دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

بررسی عملگرهای انتگرال بر روی توابع مارپیچ

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

آقای سید رضا موسوی

دانشجو

فاطمه کریمی

بهمن ۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین
الرحمن الرحیم
مالک یوم الدین
ایاک نعبد و ایاک نستعین
اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

درود بر هم او که آفرید، آفرید چونان شمایی را مادر و همسر و فرزندان عزیزم

با سلام به روح پر فتوح پدرم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی تان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودتان

که در این سردترین روزگاران پشتیبان من است

به پاس قلب های بزرگ فریادرستان

و به پاس محبت های بیدریغتان

این مجموعه را به شما تقدیم می کنم.

سپاس گزاری...

با حمد و سپاس فراوان از خداوند منان که به من توفیق آموختن پرتوئی از دانش هستی و آشنایی با گوشه ای از حقایق آفرینش را عطا فرمود.

قلم از نگارش حق زحمات اساتید گرانقدر و دوستان بزرگوار ناتوان است. اما وظیفه حکم می کند که هرچند ناچیز ولی در حد توان تشکر و قدردانی نمایم.

در ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر اجمد زیره که با راهنمایی های حکیمانه افق های جدیدی برای اینجانب ایجاد نمودند و از استاد مشاورم جناب آقای سید رضا موسوی کمال تشکر را دارم .

همچنین از همسر عزیزم و تمام دوستانی که که مرا در این مهم یاری نمودند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

فاطمه کریمی
بهمن ۱۳۹۲

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه کریمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی عملگرهای انتگرال بر روی توابع مارپیچ** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه کریمی
بهمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه ، به بیان تعاریف و قضایای مربوط به رده‌ی توابع مارپیچ می‌پردازیم، همچنین با معرفی چند عملگر انتگرال ،شرایطی که عملگرها در رده های مذکور قرار می گیرند را مورد بررسی و مطالعه قرار می دهیم و در واقع شرایطی را برای‌مارپیچ بودن این عملگرها ارائه می دهیم. همچنین شرایط محدب بودن را به اختصار بیان می کنیم.

کلمات کلیدی :
توابع تحلیلی ، توابع تک ارز ، توابع ستاره گون ، توابع محدب ، توابع مارپیچ ، عملگر انتگرال

پیش گفتار

تابع تحلیلی یک به یک را تک ارز می‌نامیم . از نظر تحلیلی، تابع تک‌ارز مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی، تابع تک ارز خم‌های ساده را به خم‌های ساده می نگارد.

رده‌ی همه توابع تک ارز در $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < ۱\}$ که با شرط $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$ نرمالیزه گشته اند را با S نمایش می‌دهیم.

برای $\circ \leq \alpha < ۱$ ، تابع $f(z)$ در S را β-مارپیچ از مرتبه α می‌نامیم، اگرداشته‌باشیم:

$$\Re e \left\{ e^{i\beta} z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \cos \beta$$

که $|\beta| < \frac{\pi}{۲}$ و β مقداری حقیقی است. رده‌ی این توابع را با $\hat{S}_{\alpha}^{\beta}$ نمایش می‌دهیم.

به دلیل اهمیت این رده ، قصد داریم محک‌های مارپیچ بودن را برای عملگرهای انتگرال مورد بررسی قراردهیم. در این راستا، در بخش اول به بیان مفاهیم مقدماتی و تعاریف پرداخته‌ایم.

در فصل دوم، در هر بخش به طور جداگانه عملگرهای انتگرال مختلفی را مد نظر داشته و محک‌های مارپیچ بودن را بررسی‌کرده‌ایم.

در بخش اول عملگر الکساندر ، در بخش دوم عملگر $\mathscr{F}_{p,m,n,k}$، در بخش سوم، عملگر $\mathscr{G}_{p,m,n,k}$ و در بخش چهارم عملگر های لیبرا و رابرتسون معرفی شده‌اند .

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

در این پایان‌نامه، محک‌های مارپیچی را برای عملگرهای انتگرال مطالعه می‌کنیم.
در واقع شرایطی را برای مارپیچ بودن این عملگرها ارایه می‌دهیم.
برای این منظور، در این فصل، تعاریف، مفاهیم مقدماتی و چند قضیه پایه را بیان می‌کنیم.

۱.۱ نماد گذاری و تعاریف

از نمادهای زیر در متن استفاده شده است.

$\mathbb{C}$: اعداد مختلط

$\mathbb{R}$: اعداد حقیقی

$\mathscr{R}$: قسمت حقیقی

Im: قسمت موهومی

N: اعداد طبیعی

$D=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z|<۱\right\}$: قرص واحد

U: میدان

تعریف ۱.۱.۱. هر مجموعه‌ی باز و همبند روی فضای توپولوژیک $\mathbb{C}$ میدان نامیده می‌شود. معمولا میدان را با Uنشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $(G \subset \mathbb{C}) \quad f(z) : G \to \mathbb{C}$ را در نقطه‌یz_0 **تحلیلی** می‌نامیم، هرگاه، f در یک همسایگی از نقطه‌ی z_0 مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۳.۱.۱. در صورتی که f در هر نقطه‌ی z_0 از دامنه اش مشتق پذیر باشد می‌گوییم f همواره تحلیلی است.

مثال ۴.۱.۱. تابع $f(z) = z^3$ را در نظر می گیریم. f همواره مشتق‌پذیر است و برای هر$z \in \mathbb{C}$، داریم $f'(z) = 3z^2$، لذا f همواره تحلیلی است.

مثال ۵.۱.۱. تابع $f(z) = |z|^2$ فقط در $z = 0$ مشتق پذیر است، لذا f در z_0 غیرتحلیلی است.

تعریف ۶.۱.۱. هرگاه f در تمام نقاط دامنه‌ی U تحلیلی باشد، تابع f را بر دامنه‌ی U تحلیلی می‌نامیم.

اگر $U = \mathbb{C}$ و تابع f روی $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد، آن‌گاه، f را **تابع تام** می‌نامیم.

مثال ۷.۱.۱. تابع $f(z) = z^3$ و در حالت کلی هر چندجمله ای،روی $\mathbb{C}$ همواره تحلیلی و در نتیجه تام است.

تعریف ۸.۱.۱. هر تابع تحلیلی یک به یک را تک‌ارز می‌نامیم. یعنی ،

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2.$$

نکته :

۱. توابع تک‌ارز از نظر تحلیلی، مشتق مخالف صفر دارند.

۲. از نظر هندسی، توابع تک‌ارز خم‌های ساده را به خم‌های ساده و میدان‌های ساده را به میدان های ساده می‌نگارند.

لم ۹.۱.۱ ([1]شوارتز). *فرض کنید $f(z)$ بر ناحیه $|z| < R$ تحلیلی باشد و $f(\circ) = \circ$ و $|f(z)| \leq M$ آن‌گاه، برای z هایی که $|z| = r < R$ داریم. $|f(z)| \leq \frac{r}{R}M$ و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر، $f(z) = \frac{M}{R}e^{i\alpha}z$.*

برهان. چون $f(\circ) = \circ$، پس طبق بسط تیلور، تابع تحلیلی $g(z)$ بر $|z| < R$ موجود است، طوری‌که $f(z) = g(z).z$ پس $g(z) = \frac{f(z)}{z}$. حال برای مقادیر $r < R' < R$، اصل ماکزیمم را برای تابع تحلیلی $g(z)$ به کار می‌بریم.

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \max_{|z|=R'} |g(z)|, \quad (r < R' < R)$$

پس

$$\max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \max_{|z|=R'} \frac{|f(z)|}{|z|},$$

$$\Longrightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{r}{R'} \max_{|z|=R'} |f(z)| \leq \frac{r}{R'}M,$$

$$\overset{R'<R}{\Longrightarrow} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{r}{R'}M,$$

$$\Longrightarrow |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{r}{R}M.$$

□

نتیجه ۱۰.۱.۱. *اگر $f(z)$ بر $|z| \leq R$ تحلیلی و $f^{n-1}(\circ) = \cdots = f''(\circ) = f'(\circ) = f(\circ) = \circ$ و $|f(z)| \leq M$ آن‌گاه، برای $|z| = r \leq R$ داریم.*

$$|f(z)| \leq (\frac{r}{R})^n M \qquad (۱.۱)$$

و تساوی وقتی برقرار است که،

$$f(z) = \frac{M}{R^n}e^{i\alpha}z^n \qquad (۲.۱)$$

که α حقیقی است.

---

[1] Schwarz

۲.۱ رده‌ی A

تعریف ۱.۲.۱. رده‌ی همه‌ی توابع تحلیلی مانند f به فرم
$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$
روی دیسک واحد D، که $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 1 \right\}$ و $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ را رده‌ی A می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. تابع $f(z) = z + 3z^2$ به رده‌ی A تعلق دارد.

۳.۱ رده‌ی S

تعریف ۱.۳.۱. رده‌ی همه‌ی توابع تحلیلی مانند f که $f \in A$ و f تک‌ارز می‌باشد را با S نشان می‌دهیم.

یک تابع در S نمایش توانی به شکل زیر دارد.
$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \ldots \qquad (|z| < 1).$$

لم ۲.۳.۱. *اگر* $f(z) \in S$ *، آن‌گاه* $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$.

برهان. قرار می‌دهیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم .
$$g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots}$$

تابع $g(z)$ تحلیلی است و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$. برای اینکه ثابت کنیم تابع $g(z)$ تک ارز است، فرض می‌کنیم.

$$g(z_1) = g(z_2)$$

$$\Longrightarrow f(z_1^2) = f(z_2^2)$$

$$\Longrightarrow (z_1^2) = (z_2^2)$$

$$\Longrightarrow z_1 = \pm z_2,$$

اما، $g(z)$ تابعی فرد است. از این رو $z_1 = -z_2$ نتیجه می‌دهد $g(z_1) = -g(z_2)$ که تناقض است، پس $z_1 = z_2$. لذا، $g(z)$ یک‌به‌یک است. □

۴.۱ رده‌یT

تعریف ۱.۴.۱. رده ی همه‌ی توابعی به شکل $(b_i \in \mathbb{R})$ $\quad g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$ که در میدان ۱ $<| z |$ تک -ارزند را با T نشان می دهیم.

قضیه ۲.۴.۱. *اگر* $g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$ *و* $g(z)$ *متعلق به رده‌ی* T *باشد، آن‌گاه،*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \mid b_n \mid^2 < 1.$$

برهان. اگر C را مرز ساده‌ی بسته در نظر بگیریم تابع تک ارز $g(z)$ ، دایره‌ی $|z| = r > 1$ را به Cتصویر می کند. قرار می‌دهیم

$$g(z) = u(z) + iv(z)$$

مساحت ناحیه‌یRمحدود به C را با $A(r)$ نشان می‌دهیم.

$$A(r) = \int_R \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

.

