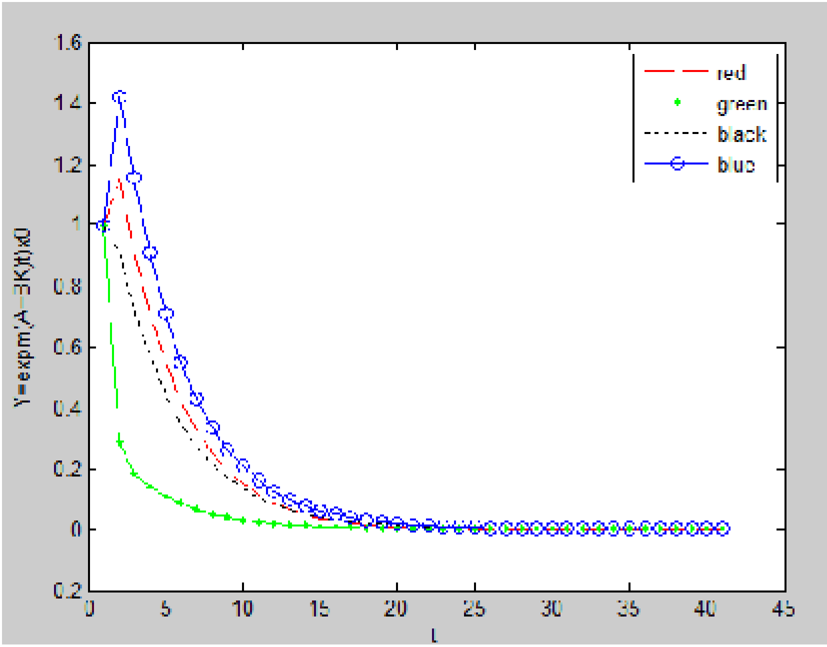
$$A + Bk = \begin{bmatrix} 1.3800 & -0.2077 & 6.7150 & -5.6760 \\ 0.3454 & -4.7767 & 1.1591 & -0.3455 \\ -2.2158 & 4.6859 & -8.7175 & 6.1941 \\ 0.2334 & 4.1756 & 1.5749 & -2.3081 \end{bmatrix}$$

$$eig(A + BK) = \{-8.6675, -0.1984, -0.5003, -5.0561\}$$

نتایج در جدول زیر آمده است:

	number Condition	norm Frobenius
purposed method	۳.۱۷۸۱	۱.۳۸۱۱

حالت تعادل حالتی است که در صورت ورودی ثابت و نبود اغتشاش، حالت و خروجی در همان حالت ثابت باقی بماند و یک سیستم زمانی پایدار است که هنگام اعمال شرایط اولیه به حالت تعادل برگردد. همانطور که مشاهده می‌کنید در نمودار زیر این انتظار برآورده شده است.



شکل ۲.۳: نمایش پایداری

مثال ۳.۴.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0638 & 0 \\ 0.0838 & -0.1396 \\ 0.1004 & -0.2060 \\ 0.0063 & -0.0128 \end{bmatrix} \quad , A=\begin{bmatrix} -0.1094 & 0.0628 & 0 & 0 & 0 \\ 1.306 & -2.132 & 0.9807 & 0 & 0 \\ 0 & 1.595 & -3.149 & 1.547 & 0 \\ 0 & 0.0355 & 2.632 & -4.257 & 1.855 \\ 0 & 0.0227 & 0 & 0.1636 & -0.1625 \end{bmatrix}$$

با نرم افزار مطلب به دست می آوریم:

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱/۳۰۰۷ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \tilde{A}=\begin{bmatrix} -۶/۹۱۹۹ & ۰/۳۷۳۲ & -۵/۵۴۸۶ & -۰/۰۰۵۴ & -۰/۰۶۵۱ \\ ۰ & -۲/۸۹۰۰ & ۰/۶۴۰۴ & -۰/۲۳۷۵ & ۰/۲۳۸۳ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل تشابهی که ماتریس کنترل پذیر (B, A) را به فرم همدم برداری $(\tilde{B}, \tilde{A})$ تبدیل می‌کند، به شکل زیر است:

$$T^{-۱}=\begin{bmatrix} -۲/۱۰۷۴ & ۱۴/۹۸۲۴ & -۳۷/۳۸۳۵ & ۳۲/۲۲۲۶ & -۹/۲۵۲۵ \\ -۱۰/۲۷۶۴ & ۸/۶۹۵۹ & -۴/۲۹۲۱ & -۲/۱۸۲۳ & ۳/۸۰۷۲ \\ -۱/۹۸۲۸ & -۱/۷۷۹۷ & ۷/۲۰۱۱ & -۴/۹۲۴۷ & ۰/۷۲۰۸ \\ ۸۹/۸۱۰۹ & -۰/۳۴۵۴ & ۱/۴۷۷۷ & ۰/۲۶۵۹ & -۲۰/۳۹۴۲ \\ ۲۲/۵۸۴۳ & ۰/۳۷۳۶ & -۱/۵۲۹۰ & ۰/۷۶۷۴ & ۴/۳۲۵۰ \end{bmatrix}$$

طیف اختصاص داده شده به این ماتریس حلقه بسته این سیستم به صورت $\Lambda=\{-۰/۲, -۰/۵, -۱, -۱\pm i\}$ است. بررسی سیستم غیر خطی معادلات مربوط به این تخصیص مقادیر ویژه آسان است. از (۲۷.۳) و (۲۸.۳) داریم:

$$-(g_{۱۱}+g_{۲۲})=-۶/۲ \tag{۴۷.۳}$$

$$g_{۱۱}g_{۲۲}-g_{۱۲}g_{۲۱}-g_{۱۳}-g_{۲۴}=-۵/۱ \tag{۴۸.۳}$$

$$g_{۲۲}g_{۱۳}-g_{۱۲}g_{۲۳}+g_{۱۱}g_{۲۴}-g_{۱۴}g_{۲۱}=-۱/۸ \tag{۴۹.۳}$$

$$g_{۲۴}g_{۱۳}-g_{۱۴}g_{۲۳}=-۰/۲ \tag{۵۰.۳}$$

که شامل ۵ معادله و ۱۰ مجهول است. تمام جواب‌های پارامتری خطی و غیرخطی را به دست می‌آوریم. برای هر جواب یک مینیمم مقدار برای عدد شرطی به دست می‌آید. جواب پارامتری کمترین عدد شرطی به دست آمده از سیستم‌های (۴۷.۳) تا (۵۰.۳) به صورت زیر است:

$$g_{۱۴}=a, \quad g_{۲۱}=b, \quad g_{۲۳}=c, \quad g_{۲۴}=d$$

روابط پارامتری دیگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g_{۱۱}=-(۵d+۳/۵)$$

$$g_{۱۲}=۵a$$

$$g_{۱۳}=-(۲۵d^{۲}+۱۷/۵d+۵ba+۵/۵)$$

$$g_{۱۵}=-(۱۲۵d^{۳}+۸۷/۵d^{۲}+۲۷/۵d+۲۵abd+۵ac+۴$$

$$g_{۲۲}=۵d-۰/۲$$

$$g_{۲۵}=-(۱۲۵d^{۴}+۸۷/۵d^{۳}+۲۷/۵d^{۲}+۴d+۲۵d^{۲}ba+۵acd+۰/۲)/a$$

G_λ به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -۴٫۳۶۷۵ & ۱٫۳۴۷۰ & -۵٫۶۴۷۹ & ۰٫۲۶۹۴ & -۰٫۲۳۱۶ \\ -۲٫۷۸۱۰ & ۰٫۶۸۷۵ & -۶٫۵۱۸۹ & ۰٫۱۷۷۵ & -۰٫۸۹۵۰ \end{bmatrix}$$

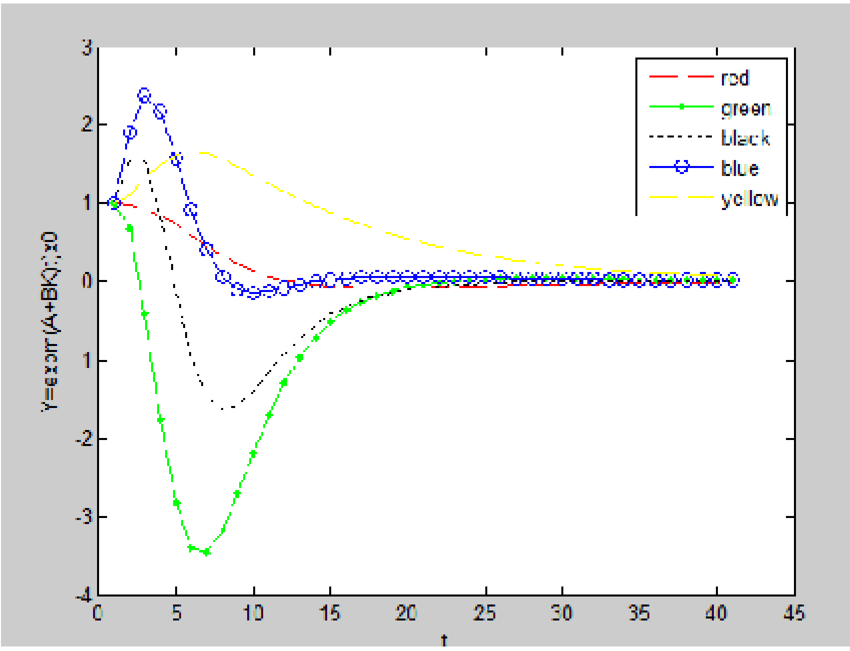
که ماتریس پس‌خورد زیر را تولید می‌کند:

$$K = \begin{bmatrix} -۰٫۷۶۸۶ & ۴۸٫۵۳۳۹ & -۴۷٫۶۵۶۹ & -۱٫۹۳۰۵ & ۰٫۹۶۹۱ \\ -۵٫۰۲۹۹ & ۱٫۶۱۸۲ & ۳۹٫۳۹۹۷ & -۶۲٫۹۲۰۱ & ۲۰٫۸۲۶۰ \end{bmatrix}$$

نتایج در جدول زیر آمده است:

	Condition number	Frobinous norm
Purposed method	۲۱۸.۷۳۴۳	۱.۳۸۱۱

حالت تعادل حالتی است که در صورت ورودی ثابت و نبود اغتشاش، حالت و خروجی در همان حالت ثابت باقی بماند و یک سیستم زمانی پایدار است که هنگام اعمال شرایط اولیه به حالت تعادل برگردد. همانطور که مشاهده می کنید در نمودار زیر این انتظار برآورده شده است.



شکل ۳.۳: نمایش پایداری

نتیجه ۴.۴.۳. پارامتری سازی کنترل گرهای ماتریس پس خورد حالت برای سیستم های چند متغیره خطی را کرباسی و طهرانی در سال ۲۰۰۲ انجام دادند[۱۳]. حال آنکه دراین فصل، بررسی شد که در این روش، چون تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات است با دادن جواب های دلخواه به تعدادی

که مجهولات بیشتر از معادلات است، جواب های زیادی برای ماتریس پس خورد حالت به دست می آید. حال آنکه کدام جواب ماتریس پس خورد حالت بهتری برای مسئله نتیجه می دهد را می توانیم از (۳۵.۳) پیدا کنیم. پس از عدد شرطی معمولا برای محاسبه دقت استفاده می کنند.

فصل ۴

محاسبه ماتریس پس خورد حالت همزمان برای مجموعه ای از سیستم ها

۱.۴ مقدمه

یک سیستم وابسته زمانی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۱.۴}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $u \in \mathbb{R}^m$ یک بردار ورودی و A و B به ترتیب ماتریس های ثابت $n \times n$ و $n \times m$ هستند.
برای پایداری این سیستم، باید ماتریس پس خورد حالت F با قانون $u = Fx(t)$ به گونه ای یافت شود که مقادیر ویژه ی سیستم حلقه بسته ی $\Gamma = A + BF$ در داخل محدوده ی معین و از پیش تعریف شده در سمت چپ صفحه ی مختلط قرار گیرند.
فرض کنید، ریشه ها داخل ناحیه ی مستطیلی زیر قرار گیرند:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} | \quad \alpha \leqslant real(s) \leqslant \beta \quad , -\gamma \leqslant imag(s) \leqslant \gamma\} \tag{۲.۴}$$

که در آن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ و این ناحیه نسبت به محور اعداد حقیقی متقارن است.
در این بخش، یک روش جدید برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت با کمترین نرم، به منظور تخصیص مقادیر ویژه به یک سیستم خطی در یک ناحیه مشخص ارائه شده است. ابتدا یک مجموعه از معادلات و نامعادلات را به دست می آوریم، سپس این مجموعه را به یک مسئله بهینه سازی تبدیل می کنیم. با استفاده از الگوریتم ژنتیک ماتریس پس خورد حالت را با کمترین نورم ممکن به دست می آوریم.

۲.۴ فرمول نویسی مسئله

سیستم (۱.۴) را در نظر بگیرید که فرضیات زیر در آن برقرار است:

۱. (A, B) کنترل پذیر است.

