



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

تقریب جواب‌های غیرتسلطی در بهینه‌سازی چندهدفی خطی

استادان راهنما

دکتر جعفر فتحعلی و دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

آقای خسرو حسین‌زاده

دانشجو

زهره اسدی

۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در سختی ها و دشواری های زندگی، همواره یاری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن
برایم بوده اند.

تقدیم به او که آموخت مرا تا بیا موزم

استاد گرامی جناب آقای دکتر مهداد غزنوی.

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او مانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های
او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.
بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از
زحمات بی‌شائبه او، بازبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بکارم. اما از آنجایی که
تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند،
بر حسب وظیفه از اساتید با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی و جناب
آقای دکتر محمد آرشی و بویژه استاد کرامت‌الله جناب آقای دکتر مهرداد غزنوی که در
کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ‌کلی در این عرصه بر من دریغ ننمودند
و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تعمدنامه

اینجانب زهره اسدی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تقریب جواب های غیرتسلطی در بهینه سازی چندهدفی خطی، تحت راهنمایی دکتر جعفر فتحعلی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره اسدی
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی جواب‌های کارایی و کارایی ضعیف برای یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه می‌پردازیم. سپس روش اسکالرسازی که یکی از روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است را بیان می‌کنیم. در ادامه، به کمک قضیه دوگان هندسی تناظری که بین مساله اولیه و دوگان است را نشان می‌دهیم و از قضیه دوگان هندسی برای ارائه الگوریتم بیرونی بنسئون کمک می‌گیریم. الگوریتم بیرونی بنسئون، نقاط غیرتسلطی مجموعه شدنی را پیدا می‌کند. در ادامه دوگان الگوریتم بنسئون را بیان می‌کنیم و با اعمال تغییراتی روی الگوریتم دوگان بنسئون، تقریب الگوریتم بنسئون را ارائه می‌دهیم. این الگوریتم با ایجاد تقریبی درونی و بیرونی از مجموعه غیرتسلطی، مجموعه‌ای از نقاط ϵ -غیرتسلطی را ایجاد می‌کند و ثابت می‌کنیم تقریب درونی، مجموعه‌ای از نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف است. کاربرد الگوریتم‌ها را در مسائل بهینه‌سازی شدت پرتو در پرتودرمانی بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، بهینگی پارتو، فضای هدف، دوگان هندسی، الگوریتم بنسئون، تقریب بیرونی، مجموعه ϵ -غیرتسلطی، پرتودرمانی.

فهرست مطالب

۱	مبانی نظری بهینه سازی چندهدفه	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۲	۲.۱ مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی چندهدفه	۲
۱۰	۳.۱ بهینه‌سازی چندهدفه نسبت به یک مخروط دلخواه	۱۰
۱۵	۲ دوگان هندسی یک مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه	۱۵
۱۵	۱.۲ روابط بین مساله اولیه و دوگان	۱۵
۲۹	۳ پیدا کردن نقاط غیرتسلطی با کمک دوگان الگوریتم تقریب بیرونی بنسون	۲۹
۲۹	۱.۳ الگوریتم تقریب بیرونی بنسون	۲۹
۳۷	۲.۳ دوگان الگوریتم بنسون	۳۷
۴۵	۴ جواب‌های تقریباً کارا با کمک دوگان الگوریتم بنسون	۴۵
۴۵	۱.۴ حل مساله اولیه و دوگان	۴۵
۵۶	۲.۴ به دست آوردن ابروجه‌های غیرتسلطی P توسط D	۵۶
۵۷	۳.۴ حل تقریبی دوگان برنامه‌ریزی خطی چندهدفه	۵۷
۶۷	۵ کاربرد الگوریتم‌های ارائه شده در پرتودرمانی	۶۷
۶۷	۱.۵ مقدمه‌ای بر پرتودرمانی	۶۷
۶۸	۲.۵ محاسبه دوز	۶۸
۷۰	۳.۵ مسائل بهینه‌سازی در IMRT	۷۰
۷۱	۴.۵ مساله شدت پرتو	۷۱
۷۱	۱.۴.۵ الگوریتم‌ها و مساله شدنی	۷۱
۷۲	۲.۴.۵ مدل برنامه‌ریزی خطی	۷۲
۷۴	۳.۴.۵ محدودیت‌های حجم دوز	۷۴
۷۵	۵.۵ برنامه‌ریزی چندهدفه	۷۵
۸۸	مراجع	۸۸

۹۲	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۹۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مبانی نظری بهینه سازی چندهدفه

۱.۱ مقدمه

بهینه سازی چندهدفه کاربردهای زیادی در طبیعت دارد که یکی از این کاربردها در پزشکی است. در این پایان نامه به بهینه سازی چندهدفه و کاربرد آن در زمینه پرتودرمانی می پردازیم. یک مساله بهینه سازی چندهدفه معمولاً چند جواب بهینه دارد که تعداد این جواب ها می توانند متناهی یا بی نهایت باشند. تصمیم گیرنده چندهدفه برای انتخاب این جواب ها می تواند به صورت نظام مند عمل کند.

در مساله بهینه سازی چندهدفه (MOP) جواب بهینه جوابی است که نتوان هیچ یک از مولفه هایش را بهبود داد مگر آن که حداقل یکی دیگر از مولفه هایش بدتر شود. چون ویلفردو پارتو این تعریف را در سال ۱۸۹۶ توسعه داد به این تعریف، اغلب بهینگی پارتو گویند.

مسائل بهینه سازی چندهدفه با کمک روش هایی به مساله تک هدفه متناظر با مساله چندهدفه تبدیل شده و با استفاده از تکنیک های بهینه سازی تک هدفه حل می شوند و جواب های بهینه برای مساله تک هدفه به دست می آیند. رابطه بین جواب های بهینه مساله تک هدفه و جواب های کارای مساله بهینه سازی چندهدفه از اهمیت زیادی برخوردار است. در این پایان نامه به جواب های ϵ -کارای مسائل بهینه سازی چندهدفه می پردازیم. هدف پیدا کردن نقاط ϵ -غیرتسلطی (تصویر نقاط کارا در فضای شدنی) یا همان نقاط ϵ -کارا در مجموعه هدف است.

در فصل اول مساله بهینه سازی چندهدفه و تعاریف اولیه بهینه سازی چندهدفه که در ادامه استفاده می شوند را بیان می کنیم. چون در فصل های بعد مجموعه شدنی را توسط یک مخروط گسترش می دهیم، بنابراین به تعریف مخروط و بهینگی روی مخروط دلخواه می پردازیم. برای به دست آوردن نقاط غیرتسلطی، نیاز داریم مساله بهینه سازی چندهدفه را به مساله تک هدفه تبدیل کنیم. برای این منظور در این پایان نامه از روش اسکالرسازی استفاده می کنیم و یک مساله تک هدفه می سازیم و رابطه بین جواب های بهینه مساله تک هدفه و جواب های کارای مساله چندهدفه را بیان می کنیم.

در فصل دوم با توجه به قضیه دوگان قوی در مسائل بهینه سازی تک هدفه، قضیه دوگان هندسی را برای مسائل بهینه سازی خطی چندهدفه (MOLP) اثبات می کنیم و با استفاده از آن، تناظر بین مساله

اولیه و دوگان را بیان می‌کنیم که رابطه بین ابروجه‌های یکی از این دو مساله با نقاط رأسی مساله دیگر را بیان می‌کند و با مثال‌هایی این رابطه را نشان می‌دهیم.

برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و پیدا کردن مجموعه کارا و مجموعه غیرتسلطی، روش‌های سیمپلکس چندهدفه و روش نقطه داخلی و روش‌های بررسی فضای هدف وجود دارند. روش‌های سیمپلکس و نقطه داخلی روی فضای متغیرها کار می‌کنند و روش بررسی فضای هدف روی فضای هدف کار می‌کند و چون اغلب در یک مسئله چندهدفه تعداد اهداف از تعداد متغیرها کمتر است، لذا حل یک مسئله چندهدفه با کمک بررسی فضای هدف محاسبات کمتری نیاز دارد و لذا زمان محاسبات کاهش می‌یابد.

در فصل سوم از روش بررسی فضای هدف استفاده می‌کنیم و الگوریتم تقریب بیرونی را معرفی می‌کنیم و به‌جای اینکه مجموعه کارا در فضای تصمیم را پیدا کنیم، مجموعه غیرتسلطی در فضای هدف را پیدا می‌کنیم. این الگوریتم همه نقاط غیرتسلطی مجموعه شدنی مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) را پیدا می‌کند. در بخش دوم این فصل ایده الگوریتم بنسون را برای مجموعه شدنی دوگان به‌کار می‌بریم و با کمک قضیه دوگان هندسی که در فصل دوم بیان شد رابطه بین مجموعه شدنی اولیه و دوگان را بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم به نحوه پیدا کردن جواب‌های تقریباً کارای مسائل چندهدفه می‌پردازیم. در این فصل یک نسخه تقریبی از الگوریتم دوگان بنسون ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن یک فاصله اقلیدسی، مجموعه تقریب بیرونی و مجموعه تقریب درونی را به‌دست آورد و با محصور کردن مجموعه اولیه در بین مجموعه‌های تقریبی، مجموعه نقاط ϵ -غیرتسلطی را پیدا می‌کنیم. مجموعه نقاط غیرتسلطی تقریب درونی، همان نقاط ϵ -غیرتسلطی مساله اولیه است. در این فصل با حل تقریبی مساله دوگان و به‌کمک روابطی که در فصل دوم بیان شد، مجموعه چندوجهی اولیه در فضای هدف را محاسبه می‌کنیم. نشان می‌دهیم مجموعه نقاط غیرتسلطی ضعیف تقریب درونی، برای مساله MOLP اولیه، همان نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف مساله اولیه است.

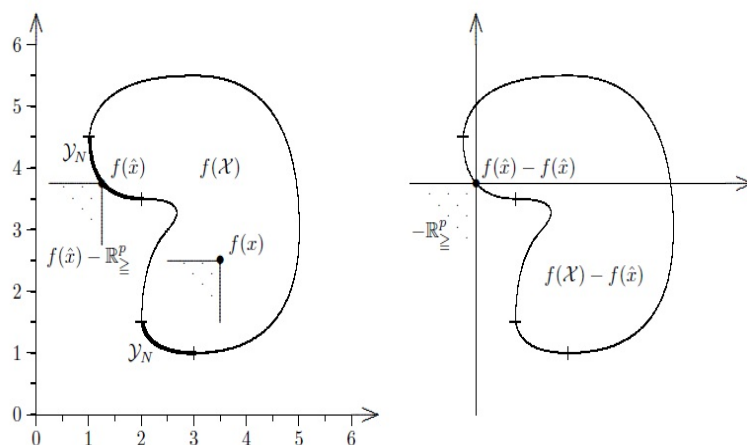
هدف پرتودرمانی، از بین بردن سلول‌های تومور و حفظ اندام‌ها و بافت‌های اطراف از خطرات ناشی از تاثیر پرتو است. نمودارهای شدت پرتو، با داشتن تعداد پرتوها و جهت‌های پرتو بهترین دوز را ارائه می‌دهند. به این امر مساله بهینه‌سازی شدت پرتو گفته می‌شود. در فصل ۵ به مساله بهینه‌سازی شدت پرتو که به‌صورت یک (MOLP) مدل‌سازی شده است [۳۹] می‌پردازیم. در این پایان‌نامه از مقالات [۲]، [۱۴]، [۱۷]، [۳۹]، [۴۰] استفاده شده است.

۲.۱ مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی چندهدفه

یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه^۱ در حالت کلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.1)$$

^۱Multiojective optimization problem



شکل ۱.۱: تعریف جواب‌های کارا

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ بردار متغیرهای تصمیم است، $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $i = 1, \dots, p$ توابع هدف و $\mathcal{X}$ مجموعه شدنی است. تصویر مجموعه شدنی، $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ را فضای هدف می‌نامیم. هدف مینیم کردن هم‌زمان توابع هدف است. مسائل ماکسیم‌سازی را با در نظر گرفتن قرینه تابع هدف به مسائل مینیم‌سازی تبدیل می‌کنیم. در بهینه‌سازی چندهدفه فرض می‌کنیم $p \geq 2$ است. در حالت کلی به علت متناقض بودن توابع هدف، پیدا کردن جواب بهینه‌ای که به‌طور هم‌زمان همه توابع هدف را مینیم کند، غیرممکن است. می‌توان بردارهای هدفی پیدا کرد که هیچ‌یک از مولفه‌هایشان نتوانند بهبود یابند، مگر این‌که حداقل یکی دیگر از مولفه‌هایشان بدتر شود، به این جواب‌ها، نقاط کارا^۲ گوییم که در ادامه تعریف می‌شوند.

برای تعریف جواب‌های کارا و نقاط غیرتسلطی^۳ ابتدا نمادهای زیر را بیان می‌کنیم.
برای هر $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^p$ داریم:

$$y^1 > y^2 \iff y_k^1 > y_k^2, \quad k = 1, \dots, p$$

$$y^1 \geq y^2 \iff y_k^1 \geq y_k^2, \quad k = 1, \dots, p$$

$$y^1 \geq y^2 \iff y_k^1 \geq y_k^2, \quad y^1 \neq y^2,$$

$$\mathbb{R}_{>}^p = \{y \in \mathbb{R}^p : y > \circ\},$$

$$\mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq \circ\},$$

$$\mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq \circ\}.$$

تعریف ۱.۲.۱. [۱۲]. یک جواب شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ بهینه پارتو^۴ (کارا) نامیده می‌شود، اگر هیچ $x \in \mathcal{X}$ با $f(x) \leq f(\hat{x})$ وجود نداشته باشد. اگر $\hat{x}$ کارا باشد، $\hat{y} = f(\hat{x})$ نقطه غیرتسلطی نامیده می‌شود.
اگر $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ و $f(x^1) \leq f(x^2)$ گوئیم x^1 بر x^2 مسلط و $f(x^1)$ بر $f(x^2)$ مسلط است.

^۲Efficient^۳Nondominated^۴Pareto optimal

مجموعه همه جواب‌های کارا را با $\mathcal{X}_E$ نمایش داده و مجموعه همه نقاط غیرتسلطی $\mathcal{Y}$ $\hat{y} = f(\hat{x}) \in \mathcal{Y}$ که $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$ با $\mathcal{Y}_N$ مشخص می‌شود و مجموعه غیرتسلطی نامیده می‌شود. چند تعریف دیگر کارایی که با تعریف ۱.۱.۱ معادل‌اند را در زیر بیان می‌کنیم:

۱. وجود نداشته باشد $x \in \mathcal{X}$ به‌طوری‌که $f_k(x) \leq f_k(\hat{x})$ و $k = 1, \dots, p$ و $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ برای حداقل یک $i \in \{1, \dots, p\}$.

۲. وجود ندارد $x \in \mathcal{X}$ به‌طوری‌که $f(x) - f(\hat{x}) \in -\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$.

۳. برای هر $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $f(x) - f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^p \setminus \{-\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}\}$.

۴. $f(\mathcal{X}) \cap (f(\hat{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p) = \{f(\hat{x})\}$.

۵. وجود ندارد $f(x) \in f(\mathcal{X}) \setminus \{f(\hat{x})\}$ با $f(x) \in f(\hat{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p$.

شکل ۱.۱ را مشاهده کنید، در سمت چپ شکل مشاهده می‌شود اگر $f(\mathcal{X}) \cap (f(\hat{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p) = \{f(\hat{x})\}$ آنگاه نقطه $\hat{x}$ کارا است. یعنی، اگر تنها اشتراک $-\mathbb{R}_{\geq}^p$ با $f(\mathcal{X})$ برابر با $f(\hat{x})$ باشد، آنگاه نقطه $f(\hat{x})$ غیرتسلطی است و همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود اگر اشتراک دیگری داشته باشد در این صورت نقطه $f(\hat{x})$ کارا نیست و این معادل تعریف ۴ می‌باشد. در سمت راست شکل مشاهده می‌کنیم اگر $f(\mathcal{X})$ را انتقال دهیم تا $f(\hat{x})$ بر مبدا منطبق شود آنگاه اگر اشتراک $f(\mathcal{X})$ و $-\mathbb{R}_{\geq}^p$ شامل $f(\hat{x})$ باشد، نقطه غیرتسلطی است که این معادل با تعریف ۲ و ۳ است.

طبق توضیحات فوق، در شکل ۱.۱ نقاط غیرتسلطی در قسمت چپ و پایین $\mathcal{Y}$ قرار دارند. فرض کنید $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ باشد. اگر $y \in \mathcal{Y}$ با $y \leq \hat{y}$ وجود نداشته باشد، گوئیم $\hat{y}$ غیرتسلطی است. فرض کنید $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ ، طبق تعریف نقاط غیرتسلطی داریم $\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}$.

مثال ۲.۲.۱. یک مساله بهینه‌سازی دو هدفه با مجموعه شدنی زیر در نظر بگیرید.

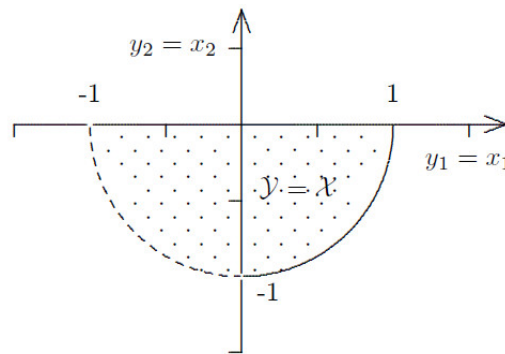
$$\mathcal{X} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{ll} -1 \leq x_1 \leq 1 & \\ -\sqrt{-x_1^2 + 1} < x_2 \leq 0 & \text{if } -1 \leq x_1 \leq 0 \\ -\sqrt{x_1^2 + 1} \leq x_2 \leq 0 & \text{if } 0 < x_1 \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (2.1)$$

فرض کنید تابع هدف به‌صورت زیر باشد:

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad (3.1)$$

مجموعه های شدنی $\mathcal{X}$ در فضای تصمیم و $\mathcal{Y}$ در فضای هدف (که در این مثال بر $\mathcal{X}$ منطبق می‌شود) در شکل ۲.۱ نمایش داده شده‌اند.

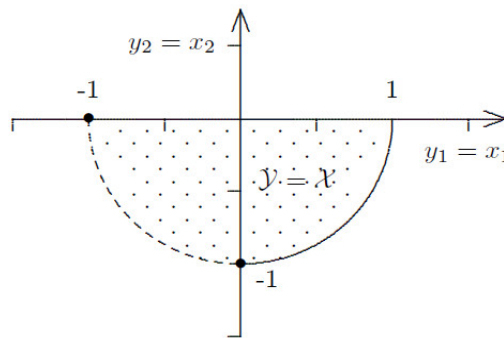
به‌وضوح می‌بینیم که، مساله چندهدفه داده شده جواب‌های کارا و غیرتسلطی ندارد یعنی، $\mathcal{Y}_N = \mathcal{X}_E = \emptyset$. توجه شود که در این مساله $\mathcal{Y}$ ، $\mathcal{X}$ محدب‌اند و $f(\mathcal{X})$ تابعی پیوسته است. فرض کنید مجموعه شدنی را به صورت زیر کمی تغییر دهیم:



شکل ۲.۱: مجموعه شدنی مساله اولیه در مثال ۲.۱.۱

$$\mathcal{X} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{ll} -1 \leq x_1 \leq 1 & \\ x_2 = 0 & \text{if } x_1 = -1 \\ -\sqrt{-x_1^2 + 1} < x_2 \leq 0 & \text{if } -1 < x_1 < 0 \\ -\sqrt{-x_1^2 + 1} \leq x_2 \leq 0 & \text{if } 0 \leq x_1 \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (4.1)$$

همان‌گونه که در شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنید داریم $\mathcal{X}_E = \{(-1, 0), (0, -1)\}$ و هم‌چنین داریم $\mathcal{V}_N = \{(-1, 0), (0, -1)\}$.



شکل ۳.۱: مجموعه شدنی اصلاح مساله در مثال ۲.۱.۱

مثال فوق نشان می‌دهد که در یک مساله ممکن است مجموعه نقاط کارا دارای تعداد متناهی عضو و یا تهی باشد، حتی اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{V}$ محدب و $f(\mathcal{X})$ پیوسته باشند. در قضیه زیر نشان می‌دهیم با افزودن $\mathbb{R}_{\geq}^p$ به مجموعه شدنی در فضای هدف، مجموعه غیرتسلطی تغییر نمی‌یابد.

قضیه ۳.۲.۱. [۱۲]. $\mathcal{V}_N = (\mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$.

برهان. اگر $\mathcal{V} = \emptyset$ ، نتیجه بدیهی است، چون $\mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p = \emptyset$ و زیرمجموعه‌های غیرتسلطی هر دو تهی هستند.

فرض کنید $\mathcal{V} \neq \emptyset$ و $y \in (\mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ اما $y \notin \mathcal{V}_N$. دو حالت وجود دارد، حالت اول اگر $y \notin \mathcal{V}$ در این صورت بنابه فرض خلف $y \notin \mathcal{V}_N$ پس $y' \in \mathcal{V}$ و $d \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ وجود دارند به طوری که $y = y' + d$. چون $y' = y' + 0 \in \mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، به دست می آوریم $y \in (\mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ که یک گزاره نادرست است. در حالت دوم فرض کنید $y \in \mathcal{V}$ ، در این صورت بنابه فرض خلف $y \notin \mathcal{V}_N$ پس $y' \in \mathcal{V}$ که $y' \leq y$ وجود دارد. فرض کنید $d = y - y'$ ، که متعلق به $\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ است. بنابراین $y = y' + d$ حال فرض کنید $y \in \mathcal{V}_N$ اما $y \notin (\mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$ ، آنگاه $y' \in \mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ با $y - y' = d' \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ وجود دارد. از طرفی $y' = y'' + d''$ با $y'' \in \mathcal{V}$ ، پس $d'' \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، پس $y = y' + d' = y'' + (d' + d'') = y'' + d$ که $d = d' + d'' \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ ، لذا نتیجه می گیریم $y \notin \mathcal{V}_N$ ، که با فرض تناقض دارد. پس $y \in (\mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$. $\square$

نتیجه دیگری که به دست می آوریم، این است که نقاط کارا باید متعلق به مرز^۵ $\mathcal{V}$ باشند.

قضیه ۴.۲.۱. [۱۲]. اگر مرز $\mathcal{V}$ را با $bd(\mathcal{V})$ نشان دهیم، داریم $\mathcal{V}_N \subset bd(\mathcal{V})$.

برهان. فرض کنید $y \in \mathcal{V}_N$ و $y \notin bd(\mathcal{V})$ ، بنابراین $y \in int(\mathcal{V})$. می توان یک ε -همسایگی از y ، به صورت $B(y, \varepsilon)$ را پیدا کرد به طوری که $B(y, \varepsilon) := y + B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{V}$ ، $B(0, \varepsilon)$ یک گوی باز به شعاع ε است). فرض کنید $d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ و $d \neq 0$ ، آنگاه می توان $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $0 < \alpha < \varepsilon$ را طوری انتخاب کرد که $\alpha d \in B(0, \varepsilon)$ یعنی $\alpha d \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$. اکنون $y' = y - \alpha d \in \mathcal{V}$ ، یعنی یک y' کمتر از y پیدا کردیم که $y' \in \mathcal{V}$ ، یعنی $y \notin \mathcal{V}_N$ که با فرض تناقض دارد پس $y \in bd(\mathcal{V})$. $\square$

نتیجه ۵.۲.۱. [۱۲]. اگر $\mathcal{V}$ یا $\mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ باز باشند، $\mathcal{V}_N = \emptyset$.

نقاط ایده آل^۶ و حضيض^۷ را به عنوان کران های پایین و بالای نقاط غیرتسلطی تعریف می کنیم، که نقاط غیرتسلطی بین این دو مقدار تغییر می کنند.

تعریف ۶.۲.۱. [۱۲].

۱. نقطه $y^I := (y_1^I, \dots, y_p^I)$ که به صورت

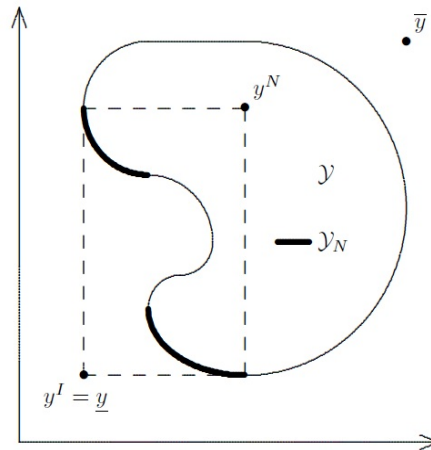
$$y_k^I := \min_{x \in \mathcal{X}} f_k(x) = \min_{y \in \mathcal{V}} y_k$$

تعریف می شود، نقطه ایده آل نامیده می شود.

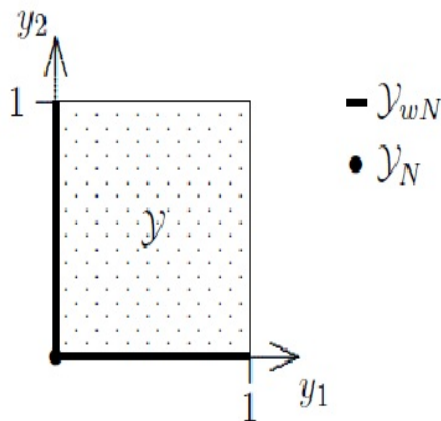
۲. نقطه $y^N := (y_1^N, \dots, y_p^N)$ که به صورت

$$y_k^N := \max_{x \in \mathcal{X}_E} f_k(x) = \max_{y \in \mathcal{V}_N} y_k$$

تعریف می شود، نقطه حضيض نامیده می شود. در شکل ۴.۱ این نقاط را مشاهده می کنید.



شکل ۴.۱: مجموعه کارا، نقاط ایده‌آل و حوض



شکل ۵.۱: نقاط کارا و کارای ضعیف

تعریف ۷.۲.۱. [۱۲].

۱. جواب شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ کارای ضعیف^۵ (بهینه پارتو ضعیف) نامیده می‌شود، اگر $x \in \mathcal{X}$ با $f(x) < f(\hat{x})$ وجود نداشته باشد. نقطه $\hat{y} = f(\hat{x})$ غیرتسلطی ضعیف^۶ نامیده می‌شود. مجموعه جواب‌های کارای ضعیف را با $\mathcal{X}_{wE}$ نمایش می‌دهیم و نقاط غیرتسلطی ضعیف را با $\mathcal{Y}_{wN}$ نشان می‌دهیم.

^۵Boundary

^۶Ideal

^۷Nadir

^۸Weakly efficient

^۹Weakly nondominated

۲. جواب شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ را کارای قوی^{۱۰} گویند، اگر $x \in \mathcal{X}$ که $x \neq \hat{x}$ وجود نداشته باشد به طوری که $f(x) \leq f(\hat{x})$. مجموعه جواب های کارای قوی را با $\mathcal{X}_{SE}$ نمایش می دهیم.

مثال ۸.۲.۱. مجموعه $\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_i \leq 1\}$ را در نظر بگیرید. همان طور که در شکل ۵.۱ مشاهده می شود، مجموعه های غیرتسلطی و غیرتسلطی ضعیف عبارتند از:

$$\mathcal{Y}_N = \{0\}$$

$$\mathcal{Y}_{wN} = \{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y} : y_1 = 0 \text{ or } y_2 = 0\}.$$

هدف یک مساله بهینه سازی چندهدفه به دست آوردن جواب های کارا است، برای این منظور اغلب از روش اسکالرسازی استفاده می شود. روش های اسکالرسازی مختلفی برای به دست آوردن جواب های کارا (ضعیف) ارائه شده اند، که در این پایان نامه از روش مجموع وزن دار که مشهورترین روش اسکالرسازی در بهینه سازی چندهدفه است استفاده می کنیم. در ادامه، رابطه بین جواب های بهینه مساله تک هدفه و جواب های کارا (ضعیف) مساله بهینه سازی چندهدفه را بررسی می کنیم.

مساله برنامه ریزی چندهدفه

$$\min_{x \in \mathcal{X}} (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

را در نظر می گیریم، برای حل این مساله، آن را به مساله تک هدفه زیر تبدیل می کنیم

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x).$$

این مساله بهینه سازی تک هدفه، مساله اسکالرسازی مجموع وزن دار نامیده می شود. فرض کنید $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ و $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) := \{\bar{y} \in \mathcal{Y} : \langle \lambda, \bar{y} \rangle = \min_{y \in \mathcal{Y}} \langle \lambda, y \rangle\}$$

مجموعه نقاط بهینه $\mathcal{Y}$ متناسب با λ است.

اکنون فرض کنید

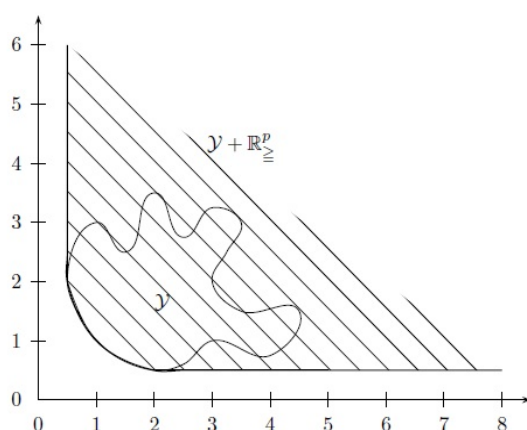
$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_{>}^p} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$$

$$\mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$$

از این دو رابطه نتیجه می گیریم $\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$.

مساله مجموع وزن دار، جواب های کارای مساله برنامه ریزی چندهدفه محدب را محاسبه می کند، بنابراین به تعاریف زیر نیاز داریم. که طبق قضیه های زیر نشان می دهیم، جواب های بهینه مساله مجموع وزن دار کارا (ضعیف) هستند. با فرض محدب بودن مساله چندهدفه، جواب های کارا (ضعیف) جواب های بهینه مساله اسکالرسازی هستند.

^{۱۰} Strong efficient



شکل ۶.۱: یک مجموعه $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -محدب

تعریف ۹.۲.۱. [۱۲]. مجموعه $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$ را $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -محدب گوئیم هرگاه $\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ محدب باشد. شکل ۶.۱ را مشاهده کنید، در این شکل مجموعه $\mathcal{Y}$ محدب نیست اما $\mathbb{R}^p$ -محدب است.

در قضیه زیر یک شرط کافی برای کارایی ضعیف یک مساله چندهدفه آورده شده است.

قضیه ۱۰.۲.۱. [۱۲]. برای مجموعه $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ ، داریم $\mathcal{S}_\circ(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{wN}$.

قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای کارایی ضعیف یک مساله چندهدفه را بیان می‌کند.

قضیه ۱۱.۲.۱. [۱۲]. اگر $\mathcal{Y}$ ، $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -محدب باشد، آنگاه $\mathcal{Y}_{wN} = \mathcal{S}_\circ(\mathcal{Y})$.

در قضیه‌های زیر رابطه بین $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ و $\mathcal{S}_\circ(\mathcal{Y})$ با $\mathcal{Y}_N$ را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۲.۱. [۱۲]. اگر $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ ، آنگاه $\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N$.

نتیجه ۱۳.۲.۱. [۱۲]. اگر $\mathcal{Y}$ یک مجموعه $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -محدب باشد، آنگاه $\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{S}_\circ(\mathcal{Y})$.

از قضیه ۱۰.۱.۱ و نتیجه ۱۳.۱.۱ داریم:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N, \quad \mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{S}_\circ(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{wN}$$

و در حالتی که $\mathcal{Y}$ ، $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -محدب باشد، داریم:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N \subset \mathcal{S}_\circ(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}_{wN}.$$

قضیه ۱۴.۲.۱. [۱۲]. اگر جواب بهینه $\hat{y}$ از $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$ ، منحصربه‌فرد باشد با $(\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p)$ ، آنگاه $\hat{y} \in \mathcal{Y}_N$.

قضیه زیر بیان می‌کند، جواب‌های بهینه مساله مجموع وزن‌دار با وزن‌های مثبت (نامنفی)، همیشه کارا (ضعیف) هستند.

قضیه ۱۵.۲.۱. [۱۲]. فرض کنید $\hat{x}$ جواب بهینه مساله مجموع وزن دار

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x)$$

با $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ باشد، آنگاه روابط زیر برقرارند:

۱. اگر $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، آنگاه $\hat{x} \in \mathcal{X}_{wE}$

۲. اگر $\lambda \in \mathbb{R}_{>}^p$ ، آنگاه $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$

۳. اگر $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ و $\hat{x}$ جواب بهینه منحصر به فرد مساله مجموع وزن دار باشد آنگاه $\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE}$.

قضیه زیر نشان می دهد همه جواب های کارا (ضعیف)، جواب های مساله اسکالری سازی با وزن مثبت (نامنفی) هستند.

قضیه ۱۶.۲.۱. [۱۲]. فرض کنید $\mathcal{X}$ مجموعه محدب باشد و f_k ، $k = 1, \dots, p$ توابع محدب باشند. اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}_{wE}$ ، آنگاه $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ وجود دارد به طوری که $\hat{x}$ جواب بهینه مساله مجموع وزن دار است.

۳.۱. بهینه سازی چندهدفه نسبت به یک مخروط دلخواه

تعریف ۱.۳.۱. زیرمجموعه $\mathcal{C}$ از $\mathbb{R}^p$ یک مخروط^{۱۱} نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in \mathcal{C}$ و هر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda x \in \mathcal{C}$. به علاوه، مخروط $\mathcal{C}$ محدب است هرگاه $\mathcal{C}$ یک مجموعه محدب باشد.

توجه شود که یک مخروط محدب با انتخاب $\lambda = 0$ همیشه شامل مبدا است و به ازای هر نقطه $x \in \mathcal{C}$ ، شعاع یا نیم خط $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$ در $\mathcal{C}$ قرار دارد.

تعریف ۲.۳.۱. مخروط $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^p$ نوک تیز^{۱۲} نامیده می شود هرگاه $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$. به عبارت دیگر، اگر $x \in \mathcal{C}$ و $x \neq 0$ ، آنگاه $-x \notin \mathcal{C}$.

مخروط تولید شده به وسیله یک مجموعه $\mathcal{S}$ را با $\text{cone}(\mathcal{S})$ نمایش می دهیم. مخروط $\mathcal{C}$ را توپر^{۱۳} گویند هرگاه $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

مخروط محدب $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ ، یک مخروط ترتیبی^{۱۴} نامیده می شود که یک ترتیب جزئی^{۱۵} روی $\mathcal{V}$ به صورت زیر تعریف می کند.

فرض کنیم $y^1, y^2 \in \mathcal{V}$ ، در این صورت:

$$y^1 \leq_{\mathcal{C}} y^2 \iff y^2 - y^1 \in \mathcal{C}$$

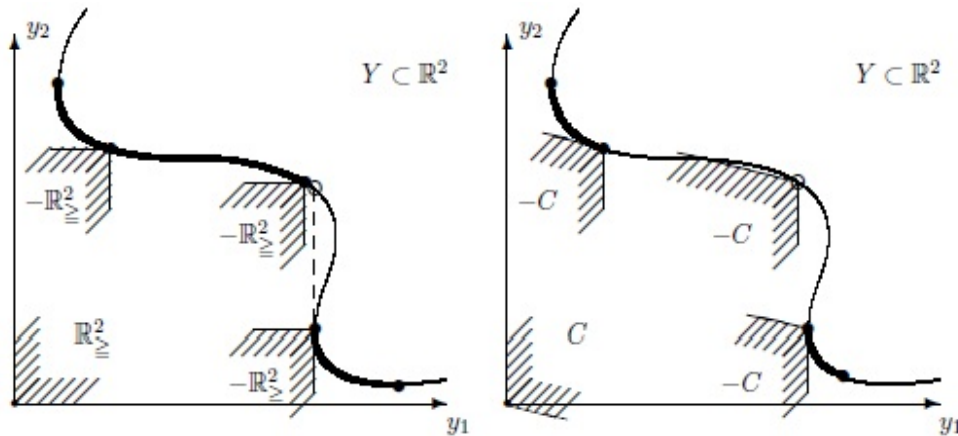
^{۱۱}Cone

^{۱۲}Pointed

^{۱۳}Solid

^{۱۴}Ordering cone

^{۱۵}Partial order



شکل ۳.۱: مجموعه جواب‌های غیرتسلطی $\mathcal{V}_N(\mathbb{R}_{\geq}^2)$ و $\mathcal{V}_N(C)$

هم‌چنین نمادگذاری‌های زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$y^1 \leq_C y^2 \iff y^2 - y^1 \in C \setminus \{0\} \iff y^1 \leq_C y^2, y^1 \neq y^2.$$

اگر C یک مخروط توپر باشد، داریم:

$$y^1 <_C y^2 \iff y^2 - y^1 \in \text{int}(C).$$

در شکل ۳.۱ مجموعه نقاط غیرتسلطی نسبت به مخروط $\mathbb{R}_{\geq}^2$ و یک مخروط دلخواه $C \subseteq \mathbb{R}^2$ نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، مجموعه جواب‌های غیرتسلطی نسبت به مخروط C زیرمجموعه‌ای از مجموعه جواب‌های غیرتسلطی نسبت به مخروط $\mathbb{R}_{\geq}^2$ است زیرا $\mathbb{R}_{\geq}^2 \subseteq C$ است. این رابطه در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۳.۳.۱ [۳۰]. فرض کنید C_1 و C_2 دو مخروط دلخواه باشند که $C_2 \subseteq C_1$. در این صورت $\mathcal{X}_E(C_1) \subseteq \mathcal{X}_E(C_2)$.