توجه داریم که برای هر $r > 1$، رابطه‌ی $A(r) > 0$ برقرار است . با به کار بردن قضیه‌ی گرین، داریم.

$$A(r) = \frac{1}{2} \int_C u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u \tag{۳.۱}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u\frac{\partial v}{\partial \Theta} - v\frac{\partial u}{\partial \Theta} \right) \mathrm{d}\Theta > 0.$$

چون تابع $g(z)$ در میدان Uکه شامل مبدا نیست تحلیلی است و دارای مشتقات نسبی پیوسته است در نتیجه داریم. $g\acute{(}z) = (\frac{1}{iz})(\frac{\partial g}{\partial \Theta})$. برای به دست آوردن حاصل انتگرال خطی، انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{2} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) \mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u - iv)[\frac{1}{iz}(\frac{\partial u}{\partial \Theta} + i\frac{\partial v}{\partial \Theta})] iz \mathrm{d}\Theta =$$

$$\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} u\frac{\partial v}{\partial\Theta}+\frac{\partial u}{\partial\Theta}\mathrm{d}\Theta+\frac{i}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} u\frac{\partial v}{\partial\Theta}-v\frac{\partial u}{\partial\Theta}\mathrm{d}\Theta, \tag{۴.۱}$$

که قسمت موهومی آن، با $A(r)$ مطابقت دارد. با ساده کردن (۴.۱) داریم.

$$\frac{۱}{۲}\int_{|z|=r} g(\bar{z})g'(z)\mathrm{d}z=\frac{۱}{۲}\int_{|z|=r}(\bar{z}+\sum_{m=۰}^{\infty}\bar{b_m}(\bar{z})^{-m}).(۱-\sum_{n=۱}^{\infty}n(b_n z^{-n-۱})\mathrm{d}z),$$

و نیز توجه داریم که،

$$\int_{|z|=r}(\bar{z})^{-m}(z^{-n-۱})\mathrm{d}z=\begin{cases} ۲\pi i r^{-۲m}, & n=m,\\ ۰ \quad , & n\neq m.\end{cases}$$

و این به همانندی زیر منتهی می‌شود،

$$\frac{۱}{۲}\int_{|z|=r} g(\bar{z})g(\acute{z})\mathrm{d}z=\frac{۱}{۲}\int_{|z|=r}\bar{z}\mathrm{d}z-\frac{۱}{۲}\int_{|z|=r}\quad\frac{\sum_{n=۱}^{\infty}n|b_n|^{۲}r^{-۲n}}{z}\mathrm{d}z=\pi(r^{۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}n|b_n|^{۲}r^{-۲n}),$$

بنابراین (۴.۱)موهومی محض است و داریم.

$$A(r)=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} u\frac{\partial v}{\partial\Theta}-v\frac{\partial u}{\partial\Theta}\mathrm{d}\Theta=\pi(r^{۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}n|b_n|^{۲}r^{-۲n},$$

چون $A(r)>۰$، داریم.

$$(r^{۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}n|b_n|^{۲}r^{-۲n})>۰ \qquad (r>۱). \tag{۵.۱}$$

اما (۵.۱) برای هر $r>۱$برقراراست، بنابراین نتیجه با $r\longrightarrow ۱^{+}$ حاصل می‌شود. □

قضیه ۳.۴.۱. *اگر* $f(z)\in S$، *آن‌گاه* $\frac{۱}{f(\frac{۱}{z})}\in T$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم

$$\frac{۱}{f(\frac{۱}{z_۱})}=\frac{۱}{f(\frac{۱}{z_۲})}\quad (|\ z_۱\ |>۱,\quad |\ z_۲\ |>۱).$$

در نتیجه داریم $f(\frac{۱}{z_۱})=f(\frac{۱}{z_۲})$. اکنون یک به یک بودن $(|z|>۱)\quad \frac{۱}{f(\frac{۱}{z})}$، از یک به یک بودن $f(z)$، در $|z|<۱$ حاصل می‌شود. تحلیلی بودن $\frac{۱}{f(\frac{۱}{z})}$نیز نتیجه تحلیلی بودن $f(z)$ است، در صورتی که بتوان نشان داد $f(\frac{۱}{z})\neq ۰$.

اگر $f(\frac{1}{z}) = 0$ آن‌گاه برای $|\frac{1}{z_0}| > 1$ خواهیم داشت $f(0) = f(\frac{1}{z_0}) = 0$ که در تناقض با یک به یک بودن $f(z)$ در $|z| < 1$ می‌باشد. بنابراین $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ در T است و قضیه ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۴.۱. *اگر* $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$ *، آن‌گاه،* $|a_2| \leq 2$

برهان. با استفاده از لم (۲.۳.۱) داریم. $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ در نتیجه ، $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$.
همچنین $g'''(z) = 3a_2$ بنابراین، می‌توانیم بنویسیم $g(z) = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \ldots$. با توجه به قضیه‌ی (۵.۱) بسط لران برای تابع $\frac{1}{g(\frac{1}{z})}$ نشان می‌دهد.

$$\frac{1}{g(\frac{1}{z})} = \frac{1}{(\frac{1}{z})[1 + \frac{a_2}{2} z^2 + \ldots]}$$

$$= z - \frac{a_2}{2}\frac{1}{z} + \cdots \in T.$$

با به‌کاربردن قضیه‌ی (۲.۴.۱) داریم، $|\frac{a_2}{2}|^2 \leq 1$. بنابراین $|a_2| \leq 2$ و قضیه ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۵.۴.۱. *باقراردادن* $a_2 = 2e^{i\alpha};$ *،* $(\alpha$ *حقیقی* $)$ *در قضیه‌ی (۴.۴.۱) داریم.*

$$\frac{1}{g(\frac{1}{z})} = z - \frac{e^{i\alpha}}{z}$$

و یا

$$g(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z^2)} = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}.$$

پس،

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2} = z + 2e^{i\alpha} z^2 + \ldots.$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ *در رابطه‌ی فوق به تابع* $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1+z}{1-z})^2 - \frac{1}{4}$ *می‌رسیم، که به تابع کویب معروف است.*

تابع کویب قرص $|z| < 1$ *را بر صفحه‌ای که در امتداد محور اعداد حقیقی منفی از* $-\frac{1}{4}$ *تا* ∞ *بریده شده است، می‌نگارد.*

۵.۱ رده ی S^*

تعریف ۱.۵.۱. میدان U در $\mathbb{C}$ را نسبت به مبدا، ستاره‌گون می‌نامیم، اگر $0 \in U$ و هر پاره خط مستقیم که هر نقطه ازU را به ۰ وصل می‌کند، داخل Uبیفتد .

تعریف ۲.۵.۱. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدا ستاره گون می‌نامیم، اگر قرص $|z| < 1$ تحت تابع $f(z)$ به میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است.
رده‌ی همه‌ی توابع ستاره‌گون را با S^* نشان می دهیم.

نتیجه ۳.۵.۱. *با توجه به تعاریف (۱.۲.۱) و (۱.۳.۱) و (۲.۵.۱) رابطه‌ی زیر واضح است .*

$$S^* \subset S \subset A$$

لم ۴.۵.۱. *فرض کنیم $f(z) \in S$ در اینصورت $f(z) \in S^*$ ، اگر و تنها اگر، $f(z)$ قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم$f(z) \in S^*$، اگر D تصویر $|z| < 1$و D_r تصویر $|z| < r < 1$ باشد، اگر $w \in D$آن‌گاه برای $0 < t < 1$ چون D ستاره‌گون است داریم، $w \in D$. پس تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$در $|z| < 1$تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند، چون که $g(0) = f^{-1}(tf(0))$ لم شوارتز را به‌کار می‌بریم. لذا داریم $|g(z)| \leq |z|$، حال نقطه‌ی w_1متعلق به D_r را اختیار کرده، در این‌صورت برای نقطه‌ی z_1 که $|z_1| < r$ داریم $w_1 = f(z_1)$اگر tرا به دلخواه در فاصله‌ی $0 < t < 1$در نظر بگیریم داریم.

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد، چون w_1 دلخواه است، پس میدان D_r نسبت به $w = 0$ستاره‌گون است.
برعکس. اگر $f(z) \notin S^*$ آن‌گاه نقطه‌ی w_0 متعلق به Dموجود است که برای $0 < t_0 < 1$ داریم $t_0 w_0 \notin D$ قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب کرده طوری‌که تصویر D_r شامل نقطه‌ی w_0 باشد، چون $D_r \subset D$نقطه‌ی $t_0 w_0 \notin D_r$پس w $f(z)$ قرص $|z| < r$را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد . □

قضیه ۵.۵.۱. *اگر $f(z) \in S$ در اینصورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر* $\mathscr{R}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \circ$.

برهان. به موجب لم(۴.۵.۱) $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون تصویر کند به بیان معادل برای هر θ بین $\circ$ تا ۲π بردار شعاعی از $w = \circ$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد این بدان معنی‌است که $argf(re^{i\theta})$ تابعی صعودی است. زیرا در غیر این‌صورت بردار شعاعی باید مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در S^* با شرط زیر مشخص می‌گردد.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(argf(re^{i\theta})) > \circ.$$

اما

$$argf(re^{i\theta\theta)} = Im \log f(re^{i\theta)}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(Im \log f(re^{i}\theta)) = Im\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(re^{i\theta}) =$$

$$Imi\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \mathscr{R}ez\frac{f'(z)}{z} > \circ$$

□

۶.۱ رده ی C

تعریف ۱.۶.۱. میدان U را محدب می‌نامیم اگر پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از U را به هم وصل می‌کند،داخل U بیفتد.

تعریف ۲.۶.۱. تابع $f(z) \in S$ را محدب می‌نامیم اگر قرص $|z| < ۱$ تحت $f(z)$ بر میدان محدب نگاشته شود این زیر رده ی S را با C نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۶.۱. *فرض‌کنیم $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$ در این‌صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر*

$$\mathscr{R}(۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}) > \circ \qquad (|z| < ۱)$$

برهان. به موجب تعریف (۲.۶.۱) $f(z)$ در C قرار می‌گیرد اگر و تنها اگر قرص D_r $|z| < r$ را بر میدان محدب بنگارد .از نظر هندسی این بدان‌معنی‌است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره‌ی $|z| = r < ۱$ را

بر مرز ساده‌ی بسته می‌نگارد و مماس بر این مرز با افزایش θدر جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌گردد.زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی wبا محور حقیقی می‌سازدبرابر است با $\frac{\pi}{2}+\theta+$ $argf'(z)$پس تابع محدب با شرط زیر مشخص‌می‌گردد.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\frac{\pi}{۲}+\theta+argf'(re^{i\theta})\big)>۰ \tag{۶.۱}$$

با ساده‌کردن داریم.

$$۱+\frac{\partial}{\partial\theta}(Im\log f'(re^{i\theta})=$$

$$۱+Im(ire^{i\theta}\frac{f"(re^{i\theta})}{f'(re^i\theta)})=Re(۱+z\frac{f''(z)}{f'(z)})>۰$$

و بدین‌ترتیب اثبات تمام است. $\square$

اگر در رابطه بالا قرار دهیم $z=re^{i\theta}$ داریم.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(argizf'(z)=\frac{\partial}{\partial\theta}(argzf'(z))>۰ \tag{۷.۱}$$

اما(۷.۱) شرطی‌است برای این‌که $zf'(z)$بر میدان ستاره‌گون نگاشته‌شودلذا برهانی برای لم الکساندر به دست می‌آید.