۲. B مرتبه کامل است.

برای سیستم حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ قانون پس خورد $u = Fx(t)$ را داریم. هدف، پیدا کردن ماتریس پس خورد حالت با کمترین نرم ممکن برای این سیستم است، به گونه ای که فرضیات بالا در آن صدق کند و ریشه های معادله ی مشخصه در ناحیه ی معینی قرار داشته باشد. در این بخش فرض شده است، ریشه ها داخل ناحیه ی مستطیلی از پیش تعیین شده (۲.۴) قرار دارد.

۱.۲.۴ روش تبدیلات تشابهی

یک روش عددی برای پیدا کردن ماتریس پس خورد حالت تبدیلات تشابهی است. برای پیدا کردن ماتریس پس خورد حالت یک سیستم ابتدا ماتریس $[B, A, I]$ به وسیله اعمال سطری مقدماتی و ستون مقدماتی نظیر آن، به فرم همدم برداری $[\tilde{B}, \tilde{A}, T^{-1}]$ تبدیل می کنیم. ماتریس پس خورد حالت به صورت زیر محاسبه می شود.

$$F = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1} \tag{۳.۴}$$

که، B_0, G_0, T^{-1} ماتریس های با ابعاد مناسب هستند و به شکل همدم برداری به صورت

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_0 & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \tag{۴.۴}$$

و ماتریس حلقه بسته پارامتری سیستم به شکل زیر است:

$$\tilde{\Gamma_\lambda} = \begin{bmatrix} & G_\lambda & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \tag{۵.۴}$$

G_λ ماتریس پارامتری با بعد $m \times n$ است و m سطر اول $\tilde{\Gamma_\lambda}$ را تشکیل می دهد.
مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته Γ به وسیله $\tilde{\Gamma_\lambda}$ می تواند در بازه مستطیلی مشخصی قرار گیرد. به این منظور کافی است، $det(\tilde{\Gamma_\lambda} - \lambda I) = 0$ باشد. چند جمله ای مشخصه

$$det(\tilde{\Gamma_\lambda} - \lambda I) = P_n(\lambda) \tag{۶.۴}$$

به صورت

$$P_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n) \tag{۷.۴}$$

است.
چون ضروری است که همه ریشه های چند جمله ای مشخصه در (۲.۴) قرار داشته باشد، واضح است که

$$P_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \tag{۸.۴}$$

از (۷.۴) و (۸.۴) $(C_i \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ به شکل زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned} C_1 &= -\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i) \\ C_2 &= \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n}(\lambda_i\lambda_j) \\ &\vdots \\ C_n &= (-1)^n\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i) \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

اگر $(\lambda_i \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ ها معلوم باشند، C_i ها می توانند پیدا شوند. حال با محاسبه مستقیم (۶.۴) به صورت پارامتری و با داشتن ضرایب معادله مشخصه در معادلات (۹.۴) یک مجموعه از معادلات غیرخطی به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} f_1(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) &= C_1 \\ f_2(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) &= C_2 \\ &\vdots \\ f_n(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) &= C_n \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

که $(i = 1, 2, \ldots, m \quad j = 1, 2, \ldots, n)$ g_{ij} عناصر G_λ و $(i = 1, 2, \ldots, n)$ f_i چند جمله ای پارامتری است که با محاسبه $det(\tilde{\Gamma}_\lambda - \lambda I)$ به دست می آید. مجموعه معادلات (۱۰.۴) یک مجموعه سیستم غیر خطی است با n معادله و nm مجهول. با انتخاب دلخواه $n(m-1)$ مجهول، این سیستم می تواند حل شود.

با توجه به این که معمولا نرم فروبینوس مناسب ترین معیار، برای محاسبه ی نرم است، چرا که از تک تک درایه های یک ماتریس تاثیر می پذیرد، یک تابع بهینه سازی می سازیم که قسمتی از تابع هدف آن مجموع توان دوم تک تک عناصر ماتریس پس خورد است. درایه اول ماتریس (۳.۴) را j_1 ، درایه سطر اول و ستون دوم را j_2 می نامیم، سپس ادامه می دهیم تا درایه ی سطر m ام و ستون n که آن را j_{mn} می نامیم و تابع زیر را می سازیم:

$$min \quad j_1^2 + j_2^2 + \ldots + j_k^2 \quad k = mn \tag{۱۱.۴}$$

سپس برای تضمین پایداری محدودیت هایی را در نظر می گیریم. برای پایدارسازی سیستم ناحیه تعریف شده در (۲.۴) باید در سمت چپ صفحه مختلط قرارگیرد. معادلات (۱۰.۴) تخصیص مقادیر ویژه سیستم (۱.۴) را در یک بازه مستطیلی تضمین می کند. اگرچه شاید این روش جدید مقادیر ویژه را دقیقا تخصیص ندهد. کران های بالا و پایین را برای این ناحیه مستطیلی در نظر می گیریم. $C_{imax} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

را کران بالا و $i = 1, 2, \ldots, n$ C_{imin} را کران پایین به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} C_{1max} &= -n(\lambda_{max}) \\ C_{2max} &= (-1)^2(\lambda_{max}^2) \\ &\vdots \\ C_{nmax} &= (-1)^n(\lambda_{max}^n) \\ C_{1min} &= -n(\lambda_{min}) \\ C_{2min} &= (-1)^2(\lambda_{min}^2) \\ &\vdots \\ C_{nmin} &= (-1)^n(\lambda_{min}^n) \end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

که در آن λ_{max} مجموعه ای برای α و λ_{min} مجموعه ای برای β است که در (۲.۴) تعریف شده است. معادلات (۹.۴) به نامعادلات زیر تبدیل می شوند.

$$\begin{aligned} C_{1min} \leqslant f_1(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) \leqslant C_{1max} \\ C_{2min} \leqslant f_2(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) \leqslant C_{2max} \\ \vdots \\ C_{nmin} \leqslant f_n(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) \leqslant C_{nmax} \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

$$\begin{aligned} f_1(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) - C_{1max} &\leqslant 0 \\ f_2(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) - C_{2max} &\leqslant 0 \\ &\vdots \\ f_n(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) - C_{nmax} &\leqslant 0 \\ -f_1(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) + C_{1min} &\leqslant 0 \\ -f_2(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) + C_{2min} &\leqslant 0 \\ &\vdots \\ -f_n(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, \ldots, g_{m1}, \ldots, g_{mn}) + C_{nmin} &\leqslant 0 \end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

هر کدام از نامعادلات (۱۴.۴) را $(h_۱, h_۲, \ldots, h_L \quad L = ۲n)$ می نامیم. از (۱۱.۴) و (۱۴.۴) داریم:

$$\begin{cases} min \quad j_۱^۲(x) + j_۲^۲(x) + \ldots + j_k^۲(x) \\ st \\ h_۱(x) \leqslant ۰ \\ h_۲(x) \leqslant ۰ \\ \vdots \\ h_L(x) \leqslant ۰ \end{cases} \tag{۱۵.۴}$$

مثال ۱.۲.۴. سیستم داده شده در زیر را به روش فوق پایدار کنید:

$$A = \begin{bmatrix} -۱٫۷۰۲۰۰ & ۵۰٫۷۲۰۰ & ۲۶۳٫۵۰ \\ ۰٫۲۲۰۱۰ & -۱٫۴۱۸۰ & -۳۱٫۹۹ \\ ۰ & ۰ & -۳۰ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -۸۵٫۰۹ \\ ۰ \\ ۳۰ \end{bmatrix}$$

به دست می آوریم:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -۳۳٫۱۲۰۰ & -۸۴٫۸۵۰۰ & ۲۶۲٫۵۰۱۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$T^{-۱} = \begin{bmatrix} -۰٫۰۰۰۲ & ۰٫۰۰۱۹ & ۰٫۰۳۲۷ \\ ۰ & -۰٫۰۰۱۰ & ۰ \\ ۰ & -۰٫۰۰۰۱ & -۰٫۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

و

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & g_{۱۳} \end{bmatrix}$$

$$K^t = \begin{bmatrix} ۰٫۰۰۶۶۲۴ - ۰٫۰۰۰۲g_{۱۱} \\ ۰٫۰۰۱۹g_{۱۱} - ۰٫۰۰۱۰g_{۱۲} - ۰٫۰۰۰۱g_{۱۳} - ۰٫۰۰۴۳۵ \\ ۰٫۰۳۲۷g_{۲۱} - ۰٫۰۰۰۱g_{۱۳} - ۱٫۱۰۹۲ \end{bmatrix} \tag{۱۶.۴}$$

با قرار دادن مجموع توان دوم درایه های ماتریس K و برای تضمین پایداری محدودیت ها را با توجه به بازه مستطیلی داده شده از مقادیر مشخص مقادیر ویژه قرار می دهیم:

$$\{s \in \mathbb{C} \quad -۱۷ \leqslant real(s) \leqslant -۰٫۰۰۱ \qquad -۵۰ \leqslant imag(s) \leqslant ۵۰\} \tag{۱۷.۴}$$

از (۱۰.۴) و (۱۲.۴) محدودیت های زیر را می سازیم:

$$۰٫۰۰۳ \leqslant g_{۱۱} \leqslant ۵۱$$

$$۲۸۹ \leqslant g_{۱۲} \leqslant ۳ \times ۱۰^۶$$

$$۰٫۰۰۱ \leqslant g_{۱۳} \leqslant ۱۷$$

از (۱۵.۴) به دست می آوریم:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -۲۳/۳۵۶۷ & -۵۶۵/۸۴۵۲ & -۴۲۸/۲۹۰۳ \end{bmatrix}$$

و با قرار دادن در (۳.۴) ماتریس پس خورد حالت به صورت زیر محاسبه می شود:

$$K = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۴۳ & ۰/۶۴۶۴ & -۰/۶۳۸۹ \end{bmatrix}$$

$$\| K \|_F = ۰/۹۰۸۸$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} -۲/۰۷۰۵ & -۴/۱۲۹۰ & ۳۱۷/۸۶۶۵ \\ ۰/۲۲۰۱ & -۱/۴۱۸۰ & -۳۱/۹۹۰۰ \\ ۰/۱۲۹۹ & ۱۹/۳۳۸۰ & -۴۹/۱۶۷۹ \end{bmatrix}$$

$$eig(A + BK) = \{-۰/۰۵۵, -۲۶/۳۰۰۷ + ۷/۶۲۰۴i, -۲۶/۳۰۰۷ - ۷/۶۲۰۴i\}$$

۳.۴ کنترل همزمان سیستم های خطی

در اینجا تبدیل خطی T را برای هر زوج کنترل پذیر (A_k, B_k) اعمال می‌کنیم، به طوری که T ، معکوس پذیر باشد و این تبدیل را از روی فرم استاندارد اشلون زوج (A_k, B_k) به دست می‌آوریم؛ یعنی برای زوج داده شده، فرم استاندارد اشلون را به دست می‌آوریم و آن را با $(\hat{B}_k, \hat{A}_k)$ نشان می‌دهیم و سپس از روی زوج $(\hat{B}_k, \hat{A}_k)$ و تحت تبدیل S این فرم استاندارد اشلون را به فرم همدم برداری $(\tilde{B}_k, \tilde{A}_k)$ به روشی که در فصل ۲ توضیح داده شد، تبدیل می‌کنیم. بنابراین برای محاسبه‌ی ماتریس پس خورد F ابتدا ماتریس $[B_k, A_k, I_k]$ را به فرم همدم برداری $[\tilde{B}_k, \tilde{A}_k, T_k^{-۱}]$ با عملیات تشابهی تبدیل می‌کنیم. ماتریس پس خوردی به فرم زیر به دست می‌آید.

$$F_k = B_{k۰}(-G_{k۰} + G_{k\lambda})T_k^{-۱}, \quad k = ۱, ۲, \cdots p \tag{۱۸.۴}$$

که $B_{k۰}$ و $G_{k۰}$ و $T_k^{-۱}$ به ترتیب ماتریس‌هایی با اندازه‌های $r \times n$ و $n \times m$ و $n \times n$ هستند و فرم همدم برداری هر سیستم به صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} & G_{k\lambda} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B}_k = \begin{bmatrix} B_{k۰} \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

و $G_{k\lambda}$ در آن یک ماتریس پارامتری $n \times m$ است و $\tilde{\Gamma_{k\lambda}}$ و m سطر اول این ماتریس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\Gamma_{k\lambda}} = \begin{bmatrix} & G_{k\lambda} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \qquad G_{k\lambda} = \begin{bmatrix} g_{k۱۱} & \cdots & g_{k۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{km۱} & \cdots & g_{kmn} \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه بسته‌ی A_{kc} می‌تواند توسط $\Gamma_{k\lambda}$ در طیف $\Lambda_k = \{\lambda_{k۱}, \cdots, \lambda_{kn}\}$ قرار گیرد. پس جهت محاسبه‌ی ماتریس پس خورد حالت پارامتری پس از به دست آوردن فرم همدم برداری

$(\tilde{B}_k, \tilde{A}_k)$ ، ماتریس پس خورد حالتی را که مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه بسته را به صفر می‌برد را محاسبه می‌کنیم. یعنی؛ $F_{kp} = -B_{k\circ}^{-1} G_{k\circ} T_k^{-1}$.