تعریف ۴.۳.۱ [۱۴] بردار e^k در فضای $\mathbb{R}^p$ برداری است که مولفه k -ام آن ۱ و بقیه مولفه‌ها صفر هستند و بردار e برداری است که همه مولفه‌های آن ۱ است.

برای تعریف کارایی نسبت به مخروط‌ها ابتدا درون نسبی مجموعه را تعریف می‌کنیم. $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^P$ را در نظر می‌گیریم.

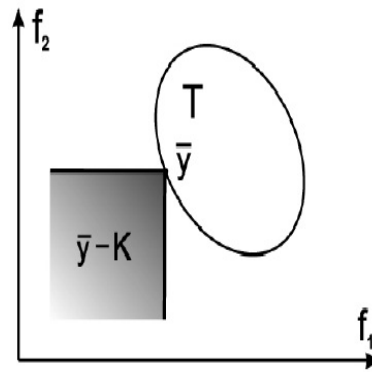
تعریف ۵.۳.۱. پوسته آفینی $\mathcal{A}$ را با $\text{aff}(\mathcal{A})$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{aff}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, a^i \in \mathcal{A}, \forall i = 1, \dots, k \right\}.$$

تعریف ۶.۳.۱. پوسته محدب^{۱۶} $\mathcal{A}$ را به صورت $\text{conv}(\mathcal{A})$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0, a^i \in \mathcal{A}, \forall i = 1, \dots, k \right\}.$$

^{۱۶}Convex hull



شکل ۸.۱: نقطه K -کمینه

تعریف ۷.۳.۱. تابع $f(x)$ را تابع آفینی گویند، هرگاه تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد:

$$f(x) = c^T x + d = \sum_{i=1}^n c_i x_i + d = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + d.$$

تعریف ۸.۳.۱. درون نسبی^{۱۷} $\mathcal{A}$ را با $ri(\mathcal{A})$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$ri(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} | \exists \varepsilon > 0, N_\varepsilon(a) \cap aff(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}\}.$$

اکنون اگر $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^p$ را مخروط محدب و بسته^{۱۸} فرض کنیم و عنصر $y \in \mathcal{A}$ را در نظر بگیریم، در این صورت تعاریف زیر را داریم:

تعریف ۹.۳.۱. [۱۴] عنصر $y \in \mathcal{A}$ ، $\mathcal{C}$ -کمینه^{۱۹} نامیده می شود، اگر $(\{y\} - \mathcal{C} \setminus \{0\}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.
شکل ۸.۱ نشان می دهد نقطه $\bar{y}$ ، نقطه K -کمینه است.

تعریف ۱۰.۳.۱. [۱۴] عنصر $y \in \mathcal{A}$ ، $\mathcal{C}$ -بیشینه^{۲۰} نامیده می شود، اگر $(\{y\} + \mathcal{C} \setminus \{0\}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

تعریف ۱۱.۳.۱. [۱۴] نقطه $y \in \mathcal{A}$ را $\mathcal{C}$ -کمینه ضعیف گویند، هرگاه $(\{y\} - ri\mathcal{C}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.
مجموعه همه جواب های $\mathcal{C}$ -کمینه ضعیف، کارای ضعیف نسبت به مخروط $\mathcal{C}$ هستند و با $\mathcal{X}_{wE}(\mathcal{C})$ یا $\mathcal{X}_{wE}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. [۱۴] نقطه $y \in \mathcal{A}$ را $\mathcal{C}$ -بیشینه ضعیف گویند، هرگاه $(\{y\} + ri\mathcal{C}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

مجموعه های $wmin_{\mathcal{C}} \mathcal{A} := \{y \in \mathcal{A} : (\{y\} - ri\mathcal{C}) \cap \mathcal{A} = \emptyset\}$ و

$$wmax_{\mathcal{C}} \mathcal{A} := wmin_{(-\mathcal{C})} \mathcal{A}$$

^{۱۷}Relative interior

^{۱۸}Closed

^{۱۹}Minimal

^{۲۰}Maximal

را در نظر گرفته و دو مخروط به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$C = \mathbb{R}_{\geq}^p = \{x \in \mathbb{R}^p : x_k \geq 0, k = 1, \dots, p\},$$

$$C = \mathcal{K} := \mathbb{R}_{\geq}^p e^p = \{y \in \mathbb{R}^p : y_1 = \dots = y_{p-1} = 0, y_p \geq 0\}.$$

اگر مخروط $C = \mathbb{R}_{\geq}^p$ در نظر گرفته شود، آنگاه مجموعه عناصر $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه ضعیف همان عناصر غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{A}$ خواهند بود و داریم:

$$wmin_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{A} := \{y \in \mathcal{A} : (\{y\} - int \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap \mathcal{A} = \emptyset\}$$

و اگر مخروط $C = \mathcal{K}$ در نظر گرفته شود، مجموعه عناصر $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{A}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$max_{\mathcal{K}} \mathcal{A} := \{y \in \mathcal{A} : (\{y\} + \mathcal{K} \setminus \{0\}) \cap \mathcal{A} = \emptyset\}.$$

چون $ri\mathcal{K} = \mathcal{K} \setminus \{0\}$ ، عناصر $\mathcal{K}$ -بیشینه ضعیف و $\mathcal{K}$ -بیشینه هم‌زمان اتفاق می‌افتند، یعنی

$$wmax_{\mathcal{K}} \mathcal{A} = max_{\mathcal{K}} \mathcal{A}.$$

ملاحظه ۱۳.۳.۱. با توجه به تعاریف بالا واضح است که اگر مخروط محدب C توپر باشد، آنگاه

$$\mathcal{X}_E(C) \subseteq \mathcal{X}_{wE}(C)$$

$$\mathcal{Y}_N(C) \subseteq \mathcal{Y}_{wN}(C).$$

تعریف ۱۴.۳.۱. [۴۰] مساله برنامه‌ریزی چندهدفه

$$(w)min_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \{Px : x \in \mathcal{X}\} \quad (5.1)$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ داده شده باشد.

۱. یک جواب شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ را یک جواب ε -کارا برای (۵.۱) گویند، هرگاه هیچ $x \in \mathcal{X}$ وجود نداشته باشد به طوری که $Px \leq P\hat{x} - \varepsilon$. به طور متناظر $\hat{y} = P\hat{x}$ نقطه ε -غیرتسلطی در فضای هدف نامیده می‌شود.

۲. جواب شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ را یک جواب ε -کارای ضعیف گویند هرگاه هیچ $x \in \mathcal{X}$ وجود نداشته باشد به طوری که $Px < P\hat{x} - \varepsilon$. به طور متناظر $\hat{y} = P\hat{x}$ یک نقطه ε -غیرتسلطی ضعیف در فضای هدف نامیده می‌شود.

طبق تعریف نقاط کارا و ε -کارا، واضح است چون $P\hat{x} - \varepsilon \leq P\hat{x}$ ، پس هر نقطه کارا، ε -کارا است.

در اغلب مسائل چندهدفه، در عمل دسترسی به جواب‌های دقیق کارا و غیرتسلطی امکان پذیر نیست. از اینرو در این مسائل به تقریب این دسته از جواب‌ها بسنده می‌کنند. تولید تقریبی از مجموعه‌های کارا و غیرتسلطی با دقت تعیین شده، می‌تواند کمکی برای اینگونه مسائل باشد. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^p$ مجموعه‌ای محدب باشد در این صورت تعاریف زیر را داریم:

تعریف ۱۵.۳.۱. [۱۴] $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda^T y = \gamma\}$ ابرصفحه حائل^{۲۱} $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود، اگر برای هر $y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\lambda^T y \geq \gamma$ ، و همچنین $y^\circ \in \mathcal{A}$ موجود باشد، به طوری که $\lambda^T y^\circ = \gamma$.

^{۲۱}Supporting hyperlane

تعریف ۱۶.۳.۱. [۱۴] $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ یک وجه نمایانگر^{۲۲} نامیده می‌شود، هرگاه $\lambda \in \mathbb{R}^p$ و $\gamma \in \mathbb{R}$ موجود باشند به طوری که $\mathcal{A} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda^T y \geq \gamma\}$ و $\mathcal{F} = \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda^T y = \gamma\}$. به عبارت دیگر، برای $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ ، $\mathcal{F} \neq \mathcal{A}$ وجه سره^{۲۳} است اگر و تنها اگر

$$\mathcal{H} := \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda^T y = \gamma\}$$

ابرصفحه حائل $\mathcal{A}$ باشد و $\mathcal{F} = \mathcal{A} \cap \mathcal{H}$.

تعریف ۱۷.۳.۱. [۱۴] نقطه $y \in \mathcal{A}$ ، نقطه رأسی^{۲۴} $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود اگر $\{y\}$ یک وجه از $\mathcal{A}$ باشد.

تعریف ۱۸.۳.۱. [۱۴] بردار $d \in \mathbb{R}^p$ جهت دورشونده^{۲۵} برای $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود هرگاه، برای هر $y \in \mathcal{A}$ و $\alpha \geq 0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $y + \alpha d \in \mathcal{A}$.

تعریف ۱۹.۳.۱. [۱۴] جهت دورشونده $d \neq 0$ رأسی نامیده می‌شود اگر جهت‌های دورشونده $d^1, d^2 \neq 0$ برای هر $\alpha > 0$ با $d^1 \neq \alpha d^2$ وجود نداشته باشند به طوری که $d = \lambda(d^1) + (1 - \lambda)d^2$.

تعریف ۲۰.۳.۱. [۱۴] یک مخروط دورشونده^{۲۶}، مجموعه‌ای از همه جهت‌های دورشونده است که با $\mathcal{A}_\infty$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}_\infty := \{d \in \mathbb{R}^p : y + \alpha d \in \mathcal{A}, \quad \exists y \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \geq 0\}.$$

تعریف ۲۱.۳.۱. [۱۴] مجموعه محدب $\mathcal{A}$ تعریف شده به صورت $\{x \in \mathbb{R}^p : Dx \geq f\}$ که در آن $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ و $f \in \mathbb{R}^m$ ، یک چندوجهی^{۲۷} نامیده می‌شود که از تعداد متناهی وجه تشکیل شده است.

در چندوجهی $\mathcal{A}$ مجموعه همه نقاط رأسی $\mathcal{A}$ با $vert \mathcal{A}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲۲.۳.۱. [۱۴] در چندوجهی p -بعدی $\mathcal{A}$ ، وجه‌هایی که دارای $(p - 1)$ -بعد هستند ابروجه^{۲۸} سره نامیده می‌شوند.

قضیه ۲۳.۳.۱. [۱۴]. (قضیه نمایش). اگر مجموعه همه نقاط رأسی $\mathcal{A}$ را با $x^1, \dots, x^r$ و جهت‌های رأسی $\mathcal{A}$ را با $d^1, \dots, d^l$ نشان دهیم، آنگاه چندوجهی $\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A} := \{y \in \mathbb{R}^p : y = \sum_{i=1}^r \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^l \nu_j d^j \quad \text{with} \quad \alpha_i \geq 0, \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \nu_j \geq 0\}.$$

در فصل‌های بعدی پایان‌نامه، فضای جواب‌های $\mathcal{C}$ -کمینه را روی $\mathbb{R}_{\geq}^p$ و فضای جواب‌های $\mathcal{C}$ -بیشینه را روی $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ در نظر می‌گیریم.

^{۲۲}Exposed face

^{۲۳}Proper face

^{۲۴}Extreme point

^{۲۵}Recession direction

^{۲۶}Recession cone

^{۲۷}Polyhedral

^{۲۸}Facet

فصل ۲

دوگان هندسی یک مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه

۱.۲ روابط بین مساله اولیه و دوگان

همان گونه که می‌دانیم در مسائل برنامه‌ریزی خطی^۱ تک‌هدفه، مساله اولیه^۲ به صورت

$$\min \{p^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$$

و مساله دوگان^۳ به صورت

$$\max \{b^T u : A^T u \leq p, u \geq 0\}$$

تعریف می‌شوند.

در مسائل برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه، قضیه دوگان قوی بیان می‌کند اگر هر دو مساله برنامه‌ریزی خطی فوق‌شده باشند، آنگاه هر دو مساله برنامه‌ریزی خطی جواب‌های بهینه $\hat{x}$ و $\hat{u}$ دارند به طوری که $p^T \hat{x} = b^T \hat{u}$. در واقع عنصر مینیمم در مجموعه هدف اولیه برابر است با عنصر ماکزیمم در مجموعه هدف دوگان.

به طور مشابه، در دوگان کلاسیک [۲۱] برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، می‌توان نشان داد که جواب کمینه ضعیف مساله اولیه یک جواب بیشینه ضعیف مساله دوگان است. اما، یکی از مشکلات دوگان کلاسیک آنستکه مجموعه فضای شدنی مساله دوگان لزوماً محدب نیست. یکی دیگر از مشکلات دوگان کلاسیک یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه آن است که، برخلاف مساله تک‌هدفه، مساله دوگان یک *MOLP* معمولاً پیچیده‌تر از مساله اولیه آن است، لذا حل آن مشکل‌تر است. دوگان هندسی^۴ یک مساله *MOLP*، این مشکلات دوگان کلاسیک را برطرف می‌کند. ناحیه شدنی

^۱Linear programming

^۲Primal

^۳Dual problem

^۴Geometric duality

مساله دوگان هندسی محدب است.

دوگان هندسی برای مسائل برنامه ریزی خطی چندهدفه مانند قضیه دوگان در مسائل برنامه ریزی تک هدفه عمل می کند، بدین صورت که وجه های کمینه از مجموعه شدنی اولیه برابر با وجه های بیشینه از مجموعه شدنی دوگان هستند، یعنی دوگان هندسی تناظری بین وجه های مجموعه های شدنی اولیه و دوگان ایجاد می کند که این تناظر یک به یک و معکوس پذیر است.

مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x), \quad \mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\} \quad (PR)$$

که در آن $P \in \mathbb{R}^{p \times n}, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $e = (1, \dots, 1)$.

مساله اولیه نقاط غیرتسلطی ضعیف از فضای هدف $P(\mathcal{X})$ را محاسبه می کند.

قضیه ۱.۱.۲ [۲۰]. نقطه $\hat{y}$ ، نقطه غیرتسلطی ضعیف $P(\mathcal{X})$ است اگر و فقط اگر یک بردار $w \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ با $e^T w = 1$ وجود داشته باشد که $w^T \hat{y}$ عنصر کمینه مجموعه $\{w^T y : y \in P(\mathcal{X})\}$ باشد. با توجه به غیرتسلطی بودن $\hat{y}$ ، یک $\hat{x}$ وجود دارد بطوری که $\hat{y} = P\hat{x}$ ، یک جواب بهینه از مساله برنامه ریزی خطی (مساله مجموع وزن دار) $\min\{w^T Px : Ax \geq b\}$ است.

دوگان مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه (PR) به صورت زیر است:

$$\max_{\mathcal{K}} D(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \{(u, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p : (u, \lambda) \geq 0, A^T u = P^T \lambda, e^T \lambda = 1\} \quad (D)$$

که در آن $D : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ و نگاشت $\mathcal{K} := \{y \in \mathbb{R}^p : y_1 = \dots = y_{p-1} = 0, y_p \geq 0\}$ صورت زیر است:

$$D(u, \lambda) := (\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, b^T u)^T = \begin{pmatrix} 0 & I_{p-1} & 0 \\ b^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$

این مساله عناصر $\mathcal{K}$ بیشینه $D(\mathcal{U})$ را محاسبه می کند. در این مساله متغیرها λ و u هستند که بردار λ متناظر با بردار وزن w در مساله برنامه خطی $\min\{w^T Px : Ax \geq b\}$ است.

اکنون اگر $\lambda \geq 0$ را ثابت، با ویژگی $e^T \lambda = 1$ در مساله D در نظر بگیریم، آنگاه مساله D به مساله برنامه ریزی خطی $\max\{b^T u : A^T u = P^T \lambda, u \geq 0\}$ تبدیل می شود که دقیقاً دوگان مساله برنامه ریزی خطی $\min\{w^T Px : Ax \geq b\}$ با $w = \lambda$ است.

در نتیجه قضیه دوگان قوی بیان می کند که مقدار کمینه مساله برنامه ریزی خطی با $w = \lambda$ برابر است با مقدار بیشینه دوگان آن، به شرط آن که $\mathcal{X} \neq \emptyset$ و $\lambda^T Px$ روی $\mathcal{X}$ از پایین کران دار باشد. در نتیجه از مطالب فوق و قضیه ۱.۱.۲ نتیجه می گیریم که $\hat{y}$ نقطه غیرتسلطی $P(\mathcal{X})$ است اگر و فقط اگر $\hat{\lambda} \geq 0$ با $e^T \hat{\lambda} = 1$ وجود داشته باشد بطوری که مساله برنامه ریزی خطی $\max\{b^T u : A^T u = P^T \hat{\lambda}, u \geq 0\}$ ، یک جواب بهینه $\hat{u}$ با $b^T \hat{u} = \hat{\lambda}^T \hat{y}$ داشته باشد. بنابراین $D(\hat{u}, \hat{\lambda})$ یک نقطه $\mathcal{K}$ -بیشینه از $D(\mathcal{U})$ است. برای هر نقطه $(u, \lambda) \in \mathcal{U}$ که یک نقطه $\mathcal{K}$ -بیشینه برای $D(\mathcal{U})$ است، u یک جواب بهینه برای مساله برنامه ریزی خطی

$$\max\{b^T u : A^T u = P^T \hat{\lambda}, u \geq 0\}$$

می باشد و لذا بنابه قضیه دوگان یک نقطه غیرتسلطی برای $P(\mathcal{X})$ تعریف می کند.

مثال ۲.۱.۲. مساله دوهدفه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & (2x_1 + x_2, x_1 + 4x_2) \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1 - 5x_2 \leq 4 \\ & 7x_1 + 3x_2 \geq 3 \end{aligned}$$

طبق آنچه بیان کردیم مساله دوگان هندسی مساله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{K}} \quad & (\lambda_1, 5u_1 - 4u_2 + 3u_3) \\ \text{s.t.} \quad & 3u_1 - u_2 + 7u_3 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ & u_1 + 5u_2 + 3u_3 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{K} = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1 = 0, y_2 \geq 0\}$. اکنون فرض کنید مساله تک هدفه زیر را داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1 - 5x_2 \leq 4 \\ & 7x_1 + 3x_2 \geq 3. \end{aligned}$$

دوگان هندسی مساله تک هدفه فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{K}} \quad & 5u_1 - 4u_2 + 3u_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3u_1 - u_2 + 7u_3 = 2\lambda \\ & u_1 + 5u_2 + 3u_3 = 1\lambda \\ & \lambda = 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned}$$

که همان مساله دوگان معمولی برای مساله تک هدفه است.

اکنون مجموعه های تصویر چندوجهی توسیع داده شده^۵ را برای مساله (PR) و مساله (D) به ترتیب به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\mathcal{P} := P(\mathcal{X}) + \mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in \mathcal{X} : y \in \{Px\} + \mathbb{R}_{\geq}^p\}$$

^۵Extended polyhedral

و

$$\mathcal{D} := D(\mathcal{U}) - \mathcal{K} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists (u, \lambda) \in \mathcal{U} : y \in \{D(u, \lambda)\} - \mathcal{K}\}. \quad (1.2)$$

می‌دانیم که نقاط $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه از $\mathcal{P}$ و $P(\mathcal{X})$ و همچنین عناصر $\mathcal{K}$ -بیشینه از $\mathcal{D}$ و $D(\mathcal{U})$ طبق قضیه ۳.۱.۱، به‌طور هم‌زمان اتفاق می‌افتند.

قضیه دوگان هندسی که اثبات آن را خواهیم آورد، رابطه بین $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{D})$ را بیان می‌کند. برای اثبات قضیه دوگان هندسی، ابتدا روابط زیر را بیان می‌کنیم:

تابع جفت‌ساز^۶ $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(y, \nu) := \sum_{i=1}^{p-1} y_i \nu_i + y_p \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i\right) - \nu_p.$$

مشاهده می‌کنیم توابع $\varphi(y, \cdot)$ و $\varphi(\cdot, \nu)$ آفینی هستند چون

$$\begin{aligned} \varphi(y, \nu) &= \sum_{i=1}^{p-1} y_i \nu_i + y_p \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i\right) - \nu_p \\ &= y_1 \nu_1 + \cdots + y_{p-1} \nu_{p-1} + y_p (1 - \nu_1 - \cdots - \nu_{p-1}) - \nu_p \\ &= Ay + B \end{aligned}$$

بنابراین توابع آفینی زیر را داریم:

$$\varphi(\cdot, \nu) = A\nu + B, \quad \varphi(y, \cdot) = Cy + D.$$

اکنون $x \in \mathcal{X}$ برای مساله اولیه و $(u, \lambda) \in \mathcal{U}$ برای مساله دوگان را در نظر بگیرید، داریم:

$$\begin{aligned} \varphi(Px, D(u, \lambda)) &= \sum_{i=1}^{p-1} \left(\sum_{j=1}^p p_{ij} x_{ij} \right) \lambda_i + \left(\sum_{j=1}^p p_{pj} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \right) - b^T u \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p p_{ij} x_{ij} \right) \lambda_i - b^T u \right) = \lambda^T Px - b^T u. \end{aligned} \quad (2.2)$$

که این اختلاف بین مقادیر مساله مجموع وزن‌دار با $w = \lambda$ در x و مقدار دوگان آن در u است. از تابع جفت‌ساز φ استفاده می‌کنیم و دو نگاشت مجموعه مقدار زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}^p \rightrightarrows \mathbb{R}^p, \quad \mathcal{H}(\nu) := \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) = \circ\},$$

$$\mathcal{H}^* : \mathbb{R}^p \rightrightarrows \mathbb{R}^p, \quad \mathcal{H}^*(y) := \{\nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) = \circ\}.$$

که برای هر $y, \nu \in \mathbb{R}^p$ ، $\mathcal{H}(\nu)$ و $\mathcal{H}^*(y)$ ابرصفحه‌هایی در $\mathbb{R}^p$ هستند. نمادهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\lambda(\nu) := \left(\nu_1, \dots, \nu_{p-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i \right)^T,$$

$$\lambda^*(y) := (y_1 - y_p, \dots, y_{p-1} - y_p, -1)^T.$$

$y \in \mathcal{H}(\nu)$ را در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$\varphi(y, \nu) = \circ \Rightarrow y_1 \nu_1 + \cdots + y_{p-1} \nu_{p-1} + y_p - y_p (\nu_1 + \cdots + \nu_{p-1}) - \nu_p = \circ.$$

^۶Coupling function

از ضرب $\lambda^*(y)^T$ در ν داریم:

$$\begin{aligned}\lambda^*(y)^T \nu &= (y_1 - y_p)\nu_1 + \cdots + (y_{p-1} - y_p)\nu_{p-1} - \nu_p \\ &= y_1\nu_1 + \cdots + y_{p-1}\nu_{p-1} - y_p\nu_1 - \cdots - y_p\nu_{p-1} - \nu_p.\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\mathcal{H}^*(y) := \{\nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) = 0\} = \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda^*(y)^T \nu = -y_p\}.$$

به طریق مشابه داریم:

$$\mathcal{H}(\nu) := \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu)^T y = \nu_p\}.$$

از طرفی $\lambda(\nu) \geq 0$ اگر و فقط اگر $\nu_1, \dots, \nu_{p-1} \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{p-1} \nu_i \leq 1$.

برای اثبات قضیه دوگان هندسی نیاز به اثبات چند لم داریم که ابتدا ثابت می‌کنیم. برای اثبات لم‌ها، جفت‌های دوگان مساله بهینه‌سازی خطی زیر را در نظر می‌گیریم که پارامترهای آن‌ها $y, \nu \in \mathbb{R}^p$ هستند. زوج‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \lambda(\nu)^T Px, \quad \mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\} \quad (P_1(\nu))$$

$$\max_{u \in \mathcal{T}(\nu)} b^T u, \quad \mathcal{T}(\nu) := \{u \in \mathbb{R}^m : u \geq 0, A^T u = P^T \lambda(\nu)\} \quad (D_1(\nu))$$

$$\min_{x \in \mathcal{S}(y)} z, \quad \mathcal{S}(y) := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : Ax \geq b, Px - ez \leq y\} \quad (P_2(y))$$

$$\begin{aligned}\max_{(u, \lambda) \in \mathcal{U}} (b^T u - y^T \lambda), \quad \mathcal{U} := \{(u, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p : (u, \lambda) \geq 0, A^T u = P^T \lambda, e^T \lambda = 1\} \\ (D_2(y)).\end{aligned}$$

زوج $D_1(\nu)$ ، $P_1(\nu)$ یک مساله برنامه‌ریزی خطی مجموع وزن‌دار و دوگان آن است که در آن بردار وزن $\lambda(\nu)$ به‌گونه‌ای محاسبه می‌شود که در آن $e^T \lambda(\nu) = 1$. $P_2(y)$ یک برنامه‌ریزی خطی است و بررسی می‌کند که آیا $y \in \mathbb{R}^p$ عنصر کمینه ضعیف از $P(\mathcal{X})$ است یا خیر. این زمانی اتفاق می‌افتد که مساله $P_2(y)$ مقدار بهینه صفر داشته باشد و برعکس (بنا به لم ۲.۱۰۲ که بعد بیان می‌شود). $D_2(y)$ دوگان آن است که در الگوریتم بنسون که در فصل سوم بیان می‌شود برای ساختن یک ابرصفحه حائل برای $\mathcal{P}$ در y استفاده می‌شود که y نقطه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است.

بنابراین برای هر $\nu \in \mathbb{R}^p$ که $\lambda(\nu) \geq 0$ ، داریم $x \in \mathcal{X}$ و $u \in \mathcal{T}(\nu)$ به‌ترتیب جواب‌های بهینه برای $(P_1(\nu))$ و $(D_1(\nu))$ هستند اگر و فقط اگر $\varphi(Px, D(u, \lambda(\nu))) = 0$. طبق تعریف ابرصفحه $\mathcal{H}(\nu)$ در $\mathbb{R}^p$ داریم $\nu_p = \lambda(\nu)^T Px = b^T u$. بنابراین

$$(\nu_1, \dots, \nu_{p-1}, \lambda(\nu)^T Px) = (\nu_1, \dots, \nu_{p-1}, b^T u)$$

نقطه مرزی روی $D(\mathcal{U}) - \mathcal{K}$ است و مقادیر شدنی $P_1(\nu)$ از این نقطه بیشتر و مقادیر شدنی $D_1(\nu)$ از این نقطه کمتر هستند. $\varphi(Px, D(u, \lambda(\nu)))$ برای $x \in \mathcal{X}$ و $u \in \mathcal{T}(\nu)$ شکاف دوگانی^۶ بین جواب‌های شدنی این نقاط را مشخص می‌کند.

^۶Duality gap

با توجه به رابطه (۱.۲) و $D, D_1(\nu)$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$D = \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \exists u \in \mathcal{T}(\nu) : b^T u \geq \nu_p\}. \quad (۳.۲)$$

برای اثبات قضیه ۱۰.۱.۲ ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۳.۱.۲. [۱۷]. عبارات زیر معادلند:

$$۱. \quad y^\circ \in \text{wmin}_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}.$$

$$۲. \quad x^\circ \in \mathbb{R}^n \text{ وجود دارد، به طوری که } (x^\circ, 0) \text{ جواب بهینه برای } (P_2(y^\circ)) \text{ است.}$$

$$۳. \quad (u^\circ, \lambda^\circ) \in \mathcal{U} \text{ با } b^T u^\circ = y^{\circ T} \lambda^\circ \text{ وجود دارد، به طوری که جواب بهینه برای } (D_2(y^\circ)) \text{ است.}$$

برهان. $۱ \Rightarrow ۲$) اگر $(x^\circ, 0)$ جواب $(P_2(y^\circ))$ باشد، آنگاه $x^\circ \in \mathcal{X}$ و $Px^\circ \leq y^\circ$ است، بنابراین $y^\circ \in \mathcal{P}$ و $\mathcal{P} \neq \emptyset$. فرض کنید $y \in \mathcal{P}$ (یعنی $x \in \mathcal{X}$ با $Px \leq y$) با $y < y^\circ$ وجود دارد. با توجه به $(P_2(y^\circ))$ ، در این صورت $z < 0$ با $y \leq y^\circ + ez$ وجود دارد. پس $Px - ez \leq y - ez \leq y^\circ$ ، در نتیجه $(x, z) \in \mathcal{S}(y^\circ)$ که، با بهینگی $(x^\circ, 0)$ در تناقض است. بنابراین $y^\circ \in \text{wmin}_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}$.

$۱ \Rightarrow ۲$) فرض کنید $y^\circ \in \text{wmin}_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}$. در این صورت $x^\circ \in \mathcal{X}$ با $Px^\circ \leq y^\circ$ وجود دارد یعنی $(x^\circ, 0) \in \mathcal{S}(y^\circ)$. حال فرض کنید $(x, z) \in \mathcal{S}(y^\circ)$ با $z < 0$ وجود دارد. فرض کنید $y := y^\circ + ez$ ، در این صورت $y < y^\circ$ و $Px \leq y^\circ + ez = y$ یعنی $y \in \mathcal{P}$ که با کمینه ضعیف بودن y° تناقض دارد.

$۲ \Rightarrow ۳$) به علت رابطه دوگان بین $(P_2(y^\circ))$ و $(D_2(y^\circ))$ نتیجه برقرار است. یعنی اگر $(x^\circ, 0)$ با $z = 0$ جواب بهینه $(P_2(y^\circ))$ باشد، طبق قضیه دوگان قوی (u°, λ°) با $b^T u^\circ = y^{\circ T} \lambda^\circ$ جواب بهینه $(D_2(y^\circ))$ است. $\square$

لم ۴.۱.۲. [۱۷]. هر وجه سره $\mathcal{K}$ -بیشینه D شامل یک رأس است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{F}^*$ یک وجه سره $\mathcal{K}$ -بیشینه D باشد، کافی است نشان دهیم $\mathcal{F}^*$ شامل خط نیست. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $\mathcal{F}^*$ شامل یک خط باشد یعنی رأس $\bar{v} \in \mathcal{F}^*$ و جهت $\psi \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ وجود دارند به طوری که برای همه $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $\bar{v} + \lambda\psi \in \mathcal{F}^*$. چون برای هر $\nu \in \mathcal{F}^* \subseteq D$ داریم $\nu_1 \geq 0, \dots, \nu_{p-1} \geq 0$ و $\psi_1 = \dots = \psi_{p-1} = 0$ و لذا چون $\psi \neq 0$ دلالت می‌کند که $\mathcal{K} \subseteq \{\lambda\psi : \lambda \in \mathbb{R}^p\}$. بنابراین داریم $\mathcal{K} \subseteq \{\bar{v}\} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}^*$ که با $\mathcal{K}$ -بیشینه بودن $\mathcal{F}^*$ تناقض دارد. $\square$

لم ۵.۱.۲. [۱۷]. ابرصفحه $\mathcal{H}^* = \{\nu \in \mathbb{R}^q : \lambda^{*T} \nu = \gamma\}$ را در نظر بگیرید. عبارات زیر معادلند:

$$۱. \quad \mathcal{H}^* \text{ یک ابرصفحه حائل برای } D \text{ است به طوری که } \mathcal{H}^* \cap D, \mathcal{K} \text{-بیشینه است.}$$

$$۲. \quad \mathcal{H}^* \text{ یک ابرصفحه حائل برای } D(\mathcal{U}) \text{ است و } \lambda_p^* < 0 \text{ است.}$$

برهان. ۲ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنید $\mathcal{H}^*$ ابرصفحه حائل D باشد، پس $\nu^\circ \in D$ با $\lambda^{*T} \nu^\circ = \gamma$ وجود دارد و برای هر $\nu \in D$ داریم $\lambda^{*T} \nu \geq \gamma$. طبق تعریف D ، داریم $\bar{\nu} := \nu^\circ - e^p \in D$ و این نشان می‌دهد که $\lambda_p^* \leq 0$. اگر $\lambda_p^* = 0$ بیانگر این است که $\bar{\nu} \in \mathcal{H}^* \cap D$ چون $\lambda^* \bar{\nu} = \lambda^* \nu^\circ - \lambda_p^* = \gamma$

و $\nu^\circ \in (\bar{\nu} + K \setminus \{0\}) \cap D$ که بنابه تعریف ۱۰.۲.۱، با بیشینه بودن $\mathcal{H}^* \cap D$ در تناقض است، پس $\lambda_p^* < 0$ است. همچنین $\nu^\circ \in D$ است پس $\nu^1 \in D(\mathcal{U}) \subseteq D$ و $z \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\nu^\circ = \nu^1 - e^p z$ بنابراین $\lambda^{*T} \nu^1 = \lambda^{*T} \nu^\circ + \lambda_p^* z \leq \gamma$ با توجه به این‌که $\nu^1 \in D$ ، داریم $\lambda^{*T} \nu^1 \geq \gamma$ و این نشان می‌دهد که $\lambda^{*T} \nu^1 = \gamma$. پس $\mathcal{H}^*$ ابرصفحه حائل $D(\mathcal{U})$ است. ۱ $\Rightarrow$ ۲) فرض کنید $\mathcal{H}^*$ ابرصفحه حائل $D(\mathcal{U})$ است پس $\nu^\circ \in D(\mathcal{U})$ با $\lambda^{*T} \nu^\circ = \gamma$ وجود دارد و برای همه $\nu \in D(\mathcal{U})$ داریم $\lambda^{*T} \nu \geq \gamma$. چون $\lambda_p^* < 0$ ، برای همه $\nu \in D(\mathcal{U}) - K = D$ ، $z \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\nu = \nu^\circ - e^p z$ در نتیجه $\lambda^* \nu = \lambda^* \nu^\circ - \lambda_p^* z \geq \gamma$.

از طرفی $\nu^\circ \in D$ و $\lambda^{*T} \nu^\circ = \gamma$ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{H}^*$ ابرصفحه حائل D است. برای این‌که نشان دهیم $\mathcal{H}^* \cap D$ ، K -بیشینه است، فرض کنید $\nu^\circ \in \mathcal{H}^* \cap D$. بنابراین $\lambda^{*T} \nu^\circ = \gamma$. برای هر $\nu \in \nu^\circ + K \setminus \{0\}$ چون $\lambda_p^* < 0$ داریم $\lambda^{*T} \nu = \lambda^{*T} \nu^\circ + \lambda_p^* z < \gamma$.

چون برای همه $\nu \in D$ ، $\lambda^{*T} \nu \geq \gamma$ به دست می‌آوریم $\nu \in (\nu^\circ + K \setminus \{0\}) \cap D = \emptyset$ که بنابه تعریف $\square$ ۱۰.۲.۱، $\mathcal{H}^* \cap D$ ، K -بیشینه است.

لم ۶.۱۰۲. [۱۷]. فرض کنید $y \in \mathbb{R}^p$ ، عبارات زیر معادلند:

۱. y یک نقطه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است.

۲. $\mathcal{H}^*(y) \cap D$ یک وجه سره K -بیشینه D است.

علاوه‌براین، برای هر وجه سره K -بیشینه $\mathcal{F}^*$ از D ، $y \in \mathbb{R}^p$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(y) \cap D$.