لم ۴.۶.۱ (الکساندر). *اگر $f\in S$ آنگاه $zf'\in S^*$ اگر و تنها اگر $f\in C$.*

۷.۱ رده ی $S^*(\alpha)$

تعریف ۱.۷.۱. [۸] فرض کنید. $z\in D$, $f\in S$, $\alpha\in[۰,۱)$ و در صورتی که داشته باشیم. $\mathscr{R}ez\frac{f'(z)}{f(z)})>\alpha$ به f یک تابع ستاره‌گون[۲]از مرتبه α می گوییم.
رده‌ی همه ی توابع ستاره‌گون از مرتبه‌ی αروی Dرا با $S^*(\alpha)$نشان می‌دهیم.

[۲] starlike

۸.۱ رده ی $\hat{S}_\beta$

تعریف ۱.۸.۱. تابع تحلیلی $f \in S$ را یک تابع β - مارپیچ [۳] روی D می‌نامیم اگربرای مقادیر حقیقی β با شرط $|\beta| < \frac{\pi}{۲}$ داشته باشیم $\mathscr{R}e\{e^{i\beta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > ۰$
رده‌ی همه ی توابع β - مارپیچ روی D را با $\hat{S}_\beta$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲.۸.۱. *$\hat{S}_۰$ همان رده‌ی S^* از توابع ستاره‌گون است.*

با مقایسه تعاریف(۱.۷.۱) و (۱.۸.۱) و باتوجه به این که
توابع مارپیچ نوع $D,\ \beta$ را به نیم صفحه مختلط سمت راست با نگاشت $e^{i\beta}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ می‌نگارد
. ضمن این‌که که توابع ستاره گون از مرتبه $D,\ \alpha$ را به همان نیم صفحه مختلط سمت راست با نگاشتی به فرم $\dfrac{zf'(z)}{z}$ که قسمت حقیقی آن بزرگتر از α است می‌نگارد.
چون $\lim_{z\to ۰} e^{i\beta}\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = e^{i\beta}$ نتیجه می گیریم که اگر تصویر نگاشت $e^{i\beta}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ به صفحه مختلط راست محدود شود که قسمت حقیقی آن از یک ثابت معین بیشتر است آنگاه مقدار ثابت باید از $\cos\beta$ کوچکتر باشد.
طبق این نظر رده‌ی $\hat{S}^\beta_\alpha$ روی D را معرفی می‌کنیم.

۹.۱ رده ی $\hat{S}^\beta_\alpha$

تعریف ۱.۹.۱. مقادیر $\alpha \in [۰, ۱)$ و $\beta \in (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ را در نظر بگیرید،رده‌ی همه‌ی توابع $f \in S$ که درشرط

$$\mathscr{R}\left\{e^{i\beta}z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha\cos\beta \quad (z \in D)$$

صدق می‌کند را با $\hat{S}^\beta_\alpha$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲.۹.۱. *با قرار دادن $\beta = ۰$ نتیجه می‌شود $f \in S^*(\alpha)$*
با قرار دادن $\alpha = ۰$ نتیجه می‌شود $f \in \hat{S}_\beta$

مثال ۳.۹.۱. برای $z \in D$ تابع $f(z) = \frac{z}{(۱-z)^{\frac{۲(۱-\alpha)}{۱+\tan\beta}}}$ ،که در آن شاخه تابع توانی طوری انتخاب شده‌است که $[(۱-z)^{\frac{۲(۱-\alpha)}{۱+\tan\beta}}]|_{z=۰} = ۱$ متعلق به $\hat{S}^\beta_\alpha$است.

---

[۳] $\beta spirallike$

.

فصل ۲

بررسی محک‌های مارپیچی برای عملگر انتگرال

رده‌ی توابع تحلیلی، تک‌ارز، ستاره‌گون و مارپیچ و... در بخش قبل معرفی شدند. افراد زیادی به مطالعه در این مورد پرداخته‌اند، که تحت چه شرایطی، عملگرهای انتگرال در رده‌های فوق قرار می‌گیرند و اصولا این عملگرها با تغییر شرایط تعیین شده، چه نتایجی را در برخواهند داشت. ما در این فصل ضمن بررسی نتایج حاصل از تحقیق آنها، با معرفی دو عملگر انتگرال جدید به محک‌های مارپیچی در مورد این عملگرها اشاره می‌کنیم.

در این بخش عملگر انتگرال الکساندر [۱] را تعریف و شرایط مارپیچ بودن را در مورد این عملگر بیان می‌کنیم .

---

[۱] Alexander

۱.۲ عملگر انتگرال الکساندر

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید $f \in S$، در این صورت عملگر انتگرال الکساندر را به شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$J[f](z) = \int_{\circ}^{z} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

این عملگر، رده‌ی توابع ستاره‌گون را روی رده‌ی C به صورت یک‌به‌یک [2] می‌نگارد. [۸]
بایرناخی[3] در سال ۱۹۶۰ حدس زد که رابطه‌ی $J(S) \subset S$ باید برقرار باشد، اما در سال ۱۹۶۳، کرزیز[4] و لواندوسکی [5] مطلب بالا را با آوردن مثالی به صورت زیر رد کردند.

مثال ۲.۱.۲. [۱۳] تابع $f(z) = z(۱ - iz)^{i-۱}$، یک تابع $\frac{\pi}{۴}$-مارپیچ است، اما توسط عملگر J به تابعی غیر تک‌ارز تبدیل می‌شود.

رابرتسون نیز تغییر شکل انتگرال الکساندر از توابع β-مارپیچ [6] را در سال ۱۹۶۹ مطالعه کرد. او نشان داد که $J(\hat{S}_\beta) \subset S$ است، در صورتی‌که $\cos\beta \leq x_{\circ}$ باشد که در آن $x_{\circ} = ۰/۲۰۳۴...$ ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $۱۶x^۳ + ۱۶x^۲ + x - ۱ = ۰$ است.

۲.۲ عملگر انتگرال I_γ

فرض کنید، $\gamma \in \mathbb{C}$ و $f(z) \in A$ موضعا تک‌ارز باشد
تغییر شکل انتگرال I_γ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم، [۸]

$$I_\gamma[f](z) = \int_{\circ}^{z} |f'(\zeta)|^\gamma d\zeta = z\int_{\circ}^{۱} |f'(tz)|^\gamma dt,$$

بر اساس تعریف I_γ، می‌توان نشان داد

$$I_\gamma o I_{\gamma'} = I_{\gamma\gamma'}.$$

---

[2] one-to-one

[3] Biernacki

[4] Krzyz

[5] Lewandowski

[6] β-spirallike

مجموعه‌ی $A(F)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$A(F)=\{\gamma\in\mathbb{C}\quad:\quad I_\gamma(F)\subset S\},$$

که $F\subset A$ و به‌طور موضعی تک ارز است.

طبق تعریف مجموعه‌ی $A(F)$ ، رابطه های $J(\hat{S}_\alpha^\beta)\subset S$ و $1\in A(J(\hat{S}_\alpha^\beta))$ معادل یکدیگر می‌باشند.

نتیجه ۱.۲.۲. $J(\hat{S}_0)=C\subset S$

لم ۲.۲.۲. [۴] *اگر $f_0(z)=z+c_2z^2+\cdots$ در D تحلیلی و تک ارز باشد و D را به میدان محدب بنگارد، آن‌گاه،*

$$\Big|w(f_0,z)\Big|=\Big|\left(\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\right)^2\Big|\leq\frac{2}{(1-|z|^2)^2},\qquad(z\in D)$$

و تساوی وقتی برقرار است که داشته باشیم.

$$f_0(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

لم ۳.۲.۲. *فرض کنید $P(z)$ تابعی تحلیلی در D باشد، که با شرط $P(0)=1$ نرمالیزه شده است، اگر در D داشته باشیم*

$$\Re eP(z)>0,$$

آن‌گاه،

$$\left|2zP'(z)+1-P^2(z)\right|\leq\frac{4|z|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

تعریف ۴.۲.۲. [۴] فرض کنید $f(z)\in S$ و $f'(z)\neq 0$، و

$$Re\left[e^{i\alpha}(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})\right]>0,\quad(z\in D)$$

در این صورت، می‌گوییم $zf'(z)$ به رده‌ی $\hat{S}_\alpha$ تعلق دارد، یعنی $f(z)$ محدب مارپیچ است یا $f(z)\in C_\alpha$.

قضیه ۵.۲.۲. *اگر $f(z)\in C_\alpha$ که $0<\cos\alpha\leq x_0$ و $x_0=0/2315...$ ریشه‌ی مثبت از معادله‌ی $12x^3+16x^2+x-1=0$ باشد، آن‌گاه، $f(z)$ در D تک‌ارز است.*

برهان. (۵.۲.۲) فرض کنید $\frac{-\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ و تابع $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ متعلق به C_α باشد، اگر

$$p(z)=\frac{1}{\cos\alpha}[e^{i\alpha}(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})]-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

آن‌گاه $p(0)=1$، با توجه به شرایط ذکرشده در تذکر قبل، $\Re ep(z)>0$. همچنین،

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=[p(z)\cos\alpha+i\sin\alpha]e^{-i\alpha},$$

یا

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{p(z)-۱}{z}e^{-i\alpha}\cos\alpha,$$

چون

$$(\frac{zf''(z)}{f'(z)})' - \frac{۱}{۲}(\frac{zf''(z)}{f'(z)})^{۲} = \frac{e^{-i\alpha\cos\alpha}}{۲z^{۲}}[۲zp'(z)+۱-p^{۲}(z)+ie^{-i\alpha}\sin\alpha(p(z)-۱)^{۲}],$$

طبق لم (۳.۲.۲) داریم.

$$|w(f,z)| \leq \frac{\cos\alpha}{۲|z|^{۲}}|۲zp'(z)+۱-p^{۲}(z)|+|\sin\alpha||p(z)-۱|^{۲}$$

$$< \frac{\cos\alpha}{۲|z|^{۲}}[\frac{۴z^{۲}}{(۱-|z|^{۲})^{۲}}+|\sin\alpha|(\frac{۲|z|}{۱-|z|})^{۲}]$$

$$\leq ۲(۱-|z|^{۲})^{-۲}$$

یا

$$\cos\alpha(۱+۴|\sin\alpha|) \leq ۱.$$

طبق لم‌های (۲.۲.۲) و (۳.۲.۲) می‌توان نتیجه گرفت که اگر $۱۶\cos^{۳}\alpha+۱۶\cos^{۲}\alpha+\cos\alpha-۱ <$ ۰، یا $\alpha = ۰$، آن‌گاه $f(z)$ تابعی تک‌ارز در D است، چون معادله‌ی $۱۶x^{۳}+۱۶x^{۲}+x-۱<۰$ فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد که $x_۰ = ۰/۲۳۱۵...$ است، بنابراین اگر $۰ < \cos\alpha \leq x_۰$، آن‌گاه $f(z)$ در D تک‌ارز است. □

مثال ۶.۲.۲. اگر $\mu+۱ = |\mu+۱|e^{-i\alpha}$، که $\frac{۱}{۲} < \cos\alpha < ۱$، و همچنین اگر $|\mu-۱| > ۱$ و $|\mu+۱| > ۱$ و $|\mu| \leq ۱$، آن‌گاه، تابع $f^{*}_{\alpha}(z) = \frac{۱}{\mu}[(۱-z)^{-\mu}-۱] = z+\cdots$ به C_α تعلق دارد، اما تک‌ارز نیست.