حال برای به دست آوردن ماتریس پس خورد پارامتری با توجه به این که باید مقادیر ویژه‌ی $\widetilde{\Gamma_{k\lambda}}$ در طیف مشخص قرار گیرد، به منظور تعیین رابطه‌ی بین درایه‌های $g_{kij}(i = 1, \cdots, m \quad , j = 1, \cdots, n)$ ، باید قرار دهیم:

$$det(\widetilde{\Gamma_{k\lambda}} - \lambda_k I) = p_{kn}(\lambda_k) = (-1)^n(\lambda_k^n + C_{k1}\lambda_k^{n-1} + \cdots + C_{k(n-1)}\lambda_k + C_{kn}) \quad (۱۹.۴)$$

حال با توجه به این که ریشه‌های این چند جمله‌ای باید در همان طیف مقادیر ویژه $\Gamma_{k\lambda}$ باشد، به دست می‌آوریم:

$$p_{kn}(\lambda_k) = (-1)^n(\lambda_k - \lambda_{k1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_{kn}) \quad (۲۰.۴)$$

که با مساوی قرار دادن روابط (۱۹.۴) و (۲۰.۴) C_{ki} ها می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند.

$$\begin{aligned} C_{k1} &= -\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{ki}) \\ C_{k2} &= \sum_{i,j=1 \ j\neq i}(\lambda_{ki}\lambda_{kj}) \\ &\vdots \\ C_{kn} &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda_{ki}) \end{aligned} \quad (۲۱.۴)$$

اگر $i = 1, \cdots, n$ و λ_{ki} ها مشخص باشند، آنگاه $C_{k1}, \cdots, C_{kn}$ ها می‌توانند محاسبه شوند. حال با محاسبه‌ی مستقیم $det(\widetilde{\Gamma_{k\lambda}} - \lambda_k I) = p_{kn}(\lambda_k)$ به صورت پارامتری و داشتن

$$\begin{aligned} C_{1min} \leqslant f_{k1}(g_{k11}, g_{k12}, \cdots, g_{k1n}, g_{k21}, \cdots, g_{km1}, \cdots, g_{kmn}) \leqslant C_{1max} \\ \vdots \\ C_{nmin} \leqslant f_{kn}(g_{k11}, g_{k12}, \cdots, g_{k1n}, g_{k21}, \cdots, g_{km1}, \cdots, g_{kmn}) \leqslant C_{nmax} \end{aligned} \quad (۲۲.۴)$$

این نامعادلات به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} f_{k1}(g_{k11}, g_{k12}, \cdots, g_{k1n}, g_{k21}, \cdots, g_{km1}, \cdots, g_{kmn}) - C_{1max} \leqslant 0 \\ \vdots \\ f_{kn}(g_{k11}, g_{k12}, \cdots, g_{k1n}, g_{k21}, \cdots, g_{km1}, \cdots, g_{kmn}) - C_{nmax} \leqslant 0 \\ -f_{k1}(g_{k11}, g_{k12}, \cdots, g_{k1n}, g_{k21}, \cdots, g_{km1}, \cdots, g_{kmn}) + C_{1min} \leqslant 0 \\ \vdots \\ -f_{kn}(g_{k11}, g_{k12}, \cdots, g_{k1n}, g_{k21}, \cdots, g_{km1}, \cdots, g_{kmn}) + C_{nmin} \leqslant 0 \end{aligned} \quad (۲۳.۴)$$

اکنون $2np$ معادله با mnp مجهول به دست می آید. f_{ki} ها چند جمله‌ایهای پارامتری هستند و با محاسبه‌ی $det(\tilde{\Gamma}_{k\lambda} - \lambda_{ki})$ به دست می‌آیند.

۱.۳.۴ یافتن یک ماتریس پس خورد همزمان

در این بخش روشی را برای محاسبه‌ی ماتریس پس خورد حالت همزمان توسط تبدیلات تشابهی برای مجموعه‌ای از سیستم‌های کنترل پذیر تعریف می‌کنیم: فرض کنید، سیستم (۱۸.۴) داده شده است، جهت محاسبه ماتریس پس خورد همزمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌ها داریم:

$$F = B_{K\circ}^{-1}(-G_{k\circ} + G_{k\lambda})T_k^{-1} \qquad k = 1, 2, \cdots, p \qquad (۲۴.۴)$$

p معادله به دست می‌آید، که با مساوی قرار دادن آنها با یکدیگر، معادلات زیر به دست می‌آید. برای مثال اگر، $k = i, j$ باشد،

$$B_{i\circ}(-G_{i\circ} + G_{i\lambda})T_i^{-1} = B_{j\circ}(-G_{j\circ} + G_{j\lambda})T_j^{-1}. \qquad (۲۵.۴)$$

که این معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(-G_{i\circ} + G_{i\lambda}) = B_{i\circ}B_{j\circ}^{-1}(-G_{j\circ} + G_{j\lambda})T_j^{-1}T_i$$

در نتیجه:

$$G_{i\lambda} - B_{i\circ}B_{j\circ}^{-1}G_{j\lambda}T_j^{-1}T_i = G_{i\circ} - B_{i\circ}B_{j\circ}^{-1}G_{j\circ}T_j^{-1} \qquad (۲۶.۴)$$

$$G_{i\lambda} - B_{i\circ}B_{j\circ}^{-1}G_{j\circ} + B_{i\circ}B_{j\circ}^{-1}G_{j\circ}T_j^{-1}T_i = \circ \qquad (۲۷.۴)$$

در این جا $G_{i\lambda}$ و $G_{j\lambda}$ مجهول هستند. بنابراین طرف چپ (۲۷.۴) ماتریس مجهول با ابعاد $m \times n$ و طرف راست آن ماتریس معلوم $m \times n$ است.
با حل این معادلات، ماتریس پس خورد به دست می‌آید، ولی این روش پایداری سیستم‌های کنترل پذیر را تضمین نمی‌کند. به این منظور باید محدودیت‌های دیگری در نظر گرفته باشد، به طوری که سیستم‌ها پایدار شوند. برای پایداری سیستم‌ها باید ناحیه‌ای به صورت (۲.۴) تعریف شود که مقادیر ویژه‌ی سیستم‌ها در سمت چپ صفحه‌ی مختلط و در آن ناحیه قرار گیرند. معادله‌ی (۱۹.۴) مقادیر ویژه را در طیفی مشخص قرار می‌دهد.

۴.۴ روشی برای حل سیستم معادلات و نامعادلات به صورت همزمان و استفاده از الگوریتم ژنتیک برای مناسب کردن تابع هدف

برای حل سیستم معادلات (۲۷.۴) و نامعادلات (۲۳.۴) لم زیر را ثابت می کنیم.

لم ۱.۴.۴. دو سیستم I و II در زیر معادلند:

$$I = \begin{cases} j_1(x) = 0 \\ j_2(x) = 0 \\ \vdots \\ j_k(x) \\ h_1(x) \leqslant 0 \\ \vdots \\ h_l(x) \leqslant 0 \end{cases} \tag{۲۸.۴}$$

$$II = \begin{cases} min \;\; j_1^2(x) + j_2^2(x) + \cdots j_K^2(x) \\ st \\ h_1(x) \leqslant 0 \\ h_2(x) \leqslant 0 \\ \vdots \\ h_l(x) \leqslant 0 \end{cases} \tag{۲۹.۴}$$

اگر و تنها اگرتابع هدف سیستم II برابر صفر باشد.

برهان

فرض کنید، $X = \{x \in \mathbb{R}^n / h_1(x) \leqslant 0, \cdots, h_L(x) \leqslant 0\}$ اگر سیستم دارای یک جواب شدنی x_0 باشد داریم:

$$\exists \;\; x_0 \in \mathbb{R}^n / j_1(x_0) = j_2(x_0) = \cdots = j_k(x_0) \tag{۳۰.۴}$$

$$\exists \;\; h_1(x_0) \leqslant 0, h_2(x_0) \leqslant 0, h_L(x_0) \leqslant 0 \tag{۳۱.۴}$$

از (۳۱.۴) نتیجه می‌شود، $x_0 \in X$ و از (۳۰.۴) داریم:

$$j_1^2(x_0) + j_2^2(x_0) + \cdots + j_k^2(x_0) = 0 \tag{۳۲.۴}$$

اما تابع هدف سیستم II نامنفی است، بنابراین مقدار مینیمم آن صفر است، پس x_0 جواب سیستم II می‌باشد.

برعکس، اگر جواب بهینه‌ی سیستم II صفر باشد، سیستم I نیز دارای جواب است و این برهان را کامل می‌کند .

در دو مثال اول از برنامه ریزی غیر خطی برای حل معادلات و نامعادلات به دست آمده در راستای به کارگیری روش معرفی شده در این فصل استفاده شده است.

مثال ۲.۴.۴. دو سیستم خطی کنترل پذیر مرتبه سه زیر را در نظر بگیرید. هدف اصلی، یافتن یک

ماتریس پس خورد حالت همزمان برای این دو سیستم است.

$$A_{۱} = \begin{bmatrix} -۰٫۵۰۰۰ & -۱٫۰۰۰۰ & ۲٫۵۰۰۰ \\ ۱۰٫۲۵۰۰ & -۱۳٫۰۰۰۰ & ۱۴٫۷۵۰۰ \\ ۱۲٫۰۰۰۰ & -۱۳٫۰۰۰۰ & ۱۳٫۵۰۰۰ \end{bmatrix} \qquad B_{۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A_{۲} = \begin{bmatrix} -۱٫۳۴۲۹ & ۲٫۵۴۲۹ & ۲٫۷۱۴۳ \\ -۱٫۰۲۸۶ & ۱٫۶۲۸۶ & -۱٫۸۵۷۱ \\ -۰٫۵۴۲۹ & ۰٫۹۴۲۹ & ۴٫۷۱۴۳ \end{bmatrix} \qquad B_{۲} = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

با انجام تبدیلات تشابهی ماتریس های زیر به دست می آیند:

$$G_{۰۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad G_{۰۲} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۰٫۹۹۹۹ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B_{۰۱} = B_{۰۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

از ۵.۴ و ۲۳.۴ داریم:

$$min \;\; (g_{۱۱۱} - ۴٫۵۷۱۷)^{۲} + (g_{۱۱۲} - ۲٫۵۷۱۳)^{۲}$$
$$+(g_{۱۱۳} - ۲٫۴۲۸۶)^{۲} + (g_{۱۲۱} + ۰٫۰۲۱۳)^{۲}$$
$$(g_{۱۱۲} - ۱٫۶۲۸۵)^{۲} + (g_{۱۱۳} - ۱٫۴۲۱۵)^{۲}$$
$$-g_{۱۱۱} - g_{۱۲۲} \leqslant -۰٫۲۷$$
$$-g_{۱۱۳} + g_{۱۱۱}g_{۱۲۲} - g_{۱۱۲}g_{۱۲۱} \leqslant ۰٫۰۱۱۸$$
$$g_{۱۱۳}g_{۱۲۲} - g_{۱۱۲}g_{۱۲۳} \leqslant -۰٫۰۰۱۲$$
$$-g_{۲۱۱} - g_{۲۲۲} \leqslant ۵۴$$
$$-g_{۲۱۳} + g_{۲۱۱}g_{۲۲۲} - g_{۲۱۲}g_{۲۲۱} \leqslant ۹۲۷$$
$$g_{۲۱۳}g_{۲۲۲} - g_{۲۱۲}g_{۲۲۳} \leqslant ۳۸۳۹۴$$

ناحیه تخصیص مقادیر ویژه مربوط به هر دو سیستم به صورت زیر می باشد:

$$\Omega = \{s \in | -۲۵ \leqslant real(s) \leqslant -۰٫۱ \;,\; -۵ \leqslant imag(s) \leqslant ۵\}$$

با جایگذاری جواب حاصل از حل همزمان معادلات به دست آمده در ماتریس های $G_{۱\lambda}$ و $G_{۲\lambda}$ داریم:

$$G_{۱\lambda} = \begin{bmatrix} -۱٫۱۶۲۶ & -۳٫۸۸۴۱ & ۱۰٫۴۱۱۰ \\ ۲٫۷۱۸۰ & -۰٫۰۵۸۵ & ۰٫۱۵۹۵ \end{bmatrix} \qquad G_{۲\lambda} = \begin{bmatrix} -۱۳٫۳۱۳۹ & -۵٫۹۰۲۶ & ۱۰٫۴۰۳۸ \\ -۳٫۰۱۹۳ & -۳٫۸۵۹۵ & ۷٫۱۷۳۹ \end{bmatrix}$$

از ۲۴.۴ ماتریس پس خورد همزمان به صورت زیر محاسبه می شود:

$$F = \begin{bmatrix} 5.2052 & -6.5081 & 2.3273 \\ 2.4452 & 0.8135 & 1.4996 \end{bmatrix}$$

که با این ماتریس پس خوردی، مقادیر ویژه سیستم های حلقه بسته زیر قابل محاسبه است.

$$\nu_1 = \{-0.1093 \pm 0.1508i,\ -4.8494\}$$

$$\nu_2 = \{-23.2167, -0.1406, -3.0944\}$$

نرم فروبینوس این ماتریس پس خورد برابر است با: ۹/۱۵۱۸

مثال ۳.۴.۴. ماتریس پس خورد حالت همزمان چهار سیستم زیر را پیدا کنید.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.98960 & 17.41000 & 96.15 \\ 0.26480 & -0.8512 & -11.89 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} -97.78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.66070 & 18.11000 & 84.34 \\ 0.08201 & -0.6587 & -10.81 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -272.2 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.7202 & 50.7200 & 263.50 \\ 0.22010 & -1.4180 & -31.99 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -85.09 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -0.51620 & 26.9600 & 178.90 \\ -0.68960 & -1.2250 & -30.38 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \qquad B_4 = \begin{bmatrix} -175.6 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

