دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

انتگرال میانگین برای توابع تحلیلی

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

دانشجو

فریبا خواجه وند

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به همراهان همیشگی ام

پدر و مادر مهربانم ، همسر عزیزم

خدا را سپاسگزارم

که هنوز راه‌هایی برای پیمودن

و پله‌هایی برای صعود کردن برایم باقی است...

تشکر و سپاس ویژه از استاد دانشمند و پرمایه‌ام جناب آقای دکتر احمد زیره که از محضر پرفیض تدریسشان، بهره‌ها بردم.

همچنین واجب می‌دانم از دیگر اساتید ارجمند، آقای دکتر مهدی ایران‌منش و خانم دکتر الهام دسترنج که همواره از راهنماییشان استفاده نمودم، قدردانی نمایم.

فریبا خواجه‌وند

شهریور ۱۳۹۳

تعهد نامه

اینجانب **فریبا خواجه وند** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **انتگرال میانگین برای توابع تحلیلی** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فریبا خواجه وند
شهریور ۱۳۹۳

چکیده

در این پایان‌نامه با معرفی انتگرال میانگین، تاثیر آن را بر روی توابع تحلیلی بررسی می‌کنیم.که در فصل اول تعاریف و قضایای اولیه که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم. در فصل دوم با معرفی دو کلاس $\mathcal{B}_{(\Phi,\Psi;\alpha,\beta)}$ و $\mathcal{M}_r^s[a'_i, b'_j, a_i, b_j]$ انتگرال میانگین را بر روی توابع تحلیلی و تک ارز با ضرایب منفی که متعلق به این کلاس می‌باشند را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم با معرفی مشتق کسری و انتگرال کسری، انتگرال میانگین را بر روی آن‌ها بررسی می‌کنیم و در فصل چهار، $q-\delta$ همسایگی را بیان می‌کنیم.

واژگان کلیدی: انتگرال میانگین کسری، مشتق کسری، حساب دیفرانسیل کسری، نامساوی انتگرال میانگین، توابع تحلیلی، نامساوی هولدر، زیرترتیب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

این بخش به معرفی و تعاریفی از توابع ستاره‌گون، شبه ستاره‌گون، محدب و زیرترتیب که در این پایان‌نامه استفاده شده‌اند، می‌پردازیم. که تعاریف از مراجع [۱۲]، [۱۴] و [۱۰]گرفته شده‌اند، در این پایان‌نامه از نماد زیر استفاده می‌شود.

$U(\zeta, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - \zeta| < r\}$ دیسک باز به مرکز ζ و شعاع r

$U = U(0, 1)$دیسک یکه‌ی باز

این بخش شامل تعاریف اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. تابع f را در z_0 تحلیلی گوییم، هر گاه در یک همسایگیz_0 مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{H}$ رده‌ای از توابع به شکل $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ باشد که در دیسک یکه‌ی باز $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ تحلیلی می‌باشند.

تعریف ۳.۱.۱. هر مجموعه همبند و باز، میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولا با D نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۱.۱. **(لم شوارتز)** فرض کنیم $f(z)$ تابعی در دیسک $\mathcal{U}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M، $|f(z)| < M$. اگر $f(z)$ در $z = 0$ با **تعداد دفعات** m، صفر شود. در اینصورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m \quad (z \in \mathcal{U}_R)$$

در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

به‌طوری‌که θ ثابت است.

تعریف ۵.۱.۱. تابع $f(z)$ را در $\mathbb{U}$ تک ارز گوییم، اگر تحلیلی و یک به یک باشد.

۲.۱ ردهٔ S

تعریف ۱.۲.۱. همه‌ی توابع $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ که در U تحلیلی و تک‌ارز باشند و در تعریف ۵.۱.۱ صدق کنند را رده‌ی S گوییم.

ملاحظه ۲.۲.۱. به جای $\sqrt{f(z^2)}$ می‌نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)} = e^{(\frac{1}{2})\log f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.

لم ۳.۲.۱. اگر $f(z) \in S$، آن‌گاه $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$

برهان. [۱۳] $\square$

قضیه ۴.۲.۱. اگر $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z\sqrt{1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \cdots} \in S$ باشد، آن‌گاه $|a_2| \leq 2$.

برهان. [۱۳] $\square$

مثال ۵.۲.۱. **(تابع کوئب)** در قضیه۴.۲.۱، اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد، آن‌گاه $g(z) = \frac{z}{1-e^{i\alpha}z^2} = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ لذا

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \cdots$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می‌رسیم

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1+z}{1-z})^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده شده است می‌نگارد.

قضیه ۶.۲.۱. **(پوشش)** اگر $f(z) \in S$ و $f(z) \neq c$باشد، آن‌گاه برای $|z| < 1$، که $z \in \mathbb{C}$، $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به S می‌باشد

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{c})z^2 + \cdots$$

بنا به قضیه۴.۲.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$ از طرفی:

$$|\frac{1}{c}| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \Longrightarrow |\frac{1}{c}| \leq 2 + |a_2|$$

چون $f(z) \in S$ پس $|a_2| \leq 2$ لذا داریم:

$$|\frac{1}{c}| \geq 4 \Longrightarrow |c| \geq \frac{1}{4}$$

$\square$

لم ۷.۲.۱. اگر $f(z)\in S$ و $z=re^{i\theta}$، آنگاه
$$Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z|<1$ $f'(z)\neq 0$. حال برای $f(z)=f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z)=f'(re^{i\theta})$ لذا
$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$
با ضرب طرفین رابطهی فوق در r داریم
$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta})=\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}=\frac{zf''(z)}{f'(z)}.$$
با محاسبهی قسمتهای حقیقی داریم
$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|=Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}.$$

□

قضیه ۸.۲.۱. اگر $f(z)\in S$، آنگاه:
$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3}\quad(|z|=r<1).$$

برهان. میدانیم تابع $\omega=\frac{z+z_\circ}{1+\overline{z_\circ}z}(|z_\circ|<1)$ تحلیلی، یکبهیک و پوشاست که قرص واحد را بر خودش مینگارد. لذا تابع $g(z)=f(\frac{z+z_\circ}{1+\overline{z_\circ}z})=b_\circ+b_1z+b_2z^2$ نیز به ازای $(|z|<1)$ تحلیلی و تکارز است، داریم
$$g(\circ)=b_\circ=f(z_\circ)\quad b_1=g'(\circ)=f'(z_\circ)(1-|z_\circ|^2).$$
$$b_2=\frac{g''(\circ)}{2}=\frac{1}{2}(f''(z_\circ)(1-|z_\circ|^2)^2-2f'(z_\circ)\overline{z_\circ}(1-|z_\circ|^2)).$$
چون $g(z)$ نرمالیزه نیست پس متعلق به S نمیباشد، با توجه به اینکه تابع $\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(\circ)}=z+\frac{b_2}{b_1}z^2+\cdots$ در S قرار میگیرد. لذا بنابر قضیه۴.۲.۱، $|\frac{b_2}{b_1}|\leq 2$ یعنی
$$\frac{1}{2}|\frac{f''(z_o)}{f'(z_\circ)}(1-|z_\circ|^2)-2\overline{z_\circ}|\leq 2.$$
با قرار دادن $z_\circ=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_\circ|}{1-|z_\circ|^2}$ داریم
$$|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}-\frac{2|z_\circ|^2}{1-|z_\circ|^2}|\leq\frac{4|z_\circ|}{1-|z_\circ|^2}.$$
حال چون $z_\circ$ دلخواه است قرار میدهیم
$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}|\leq\frac{4r}{1-r^2}.$$
یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایرهای به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است لذا
$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\leq \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{2r^2+4r}{1-r^2}.$$

بنا به لم ۷.۲.۱ می‌دانیم $\mathrm{Re}\dfrac{zf''(z)}{f'(z)} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ یعنی

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲} \le r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \le \frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}$$
$$\Longrightarrow \frac{۲r-۴}{۱-r^۲} \le \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \le \frac{۲r+۴}{۱-r^۲}.$$

حال از طرفین نامساوی از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم

$$\log(۱-r) - ۳\log(۱+r) \le \log|f'(z)| \le \log(۱+r) - ۳\log(۱-r).$$

و

$$\log\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \le \log|f'(z)| \le \log\frac{۱+r}{(۱-r)^۳}.$$

در نتیجه

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \le |f'(z)| \le \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

□

مثال ۹.۲.۱. مشتق تابع $k(z) = \dfrac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + \cdots$ برابر است با $k'(z) = \dfrac{۱+z}{(۱-z)^۳}$، لذا کران بالای قضیه‌ی ۸.۲.۱، در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. اگر $f(z) \in S$، آن‌گاه

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \le |f(z)| \le \frac{r}{(۱-r)^۲} \quad (|z| = r < ۱)$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۸.۲.۱، برای $|z| = r < ۱$ داریم $|f'(z)| \le \dfrac{۱+r}{(۱-r)^۳}$، نقطه‌ی ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم

$$|f(z)| \le \int_۰^r |f'(t)|\mathrm{d}t \le \int_۰^r \frac{۱+t}{(۱-t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱-r)^۲}$$

نامساوی $\dfrac{۱}{۴} \le \dfrac{r}{(۱+r)^۲}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \ge \dfrac{۱}{۴}$ آن‌گاه $|f(z)| \le \dfrac{r}{(۱+r)^۲}$ و اگر $|f(z)| < \dfrac{۱}{۴}$ بنا به قضیه‌ی ۴.۲.۱، مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره‌خط مستقیم از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت $c_۰$.

$$|f(z)| = \int_{c_۰} |\mathrm{d}\omega| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی ۸.۲.۱

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \ge \int_c |f'(s)\mathrm{d}|s| \ge \frac{۱-t}{(۱+t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱+r)^۲}$$

لذا داریم

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \le |f(z)| \le \frac{r}{(۱-r)^۲}$$

□

مثال ۱۱.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \cdots$ کران بالای قضیه‌ی ۱۰.۲.۱ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۲.۲.۱. (Littlewood's) اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی S باشد آن‌گاه برای هر n، $|a_n| \leq en$

برهان. [۱۲]. □

قضیه ۱۳.۲.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی S باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد آن‌گاه برای هر n داریم $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $r < 1$، $z = re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم

$$Imf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau^k \sin k\theta.$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌یابی از 0 تا π داریم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta \mathrm{d}\theta = a_n r^n. \tag{1.1}$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|.$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|sinn\theta| \leq n|sin\theta|$ لذا از رابطه‌ی (۱.۱) نتیجه می‌شود که

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{2.1}$$

سپس برای $(0 < r < 1, 0 < \theta < \pi)$ نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$.

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta}).$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است می‌بایست در فاصله‌ی $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد لذا

$$r = |a_1 r| = |\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin\theta \mathrm{d}\theta| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta}) \sin\theta \mathrm{d}\theta|. \tag{3.1}$$

با جایگزینی (۳.۱) در (۲.۱) داریم $|a_n| \leq nr$ و در نتیجه درستی حکم ثابت می‌شود. □

۳.۱ رده‌ی S^*

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوییم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوییم هر گاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $\omega = 0$ ستاره‌گون باشد، این زیر رده‌ی S را با S^* نشان می‌دهند.

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in S$، در این‌صورت $f(z) \in S^*$ اگروتنهااگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in S^*$، D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ در تابع $f(z)$ باشد اگر $\omega \in D$، آنگاه برای $0 < t < 1$، $t\omega \in D$ (چون D ستاره‌گون می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z|$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند. چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$، اکنون نقطه‌ی $\omega_1 \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم در این‌صورت برای نقطه‌ی z_1 ای با $|z_1| < 1$، برای t دلخواه، $(0 < t < 1)$ داریم

$$|f^{-1}(t\omega_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که $t\omega_1$ در D_r قرار دارد چون این مطلب برای همه‌ی ω_1 ها در D_r و همه‌ی t ها، $0 < t < 1$ درست است میدان D_r نسبت به $\omega = 0$ ستاره‌گون است.

بالعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی S^* قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $\omega_0 \in D$ موجود است به‌طوری‌که برای t_0 ای، $(0 < t_0 < 1)$، $t_0\omega_0$ متعلق به D نمی‌باشد، اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویر D_r شامل نقطه‌ی ω_0 باشد چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $t_0\omega_0$ متعلق به D_r نیست پس $f(z)$، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. $\square$

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in S$ در این‌صورت $f(z) \in S^*$ اگروتنهااگر

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0.$$

برهان. با توجه به لم ۲.۳.۱ $f(z) \in S^*$، اگروتنهااگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد، به بیان معادل برای هرθ، $0 \leq \theta \leq 2$ بردار شعاعی از $\omega = 0$ تا $\omega = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی نسبت به θ صعودی اکید است زیرا در غیر این‌صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند پس یک تابع در S^* با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص گردد. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = Im\log f(re^{i\theta})$ بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Im\log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0.$$

$\square$

مثال ۴.۳.۱. تابع کوئب $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$در رده‌ی S^* قرار دارد زیرا تصویر $|z| < 1$ صفحه‌ی ω می‌باشد که در امتداد پرتو$\frac{-1}{4}$تا ∞ بریده شده است و همچنین

$$Re\left\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\right\} = Re\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\} > 0.$$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشد آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq n$

برهان. چون برای$0 < |z| < 1$، $f(z) \neq 0$ تابع

$$P(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}}. \qquad (۴.۱)$$

در $|z|<۱$ تحلیلی است می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت

$$P(z)=۱+\sum_{n=۲}^{\infty}\alpha_n z^n. \qquad (۵.۱)$$

از طرفی برای $|z|<۱$، $f(z)\in S^*$ داریم $Re\{P(z)\}>۰$ بنا به قضیه‌ی ۴.۲.۱ می‌دانیم

$$|\alpha_n|\le ۲ \quad n=۱,۲,۳,\cdots \qquad (۶.۱)$$

از (۴.۱) و(۵.۱) داریم

$$۱+\sum_{n=۲}^{\infty}na_nz^{n-۱}=(۱+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^{n-۱})(۱+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz_n).$$

با تساوی قرار دادن ضرایب به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$ka_k=a_k+a_{k-۱}\alpha_۱+a_{k-۲}\alpha_۲+\cdots+a_۲\alpha_{k-۲}+\alpha_{k-۱}.$$

و یا به صورت معادل

با استفاده از کران (۶.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در رابطه بالا به‌کار برد لذا

$$(k-۱)|a_k|\le ۲(|a_{k-۱}|+|a_{k-۲}|+\cdots+|a_۲|+۱).$$

از رابطه‌ی فوق در می‌یابیم $|a_۲|\le ۲$، سپس فرض کنیم برای $k=۲,۳,\cdots,n-۱$، $|a_k|\le k$ در این‌صورت

$$(n-۱)|a_n|\le ۲\left[(n-۱)+(n-۲)+\cdots+۲+۱\right]=\frac{۲(n-۱)n}{۲}.$$

و این به $|a_n|\le n$ برمی‌گردد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. □

تعریف ۶.۳.۱. تابع $f(z)\in S$ ستاره‌گون از مرتبه $\alpha(۰\le\alpha<۱)$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\left\{\frac{zf'}{f}\right\}>\alpha \quad (|z|<۱).$$

این زیر رده‌ی S را به $S^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۳.۱. فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$، $(۰\le\alpha<۱)$ اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|\le ۱-\alpha$$

آن‌گاه $f(z)\in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا به تعریف ۶.۳.۱کافیست نشان دهیم $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $۱-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد داریم

$$|z\frac{f'}{f}-۱|=|\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|z^n}{z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n}|\le\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}}\le\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}$$

بیان قبلی دارای کران بالای $۱-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|\le(۱-\alpha)(۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|).$$

که معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|\le ۱-\alpha$بنا به فرض این رابطه برقرار است بنابراین $|z\dfrac{f'}{f}-۱|\le ۱-\alpha$. □

۴.۱ رده‌ی K

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر دو نقطه ازD را به‌هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in S$ را محدب گوییم هر گاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده‌ی S را با K نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in S$، در این‌صورت $f(z) \in K$ اگروتنهااگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in K$، D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ تحت $f(z)$باشد. نقاط $\omega_۱$، $\omega_۲$ را در D_r انتخاب می‌کنیم باید نشان دهیم که پاره خط $t\omega_۱ + (۱ - t)\omega$ برای $۰ < t < ۱$ در D_r قرار دارد، می‌بایست نقاط $z_۱$،$z_۲$ در قرص $|z| < ۱$ موجود باشند که $\omega_۱ = f(z_۱)$، $\omega_۲ = f(z_۲)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_۲| \leq |z_۱|$ آن‌گاه تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf\left((\frac{z_۱}{z_۲}z)\right) + (۱ - t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و چون $f(z) \in S$ لذا در شرایط $|h(z)| < ۱$ و $h(۰) = ۰$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به‌ویژه

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲)| \leq |z_۲| < r \tag{۷.۱}$$

چون$D_r \subset D$، نقطه‌ی $z_۰$ ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲ = f(z_۰)$. ولی بنابر(۷.۱) نقطه‌ی $f^{-۱}(f(z_۰)) = z_۰$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < ۱$ باشد پس هر نقطه بر پاره‌خط $t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲$ در D_r قرار دارد.
بالعکس، اگر در رده‌ی K نباشد آن‌گاه دو نقطه در D وجود دارد که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره‌خطی که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. □

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنیم$f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$، $۰ \leq \alpha < ۱$ اگر

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} k(k - \alpha)|a_k| \leq ۱ - \alpha. \tag{۸.۱}$$

آن‌گاه$f(z) \in K(\alpha$.

قضیه ۵.۴.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این‌صورت $f(z) \in K$ اگروتنهااگر

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > ۰ \qquad (|z| < ۱).$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۷.۱ $f(z)\in K$ اگروتنهااگر تصویر D_r از $|z|<r<۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $\omega=f(re^{i\theta})$ دایره $|z|=r<۱$ را بر یک مرز ساده بسته می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌گردد.
می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی ω با محور حقیقی می‌سازد برابر است با

$$\frac{\pi}{۲}+\theta+\arg f'(z).$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{۲}+\theta+\arg f'(re^{i\theta})\right)>۰.$$

داریم

$$۱+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Im\log f'(re^{i\theta})\right)=۱+Im\left\{ire^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\}=Re\left\{۱+\frac{zf''(z)}{f'z)}\right\}>۰.$$

□

قضیه ۶.۴.۱. (الکساندر) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۱$.
در این‌صورت $f(z)\in K$ اگروتنهااگر $zf'\in S^*$.