مدتی بعد، لیبرا و زیلگر، $x_\circ$ را با $x_1 = ۰/۲۵۶۴...$، که x_1 ریشه‌ی مثبت و منحصربه‌فرد معادله‌ی $۹x^۳ + ۹x^۲ + x - ۱ = ۰$ است، جایگزین کردند.
همچنین رابرتسون مشاهده کرد که $x_\circ$ نمی‌تواند با عددی بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ جایگزین شود، و برای به‌دست آوردن بهترین تقریب آن تلاش کرد. وای‌سی‌کیم[۷] و تی‌سوگاوا[۸] قضیه (۷.۲.۲) را اثبات کردند.

قضیه ۷.۲.۲. [۱۶] *اگر $\cos\beta \leq \frac{۱}{۲}$ یا $\beta = ۰$، آن‌گاه، $J(\hat{S}_\beta) \subset S$*

تغییرشکل الکساندر برای زیررده‌ی توابع مارپیچ مرتبه β

در ادامه، به عنوان کاربردی دیگر از عملگر تغییر شکل الکساندر، به بررسی این عملگر روی زیررده‌ی توابع مارپیچ از نوع β خواهیم پرداخت.

لم ۸.۲.۲. [۱۳] *فرض کنید $c = e^{-i\beta}\cos\beta$ و $\beta \in (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ و $\alpha \in [۰, ۱)$ و $z \in D$، در این صورت روابط زیر برقرارند .*

۱. $f \in S^*(\alpha) \iff \frac{f(z)}{z} = [\frac{u(z)}{z}]^{۱-\alpha}$، که $u(z) \in S^*$، و رشته‌ی تابع توانی طوری انتخاب شده است که $[\frac{u(z)}{z}]^{۱-\alpha}|_{z=۰} = ۱$.

۲. $f \in \hat{S}_\alpha^\beta \iff \frac{f(z)}{z} = [\frac{g(z)}{z}]^c$، که $g(z) \in S^*(\alpha)$، و رشته‌ی تابع توانی طوری انتخاب شده است که $[\frac{g(z)}{z}]^c|_{z=۰} = ۱$.

۳. $f \in \hat{S}_\alpha^\beta \iff \frac{f(z)}{z} = [\frac{s(z)}{z}]^{(۱-\alpha)c}$، که $s(z) \in S^*$، و رشته‌ی تابع توانی طوری انتخاب شده است که $[\frac{S(z)}{z}]^{(۱-\alpha)c}|_{z=۰} = ۱$.

برهان. ۱. اثبات این قسمت در [۶] بیان شده است .

۲. فرض کنید $f(z) \in \hat{S}_\alpha^\beta$، اکنون قرار می‌دهیم .

$$g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{e^{i\beta}}{cos\beta}}.$$

در این صورت، تساوی زیر را به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = (۱ + i\tan\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)} - i\tan\beta.$$

بنابراین، نامساوی زیر برقرار است .

$$\Re e\left[\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] = \frac{۱}{\cos\beta}\Re e\left[e^{i\beta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \frac{\alpha\cos\beta}{\cos\beta} = \alpha$$

---

[۷] Y.C.Kim

[۸] T.Sugawa

یعنی، $g(z) \in S^*(\alpha)$.

برعکس، فرض کنید $g(z) \in S^*(\alpha)$. بنابراین مشابه استدلال بالا، نامساوی زیر را خواهیم داشت،

$$\frac{۱}{\cos\beta}\Re e\left[e^{i\beta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] = \Re e\left[\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] > \alpha,$$

لذا نتیجه می‌گیریم،

$$\Re e\left[e^{i\beta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha\cos\beta,$$

یعنی، $f(z) \in \hat{S}_\alpha^\beta$.

۳. با توجه به قسمت ۲ نتیجه می‌گیریم.

$$f \in \hat{S}_\alpha^\beta \Longleftrightarrow g \in S^*(\alpha),$$

طوری‌که، $\frac{f(z)}{z} = \left[\frac{g(z)}{z}\right]^c$.

قرار می‌دهیم $c = e^{-i\beta}\cos\beta$. از آنجایی‌که

$$g(z) \in S^*(\alpha) \Longleftrightarrow s(z) \in S^*$$

طوری‌که، تساوی $\frac{g(z)}{z} = \left[\frac{s(z)}{z}\right]^{۱-\alpha}$ در ۱ اثبات شد، لذا، رابطه‌ای مهم بین رده‌ی $\hat{S}_\alpha^\beta$ و رده‌ی S^* بدست می‌آوریم که به صورت زیر بیان می‌شود .

$f \in \hat{S}_\alpha^\beta$، اگر و تنها اگر، $s(z) \in S^*$ وجود داشته باشد، طوری‌که، $\frac{f(z)}{z} = [\frac{s(z)}{z}]^{(۱-\alpha)c}$.

در اینجا $c = e^{-i\beta}$ قرار داده‌ایم، و شاخه‌ی تابع توانی طوری انتخاب شده است که،

$$\left[\frac{s(z)}{z}\right]^{(۱-\alpha)c}|_{z=۰} = ۱,$$

لم (۸.۲.۲) رابطه‌ی رده‌ی $\hat{S}_\alpha^\beta$ و رده‌ی S^* را بیان می‌کند، که نقش مهمی در اثبات قضایا ایفا می‌کنند.

□

لم ۹.۲.۲. *اگر* $\alpha \in [۰,۱)$ و $\beta \in (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$، *آن‌گاه،* $J(\hat{S}_\alpha^\beta) = I_{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta}(C)$.

برهان. فرض کنید $f \in J(\hat{S}_\alpha^\beta)$، بنابراین، $g(z) \in \hat{S}_\alpha^\beta$ وجود دارد، طوری‌که، $f(z) = \int_۰^z \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta$.
طبق قسمت ۳ از قضیه‌ی (۸.۲.۲)، نتیجه می‌گیریم $s(z) \in S^*$ طوری‌که،

$$g(z) = z\left[\frac{s(z)}{z}\right]^{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta},$$

بنابراین،

$$f(z) = \int_۰^z \left[\frac{s(\zeta)}{\zeta}\right]^{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta} d\zeta.$$

طبق رابطه‌ی رده‌ی S^* و رده‌ی C ، تابع $u(z) \in C$ وجود دارد، طوری‌که $s(z) = zu'(z)$. و بنابراین،

$$f(z) = \int_۰^z [u'(\zeta)]^{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta} d\zeta$$

یعنی $f(z) \in I_{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta}(C)$، در نتیجه $J(\hat{S}_\alpha^\beta) \subset I_{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta}(C)$.
برعکس، فرض کنید $f(z) \in I_{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta}(C)$، بابرگشت روابط ذکر شده، خواهیم داشت .

$$f \in J(\hat{S}_\alpha^\beta).$$

بنابراین $I_{(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta}(C) \subset J(\hat{S}_\alpha^\beta)$، و درنتیجه لم ثابت می‌شود. □

۳.۲ نتایج اصلی و برهان‌های آنها

در این بخش فرض می‌کنیم $[z, w]$ بازه‌ی بسته با نقاط انتهایی z, w که $z, w \in \mathbb{C}$ باشد.

لم ۱.۳.۲.

$$A(C) = \left\{ |\gamma| \leq \frac{۱}{۲} \right\} \cup [\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}].$$

اثبات این لم در [۶] آمده است.

قضیه ۲.۳.۲. *اگر* $\beta \in (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$, $\alpha \in [۰, ۱)$*، آن‌گاه،*

$$A(J(\hat{S}^{\beta}_{\alpha})) = \left\{ |\gamma| \leq \frac{۱}{۲(۱-\alpha)cos\beta} \right\} \bigcup \left[\frac{e^{i\beta}}{۲(۱-\alpha)\cos\beta}, \frac{۳e^{i\beta}}{۲(۱-\alpha)\cos\beta} \right]$$

برهان. با استفاده از لم (۹.۲.۲)، داریم،

$$I_{\gamma}(J(\hat{S}^{\beta}_{\alpha})) = I_{\gamma}(I_{(۱-\alpha)^{-i\beta}\cos\beta)}(C) = I_{\gamma(۱-\alpha)^{-i\beta}\cos\beta)}(C) \qquad (۱.۲)$$

بنابراین،

$$\gamma \in A(J(\hat{S}^{\beta}_{\alpha})) \Longleftrightarrow \gamma(۱-\alpha)e^{-i\beta}\cos\beta \in A(C)$$

و با استفاده از لم (۱.۳.۲)، نتیجه‌ی مطلوب را بدست می‌آوریم. □

نتیجه ۳.۳.۲. *در قضیه‌ی (۲.۳.۲)، اگر قرار دهیم* $\alpha = ۰$*، برای* $\frac{-\pi}{۲} < \gamma < \frac{\pi}{۲}$ *داریم .*

$$A(J(\hat{S}_{\beta})) = \left\{ |\gamma| \leq \frac{۱}{۲\cos\beta} \right\} \bigcup \left[\frac{e^{i\beta}}{۲\cos\beta}, \frac{۳e^{i\beta}}{۲\cos\beta} \right]$$

قضیه ۴.۳.۲. *فرض کنید* $\alpha \in [۰, ۱)$ *و* $\beta \in (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$*، در این صورت رابطه‌ی شمول* $J(\hat{S}^{\beta}_{\alpha}) \subset S$ *برقرار است، اگر*

$$\cos\beta \leq \frac{۱}{۲(۱-\alpha)},$$

یا

$$\alpha = \beta = ۰.$$

برهان. اگر $\alpha = \beta = ۰$، آن‌گاه طبق عملگر تغییر شکل انتگرال J، نتیجه حاصل می‌شود.

اگر $\alpha = ۰$ و $\beta \neq ۰$، آنگاه قضیه‌ی (۷.۲.۲)حاصل می‌شود.