بازه مستطیلی مقادیر ویژه داده شده به صورت زیر است:

$$\{S \in \mathbb{C} | -4 \leqslant real(S) \leqslant -1, -20 \leqslant imag(S) \leqslant 20\}$$

با استفاده از تبدیلات تشابهی به دست می آوریم:

$$\lambda_{min} = -4 \qquad \lambda_{max} = -1$$

$$\tilde{A_1} = \begin{bmatrix} -31.8408 & -51.4562 & 113.0346 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0008 & 0.0047 & 0.0306 \\ 0.0001 & -0.0026 & 0.0005 \\ -0.0002 & 0 & -0.0005 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A_2} = \begin{bmatrix} -31.3194 & -38.532 & 31.4999 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{۲}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰٫۰۰۲۷ & -۰٫۰۴۰۶ & ۰٫۰۵۷۹ \\ -۰٫۰۰۱۵ & ۰٫۰۲۱۲ & -۰٫۰۱۳۳ \\ ۰٫۰۰۰۷ & -۰٫۰۱۲۰ & ۰٫۰۰۶۶ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{۳} = \begin{bmatrix} -۳۳٫۱۲۰۰ & -۸۴٫۸۵۰۰ & ۲۶۲٫۵۰۱۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \tilde{B}_{۳} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$T_{۳}^{-۱} = \begin{bmatrix} -۰٫۰۰۰۲ & ۰٫۰۰۱۹ & ۰٫۰۳۲۷ \\ ۰ & -۰٫۰۰۱۰ & ۰ \\ ۰ & -۰٫۰۰۰۱ & -۰٫۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{۴} = \begin{bmatrix} -۳۱٫۷۴۱۲ & -۷۱٫۴۶۰۰ & -۵۷۶٫۷۱۸۸ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \tilde{B}_{۴} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$T_{۴}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰٫۰۰۰۱ & ۰٫۰۰۲۳ & ۰٫۰۳۳۰ \\ ۰٫۰۰۰۱ & -۰٫۰۰۰۲ & -۰٫۰۰۰۵ \\ ۰ & -۰٫۰۰۰۱ & ۰٫۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} min\ & (g_{۱۱۱} + ۱٫۴۲۹۵ g_{۲۱۱} + ۰٫۲۲۷۳ g_{۲۱۲} - ۰٫۱۱۱۸ g_{۲۱۳} - ۱٫۲۴۳۲)^{۲} \\ & + (g_{۱۱۲} - ۱۸٫۱۹۹ g_{۲۱۱} + ۸٫۵۶۴۷ g_{۲۱۲} - ۴٫۸۱۷۵ g_{۲۱۳} - ۳۷٫۵۶۰۱)^{۲} \\ & + (g_{۱۱۳} + ۱۰۱۱۸۱ g_{۲۱۱} - ۴٫۱۲۶۵ g_{۲۱۲} + ۱٫۵۳۵۸ g_{۲}۱۳ - ۲۳۵)^{۲} \\ & + (g_{۱۱۱} + ۱۰٫۱۰۰ g_{۳۱۱} - ۰٫۳۷۹۴ g_{۳۱۲} - ۰٫۰۳۲۵ g_{۳۱۳} - ۸٫۹۳۲۶)^{۲} \\ & + (g_{۱۱۳} + ۲٫۴۹۲۵ g_{۳۱۱} - ۰٫۲۰۱۳ g_{۳۱۲} - ۰٫۰۲۹۵ g_{۳۱۳} - ۶۶٫۲۴۵۳)^{۲} \\ & + (g_{۱۱۲} - ۱٫۰۹۵۰ g_{۳۱۱} - ۰٫۳۷۹۴ g_{۳۱۲} + ۰٫۰۰۳۳ g_{۳۱۳} + ۶۲٫۸۴۰۸)^{۲} \\ & + (g_{۱۱۱} - ۰٫۰۰۰۱ g_{۴۱۱} + ۰٫۰۰۰۲ g_{۴۱۲} + ۰٫۰۰۰۱ g_{۴۱۳} + ۷٫۴۵۶۲)^{۲} \\ & + (g_{۱۱۳} - ۰٫۰۳۳۰ g_{۴۱۱} + ۰٫۰۰۰۵ g_{۴۱۲} - ۰٫۰۰۰۱ g_{۴۱۳} - ۱۱۳٫۰۳۴۶ + ۱۴۹٫۵۷۰۰)^{۲} \end{aligned}$$

$$۱٫۵ \leqslant g_{۱۱۱} \leqslant ۴۵$$

$$-۲٫۲۵۰۰ \leqslant g_{۱۱۲} \leqslant ۶۷۵$$

$$۴٫۲۵۰۰ \leqslant g_{۱۱۳} \leqslant ۳۳۷۵$$

$$۱٫۵ \leqslant g_{۲۱۱} \leqslant ۴۵$$

$$-۲٫۲۵۰۰ \leqslant g_{۲۱۲} \leqslant ۶۷۵$$

$$۴٫۲۵۰۰ \leqslant g_{۲۱۳} \leqslant ۳۳۷۵$$

$$۱/۵ \leqslant g_{۳۱۱} \leqslant ۴۵$$

$$-۲/۲۵۰۰ \leqslant g_{۳۱۲} \leqslant ۶۷۵$$

$$۴/۲۵۰۰ \leqslant g_{۳۱۳} \leqslant ۳۳۷۵$$

$$۱/۵ \leqslant g_{۴۱۱} \leqslant ۴۵$$

$$-۲/۲۵۰۰ \leqslant g_{۴۱۲} \leqslant ۶۷۵$$

$$۴/۲۵۰۰ \leqslant g_{۴۱۳} \leqslant ۳۳۷۵$$

جوابهای به دست آمده به صورت زیر است:

$$(-۱/۲۵۲۶, ۰/۳۶۰۶, ۲/۰۰۱۲, ۶/۲۳۴۱, -۳/۴۵۸۰, ۲/۰۹۲۸)$$

$$(-۴/۱۳۶۵, ۳/۷۸۶۴, -۴/۲۵۹۰, -۶/۲۳۴۳, ۱/۹۴۵۶, -۶/۵۶۷۳)$$

به دست می آوریم:

$$F = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۸۸ & ۰/۳۷۸۸ & ۰/۸۸۶۱ \end{bmatrix}$$

۵.۴ استفاده از الگوریتم ژنتیکی برای حل مسئله مینیمم سازی

الگوریتم های ژنتیکی روش های تصادفی هستند که براساس مکانیسم انتخاب طبیعی پی ریزی شده اند. آنها برای شروع کار، یک جمعیت از فضای جواب را انتخاب کرده و با توجه به تابع هدف شروع به جستجو می کنند. جواب مسئله به شکل کروموزوم که خود شامل یک رشته از اعداد و نمادها می باشد، نمایش داده می شود. دو عامل تقاطع و جهش برای رسیدن به جواب بهینه در الگوریتم مداخله می کنند. این دو عامل با توجه به ارزشگذاری کروموزوم ها سعی می کنند بهترین را نسل به نسل انتقال دهند تا جواب بهینه به دست آید. هر کروموزوم نشان دهنده یک راه حل پیشنهادی برای مسئله بوده و مشتمل بر یک رشته از ژن هاست. تعداد ژن های یک کروموزوم بستگی به نوع مسئله دارد. مجموعه ای از کروموزوم ها را یک جمعیت گویند. اندازه جمعیت، تعیین کننده فضای جستجویی است که در زمان اجرای الگوریتم ژنتیک مورد جستجو قرار می گیرد. هر تکرار از الگوریتم را یک نسل گویند. در ایجاد جمعیت قاعده خاصی وجود ندارد و در اکثر مسائل جمعیت اولیه به صورت تصادفی تولید می شود. طراح با توجه به نیاز و خواسته های تعریف شده، اندازه جمعیت را تعیین می کند.

ارزیابی برازندگی مشتمل بر تعریف یک تابع برازندگی با تابع هدف است که هر کروموزوم در برابر آن از لحاظ تناسب با محیط مورد نظر آزمون می شود. هر چه قدر مقدار برازندگی بیشتر باشد نشان دهنده بهتر بودن راه حل نسبت به مقادیر کمتر تابع برازندگی است. برای اجرای الگوریتم ژنتیک لازم است که یک جمعیت اولیه انتخاب شود که این انتخاب می تواند به طور تصادفی انجام شود. سپس میزان شایستگی یا برازندگی هریک از رشته های موجود از جمعیت اندازه گیری می شود.

دو نوع عمل در الگوریتم ژنتیکی وجود دارد. اعمال ژنتیکی که شامل تقاطع و جهش می شوند. عمل تکامل که همان انتخاب است. تقاطع مهمترین عملگر ژنتیکی است. این عملگر در یک لحظه بر روی

دو کروموزوم تأثیر گذاشته و به وسیله ترکیب دو کروموزوم دو فرزند تولید می کند. جهش عملگری است که به طور خود به خود تغییرات تصادفی در کروموزوم های مختلف ایجاد می کند. انتخاب در واقع تأثیر برازندگی در فرایند بهینه سازی را نشان می دهد. در رویه انتخاب، دو کروموزوم والد بر مبنای مقادیر برازندگی شان انتخاب می شوند.

در این بخش برای حل همزمان مسأله مینیمم سازی از الگوریتم های ژنتیکی استفاده می شود. برای این کار لازم است تا یک تابع برازش مناسب طراحی شود. هرچند که این امکان وجود دارد تا قیود به صورت معادله و نامعادله خارج از تابع برازش تعبیه گردند، ما در اینجا کلیه قیود، شامل معادلات ۲۷.۴ و نامعادلات ۲۳.۴ را تحت یک معادله درآورده و به تابع هدف اضافه نموده و در مجموع با یک تابع برازش مناسب کار را دنبال می کنیم. برای این منظور بردار H به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{4n} (sign(h_{ki}) + 1) \qquad (۳۳.۴)$$

در اینجا لازم است $H = 0$ باشد. $4np$ معادله به همراه $4np$ مجهول به دست می آید. تابع برازش نیز از ترکیب غیرخطی روابط و به صورت زیر به دست می آید:

$$Y = j_1^2(g) + j_2^2(g) + \cdots + j_{(p-1)mn}^2(g) + H \qquad (۳۴.۴)$$

با استفاده از این تابع برازش می توان یک مسأله مینیمم سازی را به کمک الگوریتم های ژنتیکی حل کرد و از حل آن یک بردار $g \in R^{nmp}$ را محاسبه کرد که درایه های این بردار، همان درایه های ماتریس $G_{k\lambda}$ برای $k = 1, 2, \cdots, p$ می باشند.

مثال ۱.۵.۴. سیستم های معرفی شده مثال ۲.۴.۴ را در نظر بگیرید.

هدف این است که در این مثال روند الگوریتم ژنتیک را کامل توضیح دهیم. جزئیات بیشتر در بخش دو فصل ششم که مربوط به کدنویسی الگوریتم ژنتیک در این مثال است به طور کامل آورده شده است. در اینجا هر کروموزوم، رشته ای دوازده تایی $(nmp = 3 \times 2 \times 2)$ است. تعداد متغیرهای هر کروموزوم به تعداد محدودیت های موجود در مسئله یعنی ۶ تا در نظر گرفته شده است. در الگوریتم ژنتیک از جستجوی جمعیت به جمعیت استفاده می شود. برای شروع کار یک جمعیت از فضای جواب را انتخاب کرده و با توجه به تابع هدف شروع به جستجو می کنیم. ابتدا اندازه جمعیت را تعیین می کنیم. اگرچه انتخاب اندازه جمعیت یک امر کاملا تصادفی است، ولی انتخاب صحیح آن از اهمیت ویژه ای برخوردار است. چون اگر خیلی بزرگ باشد برای رسیدن به جواب مناسب به محاسبات زیادی نیاز است و برعکس اگر جمعیت خیلی کوچک باشد اصولا همگرایی در زیر نقاط بهینه اتفاق می افتد. در این مثال حداقل اندازه جمعیت ۵۰۰ و حداکثر اندازه جمعیت ۲۰۰۰۰ در نظر گرفته شده است. هر تکرار از الگوریتم ژنتیک را یک نسل گوییم در اینجا تعداد تکرار الگوریتم ژنتیک (نسل) ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. مجموعه ای از کروموزوم ها یک جمعیت تشکیل می دهند. تابع فیتنیز در توابع بهینه سازی همان تابع هدف مسئله است. پس از انتخاب نسل اول به انتخاب نسل دوم می پردازیم. برای دسترسی به سایر نقاط در فضای جستجو تعدادی تغییر در جمعیت جدید توسط عملگرهای ژنتیکی تقاطع و جهش صورت می گیرد.

عملگر تقاطع مهمترین عملگر ژنتیکی است. این عملگر در یک لحظه بر روی دو کروموزوم اثر گذاشته

و به وسیله ترکیب دو کروموزوم دو فرزند ایجاد می کند. یک روش ساده برای رسیدن به تقاطع انتخاب تصادفی یک نقطه برش و تولید فرزند از ترکیب قسمتی از والد با قسمتی از والد دیگر است. راندمان الگوریتم ژنتیک، به طور قابل ملاحظه ای به راندمان عملگر تقاطع به کار رفته در الگوریتم وابسته است. نقطه برش در الگوریتم ژنتیک معمولا با pc نشان داده می شود. اندازه نقطه برش در این مثال ۰/۳ در نظر گرفته شده است.