برهان. قسمت اول این قضیه طبق لم ۳.۱۰۲، با قسمت سوم لم ۳.۱۰۲ معادل می‌شود، بنابراین $(u^\circ, \lambda^\circ) \in \mathcal{U}$ با $y^T \lambda^\circ = b^T u^\circ$ وجود دارد که جواب بهینه $D_2(y)$ است. بنابه رابطه (۲.۲)، قسمت سوم لم ۳.۱۰۲ معادل است با این‌که برای همه $\nu \in D(\mathcal{U})$ ، $\varphi(y, \nu) \geq 0$ و همچنین $\nu^\circ \in D(\mathcal{U})$ که $\varphi(y, \nu^\circ) = 0$ وجود دارد که معادل است با این‌که، $\mathcal{H}^*(y) = \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda^*(y)^T \nu = -y_p\}$ ، $\lambda^*(y)_p = -1 < 0$ و $\nu^\circ \in D(\mathcal{U})$ ، $\varphi(y, \nu^\circ) = 0$ است. بنابه لم ۵.۱۰۲، $\mathcal{H}^*(y)$ یک ابرصفحه حائل D است به‌طوری‌که $\mathcal{H}^*(y) \cap D$ ، K -بیشینه است.

فرض کنید $\mathcal{F}^*$ وجه K -بیشینه D باشد، آنگاه $(\lambda^* \neq 0)$ ، $\mathcal{H}^* := \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda^{*T} \nu = \gamma\}$ ابرصفحه حائل D است به‌طوری‌که $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^* \cap D$ ، بنابه لم ۵.۱۰۲، داریم $\lambda_p^* < 0$. تعریف می‌کنیم

$$y := \left(\frac{\gamma - \lambda_1^*}{\lambda_p^*}, \dots, \frac{\gamma - \lambda_{p-1}^*}{\lambda_p^*}, \frac{\gamma}{\lambda_p^*} \right)$$

y در شرایط $\mathcal{H}^*$ به صورت زیر صدق می کند ($\lambda_p^* < 0$)

$$\begin{aligned}\varphi(y, \nu) &= \frac{\gamma - \lambda_1^*}{\lambda_p^*} \nu_1 + \dots + \frac{\gamma - \lambda_{p-1}^*}{\lambda_p^*} \nu_{p-1} + \frac{\gamma}{\lambda_p^*} - \frac{\gamma}{\lambda_p^*} \nu_1 - \dots - \frac{\gamma}{\lambda_p^*} \nu_{p-1} - \nu_p \\ &= -\frac{\lambda_1^*}{\lambda_p^*} \nu_1 - \dots - \frac{\lambda_{p-1}^*}{\lambda_p^*} \nu_{p-1} + \frac{\gamma}{\lambda_p^*} - \nu_p = 0.\end{aligned}$$

□

بنابراین $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(y)$ ، در نتیجه $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}$.

لم ۷.۱.۲. [۱۷]. ابرصفحه $\mathcal{H} := \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda^T y = \gamma\}$ را در نظر بگیرید. عبارات زیر معادلند:

۱. $\mathcal{H}$ ابرصفحه حائل $\mathcal{P}$ است.

۲. $\lambda \geq 0$ و $\mathcal{H}$ ابرصفحه حائل $P(\mathcal{X})$ است.

برهان. $2 \Rightarrow 1$) فرض کنید $\mathcal{H}$ ابرصفحه حائل $\mathcal{P}$ باشد، بنابراین $y^\circ \in \mathcal{P}$ با $\lambda^T y^\circ = \gamma$ وجود دارد و برای همه $y \in \mathcal{P}$ داریم $\lambda^T y \geq \gamma$. بنابه تعریف $\mathcal{P} = P(\mathcal{X}) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، برای همه $w \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ داریم $y^\circ + w \in \mathcal{P}$ ، بنابراین برای همه $w \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، $\lambda^T w \geq 0$ ، این نشان می دهد $\lambda \geq 0$ است. چون $y^\circ \in \mathcal{P}$ ، پس $y^\circ \in P(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}$ و $y^1 \in P(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}$ وجود دارد که $w = y^1 - y^\circ$ است. لذا $\lambda^T y^1 = \lambda^T y^\circ - \lambda^T w \leq \gamma$.

این نشان می دهد که $\lambda^T y^1 = \gamma$ ، در نتیجه $\mathcal{H}$ ابرصفحه حائل $P(\mathcal{X})$ است.

۱ $\Rightarrow 2$) فرض کنید $\mathcal{H}$ ابرصفحه حائل $P(\mathcal{X})$ باشد، آنگاه $y^\circ \in P(\mathcal{X})$ با $\lambda^T y^\circ = \gamma$ وجود دارد و برای همه $y \in P(\mathcal{X})$ داریم $\lambda^T y \geq \gamma$. چون $\lambda \geq 0$ ، لذا برای همه $y \in P(\mathcal{X}) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ داریم $\lambda^T y \geq \gamma$. بنابه این که $y^\circ \in \mathcal{P}$ و $\lambda^T y^\circ = \gamma$ ، نتیجه می گیریم $\mathcal{H}$ ابرصفحه حائل $\mathcal{P}$ است. □

لم ۸.۱.۲. [۱۷]. هر وجه سره $\mathcal{P}$ ، کمینه غیرتسلطی ضعیف ($\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه ضعیف) است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک وجه سره $\mathcal{P}$ باشد. لذا ابرصفحه حائل $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^p | \lambda^T y = \gamma\}$ ، برای $\lambda \neq 0$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$. بنابه لم ۷.۱.۲، $\mathcal{H}$ ابرصفحه حائل $P(\mathcal{X})$ و $\lambda \geq 0$ است. اکنون فرض کنید $y \in \mathcal{F}$ ، آنگاه $y \in \mathcal{P}$ ، لذا $x^\circ \in \mathcal{X}$ وجود دارد به طوری که $Px^\circ \leq y$ ، یعنی $(x^\circ, 0) \in \mathcal{S}(y)$ و $\lambda^T y = \gamma$. فرض کنید $x \in \mathcal{X}$ و $z < 0$ وجود داشته باشند به طوری که $Px - ez \leq y$ ، یعنی $Px < y$. چون $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^p | \lambda^T y = \gamma\}$ یک ابرصفحه حائل برای $\mathcal{P}$ است و $Px \in \mathcal{P}$ ، طبق تعریف نیم فضا و ابروجه داریم $\gamma \leq \lambda^T Px < \lambda^T y = \gamma$ که این یک تناقض است. در نتیجه $(x, 0)$ جواب مساله $(P_1(y))$ است. بنابه لم ۳.۱.۲، $y \in wmin_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}$. □

لم ۹.۱.۲. [۱۷]. فرض کنید $\nu \in \mathbb{R}^p$ ، عبارات زیر معادلند:

۱. ν یک نقطه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ است.

۲. $\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$ وجه سره غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است.

علاوه بر این، برای هر وجه سره $\mathcal{F}$ از $\mathcal{P}$ ، وجود دارد $\nu \in \mathbb{R}^p$ به طوری که $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$.

برهان. بنابه رابطه (۳.۲)، نتیجه می‌گیریم قسمت اول این لم معادل است با این‌که $\lambda(\nu) \geq 0$ و $u^\circ \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که جواب $(D_1(\nu))$ است به‌طوری‌که $\nu_p = b^T u^\circ$. بنابه رابطه دوگان بین $(P_1(\nu))$ و $(D_1(\nu))$ ، $\lambda(\nu) \geq 0$ و $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که جواب $(P_1(\nu))$ است به‌طوری‌که $\nu_p = \lambda(\nu)^T P x^\circ = b^T u^\circ$.

این معادل است با این‌که $\lambda(\nu) \geq 0$ و $\mathcal{H}(\nu)$ ابرصفحه حائل $P(\mathcal{X})$ است که بنابه لم‌های ۷.۱.۲ و ۸.۱.۲ و تعریف ۱۶.۲.۱، $\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$ وجه سره ضعیف $\mathcal{P}$ است. اکنون فرض کنید $\mathcal{F}$ وجه سره $\mathcal{P}$ است. بنابراین ابرصفحه حائل $\mathcal{H} := \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda^T y = \gamma\}$ (که $\lambda \neq 0$) برای $\mathcal{P}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$. بنابه لم ۷.۱.۲، داریم $\lambda \geq 0$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $e^T \lambda = 1$. قرار می‌دهیم $\nu_i := \lambda_i$ ، $i = 1, \dots, p-1$ ، و $\nu_p := \gamma$ و داریم $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\nu)$ چون

$$\begin{aligned} \varphi(y, \nu) &= \nu_1 y_1 + \dots + \nu_{p-1} y_{p-1} + y_p - \nu_1 y_p - \dots - \nu_{p-1} y_p - \nu_p \\ &= \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{p-1} y_{p-1} + y_p - \lambda_1 y_p - \dots - \lambda_{p-1} y_p - \gamma \\ &= \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{p-1} y_{p-1} + y_p \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i\right) - \gamma = \gamma - \gamma = 0. \end{aligned}$$

□

در نتیجه $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$.

قضیه چندسقفی روی مجموعه‌های محدب بیان می‌کند که دو چندسقفی $\mathcal{G}^*$ و $\mathcal{G}^\wedge$ دوگان یکدیگرند اگر یک نگاشت یک به یک Ψ ، بین همه ابروجه‌های $\mathcal{G}^*$ و $\mathcal{G}^\wedge$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که Ψ دارای شمول معکوس باشد، یعنی ابروجه‌های $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ از $\mathcal{G}$ در رابطه $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ صدق می‌کنند اگر و تنها اگر ابروجه‌های $\Psi(\mathcal{F}_1)$ و $\Psi(\mathcal{F}_2)$ در رابطه $\Psi(\mathcal{F}_1) \subseteq \Psi(\mathcal{F}_2)$ صدق کنند [۱۵].

در مساله تک‌هدفه، با به‌دست آوردن مقدار بهینه در یکی از مسائل دوگان و یا اولیه، مقدار بهینه دیگری را پیدا می‌کنیم. اکنون به رابطه دوگان بین مجموعه تصاویر چندوجهی مساله اولیه و تصاویر چندوجهی مساله دوگان که شبیه به دوگان چندسقفی است، می‌پردازیم. بدون این‌که بخواهیم مقدار بهینه را محاسبه کنیم و از آن برای پیدا کردن تناظر بین مساله اولیه و دوگان استفاده کنیم. با تعیین $\mathcal{P}$ و $\mathcal{D}$ ، تصویر توابع هدف مساله PR و مساله دوگان $\mathcal{D}$ ، نشان می‌دهیم نگاشت یک به یک شمول معکوس Ψ ، بین مجموعه همه ابروجه‌های سره $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ و مجموعه ابروجه‌های سره $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه $\mathcal{P}$ وجود دارد که در آن $\mathcal{K}$ و $\mathbb{R}_{\geq}^p$ مخروط‌های مرتب هستند. اگر ابروجه‌های $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ مشخص باشند با کمک نگاشت Ψ می‌توانیم به محاسبه ابروجه‌های $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه $\mathcal{P}$ پردازیم و برعکس.

در قضیه دوگان هندسی یک تناظر یک به یک بین رأس‌های (ابروجه‌های) $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه ضعیف $\mathcal{P}$ و ابروجه‌های (رأس‌های) $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ ارائه می‌دهیم. فرض کنید $\mathcal{F}^* \subseteq \mathbb{R}^p$ یک وجه از $\mathcal{D}$ باشد، از نگاشت $\mathcal{H}$ استفاده می‌کنیم و نگاشت دوگان $\Psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi(\mathcal{F}^*) := \bigcap_{\nu \in \mathcal{F}^*} \mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$$

قضیه ۱۰.۱.۲. (قضیه دوگان هندسی) [۱۷]. Ψ یک نگاشت یک به یک و دارای شمول عکس بین مجموعه همه وجه‌های $\mathcal{K}$ -بیشینه D و مجموعه همه وجه‌های غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ سره D است و نگاشت معکوس آن به صورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\mathcal{F}) = \bigcap_{y \in \mathcal{F}} \mathcal{H}^*(y) \cap D. \quad (۲)$$

علاوه بر این، برای هر وجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{F}^*$ از D داریم $\dim(\mathcal{F}^*) + \dim \Psi(\mathcal{F}^*) = p - ۱$.

برهان. برای اثبات ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{F}^*$ یک وجه سره $\mathcal{K}$ -بیشینه D باشد آنگاه $\Psi(\mathcal{F}^*)$ یک وجه کمینه سره غیرتسلطی $\mathcal{P}$ است. بنابه لم ۹.۱.۲، برای هر $\nu \in \mathcal{F}^*$ یک وجه سره غیرتسلطی $\mathcal{P}$ است، بنابراین $\Psi(\mathcal{F}^*)$ یک وجه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است. حال کافی است نشان دهیم $\Psi(\mathcal{F}^*)$ ناتهی است. بنابه لم ۶.۱.۲، $y^\circ \in \text{wmin}_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(y) \cap D$. بنابراین $y^\circ \in \Psi(\mathcal{F}^*)$.

اکنون ثابت می‌کنیم $\Psi^*(\mathcal{F}) := \bigcap_{y \in \mathcal{F}} \mathcal{H}^*(y) \cap D$ یک وجه سره $\mathcal{K}$ -بیشینه D است. اگر $\mathcal{F}$ یک وجه سره غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ باشد بنابه لم ۶.۱.۲، برای هر $y \in \mathcal{F}$ یک وجه $\mathcal{H}^*(y) \cap D$ یک وجه $\mathcal{K}$ -بیشینه سره D است. بنابراین اگر $\Psi^*(\mathcal{F})$ ناتهی باشد، $\Psi^*(\mathcal{F})$ یک وجه $\mathcal{K}$ -بیشینه سره D است، بنابه لم ۹.۱.۲، نقطه $\mathcal{K}$ -بیشینه D مانند ν° وجود دارد به طوری که $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\nu^\circ) \cap \mathcal{P}$ یک وجه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است، بنابراین $\nu^\circ \in \Psi^*(\mathcal{F})$. اکنون باید نشان دهیم که تابع Ψ یک به یک است و

$$\Psi^{-1}(\mathcal{F}) = \bigcap_{y \in \mathcal{F}} \mathcal{H}^*(y) \cap D := \Psi^*(\mathcal{F}).$$

بنابراین باید نشان دهیم دو عبارت زیر برقرارند:

۱. برای همه وجه‌های سره $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{F}^*$ از D ، $\Psi^*(\Psi(\mathcal{F}^*)) = \mathcal{F}^*$.

۲. برای همه وجه‌های سره غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{F}$ از $\mathcal{P}$ ، $\Psi(\Psi^*(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathcal{F}^* \subseteq \Psi^*(\Psi(\mathcal{F}^*))$. به برهان خلف فرض می‌کنیم $\nu^\circ \in \mathcal{F}^*$ وجود دارد به طوری که $\nu^\circ \notin \Psi^*(\Psi(\mathcal{F}^*))$. بنابراین $y^\circ \in \Psi(\mathcal{F}^*)$ وجود دارد که $\nu^\circ \notin \mathcal{H}^*(y^\circ) \cap D$.

این نشان می‌دهد چون $\nu^\circ \in D$ پس $\nu^\circ \notin \mathcal{H}^*(y^\circ)$. بنابراین $y^\circ \notin \mathcal{H}(\nu^\circ)$ از این رو $y^\circ \notin \Psi(\mathcal{F}^*)$ یک گزاره همیشه نادرست است. برای اثبات عکس شمول، فرض کنید y° نقطه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ باشد، به طوری که $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(y^\circ) \cap D$. با توجه به این که $\Psi(\mathcal{F}^*)$ وجه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است، بنابه لم ۶.۱.۲، $y^\circ \in \Psi(\mathcal{F}^*)$ وجود دارد. بنابراین

$$\Psi^*(\Psi(\mathcal{F}^*)) \subseteq \mathcal{H}^*(y^\circ) \cap D = \mathcal{F}^*.$$

رابطه دوم نیز به همین طریق با کمک لم ۹.۱.۲ به جای لم ۶.۱.۲ ثابت می‌شود. بنابراین Ψ یک به یک است، واضح است که دارای خاصیت شمول معکوس است. کافی است نشان دهیم برای همه وجه‌های $\mathcal{K}$ -بیشینه سره $\mathcal{F}^*$ از D ، داریم:

$$\dim(\mathcal{F}^*) + \dim \Psi(\mathcal{F}^*) = p - ۱.$$

بنابراین $\mathcal{F}^*$ را وجه سره $\mathcal{K}$ -بیشینه دلخواه $\mathcal{D}$ در نظر بگیرید و قرار می‌دهیم:

$$r := \dim \mathcal{F}^*,$$

$$s := \dim \Psi(\mathcal{F}^*).$$

بنابه ابتدای اثبات $\mathcal{F} := \Psi(\mathcal{F}^*)$ یک وجه غیرتسلطی کمینه ضعیف $\mathcal{P}$ می‌باشد. بنابراین وجه‌های سره

$$\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_{p-1-s}$$

وجود دارند به طوری که $\dim \mathcal{F}_{p-1-s} = p-1$. از خاصیت Ψ نتیجه می‌گیریم

$$0 \leq \dim \Psi^{-1}(\mathcal{F}_{p-1-s}) \leq r - (p-1-s)$$

بنابراین $r + s \geq p-1$. بنابه لم ۴.۱۰۲، هر وجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ شامل یک راس است، پس وجه‌های $\mathcal{K}$ -بیشینه

$$\mathcal{F}_r^* \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_1^* \subsetneq \mathcal{F}_0^*$$

وجود دارند به طوری که $\dim \mathcal{F}_r^* = 0$. نشان می‌دهد که

$$p-1 \leq s + r \leq \dim \Psi(\mathcal{F}_r^*) \leq p-1$$

□

در نتیجه $s + r = p-1$ ، بنابراین $\dim(\mathcal{F}^*) + \dim \Psi(\mathcal{F}^*) = p-1$

نتیجه ۱۱.۱۰۲. [۱۷]. عبارات زیر معادلند:

۱. ν یک راس $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ است.

۲. $\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$ یک ابروجه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ با بعد $p-1$ است.

علاوه‌براین، اگر $\mathcal{F}$ یک ابروجه غیرتسلطی ضعیف $(p-1)$ -بعدی $\mathcal{P}$ باشد، نقطه منحصر به فرد $\nu \in \mathbb{R}^p$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$.

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱) فرض کنید $\mathcal{F}^* = \{\nu\}$ یک وجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ باشد، در این صورت

$\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P} = \Psi(\{\nu\})$. بنابراین طبق قضیه ۱۰.۱۰۲، یک وجه سره غیرتسلطی $\mathcal{P}$

است، از قضیه ۱۰.۱۰۲ نتیجه می‌گیریم

$$\dim(\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}) = p-1 - \dim \nu = p-1$$

در نتیجه $\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$ یک ابروجه غیرتسلطی از $\mathcal{P}$ است.

۱ $\rightarrow$ ۲) فرض کنید $\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$ یک ابروجه غیرتسلطی ضعیف $(p-1)$ -بعدی $\mathcal{P}$ باشد، طبق

قضیه ۱۰.۱۰۲، $\Psi^{-1}(\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P})$ یک راس $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ مانند $\bar{\nu}$ است. بنابراین

$$\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P} = \Psi \circ \Psi^{-1}(\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}) = \Psi(\{\bar{\nu}\}) = \mathcal{H}(\bar{\nu}) \cap \mathcal{P}$$

در نتیجه $\mathcal{H}(\nu) = \mathcal{H}(\bar{\nu})$ و داریم $\dim(\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}) = p-1$. چون نگاشت $\mathcal{H}$ یک به یک است

داریم، $\nu = \bar{\nu}$.

برای نشان دادن آخرین عبارت، فرض کنید $\mathcal{F}$ یک وجه غیرتسلطی ضعیف $(p-1)$ -بعدی $\mathcal{P}$ باشد، بنابراین $\Psi^{-1}(\mathcal{F})$ رأس $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ است که با ν نشان می‌دهیم. در نتیجه

$$\mathcal{F} = \Psi \circ \Psi^{-1}(\mathcal{F}) = \Psi(\nu) = \mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}.$$

چون $\dim(\mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}) = p-1$ و $\mathcal{H}$ نگاشت یک به یک است، بنابراین ν منحصر بفرد است. $\square$

نتیجه ۱۲.۱.۲. [۱۷]. عبارات زیر معادلند:

۱. y یک رأس غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است.

۲. $\mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}$ یک ابروجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ با بعد $p-1$ است.

علاوه بر این، اگر $\mathcal{F}^*$ یک ابروجه $(p-1)$ -بعدی $\mathcal{K}$ -بیشینه از $\mathcal{D}$ باشد نقطه منحصر به فرد $y \in \mathbb{R}^p$ وجود دارد که $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}$.

برهان. $2 \rightarrow 1$) ابتدا فرض کنید y یک رأس غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ باشد، طبق قضیه ۱۰.۱.۲:

$$\mathcal{F}^* := \Psi^{-1} \circ \Psi(\mathcal{F}^*) = \Psi^{-1}(\{y\}) = \mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}$$

یک وجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ است و بنابه قضیه ۱۰.۱.۲ نتیجه می‌گیریم

$$\dim(\mathcal{F}^*) = p-1 - \dim \Psi(\mathcal{F}^*) = p-1$$

بنابراین $\mathcal{F}^*$ ابروجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ است.

$2 \rightarrow 1$) اکنون فرض کنید $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}$ ابروجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $(p-1)$ -بعدی $\mathcal{D}$ باشد. بنابه قضیه ۱۰.۱.۲، $\Psi(\mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D})$ یک رأس غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است که با $\bar{y}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\Psi^{-1} \circ \Psi(\mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}) = \Psi^{-1}(\{\bar{y}\}).$$

در نتیجه $\mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D} = \mathcal{H}^*(\bar{y}) \cap \mathcal{D}$. اما چون $\dim(\mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}) = p-1$ و $\mathcal{H}^*$ یک به یک است، نتیجه می‌گیریم $y = \bar{y}$.

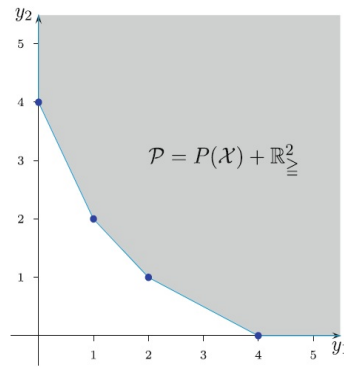
برای نشان دادن عبارت آخر، فرض کنید $\mathcal{F}^*$ یک وجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $(p-1)$ -بعدی $\mathcal{D}$ باشد. بنابراین $\Psi(\mathcal{F}^*)$ رأس غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است که با y نشان می‌دهیم، در نتیجه

$$\mathcal{F}^* = \Psi^{-1} \circ \Psi(\mathcal{F}^*) = \Psi^{-1}(y) = \mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}.$$

با توجه به این که $\dim(\mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}) = p-1$ و این که $\mathcal{H}^*$ نگاشت یک به یک است، y منحصر بفرد است. $\square$

مثال ۱۳.۱.۲. مساله (PR) را با اطلاعات زیر در نظر بگیرید:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



شکل ۱۰۲: $\mathcal{P}$ در مثال ۱۲.۱.۲

مجموعه‌های شدنی $\mathcal{P}$ و D از PR و D در شکل‌های ۱۰۲ و ۲۰۲ نشان داده شده‌اند. قضیه دوگان هندسی رابطه بین رأس‌های غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ و ابروجه‌های $\mathcal{K}$ -بیشینه D و ابروجه‌های غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ و رأس‌های $\mathcal{K}$ -بیشینه D را بررسی می‌کند. مساله اولیه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & (y_1, y_2) \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مساله دوگان آن به صورت زیر است:

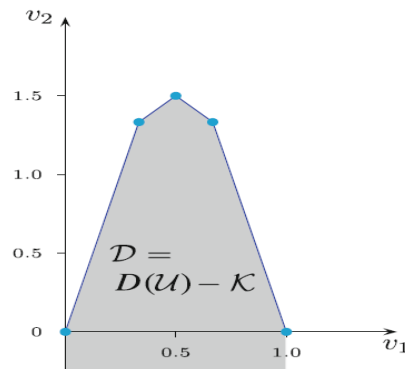
$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{K}} \quad & (\lambda_1, 4u_1 + 3u_2 + 4u_3) \\ \text{s.t.} \quad & 2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \lambda_1 \\ & u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4 = \lambda_2 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

در این مثال با توجه به $Ax = b$ ، ابرصفحه‌های مساله اولیه عبارت‌اند از:

$$2y_1 + y_2 = 4, y_1 + y_2 = 3, y_1 + 2y_2 = 4, y_1 = 0, y_2 = 0$$

با استفاده از این ابرصفحه‌ها، نقاط رأسی غیرتسلطی

$$(4, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 4)$$



شکل ۲.۲: D در مثال ۱۲.۱.۲

را خواهیم داشت. نقطه رأسی $(0, 4)$ ، از نقاط رأسی $\mathcal{P}$ را در نظر می‌گیریم، با توجه به این‌که

$$\mathcal{H}^*(y) := \{\nu \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y, \nu) = 0\}$$

ابرصفحه D است، بنابراین ابرصفحه متناظر با رأس $(0, 4)$ عبارت است از:

$$\varphi((0, 4), (\nu_1, \nu_2)) = 0 \Rightarrow 4(1 - \nu_1) - \nu_2 = 0 \Rightarrow 4\nu_1 + \nu_2 = 4$$

که این ابروجه K -بیشینه D می‌باشد. به همین طریق به ازای نقاط $(1, 2)$ ، $(2, 1)$ ، $(4, 0)$ ، به ترتیب

ابروجه‌های K -بیشینه D متناظر با این رئوس را به دست می‌آوریم، که عبارتند از:

$$-4\nu_1 + \nu_2 = 0, -\nu_1 + \nu_2 = 1, \nu_1 + \nu_2 = 2.$$

با استفاده از این ابروجه‌ها می‌توانیم نقاط رأسی دوگان را پیدا کنیم، که عبارتند از:

$$(0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), (1, 0).$$

برعکس، به طور مشابه برای دوگان می‌توان وجه‌های غیرتسلطی ضعیف و نقاط رأسی مساله را پیدا کرد.

براحتی می‌توان نقاط رأسی D را به دست آورد که عبارتند از:

$$(0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), (1, 0).$$

با توجه به این‌که

$$\mathcal{H}(\nu) = \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) = 0\}$$

ابرصفحه $\mathcal{P}$ است، به عنوان مثال، ابرصفحه متناظر با رأس $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ عبارت است از:

$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})) = \frac{1}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow y_1 + 4y_2 = 4$$

که ابروجه $\mathcal{P}$ است. به همین صورت می‌توان بقیه ابروجه‌های $\mathcal{P}$ را به دست آورد که عبارتند از:

$$2y_1 + y_2 = 4, y_1 + y_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0.$$

به کمک این ابروجه‌ها، نقاط رأسی $\mathcal{P}$ عبارتند از:

$$(4, 0), (1, 2), (2, 1), (0, 4).$$

رابطه بین رأس‌های اولیه و وجه‌های دوگان یک تناظر یک به یک و معکوس پذیر است.

فصل ۳

پیدا کردن نقاط غیرتسلطی با کمک دوگان الگوریتم تقریب بیرونی بنسون

۱.۳ الگوریتم تقریب بیرونی بنسون

هدف از الگوریتم تقریب بیرونی بنسون^۱، پیدا کردن نقاط غیرتسلطی است. اصلاحات کمی در الگوریتم اصلی ایجاد می‌شود که در آن رأس‌های غیرتسلطی به‌طور مستقیم محاسبه می‌شوند و در نهایت بررسی می‌کنیم که این رأس‌ها، رأس‌های غیرتسلطی یا رأس‌های زائد هستند. در الگوریتم بنسون با در نظر گرفتن نقطه‌ای خارج از مجموعه هدف، با تکرار گام‌های الگوریتم، نقاط غیرتسلطی و به کمک آن‌ها ابروجه غیرتسلطی مساله را می‌یابیم، به همین دلیل آن را الگوریتم تقریب بیرونی نامند. قبل از ارائه الگوریتم ابتدا چند قضیه ثابت می‌کنیم.

در مساله بهینه‌سازی برداری اولیه (PR) ، ابتدا فرض می‌کنیم $\mathcal{X} \neq \emptyset$ و مجموعه $\mathcal{P} = P(\mathcal{X}) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ از پایین $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کران‌دار است. یعنی

$$\exists \hat{y} \in \mathbb{R}^p \quad s.t. \quad \hat{y} \leq y \quad \forall y \in \mathcal{P}.$$

اکنون نشان می‌دهیم اگر y یک نقطه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ باشد، آنگاه با استفاده از جواب بهینه $D_2(y)$ می‌توان یک ابرصفحه حائل $\mathcal{P}$ شامل y ایجاد کرد. بدین منظور قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۳. [۱۴]. فرض کنید $y \in \text{wmin}_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}$ ، آنگاه یک جواب بهینه برای $(D_2(y))$ وجود دارد و برای چنین جواب بهینه $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \in \mathcal{U}$ ، $\mathcal{H}(D(\bar{u}, \bar{\lambda}))$ یک ابرصفحه حائل $\mathcal{P}$ با $y \in \mathcal{H}(D(\bar{u}, \bar{\lambda}))$ است.

برهان. بنابه لم ۳.۱.۲، یک جواب بهینه $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ با $b^T \bar{u} = y^T \bar{\lambda}$ برای $(D_2(y))$ وجود دارد. بنابراین بهینگی $(P_2(y))$ ، زمانی است که $z = 0$ باشد. $y \in \mathcal{P}$ دلخواه را در نظر می‌گیریم، بنابراین $x \in \mathcal{X}$ که $Px \leq y$ وجود دارد، پس $(x, 0)$ یک جواب شدنی برای $(P_2(y))$ است. بنابه رابطه دوگانی بین

^۱Benson outer approximation algorithm

$P(y)$ و $D_2(y)$ ، همیشه مقدار شدنی مساله برنامه‌ریزی خطی اولیه از مقدار شدنی دوگان بیشتر است، پس $b^T \bar{u} \leq \bar{\lambda}^T y$. بنابراین مجموعه y ‌هایی که شرط $\bar{\lambda}^T y \geq b^T \bar{u}$ را دارند در نظر می‌گیریم، از طرفی $b^T \bar{u}$ برابر با مقدار ثابت است. این مجموعه تشکیل نیم‌فضا می‌دهد، طبق تعریف ابرصفحه حائل

$$\mathcal{H}(D(\bar{u}, \bar{\lambda})) = \{y \in \mathbb{R}^p : \bar{\lambda}^T y = b^T \bar{u}\}$$

ابرفصله حائل $\mathcal{P}$ است. $\square$

در قضیه بعد مشاهده می‌کنیم که لازم نیست غیرتسلطی بودن رأس‌های $\mathcal{P}$ بررسی شود.

قضیه ۲.۱.۳. [۱۴]. هر رأس $\mathcal{P}$ ، غیرتسلطی ($\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه) است.

برهان. فرض کنید y یک رأس $\mathcal{P} = P(\mathcal{X}) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ باشد، به‌طوری‌که $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه نباشد. در این صورت

$$z \in (\{y\} - \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}) \cap \mathcal{P}$$

وجود دارد، یعنی

$$y \in \{z\} + \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\} \subseteq P(\mathcal{X}) + \mathbb{R}_{\geq}^p + (\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}) = P(\mathcal{X}) + \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$$

بنابراین $\bar{x} \in \mathcal{X}$ و $\bar{d} \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $y = P\bar{x} + \bar{d} \in \mathcal{P}$. بنابراین نقاط $y + \bar{d}$ و $y - \bar{d}$ متعلق به $\mathcal{P}$ هستند و داریم $y = \frac{1}{2}(y - \bar{d}) + \frac{1}{2}(y + \bar{d})$ ، این با رأسی بودن y در $\mathcal{P}$ تناقض دارد. بنابراین نقطه y کمینه غیرتسلطی است. $\square$

قضیه بعد نشان می‌دهد لازم نیست جهت‌های رأسی را در نظر بگیریم، در این الگوریتم در نظر گرفتن رأس‌ها کافی است، چون جهت‌های رأسی همواره یکسان اند و همان بردار واحد $e^k \in \mathbb{R}^p$ هستند.

قضیه ۳.۱.۳. [۱۴]. فرض کنید $y \in \mathbb{R}^p$ و $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^p$ یک مجموعه چندوجهی محدب باشد، به‌طوری‌که $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \{y\} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ اکنون اگر ε را مجموعه نقاط رأسی $\mathcal{S}$ در نظر بگیریم، داریم

$$\mathcal{S} = \text{conv}(\varepsilon + \mathbb{R}_{\geq}^p)$$

برهان. برای اثبات به [۳۵]، قضایای ۱۸.۵ و ۱۹.۵ مراجعه شود. $\square$

اگر $\mathcal{S} = \text{conv}(\varepsilon + \mathbb{R}_{\geq}^p)$ ، مجموعه ε شامل تعداد متناهی نقطه را یک نمایش نقطه‌ای $\mathcal{S}$ می‌گویند. اگر ε تنها شامل نقاط رأسی $\mathcal{S}$ باشد گوییم ε ناتباهیده^۲ است. در غیر این صورت، ε را تباهیده^۳ گویند. به‌طور مشابه اگر $\mathcal{S}$ مجموعه جواب سیستم باشد و هیچ نامعادله زائدی وجود نداشته باشد، یک سیستم از نامعادلات را یک نمایش نامعادله‌ای غیرتباهیده $\mathcal{S}$ گویند. اگر نامعادلات زائدی وجود داشته باشند، نمایش نامعادله‌ای $\mathcal{S}$ را تباهیده گویند یعنی یک زیرسیستم سره از نامعادلات موجود باشند که $\mathcal{S}$ را به عنوان مجموعه جواب داشته باشند.

^۲Nondegenerate

^۳Degenerate

با توجه به اینکه در ابتدای این فصل فرض کردیم $\mathcal{X} \neq \emptyset$ و $\mathcal{P}$ از پایین $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کران دار است، بنابراین نقطه ایده‌آل y^I در $\mathcal{P}$ که به صورت

$$y_k^I := \min\{y_k : y \in \mathcal{P}\} \quad k = 1, \dots, p$$

تعریف می‌شود، وجود دارد.

روند عملکرد الگوریتم به این صورت است که، الگوریتم ابتدا یک چندوجهی p -بعدی به صورت مجموعه $S^\circ = y^I + \mathbb{R}_{\geq}^p$ به طوری که $\mathcal{P} \subseteq S^\circ$ می‌سازد. در هر تکرار، یک نقطه رأسی s^k از S^{k-1} را که به $\mathcal{P}$ متعلق نیست انتخاب می‌کنیم و با حل مساله برنامه‌ریزی خطی $(D_2(y^k))$ یک ابرصفحه حائل برای $\mathcal{P}$ می‌سازیم، که در آن y^k یک نقطه مرزی $\mathcal{P}$ است که روی پاره‌خط واصل بین s^k و نقطه درونی $\hat{p} \in \text{int}(\mathcal{P})$ قرار دارد. اشتراک S^{k-1} با نیم‌فضایی^۴ که ابرصفحه حائل $\mathcal{P}$ است، S^k را می‌سازند. این روند تا جایی تکرار می‌شود که دیگر نتوانیم چنین s^k ای را پیدا کنیم، بنابراین الگوریتم پایان یافته و داریم $S^{k-1} = \mathcal{P}$. در تکرار k ام الگوریتم یک چندوجهی S^k شامل $\mathcal{P}$ می‌سازد، که آن را با تعداد متناهی از نقاط و تعداد متناهی از نامعادلات نمایش می‌دهیم. قابل ذکر است که تمام نقاطی که S^k را نمایش می‌دهند لزوماً نقطه رأسی نیستند. یعنی مجموعه مورد نظر ممکن است شامل تعدادی نقطه زائد^۵ نیز باشد. به همین ترتیب ممکن است در نمایش S^k به صورت نامعادلات، تعدادی از نامعادلات زائد^۶ باشند.

الگوریتم ۴.۱.۳. (الگوریتم تقریب بیرونی بنسون)
مقداردهی اولیه $k = 0$.

i۱. نقطه $\hat{p} \in \text{int}\mathcal{P}$ را انتخاب کنید.

i۲. نقطه y^I را محاسبه کنید.

i۳. قرار دهید $S^\circ := \{y^I\} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ و $k = 1$.