برهان. اگر $g(z)=zf'(z)$ در این‌صورت

$$\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}=\left\{۱+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>۰$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگروتنهااگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۷.۴.۱. فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$ در K باشد در این‌صورت برای هر n، $|a_n|\leq ۱$

برهان. با توجه به قضیه ۶.۴.۱ تابع $zf'(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}na_nz^n$ در S^* قرار دارد لذا بنا به قضیه‌ی ۵.۳.۱ برای هر n، $|a_n|\leq n$ و $|a_n|\leq ۱$ □

قضیه ۸.۴.۱. اگر $f(z)\in K$ و $f(z)\neq c$ آن‌گاه برای $|z|<۱$، $|c|\geq\frac{۱}{۲}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z)=(c-f(z))^۲$ در $|z|<۱$ تک‌ارز است، دو نقطه‌ی متمایز $z_۰$ ، $z_۱$ در قرص واحد انتخاب می‌کنیم در این‌صورت

$$g(z_۰)-g(z_۱)=(c-f(z_۰))^۲-(c-f(z_۱))^۲=(f(z_۰)-f(z_۱))\,(f(z_۰)+f(z_۱)-۲c)\,.$$

اکنون $f(z_۱)\neq f(z_۲)$ زیرا $f(z)$ تک‌ارز می‌باشد همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{۱}{۲}[f(z_۰)+f(z_۱)]$ به تصویر $|z|<۱$ متعلق است. لذا نمی‌تواند مساوی c باشد پس $f(z_۰)+f(z_۱)-۲c\neq۰$ و تک‌ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z)=c^۲-۲cz+z^۲+\cdots$ تابع نرمال در S است. قرار می‌دهیم

$$h(z)=\frac{g(z)-c^۲}{-۲c}=z+(\frac{-z^۲}{۲c})+\cdots\,.$$

که در $|z|<۱$، $h(z)\leq\frac{c}{۲}$ است، زیرا $g(z)$ هرگز در آن‌جا صفر نیست با به کار بردن قضیه‌ی پوششی در می‌یابیم $|\frac{c}{۲}|\geq\frac{۱}{۴}$ و یا $|c|\geq\frac{۱}{۲}$ □

قضیه ۹.۴.۱. اگر $f(z)\in K$ آن‌گاه برای $|z|=r<۱$
$$\frac{۱}{(۱+r)^{۲}}\leq |f'(z)|\leq \frac{۱}{(۱-r)^{۲}}.$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega=\dfrac{z+z_{\circ}}{۱+z_{\circ}z}$ $(|z_{\circ}|<۱)$ تحلیلی، یک‌به‌یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد پس تابع
$$g(z)=f\left(\frac{z+\overline{z_{\circ}}}{۱+z_{\circ}z}\right)=b_{\circ}+b_{۱}z+b_{۲}z^{۲}.$$
نیز به ازای $|z|<۱$ تحلیلی و تک‌ارز است داریم
$$g(\circ)=b_{\circ}=f(z_{\circ})\qquad b_{۱}=g'(\circ)=f'(z_{\circ})(۱-|z_{\circ}|^{۲}).$$
$$b_{۲}=\frac{g''(\circ)}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(f''\overline{z_{\circ}}(۱-|z_{\circ}|^{۲})^{۲}-۲f'(z_{\circ})z_{\circ}(۱-|z_{\circ}|^{۲})\right).$$
چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد، لذا $g(z)$ در رده‌ی S قرار ندارد. با توجه به این‌که تابع
$$\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(\circ)}=z+\frac{b_{۲}}{b_{۱}}z^{۲}+\cdots.$$
درS قرار می‌گیرد لذا در K نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی۷.۴.۱
$$\frac{۱}{۲}|\frac{f''(z_{\circ})}{f'}(۱-|z_{\circ}|^{۲})-۲\overline{z_{\circ}}|\leq ۱.$$
با قرار دادن $z_{\circ}=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\dfrac{۲|z_{\circ}|}{۱-|z_{\circ}|^{۲}}$ داریم
$$|\frac{z_{\circ}f''(z_{\circ})}{f'(z_{\circ})}-\frac{۲|z_{\circ}|^{۲}}{۱-|z_{\circ}|^{۲}}|\leq\frac{۲|z_{\circ}|}{۱-|z_{\circ}|^{۲}}.$$
حال چون $z_{\circ}$ دلخواه است داریم
$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{۲r^{۲}}{۱-r^{۲}}|\leq\frac{۲r}{۱-r^{۲}}.$$
$$\Longrightarrow\frac{۲r^{۲}-۲r}{۱-r^{۲}}\leq\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{۲r^{۲}+۲r}{۱-r^{۲}}.$$
$$\Longrightarrow\frac{۲r-۲}{۱-r^{۲}}\leq\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|\leq\frac{۲r+r}{۱-r^{۲}}.$$
حال از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم
$$-۲\log(۱+r)\leq\log|f'(z)|\leq -۲\log(۱-r).$$

لذا
$$\frac{۱}{(۱+r)^{۲}}\leq |f'(z)|\leq \frac{۱}{(۱-r)^{۲}}.$$

□

قضیه ۱۰.۴.۱. اگر $f(z)\in K$ آن‌گاه برای $|z|=r<۱$
$$\frac{r}{۱+r}\leq |f(z)|\leq \frac{r}{۱-r}.$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۹.۴.۱ برای $|z| = r < ۱$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲}$ نقطه‌ی $\circ$ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم

$$|f(z)| = \int_\circ^r |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_\circ^r \frac{۱}{(۱-t)^۲}\mathrm{d}t = \frac{r}{۱-r}.$$

نامساوی $\frac{۱}{۴} \leq \frac{r}{(۱+r)}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{۱}{۴}$ لذا $|f(z)| \leq \frac{r}{(۱+r)}$ و اگر $|f(z)| < \frac{۱}{۴}$ طبق قضیه‌ی پوششی مسیر c داخل دایره‌ی یکه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر آن پاره‌خط مستقیم $c_\circ$ از $\circ$ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت

$$|f(z)| = \int_{c_\circ} |\mathrm{d}\omega| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|.$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی قبل

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)\mathrm{d}|s| \geq \int_c |f'(s)\mathrm{d}|s| \geq \frac{۱}{(۱+t)^۲}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱+r)}.$$

لذا داریم

$$\frac{r}{(۱+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)}.$$

□

رده‌ی T

تعریف ۱۱.۴.۱. فرض کنیم T زیر رده‌ای از S شامل توابعی با ضرایب منفی باشد گوییم f یک تابع تک‌ارز و تحلیلی در T است، هر گاه بتوانیم آن را به شکل $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n$ بیان کنیم. [۱۳]،[۲]

قضیه ۱۲.۴.۱. تابع $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n$ در T قرار دارد اگروتنهااگر $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f(z) \in T$ آن‌گاه $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$. چون $f(z) \in T$ ، $f(z)$ در دیسک واحد U تک‌ارز است، در این‌صورت $f'(z) = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| z^{n-۱} \neq \circ$ بنابراین

$$f'(r) = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| r^{n-۱} \neq \circ \qquad (z = r).$$

فرض کنیم $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| > ۱$. در این‌صورت اندیس مثبت N وجود دارد به طوری‌که $\sum_{n=۲}^{N} n|a_n| > ۱$ ، بنابراین وجود دارد $\circ < r_\circ < ۱$ که $\sum_{n=۲}^{N} n|a_n| r_\circ^{n-۱} > ۱$ لذا

$$f'(r_\circ) = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| r_\circ^{n-۱} \leq ۱ - \sum_{n=۲}^{N} n|a_n| r_\circ^{n-۱} < \circ.$$

چون $f'(r)$ پیوسته است و $f'(\circ) = ۱$ پس وجود دارد $\circ < r_۱ < r_\circ$ به‌طوری‌که $f'(r_۱) = \circ$ و این با فرض $f'(z) \neq \circ$ در تناقض می‌باشد لذا فرض خلف باطل و $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$.

بالعکس، فرض کنیم $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$ در این‌صورت

$$Re(f'(z)) = Re(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| z^{n-۱}) > ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq \circ.$$

پس برای $z_1, z_2 \in U$ و $z_1 \neq z_2$،
$$Re\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} = \int_0^1 Ref'[z_1+t(z_2-z_1)]\mathrm{d}t.$$
لذا $f(z)$ در U تک‌ارز است و $f(z)\in T$ □

قضیه ۱.۴.۱۳. اگر $f(z)\in T$ در این‌صورت
$$r-\frac{1}{2}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{1}{2}r^2 \qquad (|z|=r). \tag{۱.۹}$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۱.۴.۱۲ داریم $2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}n|a_n| \leq 1$ بنابراین
$$|f(z)| \leq r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \leq r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq r+\frac{1}{2}r^2.$$
و
$$|f(z)| \geq r-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \geq r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \geq r-\frac{1}{2}r^2.$$
لذا داریم
$$r-\frac{1}{2}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{1}{2}r^2 \qquad (|z|=r)$$
□

مثال ۱.۴.۱۴. بنا به قضیه‌ی ۱.۴.۱۲ تابع $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2$ متعلق به رده‌ی T می‌باشد هر گاه $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n| \leq 1$، حال با جایگزینی $n=2$ و $a_2=\frac{1}{2}$ به‌وضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می‌کند لذا کران بالای قضیه‌ی ۱.۴.۱۳ در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین $z=-r$ تعیین می‌شود .

قضیه ۱.۴.۱۵. اگر $f(z)\in T$ آن‌گاه
$$1-r \leq |f'(z)| \leq 1+r \qquad (|z|=r).$$

برهان. می‌دانیم
$$|f'(z)| \leq 1+\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|r^{n-1} \leq 1+r\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n| \leq 1+r.$$
و
$$|f'(z)| \geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|r^{n-1} \geq 1-r\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n| \geq 1-r.$$
لذا داریم
$$1-r \leq |f'(z)| \leq 1+r \qquad (|z|=r).$$
□

مثال ۱.۴.۱۶. برای تابع $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2$ کران بالای قضیه‌ی ۱.۴.۱۵ در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۷.۴.۱. فرض کنیم توابع $(m=۱,۲,۳,\cdots,n)$ ، $f_m(z)=z-\sum_{j=۲}^{\infty}|a_{j,m}|z^j$ متعلق به رده‌ی T باشند. در این‌صورت تابع $h(z)$ تعریف شده به صورت $h(z)=\sum_{m=۱}^{n}c_mf_m(z), (c_m\geq ۰)$ نیز در رده‌ی T قرار دارد به‌طوری‌که $\sum_{m=۱}^{n}c_m=۱$. ذذذ.

برهان. طبق تعریفی از $h(z)$ می‌توانیم بنویسیم

$$h(z)=z-\sum_{j=۲}^{\infty}(\sum_{m=۱}^{n}c_m|a_{j,m}|)z^j.$$

چون برای هر $f_m(z), m=۱,۲,۳,\cdots,n$ در T قرار دارد، لذا داریم $\sum_{j=۲}^{\infty}j|a_{j,m}|\leq ۱$ که $m=۱,۲,\cdots,n$ بنابراین می‌توانیم ببینیم

$$\sum_{j=۲}^{\infty}j(\sum_{m=۱}^{n}c_m|a_{j,m}|)=\sum_{m=۱}^{n}c_m(\sum_{j=۲}^{\infty}j|a_{j,m}|)\leq\sum_{m=۱}^{n}c_m=۱.$$

که نتیجه می‌دهد $h(z)$ در T قرار دارد. □

قضیه ۱۸.۴.۱. (توابع اکسترمال) فرض کنیم

$$f_n(z)=z-\frac{۱}{n}z^n, f_۱(z)=z \qquad (n=۲,۳,\cdots).$$

در این‌صورت $f(z)\in T$ اگروتنهااگر بتوانیم آن را به شکل $f(z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\lambda_nf_n(z)$ بیان کنیم به‌طوری‌که $\lambda_n\geq ۰$ ، $\sum_{n=۱}^{\infty}\lambda=۱$.

برهان. فرض کنیم

$$\begin{aligned}f(z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\lambda_nf_n(z)&=\lambda_۱f_۱(z)+\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_nf_n(z)\\&=\lambda_۱z+\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n(z-\frac{۱}{n}z^n)\\&=\lambda_۱z+\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_nz-\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n\frac{۱}{n}z^n\\&=\sum_{n=۱}^{\infty}\lambda_nz-\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n\frac{۱}{n}z^n.\end{aligned}$$

در این‌صورت

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n\frac{۱}{n}n=\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n=۱-\lambda_۱\leq ۱.$$

لذا بنابر قضیه‌ی ۱۲.۴.۱، $f(z)\in T$.

بالعکس، فرض کنیم $f(z)\in T$ ، چون $(n=۲,۳,\cdots)$ $|a_n|\leq\frac{۱}{n}$ قرار می‌دهیم $\lambda_۱=۱-\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n$

و $\lambda_n = n|a_n|$ لذا

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n = z - \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n} \lambda_n z^n \\ &= z - \sum_{n=۲}^{\infty} \lambda_n [z - f_n(z)] = z - \sum_{n=۲}^{\infty} \lambda_n z + \sum_{n=۲}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= (۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} \lambda_n) z + \sum_{n=۲}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= \lambda_۱ f_۱(z) + \sum_{n=۲}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n f_n(z). \end{aligned}$$

□

۵.۱ رده‌ی T^* ، $C(\alpha)$

تعریف ۱.۵.۱. تابع $f(z) \in T$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α $(۰ \leq \alpha < ۱)$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\left\{\frac{zf'}{f}\right\} > \alpha \qquad (|z| < ۱).$$

این زیر رده‌ی T را با $T^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۵.۱. تابع $f(z) \in T$ محدب از مرتبه‌ی α $(۰ \leq \alpha < ۱)$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''}{f'}\right\} > \alpha \qquad (|z| < ۱)$$

این زیر رده‌ی T را با $C(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۵.۱. یک تابع $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n$ در $T^*(\alpha)$ قرار دارد اگروتنهااگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n - \alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha.$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in T^*(\alpha)$ لذا

$$Re\frac{zf'}{f} = Re\left\{\frac{z - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|z^n}{z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|z^n}\right\} > \alpha \qquad (|z| < ۱). \qquad (۱۰.۱)$$

در رابطه‌ی(۱۰.۱) هرگاه $z \to ۱$ (که z یک مقدار حقیقی) داریم

$$۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq \alpha(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|).$$

بنابراین

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n - \alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha.$$

کافی است نشان دهیم $\frac{zf'}{f}$ در یک دایره به شعاع $\alpha - ۱$ و به مرکز ۱ قرار دارد. داریم

$$|\frac{zf'}{f} - ۱| = |\frac{\sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n}{z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n}| \le \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}} \le \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}.$$

عبارت فوق دارای کران بالای $\alpha - ۱$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n| \le (۱-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|).$$

که رابطه‌ی فوق معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \le ۱ - \alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. □

نتیجه ۴.۵.۱. تابع $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|z^n$ در $C(\alpha)$ قرار دارد اگروتنهااگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \le ۱ - \alpha.$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in C(\alpha)$. برای $(|z| < ۱)$ می‌دانیم

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''}{f'}\right\} = Re\left\{۱ - \frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)|a_n|z^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|z^{n-۱}}\right\} = Re\left\{\frac{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n^۲|a_n|z^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|z^{n-۱}}\right\} > \alpha. \quad (۱۱.۱)$$

در رابطه (۱۱.۱) هرگاه $z \to ۱$ (که z یک مقدار حقیقی)داریم

$$۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n^۲|a_n| \ge \alpha(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|).$$

بنابراین

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \le ۱ - \alpha.$$

کافی است نشان دهیم $۱ + \frac{zf''}{f'}$ در یک دایره به شعاع $\alpha - ۱$ و به مرکز ۱ قرار دارد. لذا

$$|۱ + \frac{zf''}{f'} - ۱| = |\frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n z^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n a_n z^{n-۱}}|$$
$$\le \frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱}} \le \frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)|a_n|}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|}.$$

عبارت فوق دارای کران بالای $\alpha - ۱$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)|a_n| \le (۱-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|).$$

که رابطه‌ی فوق معادل است با$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \le ۱ - \alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. □

قضیه ۵.۵.۱. اگر $f(z) \in T^*(\alpha)$ در این‌صورت

$$r - \frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \le |f(z)| \le r + \frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \qquad (|z| = r). \quad (۱۲.۱)$$

برهان. بنا به قضیه۱.۵.۳ می‌دانیم
$$(۲-\alpha)\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha.$$
بنابراین
$$|f(z)| \leq r+\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|r^n \leq r+r^۲\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n| \leq r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲.$$
و به‌طور مشابه
$$|f(z)| \geq r-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|r^n \geq r-r^۲\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n| \geq r-\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲.$$
لذا نتیجه می‌شود
$$r-\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \leq |f(z)| \leq r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \qquad (|z|=r).$$
□

مثال ۱.۵.۶. بنا به قضیه‌ی ۱.۵.۳ تابع $f(z)=z-\frac{(۱-\alpha)}{(۲-\alpha)}z^۲$ متعلق به رده‌ی T^* است هرگاه
$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha.$$
حال با جایگزینی $n=۲$ و $a_۲=\frac{(۱-\alpha)}{(۲-\alpha)}$ به‌وضوح تابع $f(z)$ در شرایط فوق صدق می‌کند؛ لذا کران بالای قضیه‌ی ۱.۵.۵ در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱.۵.۷. اگر $f(z)\in T^*(\alpha)$ در این‌صورت
$$۱-\frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha}r \leq |f'(z)| \leq ۱+\frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha}r \qquad (|z|=r).$$

برهان. داریم
$$|f'| \leq ۱+\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n||z|^{n-۱} \leq ۱+r\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n|. \qquad (۱.۱۳)$$
و همچنین طبق قضیه‌ی ۱.۵.۳ می‌دانیم
$$\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n| \leq ۱-\alpha+\alpha\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n| \leq ۱-\alpha+\frac{\alpha(۱-\alpha)}{۲-\alpha}=\frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha}. \qquad (۱.۱۴)$$
با جایگزینی عبارت (۱.۱۴)در (۱.۱۳)طرف راست حکم نتیجه می‌شود، از طرف دیگر
$$|f'| \geq ۱-\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n||z|^{n-۱} \geq ۱-r\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n| \geq ۱-\frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha}r.$$
□

مثال ۱.۵.۸. برای تابع $f(z)=z-\frac{(۱-\alpha)}{(۲-\alpha)}z^۲$ کران بالای قضیه‌ی ۱.۵.۷ در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

نتیجه ۱.۵.۹. اگر $f(z)\in C(\alpha)$ در این‌صورت
$$r-\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2\le |f(z)|\le r+\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2 \qquad (|z|=r).$$

برهان. بنا به نتیجه ۱.۵.۴ داریم
$$2(2-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\le \sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|\le 1-\alpha.$$
بنابراین
$$|f(z)|\le r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n\le r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\le r+\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2.$$
و به‌طور مشابه
$$|f(z)|\ge r-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n\ge r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\ge r-\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2.$$
لذا نتیجه می‌شود
$$r-\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2\le |f(z)|\le r+\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}r^2 \qquad (|z|=r).$$
□

نتیجه ۱.۵.۱۰. اگر $f(z)\in C(\alpha)$ در این‌صورت
$$1-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r\le |f'(z)|\le 1+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r \qquad (|z|=r).$$

برهان. داریم
$$|f'|\le 1+\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}\le 1+r\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|$$
و همچنین بنابر نتیجه ۱.۵.۴ می‌دانیم
$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\le 1-\alpha+2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\le 1-\alpha+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha}=\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \qquad (1.15)$$
یا
$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le\frac{1-\alpha}{2-\alpha} \qquad (1.16)$$
با جایگزینی عبارت (۱.۱۵) در(۱.۱۶) طرف راست حکم نتیجه می‌شود، از طرف دیگر
$$|f'|\ge 1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}\ge 1-r\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\ge 1-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r.$$
□

قضیه ۱.۵.۱۱. **(توابع اکسترمال)** فرض کنیم
$$f_n(z)=z-\frac{(1-\alpha)}{(n-\alpha)}z^n,\ f_1(z)=z \qquad (n=2,3,\cdots)$$
در این‌صورت $f(z)\in T^*(\alpha)$ اگروتنهااگر بتوانیم آن را به شکل $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم به‌طوری‌که $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1,\lambda_n\ge 0$.

برهان. فرض کنیم

$$f(z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\lambda_n f_n(z)=z-\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n\frac{(۱-\alpha)}{n-\alpha)}z^n.$$

در این‌صورت

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n\frac{۱-\alpha}{n-\alpha}(\frac{n-\alpha}{۱-\alpha})=\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n=۱-\lambda_۱\leq ۱.$$

لذا $f(z)\in T^*(\alpha)$

بالعکس؛ فرض کنیم $f(z)\in T^*(\alpha)$. چون

$$|a_n|\leq\frac{۱-\alpha}{n-\alpha}\qquad(n=۲,۳,\cdots).$$

قرار می‌دهیم

$$\lambda_n=\frac{(n-\alpha)|a_n|}{۱-\alpha},\lambda_۱=۱-\sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n\qquad(n=۲,۳,\cdots).$$

در این‌صورت $f(z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$ و این برهان را کامل می‌کند. □

قضیه ۱۲.۵.۱. اگر $f(z)\in C(\alpha)$ آن‌گاه $f(z)\in T^*(\frac{۲}{۳-\alpha})$

برهان. بنابه قضیه‌ی ۳.۵.۱و نتیجه ۴.۵.۱ باید ثابت کنیم

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{۱-\alpha}|a_n|\leq ۱\Rightarrow\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n-\dfrac{۲}{۳-\alpha}}{۱-\frac{۲}{۳-\alpha}}|a_n|\leq ۱.$$

کافی است نشان دهیم

$$\frac{n(n-\alpha)}{۱-\alpha}\geq\frac{n-\frac{۲}{۳-\alpha}}{۱-\frac{۲}{۳-\alpha}}=\frac{n(۳-\alpha)-۲}{۱-\alpha}\qquad(n=۲,۳,\cdots).$$

و عبارت فوق معادل با این است که $n^۲-۳n+۲\geq ۰,(n=۲,۳,\cdots)$ □

پیچش توابع ستارگون و زیر ترتیب

تعریف ۱۳.۵.۱. فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_n z^n$ باشد؛که در دیسک واحد $U=\{z:|z|<۱\}$ تحلیلی می‌باشد را رده‌ی A_n گوییم.