جهش عملگری است که به طور خود به خود تغییرات تصادفی را در کروموزوم های مختلف ایجاد می کند. نرخ جهش به عنوان درصدی از کل بیت های موجود در جمعیت تعریف شده و آن را با pm نمایش می دهند. نرخ جهش سرعت ایجاد بیت های جدیدی را که در جمعیت برای ادامه کار تولید می شود را کنترل می کند. نرخ جهش را در این مثال ۰/۰۶ در نظر می گیریم. مناسب ترین G_λ :

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} ۴/۵۳۴۱ & ۲/۶۸۷ & ۴/۲۵ \\ ۰/۱۱۹۵۴ & ۱/۰۱۰۸ & ۱/۵۹۹۲ \end{bmatrix}$$

با استفاده از ۲۴.۴ داریم:

$$F = \begin{bmatrix} ۲/۰۱۲۹ & -۱/۷۸۴۱ & ۲/۰۸۹۴ \\ -۱/۶۹۴۳ & ۱/۲۸۱۳ & -۰/۷۴۸۷ \end{bmatrix}$$

نرم این ماتریس برابر است با ۳.۲۱۰۵.

مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در دو ماتریس برابر است با:

$$\nu_۱ = \{-۰/۲۰۱۳ \pm ۵/۰۶i,\ -۵/۲۶۹۵\}$$

$$\nu_۲ = \{-۱۲/۶۷۸۷ \pm ۴/۳۲۱۳i,\ -۲۶/۹۰۶۵ \pm ۳i\}$$

و در مثال دوم قسمت قبل تعداد هر متغیر در هر کروموزوم ۱۲ تاست. اندازه جمعیت را ۴۰۰ و ماکزیمم اندازه جمعیت را ۳۰۰۰۰ در نظر می گیریم. تعداد نسل ۱۰۰ در نظر گرفته شده است. در این مثال نرخ تقاطع ۰.۳ و نرخ جهش ۰.۰۶ است.

$$G_{۱\lambda} = \begin{bmatrix} ۱/۵ & ۹/۴۰۴۶ & ۴/۹۸۷۴ \end{bmatrix}$$

$$G_{۲\lambda} = \begin{bmatrix} ۲/۸۶۳۲ & ۱۱/۱۳۹۹ & ۴/۲۵ \end{bmatrix}$$

$$G_{۳\lambda} = \begin{bmatrix} ۱/۵ & -۲/۲۵ & ۴/۲۵ \end{bmatrix}$$

$$G_{۴\lambda} = \begin{bmatrix} ۴۵ & -۲/۲۵ & ۳۳۷۵ \end{bmatrix}$$

و ماتریس پس خورد همزمان به دست آمده برابر است با:

$$F = \begin{bmatrix} ۰/۲۵۳۴ & ۰/۴۵۳۱ & -۱/۱۳۲۳ \end{bmatrix}$$

که نرم آن برابر است با ۱.۲۴۵۶. مقادیر ویژه سیستم های حلقه بسته در این مثال برابر است با:

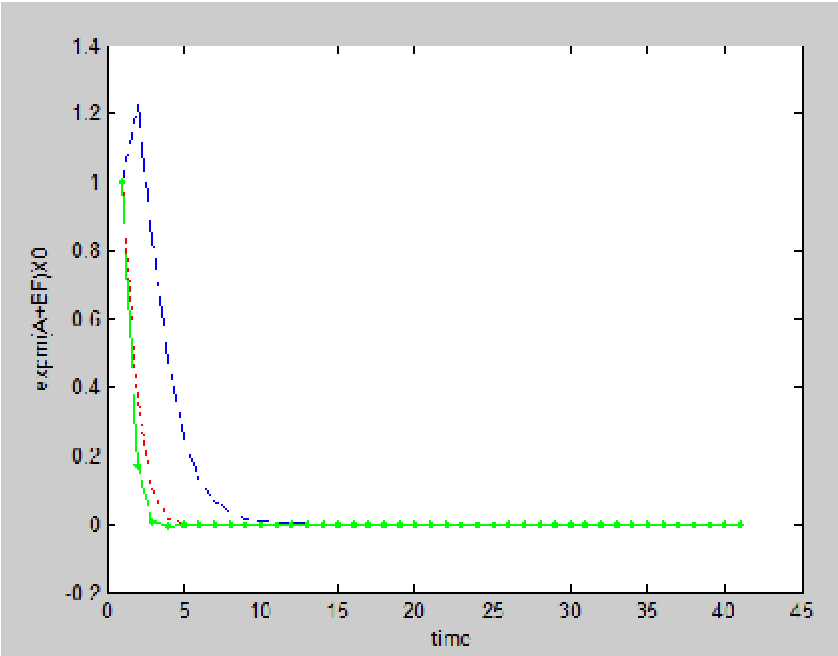
$$\nu_۱ = \{-۱۳/۲۴۳۶, -۱۳۶/۱۹۰۴ \pm ۱۲/۷۸۹۰\}$$

$$\nu_۲ = \{-۱۰/۶۷۰, -۳۴/۳۰۲۱ \pm ۰/۴۳۲۱i\}$$

$$\nu_۳ = \{-۸/۳۲۴۱, -۵۴/۰۲۱ \pm ۹i\}$$

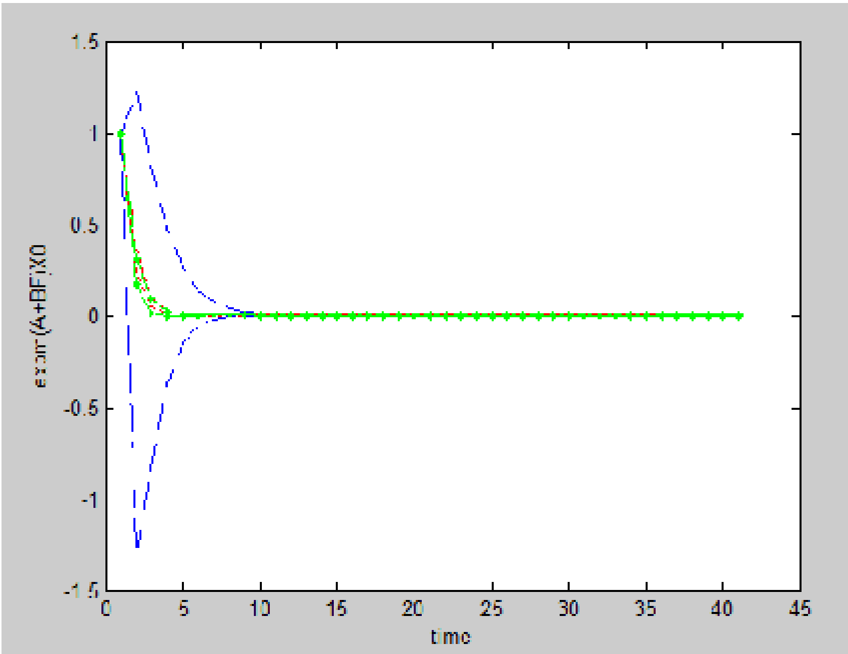
$$\nu_۴ = \{-۲۴,\ -۳۴/۰۹۸ \pm i\}$$

نتیجه ۲.۵.۴. در این فصل به کنترل همزمان سیستم های خطی پرداختیم. هدف پیدا کردن ماتریس پس خورد حالتی بود که برای مجموعه ای از سیستم ها برابر شود. ابتدا فرمول پس خورد حالت را برای سیستم ها مساوی قرار دادیم. جمعی از پارامترهای مجهول به دست آمد. سپس با الگوریتم ژنتیک پارامترهای مجهول را به دست آورده و در فرمول جایگزین می کنیم. ماتریس پس خورد به دست آمده هر چهار سیستم داده شده در مثال را به طور همزمان پایدار کرد. این نتیجه را در نمودارها به طور کامل مشاهده می کنیم.

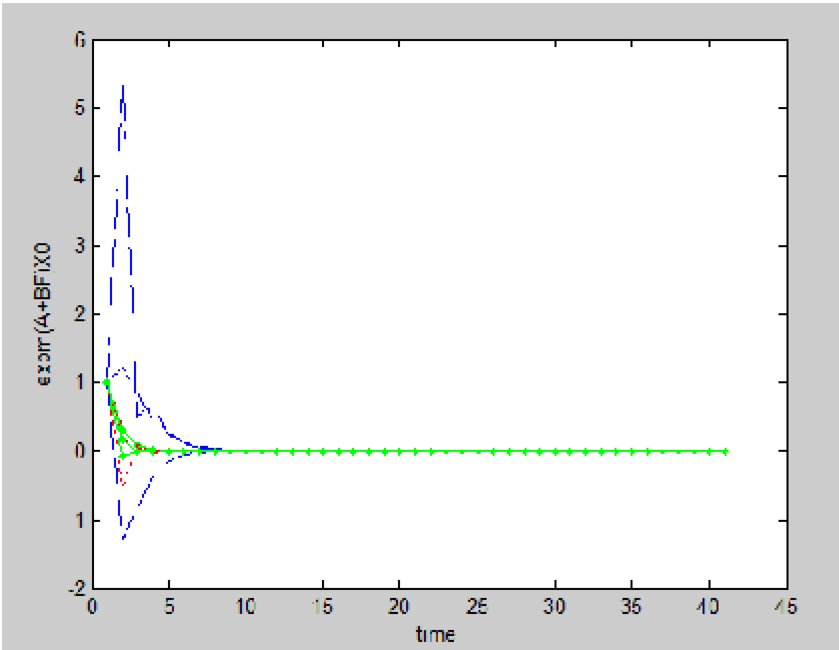


شکل ۱.۴: سیستم ۱

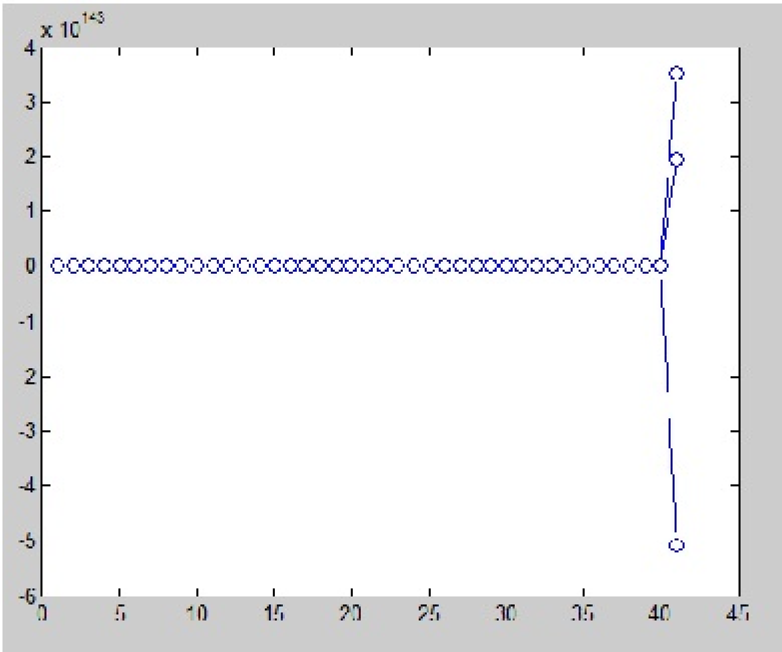
حالت تعادل حالتی است که در صورت ورودی ثابت و نبود اغتشاش، حالت و خروجی در همان حالت ثابت باقی بماند و یک سیستم زمانی پایدار است که هنگام اعمال شرایط اولیه به حالت تعادل برگردد. همانطور که مشاهده می کنید در این نمودارها این انتظار برآورده شده است و نکته دیگر این که هر چهار نمودار با یک ماتریس پس خورد پایدار شده است.



شکل ۲.۴: سیستم ۲



شکل ۳.۴: سیستم ۳



شکل ۴.۴: سیستم ۴

فصل ۵

ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی و کمینه سازی نرم آن با استفاده از دو روش

۱.۵ مقدمه

در این فصل با استفاده از دو روش به محاسبه ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی پرداخته و سپس نرم ماتریس پس خورد حالت به دست آمده با استفاده از این دو روش را با هم مقایسه می کنیم. در فصل سوم، به دست آوردن فرم همدم برداری برای زوج کنترل پذیر (B, A) را شرح دادیم. در این فصل با توجه به این که مشکلی برای به دست آوردن فرم همدم برداری (B, A) وجود ندارد، فرض می کنیم زوج (B, A) به فرم همدم برداری باشد و ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی را به دست می آوریم.
در بخش اول این فصل، به تعریف گراف می پردازیم. در بخش دوم، گراف مربوط به ماتریس $A + BF_p$ را به دست می آوریم، سپس در بخش سوم از یک روش جدید برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت استفاده می کنیم. قسمت بعدی این فصل یک الگوریتم را برای مینیمم کردن نرم کنترل کننده های پس خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه بیان می کنیم.