گام‌های تکرار ($k \geq 1$):

k۱. اگر $\text{vert}S^{k-1} \subseteq \mathcal{P}$ در غیر این صورت رأس s^k از S^{k-1} که $s^k \notin \mathcal{P}$ را انتخاب کنید.

k۲. $\alpha^k \in (0, 1)$ را محاسبه کنید به گونه‌ای که $y^k := \alpha^k s^k + (1 - \alpha^k)\hat{p} \in \text{wmin}_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}$.

k۳. جواب بهینه (u^k, λ^k) از $(D_2(y^k))$ را محاسبه کنید.

k۴. قرار دهید $S^k := S^{k-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, D(u^k, \lambda^k)) \geq 0\}$.

k۵. قرار دهید $k := k + 1$ و به مرحله (k۱) بروید.

^۴Halfspace

^۵Redundant point

^۶Redundant inequality

جزئیات الگوریتم:

۱. واضح است که $intP \neq \emptyset$. به عنوان مثال برای $x \in \mathcal{X}$ و $\alpha > 0$ داریم، $Px + \alpha e \in intP$.

۳. با توجه به تعریف نقطه ایده‌آل در فصل اول واضح است $P \subseteq S^\circ$.

۱. فرض کنید $y \in vertS^{k-1}$ ، مقدار بهینه μ را از $(P_2(y))$ یا $(D_2(y))$ پیدا می‌کنیم، $\mu \geq 0$. اگر و فقط اگر بنا به لم ۳.۱.۲، $y \in P$.

۲. با حل مساله برنامه‌ریزی خطی

$$\alpha^k := \max\{\alpha : x \in \mathcal{X}, \alpha s^k + (1 - \alpha)\hat{p} \geq Px\} \quad (1.3)$$

مقدار α^k را محاسبه می‌کنیم. واضح است که $\bar{x} \in \mathcal{X}$ موجود است به طوری که نقطه $(\bar{x}, 0)$ برای مساله (۱.۳)، یک نقطه شدنی است چون $\alpha = 0$ ، نشان می‌دهد $\hat{p} \geq P\bar{x}$. از طرفی چون $\mathcal{X} \neq \emptyset$ ، لذا مساله (۱.۳) جواب بهینه دارد. از این که $s^k \notin P$ و $\hat{p} \in intP$ ، پاره‌خط واصل بین این دو نقطه P را در نقطه y^k قطع می‌کند. y^k به گونه‌ای به دست می‌آید که $\alpha \in (0, 1)$ (اگر $\alpha = 1$ آنگاه $s^k \in P$ تناقض است و اگر $\alpha = 0$ آنگاه $\hat{p}$ نقطه مرزی است و با $\hat{p} \in intP$ تناقض دارد)، بنابراین $y^k \in bd(P)$. بنا به لم ۸.۱.۲، مرز P نقاط کمینه غیرتسلطی هستند، بنابراین $bd(P) = wmin_{\mathbb{R}^p} P$.

۳. از (۲) داریم $y^k \in wmin_{\mathbb{R}^p} P$. با توجه به قضیه ۱.۱.۳، جواب بهینه برای $(D_2(y))$ وجود دارد.

۴. با توجه به نتیجه‌ای که از (۳) و قضیه ۱.۱.۳ به دست می‌آوریم، داریم $\mathcal{H}(D(u^k, \lambda^k))$ ابرصفحه حائل P شامل y^k است، یعنی

$$\forall y \in P, \quad \varphi(y, D(u^k, \lambda^k)) \geq 0.$$

و به ازای y^k داریم

$$\varphi(y^k, D(u^k, \lambda^k)) = 0.$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $P \subseteq S^k \subseteq S^{k-1}$.

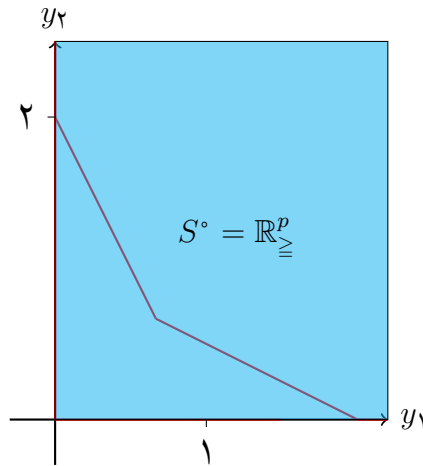
نتایج الگوریتم:

۱. از (۱) داریم $vertS^{k-1} \subseteq P$. با استفاده از قضیه ۳.۱.۳، خواهیم داشت

$$S^{k-1} = conv(vertS^{k-1} + \mathbb{R}_{\geq}^p) \subseteq P.$$

از (۴)، داریم $P \subseteq S^{k-1}$. از این دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت $P = S^{k-1}$.

۲. با توجه به نتیجه ۱۲.۱.۲، $\mathcal{F}^*$ یک ابروجه $\mathcal{K}$ -بیشینه D است اگر و فقط اگر رأس کمینه غیرتسلطی P مانند y وجود داشته باشد به طوری که $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(y) \cap D$. بنابراین $\mathcal{H}^*(y)$


 شکل ۱.۳: S^o در مثال ۶.۱.۳

ابرفصله‌ای است که برای یک ابروجه D ، حائل است اگر و فقط اگر y رأس کمینه غیرتسلطی P باشد. در نتیجه نامساوی متناظر آن زائد نیست. بنابراین مجموعه

$$\{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \varphi(y, \nu) \geq 0, \quad y \in \text{vert} S^{k-1}\}$$

توسط نمایش نامعادله‌ای غیرتباهیده D تعریف می‌شود.

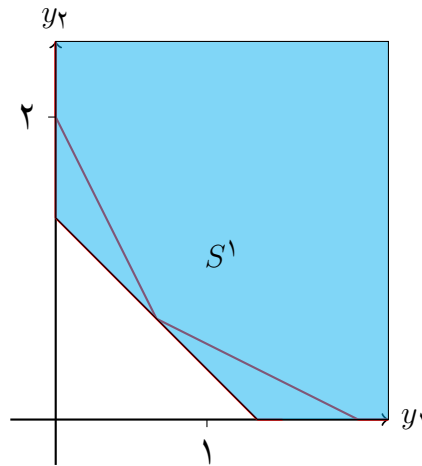
قضیه ۵.۱.۳. [۱۴]. الگوریتم تقریب بیرونی بنسون ارائه شده در الگوریتم (۴.۱.۳) متناهی است.

برهان. چون $\hat{p} \in \text{int} P$ است و لذا نقطه $y^k \in P$ که در تکرار k ام محاسبه می‌شود به $\text{int} S^{k-1}$ تعلق دارد. در الگوریتم داریم $S^k := S^{k-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, D(u^k, \lambda^k)) \geq 0\}$ و طبق قضیه ۱.۱.۳، $y^k \in \mathcal{F}$ یک وجه P است به‌طوری‌که $\mathcal{F} := \{y \in P; \varphi(y, D(u^k, \lambda^k)) = 0\}$ بنابراین $\mathcal{F} \subseteq \text{bd}(S^k)$. لذا y^{k+1} به وجه دیگر P تعلق دارد (چون $y^{k+1} \in \text{int} S^k$ و $y^{k+1} \notin \mathcal{F}$)، از طرفی P چندوجهی است بنابراین تعداد وجه‌ها متناهی است. در نتیجه مراحل الگوریتم متناهی است. $\square$

مثال ۶.۱.۳. مساله (PR) را با توجه به اطلاعات زیر را در نظر بگیرید:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

مساله اولیه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

شکل ۲.۳: S^1 در مثال ۶.۱.۳

$$\begin{aligned}
 & \min (y_1, y_2) \\
 & \text{s.t.} \quad 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & \quad \quad y_1 + 2y_2 \geq 2 \\
 & \quad \quad 3y_1 + 3y_2 \geq 4 \\
 & \quad \quad y_1 \geq 0 \\
 & \quad \quad y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

با انتخاب $\hat{p} = (1, 1)^T$ به عنوان نقطه درونی $\mathcal{P}$ و بنابه تعریف نقطه ایده‌آل $y^I = (0, 0)^T$ ، الگوریتم را ادامه می‌دهیم. اکنون قرار می‌دهیم

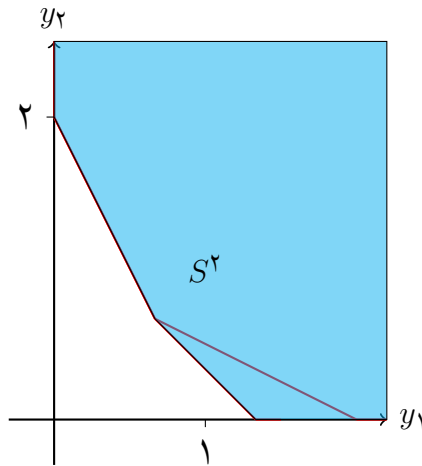
$$S^\circ = \{y^I\} + \mathbb{R}_{\geq}^2 = \mathbb{R}_{\geq}^2,$$

قرار می‌دهیم $k = 1$ و به گام بعد الگوریتم می‌رویم. در این مرحله قرار می‌دهیم $s^1 = (0, 0)$. بنابراین α^1 را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$y^1 = \alpha^1 s^1 + (1 - \alpha^1) \hat{p} \in \min_{\mathbb{R}_{\geq}^2} \mathcal{P}.$$

با توجه به این که $\alpha^1 = \frac{1}{3}$ را از رابطه ۱.۳ به دست می‌آوریم، لذا $y^1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. اکنون مساله برنامه‌ریزی خطی $D_2(y^1)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \max 2u_1 + 2u_2 + 4u_3 - \frac{2}{3}\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2 \\
 & \text{s.t.} \quad 2u_1 + u_2 + 3u_3 + u_4 - \lambda_1 = 0 \\
 & \quad \quad u_1 + 2u_2 + 3u_3 + u_5 - \lambda_2 = 0 \\
 & \quad \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\
 & \quad \quad (u, \lambda) \geq 0
 \end{aligned}$$

شکل ۳.۳: S^2 در مثال ۶.۱.۳

جواب این مساله عبارت است از

$$(u^1, \lambda^1) = (\circ, \circ, \frac{1}{6}, \circ, \circ, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T.$$

بنابراین با توجه به این که $D(u^1, \lambda^1) = (\lambda_1, b^T u)^T = (\frac{1}{4}, \frac{2}{3})^T$ و $D(u, \lambda)$ رأس $\mathcal{K}$ -بیشینه D است، از تابع جفت‌ساز استفاده کرده $3y_1 + 3y_2 = 4$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$S^1 := S^\circ \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y, D(u^1, \lambda^1)) \geq \circ\},$$

در نتیجه

$$S^1 := S^\circ \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : 3y_1 + 3y_2 \geq 4\}.$$

قرار می‌دهیم $k = 2$ و به گام بعد می‌رویم. در این مرحله قرار می‌دهیم $s^2 = (\circ, \frac{4}{3})$. بنابراین $\alpha^2 = \frac{3}{5}$ را از رابطه (۱.۳) به دست می‌آوریم که

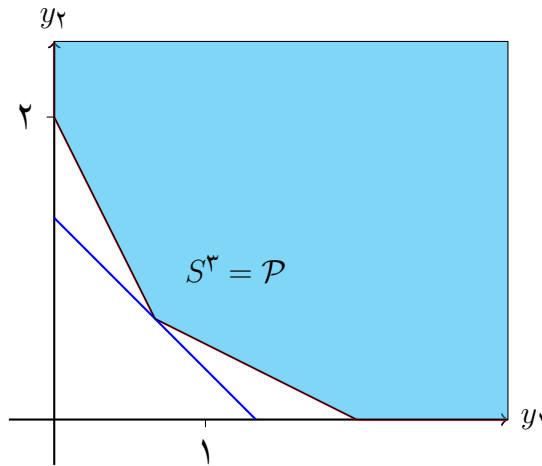
$$y^2 = \alpha^2 s^2 + (1 - \alpha^2) \hat{p} \in \text{wmin}_{\mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{P}.$$

که این معادله $\mathcal{P}$ ، را در نقطه $y^2 = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ قطع می‌کند. اکنون مساله برنامه‌ریزی خطی $D_2(y^2)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2u_1 + 2u_2 + 4u_3 - \frac{2}{5}\lambda_1 - \frac{6}{5}\lambda_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2u_1 + u_2 + 3u_3 + u_4 - \lambda_1 = \circ \\ & u_1 + 2u_2 + 3u_3 + u_5 - \lambda_2 = \circ \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & (u, \lambda) \geq \circ \end{aligned}$$

جواب این مساله عبارت است از

$$(u^2, \lambda^2) = (\frac{1}{4}, \circ, \circ, \circ, \circ, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T.$$

شکل ۴.۳: S^3 در مثال ۶.۱.۳

بنابراین $D(u^2, \lambda^2) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ رأس $\mathcal{K}$ -بیشینه D است و خط $2y_1 + y_2 = 2$ را می‌یابیم که ابروجه غیرتسلطی $\mathcal{P}$ است. در این مرحله داریم

$$S^2 := S^1 \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : 2y_1 + y_2 \geq 2\}.$$

قرار می‌دهیم $k = 3$ و به گام بعد می‌رویم. با توجه به $s^3 = (\frac{4}{3}, 0)$ و نقطه $\hat{p} = (1, 1) \in \text{int}P$ مانند قبل از رابطه (۱.۳)، $\alpha^3 = \frac{3}{5}$ را به دست می‌آوریم و در نتیجه نقطه $y^3 = (\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$ را به دست می‌آوریم. بنابراین مساله برنامه‌ریزی خطی $D_2(y^3)$ را به فرم زیر داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2u_1 + 2u_2 + 4u_3 - \frac{6}{5}\lambda_1 - \frac{2}{5}\lambda_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2u_1 + u_2 + 3u_3 + u_4 - \lambda_1 = 0 \\ & u_1 + 2u_2 + 3u_3 + u_5 - \lambda_2 = 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & (u, \lambda) \geq 0 \end{aligned}$$

که جواب آن عبارت است از:

$$(u^3, \lambda^3) = (\frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T.$$

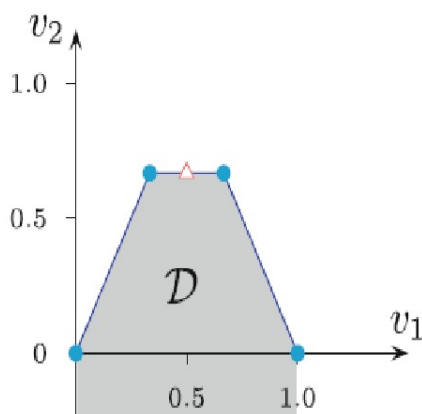
در نتیجه $D(u^3, \lambda^3) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ را به دست می‌آوریم. از رابطه $\varphi(y, D(u^3, \lambda^3)) = 0$ داریم

$$y_1 + 2y_2 = 2$$

اکنون نتیجه می‌گیریم یک ابروجه دیگر $\mathcal{P}$ است. بنابراین

$$S^3 := S^2 \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + 2y_2 \geq 2\} = \mathcal{P}.$$

رئوس S^3 همان رئوس $\mathcal{P}$ هستند ($\text{vert}S^3 = \mathcal{P}$)، بنابراین الگوریتم پایان می‌یابد.



شکل ۵.۳: D و نقطه‌ای در رابطه با تکرار ابروجه

الگوریتم ۴.۱.۳ نامعادلات تباهیده P را مشخص می‌کند. در این مثال همان گونه که در شکل ۴.۳ مشاهده می‌شود ابروجه $3y_1 + 3y_2 = 4$ نامعادله تباهیده P است که فقط در نقطه $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ با P اشتراک دارد، متناظر با این نامعادله نقطه $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ است که در D نقطه رأسی نیست.

۲.۳ دوگان الگوریتم بنسون

در این بخش برای الگوریتم بنسون، یک الگوریتم دوگان ارائه می‌دهیم. توسط الگوریتم دوگان، D را مشخص می‌کنیم، سپس با استفاده از قضیه دوگان هندسی می‌توانیم P را به دست آوریم. مانند بخش قبل فرض می‌کنیم $\mathcal{X}$ در مساله (PR) مجموعه شدنی و ناتهی است و P از پایین کران‌دار باشد. در ابتدای الگوریتم یک مجموعه چندوجهی p -بعدی،

$$\mathcal{S}^\circ = \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \varphi(Px^\circ, \nu) \geq 0\}$$

می‌سازیم به طوری که $D \subseteq \mathcal{S}^\circ$ باشد. فرض کنید $\hat{d}$ یک نقطه درونی D است و نقطه x° جواب بهینه $(P_1(\hat{d}))$ باشد در هر تکرار رأس s^k از $\mathcal{S}^{k-1}$ را انتخاب می‌کنیم که در D نیست و با حل مساله برنامه‌ریزی خطی $(P_1(\nu^k))$ ، یک ابرصفحه حائل برای D می‌سازیم که در آن ν^k نقطه مرزی D است، که روی پاره‌خط واصل s^k و نقطه درونی $\hat{d}$ از D قرار دارد. اشتراک $\mathcal{S}^{k-1}$ با نیم‌فضای حاصل از ابرصفحه D ، $\mathcal{S}^k$ را ایجاد می‌کند زمانی الگوریتم پایان می‌یابد که $\mathcal{S}^{k-1} = D$.

در الگوریتم دوگان، $(P_1(\nu))$ همان نقش $(D_2(y))$ در الگوریتم ۴.۱.۳ را دارد که ابرصفحه حائل را محاسبه می‌کند.

در این جا قضیه‌هایی همانند قضیه‌های ۱.۱.۳ و ۳.۱.۳ برای الگوریتم دوگان می‌آوریم. قضیه ۱.۲.۳ گام اصلی الگوریتم را توجیه می‌کند، این قضیه نشان می‌دهد اگر $\bar{\nu}$ یک نقطه $\mathcal{K}$ -بیشینه D باشد، جواب بهینه $(P_1(\bar{\nu}))$ ابرصفحه حائل D شامل $\bar{\nu}$ را ایجاد می‌کند.

قضیه ۱.۲.۳. [۱۴]. فرض کنید $\bar{\nu} \in \max_{\mathcal{K}} \mathcal{D}$ ، آنگاه برای هر جواب $\bar{x}$ از $\mathcal{H}^*(P\bar{x})$ ، $(P_1(\bar{\nu}))$ ابرصفحه حائل $\mathcal{D}$ با $\bar{\nu} \in \mathcal{H}^*(P\bar{x})$ است.

برهان. فرض کنید $\nu \in \mathcal{D}$ یعنی، u وجود دارد به طوری که $(u, \lambda(\nu)) \in \mathcal{U}$ و $\nu_p \leq b^T u$. از رابطه دوگان ضعیف بین $(P_1(\nu))$ و $(D_1(\nu))$ داریم، $\lambda(\nu)^T P\bar{x} \geq b^T u \geq \nu_p$ ، یا به طور معادل $\varphi(P\bar{x}, \nu) \geq 0$. برای $\bar{\nu} \in \max_{\mathcal{K}} \mathcal{D}$ به طور مشابه جواب بهینه $\bar{u}$ برای $(D_1(\bar{\nu}))$ را به دست می آوریم و از دوگان قوی بین $(P_1(\nu))$ و $(D_1(\nu))$ داریم، $\varphi(P\bar{x}, \bar{\nu}) = 0$. بنابراین از تعریف ابرصفحه حائل $\mathcal{H}^*(P\bar{x}) = \{\nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(P\bar{x}, \nu) = 0\}$

□

نتیجه مورد نظر حاصل می شود.

قضیه زیر نشان می دهد که همه رئوس $\mathcal{D}$ ، $\mathcal{K}$ -بیشینه هستند.

قضیه ۲.۲.۳. [۱۴]. هر رأس $\mathcal{D}$ ، $\mathcal{K}$ -بیشینه است.

برهان. فرض کنید رأس $\bar{\nu} \in \mathcal{D}$ وجود داشته باشد که $\mathcal{K}$ -بیشینه نباشد، آنگاه وجود دارد $\nu \neq \bar{\nu}$ که $\nu \in (\{\bar{\nu}\} + \mathcal{K}) \cap \mathcal{D}$ می توانیم $\bar{\nu}$ را به صورت

$$\bar{\nu} = \frac{1}{p}\nu + \frac{1}{p}(\bar{\nu} - (\nu - \bar{\nu}))$$

بنویسیم به طوری که $\nu \in \mathcal{D}$ و $(\bar{\nu} - (\nu - \bar{\nu})) \in \mathcal{D}$ که برابر با $\bar{\nu}$ نیستند، که این با راسی بودن $\bar{\nu}$ در تناقض است.

□

قضیه زیر نشان می دهد جهت های راسی چندوجهی که $\mathcal{D}$ را از بیرون تقریب می زنند یکسانند که ما آن را با $(-1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^p$ نمایش می دهیم. در الگوریتم ۴.۲.۳ چندوجهی که $\mathcal{D}$ را از بیرون تقریب می زند می تواند توسط تعداد متناهی نقطه (راسی) نمایش داده شود، چون جهت های (راسی) همواره یکسانند، آن ها را $-e^p$ در نظر می گیریم.

قضیه ۳.۲.۳. [۱۴]. فرض کنید $y \in \mathbb{R}^p$ و مجموعه $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^p$ یک چندوجهی محدب باشد که

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \varphi(y, \nu) \geq 0\}.$$

فرض کنید ε مجموعه نقاط راسی از $\mathcal{S}$ باشد، داریم:

$$\mathcal{S} = \text{conv}(\varepsilon - \mathcal{K}).$$

برهان. فرض کنید $\mathcal{W} := \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \varphi(y, \nu) \geq 0\}$. در این صورت $\nu \in \mathcal{W}$ اگر و تنها اگر

$$\lambda(\nu) \geq 0 \Rightarrow \nu_1, \dots, \nu_{p-1} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i \leq 1$$

$$\varphi(y, \nu) \geq 0 \Rightarrow \lambda^*(y)^T \nu \geq -y_p.$$

که مولفه آخر $\lambda^*(y)$ ، -1 است. می توان نتیجه گرفت $\mathcal{W}_\infty = -\mathcal{K}$. چون $\mathcal{S}$ بسته و محدب است و $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{W}$ و طبق تعریف $\mathcal{D}$ و تعریف ۲.۰.۲.۱، داریم:

$$-\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}_\infty \subseteq \mathcal{S}_\infty \subseteq -\mathcal{K}$$

بنابراین $S_\infty = -\mathcal{K}$. بنابه قضایای ۱۸.۵ و ۱۹.۵ از [۳۵] اثبات کامل می‌شود. $\square$

الگوریتم ۴.۲.۳. (دوگان الگوریتم تقریب بیرونی بنسون)

ارزش‌دهی اولیه ($k = 0$)

i۱. $\hat{d} \in \text{int}\mathcal{D}$ را انتخاب کنید.

i۲. جواب بهینه x° از $(P_1(\hat{d}))$ را محاسبه کنید.

i۳. مجموعه $\mathcal{S}^\circ$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\mathcal{S}^\circ := \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \quad \varphi(Px^\circ, \nu) \geq 0\}, \quad k = 1$$

گام‌های تکرار ($k \geq 1$).

k۱. اگر $\text{vert}\mathcal{S}^{k-1} \subseteq \mathcal{D}$ الگوریتم متوقف شود. در غیر این صورت یک رأس s^k از $\mathcal{S}^{k-1}$ انتخاب کنید به طوری که $s^k \notin \mathcal{D}$.

k۲. $\alpha^k \in (0, 1)$ را به طوری که

$$\nu^k := \alpha^k s^k + (1 - \alpha^k) \hat{d} \in \max_{\mathcal{K}} \mathcal{D}$$

محاسبه کنید.

k۳. یک جواب بهینه x^k از $(P_1(\nu^k))$ را محاسبه کنید.

k۴. مجموعه $\mathcal{S}^k$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\mathcal{S}^k := \mathcal{S}^{k-1} \cap \{\nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(Px^k, \nu) \geq 0\}.$$

k۵. قرار دهید $k = k + 1$ ، به $(k+1)$ بروید.

جزئیات الگوریتم:

i۱. نشان می‌دهیم $\text{int}\mathcal{D} \neq \emptyset$. چون طبق فرض $\mathcal{X} \neq \emptyset$ و $\mathcal{P}$ ، از پایین کران‌دار است،

$(P_1(\nu))$ برای هر $\nu \in \mathbb{R}^p$ با $\lambda(\nu) \geq 0$ یک جواب بهینه دارد و طبق رابطه دوگانی $D_1(\nu)$

جواب بهینه دارد. مقدار بهینه $(D_1(e^i))$ را با γ^i نمایش می‌دهیم. به علاوه تعریف می‌کنیم

$\gamma = \min \{\gamma^i : i \in \{1, \dots, p\}\}$. آنگاه γ یک کران پایین برای مقدارهای بهینه مساله

$(D_1(\nu))$ ، با $\lambda(\nu) \geq 0$ است. از تعریف $\mathcal{D}$ داریم:

$$\mathcal{D} = \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, A^T u = P^T \lambda(\nu) \quad \text{and} \quad \nu_p \leq b^T u \quad \text{for some} \quad u \geq 0\}.$$

بنابراین

$$\{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \nu_p \leq \gamma\} \subseteq \mathcal{D}$$

که نشان می‌دهد $\text{int}\mathcal{D} \neq \emptyset$ است. یک انتخاب ممکن برای نقطه $\hat{d} \in \text{int}\mathcal{D}$ ، عبارت است از

$$\hat{d} = (\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}, \gamma - 1)^T.$$

چون در تعریفی که بالا برای $\mathcal{D}$ نوشته شده است صدق می‌کند.

$i2$. چون $\mathcal{X} \neq \emptyset$ و $\mathcal{P}$ از پایین کران دار است و $\lambda(\hat{d}) \geq 0$ لذا $(P_1(\hat{d}))$ جواب بهینه دارد.

$i3$. اثبات قضیه ۱.۲.۳ و $\nu \in D$ نشان می دهد $\varphi(Px^\circ, \nu) \geq 0$ و مشاهده می کنیم $\lambda(\nu) \geq 0$ و لذا نتیجه می گیریم $D \subseteq S^\circ$.

$k1$. مقدار بهینه μ از $(P_1(s^k))$ را محاسبه می کنیم تا بررسی کنیم که $s^k \in D$ یا خیر. بنابراین $s^k \in D$ اگر و تنها اگر $s_p^k \leq \mu$.

$k2$. مساله برنامه ریزی خطی زیر را حل می کنیم

$$\alpha^k := \max \{ \alpha : (u, \lambda) \in \mathcal{U}, \alpha s^k + (1 - \alpha) \hat{d} = D(u, \lambda) \} \quad (2.3)$$

اکنون نشان می دهیم که مساله (۲.۳) جواب بهینه دارد. اگر $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد به طوری که $\hat{d} = D(\bar{u}, \bar{\lambda})$ آنگاه $(\bar{u}, \bar{\lambda}, 0)$ برای مساله (۲.۳) شدنی است در غیر این صورت، داریم $\hat{d} \notin D(\mathcal{U})$. فرض کنید w^i بردار واحد i ام باشد که مولفه آخر آن با γ^i تعویض می شود. بنابراین $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ وجود دارد (چون اگر $\alpha = 1$ آنگاه $s^k = D(u, \lambda)$ اما $s^k \notin D$ بنابراین تناقض دارد و اگر $\alpha = 0$ در این صورت $\hat{d} = D(u, \lambda)$ که با $\hat{d} \in \text{int} D$ تناقض دارد) به طوری که

$$\bar{\alpha} s^k + (1 - \bar{\alpha}) \hat{d} \in \text{conv}\{w^1, \dots, w^p\} \subseteq D(\mathcal{U})$$

یعنی وجود دارد $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \in \mathcal{U}$ که $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$ برای مساله (۲.۳) شدنی است به علاوه، مساله (۲.۳) کران دار است.

$k3$. چون $\mathcal{X} \neq \emptyset$ و $P(\mathcal{X})$ از پایین $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کران دار است لذا $(P_1(\nu^k))$ جواب بهینه دارد.

$k4$. مشابه با (i3)، نتیجه می گیریم $D \subseteq S^k$.

نتایج الگوریتم:

$r1$. از $(k1)$ نتیجه می گیریم $\text{vert} S^{k-1} \subseteq D$. از قضیه ۳.۲.۳ نتیجه می گیریم

$$S^{k-1} = \text{conv}(\text{vert} S^{k-1} - \mathcal{K}) \subseteq D$$

همان گونه که در (k4) نشان داده شده است، داریم $D \subseteq S^{k-1}$. بنابراین داریم $D = S^{k-1}$. لذا مجموعه رأس های $\mathcal{K}$ -بیشینه D ، $\text{vert} S^{k-1}$ است.

$r2$. بنابه نتیجه ۱.۱.۲، $\mathcal{F}$ ابروجه $(p-1)$ -بعدی غیر تسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است اگر و فقط اگر رأس $\mathcal{K}$ -بیشینه ν از D موجود باشد به طوری که $\mathcal{F} = \mathcal{H}(\nu) \cap \mathcal{P}$. بنابراین، یک ابرصفحه $\mathcal{H}(\nu)$ حائل $\mathcal{P}$ در یک ابروجه است اگر و فقط اگر ν یک رأس $\mathcal{K}$ -بیشینه D باشد، بنابراین مجموعه

$$\{ \nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) \geq 0 \text{ for all } \nu \in \text{vert} S^{k-1} \}$$

توسط نمایش نامعادله غیرتابهیده $\mathcal{P}$ مشخص می شود.

۳. فرض کنید y رأس $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه $\mathcal{P}$ باشد، بنابه نتیجه ۱۲.۱.۲، $\mathcal{F}^* := \mathcal{H}^*(y) \cap \mathcal{D}$ یک ابروجه $(p-1)$ -بعدی $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{D}$ است. چون $\mathcal{S}^{k-1} = \mathcal{D}$ و بنابه ساختار $\mathcal{S}^{k-1}$ ، برای هر ابروجه $\mathcal{K}$ -بیشینه $\mathcal{F}^*$ از $\mathcal{D}$ ، $i \in \{0, \dots, k-1\}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}^*(Px^i) \cap \mathcal{D}$. بنابه نتیجه ۱۲.۱.۲ داریم $Px^i = y$ و همه رأس‌های (غیرتباهیده) $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه در مجموعه $\mathcal{Y} := \{Px^0, \dots, Px^{k-1}\}$

قرار دارند.

۴. با توجه به مجموعه رأس‌های $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کمینه $\mathcal{P}$ در (۳) و قضیه دوگان هندسی، مجموعه $\{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \varphi(y, \nu) \geq 0, \text{ for all } y \in \mathcal{Y}\}$

نمایش نامعادله‌ای $\mathcal{D}$ است که ممکن است نامعادله تباهیده باشد.

ملاحظه ۵.۲.۳. [۱۴]. فرض کنید $\hat{d} \in \text{int} \mathcal{D}$ به طوری که $\hat{d}_p \leq \gamma$. مساله ۲.۳ معادل با مساله زیر است که $p+1$ متغیر و $p+1$ محدودیت کمتر دارد:

$$\alpha^k := \max \left\{ \frac{b^T u - \hat{d}_p}{s_p^k - \hat{d}_p} : u \geq 0, \tilde{A}u = \tilde{b} \right\} \quad (3.3)$$

که در آن

$$\tilde{b} := P^T(s_p^k \lambda(\hat{d}) - \hat{d}_p \lambda(s^k)), \quad \tilde{A} := (s_p^k - \hat{d}_p)A^T + P^T(\lambda(\hat{d}) - \lambda(s^k))b^T$$

برای این که ثابت کنیم دو مساله با هم معادلند، فرض کنید α جواب بهینه مساله (۲.۳) باشد در این صورت در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\alpha s^k + (1 - \alpha)\hat{d} = D(u, \lambda).$$

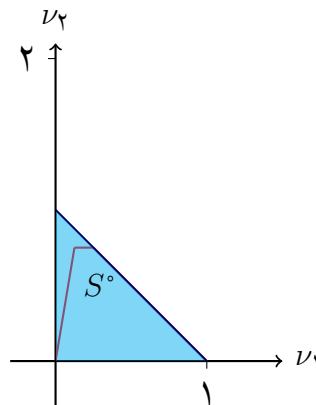
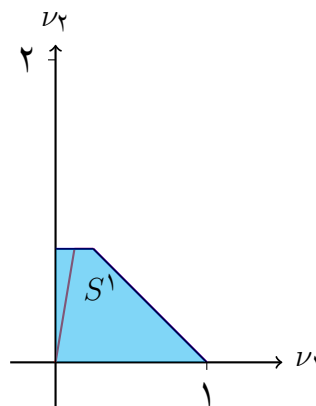
بنابه این که هر عنصری در محدودیت مساله (۲.۳) صدق کند در محدودیت‌های مساله (۳.۳) نیز صدق می‌کند، از طرفی در ابتدای فصل دوم بیان کردیم $D(u, \lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, b^T u)$ با توجه به تعریف $\mathcal{U}$ یک نقطه $\mathcal{K}$ -بیشینه $D(\mathcal{U})$ است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \alpha s_p^k + (1 - \alpha)\hat{d}_p = b^T u &\iff \alpha s_p^k + \hat{d}_p - \alpha \hat{d}_p = b^T u \\ &\iff \alpha(s_p^k - \hat{d}_p) = b^T u - \hat{d}_p \\ &\iff \alpha = \frac{b^T u - \hat{d}_p}{s_p^k - \hat{d}_p}. \end{aligned}$$

بنابراین جواب بهینه مساله (۲.۳) و مساله (۳.۳) با هم معادلند.

مثال ۶.۲.۳. مساله (PR) را با اطلاعات زیر در نظر بگیرید.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 21 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \\ -7 & -42 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ -1 \\ -39 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

شکل ۶.۳: S^0 در مثال ۶.۲.۳شکل ۷.۳: S^1 در مثال ۶.۲.۳

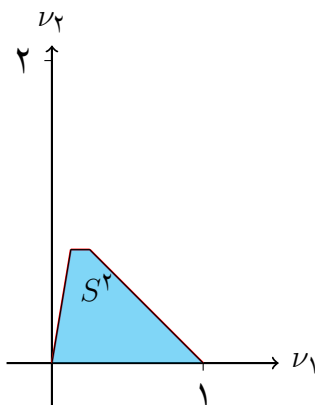
ابتدا قرار می‌دهیم $k = 0$ و $\hat{d} = (\frac{1}{4}, 0)$ و مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} P_1(\hat{d}) : \min \quad & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 7x_1 + 21x_2 + 9x_3 \geq 30 \\ & -x_3 \geq -1 \\ & -7x_1 - 42x_2 + 3x_3 \geq -39 \\ & x_1 + 7x_2 \geq 6 \end{aligned}$$

از این مساله جواب $x^0 = (0, 1, 1)$ را به دست می‌آوریم. داریم $\lambda(\hat{d}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$ و

$$S^0 = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : \lambda(\nu) \geq 0, \varphi(Px^0, \nu) \geq 0\} = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq 1, \nu_2 \leq 1 - \nu_1\}.$$

در نتیجه $\nu_1 + \nu_2 = 1$ ابرصفحه حائل D است، پس $y = Px^0 = (0, 1)$ نقطه رأسی $\mathcal{P}$ است. قرار می‌دهیم $k = 1$ و به مرحله بعد می‌رویم. در این مرحله $s^1 = (0, 1)^t \notin D$ و $\hat{d} = (\frac{1}{4}, 0)$ است. با حل مساله ۲.۳ نتیجه می‌گیریم $\alpha^1 = \frac{3}{4}$ و در نتیجه داریم $\nu^1 = (\frac{1}{8}, \frac{3}{4})$. اکنون مساله $P_1(\nu^1)$

شکل ۸.۳: S^2 در مثال ۶.۲.۳

را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{8}x_1 + \frac{7}{8}x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 7x_1 + 21x_2 + 9x_3 \geq 30 \\ & -x_3 \geq -1 \\ & -7x_1 - 42x_2 + 3x_3 \geq -39 \\ & x_1 + 7x_2 \geq 6 \end{aligned}$$

جواب $x^1 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1)$ را به دست می‌آوریم و داریم $Px^1 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ ، بنابراین خواهیم داشت

$$S^1 := S^\circ \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : \varphi(Px^1, \nu) \geq 0\} = S^\circ \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : \nu_2 \leq \frac{3}{4}\}$$

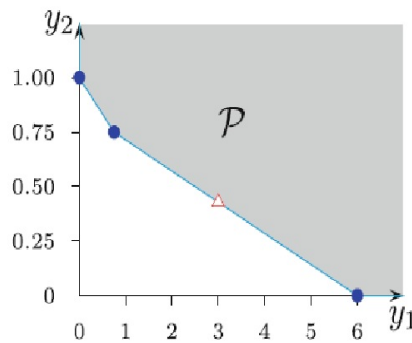
در نتیجه ابرصفحه $\nu_2 = \frac{3}{4}$ ، ابرصفحه حائل D است و $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ رأس غیرتسلطی P است که در شکل‌های ۷.۳ و ۹.۳ مشاهده می‌شوند.