تعریف ۱۴.۵.۱. فرض کنیم T رده‌ای از توابع که در دیسک واحد $U=\{z|z|<۱\}$ تحلیلی را رده‌ی T گوییم باشد.

تعریف ۱۵.۵.۱. فرض $f(z)$ و $g(z)$ متعلق به A_n باشند ضرب هادامارد دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_n b_n z^n.$$

ملاحظه ۱۶.۵.۱. اگر $f(z)$ و $g(z)$ متعلق به رده‌ی T باشند، ضرب هادامارد به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$(f*g)(z)=z-\sum_{n=۲}^{\infty}a_nb_nz^n.$$

تعریف ۱۷.۵.۱. تابع $f\in A_n$ را شبه ستاره‌گون از مرتبه‌ی α $(۰\leq\alpha<)$ گوییم اگر $f*S_\alpha\in S^*_\alpha$ و با R_α نشان می‌دهیم که S_α تابع حدی شناخته شده برای S^*_α می‌باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$s_\alpha(z)=\frac{z}{(۱-z)^{۲(۱-\alpha)}}=z+\sum_{n=۲}^{\infty}C(\alpha,n)z^n.$$

که

$$C(\alpha,n)=\frac{\prod_{k=۲}^{n}(k-۲\alpha)}{(n-۱)!}.$$

توجه کنید

$$R_{\circ}\equiv K_{\circ},R_{\frac{۱}{۲}}\equiv S^*_{\frac{۱}{۲}}.$$

تعریف ۱۸.۵.۱. فرض کنیم دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ متعلق به A_n در U تحلیلی باشند، گوییم $f(z)$ زیرترتیبی از $g(z)$ است اگر تابع تحلیلی $\omega(z)$ در U موجود باشد که $|\omega(z)|<۱$ و $\omega(\circ)=\circ$ به‌طوری‌که
$f(z)=g(\omega(z))$ و به‌صورت $f(z)\prec g(z)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۹.۵.۱. اگر $f(z)=a_\circ+a_۱z+\cdots$ و $g(z)=b_\circ+b_۱z+\cdots$ و $f(z)\prec g(z)$ باشد آن‌گاه

$$\sum_{k=\circ}^{n}|a_n|^۲\leq\sum_{k=\circ}^{n}|b_k|^۲$$

برهان. [۱۳] □

قضیه ۲۰.۵.۱. اگر $f(z)$ و $g(z)$ در U تحلیلی و $f(z)\prec g(z)$،آن‌گاه برای $\circ<\mu$ و $z=re^{i\theta}(\circ<r<۱)$ داریم

$$\int_\circ^{۲\pi}|f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta\leq\int_\circ^{۲\pi}|g(z)|^\mu \mathrm{d}\theta$$

برهان. [۱۳] □

فصل ۲

انتگرال میانگین برای توابع تحلیلی

۱.۲ انتگرال میانگین برای چند جمله ای‌ها

در این بخش انتگرال میانگین را برای $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $(j \geq n+1)$ $\quad g(z) = z + b_j z^j + b_{2j-1} z^{2j-1}$ ، بررسی می‌کنیم. این بخش برگرفته ازمراجع [۸]، [۱۴]، [۳] و [۱] می‌باشد.
نتایج اولیه برای انتگرال میانگین از قضیه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

لم ۱.۱.۲. فرض کنید $P_m(t)$ چند جمله‌ای از درجه‌ی $m(m \geq 2)$ به فرم زیر باشد:

$$P_m(t) = c_1 t^m - c_2 t^{m-1} - \cdots - c_{m-1} t^2 - c_m t - d \qquad (t \geq 0)$$

که $c_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ ثابت مثبت هستند و $d \geq 0$.
آن‌گاه $P_m(t)$ برای $t > 0$ جواب منحصر به فرد دارد. اگر جواب را با t_0 نشان دهیم، برای $0 < t < t_0$ $P_m(t) < 0$ و $t > t_0$ $P_m(t) > 0$

برهان. [۱۳] $\square$

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $g(z)$ در (۱.۲) داده شده باشد. اگر $f(z)$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n| \leq |b_{2j-1}| - |b_j| \qquad (|b_j| < |b_{2j-1}|). \tag{۱.۲}$$

آن‌گاه برای $\mu > 0$ و $z = re^{i\theta} (0 < r < 1)$

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |g(z)|^\mu \mathrm{d}\theta.$$

برهان. با جایگذاری $z = re^{i\theta} (0 < r < 1)$ داریم

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta = r^\mu \int_0^{2\pi} |1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}|^\mu \mathrm{d}\theta.$$

و

$$\int_0^{2\pi} |g(z)|^\mu \mathrm{d}\theta = r^\mu \int_0^{2\pi} |1 + b_j z^{j-1} + b_{2j-1} z^{2j-2}|^\mu \mathrm{d}\theta.$$

با به کار بردن قضیه ۲۰.۵.۱ کافی است نشان دهیم

$$1+\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1} \prec 1+b_j z^{j-1}+b_{2j-1} z^{2j-2}.$$

فرض کنید تابع $\omega(z)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$1+\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1} = 1+b_j(\omega(z))^{j-1}+b_{2j-1}(\omega(z))^{2j-2}.$$

یا

$$b_{2j-1}(\omega(z))^{2j-2}+b_j(\omega(z))^{j-1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}. \tag{۲.۲}$$

از آن‌جایی که برای $z=0$

$$(\omega(0))^{j-1}(b_{2j-1}(\omega(0))^{j-1}+b_j)=0.$$

بنابراین تابع تحلیلی $\omega(z)$ در U وجود دارد به‌طوری‌که $\omega(0)=0$
حال برای

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leqslant |b_{2j-1}|-|b_j| \qquad (|b_j|<|b_{2j-1}|).$$

ثابت می‌کنیم $|\omega(z)|<1 (z\in U)$. از رابطه‌ی (۲.۲) داریم

$$|b_{2j-1}(\omega(z))^{2j-2}+b_j(\omega(z))^{j-1}| \leqslant |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|.$$

بنابراین برای $z\in U$

$$|b_{2j-1}||\omega(z)|^{2j-2}-|b_j||\omega(z)|^{j-1}-\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|<0. \tag{۳.۲}$$

$t=|\omega(z)|^{j-1} (t\geqslant 0)$ را در(۳.۲) قرار می‌دهیم، تابع $U(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U(t)=|b_{2j-1}|t^2-|b_j|t-\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k| \qquad (t\geqslant 0).$$

اگر $U(1)\geqslant 0$, آن‌گاه طبق لم ۱.۱.۲ برای $U(t)<0$ بایدا $t<1$. بنابراین برای $|\omega(z)|<1$ $(z\in U)$ نیاز داریم

$$U(1)=|b_{2j-1}|-|b_j|-\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\geqslant 0.$$

که

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k| \leqslant |b_{2j-1}|-|b_j|.$$

در نتیجه اگر نامساوی (۱.۲) برقرار باشد تابع تحلیلی $\omega(z)$ با $|\omega(z)|<1$ و $\omega(0)=0$ موجود است به‌طوری‌که $f(z)=g(\omega(z))$.

اثبات قضیه کامل شد. □

نتیجه ۳.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $g(z)$ در رابطه (۲۰.۵.۱)تعریف شده باشد. اگر $f(z)$ در رابطه (۱.۲)صدق کند، آن‌گاه برای $۰ < \mu \leqslant ۲$ و $z = re^{i\theta}(۰ < r < ۱)$

$$\int_{۰}^{۲\pi} |f(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \leqslant ۲\pi r^{\mu} \left\{۱ + |b_j|^{۲} r^{۲(j-۱)} + |b_{۲j-۱}|^{۲} r^{۴(j-۱)}\right\}$$
$$< ۲\pi \left\{۱ + |b_j|^{۲} + |b_{۲j-۱}|^{۲}\right\}^{\frac{\mu}{۲}}.$$

برهان. از آن‌جایی‌که

$$\int_{۰}^{۲\pi} |g(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta = \int_{۰}^{۲\pi} |z|^{\mu} |۱ + b_j z^{j-۱} + b_{۲j-۱} z^{۲j-۲}|^{\mu} \mathrm{d}\theta.$$

با به‌کار بردن نامساوی هولدر برای $۰ < \lambda < ۲$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\int_{۰}^{۲\pi} |g(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \left(\int_{۰}^{۲\pi} (|z|^{\mu})^{\frac{۲}{(۲-\mu)}} \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{(۲-\mu)}{۲}} \left\{\int_{۰}^{۲\pi} (۱ + b_j z^{j-۱} + b_{۲j-۱} z^{۲j-۲}|^{\frac{۲}{\mu}})^{\frac{\mu}{۲}} \mathrm{d}\theta\right\}^{\frac{\mu}{۲}} \\
&= \left(r^{\frac{۲\mu}{(۲-\mu)}} \int_{۰}^{۲\pi} \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{(۲-\mu)}{۲}} \left(\int_{۰}^{۲\pi} |۱ + b_j z^{j-۱} + b_{۲j-۱} z^{۲j-۲}|^{۲} \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{\mu}{۲}} \\
&= \left(۲\pi r^{\frac{۲\mu}{(۲-\mu)}}\right)^{\frac{(۲-\mu)}{۲}} \left\{۲\pi(۱ + |b_j|^{۲} r^{۲(j-۱)} + |b_{۲j-۱}|^{۲} r^{۴(j-۱)})\right\}^{\frac{\mu}{۲}} \\
&= ۲\pi r^{\mu} (۱ + |b_j|^{۲} r^{۲(j-۱)} + |b_{۲j-۱}|^{۲} r^{۴(j-۱)})^{\frac{\mu}{۲}} \\
&< ۲\pi (۱ + |b_j|^{۲} + |b_{۲j-۱}|^{۲})^{\frac{\mu}{۲}}.
\end{aligned}$$

بنابراین برای $\mu = ۲$ به‌راحتی دیده می‌شود:

$$\int_{۰}^{۲\pi} |f(z)|^{۲} \mathrm{d}\theta \leqslant ۲\pi r^{۲} (۱ + |b_j|^{۲} r^{۲j-۱} + |b_{۲j-۱}|^{۲} r^{۴(j-۱)})$$
$$< ۲\pi (۱ + |b_j|^{۲} + |b_{۲j-۱}|^{۲})$$

□

مثال ۴.۱.۲. فرض کنید ضرایب $f(z) \in \mathcal{A}_n$ در نامساوی قضیه‌ی ۴.۲ صدق کند و

$$g(z) = z + \frac{n}{n + ۱ - \alpha} \varepsilon z^{j} + \delta z^{۲j-۱} \qquad (|\varepsilon| = |\delta| = ۱).$$

با $۰ \leqslant \alpha < ۱$ آن‌گاه $b_j = \frac{(n\varepsilon)}{n + ۱ - \alpha)}$ و $b_{۲j-۱} = \delta$ از خاصیت(۴.۲) مشاهده می‌شود

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} |a_k| \leqslant \frac{۱ - \alpha}{n + ۱ - \alpha} = ۱ - \frac{n}{n + ۱ - \alpha} = |b_{۲j-۱}| - |b_j|.$$

بنابراین $f(z)$ و $g(z)$ در شرایط قضیه ۱.۲ صدق می‌کند، بنابراین برای $۰ < \mu \leqslant ۲$ و $z =$

$re^{i\theta}\ (\circ < r < ۱)$ داریم

$$\int_\circ^{۲\pi} |f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta = ۲\pi r^\mu \left\{ ۱ + \left(\frac{n}{n+۱-\alpha} \right)^۲ r^{۲(j-۱)} + r^{۴(j-۱)} \right\}^{\frac{\mu}{۲}}$$
$$< ۲\pi \left\{ ۲ + \left(\frac{n}{n+۱-\alpha} \right)^۲ \right\}^{\frac{\mu}{۲}}.$$

با به‌کاربردن تکنیک اثبات قضیه ۲.۱.۲به قضیه زیر می‌رسیم

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $g(z)$ در (۱.۲) داده شده باشد، اگر $f(z)$ در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} k|a_k| \leqslant (۲j-۱)|b_{۲j-۱}| - j|b_j| \qquad (j|b_j| < (۲j-۱)|b_{۲j-۱}|). \tag{۴.۲}$$

آن‌گاه برای $\mu > \circ$ و $z = re^{i\theta}(\circ < r < ۱)$ خواهیم داشت

$$\int_\circ^{۲\pi} |f'(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqslant \int_\circ^{۲\pi} |g'(z)|^\mu \mathrm{d}\theta.$$

به‌علاوه طبق نامساوی هولدر داریم

نتیجه ۶.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathrm{A}_n$ و $g(z)$ در(۱.۲) داده شده باشد. اگر $f(z)$ در ۴.۲ صدق کند، آن‌گاه برای $\circ < \mu \leqslant ۲$ و $z = re^{i\theta}(\circ < r < ۱)$

$$\int_\circ^{۲\pi} |f'(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqslant ۲\pi \left\{ ۱ + j^۲|b_j|^۲ r^{۲(j-۱) + (۲j-۱)^۲ |b_{۲j-۱}|^۲ r^{۴(j-۱)}} \right\}^{\frac{\mu}{۲}}$$
$$< ۲\pi \left\{ ۱ + j^۲|b_j|^۲ + (۲j-۱)^۲|b_{۲j-۱}|^۲ \right\}^{\frac{\mu}{۲}}.$$

مثال ۷.۱.۲. فرض کنید ضرایب $f(z) \in \mathcal{A}_n$ در نامساوی قضیه ۵.۱.۲ صدق کند و

$$g(z) = z + \frac{n\epsilon}{j(n+۱-\alpha)} z^j + \frac{\delta}{۲j-۱} z^{۲j-۱} \qquad (|\epsilon| = |\delta| = ۱).$$

با $\circ \leqslant \alpha < ۱$، آن‌گاه

$$b_j = \frac{n\epsilon}{j(n+۱-\alpha)} \quad b_{۲j-۱} = \frac{\delta}{۲j-۱}.$$

ازآن‌جایی‌که

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} k|a_k| \leqslant \frac{۱-\alpha}{n+۱-\alpha} = ۱ - \frac{n}{n+۱-\alpha} = (۲j-۱)|b_{۲j-۱}| - j|b_j|.$$

تابع$f(z)$ و $g(z)$ در شرایط قضیه (۱.۲)صدق می‌کند بنابراین طبق نتیجه۶.۱.۲ برای $\circ < \mu \leqslant ۲$ و $z = re^{i\theta}(\circ < r < ۱)$ داریم

$$\int_\circ^{۲\pi} |f'(z)|^\mu \mathrm{d}\theta = ۲\pi \left\{ ۱ + \left(\frac{n}{n+۱-\alpha} \right)^۲ r^{۲(j-۱)} + r^{۴(j-۱)} \right\}^{\frac{\mu}{۲}}$$
$$< ۲\pi \left\{ ۲ + \left(\frac{n}{n+۱-\alpha} \right)^۲ \right\}.$$

حال تابع تحلیلی $h(z)$ را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$h(z) = z + b_j z^j + b_{2j-1} z^{2j-1} + b_{3j-2} z^{3j-2} \qquad (j \geqslant n+1). \tag{۵.۲}$$

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $h(z)$ در رابطه(۵.۲) داده شده باشد، اگر

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leqslant |b_{3j-2}| - |b_{2j-1}| - |b_j| \qquad (|b_j| + |b_{2j-1}| < |b_{3j-2}|) \tag{۶.۲}$$

آن‌گاه برای $\mu > 0$ و $z = re^{i\theta}(0 < r < 1)$

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |h(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \qquad (\mu > 0).$$

برهان. روش اثبات مانند اثبات قضیه ۱.۲ می‌باشد، باید نشان دهیم تابع تحلیلی $\omega(z)$ با $\omega(0) = 0$ و $|\omega| < 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(z) = h(\omega(z))$.
تابع $\omega(z)$را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$b_{3j-2}(\omega(z))^{3j-3} + b_{2j-1}(\omega(z))^{2j-2} + b_j(\omega(z))^{j-1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}.$$

از آن‌جایی‌که برای $z = 0$

$$(\omega(0))^{j-1} \left(b_{3j-2}(\omega(0))^{2j-2} + b_{2j-1}(\omega(0))^{j-1} + b_j\right) = 0.$$

در نتیجه تابع $\omega(z)$ موجود است به طوری‌که $\omega(0) = 0$ از طرف دیگر داریم

$$|b_{3j-2}||\omega(z)|^{3(j-1)} - |b_{2j-1}||\omega(z)|^{2(j-1)} - |b_j||\omega(z)|^{j-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < 0.$$

$t = |\omega|^{j-1}(t \geqslant 0)$ را در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم و تابع $U(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U(t) = |b_{3j-2}|t^3 - |b_{2j-1}|t^2 - |b_j|t - \sum_{k=n+1} |a_k| \qquad (t \geqslant 0)$$

نتیجه می‌دهد که $U(0) \leqslant 0$ و

$$U'(t) = 3|b_{3j-2}|t^2 - 2|b_{2j-1}|t - |b_j| \tag{۷.۲}$$

از آن‌جایی‌که $U'(t) = 0$ بزرگ‌تر از صفر است، طبق لم ۱.۱.۲ اگر $U'(1) \geqslant 0$، آن‌گاه برای $t < 1$ باید $U(t) < 0$، . بنابراین به نامساوی زیر نیاز داریم

$$U(1) = |b_{3j-2}| - |b_{2j-1}| - |b_j| - \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \geqslant 0.$$

یا

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leqslant |b_{3j-2}| - |b_{2j-1}| - |b_j|.$$

اثبات کامل شد. □

نتیجه ۹.۱.۲. فرض کنید $f(z)\in\mathcal{A}_n$ و $h(z)$ در (۵.۲) تعریف شده باشد. اگر $f(z)$ دررابطه‌ی (۶.۲) صدق کند، آن‌گاه برای $0<\mu\leqslant 2$ و $z=re^{i\theta}(0<r<1)$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta &\leqslant 2\pi r^\mu(1+|b_j|^2r^{2(j-1)}+|b_{2j-1}|^2r^{4(j-1)}+|b_{3j-2}|^2r^{6(j-1)})^{\frac{\mu}{2}}\\ &< 2\pi(1+|b_j|^2+|b_{2j-1}|^2+|b_{3j-2}|^2)^{\frac{\mu}{2}}.\end{aligned}$$

به‌علاوه برای $0<p\leqslant 2$ داریم $f(z)\in\mathcal{H}^p(U)$

مثال ۱۰.۱.۲. فرض ضرایب $f(z)\in\mathcal{A}_n$ در نامساوی قضیه ۷.۳.۱ صدق کند و $h(z)$ به‌صورت زیر باشد

$$h(z)=z+\frac{nt}{n+1-\alpha}\varepsilon z^j+\frac{n(1-t)}{n+1-\alpha}\delta z^{2j-1}+\sigma z^{3j-2}.$$
$$(0\leqslant t\leqslant 1, |\varepsilon|=|\delta|=|\sigma|=1).$$

با $0\leqslant\alpha<1$، آن‌گاه

$$b_j=\frac{nt}{n+1-\alpha}\varepsilon,\qquad b_{2j-1}=\frac{n(1-t)}{n+1-\alpha}\delta,\quad b_{3j-2}=\sigma$$

طبق (۷.۳.۱) داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k| &\leqslant \frac{1-\alpha}{n+1-\alpha}=1-\frac{n(1-t)}{n+1-\alpha}-\frac{nt}{n+1-\alpha}\\ &=|b_{3j-2}|-|b_{2j-1}|-|b_j|\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $f(z)$ و $h(z)$ در شرایط قضیه ۸.۱.۲صدق می‌کند، بنابراین با به‌کاربردن نتیجه ۹.۱.۲برای $0<\mu\leqslant 2$ و $z=re^{i\theta}(0<r<1)$ داریم

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}|f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta\\ &=2\pi r^\mu\left\{1+\left(\frac{nt}{n+1-\alpha}\right)^2 r^{2(j-1)}+\frac{n(1-t)}{(n+1-\alpha)}r^{4(j-1)}+r^{6(j-1)}\right\}^{\frac{\mu}{2}}\\ &<2\pi\left\{2+(2t^2-2t+1)\left(\frac{n}{n+1-\alpha}\right)^2\right\}^{\frac{\mu}{2}}.\end{aligned}$$

حال انتگرال میانگین را برای $f'(z)$ و $h'(z)$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۱.۲. فرض کنید $f(z)\in\mathcal{A}_n$ و $h(z)$ در (۵.۲) داده شده باشد. اگر