۲.۵ تعریف گراف

گراف از مجموعه ای غیر تهی به نام یالها تشکیل شده است. هر یال، با دو رأس مشخص می شود که یکی را ابتدای یال و دیگری را انتهای یال می نامیم. مجموعه رئوس می تواند، هر مجموعه متناهی را شامل شود. برای نامگذاری گراف از حرف g استفاده خواهیم کرد. اعضای مجموعه رئوس را با حروف e_i نشان می دهیم. یال موجود بین دو رأس e_i و e_j را با علامت (e_i, e_j) نشان می دهیم و مفهوم آن چنین است که یالی با ابتدای e_i و انتهای e_j در گراف وجود دارد. اگر، $(e_{i1}, e_{i2}), (e_{i2}, e_{i3}), \ldots (e_{i(s-1)}, e_{is})$ یالهایی از گراف باشد، آنگاه گوییم مسیری از e_{i1} به e_{is} وجود دارد و آن را با علامت

$$(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{is}) \qquad (۱.۵)$$

نشان می دهیم. رأس e_{i1} را ابتدای مسیر و رأس e_{is} را انتهای مسیر گویند.
بدیهی است که بین دو رأس در یک گراف ممکن است، تعدادی مسیر وجود داشته باشد و یا ممکن است بین دو رأس مسیری وجود نداشته باشد. همچنین بدیهی است که هر حلقه مسیری بین رأس با خودش می باشد، هر مسیری از e_i به خودش را یک دور گویند. تعداد یالهای تشکیل دهنده یک مسیر عددی صحیح و نامنفی است، این عدد را طول مسیر نامیم. رأس e_i را با رأس e_j مرتبط گوییم، اگر مسیری از e_i به e_j مرتبط باشد و مسیری غیر از دور و حلقه بین این دو رأس وجود داشته باشد، آنگاه مجموعه ی

$$L_{j,i} = \{L : Le_ie_j.\} \tag{۲.۵}$$

غیر تهی است، در این صورت عدد صحیح $L_{j,i} = maxL_{j,i}$ را ماکزیمم فاصله از e_i به e_j تعریف می کنیم.
در این فصل، اغلب مسیرهایی مورد نظر ماست که انتهای این مسیرها صفر می باشد. به این ترتیب گوییم رأس e_i با صفر مرتبط است و طول مسیر را با L_i نشان می دهیم. همچنین برای هر e_i مجموعه زیر را تعریف می کنیم:

$$L_i = \{Le_i.\} \tag{۳.۵}$$

برای گراف g با n رأس یک ماتریس $n \times n$ به صورت تعریف می کنیم. رئوس گراف g را با $e_1, e_2, \ldots, e_n$ نامگذاری می کنیم و ماتریس G را به صورت زیر تشکیل می دهیم:
اگر یالی از e_i به e_j وجود داشته باشد، قرار می دهیم:

$$G_{i,j} = 1 \tag{۴.۵}$$

اگر یالی از e_i به e_j وجود نداشته باشد، قرار می دهیم:

$$G_{i,j} = 0 \tag{۵.۵}$$

۳.۵ گراف مربوط به ماتریس $A + BF_p$

ابتدا فرم همدم برداری (A, B) را به روشی که در فصل دوم گفته شد به دست می آوریم. معادله $x(k+1) = Ax(k)+Bu(k)$ با قانون کنترل $u(t) = Kx(t)$ به معادله $\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k)+\tilde{B}u(k)$ با قانون کنترل

$$u(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t) \tag{۶.۵}$$

تبدیل می شود، که $\tilde{K}$ ماتریس پس خورد حالت معادله سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری اولیه است. با جایگذاری $(TS)^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}(t)$ در معادله (۶.۵) داریم:

$$u(t) = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}x(t) \tag{۷.۵}$$

بنابراین ماتریس پس خورد حالت معادله سیستم معمولی به صورت زیر به دست می آید:

$$K_p = \tilde{K}S^{-1}T^{-1} \tag{۸.۵}$$

که K_p ماتریس پس خورد حالت اولیه زوج (A,B) نامیده می شود. با فرض اینکه زوج (A,B) به فرم همدم برداری است، می توان به آسانی ماتریس پس خورد حالت F_p را برای این زوج، به دست آورد و با توجه به ساختار ماتریسهای A و B و نحوه به دست آوردن F_p ملاحظه می شود که درایه های ماتریس $A+BF_p$ صفر یا یک هستند. زیرا،

$$\tilde{A}+\tilde{B}F_p=\begin{bmatrix} & G_\circ & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m),m}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_\circ \\ O_{(n-m)\times m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-B_\circ^{-1}G_\circ\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} & G_\circ & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m)\times m}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -G_\circ \\ O_{(n-m)\times m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & O_{m\times n} & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m)\times n}\end{bmatrix}$$

پس می توان گرافی را برای آن متناظر کرد که رئوس آن را پایه های استاندارد $\mathbb{R}^n$ به انضمام بردار صفر تشکیل می دهند، که قاعده به دست آوردن گراف متناظر آن قبلا توضیح داده شد. یالی از e_i به e_j را در نظر می گیریم. اگر بردار e_i توسط تبدیل $A+BF_p$ به بردار e_j نگاشته می شود. یعنی؛

$$(A+BF_p)e_i=e_j \qquad (۹.۵)$$

گرافی که به دست می آید، هیچ یالی به صورت $(e_i,\circ)$ ندارد. برای این که، تبدیل $A+BF_p$ کاملا توسط گراف مشخص شود یالهایی را به صورت زیر به گراف اضافه می کنیم:
بین رأس e_i و صفر یالی را فرض می کنیم، اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$(A+BF_p)e_i=\circ \qquad (۱۰.۵)$$

گرافی که به این صورت برای ماتریس $A+BF_p$ به دست می آوریم، با g_p نشان می دهیم.
از آنجایی که $A+BF_p$ پوچ توان است، می توان نشان داد، که از هر رأس غیر صفر g_p مسیری به رأس صفر وجود دارد و علاوه بر این در g_p هیچ حلقه و دوری وجود ندارد. برای هر e_i می توان عدد L_i را مربوط ساخت که L_i ماکزیمم فاصله رأس e_i تا صفر است و می توان نتایج زیر را به راحتی به دست آورد:

۱. هر L_i عددی صحیح است که در رابطه زیر صدق می کند:

$$۱\leqslant L_i\leqslant n \qquad (۱۱.۵)$$

۲. اندیس پوچ توانی $A+BF_p$ برابر است با

$$\nu=max\{L_۱,\dots,L_n\} \qquad (۱۲.۵)$$

۳. در گراف g_p به هیچ یک از رئوس $e_۱,e_۲,\dots,e_m$ یالی منتهی نمی شود.

برای تعیین پارامترهای خطی در ماتریس پس خورد حالت، ماتریس حلقه بسته را در فضای استاندارد برای مقادیر ویژه صفر در نظر بگیرید، این ماتریس در حالت کلی دارای فرم زیر است:

$$\tilde{\Gamma_\circ}=\begin{bmatrix} & O_{m\times n} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m}\end{bmatrix} \qquad (۱۳.۵)$$

اثر $\tilde{\Gamma_\circ}$ به هر یک از بردارهای یکه، ایجاد یک بردار یکه دیگر است، به گونه ای که،

$$\tilde{\Gamma_\circ}e_i=e_j \qquad j>i \qquad (۱۴.۵)$$

و چنان چه $j > n$ آنگاه،

$$e_j = \circ \tag{۱۵.۵}$$

این اثر موسوم به انتقال حالت و گراف آن را گراف انتقال گویند. سپس گراف مربوط به ماتریس $\tilde{\Gamma_\circ}$ را به صورت زیر رسم می کنیم. در نظر می گیریم:

$$e_i = \begin{bmatrix} \circ \\ \vdots \\ ۱ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \tag{۱۶.۵}$$

سطر i ام آن ۱ است. ورودی های گراف را $e_۱, e_۲, \ldots, e_m$ در نظر می گیریم، سپس یالی از e_i به e_j رسم می کنیم، اگر

$$\tilde{\Gamma_\circ} e_i = e_j$$

بین رأس e_i و صفر یالی فرض می کنیم، اگر و فقط اگر،

$$\tilde{\Gamma_\circ} e_i = \circ \tag{۱۷.۵}$$

حال ماتریس G_α را با بعد $n \times m$ با درایه های صفر در نظر می گیریم و سپس برای یافتن پارامترها یالهایی از هر رأس به رئوس دیگر یا گره های دیگر، وصل می کنیم به گونه ای که:
الف) ابتدای هر یال یکی از ورودی های گراف باشد و انتهای آن ورودی یا گره های دیگر گراف باشد.
ب) ایجاد دور نکند.
ج) روی هم قرار نگیرد.
د) اگر از رئوسی که اندیس آن کوچکتر یا مساوی m است، یالی به رئوس دیگر وصل گردد، این یالهای اضافی بیانگر پارامترهای خطی است.
حال ماتریس پس خورد پارامتری خطی را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$K_\alpha = B_\circ^{-۱} G_\alpha s^{-۱} T^{-۱} \tag{۱۸.۵}$$

واضح است که K_α منحصر بفرد نمی باشد.
ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی که مقادیر ویژه دلخواه را به سیستم حلقه بسته اختصاص می دهد، عبارت است از:

$$K = K_p + K_\alpha \tag{۱۹.۵}$$

به طوری که، k_P و k_α به ترتیب ماتریس پس خورد حالتی است که مقادیر ویژه دلخواه را به سیستم حلقه بسته اختصاص می دهد و ماتریس پس خورد حالت پارامتری خطی می باشند.

مثال ۱.۳.۵. سیستم زیر را در نظر بگیرید و ماتریس پس‌خورد حالت آن را با استفاده از روش جدید گفته شده در فصل های قبل (ساختن تابع هدف با استفاده از مجموع توان دوم تک تک درایه های

ماتریس پس خورد حالت) به دست می آوریم.

$$B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ -۲ & ۳ & ۲\\ -۲ & -۱ & ۳\end{bmatrix}$$

به دست می‌آوریم:

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}۱ & ۴/۳\\ ۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix} \qquad \tilde{A}=\begin{bmatrix}۴ & -۸/۳ & -۵\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$S^{-۱}T^{-۱}=\begin{bmatrix}۲/۳ & ۱/۳ & -۱\\ ۱/۲ & -۱/۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱/۳\end{bmatrix}$$

ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری خطی برای این سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:
دو حالت می‌توانیم داشته باشیم، یالی که از راس $e_۱$ به $e_۲$ وصل می‌شود، نمایشگر پارامتر $g_{۱۲}$ است، یعنی

$$G_{\alpha۱}=\begin{bmatrix}۰ & g_{۱۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

و یا می‌توانیم دو یال از $e_۲$ به $e_۱$ و $e_۳$ وصل کنیم که نمایشگر $e_{۲۱}$ و $e_{۲۳}$ است. یعنی،

$$G_{\alpha۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ g_{۲۱} & ۰ & g_{۲۳}\end{bmatrix}$$

توجه کنید که $g_{۲۱}$ و $g_{۱۲}$ را نمی‌توان همزمان به کار برد، زیرا در این صورت یالی که $e_۱$ را به $e_۲$ وصل می‌کند و یالی که $e_۲$ را $e_۱$ وصل می‌کنند، روی هم قرار می‌گیرند. همچنین $g_{۱۱}$ و $g_{۲۲}$ را نمی‌توان انتخاب کرد زیرا ایجاد حلقه می‌کنند. $g_{۱۳}$ نیز خود در گراف موجود است.
برای به دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت داریم:

$$K_p=\begin{bmatrix}۰ & -۶ & ۱۰/۳\\ -۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix} \qquad K_\alpha=\begin{bmatrix}-۸/۹g_{۲۱} & -۴/۹g_{۲۱} & ۴/۳g_{۲۱}+۴/۹g_{۲۳}\\ ۲/۳g_{۲۱} & ۱/۳g_{۲۱} & -g_{۲۱}-۱/۳g_{۲۳}\end{bmatrix}$$

در این مثال برای تضمین پایداری مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته باید در بازه زیر قرار داشته باشد.

$$\{S\in\mathbb{C}\ -۲۰\leqslant real(S)\leqslant -۰/۱\quad -۱۸\leqslant imag(S)\leqslant ۱۸\}$$

$$\lambda_{min}=-۰/۱\qquad \lambda_{max}=-۲۰$$

$$
\begin{aligned}
min \ \ & (۲/۳g_{۱۱} - ۸/۹g_{۲۱} + ۱/۲g_{۱۲} - ۲/۳g_{۲۲} - ۸/۹g_{۲۱})^{۲} \\
& (۱/۳g_{۱۱} - ۴/۹g_{۲۱} - ۱/۲g_{۱۲} + ۲/۳g_{۲۲} - ۴/۹g_{۲۱} - ۶)^{۲} \\
& (۲/۳g_{۲۱} + ۱/۲g_{۲۲} + ۲/۳g_{۲۱} - ۲)^{۲} \\
& (۱/۳g_{۲۱} - ۱/۲g_{۲۲} + ۱/۳g_{۲۱} + ۲)^{۲} \\
& (-g_{۱۱} + ۴/۳g_{۲۱} - ۱/۳g_{۱۳} + ۴/۹g_{۲۳} + ۴/۳g_{۲۱} + ۴/۹g_{۲۳} + ۱۰/۳)^{۲} \\
& (-g_{۲۱} - ۱/۳g_{۲۳} - g_{۲۱} - ۱/۳g_{۲۳} + ۱)^{۲} \\
& ۰/۳ \leqslant g_{۱۱} + g_{۲۲} \leqslant ۶۰ \\
& ۰/۰۱ \leqslant g_{۱۱}g_{۲۲} - g_{۱۲}g_{۲۱} - g_{۱۳} \leqslant ۴۰۰ \\
& ۰/۰۰۱ \leqslant -g_{۲۲}g_{۱۳} + g_{۱۲}g_{۲۳} \leqslant ۸۰۰۰
\end{aligned}
\tag{۲۰.۵}
$$

$$G_{\lambda} = \begin{bmatrix} ۵/۲۷۲۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵/۱۶۳۶ & ۱/۹۳۶۳ \end{bmatrix}$$