از $k = 2$ در نظر می‌گیریم و به گام بعد می‌رویم. در این گام داریم $s^2 = (0, \frac{3}{4})$ و $\hat{d} = (\frac{1}{4}, 0)$ ، از معادله ۲.۳ به دست می‌آوریم $\alpha^2 = \frac{4}{5}$ ، لذا $\nu^2 = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$ و در نتیجه $\lambda(\nu^2) = (\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$. مساله $P_1(\nu^2)$ را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{5}x_1 + \frac{9}{5}x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 7x_1 + 21x_2 + 9x_3 \geq 30 \\ & -x_3 \geq -1 \\ & -7x_1 - 42x_2 + 3x_3 \geq -39 \\ & x_1 + 7x_2 \geq 6 \end{aligned}$$

از مساله فوق جواب $x^2 = (6, 0, 1)^T$ را داریم، بنابراین

$$S^2 = S^1 \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 6\nu_1 - \nu_2 \geq 0\}$$



شکل ۹.۳: P و نقطه داخلی از یک ابروجه

که $\nu_1 - \nu_2 = 0$ ابرصفحه حائل D است و $(\epsilon, 0)$ رأس غیرتسلطی P است. که در شکل‌های ۸.۳ و ۹.۳ مشاهده می‌شوند. نقاط رأسی S^2 با D یکی شد، در نتیجه الگوریتم پایان می‌یابد.

در نهایت نشان می‌دهیم الگوریتم بعد از تعداد متناهی گام به پایان می‌رسد.

قضیه ۷.۲.۳. [۱۴]. دوگان الگوریتم تقریب بیرونی بنسون متناهی است.

برهان. چون $\hat{d} \in \text{int}D$ ، نقطه $\nu^k \in D$ که در تکرار k ام محاسبه می‌شود به $\text{int}S^{k-1}$ تعلق دارد. داریم

$$S^k := S^{k-1} \cap \{\nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(Px^k, \nu) \geq 0\}$$

و توسط قضیه ۱.۲.۳، داریم $\mathcal{F} := \{\nu \in D : \varphi(Px^k, \nu) = 0\}$ وجه D است و $\nu^k \in \mathcal{F}$ ، که $\mathcal{F} \subseteq \text{bd}(S^k)$. یعنی برای تکرار بعدی داریم $\nu^{k+1} \notin \mathcal{F}$ (چون $\nu^{k+1} \in \text{int}(S^k)$) و بنابراین ν^{k+1} به ابروجه دیگر D تعلق دارد. چون D یک چندوجهی است، تعداد متناهی ابروجه دارد لذا الگوریتم متناهی است. $\square$

با توجه به الگوریتم‌هایی که بیان شد، الگوریتم‌ها ابروجه‌های مجموعه‌های شدنی اولیه P و دوگان D را محاسبه می‌کنند. تعداد ابروجه‌ها با مدت زمان محاسبات مرتبط است. اگر ابروجه‌های مجموعه شدنی دوگان کمتر از ابروجه‌های اولیه باشند، دوگان الگوریتم بنسون مدت زمان محاسبات کمتری نیاز دارد و سریع‌تر است. در فصل بعد با اعمال تغییراتی در الگوریتم بنسون، تقریب دوگان الگوریتم بنسون را بیان می‌کنیم و مجموعه نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف را به دست می‌آوریم.

فصل ۴

جواب‌های تقریبا کارا با کمک دوگان الگوریتم بنسون

۱.۴ حل مساله اولیه و دوگان

همانند فصل‌های قبل فرض می‌کنیم $\mathcal{X}$ کران‌دار است و مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه زیر را در نظر می‌گیریم

$$(1.4) \quad \min_{\mathbb{R}^p} \{Px : x \in \mathcal{X}\}.$$

برای حل مساله فوق، بنسون [۲] الگوریتم تقریب بیرونی را پیشنهاد می‌کند، که روی فضای هدف کار می‌کند. بنسون مجموعه

$$(2.4) \quad \mathcal{Y}' = \{y \in \mathbb{R}^p : Px \leq y \leq \hat{y} \text{ for some } x \in \mathcal{X}\}$$

را تعریف می‌کند که در آن $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\hat{y} > y^{AI}$ ، که بردار $y^{AI} \in \mathbb{R}^p$ همان بردار ضدایده‌آل برای مساله ۱.۴ است.

طبق قضیه ۱.۱.۴ به‌جای این‌که روی مجموعه $\mathcal{Y}$ کار کنیم، الگوریتم تقریب بیرونی بنسون $\mathcal{Y}'$ را بررسی می‌کند.

قضیه ۱.۱.۴. [۲]. مجموعه $\mathcal{Y}' \subseteq \mathbb{R}^p$ یک چندوجهی کران‌دار ناتهی از بعد p است و $\mathcal{Y}_N = \mathcal{Y}'_N$.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $\mathcal{Y}$ چندوجهی کران‌دار و ناتهی با بعد p است. با توجه به این‌که $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}'$ و $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ و کران‌دار است، بنابراین $\mathcal{Y}' \neq \emptyset$. توجه کنید $\mathcal{Y}'$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$(3.4) \quad \mathcal{Y}' = P_1 \cap (\mathcal{Y}_E + P_2)$$

که $P_2 = \{z \in \mathbb{R}^p : z \geq 0\}$ و $P_1 = \{y \in \mathbb{R}^p : y \leq \hat{y}\}$ و $\mathcal{Y}_E = \{Px : x \in \mathcal{X}_E\}$ مجموعه‌های P_1 و P_2 و $\mathcal{Y}_E$ چندوجهی هستند. با توجه به رابطه ۳.۴ و تعریف چندوجهی و این‌که اشتراک چندوجهی، یک چندوجهی است، داریم $\mathcal{Y}'$ مجموعه چندوجهی است. چون برای همه $x \in \mathcal{X}$ ،

$\hat{y} > Px$ بنابراین درون $\mathcal{Y}$ ناتهی است. چون

$$p = \dim \mathcal{Y} \leq \dim \mathcal{Y}' \leq p$$

و درون $\mathcal{Y}$ ناتهی است، بنابراین $\dim \mathcal{Y}' = p$. اکنون ثابت می‌کنیم $\mathcal{Y}'_N = \mathcal{Y}_N$. فرض کنید $y \in \mathcal{Y}'_N$ اما $y \notin \mathcal{Y}_N$ ، طبق تعریف $\mathcal{Y} = \{Px : x \in \mathcal{X}\}$ ، $x' \in \mathcal{X}$ وجود دارد که $y' = Px'$ و $y' \leq y$ و $Px' = y'$ داریم

$$Px' = y' \leq y < \hat{y}$$

یعنی $y' \in \mathcal{Y}'$ و $y' \leq y$ ، این با $y \in \mathcal{Y}'_N$ تناقض دارد پس $y \in \mathcal{Y}_N$. اکنون فرض کنید $y \in \mathcal{Y}_N$ ، پس $x \in \mathcal{X}_E$ وجود دارد که $y = Px$. فرض کنید $y \notin \mathcal{Y}'_N$ ، بنابراین $y' \in \mathcal{Y}'_N$ وجود دارد که $y' \leq y = Px$ و بنابه تعریف $\mathcal{Y}'$ داریم:

$$\exists x' \in \mathcal{X}, \quad Px' \leq y' \leq y = Px$$

□

این با فرض $y \in \mathcal{Y}_N$ تناقض دارد پس $y \in \mathcal{Y}'_N$.

در فصل قبل الگوریتم بنسون را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه که $\mathbb{R}^p_{\geq}$ -کران‌دار هستند توسعه دادیم. اکنون فرض کنید الگوریتم بنسون را برای $\mathcal{Y}'$ به جای $\mathcal{Y}$ انجام دادیم، بنابراین مانند قبل عمل می‌کنیم و $\mathcal{P}$ را به جای $\mathcal{Y}'$ پیدا می‌کنیم، توجه شود که $\mathcal{P}$ یک توسعه بی‌کران از $\mathcal{Y}'$ به صورت $\mathcal{P} = \mathcal{Y}' + \mathbb{R}^p_{\geq}$ است و داریم

$$\mathcal{Y}' = (\hat{y} - \mathbb{R}^p_{\geq}) \cap \mathcal{P}.$$

$\mathcal{P}$ و $\mathcal{Y}'$ و $\mathcal{Y}$ مجموعه‌های غیرتسلطی یکسان دارند.

طبق قضیه ۱۰.۲.۳ اگر $\bar{v} \in \max_{\mathcal{K}} \mathcal{D}$ ، آنگاه برای هر جواب $\bar{x}$ از مساله $(P, (\bar{v}))$ ، $\mathcal{H}^*(P\bar{x})$ یک ابرصفحه حائل $\mathcal{D}$ با $\bar{v} \in \mathcal{H}^*(P\bar{x})$ است.

الگوریتم ۴.۲.۳ که در فصل قبل مطرح شد را در نظر می‌گیریم. قضیه دوگان هندسی رابطه بین $\mathcal{P}$ و $\mathcal{D}$ ایجاد می‌کند. $\mathcal{P}$ دارای خاصیت $\mathcal{P} = \mathcal{P} + \mathbb{R}^p_{\geq}$ است در حالی که $\mathcal{D}$ دارای خاصیت $\mathcal{D} = \mathcal{D} - \mathcal{K}$ می‌باشد و تصویر $p - 1$ مولفه‌های اول آن، چندسقفی

$$\{t \in \mathbb{R}^{p-1}, t \geq 0, \sum_{i=1}^{p-1} t_i \leq 1\}$$

است. اکنون قضیه دوگان هندسی را برای مجموعه‌های چندوجهی محدب که دارای خواصی مانند خاصیت‌های $\mathcal{P}$ و $\mathcal{D}$ هستند به کار می‌بریم.

خاصیت ۲.۱.۴. [۴۰]. در این فصل، مجموعه‌های چندوجهی محدب $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^p$ با خاصیت $\mathcal{S} = \mathcal{S} - \mathcal{K}$ و تصویر $p - 1$ مولفه اول آن چندسقفی $\{t \in \mathbb{R}^p : t \geq 0, \sum_{i=1}^{p-1} t_i \leq 1\}$ است را در نظر می‌گیریم.

لم ۳.۱.۴. [۴۰]. برای $\mathcal{S}$ که خاصیت ۲.۱.۴ را دارا است، $\mathcal{S}_{\infty} = -\mathcal{K}$.

□

برهان. در قضیه ۳.۲.۳ اثبات شد.

تعريف ۴.۱.۴. [۴۰] برای یک مجموعه چندوجهی محدب $S \subseteq \mathbb{R}^p$ با خاصیت ۲.۱.۴ تعريف می‌کنیم

$$\mathcal{D}(S) = \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) \geq 0, \text{ for all } \nu \in \text{vert}(S)\}$$

که در آن

$$\varphi(y, \nu) = \sum_{i=1}^{p-1} y_i \nu_i + y_p \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i\right) - \nu_p.$$

قضيه ۵.۱.۴. [۴۰]. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^p$ دارای خاصیت ۲.۱.۴ باشد، آنگاه $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(S) + \mathbb{R}_{\geq}^p$.

برهان. واضح است که $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(S) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، بنابراین کافی است نشان دهیم
 $\mathcal{D}(S) + \mathbb{R}_{\geq}^p \subseteq \mathcal{D}(S)$.

فرض کنید $w + d \in \mathcal{D}(S) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ با $w \in \mathcal{D}(S)$ و $d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$. چون $w \in \mathcal{D}(S)$ ، برای هر $\nu \in \text{vert}(S)$ داریم $\varphi(w, \nu) \geq 0$ فرض کنید

$$\lambda(\nu) = (\nu_1, \dots, \nu_{p-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i)^T$$

داریم:

$$\begin{aligned} \varphi(w, \nu) + \langle d, \lambda(\nu) \rangle &= d_1 \nu_1 + \dots + d_{p-1} \nu_{p-1} - d_p \nu_1 - \dots - d_p \nu_{p-1} + d_p + w_1 \nu_1 \\ &\quad + \dots + w_{p-1} \nu_{p-1} + w_p - w_p \nu_1 - \dots - w_p \nu_{p-1} - \nu_p, \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \varphi(w + d, \nu) &= \sum_{i=1}^{p-1} (w + d)_i \nu_i + (w + d)_p \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i\right) - \nu_p = w_1 \nu_1 + \dots + w_{p-1} \nu_{p-1} \\ &\quad + d_1 \nu_1 + \dots + d_{p-1} \nu_{p-1} + w_p + d_p - w_p \nu_1 - \dots - w_p \nu_{p-1} - d_p \nu_1 \\ &\quad - \dots - d_p \nu_{p-1} - \nu_p. \end{aligned}$$

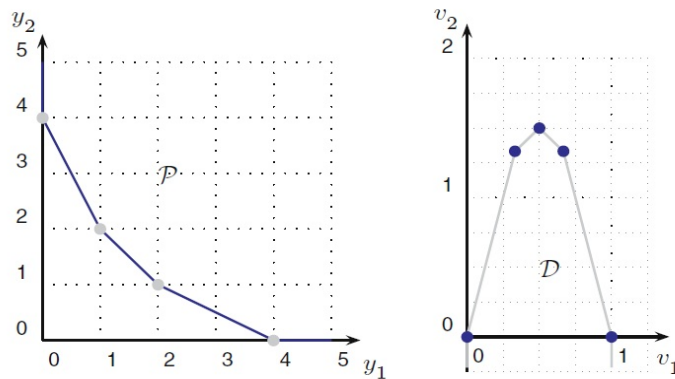
از دو رابطه فوق نتیجه می‌گیریم $\varphi(w + d, \nu) = \varphi(w, \nu) + \langle d, \lambda(\nu) \rangle$. چون $\lambda(\nu), d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ بنابراین $\langle d, \lambda(\nu) \rangle \geq 0$ از طرفی $\varphi(w, \nu) \geq 0$ لذا می‌توان نتیجه گرفت $\varphi(w + d, \nu) \geq 0$. بنابراین $w + d \in \mathcal{D}(S)$ و در نتیجه $\mathcal{D}(S) + \mathbb{R}_{\geq}^p \subseteq \mathcal{D}(S)$. $\square$

نتیجه ۶.۱.۴. [۴۰]. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^p$ دارای خاصیت ۲.۱.۴ باشد، قضیه ۱۰.۱.۲ برای $D = S$ و $\mathcal{P} = \mathcal{D}(S)$ برقرار می‌شود.

قضیه ۷.۱.۴. [۴۰]. فرض کنید S° و S' مجموعه‌های چندوجهی محدب با خاصیت ۲.۱.۴ باشند و $S' \subseteq S^\circ$ ، آنگاه

$$\mathcal{D}(S^\circ) \subseteq \mathcal{D}(S').$$

برهان. بنابه لم ۳.۱.۴، داریم $S_\infty' = S_\infty^\circ = -\mathcal{K}$ ، در نتیجه S° و S' فقط یک جهت دورشونده $d = -e^p = (0, \dots, 0, -1)$ دارند.

شکل ۱.۴: P و D برای مثال ۶.۱.۴

فرض کنید S° ، r رأس مانند $\nu^1, \dots, \nu^r$ دارد. نیاز داریم نشان دهیم برای $y \in D(S^\circ)$ ، یعنی به ازای هر y با $\nu^1, \dots, \nu^r$ ، داریم $\varphi(y, \nu) \geq 0$ ، $\nu = \nu^1, \dots, \nu^r$. فرض کنید ν^* رأسی از S^1 باشد، آنگاه چون $S^1 \subseteq S^\circ$ داریم $\nu^* \in S^\circ$ ، بنابراین قضیه نمایش برای ν^* بیان می‌کند که $\nu^* = \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu^i + \nu d$ با $\nu \geq 0$ ، $\alpha_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ و $d = -e^p$. حال $\varphi(y, \nu^*)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \varphi(y, \nu^*) &= \sum_{k=1}^{p-1} y_k \nu_k^* + y_p \left(1 - \sum_{k=1}^{p-1} \nu_k^*\right) - \nu_p^* = \sum_{k=1}^{p-1} y_k \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \nu_k^i + \nu d_k\right) \\ &\quad + y_p \left(1 - \sum_{k=1}^{p-1} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \nu_k^i + \nu d_k\right)\right) - \sum_{k=1}^r (\alpha_i \nu_p^i + \nu d_p) = \sum_{k=1}^{p-1} y_k \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu_k^i \\ &\quad + y_p \left(1 - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu_k^i - \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu_p^i + \sum_{k=1}^{p-1} y_k \nu d_k - y_p \sum_{k=1}^{p-1} \nu d_k\right) \\ &\quad - \nu d_p = \sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi(y, \nu^i) + 0 - 0 + \nu = \sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi(y, \nu^i) + \nu \end{aligned}$$

چون $\varphi(y, \nu^i) \geq 0$ و $\alpha \geq 0$ و $\nu \geq 0$ داریم $\varphi(y, \nu^*) \geq 0$. این یعنی، هر $y \in D(S^\circ)$ به $D(S^1)$ نیز تعلق دارد. بنابراین ثابت کردیم $D(S^\circ) \subseteq D(S^1)$. $\square$

برای الگوریتم دوگان بنسون، قضیه ۷.۱.۴ نشان می‌دهد که $D(S^k)$ با هر تکرار بزرگتر می‌شود و وقتی الگوریتم در تکرار k پایان یافت، داریم $D(S^{k-1}) = D(D) = P$. مثالی برای توضیح دادن الگوریتم دوگان بنسون ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم چگونه S^k و $D(S^k)$ با تکرار k تغییر می‌یابند.

مثال ۸.۱.۴. یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوهدفه را با اطلاعات زیر در نظر بگیرید.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D و P را در شکل ۱۰۴ مشاهده می‌کنید، ۴ رأس P عبارتند از:

$$(0, 4), (1, 2), (2, 1), (4, 0)$$

برای هر رأس با کمک تابع جفت‌ساز می‌توان ابروجه‌های D را به صورت زیر به دست آورد.

$$\varphi((0, 4), (\nu_1, \nu_2)) = 0 \times \nu_1 + 4(1 - \nu_1) - \nu_2 = 0 \Rightarrow 4\nu_1 + \nu_2 = 4$$

$$\varphi((1, 2), (\nu_1, \nu_2)) = \nu_1 + 2(1 - \nu_1) - \nu_2 = 0 \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 = 2$$

$$\varphi((2, 1), (\nu_1, \nu_2)) = 2\nu_1 + (1 - \nu_1) - \nu_2 = 0 \Rightarrow -\nu_1 + \nu_2 = 1$$

$$\varphi((4, 0), (\nu_1, \nu_2)) = 4\nu_1 + 0(1 - \nu_1) - \nu_2 = 0 \Rightarrow -4\nu_1 + \nu_2 = 0$$

و ابروجه‌های متناظر (ابرفه‌های حائل) D ، به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$-4\nu_1 + \nu_2 = 0, -\nu_1 + \nu_2 = 1, \nu_1 + \nu_2 = 2, 4\nu_1 + \nu_2 = 4.$$

۵ رأس D عبارتند از:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), (1, 0).$$

برای هر رأس با کمک تابع جفت‌ساز می‌توان ابروجه‌های P را به صورت زیر به دست آورد.

$$\varphi((y_1, y_2), \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{4}\right)) = \frac{1}{4}y_1 + y_2(1 - \frac{1}{4}) - \frac{4}{4} = 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 = 4$$

$$\varphi((y_1, y_2), (0, 0)) = 0 \times y_1 + y_2(1 - 0) - 0 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$\varphi((y_1, y_2), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)) = \frac{1}{2}y_1 + y_2(1 - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 3$$

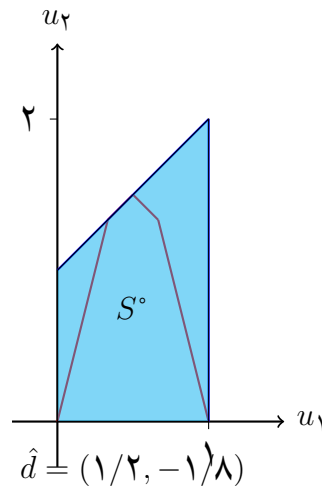
$$\varphi((y_1, y_2), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)) = \frac{3}{4}y_1 + y_2(1 - \frac{3}{4}) - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 = 4$$

$$\varphi((y_1, y_2), (1, 0)) = y_1 + y_2(1 - 1) - 0 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

بنابراین ابروجه‌های P عبارتند از:

$$y_1 = 0, 2y_1 + y_2 = 4, y_1 + y_2 = 3, y_1 + 2y_2 = 4, y_2 = 0.$$

با توجه به الگوریتم، در هر تکرار تغییرات S^k را نشان می‌دهیم. در هر تکرار k ، S^k کوچک می‌شود و در نهایت برابر با D می‌شود، الگوریتم پایان می‌یابد. ابتدا $\hat{d} = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ را در نظر می‌گیریم و مساله

شکل ۲.۴: تغییرات S°

زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 P_1(\hat{d}) : \min \quad & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\
 & x_1 + x_2 \geq 3 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

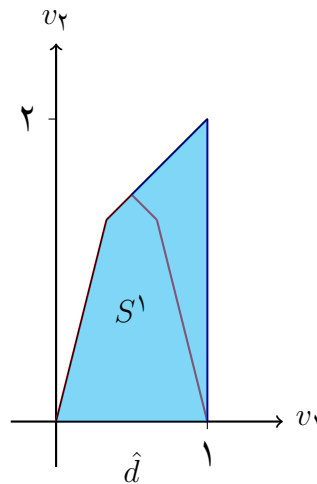
جواب این مساله $x^\circ = (2, 1)$ می‌باشد. با توجه به تعریف S^k که به صورت زیر است:

$$S^k := S^{k-1} \cap \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \varphi(Px^k, \nu) \geq 0\}$$

داریم:

$$S^\circ = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq 1, \nu_1 - \nu_2 + 1 \geq 0\}$$

در شکل ۲.۴، S° را مشاهده می‌کنید. رأس‌های ابتدایی که S° را پوشش می‌دهند، عبارتند از $(1, 2)$ و $(0, 1)$. قرار می‌دهیم $k = 1$ و با در نظر گرفتن $s^1 = (0, 1)$ و $\hat{d}$ ، مساله ۲.۳ در فصل قبل را حل می‌کنیم به دست می‌آوریم $\alpha^1 = \frac{17}{25}$ ، در نتیجه با توجه به خطی که از دو نقطه s^1 و $\hat{d}$ می‌گذرد نقطه مرزی

شکل ۳.۴: تغییرات S^1

که پیدا می‌کنیم عبارت است از $(\frac{4}{5}, \frac{16}{5}) = \nu^1$ ، و مساله زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} P_1(\nu^1) : \min \quad & \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

و جواب $x^1 = (4, 0)$ را به‌دست می‌آوریم. در نتیجه

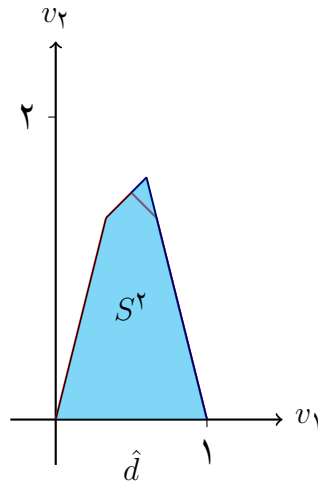
$$S^1 = S^0 \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq 1, -4\nu_1 + \nu_2 \leq 0\}$$

تغییرات S^1 را در شکل ۳.۴ مشاهده می‌کنید که از S^0 کوچکتر است، قرار می‌دهیم $k = 2$. اکنون $s^2 = (1, 2)$ و $\hat{d} = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$ را در نظر می‌گیریم و داریم $\alpha^2 = \frac{17}{33}$ و نقطه مرزی $\nu^2 = (\frac{25}{33}, \frac{32}{33})$. مساله زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} P_1(\nu^2) : \min \quad & \frac{25}{33}x_1 + \frac{1}{33}x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب $x^2 = (0, 4)$ را به‌دست می‌آوریم و سپس داریم

$$S^2 = S^1 \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq 1, 4\nu_1 + \nu_2 \leq 4\}$$

شکل ۴.۴: تغییرات S^2

و قرار می‌دهیم $k = 3$ و به مرحله بعد می‌رویم. اکنون $s^3 = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ و $\hat{d} = (\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ داریم. $\alpha^3 = \frac{19}{10}$ و نقطه مرزی $\nu^3 = (\frac{43}{33}, \frac{103}{33})$ را به دست می‌آوریم. مساله زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} p_1(\nu^3) : \min \quad & \frac{43}{33}x_1 + \frac{103}{33}x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

اکنون جواب $x^3 = (1, 2)$ را به دست می‌آوریم، و داریم

$$S^3 = S^2 \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq 1, \nu_1 + \nu_2 \leq 2\} = D$$

بنابراین $S^3 = D$ و الگوریتم به پایان می‌رسد. اکنون با کمک دوگان S^k ها، $\mathcal{P}$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور $D(S^\circ)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

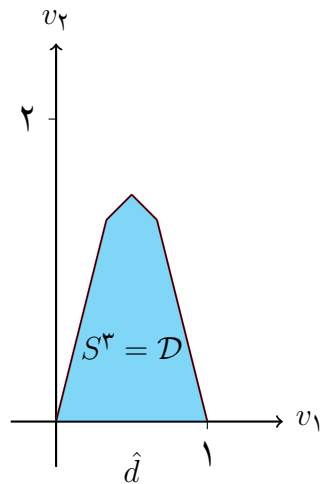
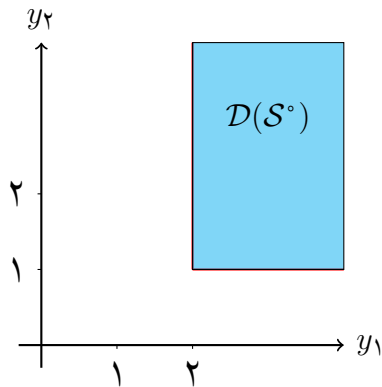
$$D(S^\circ) = \{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) \geq 0 \quad \text{for all } \nu \in \text{vert}(S^k)\}$$

با توجه به این که رأس‌های S° برابر است با $(0, 1)$ و $(1, 2)$ ، بنابراین طبق روابط زیر به دست می‌آوریم

$$\varphi((y_1, y_2), (0, 1)) \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 1$$

$$\varphi((y_1, y_2), (1, 2)) \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 2$$

داریم:

شکل ۵.۴: تغييرات S^* شکل ۶.۴: تغييرات $D(S^*)$

$$D(S^*) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y, \nu) \geq 0, \nu = (0, 1), (1, 2)\}$$

$$= \{y_1 \geq 2\} \cap \{y_2 \geq 1\}$$

رأس‌های S^1 عبارتند از، $(0, 0)$ ، $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ و $(1, 2)$ ، داریم:

$$\varphi((y_1, y_2), (0, 0)) \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0$$

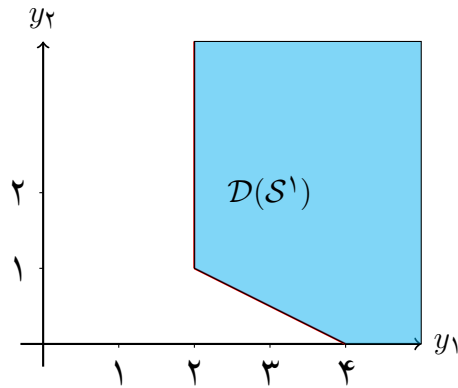
$$\varphi((y_1, y_2), (1, 2)) \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 2$$

$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})) \geq 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 \geq 4$$

بنابراین داریم:

$$D(S^1) = \{y_1 \geq 2\} \cap \{y_2 \geq 0\} \cap \{y_1 + 2y_2 \geq 4\}$$

در این مرحله رأس‌های S^2 که به‌دست آمده‌اند، $(0, 0)$ ، $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$ ، $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ ، $(1, 0)$ هستند و خواهیم

شکل ۷.۴: تغییرات $D(S^1)$

داشت:

$$\varphi((y_1, y_2), (\circ, \circ)) \geq \circ \Rightarrow y_2 \geq \circ$$

$$\varphi((y_1, y_2), (1, \circ)) \geq \circ \Rightarrow y_1 \geq \circ$$

$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{1}{2}, \frac{4}{3})) \geq \circ \Rightarrow y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{2}{5}, \frac{8}{5})) \geq \circ \Rightarrow 3y_1 + 2y_2 \geq 8$$

در این مرحله خواهیم داشت:

$$D(S^2) = \{y_1 \geq \circ\} \cap \{y_2 \geq \circ\} \cap \{y_1 + 2y_2 \geq 4\} \cap \{3y_1 + 2y_2 \geq 8\}$$

رأس‌های S^3 عبارتند از، $(\circ, \circ)$ ، $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ ، $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ ، $(\frac{2}{5}, \frac{8}{5})$ و $(1, \circ)$ ، بنابراین در مرحله بعد داریم:

$$\varphi((y_1, y_2), (\circ, \circ)) \geq \circ \Rightarrow y_2 \geq \circ$$

$$\varphi((y_1, y_2), (1, \circ)) \geq \circ \Rightarrow y_1 \geq \circ$$

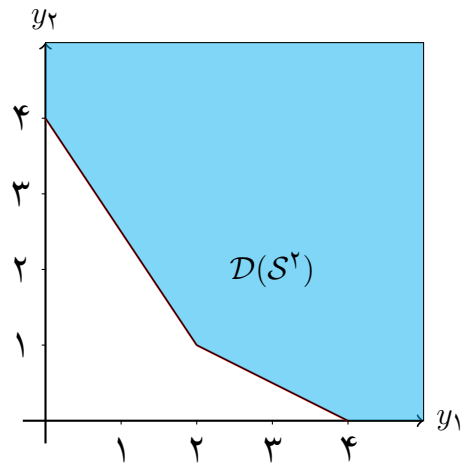
$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{1}{2}, \frac{4}{3})) \geq \circ \Rightarrow y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{1}{3}, \frac{3}{2})) \geq \circ \Rightarrow y_1 + y_2 \geq 3$$

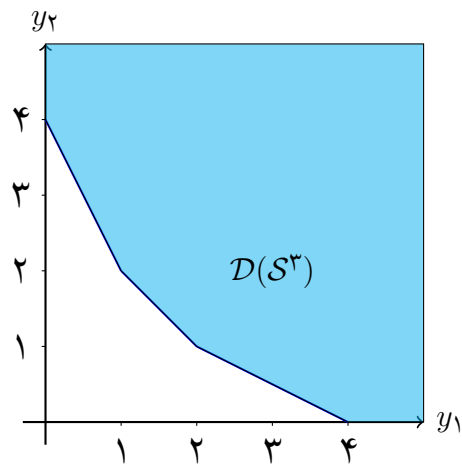
$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{2}{5}, \frac{8}{5})) \geq \circ \Rightarrow 2y_1 + y_2 \geq 4$$

داریم:

$$D(S^3) = \{y_1 \geq \circ\} \cap \{y_2 \geq \circ\} \cap \{y_1 + 2y_2 \geq 4\} \\ \cap \{y_1 + y_2 \geq 3\} \cap \{2y_1 + y_2 \geq 4\}$$



شکل ۸.۴: تغییرات $D(S^2)$



شکل ۹.۴: تغییرات $D(S^3)$

که $D(S^3) = P$ است.

طبق قضیه ۷.۱.۴، با کمک تقریب بیرونی D می‌توان روند تقریب درونی P را بیان کرد.

۲.۴ به‌دست آوردن ابروجه‌های غیرتسلطی P توسط D

بنا به آن‌چه در الگوریتم ۴.۲.۳ بیان شد در قسمت ۲ این الگوریتم، رأس $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ از D متناظر با یک ابرصفحه حائل P می‌شود که این ابرصفحه در یک ابروجه غیرتسلطی ضعیف برای P حائل می‌باشد، ابرصفحه به‌صورت $\lambda(\nu)^T y = \nu_p$ است که در آن

$$\lambda(\nu) = (\nu_1, \dots, \nu_{p-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i)^T$$

و $\lambda(\nu) \geq 0$. اگر $\lambda(\nu) > 0$ ، آنگاه ابرصفحه حائل در یک ابروجه غیرتسلطی برای P حائل می‌شود. اگر $\lambda(\nu) > 0$ آنگاه ν را یک رأس درونی D می‌نامیم، در غیر این صورت ν یک رأس مرزی D نامیده می‌شود. برای محاسبه ابروجه‌های غیرتسلطی P کافی است رأس‌های درونی D را در نظر بگیریم. اکنون نشان می‌دهیم چگونه ابروجه غیرتسلطی F که متناظر با یک رأس درونی ν از D می‌شود را محاسبه کنیم.

مجموعه ابرصفحه‌های حائل مجاور یک رأس درونی زیر مجموعه

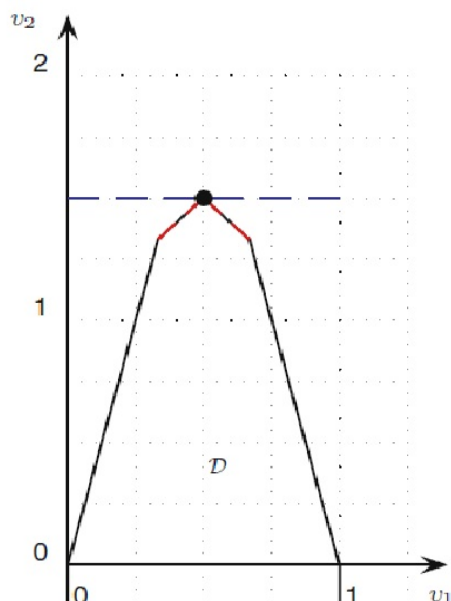
$$\{\nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(y, \nu) = 0 \text{ for all } y \in W\}$$

است که در آن $W = \{Px^0, \dots, Px^{k-1}\}$. برای یک رأس درونی D ، اگر همه ابرصفحه‌های حائل مجاور (برش‌ها) غیرتباهیده باشند، یعنی هر برش حائل D در یک ابروجه باشد، آنگاه براساس قضیه دوگان هندسی می‌توان همه نقاط P را متناظر با برش‌های D پیدا کرد، این نقاط رأس‌های F هستند. اگر همه برش‌های مجاور حائل D در یک ابروجه نباشند یعنی، بعضی از آن‌ها تباهیده باشند از نتایج زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴ [۴۰]. فرض کنید ν رأس درونی D متناظر با ابروجه غیرتسلطی F از P باشد، اگر ν یک برش مجاور (ابرصفحه حائل) تباهیده داشته باشد، آنگاه برش با یک نقطه غیرتسلطی $p \in F$ متناظر می‌شود که p یک رأس از F نیست.

برهان. فرض کنید ν رأسی باشد که k برش غیرتباهیده (ابرصفحه حائل) دارد. آنگاه k برش غیرتباهیده با k رأس F متناظر می‌شود. برش تباهیده را می‌توان توسط ترکیب خطی k برش غیرتباهیده ایجاد کرد. به‌طور متناظر، نقطه‌ای که برش تباهیده با آن متناظر است را می‌توان با همان ترکیب خطی k رأس بیان کرد. بنابراین داریم، $p \in F$. $\square$

قضیه ۱.۲.۴، نشان می‌دهد نقاطی از P با برش‌های مجاور یک رأس D متناظرند که روی یک ابروجه P قرار دارند. علاوه بر این همه برش‌های غیرتباهیده D با رأس‌هایی از ابروجه P متناظرند و همه برش‌های تباهیده با نقاطی که رأس‌های ابروجه نیستند متناظر می‌شوند. بنابراین می‌توان از پوسته محدب نقاط استفاده کرد و ابروجه را پیدا کرد.