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}k|a_k|\leqslant(3j-2)|b_{3j-2}|-(2j-1)|b_{2j-1}|-j|b_j|. \tag{۸.۲}$$

$$(j|b_j|+(2j-1)|b_{2j-1}|<(3j-2)|b_{3j-2}|). \tag{۹.۲}$$

آن‌گاه برای $\mu>0$ و $z=re^{i\theta}(0<r<1)$

$$\int_0^{2\pi}|f'(z)|^\mu \mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{2\pi}|h'(z)|^\mu \mathrm{d}\theta.$$

اثبات مانند اثبات قضیه‌ی ۵.۱.۲می‌باشد، بنابراین نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۲.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $h(z)$ در (۵.۲)داده شده باشد. اگر $f(z)$ در (۸.۲)صدق کند، آن‌گاه برای $0 < \mu \leqslant 2$ و $z = re^{i\theta}(0 < r < 1)$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} |f'(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \\ &\leqslant 2\pi \left\{1 + j^2|b_j|^2 r^{2j-1} + (2j-1)^2|b_{2j-1}|^2 r^{4(j-1)} + (3j-2)^2|b_{3j-2}|^2 r^{6(j-1)}\right\}^{\frac{\mu}{2}} \\ &< 2\pi \left\{1 + j^2|b_j|^2 + (2j-1)|b_{2j-1}|^2 + (3j-2)^2|b_{3j-2}|^2\right\}^{\frac{\mu}{2}}.\end{aligned}$$

مثال ۱۳.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}_n$ در قضیه‌ی۴.۴.۱ صدق کند و $h(z)$ به‌صورت زیر باشد

$$h(z) = z + \frac{nt}{j(n+1-\alpha)}\varepsilon z^j + \frac{n(1-t)}{n+1-\alpha}\delta z^{2j-1} + \frac{\sigma}{3j-2} z^{3j-2}.$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 1, |\varepsilon| = |\delta| = |\sigma| = 1).$$

با $0 \leqslant \alpha < 1$، در نتیجه خواهیم داشت

$$b_j = \frac{nt\varepsilon}{j(n+1-\alpha)} \qquad b_{2j-1} = \frac{n(1-t)\delta}{(2j-1)(n+1-\alpha)} \quad b_{3j-2} = \frac{\sigma}{3j-2}.$$

طبق نامساوی ۴.۴.۱داریم

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \leqslant \frac{1-\alpha}{n+1-\alpha} = 1 - \frac{n}{n+1-\alpha} = (3j-2)|b_{3j-2}| - (2j-1)|b_{2j-1}| - j|b_j|.$$

بنابراین $f(z)$ و $h(z)$ در شرایط قضیه ۱۱.۱.۲ صدق می‌کند. پس با به‌کار بردن نتیجه‌ی ۱۲.۱.۲ برای هر $0 < \mu \leqslant 2$ و $z = re^{i\theta}(0 < r < 1)$ داریم

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} |f'(z)| \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi r^\mu \left\{1 + \left(\frac{nt}{n+1-\alpha}\right)^2 r^{2(j-1)} + \frac{n(1-t)}{(n+1-\alpha)} r^{4(j-1)} + r^{6(j-1)}\right\}^{\frac{\mu}{2}} \\ &< 2\pi \left\{2 + (2t^2 - 2t + 1)\left(\frac{n}{n+1-\alpha}\right)^2\right\}^{\frac{\mu}{2}}.\end{aligned}$$

حال انتگرال میانگین را برای $f(z) \in \mathcal{A}$ و $P(z)$ که به‌صورت زیر تعریف شده است، بررسی می‌کنیم.

$$P(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k. \tag{۱۰.۲}$$

قضیه ۱۴.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $P(z)$ در رابطه‌ی (۱۰.۲)تعریف شده باشد، و در رابطه‌ی زیر صدق کنند

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq |b_{mj-m+1}| - \sum_{s=1}^{m-1} |b_{sj-s+1}|.$$

با
$$\sum_{s=1}^{m}|b_{sj-s+1}|<|b_{mj-m+1}|.$$
اگر تابع تحلیلی $\omega(z)$ در U موجود و به‌صورت زیر تعریف شده باشد
$$\sum_{s=1}^{m}b_{sj-s+1}\omega(z)^{s(j-1)}-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^{k-1}=0. \tag{۱۱.۲}$$
آن‌گاه برای $\mu>0$ و $z=re^{i\theta}(0<r<1)$
$$\int_0^{2\pi}|f(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta\le\int_0^{2\pi}|P(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta\quad(\mu>0).$$

برهان. قرار می‌دهیم $z=re^{i\theta}(0<r<1)$، در نتیجه خواهیم داشت
$$\int_0^{2\pi}|f(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta=r^{\mu}\int_0^{2\pi}\Big|1+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^{k-1}\Big|^{\mu}\mathrm{d}\theta.$$
و
$$\int_0^{2\pi}|P(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta=r^{\mu}\int_0^{2\pi}\Big|1+\sum_{s=1}^{m}b_{sj-s+1}z^{sj-s}\Big|^{\mu}\mathrm{d}\theta.$$
با استفاده از قضیه‌ی ۲۰.۵.۱،کافی است نشان دهیم
$$1+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^{k-1}\prec 1+\sum_{s=1}^{m}b_{sj-s+1}z^{sj-s}.$$
فرض کنید تابع $\omega(z)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد
$$\begin{aligned}1+\sum_{s=1}^{m}&b_{sj-s+1}\{\omega(z)\}^{s(j-1)}\\&=b_{mj-m+1}\omega(z)^{m(j-1)}+b_{(m-1)j-m+2}\omega(z)^{(m-1)(j-1)}\\&+b_{(m-2)j-m+3}\omega(z)^{(m-2)(j-1)}+\cdots+b_{2j-1}\omega(z)^{2(j-1)}\\&b_j\omega(z)\circ^{j-1}=1+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^{k-1}.\end{aligned}$$
یا
$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{m}&b_{sj-s+1}\{\omega(z)\}^{s(j-1)}\\&=b_{mj-m+1}\omega(z)^{m(j-1)}+b_{(m-1)j-m+2}\omega(z)^{(m-1)(j-1)}\\&+b_{(m-2)j-m+3}\omega(z)^{(m-2)(j-1)}+\cdots+b_{2j-1}\omega(z)^{2(j-1)}\\&+b_j\omega(z)^{j-1}=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^{k-1}.\end{aligned}$$
بنابراین
$$\omega(0)^{j-1}\left\{b_{mj-m+1}\omega(0)^{(m-1)(j-1)}+b_{(m-1)-m+2}\omega(0)^{(m-2)(j-1)}+\cdots+b_{2j-1}\omega(0)^{j-1}+b_j\right\}=0.$$

تابع$\omega(z)$ در U وجود دارد به طوری‌که $\omega(\circ) = \circ$. حال ثابت می‌کنیم$|\omega(z)| < ۱ (z \in U)$

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} |a_k| \leq |b_{mj-m+۱}| - \sum_{s=۱}^{m} |b_{sj-s+۱}| \quad \left(\sum_{s=۱}^{m} |b_{sj-s+۱}| < |b_{mj-m+۱}| \right).$$

از رابطه‌ی (۱۱.۲) داریم

$$|b_{mj-m+۱}\omega(z)^{mj-m} + b_{(m-۱)j-m+۲}\omega(z)^{(m-۱)j-(m-۱)} + \cdots + b_{۲j-۱}\omega(z)^{۲j-۲} + b_j\omega(z)^{j-۱}|$$
$$\leq \sum_{k=n+۱}^{\infty} |a_k z^{k-۱}| < \sum_{k=n+۱}^{\infty} |a_k|.$$

بنابراین برای $z \in U$

$$\begin{aligned} &|b_{mj-m+۱}||\omega(z)^{mj-m}| - |b_{(m-۱)j-m+۲}||\omega(z)|^{(m-۱)j-(m-۱)} \\ &\quad - |b_{(m-۲)j-m+۳}||\omega(z)^{(m-۲)j-(m-۲)}| + \cdots - |b_{۲j-۱}||\omega(z)^{۲j-۲}| \\ &\quad - |b_j||\omega(z)^{j-۱}| - \sum_{k=n+۱}^{\infty} |a_k| < \circ. \end{aligned}$$

$t = |\omega(z)|^{j-۱} (t \geq \circ)$ را در نامساوی بالا قرار می‌دهیم، چند جمله‌ای $P(t)$ از درجه‌ی m را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} P(t) = &|b_{mj-m+۱}|t^m - |b_{(m-۱)j-m+۲}|t^{m-۱} - |b_{(m-۲)j-m+۳}|t^{m-۲} \\ &- \cdots - |b_{۲j-۱}|t^۲ - |b_j|t - \sum_{k=n+۱}^{\infty} |a_k|. \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱.۱.۲، اگر $P(۱) \geq \circ$، برای$P(t) < \circ$، باید $t < ۱$. بنابراین برای$|\omega(z)| < ۱$، $(z \in U)$به نامساوی زیر نیاز داریم

$$\begin{aligned} P(۱) = &|b_{mj-m+۱}| - |b_{(m-۱)j-m+۲}| - |b_{(m-۲)j-m+۳}| \\ &- \cdots - |b_{۲j-۱}| - |b_j| - \sum_{k=n+۱}^{\infty} |a_k| \geq \circ. \end{aligned}$$

□

۲.۲ انتگرال میانگین برای کلاس$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi; \alpha, \beta)$

در این بخش با معرفی کلاس$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)$، انتگرال میانگین را بر روی کلاس$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi; \alpha, \beta)$ بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{T}$ نشان دهنده‌ی توابع به فرم زیر باشد

$$f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geqslant \circ, z \in U).$$

قرار می‌دهیم

$$\mathcal{T}^*(\alpha) = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}^*_\alpha, \quad \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{T}, \quad \mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{T}, \quad \mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{T}.$$

تعریف ۲.۲.۲. فرض α $(\circ \leqslant \alpha < ۱)$ ، β $(\circ \leqslant \beta < ۱)$ و دو تابع Φ و Ψ به‌صورت زیر داده شده باشد

$$\Phi(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \lambda_n z^n \quad \Psi(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \mu_n z^n. \tag{۱۲.۲}$$

که در u تحلیلی باشند، به قسمی که $\lambda_n \geqslant \circ$، $\mu_n \geqslant \circ$ و $\lambda_n \geqslant \mu_n$ گوییم $f \in \mathcal{A}$ متعلق به کلاس $B(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)$ است، اگر

$$Re\left(\frac{f(z) * \Phi(z)}{f(z) * \psi(z)}\right) > \frac{۱ + \beta - ۲\alpha}{۲(۱ - \alpha)}.$$

و

$$f(z) * \phi(z) \neq \circ.$$

به‌علاوه فرض کنید

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta) = \mathcal{B}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta) \cap \mathcal{T}.$$

با انتخاب مناسب Ψ ، Φ و α می‌توان زیرکلاس‌های مختلف از $\mathcal{T}$ را به‌عنوان $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)$ نمایش داد. برای مثال

آ) $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\frac{z}{(۱-z)^۲}, \frac{z}{۱-z}, \frac{۱}{۲}, \beta) = \mathcal{S}^*_{\mathcal{T}}(\beta)$

ب) $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\frac{z+z^۲}{(۱-z)^۳}, \frac{z}{(۱-z)^۲}, \frac{۱}{۲}, \beta) = \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(\beta)$

پ) $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\frac{z}{(۱-z)^۲}, z, \frac{۱}{۲}, \beta) = \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\beta)$ [۹]

د) $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\frac{z+(۱-۲\beta)z^۲}{(۱-z)^{۳-۲\beta}}, \frac{z}{(۱-z)^{۲-۲\beta}}, \frac{۱}{۲}, \beta) = \mathcal{R}_{\mathcal{T}}(\beta)$ [۱۴]

ر) $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \frac{۱}{۲}, \beta) = \varepsilon_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \beta)$ [۴]

۱.۲.۲ نتایج اصلی

برای به‌دست آوردن نتایج اصلی به لم‌های زیر نیاز داریم

لم ۳.۲.۲. تابع $f(z) \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)$ اگروتنهااگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha, \beta, n)}{۱ - \beta} a_n \leqslant ۱. \tag{۱۳.۲}$$

که $\sigma(\alpha, \beta, n) = ۲(۱-\alpha)\lambda_n - (۱+\beta-۲\alpha)\mu_n$، $\circ \leqslant \alpha < ۱$ و $\circ \leqslant \beta < ۱$ و $n \geqslant ۲$ و تابع اکسترمال به صورت زیر می‌باشد

$$f_n(z) = z - \frac{۱ - \beta}{\sigma(\alpha, \beta, n)} z^n.$$

لم ۴.۲.۲. اگر f, g در U تحلیلی باشد و $g \prec f$ آن‌گاه

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |g(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\theta \leqslant \int_{\circ}^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\theta.$$

که $\delta>۰$ ، $z=re^{i\theta}$ و $۰<r<۱$

با استفاده از لم۳.۲.۲ و لم ۴.۲.۲ قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵.۲.۲. فرض $\delta>۰$، اگر $f(z)\in\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi,\Psi;\alpha,\beta)$ و $\{\sigma(\alpha,\beta,n)\}_{n=۲}^{\infty}$ دنباله غیر نزولی باشد آن‌گاه برای $z=re^{i\theta}$، $۰<r<۱$ داریم

$$\int_{۰}^{۲\pi}|f(re^{i\theta})|^{\delta}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_{۰}^{۲\pi}|f_{۲}(re^{i\theta})|^{\delta}\mathrm{d}\theta.$$

که

$$f_{۲}(z)=z-\frac{(۱-\beta)}{\sigma(\alpha,\beta,۲)}z^{۲}.$$

برهان. فرض $f(z)=z-\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$، $(a_n\geqslant۰,z\in U)$ و $f_{۲}(z)=z-\dfrac{۱-\beta}{\sigma(\alpha,\beta,۲)}z^{۲}$ آن‌گاه باید نشان دهیم

$$\int_{۰}^{\infty}|۱-\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^{n-۱}|^{\delta}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_{۰}^{۲\pi}|۱-\frac{۱-\beta}{\sigma(\alpha,\beta,۲)}z|^{\delta}\mathrm{d}\theta.$$

طبق لم ۴.۲.۲ کافی است نشان دهیم

$$۱-\sum_{n=۲}^{۲\pi}a_nz^{n-۱}\prec۱-\frac{۱-\beta}{\sigma(\alpha,\beta,۲)}z.$$

با جایگذاری

$$۱-\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^{n-۱}=۱-\frac{۱-\beta}{\sigma(\alpha,\beta,۲)}\omega(z).\tag{۱۴.۲}$$

از (۱۴.۲) و (۳.۲.۲) داریم

$$\begin{aligned}|\omega(z)|&=|\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\sigma(\alpha,\beta,۲)}{۱-\beta}a_nz^{n-۱}|\\&\leqslant|z|\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\sigma(\alpha,\beta,n)}{۱-\beta}a_n\leqslant|z|.\end{aligned}$$

اثبات کامل شد. □

با انتخاب مختلف $\Phi(z)$ و $\Psi(z)$ و α در قضیه بالا نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم

نتیجه ۶.۲.۲. فرض $\beta>۰$، اگر $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}^{*}=\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\frac{z}{(۱-z)^{۲}},\frac{z}{۱-z},\frac{۱}{۲},\beta)\ni f(z)$ ، آن‌گاه برای $z=re^{i\theta}$ ،$۰<r<۱$ داریم

$$\int_{۰}^{۲\pi}|f(re^{i\theta})|^{\delta}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_{۰}^{۲\pi}|h_{۲}(re^{i\theta})|^{\delta}\mathrm{d}\theta.$$

که $h_{۲}(z)=z-\dfrac{(۱-\beta)}{(۲-\beta)}z^{۲}.$

نتیجه ۷.۲.۲. فرض $\beta > \circ$، اگر $f(z) \in \mathcal{B}_T(\frac{z+z^{۲}}{(۱-z)^{۳}}, \frac{z}{(۱-z)^{۲}}, \frac{۱}{۲}, \beta) = \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(\beta)$، آن‌گاه برای$۱ > r \leq \circ$، $z = re^{i\theta}$ داریم

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\theta \leqslant \int_{\circ}^{۲\pi} |q_{۲}(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\theta.$$

که $K_{۲}(z) = z - \frac{(۱-\beta)}{۲(۲-\beta)} z^{۲}.$

نتیجه ۸.۲.۲. فرض $\beta > \circ$، اگر $f(z) \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\frac{z}{(۱-z)^{۲}}, z, \frac{۱}{۲}, \beta) = \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\beta)$، آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}$، $\circ < r < ۱$ داریم

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\delta \leqslant \int_{\circ}^{۲\pi} |q_{۲}(re^{i\theta})|^{\delta}.$$

که $q_{۲}(z) = z - \frac{۱}{۲}(۱-\beta) z^{۲}.$

نتیجه ۹.۲.۲. اگر $f(z) \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\frac{z+(۱-۲\beta)z^{۲}}{(۱-z)^{۳-۲\beta}}, \frac{z}{(۱-z)^{۲-۲\beta}}, \frac{۱}{۲}, \beta) = \mathcal{R}_{\mathcal{T}(\beta)}$ آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}$، $\circ < r < ۱$ داریم

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\theta \leqslant \int_{\circ}^{۲\pi} |L_{۲}(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\delta.$$

که $L_{۲}(z) = z - \frac{۱}{۲(۲-\beta)} z^{۲}$

نتیجه ۱۰.۲.۲. فرض $\beta > \circ$، اگر $f(z) \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \frac{۱}{۲}, \beta) = \varepsilon_T(\Phi, \Psi, \beta)$ و $\{\sigma(\frac{۱}{۲}, \beta, n)\}_{n=۲}^{\infty}$ دنباله ی غیر نزولی برای $z = re^{i\theta}$، $\circ < r < ۱$ داریم

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\theta \leqslant \int_{\circ}^{۲\pi} |\nu_{۲}(re^{i\theta})|^{\delta} \mathrm{d}\theta.$$

که $\nu_{۲}(z) = z - \frac{(۱-\beta)}{(\lambda_{۲} - \beta\mu_{۲}} z^{۲}$

۳.۲ انتگرال میانگین برای کلاس $\mathcal{M}_r^s[a_i', a_j, b_i', \Phi, \Psi, \alpha]$

با معرفی کلاس $\mathcal{M}_{\tau}^{\delta}[a_i', a_j, b_i', \Phi, \Psi, \alpha]$، انتگرال میانگین را بر روی آن بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیدrو sاعداد صحیح نامنفی باشند، سری زیر را در نظر بگیرید

$$\phi_s^r \left(\left. \begin{matrix} \{a_۱', b_۱'\}, \cdots, \{a_r', b_r'\} \\ \{a_۱, b_۱\}, \cdots, \{a_s, b_s\} \end{matrix} \right| z \right) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\prod_{i=۱}^{r} \Gamma(a_i' + b_j' n) z^n}{\prod_{j=۱}^{s} \Gamma(a_j + b_j n) n!} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

که $a'_1, \cdots, a'_r, a_1, \cdots, a_s$ اعداد مختلط و $b'_1, \cdots, b'_r, b_1, \cdots, b_s$ اعداد مثبت، و رابطه‌ی زیر را دارند

$$b'_1 + \cdots + b'_r = b_1 + \cdots + b_s + 1.$$

از طرف دیگر سری بالا برای $|z| < c$ همگراست که c به‌صورت زیر می‌باشد

$$c = b_1^{1-b'_1} \cdots b_r^{1-b'_r} b_1^{-b_1} \cdots b_s^{-b_s}.$$

معادله دیفرانسیل تابع ϕ_s^r به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi = \prod_{j=1}^{s} P_{b_j}(a_j, b_j) \prod_{i=1}^{r} P_{b'_i}(a'_i + b'_i, -b'_i)\phi,$$

P عملگر مشتق کسری از مرتبه b،که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_\sigma(a,b)f(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} f(t^\sigma z)\mathrm{d}t, \qquad \sigma > 0.$$

برای $b'_i = b_j$ و $r = s+1$،تابع ϕ_s^r کاهش یافته‌ی تابع فوق هندسی از مرتبه بالاتر زیر می‌باشد

$$\phi_s^{s+1}\left(\left(\begin{matrix} a'_1, \cdots, a'_{s+1} \\ a_1, \cdots, a_s \end{matrix}\right)\middle| z\right)$$