اگر $\alpha \neq ۰$ و $\beta = ۰$، آن‌گاه، $f(z) \in S^*(\alpha)$. با استفاده از قسمت اول قضیه‌ی (۸.۲.۲)، $u(z) \in S^*$ وجود دارد طوری‌که $u(z) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{۱}{۱-\alpha}}$، شاخه تابع توانی چنان انتخاب شده است که

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{۱}{۱-\alpha}}\Big|_{z=۰} = ۱$$

از تبدیل انتگرالی J مشاهده می‌شود که $g(z) \in J(\hat{S}_\alpha\beta)$ وجود دارد، طوری‌که،

$$g(z) = \int_0^z \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} d\zeta,$$

برای

$$\Re e\left[1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right] = \Re e\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

و $\Re e\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha$،
می‌توان نتیجه گرفت که $\Re e\left[1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right] > 0$، و بنابراین، $g(z) \in C$، و $J(S^*(\alpha)) \subset S$.
اکنون فرض کنید $\alpha \neq 0$، و $\beta \neq 0$.
از آنجایی‌که $J(\hat{S}_\alpha^\beta) \subset S$ معادل است با $1 \in A(J(\hat{S}_\alpha^\beta))$ و $1 \notin \left[\frac{e^{i\beta}}{2(1-\alpha)\cos\beta}, \frac{3e^{i\beta}}{2(1-\alpha)\cos\beta}\right]$،
لذا، با استفاده از قضیه‌ی (۲.۳.۲)، نتیجه می‌گیریم که

$$1 \leq \frac{1}{2(1-\alpha)\cos\beta}.$$

یعنی $\cos\beta \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}$ اگر روش بالا را خلاصه کنیم، برای $\alpha \in [0,1)$ و $\beta \in (\frac{-\pi}{2} \frac{\pi}{2})$ داریم $J(\hat{S}_\alpha^\beta) \subset S$، زمانی‌که $\cos\beta \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}$ یا $\alpha = \beta = 0$. و این موضوع، برهان را کامل می‌کند. □

نتیجه ۵.۳.۲. *قضیه‌ی (۴.۳.۲) تعمیمی از قضیه‌ی (۷.۲.۲) است.*

قضیه ۶.۳.۲. *اگر $\beta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2})$, $\alpha \in [0,1)$، آن‌گاه،*

$$A(J(\hat{S})) = \left\{|\gamma| \leq \frac{1}{2(1-\alpha)\cos\beta}\right\}.$$

برهان. با کمک رابطه‌های $\hat{S} = \bigcup_\beta \hat{S}_\alpha^\beta$ و $A(F) = \{\gamma \in \mathbb{C} \ : \ I_\gamma(F) \subset S\}$ نتیجه می‌گیریم

$$A(J(\hat{S})) = \bigcap_\beta J(\hat{S}_\alpha^\beta).$$

و طبق قضیه‌ی (۲.۳.۲) مشاهده می‌شود که $A(J(\hat{S})) = \left\{|\gamma| \leq \frac{1}{2(1-\alpha)\cos\beta}\right\}$. بنابراین، برهان قضیه کامل می‌شود. □

در ادامه‌ی این فصل، دو عملگر انتگرال عمومی را تعریف کرده، و شرایط تحدب و مارپیچ بودن را برای این دو عملگر انتگرال بررسی می‌کنیم.

تعریف ۷.۳.۲ (مشتق کسری مرتبه α). اگر

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \tag{۲.۲}$$

که $(p, n \in \mathbb{N} = \{۱, ۲, \ldots\})$ در دیسک باز $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$ تحلیلی و $\mathscr{A}_p(n)$ رده‌ی همه‌ی توابع به فرم (۲.۲) باشد و قرار دهیم .

$$\mathscr{A}_۱(۱) = \mathscr{A}_۱ := \mathscr{A}. \quad , \quad \mathscr{A}_P(۱) := \mathscr{A}_p. \tag{۳.۲}$$

در این صورت، مشتق کسری مرتبه‌ی α برای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D_z^{\alpha} f(z) = \frac{۱}{\Gamma(۱-a)} \frac{d}{dz} \int_{\circ}^{z} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^a} d\zeta \quad (\circ \leq \alpha < ۱). \tag{۴.۲}$$

که f، در ناحیه‌ی همبند ساده از صفحه‌ی z مختلط شامل مبدا تحلیلی است و قسمت ضربی $(z-\zeta)^{-a}$ با شرایط حقیقی بودن $\log(z-\zeta)$ و $z - \zeta > \circ$ حذف می‌شود.

با قراردادن $f(z) = z^k$ در (۴.۲) نتیجه می‌گیریم

$$D_z^a z^k = \frac{\Gamma(k+۱)}{\Gamma(k-a+۱)} z^{k-a} \quad (\circ \leq a < ۱ , k \in N)$$

با استفاده از عملگر $\Omega_p^a : A_p(n) \longrightarrow A_p(n)$ که به صورت

$$\Omega(z) = \frac{\Gamma(p-a+۱)}{\Gamma(p+۱)} z^a D_z^a f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} \frac{\Gamma(k+۱)\Gamma(p-a+۱)}{\Gamma(p+۱)\Gamma(k-a+۱)} a_k z^k \tag{۵.۲}$$

تعریف می‌شود، که $a \neq p+۱, p+۲, p+۳, \ldots$.

بولوت، عملگر دیفرانسیل کلی $D_{\lambda,l,p}^{m,a}$ را تعریف کرد.

$$\begin{aligned}
D^{\circ} f(z) &= f(z),\\
D_{\lambda,l,p}^{۱,a} f(z) &= \frac{p-\lambda p+l}{p+l} \Omega_p^a f(z) + \frac{\lambda}{p+l} z(\Omega_p^a f(z))',\\
&= D_{\lambda,l,p}^{a} f(z) \quad (\lambda, l \geq \circ , \circ \leq a < ۱),\\
D_{\lambda,l,p}^{۲,a} f(z) &= D_{\lambda,l,p}^{a} \left(D_{\lambda,l,p}^{۱,a} f(z)\right)\\
&\vdots\\
D_{\lambda,l,p}^{m,a} f(z) &= D_{\lambda,l,p}^{a} (D_{\lambda,l,p}^{m-۱,a} f(z)) \quad (m \in N)
\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

اگر f به صورت (۲.۲) تعریف شود، با استفاده از روابط (۵.۲) و (۶.۲)، ملاحظه می‌شود که

$$D_{\lambda,l,p}^{m,a} f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} \psi_{k,m}(a, \lambda, l, p) a_k z^k, \quad (m \in \mathbb{N}_{\circ} = \mathbb{N} \cup \{\circ\}) \tag{۷.۲}$$

که در آن $\psi_{k,m}\left(\alpha,\lambda,l,p\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\psi_{k,m}\left(a,\lambda,l,p\right)=\left[\frac{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(p-a+1\right)}{\Gamma\left(p+1\right)\Gamma\left(k-a+1\right)}\frac{p+\lambda\left(k-p\right)+l}{p+l}\right]^{m}. \tag{۸.۲}$$

با استفاده از عملگر $D_{\lambda,l,P}^{m,a}$ که در (۷.۲) تعریف شده است، رده‌های جدید $\mathscr{U}\mathscr{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}\left(\delta,\beta,b\right)$ و $\mathscr{U}\mathscr{C}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}\left(\delta,\beta,b\right)$ به صورت‌های زیر تعریف می‌شود .

تعریف ۸.۳.۲. تابع $f\in\mathcal{A}_p(n)$ در رده‌ی $\mathscr{U}\mathscr{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}\left(\delta,\beta,b\right)$ قرار دارد اگر و تنها اگر در شرط

$$\mathscr{R}\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m,a}f(z)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m,a}f(z)}-p\right)\right\}>\delta\left|\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m,a}f(z)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m,a}f(z)}-p\right)\right|+\beta \tag{۹.۲}$$

جایی که $z\in D$ و $b\in\mathbb{C}-\{0\}$ و $\delta\geq 0$ و $0\leq\beta<p$ و $D_{\lambda,l,p}^{m,a}$ به صورت (۷.۲) تعریف شده است.

تعریف ۹.۳.۲. تابع $f\in\mathcal{A}_p(n)$ در رده‌ی $\mathscr{U}\mathscr{C}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,a}$ قرار دارد اگر و تنها اگر در شرط زیر صدق کند .

$$\mathscr{R}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(D_{\lambda,1,p}^{m,a}f(z)\right)''}{\left(D_{\lambda,1,p}^{m,a}f(z)\right)'}-p\right)\right\}>\delta\left|\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(D_{\lambda,1,p}^{m,a}f(z)\right)''}{\left(D_{\lambda,1,p}^{m,a}f(z)\right)'}-p\right)\right|+\beta. \tag{۱۰.۲}$$

جایی که $z\in D$ و $b\in\mathbb{C}-\{0\}$ و $\delta\geq 0$ و $0\leq\beta<p$ و $D_{\lambda,1,p}^{m,a}$ به صورت (۷.۲) تعریف شده است.

نتیجه ۱۰.۳.۲. *با توجه به تعاریف (۸.۳.۲) و (۹.۳.۲) و لم الکساندر داریم.*

$$f\in\mathscr{U}\mathscr{C}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}(\delta,\beta,b)\Longleftrightarrow\tfrac{1}{p}zf'\in\mathscr{U}\mathscr{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}(\delta,\beta,b), \tag{۱۱.۲}$$

نتیجه ۱۱.۳.۲. *i) با قرار دادن $\delta=0$ خواهیم داشت*

$$\mathscr{U}\mathscr{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}\left(0,\beta,b\right)\equiv\mathscr{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}\left(\beta,b\right), \tag{۱۲.۲}$$

و

$$\mathscr{U}\mathscr{C}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}\left(0,\beta,b\right)\equiv\mathscr{C}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}\left(\beta,b\right),$$

که توسط بولوت مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت.

به‌ویژه داریم

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{m,1,1}_{\alpha,\lambda,0}(0,\beta,b) \equiv \mathcal{S}^{m}_{\alpha,\lambda}(\beta,b),$$

و

$$\mathscr{U}\mathscr{C}^{m,1,1}_{\alpha,\lambda,0}(0,\beta,b) \equiv \mathscr{C}^{m}_{\alpha,\lambda}(\beta,b),$$

که این نیز توسط بولوت مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

ii) با قرار دادن $\delta = 0$ و $\beta = 0$ رده‌های

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(0,0,b) \equiv \mathcal{S}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(b),$$

و

$$\mathscr{U}\mathscr{C}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(0,0,b) \equiv \mathscr{C}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(,b),$$

ایجاد می‌شود، به‌ویژه داریم .

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{0,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(0,0,b) \equiv \mathcal{S}^{p,n}(b), \tag{۱۳.۲}$$

و

$$\mathscr{U}\mathscr{C}^{0,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(0,0,b) \equiv \mathscr{C}^{p,n}(b),$$

روابط برای توابع ستاره‌گون p مقداری و توابع محدب p مقداری از مرتبه‌ی مختلط b که $(b \in \mathbb{C} - \{0\})$ نیز برقرار است.

iii) قرار می‌دهیم $m = 0$، داریم.