شکل ۱۰.۴: رأس $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ و برش تباهیده

مثال ۲.۲.۴. در مثال ۸.۱.۴، رأس $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ از D را در نظر بگیریم، بنابراین

$$\varphi((y_1, y_2), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 3$$

که این ابروجه از P متناظر با رأس $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ است، $y_1 + y_2 = 3$ پاره‌خطی است که توسط $(1, 2)$ و $(2, 1)$ ایجاد می‌شود، در شکل ۱۱.۴ ابروجه P را مشاهده می‌کنید. نقطه $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ که یک نقطه غیرتسلطی از P است که روی ابروجه $y_1 + y_2 = 3$ قرار دارد. نقاط $(1, 2)$ و $(2, 1)$ رأس‌های $\mathcal{F}$ هستند، اما نقطه $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ برای $\mathcal{F}$ رأسی نیست.

به عبارت دیگر نقطه $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ را می‌توان توسط ترکیب خطی دو رأس $(1, 2)$ و $(2, 1)$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{1}{4}(1, 2) + \frac{1}{4}(2, 1) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}).$$

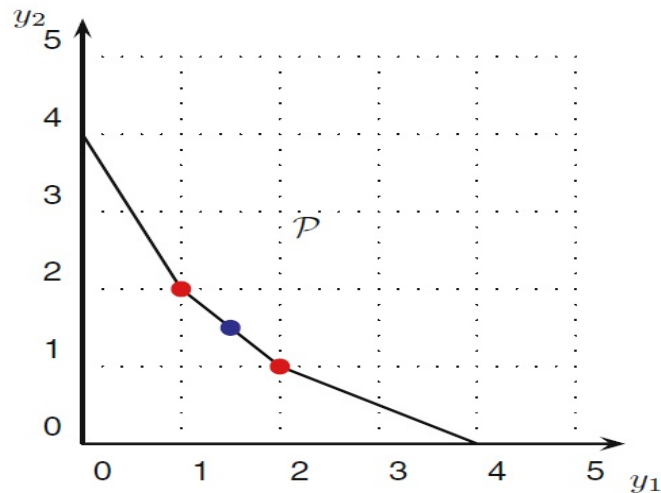
این نقطه متناظر با ابرصفحه $v_2 = \frac{3}{4}$ است که با D فقط در نقطه $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ اشتراک دارد، بنابراین برای D تباهیده است که با ترکیب خطی دو ابروجه D می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{4}(v_1 + v_2) + \frac{1}{4}(-v_1 + v_2) = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 1 \Rightarrow v_2 = \frac{3}{4}.$$

یعنی نقطه تباهیده را با ترکیب خطی دو نقطه غیرتباهیده دیگر به دست آوریم.

۳.۴ حل تقریبی دوگان برنامه‌ریزی خطی چندهدفه

اگر مجموعه غیرتسلطی ضعیف یک برنامه‌ریزی خطی چندهدفه به صورت چندوجهی باشد یعنی P تعدادی ابروجه و رأس داشته باشد، آنگاه بنابه نتیجه‌های ۱۱.۱.۲ و ۱۲.۱.۲، رأس‌ها و ابروجه‌های متناظر در



شکل ۱۱.۴: رأس $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ از P

D وجود دارند. برای به دست آوردن ابروجه‌ها و رأس‌ها، می‌توانیم مساله اولیه را با الگوریتم بنسون یا مساله دوگان را با الگوریتم دوگان بنسون حل کنیم و با تناظر یک به یک بین ابروجه‌ها (رأس‌ها) که در فصل دوم بیان شد، با به دست آوردن ابروجه‌های (رأس‌های) یک مساله، رأس‌های (ابروجه‌های) مساله دیگر را پیدا کنیم و مدت زمان حل مساله را محاسبه می‌کنیم.

شاهو و ارگات در [۴۰] برای بهبود پیچیدگی محاسباتی، یک الگوریتم تقریبی از الگوریتم بنسون ارائه کردند که در آن الگوریتم یک رأس از S^k در نظر می‌گیرد که در $\mathcal{V}$ نیست. اگر فاصله اقلیدسی رأس انتخاب شده با نقطه مرزی $\mathcal{V}$ که در پاره خط واصل بین رأس انتخاب شده و نقطه درونی قرار دارد کمتر از ϵ ($\epsilon \in \mathbb{R}$ و $\epsilon > 0$) باشد، آنگاه رأس و نقطه مرزی را به ترتیب به مجموعه تقریب بیرونی و تقریب درونی اضافه می‌کنیم. در نهایت یک تقریب بیرونی $\mathcal{V}^o$ از $\mathcal{V}$ و یک تقریب درونی $\mathcal{V}^i$ از $\mathcal{V}$ داریم، که $\mathcal{V}$ را در برمی‌گیرند، یعنی

$$\mathcal{V}^i \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^o.$$

بنابراین به ازای هر رأس از $\mathcal{V}^o$ یک نقطه متناظر در $\mathcal{V}^i$ وجود دارد که فاصله این دو نقطه کمتر از ϵ است. همه نقاط $\mathcal{V}^i$ در مرز $\mathcal{V}$ قرار دارند. شاهو و ارگات در [۴۰] ثابت کردند که مجموعه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{V}^i$ مجموعه نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{V}$ هستند ($\epsilon = \epsilon e$).

در این بخش، حل تقریبی دوگان برنامه‌ریزی خطی چندهدفه را بررسی می‌کنیم اما خطای تقریب^۱ را کنترل می‌کنیم، تا یک مجموعه شدنی تقریبی گسترش یافته در فضای هدف D° را پیدا کنیم و آنگاه مجموعه چندوجهی $D(D^\circ)$ را پیدا کردیم، $D(D^\circ)$ تقریب درونی P ، مجموعه شدنی اولیه گسترش یافته، است. در نهایت نشان می‌دهیم که مجموعه غیرتسلطی ضعیف $D(D^\circ)$ دقیقاً یک مجموعه ϵ -غیرتسلطی ضعیف برای برنامه‌ریزی خطی چندهدفه اولیه است.

تقریب بیرونی الگوریتم دوگان بنسون همان الگوریتم ۴.۲.۳ است، با این تفاوت که در گام k ،

^۱approximation error

فرض کنید $\epsilon \in \mathbb{R}$ و $\epsilon > 0$ یک دامنه تغییرات^۲ باشد.

الگوریتم ۴.۲.۳ را که در گام ۱ تغییر می‌کند به صورت زیر بیان می‌کنیم.

الگوریتم ۱.۳.۴. [۴۰]. (تقریب دوگان الگوریتم بنسون)
ارزش‌دهی اولیه ($k = 0$)

i۱. $\hat{d} \in \text{int} D$ را انتخاب کنید.

i۲. جواب بهینه x^0 از $(P_1(\hat{d}))$ را محاسبه می‌کنیم.

i۳. مجموعه S^0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S^0 := \{\nu \in \mathbb{R}^p : \lambda(\nu) \geq 0, \quad \varphi(Px^0, \nu) \geq 0\}, \quad k = 1$$

گام‌های تکرار ($k \geq 1$)

k۱. اگر برای هر $s \in D + \epsilon e^p$, $s \in \text{vert} S^{k-1}$ در این صورت تقریب بیرونی D را که با D^0 نشان می‌دهیم برابر است با S^{k-1} ، الگوریتم متوقف شود در غیر این صورت یک $s^k \in \text{vert} S^k$ انتخاب می‌کنیم به طوری که $s^k \notin D + \epsilon e^p$ و ادامه می‌دهیم.

k۲. $\alpha^k \in (0, 1)$ را به طوری که

$$\nu^k := \alpha^k s^k + (1 - \alpha^k) \hat{d} \in \max_K D$$

محاسبه می‌کنیم.

k۳. یک جواب بهینه x^k از $(P_1(\nu^k))$ را محاسبه می‌کنیم.

k۴. مجموعه S^k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

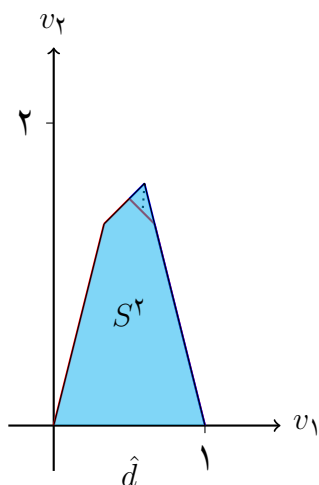
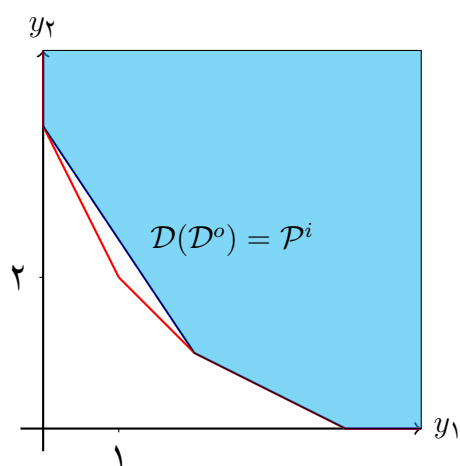
$$S^k := S^{k-1} \cap \{\nu \in \mathbb{R}^p : \varphi(Px^k, \nu) \geq 0\}.$$

k۵. قرار دهید $k = k + 1$ ، برو به (k۱).

برای این که بررسی کنیم آیا $s \in D + \epsilon e^p$ ، نیاز داریم $D_1(s)$ را حل کنیم و مقدار هدف f را به دست آوریم. اگر $s_p - f \leq \epsilon$ ، آنگاه $s \in D + \epsilon e^p$.

چون $D \subseteq D^0$ است، قضیه ۷.۱.۴ دلالت می‌کند که $D(D^0) \subseteq D(D) = P$. یعنی این که $D(D^0)$ یک تقریب درونی P است. از P^i برای نمایش $D(D^0)$ استفاده می‌کنیم. الگوریتم را به کمک مثال ۸.۱.۴ توضیح می‌دهیم.

^۲tolerance

شکل ۱۲.۴: تقریب بیرونی $\mathcal{D}$ شکل ۱۳.۴: تقریب درونی $\mathcal{P}$

مثال ۲.۳.۴. مساله دو هدفه را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

در این مثال فرض کنید مقدار $\epsilon = \frac{5}{4}$ ، در این مساله $\hat{d} = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$ است، با حل مساله $P_1(\hat{d})$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب $x^\circ = (2, 1)$ را داریم در نتیجه

$$\mathcal{S}^\circ = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \nu_1 \leq 1, \nu_2 - \nu_1 \geq 1\}$$

قرار می‌دهیم $k = 1$. رأس‌های $\mathcal{S}^\circ$ عبارتند از $(0, 1)$ و $(1, 2)$. اکنون مساله $D_1(s)$ را برای رأس‌های $\mathcal{S}^\circ$ حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\ s.t \quad & 2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \lambda_1 \\ & u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4 = 1 - \lambda_1 \\ & u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

برای هر دو نقطه مقدار $f = 0$ (مقدار بهینه $D_1(s)$) است. به ازای نقطه $(0, 1)$ داریم:

$$s_2 - f = 1 - 0 = 1 > \frac{5}{4} \rightarrow (0, 1) \notin \mathcal{D} + \epsilon e^p$$

به ازای نقطه $(1, 2)$ داریم:

$$s_2 - f = 2 - 0 = 2 > \frac{5}{4} \rightarrow (0, 1) \notin \mathcal{D} + \epsilon e^p$$

اکنون با ادامه روند گام‌های الگوریتم به‌دست می‌آوریم، $\alpha^1 = \frac{17}{15}$ و در نتیجه نقطه مرزی $(\frac{4}{15}, \frac{16}{15}) = \nu^1$ می‌باشد. اکنون مساله $P_1(\nu^1)$ را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{4}{15}x_1 + \frac{16}{15}x_2 \\ s.t \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

و با به‌دست آوردن $x^1 = (4, 0)$ داریم:

$$\mathcal{S}^1 = \mathcal{S}^\circ \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 4\nu_1 \geq \nu_2\}.$$

اکنون قرار می‌دهیم $k = 2$ و الگوریتم را ادامه می‌دهیم. رأس $(1, 2)$ از S^1 را داریم و مساله $D_1(s)$ را حل می‌کنیم و مقدار $f = 0$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$s_2 - f = 2 - 0 = 2 > \frac{5}{4} \rightarrow (0, 1) \notin D + \epsilon e^p$$

در این مرحله به دست می‌آوریم $\alpha^2 = \frac{17}{33}$ و نقطه مرزی $\nu^2 = (\frac{25}{33}, \frac{32}{33})$ است. با حل مساله $P_1(\nu^2)$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{25}{33}x_1 + \frac{32}{33}x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب $(0, 4)$ را به دست می‌آوریم و داریم:

$$S^2 = S^1 \cap \{\nu \in \mathbb{R}^2 : 4\nu_1 + \nu_2 \geq 4\}.$$

قرار می‌دهیم $k = 3$ و الگوریتم را ادامه می‌دهیم رأس $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$ را برای S^2 داریم. با حل $D_1(s)$ مقدار $f = \frac{7}{5}$ را به دست می‌آوریم

$$s_2 - f = \frac{8}{5} - \frac{7}{5} = \frac{1}{5} < \frac{5}{4} \rightarrow (\frac{3}{5}, \frac{8}{5}) \in D + \epsilon e^p$$

نقطه $(\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$ خارج از D است و $s^2 \in D + \epsilon e^p$ و الگوریتم پایان می‌یابد، مجموع تکرارها برابر است با ۳ و داریم $S^2 = D^o$. در شکل ۱۲.۴ تقریب بیرونی D ، D^o و در شکل ۱۳.۴، تقریب درونی $P^i = D(D^o)$ را مشاهده می‌کنید.

بنابه تعریف نقاط ϵ -کارا در فصل اول، نشان می‌دهیم که مجموعه غیرتسلطی ضعیف P^i دقیقاً مجموعه نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف P است.

اکنون ابتدا D را در امتداد e^p با ضریب ϵ حرکت می‌دهیم، آنگاه $D^u = D + \epsilon e^p$ را به دست می‌آوریم. زمانی که الگوریتم تقریبی پایان یافت مجموعه نقاط $\mathcal{K}$ -بیشینه D^o بین مجموعه نقاط $\mathcal{K}$ -بیشینه D و مجموعه نقاط $\mathcal{K}$ -بیشینه D^u قرار دارند، یعنی

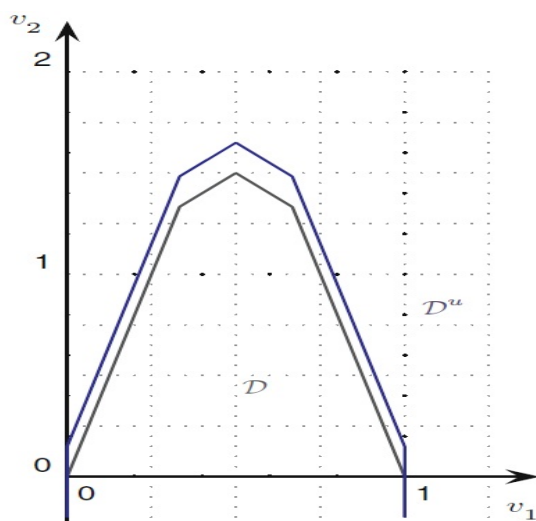
$$D \subseteq D^o \subseteq D^u.$$

برای $P = D(D)$ و $P^u = D(D^u)$ بر طبق قضیه ۷.۱۰.۴، داریم

$$P^u \subseteq P^i \subseteq P.$$

بنابراین مجموعه نقاط غیرتسلطی ضعیف (نقاط $\mathbb{R}^p_{\geq}$ -کمینه) $P^i = D(D^o)$ در بین مجموعه نقاط غیرتسلطی ضعیف (نقاط $\mathbb{R}^p_{\geq}$ -کمینه) P و مجموعه نقاط غیرتسلطی ضعیف P^u قرار دارند.

قضیه ۳.۳.۴. [۴۰]. فرض کنید خطای تقریب دوگان ϵ باشد و فرض کنید $\epsilon e = \epsilon$ ، آنگاه مجموعه غیرتسلطی ضعیف P^i مجموعه نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف P است.



شکل ۱۴.۴: D و D^u

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}^u$ دقیقاً مجموعه نقاط ε -غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است.

طبق نتیجه ۶.۱.۴، قضیه ۱۰.۱.۲ را برای $D = D^u$ و $\mathcal{P} = \mathcal{P}^u$ به کار می‌بریم، بنابراین می‌توانیم از قضیه دوگانی برای پیدا کردن $\mathcal{P}^u$ استفاده کنیم. فرض کنید $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ یک رأس D باشد، آنگاه رأس ν^u از D^u که $\nu^u = \nu + \varepsilon e^p$ وجود دارد. فرض کنید رأس ν از D متناظر با ابروجه ν_p $\lambda(\nu)^T y = \nu_p$ از $\mathcal{P}$ باشد که در آن

$$\lambda(\nu) = (\nu_1, \dots, \nu_{p-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i)^T$$

و فرض کنید رأس $\nu^u = (\nu_1^u, \dots, \nu_p^u)$ از D^u متناظر با ابروجه ν_p^u $\lambda(\nu^u)^T y = \nu_p^u$ از $\mathcal{P}^u$ باشد که در آن

$$\lambda(\nu^u) = (\nu_1^u, \dots, \nu_{p-1}^u, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i^u)^T.$$

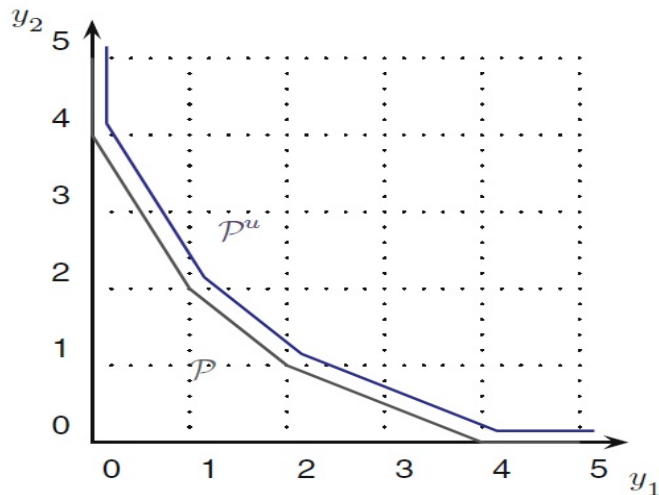
چون $\nu^u = \nu + \varepsilon e^p$ داریم $\lambda(\nu) = \lambda(\nu^u)$. بنابراین ابروجه $\mathcal{P}$ توسط $\lambda(\nu)y = \nu_p$ موازی است با ابروجه $\mathcal{P}^u$ که توسط $\lambda(\nu^u)y = \nu_p^u$ مشخص می‌شود.

فرض کنید $\mathcal{F}$ یک ابروجه D باشد، آنگاه متناظر با آن ابروجه $\mathcal{F}^u$ از D^u وجود دارد و $\mathcal{F}^u$ موازی با $\mathcal{F}$ است. فرض کنید $\mathcal{F}$ با رأس $y = (y_1, \dots, y_p)$ از $\mathcal{P}$ متناظر است، آنگاه ابرصفحه $\mathcal{F}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$y_1 \nu_1 + \dots + y_{p-1} \nu_{p-1} + y_p (1 - \nu_1 - \dots - \nu_{p-1}) = \nu_p$$

در این صورت معادله ابرصفحه گسترده شده توسط $\mathcal{F}$ برابر است با:

$$(y_p - y_1) \nu_1 + (y_p - y_2) \nu_2 + \dots + (y_p - y_{p-1}) \nu_{p-1} + \nu_p = y_p.$$

شکل ۱۵.۴: $\mathcal{P}^u$ و $\mathcal{P}$

فرض کنید $\mathcal{F}^u$ متناظر با رأس $y^u = (y_1^u, \dots, y_p^u)$ از $\mathcal{P}^u$ باشد، در این صورت معادله ابرصفحه گسترده شده توسط $\mathcal{F}^u$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$y_1^u \nu_1 + \dots + y_{p-1}^u \nu_{p-1} + y_p^u (1 - \nu_1 - \dots - \nu_{p-1}) = \nu_p$$

آنگاه معادله ابرصفحه گسترده شده توسط $\mathcal{F}^u$ عبارت است از:

$$(y_p^u - y_1^u) \nu_1 + (y_p^u - y_2^u) \nu_2 + \dots + (y_p^u - y_{p-1}^u) \nu_{p-1} + \nu_p = y_p^u.$$

$\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}^u$ موازی هستند و $\mathcal{F}^u$ با حرکت دادن $\mathcal{F}$ در امتداد e^p به اندازه ϵ به دست می‌آید، بنابراین داریم $y_p^u = y_p + \epsilon$ و

$$(y_p^u - y_1^u) = (y_p - y_1), \dots, (y_p^u - y_{p-1}^u) = (y_p - y_{p-1})$$

یعنی $y^u = y + \epsilon e$.

بنابراین $\mathcal{P}^u$ را می‌توان با حرکت دادن هر نقطه y از $\mathcal{P}$ به صورت $y + \epsilon e$ به دست آورد، بنابراین مجموعه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}^u$ مجموعه نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است و به علاوه چون

$$\mathcal{P}^u \subseteq \mathcal{P}^i \subseteq \mathcal{P}$$

را داریم، مجموعه غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}^i$ یک مجموعه ϵ -غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ است. $\square$

مثال ۴.۳.۴. در مثال ۸.۱.۴، فرض کنید $\epsilon = \frac{5}{3}$ و شکل‌های ۱۴.۴ و ۱۵.۴، $\mathcal{D}^u$ ، $\mathcal{D}$ ، $\mathcal{P}^u$ و $\mathcal{P}$ را نشان می‌دهند. طبق قضیه ۳.۳.۴ اگر y رأسی از $\mathcal{P}$ باشد، به طور متناظر $y^u = y + \epsilon e$ یک رأس از $\mathcal{P}^u$ است که رأس‌های $\mathcal{P}$ عبارتند از:

$$(\circ, 4), (1, 2), (2, 1), (4, \circ).$$

بنابراین رأس‌های متناظر $\mathcal{P}^u$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned}
 (0, 4) + \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) &= \left(\frac{5}{4}, 4\frac{5}{4}\right) \\
 (1, 2) + \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) &= \left(1\frac{5}{4}, 2\frac{5}{4}\right) \\
 (2, 1) + \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) &= \left(2\frac{5}{4}, 1\frac{5}{4}\right) \\
 (4, 0) + \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) &= \left(4\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)
 \end{aligned} \tag{۴.۴}$$

بنابراین رأس‌ها $\mathcal{P}^u$ عبارتند از:

$$\left(\frac{5}{4}, 4\frac{5}{4}\right), \left(1\frac{5}{4}, 2\frac{5}{4}\right), \left(2\frac{5}{4}, 1\frac{5}{4}\right), \left(4\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

در این مثال رأس‌های $\mathcal{D}$ عبارتند از:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), (1, 0).$$

با توجه به این که $D^u = D + \epsilon e^p$ ، رأس‌های D^u عبارتند از:

$$(0, \frac{5}{4}), \left(\frac{1}{3}, \frac{95}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{35}{4}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{95}{6}\right), \left(1, \frac{5}{4}\right).$$

مجموعه غیرتسلطی $\mathcal{P}^u$ مجموعه نقاط ϵ -غیرتسلطی ضعیف $\mathcal{P}$ با $\epsilon = \frac{5}{4}e$ است.

فصل ۵

کاربرد الگوریتم‌های ارائه شده در پرتودرمانی

در این بخش مطالبی درباره پرتودرمانی ارائه می‌دهیم و سپس مسائل بهینه‌سازی که با آن روبرو هستیم را توصیف می‌کنیم.

پرتو درمانی از ذرات پیرانرژی یا امواج (اشعه)، مانند اشعه X یا اشعه گاما، برای از بین بردن سلول‌های سرطانی و یا توقف رشد آنها استفاده می‌کند. اشعه با آسیب رساندن به مواد ژنتیکی DNA و یا اختلال در رشد و تقسیم سلول‌ها، سلول‌های ناحیه تحت درمان (حجم هدف) را زخمی و یا از بین می‌برد.

هدف پرتودرمانی بررسی مزیت درمان و تمرکز پرتو برای این‌که دوز کافی به نقطه مورد نظر برسد تا به سلول‌های سرطانی را آسیب بزند اما به بافت‌های اطراف ضرری نرسد. برای رسیدن به این هدف، از سیستم‌های برنامه‌ریزی معکوس استفاده می‌شود.

۱.۵ مقدمه‌ای بر پرتودرمانی

مراحل تشخیص تا درمان گوناگون است. ابتدا از بیمار عکس‌برداری می‌شود. روش‌های عکس‌برداری پزشکی عبارتند از توموگرافی (CT) و عکس‌برداری MRI (اسکن تشدید مغناطیسی) و PET (اسکن‌های توموگرافی با انتشار پوزیترون) که برای تشخیص تومورها استفاده می‌شود. این تصاویر می‌توانند عکس ۳ بعدی از تومور و دیگر ارگان‌ها برای برنامه‌ریزی درمان ارائه دهند.

در برنامه ریزی درمان تومورها و اندام‌های در معرض خطر (OARs) مشخص و پارامترهای درمانی مانند تعداد و زاویه پرتوها و نوع پرتو و انرژی پرتو و شدت پرتو انتخاب می‌شوند. محاسبه دوز شامل مدل‌های عملکرد فیزیکی پرتو برای تعیین میزان دوز مورد نیاز بیمار است. زمانی‌که درمان مناسب پیدا شد بیمار به همان شیوه‌ای که برنامه درمانی او مطابق با عکس‌برداری مشخص شده است در یک دوره خاص تحت درمان قرار می‌گیرد. اطمینان از کیفیت درمان موجب کاهش خطرات ناشی از نادرستی هرکدام از مراحل درمانی می‌شود.

پیشرفت تکنولوژی پرتودرمانی امکان برنامه‌ریزی درمان ۳ بعدی را با شکل‌دهی پرتوها با استفاده

از موازی‌سازی چندلایه (MLCs) امکان‌پذیر می‌سازد که در تنظیم شدت پرتودرمانی (IMRT) استفاده می‌شوند. IMRT شکلی از پرتودرمانی است که باعث تنظیم شدت پرتو در سرتاسر پرتو می‌شود. این می‌تواند به بیشترین حد مطابقت توزیع دوز با حجم موردنظر در برنامه‌ریزی برسد. به‌خصوص برای حجم‌های ماهیچه‌ای با شکل‌های پیچیده غیرمحدب در موقعیت دشوار از جمله برای تومورهای سر و گردن. IMRT موجب بهبود کیفیت در مقایسه با انواع روش‌های پرتودرمانی می‌شود، می‌تواند راه‌های درمانی ممکن و پارامترهایی که توصیف شده‌اند را افزایش دهد.

دو روش طراحی درمان برای پرتودرمانی به نام برنامه‌ریزی روبه‌جلو و برنامه‌ریزی معکوس وجود دارد. برنامه‌ریزی روبه‌جلو، یک روش آزمون و خطاست که در آن پارامترهای درمانی تثبیت می‌شوند و توزیع دوز حاصل محاسبه می‌شود. اگر این رضایت‌بخش نباشد محاسبه با پارامترهای مختلف تکرار می‌شود تا زمانی که یک درمان مناسب پیدا شود.

برنامه‌ریزی معکوس، برای محاسبه برنامه‌های درمانی که بهتر به اهداف درمانی برسند به‌کار می‌رود و بدون روش‌های بهینه‌سازی ممکن نیست. طراحی پرتودرمانی، یک مساله بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود که هدف‌های درمان به عنوان توابع هدف و یا به عنوان محدودیت‌ها فرمول‌بندی شده و متغیرها همان، پارامترهای طراحی درمان هستند.

پرتودرمانی به این‌صورت است که بیمار روی تخت قرار می‌گیرد و پرتو از طریق یک شتاب‌دهنده خطی که روی یک حائل نصب شده و می‌تواند در امتداد یک محور چرخش کند تابیده می‌شود. بنابراین تخت و حائل طوری قرار می‌گیرند که پرتو بتواند از هر نقطه روی یک هدف بتابد. همه پرتوها روی تومور تابیده می‌شود تا تاثیر آن بیشتر شود ولی به بافت‌های دیگر آسیب کمتری برسد. از هر زاویه (توسط موقعیت تخت و حائل ایجاد می‌شود) پرتو از طریق MLC عبور می‌کند، این دستگاهی است شامل چند جفت ورق فلزی است که در امتداد مسیر پرتو حرکت می‌کند تا شدت پرتو را کاهش دهد. با حرکت ورق‌ها در مکان‌های مختلف شدت و شکل پرتو مشخص می‌شود.

۲.۵ محاسبه دوز

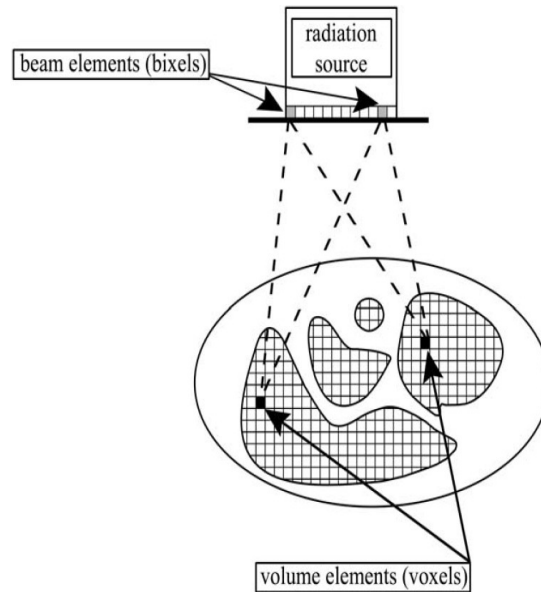
مقدار انرژی جذب شده توسط بافت به دوز پرتو معروف است. دوز با واحدی به نام گری^۱ (GY) اندازه‌گیری می‌شود که مقدار انرژی جذب شده در واحد جرم است ($1\text{GY}=1\text{J/kg}$).

برای ارزیابی تخصیص دوز به بیمار باید مشخص شود چگونه پرتویی به بیمار تخصیص داده می‌شود. عکس بیمار نشان دهنده آناتومی اوست و به مربع-مستطیل‌های کوچک تقسیم می‌شود که وکسل^۲ نامیده می‌شوند.

فرض کنید پرتوهای $k = 1, \dots, p$ برای درمان متغیر باشند و هر پرتو شامل $j = 1, \dots, n$ پیکسل است و وکسل‌ها توسط $i = 1, \dots, m$ اندیس‌گذاری می‌شوند. دوز اختصاص داده شده به وکسل i در واحد شدت برای پیکسل j از پرتو k را به‌صورت a_{ijk} نمادگذاری می‌کنیم. مقادیر a_{ijk}

^۱Gray

^۲voxel



شکل ۱۰۵: وکسل و پیکسل‌های پرتو

تعیین‌کننده ماتریس تجزیه دوز A با سطرهای i و ستون‌های (j, k) است. رابطه بین شدت پیکسل و دوز به صورت

$$d = Ax$$

است. در آن $d \in \mathbb{R}^m$ بردار دوز است و عناصر d_i مربوط به دوز اختصاص یافته به وکسل i ام است. بردار $x \in \mathbb{R}^{np}$ توصیف‌کننده شدت پرتو است و x_{jk} نشانگر شدت پیکسل j ، $j = 1, \dots, np$ پرتو $k = 1, \dots, p$ است.

هر وکسل به نوع بافت تعلق دارد. از T برای نشان دادن تومور و از C برای نشان دادن ارگان‌های در معرض خطر (k ارگان در معرض خطر را توسط $C_1, \dots, C_k$ نشان می‌دهیم)، N برای بافت طبیعی استفاده می‌شود. وکسل‌ها به این سه قسمت تقسیم می‌شوند، اگر کل تعداد وکسل‌ها برابر m باشد داریم

$$m = m_T + m_N + m_C$$

که در آن

$$m_C = m_{C_1} + \dots + m_{C_k}.$$

ماتریس A را می‌توان به زیرماتریس‌های $A_T \in \mathbb{R}^{m_T \times np}$ ، $A_C \in \mathbb{R}^{m_C \times np}$ و $A_N \in \mathbb{R}^{m_N \times np}$ طبق لایه‌های مربوط به وکسل‌های تومور و ارگان‌های در معرض خطر و بافت نرمال تقسیم کرد. وکسل i ام را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$d_i = a(i)x.$$

که در آن $a(i)$ سطر i ام ماتریس A است.

برای برنامه‌ریزی درمان، متخصص پرتودرمانی باید یک دوز خاص را برای تومور، هر اندام در معرض خطر و بافت‌های طبیعی تعیین کند، چون بافت‌های گوناگون می‌توانند مقادیر گوناگون پرتو را تحمل کنند. دوز تعیین شده شامل دوز هدف برای تومور ($G_T \in \mathbb{R}$) و مقدار دوزی که نباید برای هر ارگان در معرض خطر افزایش یابد ($G_{C_k} \in \mathbb{R}$) و مقدار دوز برای بافت طبیعی ($G_N \in \mathbb{R}$) است. آن‌ها برای ساختن $NUB \in \mathbb{R}^{m_N}$ و $CUB \in \mathbb{R}^{m_C}$ و $TG \in \mathbb{R}^{m_T}$ ، $TLB \in \mathbb{R}^{m_T}$ ، $TUB \in \mathbb{R}^{m_T}$ که به ترتیب معرف دوز هدف، کران پایین و کران بالا روی دوز وکسل‌های تومور، کران بالای دوز برای وکسل ارگان‌های در معرض خطر و کران بالای دوز وکسل‌های بافت نرمال هستند استفاده می‌شوند. CUB را می‌توان به $C_1UB, \dots, C_kUB$ بر طبق وکسل‌های مربوط به ارگان‌های گوناگون تقسیم کرد. اکثر سیستم‌های برنامه‌ریزی مدرن معکوس IMRT می‌توانند مقدار دوز را مشخص کنند. محدودیت مقدار دوز نشان می‌دهد که فقط یک بخش خاصی از ساختار می‌تواند مقادیر دوز بیش از کران بالا یا کمتر از کران پایین دریافت کند.

۳.۵ مسائل بهینه‌سازی در IMRT

با مشخص کردن پارامترها، دوز پرتو مشخص می‌شود. برخی از پارامترها توسط طراح و مابقی با طراحی معکوس مشخص می‌شوند. روند برنامه‌ریزی به ۳ مرحله تقسیم می‌شود.

۱. بهینه‌سازی زاویه پرتو.

مساله اول به پیدا کردن بهترین زاویه پرتو می‌پردازد یعنی زاویه‌هایی که پرتو از آن می‌تابد. این مساله در شرایط آناتومی سخت، زمانی که یک تومور اطراف ارگان سالم پیچیده شده یا تومور به شکل غیرمحدب است اهمیت دارد. جهت انتخاب شده برای انتقال پرتو روی میزان دوز پرتو روی تومور و بافت‌های سالم اطراف تومور اثر می‌گذارد. برای انتخاب جهت بهینه پرتو باید به بررسی کیفیت ترکیب خاصی از جهت‌ها پرداخت، این عملکرد باید بهینه شود. این مساله به مساله هندسی معروف است.

۲. بهینه‌سازی شدت پرتو.

زمانی که جواب یک مساله هندسی مشخص شد، یک نمودار شدت با داشتن تعداد پرتوها و جهت پرتوها، برای هر زاویه مشخص می‌شود و بهترین توزیع دوز را در محدودیت‌های بالینی و فیزیکی انتقال می‌دهد.

۳. بهینه‌سازی قابلیت اجرا.

یک راه حل برای مسائل هندسی و شدت پرتو مشخص شد، بایستی آن‌ها را به دنباله‌های لایه‌ای MLC تبدیل کند تا به طور تقریبی آن‌ها را به اجرا درآورند. IMBs (نقشه‌های شدت)، اندازه میدان‌هایی با محدودیت‌ساز چند لایه‌ای ساکن ایجاد می‌کنند که به این روش میدان-ساکن-چندگانه گویند. اندازه میدان‌های چندقطعه‌ای برای جهت‌گیری منتخب حائل، طراحی می‌شود.

شکل میدان برای انتقال پرتو زمانی که لایه‌های MLC در موقعیت موردنظر متوقف شد، مشخص می‌شود. این روش به روش گام و شوت معروف است. در روش محدودساز چندلایه‌ای پویا، لایه‌های MLC با پرتودهی تغییر شکل می‌دهند.