و معادله دیفرانسیل بالا کاهش یافته‌ی معادله دیفرانسیل معمولی زیر می‌باشد

$$\prod_{j=1}^{s}\left(a_j + z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\frac{z}{\mathrm{d}z}\phi = \prod_{i=1}^{s+1}\left(a'_i + z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\phi$$

حالا برای $z \in U$ و $r \le s+1$، فرض کنید

$$\psi\left(\begin{matrix} \{a'_1, b'_1\}, \cdots, \{a'_r, b'_r\} \\ \{a_1, b_1\}, \cdots, \{a_s, b_s\} \end{matrix}\middle| z\right) = z\phi_s^r\left(\begin{matrix} \{a'_1, b'_1\}, \cdots, \{a'_r, b'_1\} \\ \{a_1, b_1\}, \cdots, \{a_s, b_s\} \end{matrix}\middle| z\right)$$

و ψ به فرم زیر می‌باشد

$$\psi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(a'_i + b'_j(n-1))z^n}{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(a_j + b_j(n-1))(n-1)!}. \tag{۱۵.۲}$$

برای $f \in A$، عملگر $\mathcal{M}_s^r[a'_i; a_j; b'_i; b_j]\,(i = 1, \cdots, r, j = 1, \cdots, s)$ به وسیله‌ی ضرب هادامارد به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$M_s^r\left(\begin{matrix} \{a'_1, b'_1\}, \cdots, \{a'_r, b'_r\} \\ \{a_1, b_1\}, \cdots, \{a_s, b_s\} \end{matrix}\middle| z\right) f(z) = \psi\left(\begin{matrix} \{a'_1, b'_1\}, \cdots, \{a'_r, b'_r\} \\ \{a_1, b_1\}, \cdots, \{a_s, b_s\} \end{matrix}\middle| z\right) * f(z)$$

برای $f(z) \in \mathcal{A}$ و تابع ψ از(۱۵.۲)، داریم

$$M_s^r\left(\begin{matrix} \{a'_1, b'_1\}, \cdots, \{a'_r, b'_r\} \\ \{a_1, b_1\}, \cdots, \{a_s, b_s\} \end{matrix}\middle| z\right) f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n a_n z^n. \tag{۱۶.۲}$$

که

$$\gamma_n = \frac{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(a'_i + b'_i(n-1))}{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(a_j + b_j(n-1))(n-1)!}.$$

برای سادگی می‌نویسیم

$$\mathcal{M}_s^r\left(\begin{array}{c|c}\{a'_1,b'_1\},\cdots,\{a_s,b_s\} & \\ & z\\ \{a_1,b_1\},\cdots,\{a_s,b_s\} & \end{array}\right)f(z)=M_s^r[a'_i;a_j;b'_i;b_j]f(z).$$

لم ۲.۳.۲. برای $f\in\mathcal{A}$،داریم

آ) $\mathcal{M}_0^1[0;-;1;-]f(z)=f(z)$

ب) $\mathcal{M}_0^1[2;-;1;-]f(z)=zf'(z)$

حال با استفاده از$\mathcal{M}_s^r\,[a'_i;a_j;b'_i;b_j]$، زیرکلاسی از توابع تحلیلی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید$\alpha\in(0,1]$ و توابع

$$\Phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n z^n,\qquad \Psi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n z^n.$$

در U تحلیلی هستند به‌طوری‌که $\lambda_n\geq 0$ و $\lambda_n\geq\mu_n$ و $\mu_n\geq 0,$ و$n\geq 2$.

گوییم $f\in\mathcal{A}$ در $\mathcal{M}_s^r\,[a'_i,a_j,b'_i,b_j,\Phi,\Psi,\alpha]$ است اگر $f(z)*\Psi(z)\neq 0$ و

$$\left|\frac{\mathcal{M}_s^r[a'_i;a_j;b'_i;b_j](f*\Phi)(z)}{\mathcal{M}_s^r[a'_i;a_j;b'_i;b_j](f*\Psi)(z)}-1\right|<\alpha.$$

که$\mathcal{M}_s^r\,[a'_i,a_j,b'_i,b_j,\Phi,\Psi,\alpha]$ در (۱۶.۲)داده شده است، به‌علاوه فرض کنید

$$\mathcal{M}_{\tau s}^r\left[a'_i;a_j;b'_j;b_j;\Phi,\Psi,\alpha\right]=\mathcal{M}_s^r[a'_i;a_j;b'_i;b_j,\Phi,\Psi,\alpha]\cap\tau.$$

که

$$\tau=\left\{f\in\mathcal{A}f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n,z\in\mathcal{U}\right\}.\tag{۱۷.۲}$$

با انتخاب مناسب از $r,s,a'_i,a_j,b'_i,b_j,\Phi,\Psi,$ و α زیرکلاس‌های مختلف به‌دست می‌آید.

مثال ۴.۳.۲. برای $r=1$ و $s=0$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\tau 0}^1\left(0,-,1,-,\Phi,\Psi,\alpha\right)&=\mathcal{D}_\tau\left(\Phi,\Psi,\alpha\right)\\&=\left\{f\in\tau\Big|\frac{(f*\Phi)(z)}{(f*\Psi)(z)}-1\Big|<\alpha\right\}.\end{aligned}$$

اگر $\alpha=\dfrac{1-\delta}{2(1-\nu)}$ باشد،آن‌گاه کلاس زیر را داریم

$$\mathcal{M}_{\tau 0}^1\left(0;-;1,-,\Phi,\Psi,\frac{1-\delta}{2(1-\nu)}\right)=\left\{f\in\tau\Big|\frac{(f*\Phi)(z)}{(f*\Psi)(z)}-1\Big|<\frac{1-\delta}{2(1-\nu)}\right\}.$$

مثال ۵.۳.۲. برای $r=1,s=0$ و $\alpha=1-\delta$ به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{M}_{\tau 0}^1\left(0,-,1,-,\Phi,\Psi,1-\delta\right)=\mathcal{M}_\tau\left(\Phi,\Psi,\delta\right)=|\frac{(f*\Phi)(z)}{(f*\Psi)(z)}-1|<1-\delta.$$

که$\mathcal{D}_\tau(\Phi,\Psi,\delta)$ توسط جانیجا مطالعه شده است.

در حالت خاص، برای $r=1,s=0$ و $\Phi(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ و $\alpha=1-\delta$ $\Psi(z)=\dfrac{z}{1-z}$

$$\mathcal{M}_{\tau 0}^1\left(0,-,1,-,\frac{z}{(1-z)^2},\frac{z}{1-z},\alpha=1-\delta\right)=\mathcal{S}_\tau^*(\delta)=\left\{f\in\tau\Big|\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big|1-\delta\right\}.$$

برای $r=۱, s=۰$ و $\Phi(z) = \frac{z+z^۲}{(۱-z)^۳}$ و $\Psi(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ و $\alpha = ۱-\delta$ داریم

$$\mathcal{M}_{\tau ۰}^{۱}\left(۰, -, ۱, -, \frac{z+z^۲}{(۱-z)^۳}, \frac{z}{(۱-z)^۲}\alpha = ۱-\delta\right) = \mathcal{C}_\tau(\delta) = \left\{f \in \tau \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < ۱-\delta\right\}$$

که $\mathcal{S}_\tau^*(\delta)$ و $\mathcal{C}_\tau(\delta)$ زیرکلاس‌هایی از τ،که به‌ترتیب ستاره‌گون از مرتبه δ و محدب از مرتبه δ می‌باشند، که توسط سیلورمن مطالعه شده است.

مثال ۶.۳.۲. برای $r=۱, s=۰$ قرار می‌دهیم

$$\mathcal{M}_{\tau ۰}^{۱}(۲, -, ۱, -, \Phi, \Psi, \alpha) = \left|\frac{(f*\Phi)'(z)}{(f*\Psi)'(z)} - ۱\right| < \alpha.$$

مثال ۷.۳.۲. برای $r=۱$ ، $s=۰$ و $\Phi(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ و $\Psi(z) = \frac{z}{۱-z}$ به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{M}_{\tau ۰}^{۱}\left(۲, -, ۱, -, \frac{z}{(۱-z)^۲}, \frac{z}{۱-z}, \alpha\right) = \left\{f \in \tau \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \alpha\right\}.$$

مثال ۸.۳.۲. برای $r=۱, s=۰$، $\Phi(z) = \frac{z+z^۲}{(۱-z)^۳}$ و $\Psi(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ داریم

$$M_{\tau ۰}^{۱}\left(۲, -, ۱, -, \frac{z+z^۲}{(۱-z)^۳}, \frac{z}{(۱-z)^۲}, \alpha\right) = \left\{f \in \tau \left|\frac{z(zf'''(z) + ۲f''(z))}{zf''(z)+f'(z)} - ۱\right| < \alpha\right\}.$$

قضیه ۹.۳.۲. فرض کنید تابع f طبق رابطه۱۷.۲ تعریف شده باشد. $f \in \mathcal{M}_{\tau s}^r[a'_i, a_j, b'_i, b_j, \Phi, \Psi, \alpha]$ اگروفقطاگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{[\lambda_n - (۱-\alpha)\mu_n]}{\alpha}|\gamma_n||a_n| \leq ۱, \qquad \alpha \in (۰, ۱].$$

با تابع اکسترمال

$$f_n(z) = z - \frac{\alpha}{\sigma(\alpha, n)}z^n, \qquad n \geq ۲.$$

که$\sigma(\alpha, n) = [\lambda_n - (۱-\alpha)\mu_n]\,|\gamma_n|, \qquad \alpha \in (۰, ۱]$

شرایط بالا لازم و کافی است، برای اینکه $f \in \mathcal{M}_{\tau s}^r[a'_i, a_j, b'_i, \Phi, \Psi, \alpha]$.

نامساوی انتگرال میانگین

قضیه ۱۰.۳.۲. فرض کنید $f \in M_{\tau s}^r[a'_i, a_j, b'_i, b_j, \Phi, \Psi, \alpha]$ و $\sigma(\alpha, n)$ دنباله غیر نزولی و $f_۲(z)$ به‌صورت زیر باشد

$$f_۲(z) = z - \frac{\alpha}{\sigma(\alpha, ۲)}z^۲.$$

که

$$\sigma(\alpha, ۲) = [\lambda_۲ - (۱-\alpha)\mu_۲]|\gamma_۲|.$$

و $\gamma_۲$ به‌صورت زیر باشد

$$\gamma_۲ = \frac{\prod_{i=۱}^r \Gamma(a'_i + b'_i)}{\prod_{j=۱}^s \Gamma(a_j + b_j)}.$$

آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}, \circ < r < ۱$ به‌دست می‌آوریم

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^{\eta} \mathrm{d}\theta \leq \int_{\circ}^{۲\pi} |f_۲(re^{i\theta})|^{\eta} \mathrm{d}\theta.$$

برهان.

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^{n-۱}|^{\eta} \mathrm{d}\theta \leq \int_{\circ}^{۲\pi} |۱ - \frac{\alpha}{\sigma(\alpha, ۲)} z|^{\eta} \mathrm{d}\theta.$$

طبق لم۲۰.۵.۱،کافی است نشان دهیم

$$\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^{n-۱} \prec \frac{\alpha}{\sigma(\alpha, ۲)} z.$$

با جایگذاری $\omega(z)$ در رابطه‌ی بالا و از (۹.۳.۲) داریم

$$|\omega(z)| = \Big| \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha, ۲)}{\alpha} |a_n| z^{n-۱} \Big| \leq \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha, ۲)}{\alpha} |a_n| \leq |z| < ۱.$$

در نتیجه طبق تعریف زیر ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه ۱۱.۳.۲. فرض کنید $\alpha \in (\circ, ۱]$ $\quad$ $f \in \mathcal{M}^{۱}_{\tau\circ}[\circ, -, ۱, -, \Phi, \Psi, \alpha] = \mathcal{D}_{\tau}(\Phi, \Psi, \alpha),$ و $f_۲(z)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$f_۲(z) = z - \frac{\alpha}{\lambda_۲ - (۱-\alpha)\mu_۲} z^۲.$$

آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}, \circ < r < ۱$ به‌دست می‌آوریم

$$\int_{\circ}^{۲\pi} |f(z)|^{\eta} \mathrm{d}\theta \leq \int_{\circ}^{۲\pi} |f_۲(z)|^{\eta} \mathrm{d}\theta. \tag{۱۸.۲}$$

نتیجه ۱۲.۳.۲. فرض کنید$\mathcal{S}^{*}_{\tau}(\alpha) = \mathcal{M}^{۱}_{\tau\circ}\left[۲, -, ۱, -, \frac{z}{(۱-z)^۲}, \frac{z}{۱-z}, \alpha\right]$ $f \in$ و $f_۲(z)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$f_۲(z) = z - \frac{\alpha}{۲(\alpha+۱)} z^۲.$$

آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}$ $\circ < r < ۱$ (۱۸.۲) برقرار است.

نتیجه ۱۳.۳.۲. فرض کنید $\mathcal{C}_{\tau}(\alpha) = \mathcal{M}^{۱}_{\tau\circ}\left[۲, -, ۱, -, \frac{z+z^۲}{(۱-z)^۳}, \frac{z}{(۱-z)^۲}, \alpha\right]$ $f \in$ و$f_۲(z)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$f_۲(z) = z - \frac{\alpha}{۴(\alpha+۱)} z^۲.$$

آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}, \circ < r < ۱$، رابطه‌ی (۱۸.۲)برقرار می‌باشد.

فصل ۳

انتگرال میانگین توابع تحلیلی برای مشتق کسری

در این بخش به معرفی مشتق کسری و انتگرال کسری می‌پردازیم. که از مرجع [۱۵]و [؟] گرفته شده‌اند.

تعریف ۱۴.۰.۳. انتگرال کسری از مرتبه λ برای هر $f(z)$ به‌صورت زیر تعریف می شود

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{1-\lambda}} \mathrm{d}\zeta (\lambda > 0).$$

که تابع $f(z)$ در ناحیه ساده بسته از صفحه مختلط z، شامل مبدا تحلیلی می باشد و در صورت داشتن $\log(z-\zeta)$ وقتی $z-\zeta > 0$ ، $(z-\zeta)^{\lambda-1}$ را می توان حذف کرد.

تعریف ۱۵.۰.۳. مشتق کسری از مرتبهλ،برای هر $f(z)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_0^z \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{\lambda}} \mathrm{d}\zeta (0 \leq \lambda < 1).$$

که تابع $f(z)$ محدود است، و $(z-\zeta)^{-\lambda}$ همانند تعریف بالا می توان حذف کرد.

تعریف ۱۶.۰.۳. با فرضیات تعریف۱۵.۰.۳، مشتق کسری از مرتبه $n+\lambda$ برای هر $f(z)$ به‌صورت زیر تعریف می شود

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} D_z^{\lambda} f(z) \quad (0 \leq \lambda < 1; n \in N_0 = N \cup \{0\}).$$

از خاصیت تعاریف ۱۴.۰.۳ ، ۱۵.۰.۳و ۱۶.۰.۳ داریم

$$D_z^{-\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\lambda+1)} z^{k+\lambda} \quad (k \in N, \lambda > 0). \tag{۱.۳}$$

$$D_z^{\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)} z^{k-\lambda} \quad (k \in N, 0 \leq \lambda < 1). \tag{۲.۳}$$

و

$$D_z^{q+\lambda} z^k = \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}z^q} D_z^{\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-q-\lambda+1)} z^{k-(q+\lambda)} \quad (q \in N_0, k \in N, 0 \leq \lambda < 1; q \leq k \text{و} \lambda = 0). \tag{۳.۳}$$

قضیه ۱۷.۰.۳. فرض $f(z)\in\mathcal{A}_n$ و $p(z)(m\geq ۲)$ در (۱۰.۲)داده شده باشد، فرض کنید که

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k| \leq \frac{|\Gamma(۲-q-\nu)|}{|\Gamma(۲-q-\lambda)|}\left\{\frac{\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{m(j-۱)+۱}|\right\}- \sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{\Gamma(s(j-۱)+۲)}{|\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{s(j-۱)+۱}|.$$

با

$$\sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{\Gamma(s(j-۱)+۲}{|\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{s(j-۱)+۱}|<\frac{\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{m(j-۱)+۱}|.$$

$$(q\in N_\circ,\circ\leq\lambda,\nu<۱;q\leq ۱,\quad \text{برای}\quad \lambda\nu=\circ,j\geq n+۱;n\in N).$$

اگر تابع تحلیلی $\omega(z)$ در $\mathbb{U}$ موجود، و به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}\left\{\omega(z)\right\}^{s(j-۱)} -\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(۲-q-\lambda)\Gamma(k+۱)}{\Gamma(k+۱-q-\lambda)}a_kz^{k-۱}=\circ. \tag{۴.۳}$$

آن‌گاه برای $z=re^{i\theta}(\circ<r<۱)$ و $\mu>\circ$

$$\int_\circ^{۲\pi}|D_z^{q+\lambda}f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta\leq\left|\frac{\Gamma(۲-q-\nu)}{\Gamma(۲-q-\lambda)}\right|\int_\circ^{۲\pi}|z^{\nu-\lambda}D_z^{q+\nu}p(z)|^\mu\mathrm{d}\theta.$$

برهان. با استفاده از فرمول مشتق کسری (۳.۳) برای $f(z)\in\mathcal{A}$داریم

$$D_z^{q+\lambda}f(z)=\frac{z^{۱-q-\lambda}}{\Gamma(۲-q-\lambda)}\left(۱+\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(۲-q-\lambda)\Gamma(k+۱)}{\Gamma(k+۱-q-\lambda)}a_kz^{k-۱}\right).$$

همچنین با استفاده از فرمول مشتق کسری(۳.۳) برای (۱۰.۲)به‌دست می آوریم

$$D_z^{q+\nu}p(z)=\frac{z^{۱-q-\nu}}{\Gamma(۲-q-\nu)}\left(۱+\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}z^{s(j-۱)}\right).$$

بنابراین داریم

$$\frac{\Gamma(۲-q-\nu)}{\Gamma(۲-q-\lambda)}z^{\nu-\lambda}D_z^{q+\nu}p(z) =\frac{z^{۱-q-\lambda}}{\Gamma(۲-q-\lambda)}\left(۱+\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۱)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}z^{s(j-۱)}\right).$$

برای $z=re^{i\theta}$ و $\circ<r<۱$، باید نشان دهیم که

$$\int_\circ^{۲\pi}\left|۱+\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(۲-q-\lambda)\Gamma(k+۱)}{\Gamma(k+۱-q-\lambda)}a_kz^{k-۱}\right|^\mu\mathrm{d}\theta \leq\int_\circ^{۲\pi}\left|۱+\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}z^{s(j-۱)}\right|^\mu\mathrm{d}\theta(\mu>\circ).$$

با به کاربردن قضیه ۲۰.۵.۱ کافی است نشان دهیم

$$\begin{aligned} &۱+\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(۲-q-\lambda)\Gamma(k+۱)}{\Gamma(k+۱-q-\lambda)}a_k z^{k-۱}\\ &\prec ۱+\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)}+۱z^{s(j-۱)}. \end{aligned}$$

فرض کنید تابع $\omega(z)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$\begin{aligned} &۱+\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(۲-q-\lambda)\Gamma(k+۱)}{\Gamma(k+۱-q-\lambda)}a_k z^{k-۱}\\ &=۱+\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}\{\omega(z)\}^{s(j-۱)}. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\{\omega(\circ)\}^{j-۱}\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}\{\omega(\circ)\}^{(s-۱)(j-۱)}=\circ.$$

بنابراین، اگر تابع تحلیلی $\omega(z)$ موجود باشد که در مساوی (۴.۳) صدق کند، تابع تحلیلی $\omega(z)$ در $\mathbb{U}$ موجود است به‌طوری‌که $\omega(\circ)=\circ$.
به‌علاوه ثابت می کنیم تابع $\omega(z)$ در $|\omega(z)|<۱$ صدق می‌کند، از مساوی (۴.۳) داریم

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{s=۱}^{m}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}\{\omega(z)\}^{s(j-۱)}\Big|\\ &\leq\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{|\Gamma(۲-q-\lambda)|\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k z^{k-۱}|\\ &<\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{|\Gamma(۲-q-\lambda)|\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k|. \end{aligned}$$

برای $z\in\mathbb{U}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} &\frac{|\Gamma(۲-q-\nu)|\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{m(j-۱)+۱}||\{\omega(z)\}^{m(j-۱)}|\\ &-|\sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{\Gamma(۲-q-\nu)\Gamma(s(j-۱)+۲)}{\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)}b_{s(j-۱)+۱}\{\omega(z)\}^{s(j-۱)}|\\ &-\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{|\Gamma(۲-q-\lambda)|\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k|<\circ. \end{aligned}$$