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{0,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(\delta,\beta,b) \equiv \mathcal{S}^{p,n}(\delta,\beta,b)$$

$$= \left\{ f \in \mathcal{A}_p(n) :\ \mathscr{R}\left\{ p + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right)\right\}\right\} > \left\{\delta\left|\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right)\right| + \beta\right\},$$

(۱۴.۲)

و

$$\mathscr{U}\mathscr{C}^{0,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(\delta,\beta,b) \equiv \mathscr{C}^{p,n}(\delta,\beta,b)$$

$$= \left\{ f \in \mathcal{A}_p(n) : \ \mathscr{R}\left\{ p + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - p\right)\right\}\right\} 1 > \left\{ \delta \left| \frac{1}{b}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - p\right)\right| + \beta \right\}$$

به‌ویژه قرار می‌دهیم .

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(\delta,\beta,b\right) \equiv \mathcal{S}\left(\delta,\beta,b\right), \tag{۲.۱۵}$$

$$\mathscr{U}\mathscr{C}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(\delta,\beta,b\right) \equiv \mathscr{C}\left(\delta,\beta,b\right).$$

همچنین، داریم

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(\delta,\beta,1\right) \equiv \mathcal{S}\mathscr{D}\left(\delta,\beta\right), \tag{۲.۱۶}$$

$$\mathscr{U}\mathscr{C}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(\delta,\beta,1\right) \equiv \mathscr{K}\mathscr{D}\left(\delta,\beta\right).$$

که توسط شامس [۹] مورد بررسی قرار گرفت. [۱۹]

iv) برای $\delta = 0$ و $m = 0$ رده‌ی زیر را خواهیم داشت،

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{0,p,n}_{\alpha,\lambda,l}\left(0,\beta,b\right) \equiv \mathcal{S}^{p,n}\left(\beta,b\right) = \left\{ f \in \mathscr{A}_p(n) : \mathscr{R}\left\{ p + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right)\right\} > \beta \right\}$$

$$\mathscr{U}\mathscr{C}^{0,p,n}_{\alpha,\lambda,l}\left(0,\beta,b\right) \equiv \mathcal{S}^{p,n}\left(\beta,b\right) = \left\{ f \in \mathscr{A}_p(n) : \mathscr{R}\left\{ p + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - p\right)\right\} > \beta \right\}$$

روابط فوق برای تابع ستاره‌گون p مقداری و محدب p مقداری از مرتبه‌ی مختلط b، که $(b \in \mathbb{C} - \{0\})$ و نوع β که $(0 < \beta < p)$ نیز برقرار است.

به‌ویژه قرار می‌دهیم .

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(0,\beta,b\right) \equiv \mathcal{S}\left(\beta,b\right) \qquad \left(b \in \mathbb{C} - \{0\},\ 0 \le \beta < 1\right),$$

توجه داریم که برای $b = 1$ خواهیم داشت،

$$\mathscr{U}\mathcal{S}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(0,\beta,1\right) \equiv \mathcal{S}^{*}\left(\beta\right),$$

---

[۹] Shams

و

$$\mathcal{UC}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(0,\beta,1\right)\equiv C\left(\beta\right).$$

که C, S^{*} رده‌ی توابع ستاره‌گون و محدب از نوع β هستند.

v) قرار می‌دهیم $\delta=1$، و $m=0$ و $p=n=1$ و $b=1$ رده‌های زیر را از توابع یکنواخت ستاره‌گون و محدب خواهیم داشت.

$$\mathcal{US}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(1,\beta,1\right)\equiv\mathcal{UST}\left(\beta\right),$$

$$\mathcal{UC}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(\delta,\beta,1\right)\equiv\mathcal{UEV}\left(\beta\right).$$

که توسط رونینگ [10] مورد بررسی قرار گرفت. [۱۷]

به‌ویژه داریم.

$$\mathcal{US}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,L}\left(1,0,1\right)\equiv\mathcal{UST}\quad,\quad\mathcal{UC}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,l}\left(\delta,\beta,1\right)\equiv\mathcal{UCV}$$

که توسط گودمن [11] تعریف شد. [۵]

نتیجه ۱۲.۳.۲. با قرار دادن $\delta=0$ و $b=-e^{i\theta}\cos\theta$ که $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ در تعاریف (۸.۳.۲) و (۹.۳.۲)، به مجموعه‌های زیر می‌رسیم.

$$\mathcal{S}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}\left(\beta,\theta\right)=\left\{f\in\mathcal{A}_p(n)\ :\ \mathcal{R}\left\{e^{i\theta}\frac{z\left(D^{m,\alpha}_{\lambda,l,p}f(z)\right)'}{D^{m,\alpha}_{\lambda,l,p}f(z)}\right\}>\beta\cos\theta,\quad 0\le\beta<p\right\},\tag{۱۷.۲}$$

$$\mathcal{C}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}\left(\beta,\theta\right)=\left\{f\in\mathcal{A}_p(n)\ :\ \mathcal{R}\left\{e^{i\theta}\left(1+\frac{z\left(D^{m,\alpha}_{\lambda,l,p}f(z)\right)''}{D^{m,\alpha}_{\lambda,l,p}f(z)}\right)\right\}>\beta\cos\theta,\quad 0\le\beta<p\right\}.\tag{۱۸.۲}$$

همچنین، قرار می‌دهیم.

$$\mathcal{S}^{0,p,n}_{\alpha,\lambda,l}\left(\beta,\theta\right)=\mathcal{S}^{p,n}\left(\beta,\theta\right).$$

به‌ویژه فرض می‌کنیم.

$$\mathcal{S}^{0,1,1}_{\alpha,\lambda,1}\left(\beta,\theta\right)=\hat{S}^{\theta}_{\beta}\quad\left(|\theta|<\frac{\pi}{2},\ 0\le\beta\le 1\right),$$

که همان رده‌ی توابع θ مارپیچ از مرتبه‌ی β است.

[10] Ronning

[11] Goodman

۴.۲ عملگر $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)$

فرض کنید $\eta \in N$,$m = (m_۱, \dots, m_\eta) \in N_۰^\eta$ و $k = (k_۱, \dots, k_\eta) \in R_+^\eta$ اگر $f_۱ \in \mathscr{A}_p(n)$ ، $z \in D$ و برای $۱ \leq j \leq \eta$ ، $D_{\lambda,l,p}^{m,\alpha}$ به صورت (۷.۲) تعریف شده باشد عملگر $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\mathscr{T}_{p,\eta}^{m,k} : \mathscr{A}_p(n)^\eta \longrightarrow \mathscr{A}_p(n),$$

$$\mathscr{T}_{p,\eta}^{m,k}(f_۱, \dots, f_\eta) = \mathscr{F}_{p,\eta,m,k}.$$

$$\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z) = \int_۰^z pt^{p-۱} \prod_{j=۱}^{\eta} \left(\frac{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha} f_j(t)}{t^p} \right)^{k_j} dt. \tag{۱۹.۲}$$

۵.۲ عملگر $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z)$

این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\mathscr{I}_{p,\eta}^{m,k} : \mathscr{A}_p(n)^\eta \longrightarrow \mathscr{A}_p(n),$$

$$\mathscr{I}_{p,\eta}^{m,k}(f_۱, \dots, f_\eta) = \mathscr{G}_{p,\eta,m,k}.$$

$$\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z) = \int_۰^z pt^{p-۱} \prod_{j=۱}^{\eta} \left(\frac{\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha} f_j(t)\right)'}{pt^{p-۱}} \right)^{k_j} dt. \tag{۲۰.۲}$$

نتیجه ۱.۵.۲.

i) برای $\eta = ۱$ و $m_۱ = m$ و $k_۱ = k$ و $f_۱ = f$ عملگرهای انتگرال فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$\mathscr{F}_{p,m,k}(z) = \int_۰^z pt^{p-۱} \left(\frac{D_{\lambda,l,p}^{m,\alpha} f(t)}{t^p} \right)^k dt,$$

$$\mathscr{G}_{p,m,k}(z) = \int_۰^z pt^{p-۱} \left(\frac{\left(D_{\lambda,l,p}^{m,\alpha} f(t)\right)'}{t^{p-۱}} \right)^k dt.$$

ii) برای $\alpha = ۰$ و $\lambda = ۱$ و $l = ۰$ عملگرهای زیر را داریم :

$$\mathscr{F}_{p,n,m,k}(z) = \int_۰^z pt^{p-۱} \left(\frac{D^{m_۱} f_۱(t)}{t^p} \right)^{k_۱} \dots \left(\frac{D^{m_n} f_n(t)}{t^p} \right)^{k_n} dt,$$

$$\mathscr{G}_{p,n,m,k}(z) = \int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{(D^{m_1}f_1(t))'}{t^{p-1}}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{(D^{m_n}f_n(t))'}{t^{p-1}}\right)^{k_n}dt.$$

که توسط سالتیک [۱۲] مورد بررسی قرار گرفته است.

iii) با شرط $m_1 = \dots = m_n = 0$، عملگر انتگرال‌ها به صورت زیر تبدیل می‌شوند .

$$\mathscr{F}_p(z) = \int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{f_1(t)}{t^p}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{f_n(t)}{t^p}\right)^{k_n}dt,$$

$$\mathscr{G}_p(z) = \int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{f_1'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{f_n'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{k_n}dt.$$

در می آیند، که توسط فارسین [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

۱.۵.۲ شرایط کافی برای عملگر $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)$

قضیه ۲.۵.۲. *فرض کنید $m = (m_1,\dots,m_\eta)$ که $\eta \in N$ و $K = (k_1,\dots,k_\eta) \in R_+^\eta$، همچنین، b را عدد مختلطی ناصفر در نظر بگیرید، $b \in \mathbb{C}-\{0\}$، اگر $\delta_i \geq 0$ و $0 \leq \beta_j < p$ و برای $1 \leq j \leq n$،*

$$f_j \in \mathscr{US}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(\delta_j,\beta_j,b),$$

با شرط $0 \leq p+\sum_{j=1}^n K_j(\beta_j-p) < p$، عملگر انتگرال $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}$، در رده‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\tau,b)$، قرار می‌گیرد، که در آن $\tau = p+\sum_{j=1}^n K_j(\beta_j-p)$.