و با قرار دادن در رابطه $K = B_{\circ}^{-۱}(-G_{\circ} + G_{\lambda} + G_{\alpha})S^{-۱}T^{-۱}$ به دست می‌آوریم:

$$K = \begin{bmatrix} ۰/۰۷۲۸ & -۰/۸ & -۰/۲۱۸۳ \\ ۰/۵۸۱۸ & -۰/۵۸۱۸ & -۰/۲۹۰۸ \end{bmatrix}$$

$$\| K \|_{F} = ۱/۲۰۶۰$$

۴.۵ یک الگوریتم برای مینیمم کردن نرم کنترل کننده های پس خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه

۱.۴.۵ فرمول نویسی مسئله

یک سیستم کنترل پذیر خطی ناوردای زمانی را که به وسیله معادله حالت

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۲۱.۵}$$

یا به صورت گسسته زمانی

$$x(k+۱) = Ax(k) + Bu(k) \tag{۲۲.۵}$$

بیان می شود در نظر بگیرید. در اینجا $u \in \mathbb{R}^m$ و $x \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس های A و B ماتریس های ثابت با اندازه های $n \times n$ و $n \times m$ می باشند و $rank(B) = m$ است.
هدف تخصیص مقادیر ویژه طراحی یک کنترل کننده پس خورد حالت K است که یک سیستم حلقه بسته با رفتار مناسب با انتقال دادن قطب های قابل کنترل از نقاط ناخواسته به مواضع مطلوب تولید نماید.
فرض کنید، K_p نمایشگر ماتریس پس خورد اولیه باشد که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته تخصیص می دهد و K_α ماتریس پس خورد پارامتری خطی باشد که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته تخصیص دهد، آنگاه ماتریس پس خورد پارامتری خطی در حالت کلی به صورت

$$K = K_\alpha + K_p \tag{۲۳.۵}$$

است.هدف آن است، که ماتریس K به گونه ای تعیین شود که نرم آن

$$J = \parallel K \parallel^۲ = trace[KK^t] \tag{۲۴.۵}$$

کمینه باشد.
یک راه حل برای کمینه ساختن آن است که،

$$\frac{\partial \parallel K \parallel^۲}{\partial \alpha_i} = ۰ \quad (i = ۱, ۲, \ldots, r) \tag{۲۵.۵}$$

در اینجا α_i نمایشگر پارامترها می باشند. باید دستگاه r معادله خطی که بر حسب α_i به دست می آیند را حل کرد. وقتی که تعداد پارامترها زیاد می شود، محاسبه مشتقات جزئی $\parallel K \parallel$ نسبت به هر پارامتر کاملا دشوار است. دراین پایان نامه الگوریتمی برای کمینه سازی نرم ماتریس کنترل کننده که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم تحت کنترل با استفاده از نتایج پیشنهادی فوق تخصیص می دهد ارائه می شود. چند مثال برای نمایش کار الگوریتم و سودمندی آن نیز ارائه می شود.
با توجه به فصل قبل داریم،

$$K = K_p + K_\alpha = K_p + B_۰^{-۱} G_\alpha T^{-۱} \tag{۲۶.۵}$$

که در آن عناصر K_p برای یک مجموعه از مقادیر داده شده ثابت می باشد.
فرض کنید، یک زیر ماتریس از G_α محتوی عناصر ناصفر G_α یعنی تنها پارامترهایی که با G_α جمع شده اند و عناصر آن $(\alpha)_{sr}$ در سطر s ام و ستون r ام قرار دارند انتخاب شوند، آنگاه بدیهی است که در

حاصل ضرب $B_{\circ}^{-1}G_{\alpha}T^{-1}$ ستون s از ماتریس $B_{\circ}^{-1}$ و سطر r ام از ماتریس T^{-1} پارامترهای ناصفر تولید می کنند که با عناصر متناظر $(K_p)_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m\quad j=1,2,\cdots,n)$ جمع می شوند. برای سهولت ستون های $B_{\circ}^{-1}$ را که با سطرهای $(\alpha)_{sr}$ متناظرند در ماتریس V و سطرهای T^{-1} را که با ستون های $(\alpha)_{sr}$ متناظرند را در ماتریس W قرار می دهیم. بنابراین ماتریس پس خورد پارامتری خطی موثر عبارت است از

$$K = K_p + V\alpha W \tag{۲۷.۵}$$

که درایه های آن

$$(K)_{ij} = (K_p)_{ij} + (V)_{is}(\alpha)_{sr}(W)_{rj} i\in 1,\cdots,m\quad j\in 1,\cdots,n\quad s\leqslant i\,,r\leqslant j \tag{۲۸.۵}$$

در این حالت نرم فروبینوس K عبارت است از

$$\parallel K \parallel_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(K)_{ij}^2 \tag{۲۹.۵}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[(K_p)_{ij} + (V)_{is}(\alpha)_{sr}(W)_{rj}]^2 \tag{۳۰.۵}$$

در کمینه کردن نرم باید داشته باشیم،

$$\frac{\partial \parallel K \parallel_2}{\partial(\alpha)_{sr}} = 0 \quad s\leqslant m \quad r\leqslant n \tag{۳۱.۵}$$

با مشتق گیری از $\parallel K \parallel_2$ نسبت به هریک از $(\alpha)_{sr}$ ها داریم:

$$2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(V)_{sr}[(K_p)_{ij} + (V)_{is}(\alpha)_{sr}(W)_{rj}](W)_{jr} = 0 \tag{۳۲.۵}$$

$$(V)_{si}(K)_{ij}(W)_{jr} + (V)_{si}(V)_{is}(\alpha)_{sr}(W)_{rj}(W)_{jr} = 0 \tag{۳۳.۵}$$

لیکن نماد ماتریس $(V)_{si}(V)_{is}$ بیانگر V^tV ، یک ماتریس وارون پذیر $s\times s$ است که آن را P می نامیم و $(W)_{rj}(W)_{jr}$ بیانگر WW^t است، یک ماتریس وارون پذیر $r\times r$ است که آن را Q می نامیم. بنابراین با تعریف

$$P = V^tV \tag{۳۴.۵}$$

و

$$Q = WW^t \tag{۳۵.۵}$$

و

$$C = V^tK_pW^t \tag{۳۶.۵}$$

می توان معادله (۳۳.۵) را با نماد ماتریسی به صورت زیر نمایش داد،

$$P\alpha Q = -C \tag{۳۷.۵}$$

بنابراین،

$$\alpha = -P^{-1}CQ^{-1} \tag{۳۸.۵}$$

به دست می آید. بنابراین پارامترهای α بر حسب $B_{\circ}^{-1}$ و K_p و T^{-1} به دست می آید و الگوریتم زیر نتیجه می شود.

۲.۴.۵ الگوریتم

هدف: یافتن پارامترهای α که نرم ماتریس کنترل کننده را کمینه می سازد.
ورودی: زوج (B, A) ، ماتریس پس خورد حالت اولیه، K_p ، $B_{۰}^{-۱}$ و $T^{-۱}$ را تعیین می کنیم.
گام۱: سطرها و ستون های G_α را که در آن پارامترهای α در محل s و r قرار دارند را مشخص می کنیم.
ستون های $B_{۰}^{-۱}$ را که با سطرهای $(\alpha)_{sr}$ متناظرند در ماتریس V و سطرهای $T^{-۱}$ را که با ستون های $(\alpha)_{sr}$ متناظرند در ماتریس W ذخیره می کنیم.
گام ۲: مقادیر V^tV ، WW^t و $V^tK_pW^t$ را محاسبه می کنیم و آنها را به ترتیب در P و Q و C ذخیره می کنیم.
گام ۳: $-P^{-۱}CQ^{-۱}$ را می کنیم و مقادیر α را در ماتریس G_α ازگام ۱ قرار می دهیم.
گام ۴: ماتریس $K_\alpha = B_{۰}^{-۱}G_\alpha T^{-۱}$ را محاسبه می کنیم.
گام ۵: ماتریس $K = K_p + K_\alpha$ را محاسبه می کنیم.

مثال ۱.۴.۵. سیستم مثال قبل در در نظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

به دست می‌آوریم:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴/۳ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} ۴ & -۸/۳ & -۵ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$S^{-۱}T^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲/۳ & ۱/۳ & -۱ \\ ۱/۲ & -۱/۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱/۳ \end{bmatrix} \qquad K_p = \begin{bmatrix} ۰ & -۶ & ۱۰/۳ \\ -۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

طبق الگوریتم فوق برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت با این روش داریم:
طبق گام ۱ دو مجموعه پارامتر مستقل خطی می توان انتخاب کرد. $\alpha_{۱۲}$ یا $(\alpha_{۲۱}, \alpha_{۲۳})$ پارامترهای موثری هستند که دو ماتریس پس خورد حالت پارامتری را به دست می دهند. اگر $\alpha_{۱۲}$ انتخاب شود، ستون ۱ از $B_{۰}^{-۱}$ و سطر ۲ از $T^{-۱}$ در V و W ذخیره می شوند. بنابراین،

$$V = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$P = V^tV = ۱ \quad Q = WW^t = ۱۳ \quad C = V^tK_pW^t = -۲$$

$$\alpha = ۰/۱۵۳۸$$

$$K = K_p + K_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & -۶ & ۱۰/۳ \\ -۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۸ & ۱۰/۳ \\ -۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

نورم این ماتریس برابر است با ۹.۳۸۶۸

حال اگر $(\alpha_{۲۱}, \alpha_{۲۳})$ انتخاب شود، داریم:

$$V = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} ۴ & -۸/۳ & -۵ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

گام۲:

$$P = V^t V = ۱$$

$$Q = WW^t = \begin{bmatrix} ۴۸/۱۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

گام۳:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۳۲۱۸ & ۰/۷۱۲۸ \end{bmatrix}$$

گام۴:

$$k_\alpha = \begin{bmatrix} -۰/۲۸۶۰ & -۰/۱۴۳۰ & ۰/۷۴۵۹ \\ ۰/۲۱۴۵ & ۰/۱۰۷۳ & -۰/۵۵۹۴ \end{bmatrix}$$

گام۵:

$$K = K_p + K_\alpha = \begin{bmatrix} -۰/۲۸۶۰ & -۶/۱۴۳۰ & ۴/۰۷۹۲ \\ -۱/۷۸۵۵ & ۲/۱۰۷۳ & ۰/۴۴۰۶ \end{bmatrix}$$

نورم این ماتریس برابراست با ۷.۸۹۱۸

نتیجه ۲.۴.۵. در این فصل برای کنترل یک سیستم که در آن از گراف نیز استفاده شده است، ابتدا از یک روش جدید که همان مینیمم سازی تابع هدف است استفاده شده چون در این روش نیز با کار بر روی محدودیت ها مقدار پارامترها را مینیمم کرده ایم مقدار ماتریس پس خورد حالت با کمترین نورم به دست آمد. در قسمت بعدی نیز برای همین مثال از یک الگوریتم برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت استفاده کرده ایم که در این مثال روش اول بهتر از روش قبلی بوده است چون ماتریس پس خورد نورم کمتری دارد.