برای $z\in\mathbb{U}$
قرار می‌دهیم $(t\geqq\circ)$ $t=|\omega(z)|^{j-۱}$، چندجمله‌ای $Q(t)$ از درجه m $(m\geqq ۲)$ را به‌صورت زیر تعریف

می‌کنیم

$$Q(t)=\frac{|\Gamma(۲-q-\nu)|\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{m(j-۱)+۱}|t^m$$
$$-\sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{|\Gamma(۲-q-\nu)|\Gamma(s(j-۱)+۲)}{|\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{s(j-۱)+۱}|t^s$$
$$-\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{|\Gamma(۲-q-\lambda)|\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k|.$$

طبق لم۱.۱.۲، اگر $Q(۱)\geqq ۰$، برای $Q(t)<۰$ باید $t<۱$. بنابراین برای$|\omega(z)|<۱(z\in\mathbb{U})$، به نامساوی زیر نیاز داریم

$$Q(۱)=\frac{|\Gamma(۲-q-\nu)|\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{m(j-۱)+۱}|$$
$$-\sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{|\Gamma(۲-q-\nu)|\Gamma(s(j-۱)+۲)}{|\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{s(j-۱)+۱}|$$
$$-\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{|\Gamma(۲-q-\lambda)|\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k|\geq ۰.$$

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k|$$
$$\leq\frac{|\Gamma(۲-q-\nu)|}{|\Gamma(۲-q-\lambda)|}\Big\{\frac{\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{m(j-۱)+۱}|$$
$$-\sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{\Gamma(s(j-۱)+۲)}{|\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\nu)|}|b_{s(j-۱)+۱}|\Big\}.$$

□

حالت $m=۱$ توسط اسکین [۷]، و حالت‌های $m=۲,۳$ توسط اوا و اسکین [۶]بررسی شده است. بنابراین رابطه‌ی زیر ترتیب برقرار است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

نتیجه ۱۸.۰.۳. فرض $f(z)\in\mathcal{A}_n$ و $p(z)(m\geqq ۲)$ در (۱۰.۲)داده شده باشد. فرض کنید

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{\Gamma(k+۱)}{|\Gamma(k+۱-q-\lambda)|}|a_k|\leq\frac{\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\lambda)|}|b_{m(j-۱)+۱}|$$
$$-\sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{\Gamma(s(j-۱)+۲)}{|\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\lambda)}|b_{s(j-۱)+۱}|.$$

با

$$\sum_{s=۱}^{m-۱}\frac{\Gamma(s(j-۱)+۲)}{|\Gamma(s(j-۱)+۲-q-\lambda)|}|b_{s(j-۱)+۱}|$$
$$<\frac{\Gamma(m(j-۱)+۲)}{|\Gamma(m(j-۱)+۲-q-\lambda)|}|b_{m(j-۱)+۱}|$$
$$(q\in N_۰,۰\leq\lambda<۱;q\leq n+۱\text{برای}\lambda=۰,j\geq n+۱;n\in\mathbb{N}).$$

اگر تابع تحلیلی $\omega(z)$ در $\mathbb{U}$ موجود و به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(s(j-1)+2)}{\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)}b_{s(j-1)+1}\{\omega(z)\}^{s(j-1)}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-q-\lambda)}a_k z^{k-1}=0.$$

آن‌گاه برای $z=re^{i\theta}(0<r<1)$ و $\mu>0$

$$\int_0^{2\pi}|D_z^{q+\lambda}f(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta\leq\int_0^{2\pi}|D_z^{q+\lambda}p(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta.$$

نتیجه ۱۹.۰.۳. فرض کنید تابع $f(z)\in\mathcal{A}_n$ و $p(z)(m\geqq 2)$ در شرایط قضیه ۱۷.۰.۳ صدق کنند، آن‌گاه برای $0<\mu\leqq 2$ و $z=re^{i\theta}(0<r<1)$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}|D_z^{q+\lambda}f(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta\\&\leq\frac{2\pi r^{(1-q-\lambda)\mu}}{|\Gamma(2-q-\lambda)|^{\mu}}\left(1+\sum_{s=1}^{m}\frac{|\Gamma(2-q-\lambda)|\Gamma(s(j-1)+2)}{|\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)|}|b_{sj-s+1}|^2r^{2s(j-1)}\right)^{\frac{\mu}{2}}\\&<\frac{2\pi}{|\Gamma(2-q-\lambda)|^{\mu}}\left(1+\sum_{s=1}^{m}\frac{|\Gamma(2-q-\lambda)|\Gamma(s(j-1)+2)}{|\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)|}|b_{sj-s+1}|^2\right)^{\frac{\mu}{2}}.\\&(q\in N_0,0\leq\lambda<1;q\leq 1\ \text{برای}\ \lambda=0;j\geq n+1,n\in N).\end{aligned}$$

برهان. از آن‌جایی که

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|D_z^{q+\lambda}p(z)|^{\mu}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left|\frac{z^{1-q-\lambda}}{\Gamma(2-q-\lambda)}\right|^{\mu}\Big|1\\+\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(2-q-\lambda)\Gamma(s(j-1)+2)}{\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)}b_{s(j-1)+1}z^{s(j-1)}\Big|^{\mu}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

با به‌کار بردن نامساوی هولدر برای $0 < \mu < 2$، به‌دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |D_z^{q+\lambda} p(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \\
&\leq \left(\int_0^{2\pi} \left(\left| \frac{z^{1-q-\lambda}}{\Gamma(2-q-\lambda)} \right|^\mu \right)^{\frac{2}{2-\mu}} \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&\left\{ \int_0^{2\pi} \left(\left| 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(2-q-\lambda)\Gamma(s(j-1)+2)}{\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)} b_{s(j-1)+1} z^{s(j-1)} \right|^\mu \right)^{\frac{2}{\mu}} \mathrm{d}\theta \right\}^{\frac{\mu}{2}} \\
&= \left(\frac{r^{\frac{(1-q-\lambda)2\mu}{2-\mu}}}{|\Gamma(2-q-\lambda)|}^{\frac{2\mu}{2-\mu}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&\left(\int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(2-q-\lambda)\Gamma(s(j-1)+2)}{\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)} b_{s(j-1)+1} z^{s(j-1)} \right|^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{\mu}{2}} \\
&= \left(\frac{2\pi r^{\frac{(1-q-\lambda)2\mu}{2-\mu}}}{|(\Gamma(2-q-\lambda)|^{\frac{2\mu}{2-\mu}}} \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&\left\{ 2\pi \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{|\Gamma(2-q-\lambda)|\Gamma(s(j-1)+2)}{|\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)|} |b_{s(j-1)+1|^2 r^{2s(j-1)}} \right) \right\}^{\frac{\mu}{2}} \\
&= \frac{2\pi r^{(1-q-\lambda)\mu}}{|\Gamma(2-q-\lambda)|^\mu} \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{|\Gamma(2-q-\lambda)|\Gamma(s(j-1)+2)}{|\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)|} |b_{s(j-1)+1}|^2 r^{2s(j-1)} \right)^{\frac{\mu}{2}} \\
&< \frac{2\pi}{|\Gamma(2-q-\lambda)|^\mu} \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{|\Gamma(2-q-\lambda)|\Gamma(s(j-1)+2)}{|\Gamma(s(j-1)+2-q-\lambda)|} |b_{s(j-1)+1}|^2 \right)^{\frac{\mu}{2}}.
\end{aligned}
$$

برای $\mu = 2$ به‌راحتی نشان داده می‌شود. اثبات کامل شد. □

قضیه ۳.۰.۲۰. فرض $f(z) \in \mathcal{A}_n$ و $p(z)(m \geqq 2)$ در (۲.۰۱)داده شده باشد. فرض کنید

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+q+\lambda)} |a_k| \\
&\leq \frac{\Gamma(2+q+\nu)}{\Gamma(2+q+\lambda)} \left\{ \frac{\Gamma(m(j-1)+2)}{\Gamma(m(j-1)+2+q+\nu)} |b_{m(j-1)+1}| \right\} \\
&- \sum_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma(s(j-1)+2)}{\Gamma(s(j-1)+2+q+\nu)} |b_{s(j-1)+1}|.
\end{aligned}
$$

با

$$\sum_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma(s(j-1)+2)}{\Gamma(s(j-1)+2+q+\nu)}|b_{s(j-1)+1}| < \frac{\Gamma(m(j-1)+2)}{\Gamma(m(j-1)+2+q+\nu)}|b_{m(j-1)+1}|.$$

$$(q \in \mathbb{N}_0, 0 < \lambda, \nu < 1).$$

اگر تابع تحلیلی $\omega(z)$ در $\mathbb{U}$ موجود و به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(2+q+\nu)\Gamma(s(j-1)+2)}{\Gamma(s(j-1)+2+q+\nu)} b_{s(j-1)+1}\{\omega(z)\}^{s(j-1)}$$
$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Gamma(2+q+\lambda)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+q+\lambda)} a_k z^{k-1} = 0.$$

آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}(0 < r < 1)$ و $\mu > 0$

$$\int_0^{2\pi} |D_z^{-(q+\lambda)} f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leq |\frac{\Gamma(2+q+\nu)}{\Gamma(2+q+\mu)}| \int_0^{2\pi} |Z^{-\nu+\lambda} D_z^{-(q+\nu)f(z)}|^\mu \mathrm{d}\theta.$$

۱.۳ مشتق کسری برای کلاس $\mathcal{A}(n, \{B_k\}, \vartheta)$

انتگرال میانگین را برای مشتقات مرتبه بالاتر بررسی می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ کلاسی از توابع نرمالیزه شده‌ی $f(z)$ باشد که در دیسک واحد $\mathcal{U} = \{zz \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}$ تحلیلی است زیرکلاسی از $\mathcal{A}$ که شامل همه‌ی توابع $f(z)$ به فرم زیر باشد را با $\mathcal{A}(n)$ نشان می‌دهیم

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k.$$

$(a_k \geqq 0; k = n+1, n+2, n+3, \cdots; n \in N = \{1, 2, 3, \cdots\})$ زیرکلاسی از توابع $\mathcal{A}(n)$ که در $\mathcal{U}$ تک‌ارزند را با $\mathcal{T}(n)$ نشان می‌دهیم و زیرکلاسی از $\mathcal{T}$ که ستاره‌گون و محدب از مرتبه‌ی $\alpha(0 \leqq \alpha < 1)$ هستند را به ترتیب با $\mathcal{C}_\alpha(n), \mathcal{T}_\alpha(n)$ نشان می‌دهیم

کلاس‌های $\mathcal{T}(n), \mathcal{T}_\alpha(n)$ و $\mathcal{C}_\alpha(n)$ توسط چترجا معرفی شده است. $n = 1$ حالت خاصی از کلاس‌ها می‌باشد

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(1), \qquad \mathcal{T}^*(\alpha) = \mathcal{T}_\alpha(1), \qquad \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}_\alpha(1).$$

زیرکلاسی از $\mathcal{A}$ که شامل همه‌ی توابع $f(z)$ به فرم زیر باشد را با $\mathcal{A}(n, \vartheta)$ نشان می‌دهیم.

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{i(k-1)\vartheta} a_k z^k. \tag{۵.۳}$$

$(\vartheta \in \mathbb{R}; a_k \geqq 0; k = n+1, n+2, n+3, \cdots; n \in \mathbb{N})$. بنابراین واضح است که

$$\mathcal{A}(n, 0) = \mathcal{A}(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

پس، تعریف کلاس‌های $\mathcal{T}(n,\vartheta), \mathcal{T}^*_\alpha(n,\vartheta), \mathcal{C}_\alpha(n,\vartheta)$ از کلاس $\mathcal{A}(n,\vartheta)$ همانند تعریف زیرکلاس‌های $\mathcal{T}(n), T_\alpha(n), \mathcal{C}_\alpha(n)$ از کلاس $\mathcal{A}(n)$ می‌باشد.

به‌راحتی مشاهده می‌شود

$$\mathcal{A}(n, 0) = \mathcal{T}(n), \quad \mathcal{T}^*_\alpha(n, 0) = \mathcal{T}_\alpha(n), \quad \mathcal{C}_\alpha(n, 0) = \mathcal{C}_\alpha(n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

با

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^*(\circ)و\mathcal{T}(n) = \mathcal{T}_\circ(n).$$

لم ۱.۱.۳. تابع $f \in \mathcal{A}(n,\vartheta)$ از فرم در کلاس $\mathcal{T}^*_\alpha(n,\vartheta)$ می‌باشد، اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} (k-\alpha) \leqq ۱-\alpha \qquad (n \in \mathbb{N}; \circ \leq \alpha < ۱). \tag{۶.۳}$$

لم ۲.۱.۳. تابع $f \in \mathcal{A}(n,\vartheta)$ در کلاس $\mathcal{C}_\alpha(n,\vartheta)$ می‌باشد، اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} k(k-\alpha)a_k \leqq ۱-\alpha \qquad (n \in \mathbb{N}; \circ \leqq \alpha < ۱). \tag{۷.۳}$$

حال خانواده‌ی کلی $\mathcal{A}(n;\{\mathcal{B}_k\},\vartheta)$ از توابع $f \in \mathcal{A}(n,\vartheta)$ از فرم ۵.۳ را معرفی می‌کنیم که در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} B_k a_k \leq ۱. \tag{۸.۳}$$

$$(B_k > \circ; k = n+۱, n+۲, n+۳, \cdots; n \in N)$$

برای تعدادی دنباله مثبت $\{B_k\}$ از اعدادحقیقی، کلاس $\mathcal{A}(n;\{B_k\})$ به‌صورت زیر معین می‌شود

$$\mathcal{A}(n,\{B_k\}) = \mathcal{A}(n;\{B_k\},\circ).$$

حال کلاس‌های مختلفی از $\mathcal{A}(n)$ را نشان می‌دهیم

$$\mathcal{A}(n;k,\vartheta) = \mathcal{T}^*_\circ(n,\vartheta) = \mathcal{T}^*(n,\vartheta) = \mathcal{T}(n,\vartheta). \tag{۹.۳}$$

$$\mathcal{A}\left(n;\left\{\frac{k-\alpha}{۱-\alpha}\right\},\vartheta\right) = \mathcal{T}^*_\alpha(n,\vartheta) \qquad (\circ \leq \alpha < ۱). \tag{۱۰.۳}$$

$$\mathcal{A}\left(n;\left\{\frac{k(k-\alpha)}{۱-\alpha}\right\},\vartheta\right) = \mathcal{C}_\alpha(n,\vartheta) \qquad (\circ \leq \alpha < ۱). \tag{۱۱.۳}$$

همچنین از (۸.۳)داریم

$$\mathcal{A}(n;\{B_k\},\vartheta) \subseteq \mathcal{A}(n;\{C_k\},\vartheta) \qquad (\circ < C_k \leqq B_k). \tag{۱۲.۳}$$

که به‌راحتی رابطه‌ی شمول زیر را نتیجه می‌دهد

$$\mathcal{C}_\alpha(n,\vartheta) \subset \mathcal{T}^*_\alpha(n,\vartheta) \subseteq \mathcal{T}^*(n,\vartheta).$$

$$(\circ \leqq \alpha < ۱; \vartheta \in \mathbb{R} n \in \mathbb{N})$$

۲.۳ ویژگی اصلی کلاس $\mathcal{A}(n;\{B_k\},\vartheta)$

قضیه ۱.۲.۳. کلاس $\mathcal{A}(n;\{B_k\},\vartheta)$ زیرکلاسی محدب از کلاس $\mathcal{A}(n,\vartheta)$ می‌باشد.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید

$$f_{۱}(z) = z \quad و f_k(z) = z - \frac{e^{i(k-۱)\vartheta}}{B_k} z^k. \qquad (۱۳.۳)$$
$$(k = n+۱, n+۲, n+۳, \cdots; n \in \mathbb{N})$$

آن‌گاه $f \in \mathcal{A}(n; \{B_k\}, \vartheta)$ اگروتنهااگر $f(z)$ به‌صورت زیر باشد

$$f(z) = \lambda_{۱} f_{۱}(z) + \sum_{k=n+۱}^{\infty} \lambda_k f_k(z). \qquad (۱۴.۳)$$

که

$$\lambda_{۱} + \sum_{k=n+۱}^{\infty} \lambda_k = ۱. \qquad (۱۵.۳)$$
$$(\lambda_{۱} \geqq ۰; \lambda_k \geqq ۰; k = n+۱, n+۲, n+۳, \cdots; n \in \mathcal{N}).$$

نتیجه ۳.۲.۳. نقاط اکسترمم کلاس $\mathcal{A}(n; \{B_k\}, \vartheta)$، توابع $f_{۱}(z)$ و $f_k(z)$ رابطه‌ی (۱۳.۳)هستند.

نتیجه ۴.۲.۳. نقاط اکسترمم کلاس $\mathcal{T}^*_\alpha(n, v)$ توابع $f_{۱}(z)$ و $f_k(z)$ به فرم زیر می‌باشد

$$f_{۱}(z) = z و f_k(z) = z - \left(\frac{۱-\alpha}{k-\alpha}\right) e^{i(k-۱)\vartheta} z^k \qquad (k \geqq n+۱). \qquad (۱۶.۳)$$
$$(k = n+۱, n+۲, n+۳, \cdots; n \in \mathbb{N}).$$

نتیجه ۵.۲.۳. نقاط اکسترمم کلاس $\mathcal{C}_\alpha(n, \vartheta)$ ،توابع $f_{۱}(z)$ و$f_k(z)$ به فرم زیر می‌باشد

$$f_{۱}(z) = z و f_k(z) = z - \left(\frac{۱-\alpha}{k(k-\alpha)}\right) e^{i(k-۱)\vartheta} z^k. \qquad (۱۷.۳)$$
$$(k = n+۱, n+۲, n+۳, \cdots; n \in \mathbb{N})$$

۳.۳ نامساوی انتگرال میانگین شامل مشتقات مرتبه بالاتر

عدد استرلینگ$s(m, l)$ ، معمولا توسط تابع مولد به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\prod_{l=۱}^{m}(z - l + ۱) = \sum_{l=۰}^{m} s(m, l) z^l \qquad (m \in \mathbb{N}_۰). \qquad (۱۸.۳)$$

بنابراین، واضح است

$$s(m, ۰) = \delta_{m,۰}, \qquad s(m, ۱) = (-۱)^{m+۱}(m-۱)!, \qquad و s(m, m) = ۱. \qquad (۱۹.۳)$$

که $\delta_{m,n}$ دلتای کرونکر را نشان می‌دهد.