برهان. با استفاده از تعریف عملگر $\mathscr{F}$، مشاهده می‌شود که $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z) \in \mathscr{A}_p(n)$.
از طرف دیگر، می‌توان بررسی کرد که

$$(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z))' = pz^{p-1}\prod_{j=1}^{\eta}\left(\frac{D^{m,\alpha}_{\lambda,l,p}f_j(z)}{z^p}\right)^{k_j}.$$

با مشتق‌گیری لگاریتمی از رابطه‌ی فوق، و ضرب رابطه در z به دست می‌آید .

$$\frac{z(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z))''}{(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z))'} = (p-1)+\sum_{j=1}^{\eta}K_j\left(\frac{z\left(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p}f_j(t)\right)'}{D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p}f_j(t)}-p\right),$$

---

[۱۲] Saltik

[۱۳] Farsin

یا معادل آن

$$1+\frac{z\left(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)\right)''}{\left(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)\right)'}-p=\sum_{j=1}^{\eta}K_j\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)}-p\right), \tag{۲۱.۲}$$

با ضرب رابطه(۲۱.۲) در $\frac{1}{b}$ داریم .

$$\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)\right)''}{\left(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)\right)'}-p\right)=\sum_{j=1}^{\eta}K_j\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)}-p\right),$$

یا متناظرا

$$p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)\right)''}{\left(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)\right)'}-p\right)=\sum_{j=1}^{\eta}K_j\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)}-p\right)\right)+p-p\sum_{j=1}^{\eta}K_j.$$

چون $f_j\in\mathscr{U}\mathcal{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m_j,p,n}(\delta_j,\beta_j,b)$، که $(1\leq j\leq\eta)$ لذا داریم،

$$\mathscr{R}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}(z)\right)''}{\left(\mathscr{F}_{p,n,m,k}(z)\right)'}-p\right)\right\}=$$
$$\sum_{j=1}^{\eta}K_j\mathscr{R}\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)}-p\right)\right\}+p-p\sum_{j=1}^{\eta}K_j.$$

$$>\sum_{j=1}^{\eta}K_j\delta_j\left|\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)}-p\right)\right|+p+\sum_{j=1}^{\eta}K_j\left(\beta_j-p\right). \tag{۲۲.۲}$$

چون

$$\sum_{j=1}^{\eta}K_j\delta_j\left|\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)\right)'}{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)}-p\right)\right|>0$$

پس عملگر انتگرال $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}$ در رده‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\tau,b)$ قرار می‌گیرد که $\tau=p+\sum_{j=1}^{\eta}K_j\left(\beta_j-p\right)$.
$\square$

با قراردادن $\delta_1=\delta$, $\beta_1=\beta$, $k_1=k$, $m_1=m$, $\eta=1$ و $f_1=f$ در قضیه‌ی (۲.۵.۲)به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۳.۵.۲. *فرض کنیم $m\in\mathbb{N}$، $k>0$ همچنین فرض کنیم $f\in\mathscr{U}\mathcal{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}(\delta,\beta,b)$ و $b\in\mathbb{C}-\{0\}$, $\delta\geq0$, $0\leq\beta<p$ است. اگر $0\leq p+k(\beta-p)<p$ ، بنابراین عملگر انتگرالی $\mathscr{F}_{p,m,k}$ که بوسیله‌ی*

$$\mathscr{F}_{p,m,k}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{D_{\lambda,l,p}^{m,\alpha}f(t)}{t^p}\right)^k dt,$$

تعریف می‌شود، در رده‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\mu, b)$ می‌باشد، که $\mu = p + k(\beta - p)$ ،
با قرار دادن $m = ۰$ ، $p = n = ۱$ در نتیجه‌ی (۳.۵.۲) به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۴.۵.۲. فرض کنیم $۰ \le \beta < ۱$ ، $\delta \ge ۰$ ، $b \in \mathbb{C} - \{۰\}$ ، $K > ۰$ و $f \in \mathcal{S}(\delta, \beta, b)$.
در صورتی‌که داشته باشیم $۰ \le ۱ + k(\beta - ۱) < ۱$ ، بنابراین، عملگر انتگرالی $\mathscr{F}_k(z) = \int_۰^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^k dt$ محدب مرتبه‌ی مختلط b و نوع $p = ۱ + k(\beta - ۱)$ است؛ یعنی $\mathscr{F}_k \in \mathscr{C}(p, b)$.
با قرار دادن $p = n = ۱$ ، $m_j = ۰\ (۱ \le j \le \eta)$ و $b = ۱$ در قضیه‌ی (۲.۵.۲) به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۵.۵.۲. فرض کنیم $\eta \in \mathbb{N}$ ، $K = (k_۱, \ldots, k_\eta) \in \mathbb{R}_+^\eta$ ، $۰ \le \beta_j < ۱$ و $f_j \in \mathcal{SD}(\delta_j, \beta_j)$ برای $۱ \le j \le \eta$ ، اگر $۰ \le ۱ + \sum_{j=۱}^{\eta} k_j(\beta_j - ۱) < ۱$ ، آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{F}(z) = \int_۰^z \left(\frac{f_۱(t)}{t}^{k_۱}\right) \ldots \left(\frac{f_n(t)}{t}^{k_n}\right) dt$ در مجموعه‌ی $\mathscr{C}(\sigma)$ قرار می‌گیرد، که $\sigma = ۱ + \sum_{j=۱}^{\eta} k_j(\beta_j - ۱)$.

قضیه ۶.۵.۲. فرض کنیم $\eta \in \mathbb{N}, m = (m_۱, \ldots, m_\eta) \in \mathbb{N}_۰^\eta$ و $k = (k_۱, \ldots, k_\eta) \in \mathbb{R}_+^\eta$.
همچنین فرض کنیم $۰ \le \beta_j < p$ ، $|\theta| < \frac{\pi}{۲}$ و $f_j \in \mathcal{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m_j,p,n}(\beta_j, \theta)$ برای $۱ \le j \le \eta$. اگر $۰ \le ۱ + \sum_{j=۱}^{\eta} k_j(\beta_j - p) < p$ ، آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}$ ، که با

$$\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z) = \int_۰^z pt^{p-۱} \prod_{j=۱}^{\eta} \left(\frac{\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha} f_j(t)\right)'}{pt^{p-۱}} \right)^{k_j} dt,$$

تعریف شده است، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\tau, \theta)$ می‌باشد، که $\tau = p + \sum_{j=۱}^{\eta} k_j(\beta_j - p)$

برهان. از (۱۷.۲) و (۱۸.۲) و (۲۱.۲) نتیجه‌ی مطلوب را به دست می‌آوریم. $\square$

در قضیه‌ی (۶.۵.۲)، قرار می‌دهیم . $\beta_۱ = \beta$ ، $k_۱ = k$ ، $\eta = ۱$ ، $m_۱ = m$ و $f_۱ = f$. به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۷.۵.۲. فرض کنیم $m \in \mathbb{N}_۰$ ، $K > ۰$ است. همچنین فرض کنیم $|\theta| < \frac{\pi}{۲}, ۰ \le \beta < p$ ، و $f \in \mathcal{S}_{\alpha,\lambda,l}^{m,p,n}(\beta, \theta)$ ، اگر $۰ \le p + k(\beta - p) < p$ ، آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{F}_{p,m,k}$ که با

$$\mathscr{F}_{p,m,k}(z) = \int_۰^z pt^{p-۱} \left(\frac{D_{\lambda,l,p}^{m,\alpha} f(t)}{t^p} \right)^k dt,$$

تعریف شده است، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\mu, \theta)$ می‌باشد که $\mu = p + k(\beta - p)$.

با قرار دادن $m = ۰$ ، $p = n = ۱$ در قضیه‌ی (۶.۵.۲) نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۸.۵.۲. فرض کنید $\circ \leq \beta < 1$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, $k > \circ$ و $f \in \mathcal{S}_{\beta}^{\theta}$. اگر $\circ \leq 1 + k(\beta - 1) < 1$ ، آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{F}_k$ که با

$$\mathscr{F}_k(z) = \int_{\circ}^{z} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^k dt, \tag{۲۳.۲}$$

تعریف شده است، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}_P^{\theta}$ می‌باشد که $p = 1 + k(\beta - 1)$.

با قرار دادن $p = n = 1$ و $m_j = \circ \ (1 \leq j \leq \eta)$ در قضیه (۶.۵.۲) نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۹.۵.۲. فرض کنیم $\circ \leq \beta_j < 1$, $k = (k_1, \ldots, k_\eta) \in \mathbb{R}_+^{\eta}$, $\eta \in \mathbb{N}$ و برای $1 \leq j \leq \eta$ ، $f_j \in \hat{S}_{\beta_j}^{\theta}$ $(|\theta| < \frac{\pi}{2})$. اگر $\circ \leq 1 + \sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j - 1) < 1$ ، آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{F}$ که با

$$\mathscr{F}(z) = \int_{\circ}^{z} \left(\frac{f_1(t)}{t}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{f_n(t)}{t}\right)^{k_n} dt,$$

تعریف شده است، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}_\sigma$ می‌باشد، که $\sigma = 1 + \sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j - 1)$.

قضیه ۱۰.۵.۲. فرض کنیم $m = (m_1, \ldots, m_\eta) \in \mathbb{N}_\circ^{\eta}$, $\eta \in \mathbb{N}$ و $k = (k_1, \ldots, k_\eta) \in \mathbb{R}_+^{\eta}$ است. همچنین فرض کنیم $\delta_j \geq \circ$, $b \in \mathbb{C} - \{\circ\}$ و $\circ \leq \beta_j < p$ برای $1 \leq j \leq \eta$. اگر برای $1 \leq j \leq \eta$ ، داشته باشیم،

$$\left|\frac{z(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha})' f_j(t)}{D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha} f_j(t)} - p\right| > -\frac{p + \sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j - p)}{(\frac{1}{|b|}) \sum_{j=1}^{\eta} k_j \delta_j}, \tag{۲۴.۲}$$

آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}$ ، که با

$$\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z) = \int_{\circ}^{z} pt^{p-1} \prod_{j=1}^{\eta} \frac{\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha} f_j(t)\right)^{k_j}}{pt^{p-1}} dt,$$

تعریف شده است، محدب مقداری p از مرتبه‌ی مختلط b ، $(b \in \mathbb{C} - \{\circ\})$ می‌باشد، که

$$\mathscr{F}_{p,\eta,m,k} \in \mathscr{C}^{p,n}(b).$$

برهان. از (۲۱.۲) و (۲۴.۲) نتیجه می‌گیریم که عملگر انتگرالی $\mathscr{F}_{p,\eta,m,k}$ محدب p - مقداری از مرتبه‌ی مختلط b می‌باشد. □

۲.۵.۲ شرایط کافی برای عملگر $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}$

قضیه ۱۱.۵.۲. فرض کنیم $m = (m_1, \ldots, m_\eta) \in \mathbb{N}_\circ^{\eta}$, $\eta \in \mathbb{N}$ و $k = (k_1, \ldots, k_\eta) \in \mathbb{R}_+^{\eta}$. همچنین فرض کنیم $\circ \leq \beta_j < p$, $\delta_j \geq \circ$, $b \in \mathbb{C} - \{\circ\}$ و $f_j \in \mathscr{U}\mathscr{C}_{\alpha,\lambda,l}^{m_j,p,n}(\delta_j, \beta_j, b)$

برای $1 \leq j \leq \eta$ *است. اگر* $0 \leq p+\sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j-p) < p$ *، آن‌گاه، عملگر انتگرالی* $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}$ *، که با*

$$\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z) \;=\; \int_{0}^{z} pt^{p-1}\prod_{j=1}^{\eta}\left(\frac{\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^{k_j}dt,$$

تعریف می‌شود، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\tau,b)$ *می‌باشد، که* $\tau = p+\sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j-p)$.