فصل ۶

برنامه‌های کامپیوتری

۱.۶ کد متلب مساله کنترل همزمان سیستم های خطی

```
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% ************************************************
t0=cputime;
disp(' This is the given plant matrix A') %line 1
disp(' ********************************') %line 2
A=[1.3800 -0.2077 6.7150 -5.6760;-0.5814 -4.2900 0 0.6750;
1.0670 4.2730 -6.6540 5.8930;0.0480 4.2730 1.3430 -2.1040]
%line 3
disp(' This is the given input matrix B') %line 4
disp(' ********************************') %line 5
B=[0 0; 5.6790 0;1.1360 -3.1460;1.1360 0]
%line 6
A=A'; %line 7
[V,D]=eig(A);
[V,D]
```

```
V1=V(:,[1 3 4 9])
Qp=gramsch(V1)
R=Qp'*A*Qp
E=Qp'*B
A=R'
B=-E
[n,m]=size(B);
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n); %line 10
% The Echelon form of Q
% ----------------------
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
[q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
if (q<=tol)
Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
j=j+1;
else

if i~=k
Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
Q(:,[i+m,k+m])=Q(:,[k+m,i+m]);
end

t=Q(i,j);
% if t~=0
Q(i,:)=Q(i,:)/t;
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
T1(i,:)=T1(i,:)/t;
% end

if i~=n
```

```
for k=i+1:n
t=Q(k,i);
if t~=0
Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
end
end
end
i=i+1 ;
j=j+1;
end
end
% ********************************************
% Now compute the Standard echelon form !
% --------------------------------------------
s=1;
while s < n
i=s+1 ;
for j=i:r
if Q(i,j)~=0
for k=1:s
if Q(k,j)~=0
t=Q(k,j);
Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
end
end
break
end
end
s=s+1;
end
```

```
% *****************************************************************
for i=n:-1:m+1
for k=i:r
if Q(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Q(i,j);
Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
end
break
end
end
end
% ***************************************************************
Q
% ....................................................
disp(' This is the transformation matrix,T1')
disp(' ************************************')

T1
% ****************************************************
% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:,[1:m]);A1=Q(:,[m+1:r])
B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
Fp=F1*T1;
% **************************************************************
disp(' This is the primdry feedback law ')
disp(' ******************************** ')

Fp
% **************************************************************
gama=A+B*Fp
```

```
%**** ********************************************************
t0=cputime;
t1=cputime-t0;
% program for assigning eigenvalues,eigen.m
% ****************************************
D=[];
for j=1:n
landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
end

for i=1:n
D(i,i)= landa(i);
end
Acap=A1;
Bcap=B1;
newF=Fp ;
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1]
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
for k=1:r
if Qc(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Qc(i,j);
Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
end
break
end
end
end
```

```
G2=Qc(1:m,m+1:r);
glanda=Qc(:,m+1:r);
Fc=bo*G2*T1;
disp(' The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
disp(' ******************************************************')
Kp=newF+Fc
F=Qp*Kp';
disp(' with the closed-loop matrix ')
disp(' ************************** ')
gamac=A+B*Kp;
disp(' checking the eigen values ')
disp(' ************************ ')
v=eig(gamac)'
[u1,v1]=eig(gamac);
c2=cond(u1)
disp(' Frobenius norm of feedback matrix ')
disp(' ******************************** ')
Normkp=norm(Kp,'fro')
F


% End of program for eigen
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
A=[-1.8501 -19.6291 9.5071;
0.2648 -0.8512 -11.8900;
0.2640 11.3640 -3.4170]
X0=[1;1;1]
```

```
X=[]
for t=0:0.01:1
X=[X, expm(t*A)*X0]
end
plot3(X(1,:),X(2,:),X(3,:),X(3,:), '-o')
% End of program for plot3
**********************************
A=[1.38 -0.2077 6.7150 -5.6760
-0.5719 3.3739 0 0.6750
-6.0577 54.6589 -6.6540 5.8930
0.0499 5.8069 0 -2.1040]
X0=[1;1;1;1]
X=[]
for t=0:0.01:1
X=[X expm(t*A)*X0]
end
plot(X(1,:), '-o')
hold on
plot(X(2,:), '-o')
hold on
plot(X(3,:), '-o')
hold on
plot(X(4,:), '-o')
% End of program for plot
*********************************
```

۲.۶ کد نویسی الگوریتم ژنتیک

```
% Parameters sitting
% **************************************************
nvar=6;
lb=[-1.5,-2.25,4.25,-1.5,-2.25,-4.25]
ub=[10,10,10,10,10,10]
popsize=500;
```

```
nn=50;
maxpopsize=20000;
maxiter=1000;
pc=0.3;
ncross=2*round((popsize*pc)/2);
pm=0.06;
nmut=round(popsize*pm);
stopiter=100;
disp(' ********************************')
% inital population algorithms
emp.var=[];
emp.fit=[];
pop=repmat(emp,maxpopsize,1);
for i=1:maxpopsize
pop(i).var=lb+rand(1,var)*(ub-lb);
pop(i).fit=fitness(pop(i).var);
end
[value,index]=sort([pop.fit]);
pop=pop(index)
gpop=pop;
pop=pop(1:popsize);
****************************************
%main loop algorithms
Best=zeros(maxiter,1);
mean=zeros(maxiter,1);
for iter=1:maxiter
% CROSSOVER
crossover=repmat(emp.ncross);
croosspop=crossover(crosspop,pop,ncross,nn);
%MUTATION
mutpop=repmat(emp,maxpopsize,1);
mutpop=mutation(mutpop,pop,nvar,nmut,popsize,lb.ub,nn)
pop=pop(index);
gpop=pop(1);
```

```
pop=pop(1:popsize);
Best(iter)=gpop.fit;
mean(iter)=mean([pop.fit]);
disp(['iter'=num2str(iter),'Best'=num2str(Best(iter)])
end
****************************************************************
%End of the program Genetic Algorithms
*********************************
```

مراجع

[1] F.Saadatjoo,V.Derhami, S.M.Karbassi, *Simultaneous Control of linear systems by state feedback*, Computers and mathematics with applications, Vol.58, (2009), 154-160.

[2] S.M.Karbassi, F.Saadatjoo, *A parametric approach for eigenvalue assignment by static output feedback* , Journal of the Franklin institude, Vol.346, (2008), 154-160.

[3] S.M.Karbassi, D.J.Bell *New method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control*, IEEE proc, Vol.141, (1994), 223-226.

[4] H.A.Tehrani, *Time Optimal control of descrete-time linear systems with state time delays*, International journal of innovative computing information and control, Vol.5, (2009), 2619-2625.

[5] Y.Arfiadi, M.N.S.Hadi, *Optimal direct(static) output feedback controller using real coded genetic algoritms*, Computers and structures, Vol.74, (2001), 1625-1634.

[6] B.Porter, M.Borairi, *Genetic design of linear multivariable feedback control systems using eigenstructure assignment*, Int j.systems Science, Vol.23, (1992) 1387-1390.

[7] V.Blondel, M.Gevers, *Simultaneous stabilizity of three linear systems is rationally undeniable*, Mathematics of control, signals and systems, Vol.6, (1993), 135-145.

[8] S.Askarpour, T.j.Ownes, *Integrated approach to eigenstructure assignment by output feedback control*, IEEE proc. D 144, (1997), 435-438.

[9] D. Jiang, J.wang, *Augmented gradiant flows for on-line robust pole assignment via state and output feedback*, Automat. J. Control 38 (2002), 279-286.

[10] H. Kimura, *Pole assignment by gain output feedback*, IEEE Trans. Automat.Control 20 (1975) 509-516.

[11] I.R. Peterson, *A procedure for simultaneous stabilizing a collection of single input linear systems using nonlinear state feedback control*, Automica, Vol.23, (1987), 33-40.

[12] Y.Y. Cao and L.Lam, *A computational method for simultaneous LQ optimal control design via picewise constant output feedback*, IEEE. Trans., Man, Cybern. B, Vol.31, (2001), 836-842.

[13] J.L. Wu, T.T.Lee, *Optimal static output feedback simultaneous regional pole placement*, IEEE Trans, Man. Cybern. B, Vol.35, (2005), 881-893.

[14] A.Ichikawa, H.Katayama, *The design of deadbeat controllers by state transition graph*, IEEE, Automat. Control. 36, (1991), 752-756.

[15] B.N.Datta, *Numerical methods for linear Control systems design and Analysis*, Elsevier academic press, (2003).

[16] B.N.Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, SIAM, (2010).

[17] A.Quateroni, *R.Sacco and F.Saleri. Numerical Mathematics*, Springer, (2006).

[18] S.M.Karbassi , *An algorithm for minimizing the Norm of state feedback Controllers in eigenvalues assignment*, Computers of mathematics with applications, Vol.41 (2001), 1317-1326.

[19] S.M.Karbassi, F. Soltanian, *A new approach to the solution of Sensitivity minimization in linear State feedback control*, Iranian journal of mathematical science and informations, Vol.2, (2007), 1-13.

[20] F. Saadatjou, V.Derhami, S.M.Karbassi, *Stabilization of Simultaneous linear multivariable Systems with improving time-response using genetic algorithms*, International journal of innovative computing, Vol.7, (2011), 151-160.

[21] Selvam, V.K.Manika *Elements of matrix and stability analysis of structures*, (2001).

[22] Kirk, *Optimal control theory*, (2001).

[23] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue problem*, (1965).

[24] Houpt, R., *Partial Genetic Algorithms*, NewYork, Inc., (1998).

[25] S.M.Karbassi, H.A.Tehrani, *Parameterizations of the state feedback Controllers for linear multivariable systems*, Computers and Mathematics with applications, Vol.44, (2002), 1057-1065.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الگوریتم	Algoritm
اقلیدسی	Euclidean
بلوکی	Block
بردار ویژه	Eigenvector
بردار ویژه راست	Right eigenvector
بردار ویژه چپ	Left eigenvector
پایه	Base
پیوسته زمانی	Continous-time
پارامتری کردن	Parameterization
پس‌خورد حالت اولیه	Primary state feedback
تخصیص	Assignment
ترکیب خطی	Linear decomposition
تبدیل تشابهی	Similarity transaction
ترانهاده	Transpese
تبدیل	Transformation
چندجمله‌ای مشخصه	Charactristic Polynomial
حذف	Reject
حل پذیر	Solvable
دترمینان	Determinant
دسترس پذیری	Reachability
زیرفضا	Sub-space
سیستم حلقه–بسته	Close-loop System
سیستم حلقه–باز	Open-loop System
سیستم تاخیری	Delay system
سیستم تعمیم یافته	Generalized System

سیستم خطی .... Linear System

سیستم غیر خطی .... Nonlinear System

شاخص .... Index

طیف .... Spectrum

فضای پوچ .... Null space

فرم استاندار اشلون .... Standard echolen form

فرم همدم برداری .... Vector companian form

قانون کنترل .... Low control

قطب .... Pole

کنترل پذیر .... Controllability

کنترل‌گر .... Controller

کاملا پایدار .... Total stability

لیاپانوف .... Lyapunov

ماتریس افزوده .... Augmented matrix

ماتریس همانی .... Identity matrix

ماتریس مربعی .... Squre matrix

ماتریس تشابهی .... Similarity matrix

مشاهده پذیر .... Observable

محاسبه .... Computation

متغیر کنترل .... Control variable

مزدوج مختلط .... Conjugated complex

معادله دینامیکی .... Dynamic equation

مستقل خطی .... Linear independed

میدان .... Field

نرم ماتریس .... Norm or matrix

ناورداهای کرونکر .... Kronocker invariant

وجود .... Existence

وابسته خطی .... Linear depended

یکتایی .... Uniqueness

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

الگوریتم	Algorithm
تخصیص	Assignment
مجانبی	Asymptotically
ماتریس افزوده	Augmented matrix
پایه	Bases
بلوکی	Block
معادله مشخصه	Characteristic-equation
حلقه بسته	Closed-Loop
متغیر کنترل	Control Variable
مزدوج مختلط	Conjugated Complex
فرم همدم	Companian form
پیوسته زمانی	Continous-time
قانون کنترل	Control low
کنترل پذیر	Controllable
کنترل‌گر	Controller
ستون	Column
محاسبه	Computation
قضیه کیلی هامیلتون	Cayley-Hamilton theorem
ماتریس ثابت	Constant matrix
سیستم تاخیری	Delay system
گسسته زمانی	Descrete-time
توصیف سیستم	Description system
دترمینان	determinant
دیفرانسیل	Differential
معادله دینامیکی	Dynamical equation

Elementary .... مقدماتی

Eigen vector .... بردار ویژه

Eigen value .... مقدار ویژه

Euelidean .... اقلیدسی

Existence .... وجود

Feedback .... پس‌خورد

Field .... میدان

Generalized .... تعمیم یافته

Horizontal .... افقی

Index .... شاخص

Inverse .... معکوس

Kronocker invariant .... ناوردای کرونکر

Left eigen vector .... بردار ویژه چپ

Linear composition .... ترکیب خطی

Linear depended .... وابسته خطی

Linear independed .... مستقل خطی

Lyapunov .... لیاپانوف

Nonlinear system .... سیستم غیر خطی

Norm of matrix .... نرم ماتریس

Null space .... فضای پوچ

Observable .... مشاهده پذیر

Operations .... عملیات

Open-Loop .... حلقه باز

Output-vector .... بردار خروجی

Orthogonal .... متعامد

Parameterization .... پارامتری سازی

Physical system .... سیستم فیزیکی

Primary state feedback .... پس‌خورد حالت اولیه

Pole .... قطب

Polynomial .... چند جمله‌ای

Reachability .... دسترس پذیری

Rejection .... حذف

Right eigenvector .... بردار ویژه راست

Sub-Space .... زیر فضا

Spectrum .... طیف

Similarity transaction .... تبدیلات تشابهی

Schur decomposition .... تجزیه شور

Squre .... میدان

Transpese .... ترانهاده

Transformation .... تبدیل

Triangler matrix .... ماتریس مثلثی

Total stability .... پایدار کلی

Vector .... بردار

Vertial .... عمودی

نمایه

Aabstract

In this thesis explain some ways for minimizing of feedback matrix's norm. importance of this theory in on reason that this need less price and time normally. Genetic algorithms eemploys for Simultaneous control systems. Control of systems with this ways need equations and inequations Genetic algorithms use from reply of this equations and inequations and make new function with them that they betterr than previous answer. In this thesis An analytical way employs for finding of answer then A numerical way peresent for growth of answer. At the end of part come an example for more clarity.

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Genetic Algorithms and It's application in control of Simultaneous linear systems

Supervisor

Dr Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor

Dr Ali Mesforoosh

by

Zari Shojaee moghadam

2014