با جایگذاری $z = n + ۱$، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{l=۰}^{m} s(m, l)(n+۱)^l = \prod_{l=۱}^{m}(n - l + ۲) \qquad (m \in \mathbb{N}_۰; n \in \mathbb{N}). \qquad (۲۰.۳)$$

با استفاده از((۱۸.۳)) و ((۲۰.۳)) قضیه‌ی زیر را اثبات می‌کنیم

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید که

$$f \in \mathcal{A}(n;\{k^pB_k\},\vartheta) \qquad (B_k \leqq B_{k+1}; p = ۲,۳,\cdots,n+۱; n \in \mathbb{N}). \qquad (۲۱.۳)$$

همچنین فرض کنید تابع $f_{n+۱}(z)$ در(۱۳.۳) با جایگذاری k^pB_k به جای B_k تعریف شده باشد. آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ و $۰ < r < ۱$

$$\int_۰^{۲\pi} |f^{(j)}(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqq \int_۰^{۲\pi} |f_{n+۱}^{(j)}(z)|^\mu \mathrm{d}\theta. \qquad (۲۲.۳)$$

که $\mu > ۰$ و j عدد صحیح است به قسمی که برای $p = ۲,۳,\cdots,n+۱$، $۲ \leqq j \leqq p$

برهان. با فرض قضیه داریم

$$(n+۱)^{p-m}B_{n+۱}\sum_{k=n+۱}^{\infty} k^m a_k \leqq \sum_{k=n+۱}^{\infty} k^pB_ka_k \leqq ۱ \qquad (m = ۱,\cdots,p). \qquad (۲۳.۳)$$

بنابراین

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty} k^m a_k \leqq \frac{۱}{(n+۱)^{p-m}B_{n+۱}} \qquad (m = ۱,\cdots,p). \qquad (۲۴.۳)$$

همچنین از(۵.۳) و (۱۳.۳) و با جایگذاری k^pB_k به جای B_k، فرمول مشتق زیر را به‌دست می‌آوریم

$$f^j(z) = -\sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-۱)\vartheta}a_kz^{k-j}\prod_{l=۱}^{j}(k-l+۱) \qquad (z \in \mathcal{U}; ۲ \leqq j \leqq p). \qquad (۲۵.۳)$$

و

$$f_{n+۱}^{(j)}(z) = -e^{inv}\left(\frac{\prod_{l=۱}^{j}(n-l+۲)}{(n+۱)^pB_{n+۱}}\right)z^{n-j+۱} \qquad (z \in \mathcal{U}; ۲ \leqq j \leqq p). \qquad (۲۶.۳)$$

حال رابطه‌ی (۲۵.۳) و (۲۶.۳)را در نامساوی (۲۲.۳) جایگزین می‌کنیم. با به‌کار بردن قضیه۲۰.۵.۱ کافی است نشان دهیم

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-۱)\vartheta}a_kz^{k-j}\prod_{l=۱}^{j}(k-l+۱)& \\ \prec e^{in\vartheta}\left(\frac{\prod_{l=۱}^{j}(n-l+۲)}{(n+۱)^pB_{n+۱}}\right)z^{n-j+۱}& \qquad (۲ \leqq j \leqq p).\end{aligned} \qquad (۲۷.۳)$$

اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-۱)\vartheta}a_kz^{k-j}\prod_{l=۱}^{j}(k-l+۱)& \\ = e^{in\vartheta}\left(\frac{\prod_{l=۱}^{j}(n-l+۲)}{(n+۱)^pB_{n+۱}}\right)\{\omega(z)\}^{n-j+۱}&.\end{aligned} \qquad (۲۸.۳)$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned}\{\omega(z)\}^{n-j+۱} = \left(\frac{(n+۱)^pB_{n+۱}}{\prod_{l=۱}^{j}(n-l+۲)}\right)& \\ \sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-n-۱)\vartheta}a_kz^{k-j}\prod_{l=۱}^{j}(k-l+۱)&.\end{aligned} \qquad (۲۹.۳)$$

بنابراین از (۱۸.۳) و (۲۰.۳) داریم

$$\begin{aligned}|\omega(z)|^{n-j+1} &\leqq \left(\frac{(n+1)^p B_{n+1}}{\prod_{l=1}^{j}(n-l+2)}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k|z|^{k-j}\prod_{l=1}^{j}(k-l+1)\\ &\leqq \left(\frac{(n+1)^p B_{n+1}}{\prod_{l=1}^{j}(n-l+2)}\right)|z|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\sum_{l=0}^{j}s(j,l)k^l\\ &\leqq \left(\frac{(n+1)^p B_{n+1}}{\prod_{l=1}^{j}(n-l+2)}\right)|z|\sum_{l=0}^{j}s(j,l)\sum_{k=n+1}^{\infty}k^l a_k\\ &\leqq \left(\frac{(n+1)^p B_{n+1}}{\prod_{l=1}^{j}(n-l+2)}\right)|z|\sum_{l=0}^{j}s(j,l)\frac{1}{(n+1)^{p-1}B_{n+1}}\\ &= \left(\frac{|z|}{\prod_{l=1}^{j}(n-l+2)}\right)\sum_{l=0}^{j}s(j,l)(n+1)^l\\ |z| &< 1 \qquad (z\in\mathcal{U}).\end{aligned}$$

بنابراین تابع $\omega(z)$ وجود دارد که در رابطه‌ی (۲۹.۳) صدق می‌کند، و شرایط زیر ترتیب بودن برقرار است در نتیجه اثبات قضیه کامل می‌شود. □

از رابطه‌ی (۱۱.۳)داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\alpha(n,\vartheta) &= \mathcal{A}\left(n;\left\{\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha}\right\},\vartheta\right)\\ &= \mathcal{A}\left(n;\left\{k^2.\frac{k-\alpha}{k(1-\alpha)}\right\},\vartheta\right).\end{aligned} \tag{۳۰.۳}$$

در نتیجه

$$\left(B_k=\frac{k-\alpha}{k(1-\alpha)}\right) \tag{۳۱.۳}$$

که$\{B_k\}$ دنباله‌ی غیر نزولی است، بنابراین قضیه‌ی ۱.۳.۳ را نتیجه می‌دهد.

نتیجه ۲.۳.۳. فرض کنید $f\in\mathcal{C}_\alpha(n,v)$ و $f_{n+1}(z)$ در رابطه (۱۷.۳) تعریف شده باشد. آن‌گاه برای $z=re^{i\theta}$ و $0<r<1$

$$\int_0^{2\pi}|f''(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqq \int_0^{2\pi}|f''_{n+1}(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \qquad (\mu>0). \tag{۳۲.۳}$$

۴.۳ نامساوی انتگرال میانگین شامل عملگر حساب دیفرانسیل کسری

در این بخش انتگرال کسری و مشتق کسری را برای کلاس $\mathcal{A}\left(n;\{B_k\},\vartheta\right)$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید که

$$f\in\mathcal{A}\left(n;\{B_k\},\vartheta\right) \qquad (B_k\leqq B_{k+1}). \tag{۳۳.۳}$$

و فرض کنید تابع $f_{n+۱}(z)$ در رابطه‌ی (۱۳.۳) تعریف شده باشد. آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}$ و $۰ < r < ۱$

$$\int_{۰}^{۲\pi} |D_z^{-\lambda} f(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \leqq \int_{۰}^{۲\pi} |D_z^{-\lambda} f_{n+۱}(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \qquad (\lambda > ۰; \mu > ۰). \tag{۳۴.۳}$$

برهان. از فرمول انتگرال کسری و رابطه‌ی (۱.۳) داریم

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{z^{\lambda+۱}}{\Gamma(\lambda+۲)} \left(۱ - \sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-۱)\vartheta} \theta(k) a_k z^{k-۱} \right) \qquad (\lambda > ۰). \tag{۳۵.۳}$$

یا

$$\frac{\Gamma(\lambda+۲)}{z^{\lambda+۱}} D_z^{-\lambda} f(z) = ۱ - \sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-۱)\vartheta} \theta(k) a_k z^{k-۱} \qquad (\lambda > ۰).$$

که

$$\theta(k) = \frac{\Gamma(\lambda+۲)\Gamma(k+۱)}{\Gamma(\lambda+k+۱)} > ۰ \qquad (\lambda > ۰; k \geqq n+۱; n \in \mathbb{N}). \tag{۳۶.۳}$$

تابع غیر نزولی از k است، بنابراین

$$۰ < \theta(k) \leqq \theta(n+۱) = \frac{\Gamma(\lambda+۲)\Gamma(n+۲)}{\Gamma(\lambda+n+۲)}. \tag{۳۷.۳}$$

$(\lambda > ۰; k = n+۱, n+۲, n+۳, \cdots; n \in \mathbb{N})$ به‌طور مشابه از فرمول انتگرال کسری و رابطه‌ی (۱۳.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$D_z^{-\lambda} f_{n+۱}(z) = \frac{z^{\lambda+۱}}{\Gamma(\lambda+۲)} \left(۱ - \frac{e^{in\vartheta}}{B_{n+۱}} \theta(n+۱) z^n \right) \qquad (\lambda > ۰). \tag{۳۸.۳}$$

یا

$$\frac{\Gamma(\lambda+۲)}{z^{\lambda+۱}} D_z^{-\lambda} f_{n+۱}(z) = ۱ - \frac{e^{in\vartheta}}{B_{n+۱}} \theta(n+۱) z^n \qquad (\lambda > ۰),$$

که $\theta(k)$ در رابطه‌ی (۳۶.۳) داده شده است

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۵.۳) و (۳۸.۳) در نامساوی (۳۴.۳)و با به‌کار بردن قضیه‌ی ۲۰.۵.۱ کافی است نشان دهیم که

$$\begin{aligned} &۱ - \sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-۱)\vartheta} \theta(k) a_k z^{k-۱} \\ &\qquad \prec ۱ - \frac{e^{in\vartheta}}{B_{n+۱}} \theta(n+۱) z^n. \end{aligned} \tag{۳۹.۳}$$

واضح است، با جایگذاری

$$\begin{aligned} &۱ - \sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-۱)\vartheta} \theta(k) a_k z^{k-۱} \\ &\qquad = ۱ - \frac{e^{in\vartheta}}{B_{n+۱}} \theta(n+۱) \omega(z)^n. \end{aligned} \tag{۴۰.۳}$$

به‌دست می‌آوریم

$$\{\omega(z)\}^n = \frac{B_{n+۱}}{\theta(n+۱)} \sum_{k=n+۱}^{\infty} e^{i(k-n-۱)\vartheta} \theta(k) a_k z^{k-۱}. \tag{۴۱.۳}$$

بنابراین طبق نامساوی (۳۷.۳) داریم

$$\begin{aligned} |\omega(z)|^n &\leqq \frac{B_{n+1}}{\theta(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \theta(k) a_k z^{k-1} \\ &\leqq \frac{B_{n+1}}{\theta(n+1)} \theta(n+1)|z| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \\ &\leqq |z| B_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \\ &\leqq |z| \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k a_k \\ &\leqq |z| < 1 \qquad (z \in \sqcap). \end{aligned} \tag{۴۲.۳}$$

از آن‌جایی که

$$B_k \leqq B_{k+1} \qquad (k = n+1, n+2, n+3, \cdots; n \in \mathbb{N}).$$

از نامساوی (۴۲.۳)و طبق شرایط زیرترتیب بودن، اثبات قضیه کامل شد. □

می‌توانیم فرمول مشتق کسری را به جای فرمول انتگرال کسری در روش بالا قرار دهیم و انتگرال میانگین را برای مشتق کسری اثبات کنیم.

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید که

$$f \in \mathcal{A}(n; \{B_k\}, \vartheta) \qquad (B_k \leqq B_{k+1}).$$

و فرض کنیم تابع $f_{n+1}(z)$ در رابطه‌ی ۱۳.۳با جایگذاری kB_k به جای B_k تعریف شده باشد. آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}$ و $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |D_z^{\lambda} f(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \leqq \int_0^{2\pi} |D_z^{\lambda} f_{n+1}(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \qquad (0 \leqq \lambda < 1; \mu > 0). \tag{۴۳.۳}$$

قضیه ۳.۴.۳. اگر تابع $f_{n+1}(z)$ مانند قضیه‌ی بالا تعریف شده باشد و

$$f \in \mathcal{A}\left(n; \left\{k^2 B_k\right\}, \vartheta\right) \qquad (B_k \leqq B_{k+1}).$$

آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}$ و $0 < r < 1$ داریم

$$\int_0^{2\pi} |D_z^{1+\lambda} f(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \leqq \int_0^{2\pi} |D_z^{1+\lambda} f_{n+1}(z)|^{\mu} \mathrm{d}\theta \qquad (0 \leqq \lambda < 1; \mu > 0). \tag{۴۴.۳}$$

برهان. با توجه به تعریف فرمول مشتق کسری داریم

$$D_z^{1+\lambda} f(z) = \frac{z^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \left(1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{i(k-1)\vartheta} k(k-1) \Phi(k) a_k z^{k-1} \right) \qquad (0 \leqq \lambda < 1). \tag{۴۵.۳}$$

یا

$$\frac{\Gamma(1-\lambda)}{z^{-\lambda}} D_z^{1+\lambda} f(z) = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{i(k-1)\vartheta} k(k-1) \phi(k) a_k z^{k-1} \qquad (0 \leqq \lambda < 1),$$

که

$$\Phi(k)=\frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-\lambda)}>0 \qquad (0\leqq\lambda<1; k\geqq n+1; n\in\mathbb{N}). \tag{۴۶.۳}$$

تابع غیر نزولی از K است، بنابراین

$$0<\Phi(k)\leqq\Phi(n+1)=\frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(n)}{\Gamma(n-\lambda+1)}. \tag{۴۷.۳}$$

$$(0\geqq\lambda<1; k=n+1, n+2, n+3; n\in\mathbb{N})$$

به همین ترتیب با جایگذاری kB_k به جای B_k در رابطه‌ی (۱۳.۳)و از تعریف مشتق کسری نتیجه می‌گیریم

$$D_z^{1+\lambda}f_{n+1}(z)=\frac{z^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}\left(1-\frac{e^{in\vartheta}}{B_{n+1}}n\Phi(n+1)z^n\right) \qquad (0\geqq\lambda<1). \tag{۴۸.۳}$$

یا

$$\frac{\Gamma(1-\lambda)}{z^{-\lambda}}D_z^{1+\lambda}f_{n+1}(z)=1-\frac{e^{in\vartheta}}{B_{n+1}}n\Phi(n+1)z^n \qquad (0\leqq\lambda<1).$$

که $\Phi(k)$ در رابطه‌ی (۴۶.۳) داده شده است.
با جایگذاری (۴۸.۳)(۴۵.۳) در نامساوی (۴۴.۳) کافی است نشان دهیم

$$\begin{aligned}1-\sum_{k=n+1}^{\infty}&e^{i(k-1)\vartheta}k(k-1)\Phi(k)a_kz^{k-1}\\&\prec 1-\frac{e^{inv}}{B_{n+1}}n\Phi(n+1)z^n.\end{aligned}$$

واضح است، با جایگذاری

$$\begin{aligned}1-\sum_{k=n+1}^{\infty}&e^{i(k-1)\vartheta}k(k-1)\Phi(k)a_kz^{k-1}\\&=1-\frac{e^{in\vartheta}}{B_{n+1}}n\Phi(n+1)\{\omega(z)\}^n.\end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم

$$\{\omega(z)\}^n=\frac{B_{n+1}}{n\Phi(n+1)}\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{i(k-n-1)\vartheta}k(k-1)\Phi(k)a_kz^{k-1}. \tag{۴۹.۳}$$

بنابراین با استفاده از نامساوی (۴۷.۳)، داریم

$$\begin{aligned}|\omega(z)|^n &\leqq \frac{B_{n+1}}{n\Phi(n+1)}\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\Phi(k)a_k|z|^{k-1}\\ &\leqq \frac{B_{n+1}}{n\Phi(n+1)}\Phi(n+1)|z|\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)a_k\\ &\leqq \frac{|z|}{n}B_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 a_k \qquad (50.3)\\ &\frac{|z|}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 B_k a_k\\ &\leqq \frac{|z|}{n} < 1 \qquad (z\in\mathcal{U}.\end{aligned}$$

از آن‌جایی که $f\in\mathcal{A}\left(n;\left\{k^2B_k\right\},v\right)$ و

$$B_k \leqq B_{k+1} \qquad (k=n+1, n+2, n=3,\cdots; n\in\mathbb{N}).$$

با توجه به نامساوی (۵۰.۳) و شرایط زیرترتیب بودن، اثبات قضیه کامل شد.

□

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید که

$$f\in\mathcal{A}\left(n;\left\{k^2B_k\right\},\vartheta\right) \qquad (B_k\leqq B_{k+1}).$$

و فرض کنید تابع $f_{n+1}(z)$ در رابطه‌ی (۱۳.۳)با جایگذاری k^2B_k به جای B_k تعریف شده باشد. آن‌گاه برای $z=re^{i\theta}$ و $0<r<1$

$$\int_0^{2\pi}|D_z^{1+\lambda}f(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqq \int_0^{2\pi}|D_z^{1+\lambda}f_{n+1}(z)|^\mu \mathrm{d}\theta\left(0\leqq\lambda<\frac{n+1}{n+2};\mu>0\right). \qquad (51.3)$$

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنید که

$$f\in A\left(n;\left\{k^\pi B_k\right\},v\right) \qquad (B_k\leqq B_{k+1}; p=2,3,\cdots,n).$$

همچنین فرض کنید تابع $f_{n+1}(z)$ با جایگذاری k^pB_k به جای B_k تعریف شده باشد. آن‌گاه برای $z=re^{i\theta}$ و $0<r<1$ خواهیم داشت

$$\int_0^{2\pi}|D_z^{\lambda}f^{(j)}(z)|^\mu \mathrm{d}\theta \leqq \int_0^{2\pi}|D_z^{\lambda}f_{n+1}^{(j)}(z)|^\mu \mathrm{d}\theta.$$

که $\mu>0$ و $0\leqq\lambda<1$ و j عدد صحیح می‌باشد به‌طوری‌که برای $p=2,3,\cdots,n$، $2\leqq j\leqq p$

برهان. اول عملکرد D_z^λ را بر هر دو طرف رابطه‌ی (۲۵.۳)اعمال می‌کنیم و با استفاده از فرمول مشتق کسری، به دست می‌آوریم

$$D_z^\lambda f^{(j)}(z) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{i(k-1)\vartheta}\Psi(k)a_k z^{k-j-\lambda}\prod_{l=1}^{j+1}(k-l+1). \qquad (52.3)$$

$$(0\leqq\lambda<1; 2\leqq j\leqq p; p=2,3,\cdots,n).$$

$$\Psi(k)=\frac{\Gamma(k-j)}{\Gamma(k-j-\lambda+1)}>0 \qquad (0\leqq\lambda<1;k\geqq n+1;2\leqq j\leqq p)\,. \tag{۵۳.۳}$$

تابع غیر نزولی از k است. بنابراین

$$0<\Psi(k)\leqq\Psi(n+1)\frac{\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n-j-\lambda+2)}. \tag{۵۴.۳}$$

$(0\leqq\lambda<0;k=n+1,n+2,n+3,\cdots;2\leqq j\leqq p)$ به‌طور مشابه، از(۲۶.۳) و فرمول مشتق کسری به‌دست می‌آوریم

$$D_z^{\lambda}f_{n+1}^{j}(z)=-e^{inv}\left(\frac{\prod_{l=1}^{j+1}(n-l+2)}{(n+1)^pB_{n+1}}\right)\Psi(n+1)z^{n-j-\lambda+1}. \tag{۵۵.۳}$$

$(0\leqq\lambda<1;2\leqq j\leqq p)$ که $\Psi(k)$ در رابطه‌ی (۵۳.۳) داده شده است. بنابراین طبق قضیه (۲۰.۵.۱) کافی است نشان دهیم

$$\begin{aligned}&\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{i(k-1)v}\Psi(k)a_kz^{k-j-\lambda}\prod_{l=1}^{j+1}(k-l+1)\\&\prec e^{inv}\left(\frac{\prod_{l=1}^{j+1}(n-l+2)}{(n+1)^pB_{n+1}}\right)\Psi(n+1)z^{n-j-\lambda+1}\qquad(2\leqq j\leqq p).\end{aligned} \tag{۵۶.۳}$$

برای این‌که زیرترتیبی را اثبات کنیم، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}&\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{i(k-1)v}\Psi(k)a_kz^{k-j-\lambda}\prod_{l=1}^{j+1}(k-l+1)\\&=e^{inv}\left(\frac{\prod_{l=1}^{j+1}(n-l+2)}{(n+1)^pB_{n+1}}\right)\Psi(n+1)\left\{\omega(z)\right\}^{n-j-\lambda+1}.\end{aligned}$$

و مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned}|\omega(z)|^{n-j-\lambda+1}&\leqq\frac{(n+1)^pB_{n+1}}{\Psi(n+1)\prod_{l=1}^{j+1}(n-l+2)}\\&\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\Psi(k)a_k|z|^{k-j-\lambda}\prod_{l=1}^{j+1}(k-l+1)\\&\leqq\frac{(n+1)^pB_{n+1}}{\Psi(n+1)\prod_{l=1}^{j+1}(n-l+2)}\\&\cdot\Psi(n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k|z|^{k-j-\lambda}\prod_{l=1}^{j+1}(k-l+1)\\&\leqq\frac{(n+1)^pB_{n+1}}{\prod_{l=1}^{j+1}(n-l+2)}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k|z|^{k-j-\lambda}\prod_{l=1}^{j+1}(k-l+1).\end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۸.۳) و (۲۰.۳) نتیجه می‌گیریم

$$|\omega(z)|<1\qquad(z\in\mathcal{U}). \tag{۵۷.۳}$$

در نتیجه شرایط زیر ترتیب برقرار است، و قضیه اثبات می‌شود. □

فصل ۴

$q-\delta$همسایگی

۱.۴ $q-\delta$ همسایگی برای کلاس $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi; \alpha, \beta)$

در این بخش ابتدا $q-\delta$همسایگی را تعریف می‌کنیم، سپس $q-\delta$همسایگی را برای کلاس‌های مختلف بررسی می‌کنیم. که از مراجع [۱] و [۳] گرفته شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۴. برای $f \in \mathcal{T}$ و $\delta \geqslant ۰$ تعریف می‌کنیم

$$M_{\delta}^{q}(f)=\{g\in\mathcal{T};\quad g(z)=z-\sum_{n=۲}^{\infty}b_nz^n,\quad \sum_{n=۲}^{\infty}n^{q+۱}|a_n-b_n|\leqslant\delta\}.$$

که $q-\delta$ همسایگی از f نامیده می‌شود.