هدف از این تقسیم‌بندی کاهش مدت درمان و استفاده بهینه از دستگاه است. سه مساله فوق به یکدیگر مرتبطند و جواب هر مساله روی جواب مساله دیگر تاثیر می‌گذارد، پس باید همزمان بهینه شوند. با توجه به این که اهداف انتقال، دوز یکنواخت به اندازه کافی بالا به تومور و دوز پایین به ارگان‌های در معرض خطر و بافت نرمال، خلاف یکدیگرند این مساله بهینه‌سازی پرتو را چندهدفه می‌سازد. از طرفی محاسبه دوز و انتقال آن به‌طور دقیق ممکن نیست بنابراین حل تقریبی مساله به عنوان خطای تقریب قابل قبول است. ما به بررسی مساله شدت پرتو می‌پردازیم.

۴.۵ مساله شدت پرتو

مساله بهینه‌سازی شدت پرتو IMRT سال‌هاست که به‌طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است. اولین بررسی بهینه‌سازی توسط شپارد [۴۱] انجام شد. مدل‌های ریاضی و روش‌های بهینه‌سازی زیادی برای بهینه‌سازی شدت پرتو مورد بررسی قرار گرفتند. مدل‌های ریاضی به ۵ گروه تقسیم شدند که عبارتند از:

۱. مسائل شدنی.

۲. مدل برنامه‌ریزی خطی.

۳. مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی.

۴. مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط.

۵. مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه.

در این پایان‌نامه به بررسی مسائل شدنی و مدل برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی چندهدفه می‌پردازیم.

۱.۴.۵ الگوریتم‌ها و مساله شدنی

حالت خاص مساله بهینه‌سازی شدت پرتو زمانی اتفاق می‌افتد که هیچ تابع هدف موجود نباشد. در این صورت مساله بهینه‌سازی، یک مساله شدنی است. فرض بر این است که هر جواب شدنی قابل قبول است و همه جواب‌های شدنی دارای کیفیت کم و بیش برابرند. برای کنترل تومور و جلوگیری از بوجود آمدن مشکل برای بافت سالم، برخی محدودیت‌ها از جمله کاهش یا افزایش دوز برای اندام مورد نظر و کران بالای دوز برای ارگان‌های در معرض خطر توسط برنامه‌ریز در نظر گرفته می‌شود. مدل ریاضی این

محدودیت‌ها به صورت زیر است:

$$TLB \leq A_T x \leq TUB$$

$$A_C x \leq CUB$$

$$0 \leq x.$$

الگوریتم‌های جستجوی شدنی به جستجوی مجموعه‌ای از شدت‌های پرتو می‌پردازند که فرمول فوق را تایید می‌کنند. الگوریتم‌های پرتوافکنی، روش‌های معروفی برای حل مسائل شدنی محدب هستند. روش آزادسازی سطر آگمون^۳، [۱] اسکونبرگ^۴ و موتزکین^۵ [۳۳] یک روش پرتوافکنی متوالی است که توسط سنسور^۶ و همکاران [۵] برای حل مساله شدنی شدت پرتو ارائه شد. آن‌ها الگوریتم پرتوافکنی همزمان سیمینو^۷ را برای حل مساله شدنی پیشنهاد کردند. روش سیمینو شامل تکرار در همه مجموعه‌های مربوطه و محاسبه مرکز ثقل سیستم است. این روش بهتر از روش عملکرد آزادسازی سطر است، چون می‌تواند جواب تقریبی در صورتی که اشتراک مجموعه‌های محدب تهی باشد، ایجاد کند. مساله شدنی خطی نمونه‌ای از مساله شدنی محدب است که در آن مجموعه‌های محدب نیم‌فضایی هستند که با نامساوی خطی توصیف می‌شوند. مساله شدنی محدب، نقطه‌ای در اشتراک ناتهی مجموعه‌های محدب پیدا می‌کند. الگوریتم دیگر برای حل مسائل شدنی محدب، الگوریتم زیرگرادیانت است که در آن هر محدودیت دوز محاسبه می‌شود و با هر محدودیت عناصر x تغییر می‌کنند.

۲.۴.۵ مدل برنامه‌ریزی خطی

اولین مدل بهینه‌سازی برای طراحی پرتودرمانی، در سال ۱۹۹۸ ارائه شد. از آن به بعد بسیاری از محققان مدل‌های خطی را آزمایش کردند.

هدف اصلی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی شامل موارد زیر است:

۱. کاهش حداکثر دوز یا تغییر دوز کران‌های بالا برای اندام‌های در معرض خطر یا سالم.

۲. افزایش حداقل دوز برای تومور.

۳. کاهش حداکثر انحراف از دوز تعیین شده برای تومور.

محدودیت‌ها باید شامل موارد زیر باشند:

۱. محدودیت‌های غیرمنفی برای شدت پرتو.

۲. کران بالای دوز برای اندام‌های در معرض خطر یا بافت طبیعی.

^۳Agmon

^۴Schoenberg

^۵Motzkin

^۶Censor

^۷Cimmino

۳. کاهش یا افزایش دوز برای تومور.

۴. کران بالای پرتو بین حداکثر شدت و متوسط شدت.

۵. کران‌های بالای میانگین دوز برای اندام‌های در معرض خطر.

با ترکیب اهداف و محدودیت‌ها، مدل‌های گوناگون را می‌توان فرمول‌بندی کرد. اگر هدف روی تومور باشد، آنگاه محدودیت دوز باید روی بافت در معرض خطر یا سالم ایجاد شود. اگر هدف اندام در معرض خطر و بافت طبیعی باشد، آنگاه محدودیت باید روی تومور باشد.

روش برنامه‌ریزی خطی دارای مزیت سرعت و جواب‌های غیرمنفی است. بعضی مواقع برنامه‌ریزی خطی نمی‌تواند جواب شدنی پیدا کند. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی این مشکل را دارند که اغلب محدودیت‌هایی برای پزشکان ایجاد می‌کنند. بنابراین از محدودیت‌های حجم-دوز استفاده می‌کنیم. برای غلبه بر نشدنی بودن مدل برنامه‌ریزی خطی، هولدر^۸ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را ارائه داد

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w^T \alpha + u_C^T \beta + u_N^T \gamma \\
 s.t \quad & TLB - L\alpha \leq A_T x \leq TUB \\
 & A_C x \leq CUB + U_C \beta \\
 & A_N x \leq NUB + U_N \gamma \\
 & 0 \leq L\alpha \leq TLB \\
 & -CUB \leq U_C \beta \\
 & 0 \leq U_N \gamma \\
 & 0 \leq x.
 \end{aligned} \tag{۱۰.۵}$$

که در این فرمول $u_N \in \mathbb{R}^{q_N}$, $u_C \in \mathbb{R}^{q_C}$, $l \in \mathbb{R}^{q_T}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{q_N}$, $\beta \in \mathbb{R}^{q_C}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{q_T}$, $U_N \in \mathbb{R}^{m_N \times q_N}$ و $U_C \in \mathbb{R}^{m_C \times q_C}$, $L \in \mathbb{R}^{m_T \times q_T}$ کران‌ها با بردارهای α , β و γ تغییر می‌کنند. ماتریس‌های L , U_C و U_N نشان می‌دهند که چگونه مقدار بهینه اندازه‌گیری می‌شود و این مقدار چگونه رد یا قبول می‌شود. این ماتریس‌ها و بردارها، به توابع معروفند. در این فرمول w وزن تعیین‌کننده اهمیت یکنواختی تومور است. وقتی w افزایش می‌یابد، تاکید روی پیدا کردن طرحی است که به دوز ضدتومور و یکنواخت برسد.

محقق به تحلیل دو مجموعه از توابع می‌پردازد. یکی تحلیل میانگین است که در آن

$$l = \frac{1}{m_T} e, u_C = \frac{1}{m_C} e, u_N = \frac{1}{m_N} e, L = I, U_C = I, U_N = I.$$

تحلیل دیگری که در آن

$$l = 1, u_C = 1, u_N = 1, L = e, U_C = e, U_N = e.$$

مدل برنامه‌ریزی خطی (۱۰.۵)، به معایب نشدنی غلبه می‌کند و یکنواختی تومور حاصل می‌شود.

^۸Holder

۳.۴.۵ محدودیت‌های حجم دوز

بسیاری از محققان روی تبدیل محدودیت‌های حجم-دوز (DVCs) به مدل‌های ریاضی کار کردند. لانگر اولین نفر بود که DVCs در بهینه‌سازی شدت پرتو را در برنامه‌ریزی خطی استفاده کرد [۲۸]. محققان یک دنباله از LP ها را با شمارش همه ترکیب‌های نقاط مقید که محدودیت‌های حجم-دوز را ایجاد می‌کنند، تولید می‌کنند پس از حل LP ها ترکیبی از وکسل‌ها را انتخاب می‌کنند که بهترین مقدار هدف را بدهد.

محبوبیت DVCs به این خاطر است که نمودار مقدار دوز (DVHs) یک روش به صرفه برای نشان دادن کل مقدار دوز توزیعی به یک ساختار است. نادیده گرفتن مسائل مربوط به مکان دوز در یک ساختار و چند نقطه که درست انتخاب شده روی منحنی DVH می‌تواند بررسی کاملی از توزیع دوز بدهد.

اگر بیش از ۲۰ وکسل موجود باشد مشکل می‌توان از این روش استفاده کرد. به‌طور مثال محدودیت حجم-دوز ۴۰ درصد را برای ریه که می‌تواند از ۲۰ Gy دوز بیشتر باشد، در نظر بگیرید. اگر ۱۰۰ وکسل در ریه باشد باید ۴۰ از ۱۰۰، LP ها را حل کند تا مقدار محدودیت حجم-دوز بالا به‌دست آید. این کار اساس استفاده از برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط برای مساله DVC است.

موریل^۹ و همکاران [۳۲] برای حل DVCs از روش طوق^{۱۰} استفاده کردند که ابتدا باهر و همکاران [۱۹] پیشنهاد داده بودند. محققان از این مطلب استفاده کردند که، در حجم بافت طبیعی نزدیک به حجم بافت هدف (بافت سرطانی) باید دوز بیشتری نسبت به بافت‌های طبیعی دور از حجم هدف دریافت کند. پس آن‌ها ساختارهای طبیعی را به دوز پایین و دوز بالا تقسیم کردند و کران‌های بالای دوزهای مختلف را برای حجم‌های دوز کم و زیاد اختصاص دادند. در این روش، DVC به محدوده دوز نقطه‌ای تقسیم شد. با استفاده از تجربه برای تقسیم‌بندی حجم دوز کم و زیاد بهترین نتیجه ممکن نمی‌تواند گرفته شود.

مریت^{۱۱} و زانگ^{۱۲} [۳۳] از برنامه‌ریزی خطی متوالی برای بهینه‌سازی نگاشت شدت پرتو استفاده کردند. افزایش کمینه دوز برای هر وکسل تومور انجام شد و افزایش دوز برای تومور و ارگان‌هایی که دچار مشکل هستند مشخص می‌شود. کنترل حجم-دوز با استفاده از آزاد شدن کران‌های بالا روی دوز ارگان‌های در معرض خطر ایجاد می‌شود تا این‌که حداکثر مقدار مجاز حاصل شود. با این حال هنوز مشکل نشدنی بودن در این مدل وجود دارد. دنباله‌ای از LP ها ایجاد می‌شود و k امین LP به‌صورت

^۹Morrill

^{۱۰}Collar technique

^{۱۱}Meritt

^{۱۲}Zhang

زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & ez \leq A_T x \leq TUB \\ & A_i x \leq M \quad \text{for all } i \in R_k \\ & A_i x \leq CUB_i \quad \text{for all } i \in C \setminus R_k \\ & 0 \leq x. \end{aligned}$$

در این فرمول، $R_k \subseteq C$ مجموعه‌ای از اندیس‌های متناظر با سمت راست‌هایی است که بعد از حل $(k-1)$ امین LP آزاد می‌شود و $M > CUB_i$ کران بالا روی آن محدودیت‌ها است.

برای $k \geq 2$ ، $R_k = \{j \in C : y_{j,k-1}^* > \lambda\} \cup R_{k-1}$ و $R_1 = \emptyset$ که در این فرمول $y_{j,k-1}^*$ متغیر دوگانه بهینه زام است در $(k-1)$ امین LP و $\lambda > 0$ پارامتر ثابت است.

در هر مرحله، محدودیت‌هایی که آزادسازی آن‌ها موجب افزایش مقدار هدف در حجم شده، انتخاب می‌شوند. چون جواب بهینه دوگان منحصر بفرد نیست، نیاز به دقت در انتخاب داریم. در نهایت، با تکرار آزاد شدن محدودیت‌ها، جواب LP نزدیک به جواب برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط است پیدا می‌شود. در این مدل مشکل نشدنی بودن مساله وجود دارد.

رومیژن^{۱۳} و همکاران [۳۶، ۳۷] تابع خطی محدب برای تقریب هر تابع محدب ارائه دادند. این مدل محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی را ندارد. آن‌ها از مفهوم محدودیت حجم در معرض خطر برای ارائه روش جدید استفاده کردند. محدودیتی که فرمول‌بندی کردند به محدودسازی میانگین نمودار حجم-دوز ساختارها می‌پردازد. این خطی بودن برای بهبود، دوز همگن در حجم هدف را حفظ می‌کند.

۵.۵ برنامه‌ریزی چندهدفه

در پرتودرمانی، توزیع دوز مورد نظر درمان، با توجه به محدودیت‌های فیزیکی و وجود توازن بین اهداف مختلف و متناقض، همواره امکان‌پذیر نیست. دلیل آن، محدودیت‌های فیزیکی و وجود تناقض‌هایی بین اهداف مختلف است. با این‌که پرتودرمانی چنددهه است که استفاده می‌شود، اما در ۱۰ سال اخیر روش چندهدفه از برنامه‌ریزی معکوس در پرتودرمانی به‌کار می‌رود.

یک روش برای حل مساله چندهدفه MO تبدیل آن به مساله تک‌هدفه است که از مجموعه وزن‌ها برای هر هدف استفاده می‌شود. این روش بسیار متداول است و روش اسکالری نامیده می‌شود که برای حل مسائل بهینه MO است. بنابراین می‌توان گفت مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی و مدل‌های خطی، حالت خاصی از مسائل چندهدفه هستند. مشکلی که در این روش وجود دارد این است که وزن‌ها ارزش بالینی ندارند و رابطه آن‌ها با جواب مورد نظر مشخص نیست. پس برای به‌دست آوردن جواب مناسب، برنامه‌ریز درمان نیاز است تا بهینه‌سازی را با وزن‌های گوناگون بهینه‌سازی کند.

^{۱۳}Romeijn

برنامه‌ریزی چندهدفه در IMRT به دو بخش برنامه‌ریزی چندهدفه خطی (MOLP) و برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی (MONP) تقسیم می‌شود. اولین مدل MOP برای IMRT توسط کاتراتز و همکاران [۸] ارائه شد. در این مدل از اهداف مبتنی بر واریانس استفاده کردند که به صورت زیر است:

$$F = (f_T, f_{C_1}, \dots, f_{C_k})$$

که در آن

$$f_T = \frac{1}{m_T} \frac{\|A_T x - \bar{d}_T\|_2}{\bar{d}_T}$$

$$f_{c_k} = \frac{1}{m_{C_k}} \frac{\|(A_{C_k} x - C_k UB)_+\|_2}{C_k UB}, \quad k = 1, \dots, K.$$

که در این فرمول $\bar{d}_T$ متوسط تکرار دوز برای تومور است. معمول‌ترین روش حل MOP روش مجموع وزن‌دار است. رابطه بین جواب‌های بهینه مجموع وزن‌دار و جواب‌های کارای MOP در قضایای فصل اول بیان شد.

کاتراتز^{۱۴} [۸] و همکاران از قضیه ۱۵.۱۰۱ استفاده کردند و وزن‌های مختلف برای مجموعه کارا به دست آوردند و از یک الگوریتم گرادیان مزدوج برای حل مساله مجموع وزن‌دار استفاده کردند. لاهاناس^{۱۵} و همکاران [۲۴] یک مساله چندهدفه، با تغییرات کمی نسبت به مدل کاتراتز [۸] به صورت زیر ارائه دادند:

$$F = (f_T, f_N, f_C)$$

که در آن

$$f_T = \frac{1}{m_T} \|A_T x - TG\|_2$$

$$f_N = \frac{1}{m_N} \|(A_N x)\|_2$$

$$f_C = \frac{1}{m_C} \|(A_C x - CUB)_+\|_2.$$

در این فرمول، f_T میانگین مربع انحراف از دوز تجویز شده برای تومور است و f_C میانگین مربع مصرف بیش از حد دوز برای اندام‌های در معرض خطر و f_N میانگین مربع دوز برای بافت نرمال است. برای حذف مساله شدت پرتوی منفی، این مساله با استفاده از مربع ریشه شدت پرتو به عنوان متغیرهای تصمیم به مساله نامقید تبدیل می‌شود.

محققان بر اساس مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، مساله شدت پرتو را با MOLP فرمول‌بندی کردند.

^{۱۴}Cotrutz

^{۱۵}Lahanas

مدل MOLP ساده کوفر^{۱۶} و هماچر^{۱۷} [۱۶] به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & F = (f_T, f_C, f_N) \\ \text{s.t.} \quad & A_T x \geq TLB(1 - f_T) \\ & A_C x \leq CUB(1 + f_C) \\ & A_N x \leq NUB(1 + f_N) \\ & f_T, f_C, f_N \geq 0 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

که در این فرمول، f_T حداکثر انحراف از کران پایین دوز تجویزی برای تومور، f_C حداکثر انحراف از کران بالای دوز تجویز شده برای بافت بیمار و f_N حداکثر انحراف از کران بالای دوز تجویز شده برای بافت نرمال است.

کوفر [۲۵] و تیک^{۱۸} [۴۴] و کرافت^{۱۹} [۹، ۱۰] از دوز یکنواخت معادل (EUD) برای همه ساختارها به عنوان اهداف استفاده کردند. توابع هدف در فرمول کوفر و همکاران [۲۵] به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} F &= (F_T, \dots, F_{C_1}, \dots, F_{C_K}) \\ F_T &= \frac{G_T - \min_T(A_T x)}{G_T} \\ F_{C_k} &= \frac{EUD_{C_k} - G_{C_k}}{G_{C_k}}, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

در این فرمول $\min_T(A_T x)$ یعنی مقدار دوز کمینه برای بافت هدف و $G_{C_k} \neq 0$.

به دلیل خطی بودن، MOLP راحت‌تر از MONP حل می‌شود.

اهداف حجم دوز توسط که حلبی^{۲۰} و همکاران استفاده شدند، عبارتند از:

۱. کاهش تعداد وکسل‌های بافت هدف کمتر از دوز آستانه تجویز شده دریافت می‌کنند.

۲. کاهش تعداد وکسل‌های OAR که بیش از دوز آستانه دریافت می‌کنند.

آنها نشان دادند که فرمول چندهدفه با اهداف حجم دوز برای تقریب محدب بهتر از فرمول‌های دارای محدودیت حجم دوز است. آنها این مساله را با روش مجموع وزن‌دار حل کردند و وزن‌ها توسط الگوریتم PGEN انتخاب شدند که توسط کرافت [۱] ارائه شد. اکثر تحقیقات از روش مجموع وزن‌دار که کرافت پیشنهاد داده بود استفاده می‌کنند. چون وزن‌ها ارزش بالینی ندارند و مشکل می‌توان یک وزن برای ایجاد نقاط غیرتسلطی با توزیع مساوی انتخاب کرد. پس این راه‌حل‌ها نمی‌تواند به‌طور کامل بیانگر مجموعه غیرتسلطی باشد.

^{۱۶}Kufer

^{۱۷}Hamacher

^{۱۸}Thieke

^{۱۹}Craft

^{۲۰}Halabi

اکنون روش‌های راه‌حل دیگر را ارائه می‌دهیم که می‌تواند برای فرمول‌سازی MOLP مساله بهینه‌سازی شدت استفاده شود.

هماچر^{۲۱} و کوفر [۱۶] نظریه ایجاد زیرمجموعه‌ای از مجموعه غیرتسلطی را براساس مفهوم راه‌حل‌های مشابه ارائه دادند. کرافت و همکاران از روش محدودیت نرمال برای ایجاد توازن دو بعدی بین دوز تومور و ارگان بیمار استفاده کردند و روش PGEN برای انتخاب وزن‌ها برای ایجاد مجموعه غیرتسلطی ارائه داد. اکثر این روش‌ها نمی‌توانند مجموعه کامل غیرتسلطی را ارائه دهند، آن‌ها یک زیرمجموعه از مجموعه غیرتسلطی پیدا می‌کنند و مجموعه غیرتسلطی را با نقاط غیرتسلطی به‌دست آمده تقریب می‌زنند.

روش محدودیت نرمال، بر اساس روش داس^{۲۲} و دنیس^{۲۳} [۱۰] است که این روش اشتراک مرز نرمال است. در این روش مجموعه‌ای از نقاط مرجع هم‌فاصله (CHIM) روی پوسته محدب ایجاد می‌کنند. برای هر نقطه مرجع، یک نقطه غیرتسلطی متناظر توسط حل مساله تک‌هدفه پیدا می‌شود. این روش می‌تواند نقاط غیرتسلطی را پیدا کند اما این محدودیت را دارد که اگر نرمال CHIM دارای دو مولفه مثبت و منفی باشد ممکن است بخشی از مجموعه غیرتسلطی نادیده گرفته شود.

روش کرافت و همکاران [۱۰] از نظریه قرار دادن مجموعه غیرتسلطی بین کران بالا و کران پایین تقریب محدب، استفاده می‌کند. در هر تکرار یک وزن جدید محاسبه می‌شود و تقریب بالا و پایین تغییر می‌کند. ابتدا CHIM اولین تقریب برای کران بالا در نظر گرفته می‌شود.

شاهو و ارگات [۳۹، ۴۰] از مدل MOLP بر اساس مدل هولدر استفاده کردند که تابع هدف آن به‌صورت $\min(\alpha, \beta, \gamma)$ است و این مدل برای مساله بهینه‌سازی شدت پرتو انتخاب کردند که در آن، مینیمم‌سازی اهداف که عبارتند از، حداکثر انحراف از دوز منتقل شده کران پایین تومور α ، کران‌های بالای اندام‌های در معرض خطر β و کران بافت نرمال γ است که به‌طور همزمان صورت می‌گیرد. مدل MOLP که برای حل مثال‌های پرتودرمانی که به آن اشاره می‌کنیم استفاده می‌شود به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & (\alpha, \beta, \gamma) \\ \text{s.t.} \quad & TLB - \alpha e \leq A_T x \\ & A_C x \leq CUB + \beta e \\ & A_N x \leq NUB + \gamma e \\ & 0 \leq \alpha \leq \alpha_u \\ & \min CUB \leq \beta \leq \beta_u \\ & 0 \leq \gamma \leq \gamma_u \\ & 0 \leq x. \end{aligned} \quad (2.5)$$

که در آن $\alpha_u \in \mathbb{R}$ و $\beta_u \in \mathbb{R}$ و $\gamma_u \in \mathbb{R}$ ، به ترتیب کران‌های بالا برای α و β و γ می‌باشند. سه هدف α و β و γ توسط کران‌های بالا و پایین محدود می‌شوند. همان اثر می‌تواند با اضافه کردن کران‌های بالا

^{۲۱}Hamacher

^{۲۲}Das

^{۲۳}Dennis

و پایین روی متغیرهای تصمیم، یعنی شدت پرتو x به‌دست آید. آن‌ها الگوریتم اولیه و دوگان بنسون را برای حل این MOLP در فضای هدف به‌کار بردند و به کمک این الگوریتم‌ها، مجموعه جواب‌های ε -کارا را پیدا می‌کنند.

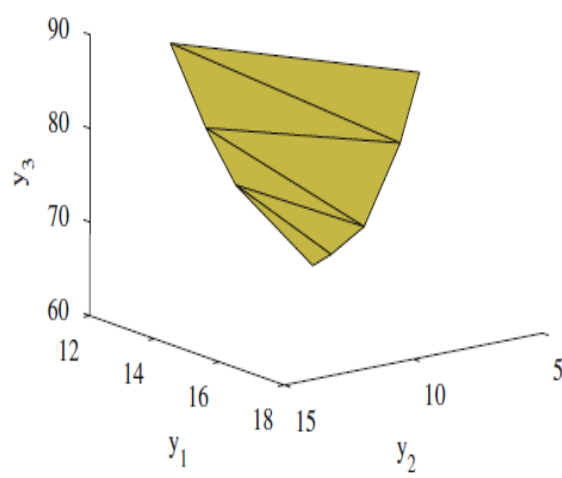
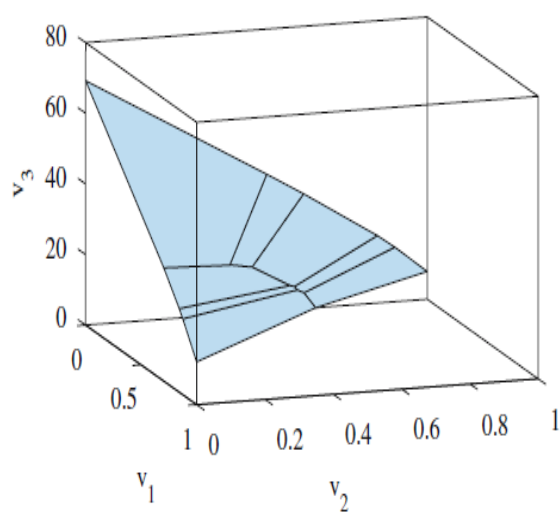
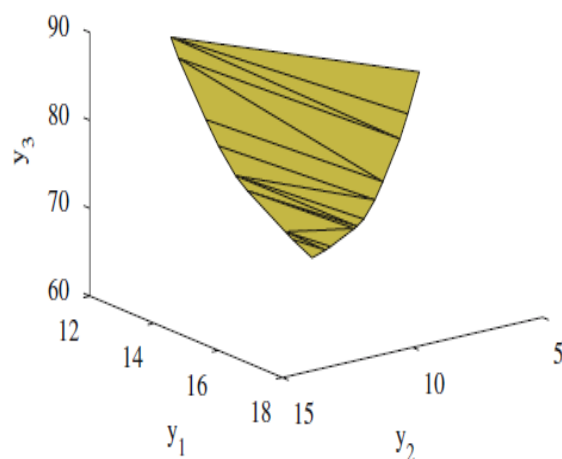
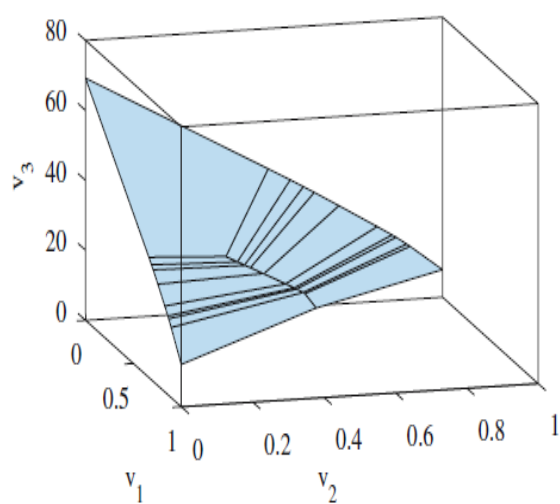
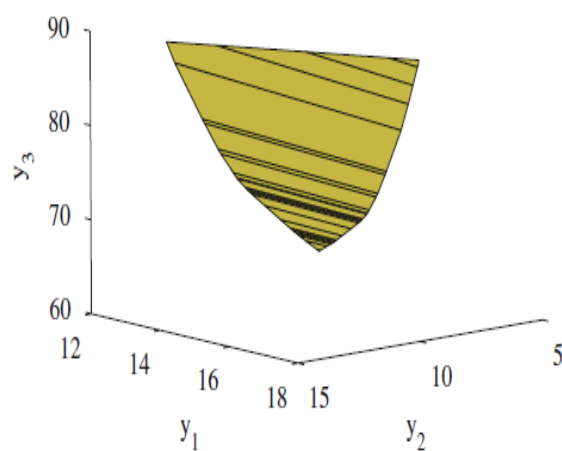
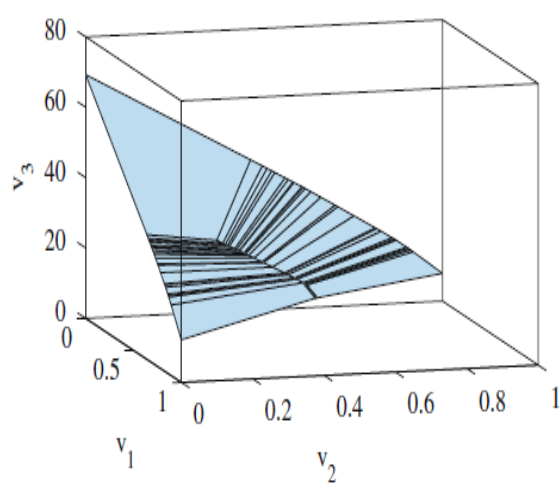
در فصل ۳ نشان دادیم برنامه‌ریزی خطی چندهدفه توسط الگوریتم اولیه و دوگان حل می‌شوند. در این‌جا به مساله بهینه‌سازی شدت پرتو می‌پردازیم، برای این منظور مساله (۲.۵) را در نظر می‌گیریم. اهداف این MOLP را y_1, y_2, y_3 در نظر می‌گیریم که کاهش حداکثر انحراف از کران‌های پایین تومور، کران‌های بالای ارگان در معرض خطر و کران‌های بالای بافت نرمال هستند. سه وضعیت عصب صوتی (AN) و پروستات (PR) و زخم لوزالمعده (PL) را در مثال زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم [۳۹]. در این پایان‌نامه، برای حل MOLP برای ورم عصب صوتی، پروستات و زخم لوزالمعده از الگوریتم بنسون و الگوریتم دوگان بنسون و تقریب الگوریتم دوگان بنسون استفاده می‌کنیم. دو مثال بیماری ورم عصب صوتی و پروستات می‌توانند با الگوریتم دوگان بنسون حل شوند. الگوریتم در مطلب ۷.۱ اجرا شده است و نتایج آن در مثال زیر نشان داده می‌شود.

مثال ۱.۵.۵. مساله بهینه‌سازی شدت پرتو در برنامه‌ریزی پرتودرمانی می‌تواند به‌صورت برنامه‌ریزی خطی چندهدفه باشد. MOLP برای ورم عصب صوتی (AN) دارای ۳ هدف و ۵۹۷ متغیر و ۱۶۶۴ محدودیت است. با حل مساله اولیه، P دارای ۵۵ رأس و ۸۵ ابروجه است. نتایج ورم عصب صوتی در شکل ۲.۵ مشاهده می‌شود. مجموعه $\max_{\mathcal{K}} D$ و ابروجه‌های غیرتسلطی P که توسط الگوریتم دوگان بنسون به‌دست می‌آیند، به ترتیب در بالا سمت چپ و راست شکل ۲.۵ نشان داده می‌شوند. تصاویر دیگر حل مساله دوگان توسط مساله تقریب الگوریتم بنسون با خطای تقریب $\varepsilon = 0.1\%$ و $\varepsilon = 0.01\%$ است و تصاویر سمت چپ $\max_{\mathcal{K}} D^0$ و تصاویر سمت راست، ابروجه‌های غیرتسلطی P^i را نشان می‌دهند.

جدول ۱۰.۵: تعداد رأس‌ها و صفحه‌های برشی به‌دست آمده از مساله اولیه و دوگان برای (AN) با خطای تقریب ε

ε	زمان دوگان (s)	رأس‌ها	برش‌ها	زمان اولیه (s)	رأس‌های غیرتسلطی	برش‌ها
۰.۱	۱۰.۴۸۴	۱۷	۸	۵۰.۹۳۸	۲۷	۲۱
۰.۰۱	۳۰.۷۸	۳۳	۱۸	۸۰.۷۰۳	۴۷	۴۴
۰	۸۰.۸۶۴	۸۵	۵۵	۱۳۰.۹۸۴	۵۵	۸۵

MOLP برای پروستات (PR) دارای ۳ هدف و ۸۲۴ متغیر و ۲۱۴۲ محدودیت است. با حل مساله اولیه، P دارای ۳۱۶۵ نقطه رأسی غیرتسلطی و ۳۲۸۰ ابروجه است. نتایج بیماری پروستات در تصویر ۳.۵ آمده است. تصاویر در بالا سمت چپ و راست به ترتیب $\max_{\mathcal{K}} D$ و ابروجه‌های غیرتسلطی P هستند که توسط الگوریتم دوگان بنسون به‌دست می‌آیند. بقیه تصاویر نتایجی که توسط تقریب الگوریتم دوگان بنسون به‌دست می‌آیند را نشان می‌دهند که سمت چپ تصاویر بیانگر $\max_{\mathcal{K}} D^0$ و تصاویر سمت راست ابروجه‌های غیرتسلطی P^i را نشان می‌دهد که از بالا به پایین دارای تقریب خطای $\varepsilon = 0.1\%$ و $\varepsilon = 0.01\%$ هستند.



شکل ۲۰۵: نتایج مورد AN

جدول ۲.۵: تعداد رأس‌ها و صفحه‌های برشی به‌دست آمده از مساله اولیه و دوگان برای (PR) با خطای تقریب ϵ

ϵ	زمان دوگان (s)	رأس‌ها	برش‌ها	زمان اولیه (s)	رأس‌های غیرتسلطی	برش‌ها
۰.۱	۴.۴۲۲	۳۹	۱۹	۱۴.۷۸۱	۵۶	۴۲
۰.۰۱	۱۸.۴۵۴	۱۵۷	۷۸	۶۴.۹۵۴	۲۹۶	۱۸۴
۰.۰۰۱	۸۶.۷۳۳	۷۲۹	۳۶۶	۲۵۷.۳۲۸	۱۱۵۷	۶۹۲
۰	۷۹۲.۳۹۰	۳۲۸۰	۳۱۶۵	۹۹۵.۰۵۰	۳۱۶۵	۳۲۸۰

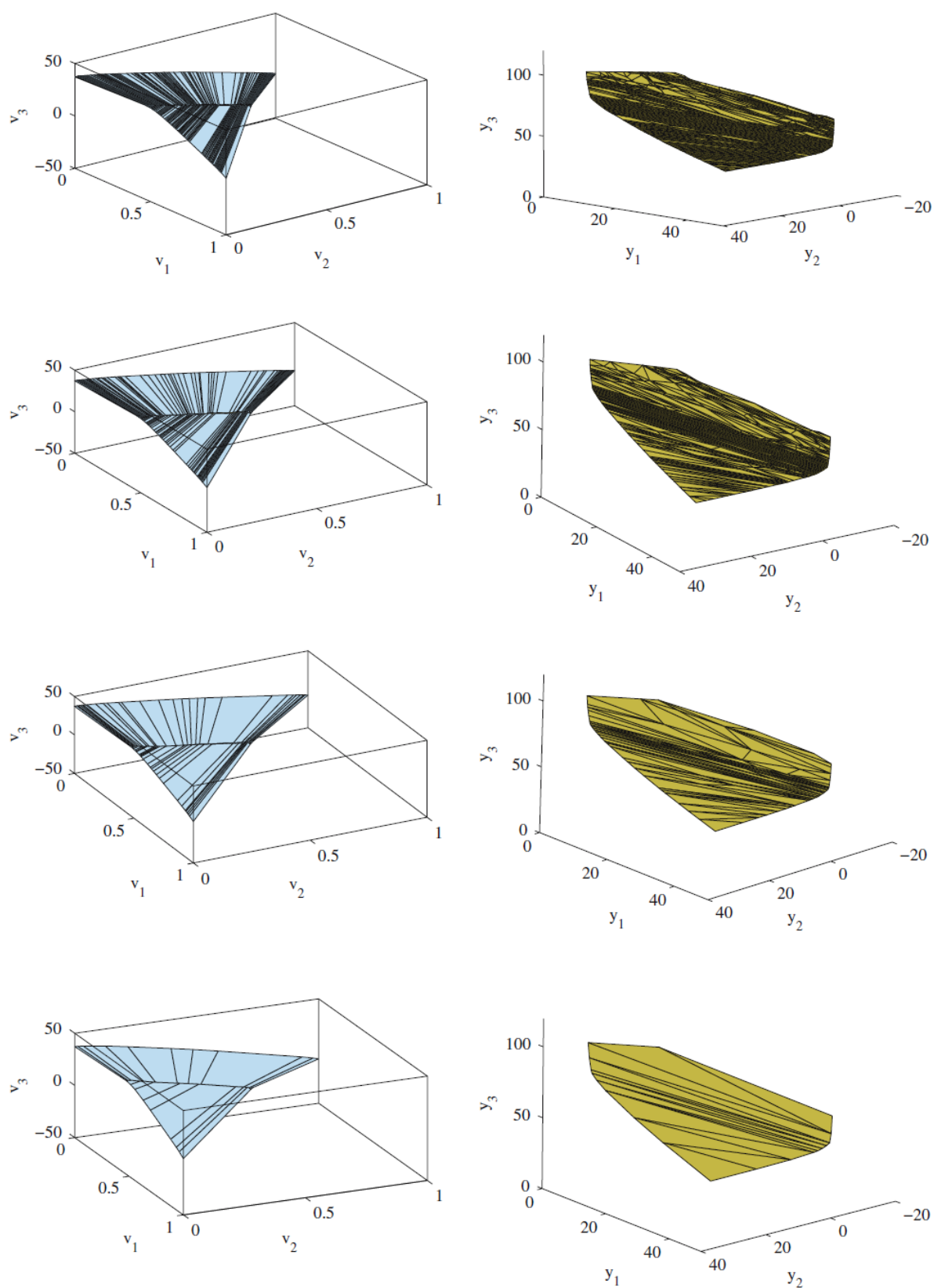
زمان محاسبه برای مساله اولیه در (AN) ۱۳/۹۸۴ ثانیه و در (PR) ۹۹۵/۰۵۰ ثانیه و برای مساله دوگان، در (AN) زمان محاسبه ۸/۸۶۴ و در (PR) ۷۹۲/۳۹۰ است. در این مثال زمان محاسبات مورد بررسی قرار گرفت، مشاهده می‌کنیم الگوریتم دوگان دارای مزیت محاسباتی است. به‌طور کلی اگر مجموعه شدنی دوگان ابروجه‌های کمتری نسبت به مجموعه اولیه داشته باشد روش دوگان سریعتر است.