بنابراین برای $e(z)=z$ داریم

$$M_{\delta}^{q}(e)=\{g\in\mathcal{T};\quad g(z)=z-\sum_{n=۲}^{\infty}b_nz^n,\quad \sum_{n=۲}^{\infty}n^{q+۱}|b_n|\leqslant\delta\}.$$

که q عدد مثبت ثابت است .

در این بخش $q-\delta$ همسایگی را برای توابعی در کلاس $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲.۱.۴. اگر $\{\frac{\sigma(\alpha,\beta,n)}{n^{q+۱}}\}_{n=۲}^{\infty}$ یک دنباله غیر نزولی باشد، آن‌گاه $B_T(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)\subset M_{\delta}^{q}(e)$ که $\delta=\dfrac{۲^{q+۱}(۱-\beta)}{\sigma(\alpha,\beta,۲)}$

برهان. طبق (۱۳.۲) اگر $f(z)\in\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)$، آن‌گاه

$$\sum_{n=۲}^{\infty}n^{q+۱}a_n\leqslant\frac{۲^{q+۱}(۱-\beta)}{\sigma(\alpha,\beta,۲)} \tag{۱.۴}$$

در نتیجه $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(\Phi, \Psi, \alpha, \beta)\subset M_{\delta}^{q}$ $\square$

با جایگذاری $\Phi(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ و $\Psi(z) = \frac{z}{(1-z)}$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ در قضیه‌ی ۲.۱.۴ داریم

نتیجه ۳.۱.۴. $S_T^* \subset M_\delta^q(e)$ که $\delta = 2^{q+1}\frac{(1-\beta)}{(2-\beta)}$

با جایگذاری $\Phi(z) = \frac{(z+z^2)}{(1-z)^3}$ و $\Psi(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ در قضیه‌ی ۲.۱.۴، داریم

نتیجه ۴.۱.۴. $K_T(\beta) \subset M_\delta^q(e)$ که $\delta = 2^{q+1}\frac{(1-\beta)}{2(2-\beta)}$

با جایگذاری $\Phi(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ و $\Psi(z) = z$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ در قضیه‌ی ۲.۱.۴داریم

نتیجه ۵.۱.۴. $\mathcal{P}_T(\beta) \subset M_\delta^q(e)$. که $\delta = 2^q(1-\beta)$

با جایگذاری $\Phi(z) = \frac{(z+(1-2\beta)z^2)}{(1-z)^{3-2\beta}}$ و $\Psi(z) = \frac{z}{(1-z)^{2-2\beta}}$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ در قضیه ۲.۱.۴داریم

نتیجه ۶.۱.۴. $\mathcal{R}_T(\beta) \subset M_\delta^q(e)$. که $\delta = \frac{2^q}{(1-\beta)}$

سرانجام برای هر Φ و Ψ و $\alpha = \frac{1}{2}$ از قضیه۲.۱.۴ داریم

نتیجه ۷.۱.۴. اگر $\{\frac{\sigma(\frac{1}{2},\beta,n)}{n^{q+1}}\}$ دنباله غیر نزولی باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}_T(\Phi,\Psi,\beta) \subset M_\delta^q(e)$، همچنین
$\delta = \frac{2^{q+1}(1-\beta)}{(\lambda_2 - \beta\mu_2)}z^2$

همسایگی‌های کلاس$\mathcal{M}_{\tau s}^r[a_i', a_j, b_i, \Phi, \Psi, \alpha]$

برای f و $\gamma \geq 0$، $p-\gamma$ همسایگی از f به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$M_y^p(f) = \left\{g \in \mathcal{T} g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n^{p+1}|a_n - b_n| \leq \gamma\right\}$$

که p عدد ثابت مثبت است. برای تابع$e(z) = z$ ، داریم

$$M_\gamma^p(e) = \left\{g \in \mathcal{T} g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n^{p+1}|b_n| \leq \gamma\right\}.$$

توجه کنید$M_\gamma^1 \equiv M_\gamma(f)$، $M_\gamma^\circ(f) \equiv N_\gamma(f)$،که$N_\gamma(f)$، $\delta - q$همسایگی ازff نامیده میشود.[۲۴]
حال $\delta - q$همسایگی را برای کلاس $M_{\tau s}^r[a_i', a_j, b_i', b_j, \Phi, \Psi, \alpha]$ مطرح می‌کنیم.

قضیه ۸.۱.۴. اگر $\frac{\sigma(\alpha,n)}{n^{p+1}}$ دنباله غیر نزولی باشد، آن‌گاه $M^r_{\tau s}[a'_i,a_j,b'_i,b_j,\Phi,\Psi,\alpha]\subset M^p_\gamma(e)$، که

$$\gamma=\frac{2^{p+1}\alpha}{\sigma(\alpha,2)}.$$

که $\sigma(\alpha,2)$ در (۱۶.۲) تعریف شده است.

برهان. طبق (۹.۳.۲) اگر $f\in M^r_{\tau s}[a'_i,a_j,b'_i,b_j,\Phi,\Psi,\alpha]$، آن‌گاه

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{p+1}|a_n|\le\frac{2^{p+1}\alpha}{\sigma(\alpha,2)}.$$

در نتیجه $\mathcal{M}^r_{\tau s}[a'_i,a_j,b'_i,b_j,\Phi,\Psi,\alpha]\subset\mathcal{M}^p_\gamma(e)$ □

نتیجه ۹.۱.۴. $\mathcal{D}_\tau[\Phi,\Psi,\alpha]\subset\mathcal{M}^p_\gamma(e)$

$$\gamma=\frac{2^{p+1}\alpha}{\lambda_2-(1-\alpha)\mu_2}.$$

نتیجه ۱۰.۱.۴. $\mathcal{D}_\tau\left[\Phi,\Psi,\frac{1-\delta}{2(1-\nu)}\right]\subset M^p_\gamma(e)$

$$\gamma=\frac{2^{p+1}(1-\delta)}{2(1-\nu)\lambda_2-(1+\delta-2\nu)\mu_2}.$$

نتیجه ۱۱.۱.۴. $\mathcal{M}^1_{\tau 0}[2,-,1,-,\Phi,\Psi,\alpha]\subset\mathcal{M}^p_\gamma(e)$

$$\gamma=\frac{2^{p+1}\alpha}{2[\lambda_2-(1-\alpha)\mu_2]}.$$

نتیجه ۱۲.۱.۴. $\mathcal{M}^1_{\tau 0}\left[2,-1,-,\frac{z}{(1-z)^2},\frac{z}{1-z},\alpha\right]\subset\mathcal{M}^p_\gamma(e)$

$$\gamma=\frac{2^{p+1}\alpha}{2(1+\alpha)}.$$

نتیجه ۱۳.۱.۴. $\mathcal{M}^1_{\tau 0}\left[2,-1,-,\frac{z+z^2}{(1-z)^3},\frac{z}{(1-z)^2},\alpha\right]\subset M^p_\gamma(e)$

$$\gamma=\frac{2^{p+1}\alpha}{4(1+\alpha)}.$$

حال نتایج را روی میانگین چزارو[1] برای تابع Ψ در (۱۵.۲)، و برای کلاس $\mathcal{M}^r_{\tau s}[a'_i,a_j,b'_i,b_j,\Phi,\Psi,\alpha]$ بررسی می‌کنیم.

لم ۱۴.۱.۴. فرض کنید $0<a\le b$، اگر $b\ge 2$ یا $a+b\ge 3$، آن‌گاه تابع $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^{n+1},z\in\mathcal{U}$ محدب است.

(x) نماد پوچ‌هامر[2] است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(x)_n=\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}=\begin{cases}1 & n=0\\ x(x+1)\cdots(x+n-1) & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

[1] means Cesaro

[2] pochhammer

لم ۱۵.۱.۴. فرض کنید $0 < \prod_{i=1}^{r}\Gamma(a'_i + b'_i n) \le \prod_{j=1}^{s}\Gamma(a_j + b_j n)$، آن‌گاه
$$Re\left\{\frac{\psi(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \quad \text{برای همه} \quad z \in \mathcal{U}$$

حال $\mathcal{S}^*, \mathcal{C}, \mathcal{QC}^*$ و $\mathcal{QS}$ زیرکلاس‌هایی از $\mathcal{A}$که شامل توابع ستاره‌گون و محدب در $\mathcal{U}$ هستند را یادآوری می‌کنیم. طبق تعاریف داریم
$$\mathcal{S}^* = \left\{\psi \in \mathcal{A} Re\left\{\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}\right\} > 0, z \in \mathcal{U}\right\}.$$
$$\mathcal{C} = \left\{\psi \in \mathcal{A} Re\left\{1 + \frac{z\psi''(z)}{\psi'(z)}\right\} > 0, z \in \mathcal{U}\right\}.$$
$$\mathcal{QS}^* = \left\{\psi \in \mathcal{A} \exists g \in \mathcal{S}^* \text{به‌طوری که} Re\left\{\frac{z\psi'(z)}{g(z)}\right\} > 0, z \in \mathcal{U}\right\}.$$
$$\mathcal{QC} = \left\{\psi \in \mathcal{A} \exists g \in \mathcal{C} \text{ به طوری که } Re\left\{\frac{(z\psi'(z))'}{g'(z)}\right\} > 0, z \in \mathcal{U}\right\}.$$
مشاهده می‌شود که
$$\psi(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow z\psi'(z) \in \mathcal{S}^*.$$
$$\psi \in \mathcal{QC} \Leftrightarrow z\psi'(z) \in \mathcal{QS}^*. \tag{۲.۴}$$

لم ۱۶.۱.۴. از تعاریف بالا به‌راحتی لم زیر حاصل می‌شود

الف) اگر $\Psi \in \mathcal{C}$ و $g \in \mathcal{S}^*$ آن‌گاه $\Psi * g \in \mathcal{S}^*$

ب) اگر $\psi \in \mathcal{C}, g \in \mathcal{S}^*$و$p \in \mathcal{P}$(کلاسی از تابع کاراتئوری) با$p(0) = 1$ ، آن‌گاه $\psi * gp = (\psi * g)p_1$، که $p_1(\mathcal{U})$ زیرمجموعه بسته محدب از $p(\mathcal{U})$ است.

تعریف ۱۷.۱.۴. nامین میانگین چزارو از مرتبه‌ی β، $\beta \ge 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.
$$\tau_k^\beta(z,\psi) = \tau_k^\beta(z) * \psi(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\binom{k-n+\beta}{k-n}}{\binom{k+\beta}{k}} \frac{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(a'_i + b'_i n) z^{n+1}}{\prod_{j=1}^{s}\Gamma(a_j + b_j n) n!} \tag{۳.۴}$$
که k یک عدد مثبت است و $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$.

بدیهی است که $\tau_k^\beta(z)$، n امین میانگین چزارو سری‌های هندسی $\frac{z}{1-z}$ ازمرتبه‌ی β است.

لم ۱۸.۱.۴. فرض کنید $f \in \mathcal{A}$ باشد، به طوری‌که برای بعضی $\beta \ge 0$ داریم
$$\left(\tau_k^\beta(z,f)\right)' \ne 0, \qquad z \in \mathcal{U}, k \in \mathbb{N}.$$

آن‌گاه
$$\tau_1^{\beta+m}(z,f) \prec \tau_2^{\beta+m}(z,f) \prec \cdots \prec \tau_k^{\beta+m}(z,f) \prec \cdots \prec f(z), \qquad m \in N.$$

قضیه ۱۹.۱.۴. فرض کنید $\psi \in \mathcal{A}$ به فرم (۱۵.۲) در $\mathcal{U}$ محدب باشد، همچنین $\tau_k^\beta(z,\psi)$، nامین میانگین چزارو ψ باشد و $\beta \ge 0$ باشد، آن‌گاه
$$\tau_1^{\beta+m}(z,\psi) \prec \tau_2^{\beta+m}(z,\psi) \prec \cdots \prec \tau_k^{\beta+m} \prec \cdots \prec \psi(z), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

برهان. ابتدا، ملاحظه می‌کنیم که $\tau_k^\beta(z,\psi')=(\tau_k^\beta(z,\psi))'$، برای $k\in\mathcal{N}$، $z\in\mathcal{U}$ و $\beta\geq ۰$، فرض کنید $\varphi(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)z^{n+۱}$ تعریف شده باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} z\psi'(z) &= \varphi(z)*\psi(z)\\ &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۱}{n!}\frac{\prod_{i=۱}^{r}\Gamma(a_i'+nb_i')}{\prod_{j=۱}^{s}\Gamma(a_j+nb_j)}z^{n+۱}. \end{aligned}$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} \tau_k^\beta(z,\psi') &= \psi'(z)*\tau_k^\beta(z)\\ &= \frac{z\psi'(z)*z\tau_k^\beta}{z}\\ &= \frac{\psi(z)*\varphi(z)*z\tau_k^\beta}{z}\\ &= \frac{\psi(z)*z(z\tau_k^\beta)'}{z}. \end{aligned}$$

با توجه به لم ۱۶.۱.۴، رابطه (۲.۴) و با استناد به این‌که $z\tau_k^\beta$ محدب است، نتیجه می‌شود که تابع $g\in\mathcal{S}^*$ و $p\in\mathcal{P}$ با $p(۰)=۱$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{\psi(z)*z(z\tau_k^\beta)'}{z}=\frac{\psi(z)*gp(z)}{z}=\frac{(\psi(z)*g(z))p_۱(z)}{z}\neq ۰.$$

معلوم است که $Re\{p_۱(z)\}>۰$ و $\psi(z)*g(z)=۰$ است، اگروتنهااگر $z=۰$. بنابراین داریم $\tau_k^\beta(z,\psi')$. با استفاده از لم ۱۶.۱.۴ به‌دست می‌آوریم

$$\tau_۱^{\beta+m}(z,\psi)\prec\tau_۲^{\beta+m}(z,\psi)\prec\cdots\prec\tau_k^{\beta+m}\prec\cdots\prec\psi(z),\qquad m\in N.$$

اکنون، nامین میانگین چزارو برای توابع در کلاس $\mathcal{M}_{\tau_s^r}[a_i',a_j,b_i',b_j,\Phi,\psi,\alpha]$ را در نظر می‌گیریم.
فرض کنید $f\in\mathcal{M}_{\tau_s^r}[a_i',a_j,b_i',b_j,\Phi,\psi,\alpha]$ باشد، آن‌گاه nامین میانگین چزارو f از مرتبه‌ی β تعریف شده به فرم زیر می‌باشد

$$\tau_k^\beta(z,f)=\sum_{n=۱}^{k}a_n\frac{\binom{k-n+\beta}{k-n}}{\binom{k+\beta}{k}}z^n.$$

□

قضیه ۲۰.۱.۴. اگر $f\in\mathcal{M}_{\tau_s^r}[a_i',a_j,b_i',b_j,\Phi,\psi,\alpha]$ باشد، آن‌گاه $\tau_k^\beta(z,\psi')\in\mathcal{M}_{\tau_s^r}[a_i',a_j,b_i',b_j,\Phi,\psi,\alpha]$.

برهان. چون

$$\frac{\binom{k-n+\beta}{k-n}}{\binom{k+\beta}{k}}=\frac{k!(k-n+\beta)}{(k-n)!(k+\beta)!}\leq ۱.$$

و با در نظرگرفتن شرط کافی برای قرارگرفتن f در کلاس $\mathcal{M}_{\tau_s^r}[a_i',a_j,b_i',b_j,\Phi,\Psi,\alpha]$، به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n-(۱-\alpha)\mu_n}{\alpha}\frac{\binom{k-n+\beta}{k-n}}{\binom{k+\beta}{k}}|\gamma_n||a_n|\leq ۱.$$

□

مراجع

[1] Al-dweby, Huda., and Darus, Maslina. A subclass of analytic functions defined by the dziok-raina operator. Journal of Inequalities and Applications, pages 1- 12, 2013.

[2] Deng, Qin. On univalent functions with negative coefficients. Proc. Amer . Math. Soc., pages 1675-1682 , 2007

[3] Frasin, B.A., and Darus, M. integral means and neighborhoods for analytic univalent functions with negative coefficients. Soochow journal of Mathematics, 30: 217-223, 2004.

[4] Juneja, O.P., and Mogra, M.L., and Reddy, T.R.A convolution approach for analytic functions with negative coefficients. Soochow J.Math.,11, pages 69-81, 1985.

[5] Owa, S. on the distortion theorems i. Kyungpook Math.J.18, pages 53-59, 1978.

[6] Owa, S., and Sekine, T. Integral means for analytic functions. J.Math.Anal . Appl. 304, pages 772-782, 2005.

[7] Owa, S., and Tsurumi, k and Nunokawa, M., and Sekine, T. on integral means for fractional calculus of analytic functions. J.Math. Anal.Appl.304, pages 772-782, 2005.

[8] Owa, Shigeyoshi., and Sekine, Tadayuki. Integral means of analytic functions. J.Math. Anal. 304, pages 772-782, 2005.

[9] Sarangi, S.M,. and Uralegaddi, B.A. The radius of convexity and starlikenees of certain classes of analytic functions with negative coefficients i. Atti. Accad, naz, Linceirend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,65:8, pages 34-42, 1978

[10] Sekine, T., and Srivastava, H.M., and Tsurumi, K. Integral means for generalized subclasses of analytic functions. Scientiae Mathematicae Japonicae Online , Vol.4, pages 945-957, 2001.

[11] Sekine, Tadayuki., and Owa, Shigeyoshi., and Tsurumi, Kazuyuki. integral means of certain analytic functions for fractional calculus. Applied Mathematics and Computation 187, pages 425-432, 2007.

[12] Silverman, H. Complex variables. Cengae Learning, pages 3-7, 1975.

[13] Silverman, Herb. Univalent functions with negative coefficients. Pro.Amer. Math. Soc, pages 109-116, 1975.

[14] Tadayuki. Sekine., and Owa, Shigeyoshi., and Yamakawa, Rikuo. integral means of certain analytic functions. General Mathematics, 13:99-108, 2005.

[15] Tadayuki, Sekine., and Tsurumi, Kazuyuki., and Srivastava, H.M. integral means for generalized subclasses of analytic functions. Scientiae Mathematicae Japonicae Online, Vol.4, page 945-957, 2001.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

انتگرال کسری .... Fractional integral

انتگرال میانگین .... Integral means

ت

تحلیلی .... Analytic

چ

چندجمله‌ای .... Polynominal

ز

زیرترتیب .... Subordinatin

س

ستاره‌گون .... Starlike

م

محدب .... Convex

مشتق کسری .... Fractional derivative

ن

نامساوی .... Inequality

نقاط اکسترمم .... Extremal points

ه

همسایگی .... Neighborhoods

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Analytic .... تحلیلی

C

Coefficients .... ضرایب

Convex .... محدب

E

Extreme points .... نقاط اکسترمم

F

Fractional derivative .... مشتق کسری

Fractional integral .... انتگرال کسری

I

Integral means .... انتگرال میانگین

N

Nighborhoods .... همسایگی

n-iterated Mycielski graph .... گراف میشلسکی مرتبه n

nondirected graph .... گراف غیر جهت‌دار

P

Polynomial .... چند جمله‌ای

S

Starlike .... ستاره‌گون

Subordination .... زیرترتیب

Aabstract

In the dissertation, we introduce integral means and consider on the functions analyti. we obtain the integral means inequality for the function $f(z)$ belongs to the class $\mathcal{B}_\tau(\Phi, \Psi; \alpha, \beta)$ and the class $M_s^r[a_i', a_j, b_i', b_j, \Phi, \Psi, \alpha]$ of analytic and univalent functions with negative coefficients defined with the extremal functions of this class. Also, we consider $q - \delta$ -neighborhood for functions in this class.
Keywords: Total graph, Central graph, Middle graph, Mycielski graph, Independence number, Covering number, Edge independence number, Edge covering number, Chromatic number, Achromatic number, Equitable chromatic number.

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

On the total graph of Mycielski graphs, central graphs and their covering numbers

Supervisor

Dr.A. Zire

by

Fariba Khajevand

September 2014