الگوریتم دوگان بنسون نمی‌تواند مساله زخم لوزالمعدة را در مدت ۱۰ ساعت محاسبه کند، بنابراین نتیجه‌های به‌دست آمده توسط تقریب الگوریتم دوگان بنسون، در تصویر ۴.۵ نشان داده شده است. تصاویر سمت چپ بیانگر $\max_{\mathcal{K}} D^0$ و تصاویر سمت راست ابروجه‌های غیرتسلطی P^i هستند. تصاویر بالا برای $\epsilon = 0/1$ و تصاویر پایین برای $\epsilon = 0/1$ هستند.

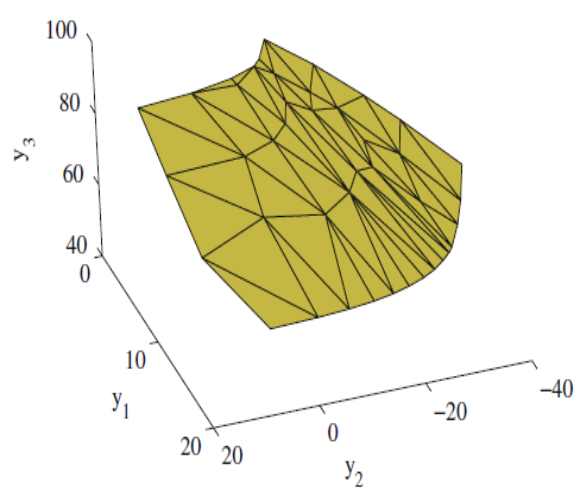
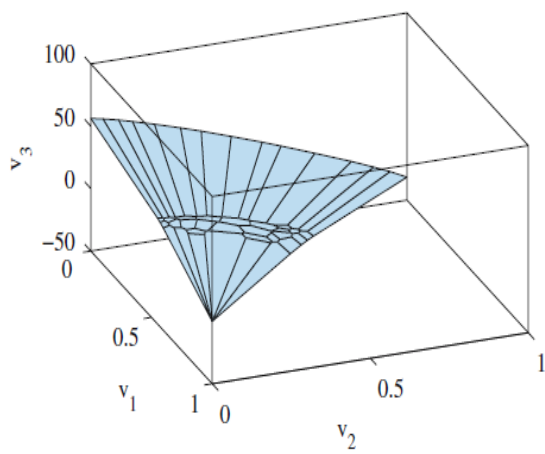
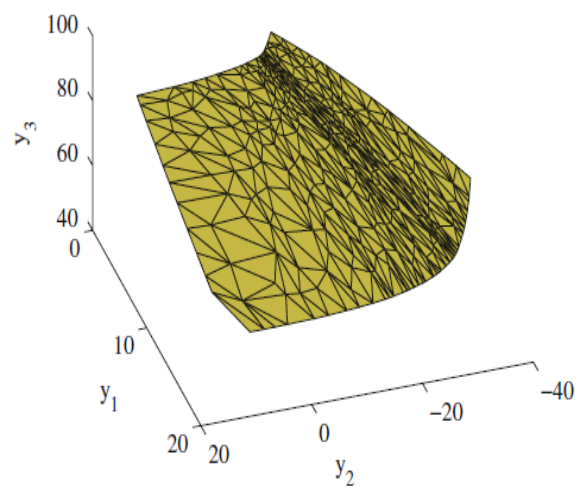
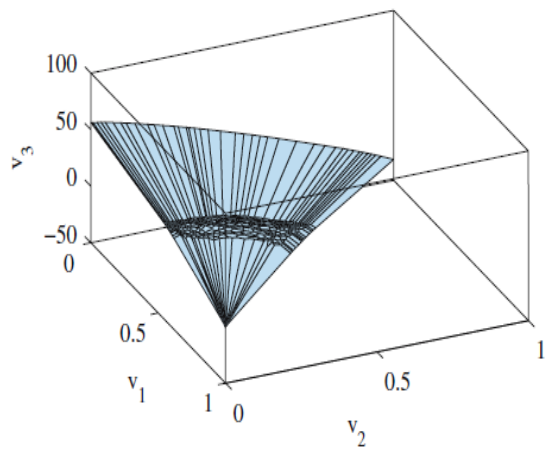
جدول ۳.۵: تعداد رأس‌ها و صفحه‌های برشی به‌دست آمده از مساله اولیه و دوگان برای (PL) با خطای تقریب ϵ

ϵ	زمان دوگان (s)	رأس‌ها	برش‌ها	زمان اولیه (s)	رأس‌های غیرتسلطی	برش‌ها
۰.۳	۲۹.۱۱۰	۴۰	۲۱	۷۰.۷۹۶	۵۷	۳۷
۰.۱	۵۸.۲۶۳	۸۵	۴۴	۱۶۴.۳۶۰	۱۵۲	۹۰
۰.۰۵	۱۰۲.۷۶۱	۱۵۱	۷۸	۳۰۳.۶۳۰	۲۷۸	۱۵۹
۰.۰۱	۴۰۱.۹۳۴	۵۸۲	۲۹۸	۱۱۸۴.۹۵۰	۱۰۹۷	۵۸۶
۰.۰۰۵	۷۳۴.۷۸۴	۱۰۵۸	۵۳۹	۲۱۴۷.۵۳۰	۱۹۸۹	۱۰۴۱

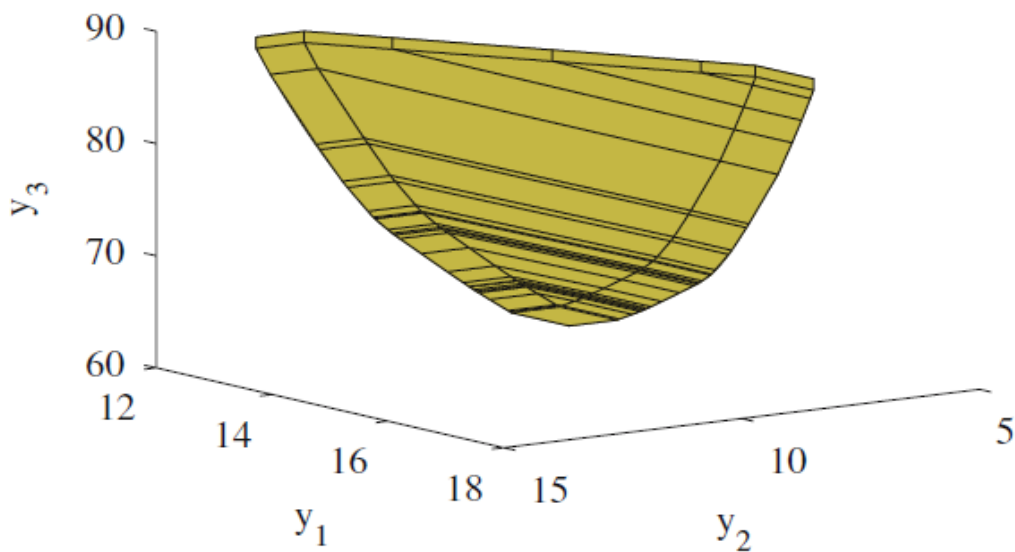
تقریب الگوریتم دوگان بنسون، ۳ مورد را با در نظر گرفتن خطای $\epsilon = 0/005$ در مدت ۱۵ دقیقه حل می‌کند. همان‌گونه که در جدول و تصاویر ۲.۵، ۳.۵ و ۴.۵، تاثیر انتخاب ϵ را مشاهده می‌کنید، خطای تقریب کمتر موجب ایجاد رأس‌ها و برش‌های تباهیده بیشتر و زمان محاسبه طولانی‌تر می‌شود. مقایسه نتیجه‌های به‌دست آمده توسط الگوریتم بنسون و تقریب الگوریتم بنسون، $\mathcal{L}^0$ و $\mathcal{L}^0$ را توسط مقادیر گوناگون خطای تقریب ϵ برای سه مورد نشان می‌دهد. تصویر ۵.۵، $\mathcal{L}^0$ برای عصب صوتی را نشان می‌دهد. $\mathcal{L}^0$ با خطای تقریبی $\epsilon = 0/1$ که توسط تقریب الگوریتم بنسون به‌دست آمده در تصویر ۶.۵



شکل ۳.۵: نتایج مورد PR



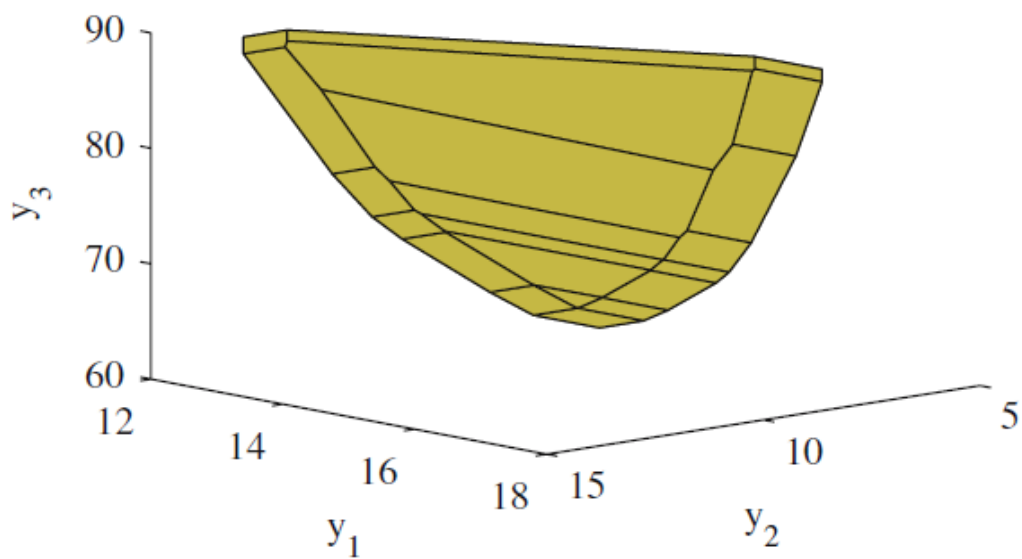
شکل ۴.۵: نتایج مورد PL



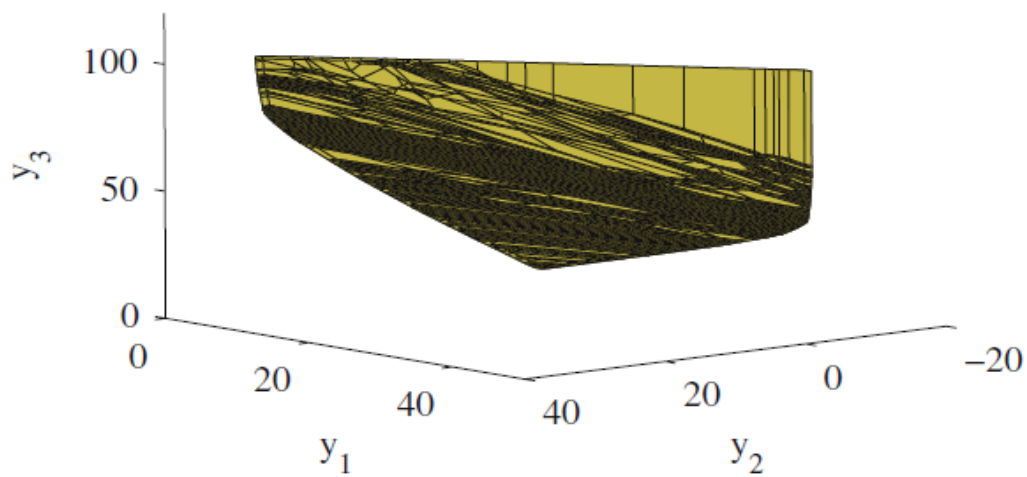
شکل ۵.۵: $\mathcal{V}'$ ، AN به دست آمده از الگوریتم بنسون

نشان می‌دهیم. برای بیماری پروستات، $\mathcal{V}'$ در شکل ۷.۵ نشان داده شده است. $\mathcal{V}''$ با $\epsilon = 0.1$ برای بیماری پروستات که توسط تقریب الگوریتم بنسون به دست آمده و در تصویر ۸.۵ نشان می‌دهیم. $\mathcal{V}''$ برای بیماری زخم لوزالمعده با خطای تقریب $\epsilon = 0.005$ در شکل ۹.۵ و با خطای تقریبی $\epsilon = 0.1$ در شکل ۱۰.۵ مشاهده می‌شود.

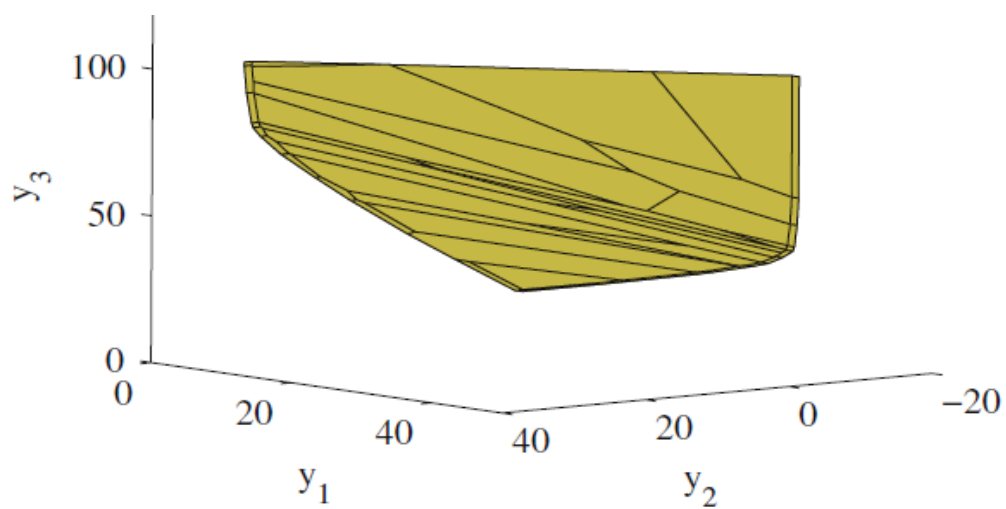
تعداد رأس‌ها و برش‌های $\mathcal{V}''$ با مقادیر مختلف ϵ در جدول‌های ۱.۵ و ۲.۵ و ۳.۵ آمده است. اگر خطای تقریب در تقریب الگوریتم بنسون و تقریب الگوریتم دوگان بنسون ϵ باشد، هر دو الگوریتم پیدا کردن مجموعه ϵ -غیرتسلطی را تضمین می‌کنند ($\epsilon = \epsilon e$). بنابراین می‌توانیم زمان محاسبه حل $\mathcal{V}''$ و P^i را با خطای تقریب یکسان ϵ مقایسه کنیم و در ۳ بیماری مشاهده می‌شود، حل تقریب دوگان سریعتر از حل تقریب مساله اولیه با خطای تقریب ϵ یکسان است. با حل MOLP اولیه، $\mathcal{V}'$ را به دست می‌آوریم. حل مساله دوگان اجازه محاسبه ابروجه غیرتسلطی را می‌دهد که این مزیت حل مساله دوگان است.



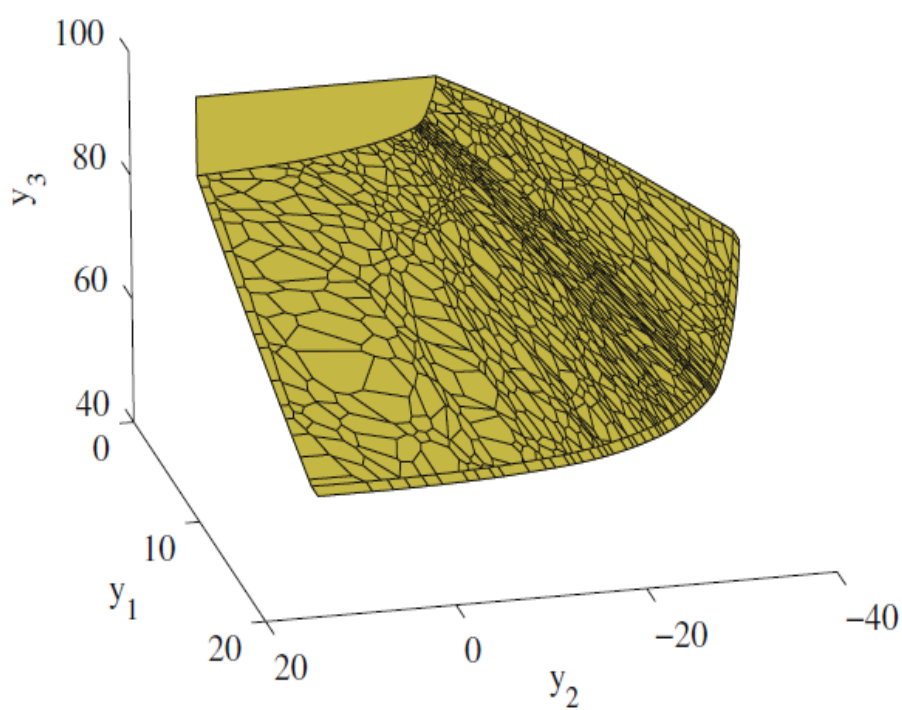
شکل ۶.۵: $\mathcal{N}^o$, AN به دست آمده از تقریب الگوریتم بنسون با $\epsilon = 0.1$



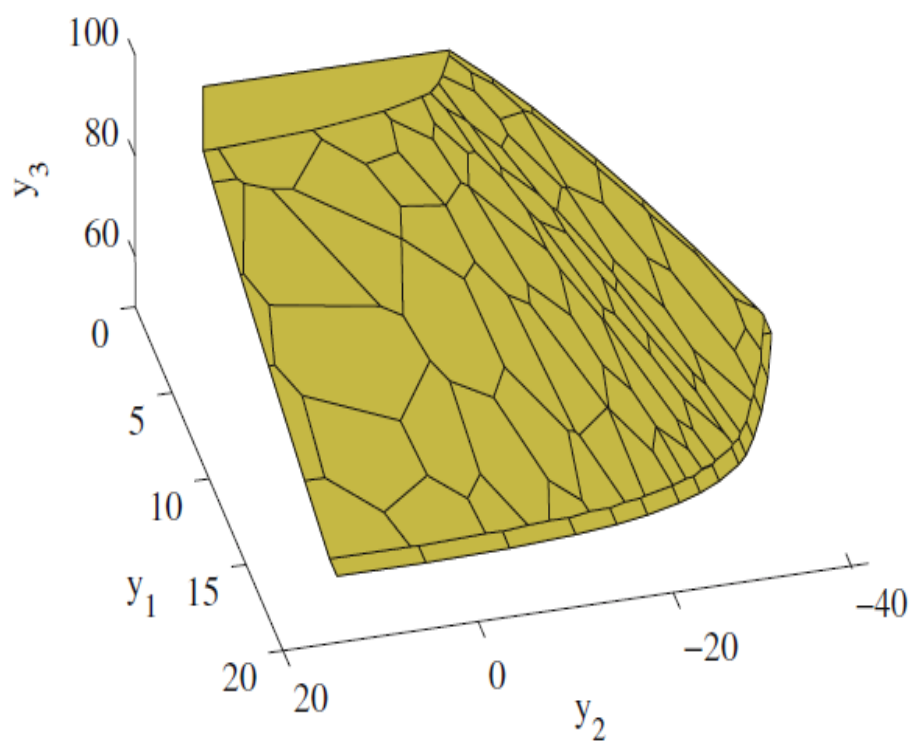
شکل ۷.۵: $\mathcal{N}^r$, PR به دست آمده از تقریب الگوریتم بنسون



شکل ۸.۵: γ^o ، PR با $\epsilon = 0.1$



شکل ۹.۵: γ^o ، PL با $\epsilon = 0.005$



شکل ۱۰.۵: y'' ، PL با $\epsilon = 0.1$

- [1] Agmon, S, The relaxation method for linear inequalities, Canadian Journal of Mathematics, 6, 382– 392 (1954).
- [2] Benson, H.P, An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem, Journal of Global Optimization, 13, 1–24 (1998).
- [3] Benson, H.P, Hybrid approach for solving multiple-objective linear programs in outcome space, Journal of Optimization Theory and Applications, 98, 17–35 (1998).
- [4] Benson, H.P, Further analysis of an outcome set-based algorithm for multiple-objective linear programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 97(1), 1–10 (1998).
- [5] Censor, Y, Altschuler, M, Powlis, W, A computational solution of the inverse problem in radiation therapy treatment planning, Applied Mathematics and Computation, 25, 57–87 (1988).
- [6] Chinchuluun, A, Pardalos, P, A survey of recent developments in multiobjective optimization, Annals of Operations Research, 154, 29–50 (2007).
- [7] Chinchuluun, A, Pardalos, P, Migdalas, A, Pitsoulis, L. (eds.), Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria. Springer, Berlin (2008).
- [8] Cotrutz, C, Lahanas, M, Kappas, K, Baltas, D, A multiobjective gradient-based dose optimization algorithm for external beam conformal radiotherapy, Physics in Medicine and Biology, 46, 2161–2175 (2001).
- [9] Craft, D, Halabi, T, Bortfeld, T, Exploration of tradeoffs in intensity-modulated radiotherapy, Physics in Medicine and Biology, 50, 5857–5868 (2005).
- [10] Craft, D.L, Halabi, T.F, Shih, H.A, Bortfeld, T.R, Approximating convex Pareto surfaces in multiobjective radiotherapy planning, Journal of Medical Physics Phys, 33, 3399–3407 (2006).

- [11] Das, I, Dennis, J.E, Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems, *SIAM Journal on Optimization*, 8, 631–657 (1998).
- [12] Ehrgott, M, *Multicriteria Optimization*, 2nd edn. Springer, Berlin (2005).
- [13] Ehrgott, M, Wiecek, M, Multiobjective programming. In: Figueira, J, Greco, S, Ehrgott, M (eds.) *Multicriteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer, New York, pp. 667–722 (2005).
- [14] Ehrgott, M, Löhne A, Shao L, A dual variant of Benson’s outer approximation algorithm, *Journal of Global Optimization*, 52:757–778 (2012).
- [15] Grünbaum, B, In: Kaibel, V, Klee, V, Ziegler, G.M (eds.) *Convex Polytopes*, Volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*, 2nd ed. Springer, New York (2003).
- [16] Hamacher, H, Küfer, K.H, Inverse radiation therapy planing—A multiple objective optimization approach, *Discrete Applied Mathematics*, 118, 145–161 (2002).
- [17] Heyde, F, Löhne, A, Geometric duality in multiple objective linear programming, *SIAM Journal on Optimization*, 19(2), 836–845 (2008).
- [18] Heyde, F, Löhne, A, Tammer, C, Set-valued duality theory for multiple objective linear programs and application to mathematical finance, *Mathematical Methods of Operations Research*, 69(1), 159–179 (2009).
- [19] Holder, A: Designing radiotherapy plans with elastic constraints and interior point methods. *Health Care Management Sci.* 6(1), 5–16 (2003).
- [20] Isermann, H, Proper efficiency and the linear vector maximum problem, *Oper. Res.*, 22, 189–191 (1974).
- [21] Isermann, H, On some relations between a dual pair of multiple objective linear programs, *Zeitschrift. Journal of the Operational Research*, 22, 33–41 (1978).
- [22] Jahn, J, *Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions*, Springer, Berlin (2004).
- [23] Kornbluth, J.S.H, Duality, indifference and sensitivity analysis in multiple objective linear programming, *Journal of the Operational Research Q*, 25(4), 599–614 (1974).
- [24] Küfer, K.-H, Hamacher, H, A multicriteria optimization approach for inverse radiotherapy planning, In W. Schlegel T. Bortfeld (Eds.), *XIIIth international conference on the use of computers in radiation therapy Heidelberg*: Springer, pp. 26–28 (2000).

- [25] Küfer, K.H, Scherrer, A, Monz, M, Alonso, F, Trinkaus, H, Bortfeld, T, Thieke, C, Intensity-modulated radiotherapy—A large scale multi-criteria programming problem, *OR Spectr*, 25, 223–249 (2003).
- [26] Lahanas, M, Schreibmann, E, Baltas, D, Multiobjective inverse planning for intensity modulated radiotherapy with constraint-free gradient-based optimization algorithms, *Physics in Medicine and Biology*, 48, 2843–2871 (2003).
- [27] Lahanas, M, Schreibmann, E, Milickovic, N, Baltas, D, Intensitymodulated beamradiation therapy dose optimization with multi-objective evolutionary algorithms, In: Fonseca CM, Fleming PJ, Zitzler E, Deb K, Thiele L (eds) *Evolutionary multicriterion optimization. Lecture Notes in Computer Science*, 2632, 648–661 (2003).
- [28] Langer, M, Optimization of beam weights under dose-volume restrictions, *International Journal of Radiation Oncology, Biology, Physics*, 13, 1255–1260 (1987).
- [29] Loridan P, ε -solutions in vector minimization problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 43(2), 265–276 (1984).
- [30] Luc, D.T, *Theory of Vector Optimization*, volume 319 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer, Berlin (1988).
- [31] Merritt, M, Zhang, Y, A successive linear programming approach to IMRT optimization problem, Technical report, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University (2002).
- [32] Morrill, S, Lane, R, Wong, J, Rosen, I, Dose-volume considerations with linear programming optimization, *Medcial Physics*, 18(6), 1201–10 (1991).
- [33] Motzkin, T. S, Schoenberg, I. J, The relaxation method for linear inequalities, *Canadian Journal of Mathematics*, 6, 393–404 (1954).
- [34] Przybylski, A, Gandibleux, X, Ehrgott, M, A recursive algorithm for finding all nondominated extreme points in the outcome set of a multiobjective integer program, *INFORMS Journal on Computing*, 22, 371–386 (2010).
- [35] Rockafellar, R.T, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (1972).
- [36] Romeijn, H, Ahuja, R, Dempsey, J, Kumar, A, Li, J, A novel linear programming approach to fluence map optimization for intensity modulated radiation therapy treatment planning, *Physics in Medicine and Biology*, 48, 3521–3542 (2003).
- [37] Romeijn, H, Ahuja, R, Dempsey, J, Kumar, A, A new linear programming approach to radiation therapy treatment planning problems, *Journal of the Operations Research*, 54(2) (2006).

- [38] Ruzika S, Wiecek MM, Approximation methods in multiobjective programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 126(3), 473–501 (2005).
- [39] Shao, L, Ehrgott, M, Approximately solving multiobjective linear programmes in objective space and an application in radiotherapy treatment planning, *Math. Methods Oper. Res*, 68(2), 257–276 (2008).
- [40] Shao, L, Ehrgott, M, Approximating the nondominated set of an molp by approximately solving its dual problem, *Mathematical Methods of Operations Research*, 68, 469–492 (2008).
- [41] Shepard, D, Ferris, M, Olivera, G, Mackie, T, Optimizing the delivery of radiation therapy to cancer patients, *SIAM Review*, 41(4), 721–744 (1999).
- [42] Steuer, R.E, *Multiple Criteria Optimization, Theory, Computation and Application*. Wiley, New York (1985).
- [43] Steuer, R.E, *Adbase multiple objective linear programming package*, Technical report, University of Georgia, Athens, Georgia (1989).
- [44] Thieke, C, *Multicriteria optimisation in inverse radiotherapy planning*, Ph.D. thesis, Ruprecht–Karls– Universität Heidelberg, Germany (2003).
- [45] Ulungu, E.L, Teghem, J, The two phases method: an efficient procedure to solve bi-objective combinatorial optimization problems, *Found. Comput. Decis, Sci*: 20, 149–165 (1995).
- [46] Webster, R, *Convexity*. Oxford University Press, Oxford Science Publications, Oxford (1994).
- [47] Zopounidis, C, Pardalos, P (eds.), *Handbook of Multicriteria Analysis*, Springer, New York (2010).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Facet	ابروجه
Supporting Hyperplane	ابرصفحه حائل
Intersecting	اشتراک
Algorithm	الگوریتم
Anti Ideal	آنتی ایده‌آل
Primal	اولیه
Ideal	ایده‌آل
Cut	برش
Linear Programme	برنامه‌ریزی خطی
Closed	بسته
Dimension	بعد
Optimal	بهینه
Biobjective Optimization	بهینه‌سازی دوهدفه
Multiobjective Optimization	بهینه‌سازی چندهدفه
Maximal	بیشینه
Radiotherapy	پرتودرمانی
Convex Hull	پوسته محدب
Coupling Function	تابع جفت‌ساز
Degenerate	تباهیده
Partial Order	ترتیب جزئی
Approximation	تقریب
Inner Approximation	تقریب درونی
Outer Approximation	تقریب بیرونی
Single Objective	تک‌هدفه
Solid	توپر

Optimal Solution	جواب بهینه
Efficient Solution	جواب کارا
ε -Efficient Solution	جواب ε -کارا
Weakly Efficient Solution	جواب کارای ضعیف
Weakly Nondominated Solution	جواب غیرتسلطی ضعیف
Recession Direction	جهت دورشونده
Polyhedral	چندوجهی
Extended polyhedral	چندوجهی گسترش یافته
Nadir	حضيض
Approximation error	خطای تقریب
Tolerance	دامنه تغییرات
Interior	درون
Relative Interior	درون نسبی
Prescription Dose	دوز تجویز شده
Dual	دوگان
Strong Duality	دوگانی قوی
Geometric Duality	دوگان هندسی
Scalarization Method	روش اسکالرسازی
Weighted Sum Method	روش مجموع وزن دار
Subgradient	زیرگرادیان
Proper	سره
Tumour Cells	سلول‌های سرطانی
Beam Intensity	شدت پرتو
Duality Gap	شکاف دوگانی
Nondominated	غیرتسلطی
Nondegenerate	غیرتباهیده
Decision Space	فضای تصمیم
Feasible Space	فضای شدنی
Proper Efficiency	فضای هدف
Efficient	کارا
Pareto Efficient	کارای پارتو
Strong Efficient	کارای قوی

Bounded.....	کران‌دار
Minimal.....	کمینه
Iteration Steps.....	گام‌های تکرار
Maximization.....	ماکسیم‌سازی
Convex.....	محدب
Cone.....	مخروط
Ordering Cone.....	مخروط ترتیبی
Bound.....	مرز
Multiobjective Optimization Linear Problem.....	مساله بهینه‌سازی چندهدفه
Value.....	مقدار
Minimization.....	مینیم‌سازی
Inequality.....	نامعادله
Extreme Point.....	نقطه رأسی
Redundant Point.....	نقطه زائد
Boundary Point.....	نقطه مرزی
Pointed.....	نوک‌دار
Halfspace.....	نیم‌فضا
Face.....	وجه
Nondominated Face.....	وجه غیرتسلطی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algorithm	الگوریتم
Anti ideal	آنتی ایده‌آل
Approximation	تقریب
Approximation Error	خطای تقریب
Beam intensity	شدت پرتو
Biobjective Optimization	بهینه‌سازی دوهدفه
Bound	مرز
Boundary Point	نقطه مرزی
Bounded	کران‌دار
Closed	بسته
Cone	مخروط
Convex	محدب
Convex Hull	پوسته محدب
Coupling Function	تابع جفت‌ساز
Cut	برش
Degenerate	تباهیده
Decision Space	فضای تصمیم
Dimension	بعد
Dual	دوگان
Duality Gap	شکاف دوگانی
Efficient	کارا
Efficient Solution	جواب کارا
ε -Efficient Solution	جواب ε -کارا
Extended Polyhedral	جندوجهی توسعه یافته
Extreme Point	نقطه رأسی

Face	وجه
Facet	ابروجه
Feasible Space	فضای شدنی
Geometric Duality	دوگان هندسی
Halfspace	نیم‌فضا
Ideal	ایده‌آل
Inequality	نامعادله
Inner Approximation	تقریب درونی
Iteration Steps	گام‌های تکرار
Interior	درون
Intersecting	اشتراک
Linear Programme	برنامه‌ریزی خطی
Maximal	بیشینه
Maximization	ماکسیم‌سازی
Minimal	کمینه
Minimization	مینیم‌سازی
Multiobjective Optimization	بهینه‌سازی چندهدفه
Multiobjective Optimization Linear Problem	مساله بهینه‌سازی چندهدفه خطی
Nadir	حضيض
Nondegenerate	غیرتباهیده
Nondominated	غیرتسلطی
Nondominated Face	وجه غیرتسلطی
Objective Space	فضای هدف
Optimal	بهینه
Optimal Solution	جواب بهینه
Ordering Cone	مخروط ترتیبی
Outer Approximation	تقریب بیرونی
Pareto Efficient	کارای پارتو
Partial Order	ترتیب جزئی
Pointed	نوک‌دار
Polyhedral	چندوجهی
Prescription Dose	دوز تجویز شده

Primal.....	اولیه
Proper	سره
Radiotherapy	پرتودرمانی
Recession Direction	جهت دورشونده
Redundant Point	نقطه زائد
Relative Interior	درون نسبی
Scalarization Method.....	روش اسکالرسازی
Single Objective	تک‌هدفه
Solid.....	توپر
Strong Duality.....	دوگان قوی
Strong Efficient	کارای قوی
Supporting Hyperplane	اب‌صفحه حائل
Tolerance	دامنه تغییرات
Tumour Cells	سلول‌های تومور
Value	مقدار
Weakly Efficient Solution	جواب کارای ضعیف
Weakly Nondominated Solution	جواب غیرتسلطی ضعیف
Weighted Sum Method	روش مجموع وزن‌دار

Aabstract

In this thesis, At first we introduce the efficient and weakly efficient solutions of a multiobjective optimization problem. Then, the scalarization method that is a method of solving multiobjective optimization problems, is expressed. In the following, with helping from geometric duality theorem we show the correspondence between the primal and dual problems and using geometric duality theorem we express the Benson's outer algorithm. The Benson's algorithm outer find the Nondominated points of outcome set. After that, We explain The Benson's algorithm dual and by applying changes on Benson's algorithm dual we present approximation version of Benson's algorithm dual. This algorithm by generating an outer approximation and inner approximation of Nondominated set, creates a set of ε -Nondominated points and we prove that the inner approximation is a set of ε -weakly Nondominated points. At the end, We describe the usage of algorithms in beam intensity optimization problems in Radiotherapy.

Key words: Multiobjective linear programming, Pareto optimal, objective space, Geometric duality, Benson's algorithm, outer approximation, ε -nondominated set, radiotherapy.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Approximation of Nondominated Solutions In Linear Multiple Objective Optimization

Supervisor

Dr. Jafar Fathali, Dr. Mehrdad Ghaznavi

Advisor

Khosro Hoseinzadeh

by

Zohreh Asadi

2014