برهان. از تعریف می‌بینیم که $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z)$ عضو $\mathscr{A}_p(n)$ می‌باشد. به عبارت دیگر، به سادگی می‌توان بررسی کرد که

$$(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))' = pz^{p-1}\prod_{j=1}^{\eta}\left(\frac{\left(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(z)\right)'}{pz^{p-1}}\right)^{k_j}.$$

با مشتق گیری لگاریتمی از و ضرب کردن با $\frac{1}{b}$ به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{z(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))''}{(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))'} = (p-1)+\sum_{j=1}^{\eta}k_j\left(\frac{z\left(D_{p,\eta,m,k}\left(z\right)\right)''}{(D_{p,\eta,m,k}(z))'}-(p-1)\right),$$

یا به‌طورمعادل

$$1+\frac{z(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))''}{(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))'}-p = \sum_{j=1}^{\eta}k_j\left(\frac{z\left(D_{p,\eta,m,k}\left(z\right)\right)''}{(D_{p,\eta,m,k}(z))'}-(p-1)\right).$$

بنابراین، با ضرب کردن رابطه‌ی قبل در $\frac{1}{b}$، داریم

$$\frac{1}{b}\left(1+\frac{z(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))''}{(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))'}-p\right) = \sum_{j=1}^{\eta}k_j\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{p,\eta,m,k}(z)\right)''}{(D_{p,\eta,m,k}(z))'}-(p-1)\right),$$

یا به‌طورمعادل،

$$p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))''}{(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))'}-p\right) = \sum_{j=1}^{\eta}k_j\left(p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(D_{p,\eta,m,k}(z)\right)''}{(D_{p,\eta,m,k}(z))'}-p\right)\right)+p-p\sum_{j=1}^{\eta}k_j.$$

چون $f_j \in \mathscr{UC}_{\alpha,\lambda,l}^{m_j,p,n}(\delta_j,\beta_j,b)$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\mathscr{R}\left\{\,p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))''}{(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))'}-p\right)\right\} = \\ &\sum_{j=1}^{\eta}k_j\mathscr{R}\left\{\,p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))''}{(\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z))'}-p\right)\right\}+p-p\sum_{j=1}^{\eta}k_j > \\ &\sum_{j=1}^{\eta}k_j\delta_j\left|\frac{1}{b}\left\{\,1+\frac{z(D_{\lambda,l,p}^{m_j,\alpha}f_j(t))''}{(D_{\lambda,l,p}m_j,\alpha f_j(t))'}-p\right)\right\}+p+\sum_{j=1}^{\eta}k_j(\beta_j-p).\end{aligned} \tag{۲۵.۲}$$

چون

$$\sum_{j=1}^{\eta} k_j\delta_j \left|\frac{1}{b}\left(1+\frac{z(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p} f_j(t))''}{(D_{\lambda,l,p}m_j,\alpha f_j(t))'}-p\right)\right| > 0.$$

داریم. $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k} \in \mathscr{C}^{p,n}(\tau,b)$, که $\tau = p+\sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j-p)$. □

با قرار دادن $f_1 = f$ و $\eta = 1$, $m_1 = m$, $k_1 = k$, $\beta_1 = \beta$, $\delta_1 = \delta$ در قضیه‌ی (۱۱.۵.۲) به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۱۲.۵.۲. *فرض کنیم* $m \in \mathbb{N}_0$ و $k > 0$. *همچنین فرض کنیم* $b \in \mathbb{C}-\{0\}$ ، $0 \le \beta < p$, $\delta \ge 0$ ، و $f \in \mathscr{U}\mathscr{S}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(\delta,\beta,b)$. *اگر* $0 \le p+k(\beta-p) < p$ ، *آن‌گاه، عملگر انتگرالی* $\mathscr{G}_{p,m,k}$ ، *که با*

$$\mathscr{G}_{p,m,k}(z) = \int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p} f(t))'}{pt^{p-1}}\right)^k dt,$$

تعریف شده است، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\mu,b)$ *می‌باشد، که* $\mu = p+k(\beta-p)$.

با قرار دادن $p = n = 1$, $m = 0$ *نتایج زیر را داریم.*

نتیجه ۱۳.۵.۲. *فرض کنیم* $0 \le \beta < 1$, $\delta \ge 0$, $b \in \mathbb{C}-\{0\}$, $k > 0$ و $f \in \mathscr{C}(\delta,\beta,b)$ *است. اگر* $0 \le 1+k(\beta-1) < 1$ ، *آن‌گاه، عملگر انتگرالی* $\mathscr{G}(z) = \int_0^z (f'(t))^k dt$ *محدب مرتبه‌ی مختلط* b ، *و نوع* $p = 1+k(\beta-1)$ *می‌باشد؛ یعنی* $\mathscr{G}(z) \in \mathscr{C}(p,b)$.

با قرار دادن $p = n = 1$, $m_j = 0$ $(1 \le j \le \eta)$ و $b = 1$ در قضیه (۱۱.۵.۲)نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۴.۵.۲. *فرض کنیم* $0 < \beta_j < 1$, $\delta_j \ge 0$ $k = (k_1,\cdots,k_\eta) \in \mathbb{R}^\eta_+$, $\eta \in \mathbb{N}$ *و برای* $1 \le j \le \eta$ ، *داشته باشیم* $f_j \in \mathscr{C}\mathscr{D}(\delta_j,\beta_j)$.

اگر $0 \le 1+\sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j-1) < 1$ ، *آن‌گاه، عملگر انتگرالی* $\mathscr{G}(z) = \int_0^z \left(f'_1(t)\right)^k_1 \ldots (f'_n(t))^k_n$ *در مجموعه‌ی* $\mathscr{C}(\sigma)$ *می‌باشد که،*

$$\sigma = 1+\sum_{j=1}^{\eta} k_j\sigma(\beta_j-1),$$

قضیه ۱۵.۵.۲. *فرض کنید برای* $\eta \in \mathbb{N}$ ، $m = (m_1,\ldots,m_\eta) \in \mathbb{N}_0^\eta$ و $k = (k_1,\ldots,k_\eta) \in \mathbb{R}^\eta_+$. *همچنین فرض کنیم* $0 \le \beta_j < p$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ *و برای* $1 \le j \le \eta$ ، *داشته باشیم* $f_j \in \mathscr{C}^{m_j,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(\beta_j,\theta)$. *اگر* $0 \le p+\sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j-p) < p$ ، *آن‌گاه، عملگر انتگرالی* $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}$ *که با*

$$\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z) = \int_0^z pt^{p-1}\prod_{j=1}^{\eta}\left(\frac{(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p} f_j(t))'}{pt^{p-1}}\right)^{k_j} dt,$$

تعریف می‌شود، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\tau,\theta)$ *می‌باشد که* $\tau = p+\sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j-p)$.

برهان. از (۲۵.۲) و (۱۸.۲) نتیجه مطلوب را به دست می‌آوریم. □

در قضیه‌ی (۱۵.۵.۲) $\beta_1 = \beta \ , \ k_1 = k \ , \ 1 = m \ , \ \eta = 1$ و $f_1 = f$ قرار می‌دهیم. به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۱۶.۵.۲. فرض کنید $\eta \in \mathbb{N}$ و $k > 0$. همچنین فرض کنیم $0 \leq \beta < p \ , \ |\theta| < \frac{\pi}{2}$ و $f \in \mathscr{C}^{m,p,n}_{\alpha,\lambda,l}(\beta,\theta)$. اگر $0 \leq p + k(\beta - p) < p$ ، آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{G}_{p,m,k}$ که با

$$\mathscr{G}_{p,m,k}(z) = \int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{\left(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p} f(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^k dt,$$

تعریف می‌شود، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{p,n}(\mu,\theta)$ می‌باشد که $\mu = p + k(\beta - p)$.

در نتیجه‌ی (۱۶.۵.۲) قرار می‌دهیم $p = n = 1$ و $m = 0$ به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۱۷.۵.۲. فرض کنیم $0 \leq \beta < 1 \ , \ |\theta| < \frac{\pi}{2} \ , \ k > 0$ و $f \in \mathscr{C}^{\theta}_{\beta}$.
اگر $0 \leq 1 + k(\beta - 1) < 1$ ، آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{G}_k$ که با $\mathscr{G}(z) = \int_0^z (f'(t))^k dt$ تعریف شده است، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{\theta}_{p}$ قرار دارد که $p = 1 + k(\beta - 1)$.

در قضیه‌ی (۱۵.۵.۲)، قرار می‌دهیم $p = n = 1$ و $(1 \leq j \leq \eta) \ \ m_j = 0$. به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

نتیجه ۱۸.۵.۲. فرض کنید برای $1 \leq j \leq \eta$ داشته باشیم $\eta \in \mathbb{N} \ , \ k = (k_1, \ldots, k_\eta) \in$ $\mathscr{R}^{\eta}_{+} \ , \ 0 \leq \beta_j < 1$ و $f_j \in \mathscr{C}^{\theta}_{\beta_j} \ (|\theta| < \frac{\pi}{2})$. اگر $0 \leq 1 + \sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j - 1) < 1$ آن‌گاه، عملگر انتگرالی $\mathscr{G}$ که با $\mathscr{G}(z) = \int_0^z \left(f_1'(t) \ldots f_n'(t)\right)^{k_n} dt$ تعریف شده، در مجموعه‌ی $\mathscr{C}^{\theta}_{\sigma}$ می‌باشد که
$\sigma = 1 + \sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j - 1)$.

قضیه ۱۹.۵.۲. فرض کنیم $m = (m_1, \ldots, m_\eta) \in \mathbb{N}^{\eta}_{0} \ , \ \eta \in \mathbb{N}$ و $k = (k_1, \ldots, k_\eta) \in \mathbb{R}^{\eta}_{+}$ و برای $1 \leq j \leq \eta$ ، $\delta_j \geq 0 \ , \ b \in \mathbb{C} - \{0\}$ و $0 \leq \beta_j < p$ می‌باشد. اگر

$$\left|1 + \frac{z(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p} f_j(t))''}{(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p} f_j(t))'} - p\right| > -\frac{p + \sum_{j=1}^{\eta} k_j(\beta_j - p)}{(\frac{1}{|b|})\sum_{j=1}^{\eta} k_j\delta_j}, \tag{۲۶.۲}$$

برای کل $1 \leq j \leq \eta$ باشد، بنابراین، عملگر انتگرالی $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}$ که با

$$\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}(z) = \int_0^z pt^{p-1}\prod_{j=1}^{\eta}\left(\frac{\left(D^{m_j,\alpha}_{\lambda,l,p} f_j(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^{k_j} dt,$$

تعریف شده، محدب مقداری p متعلق به مرتبه‌ی مختلط b می‌باشد که $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}$ عضو $\mathscr{C}^{p,n}$ است.

برهان. از (۲۶.۲) و (۲۵.۲) به آسانی متوجه می‌شویم که عملگر انتگرالی $\mathscr{G}_{p,\eta,m,k}$ محدب مقداری p متعلق به مرتبه‌ی مختلط b می‌باشد. □

۶.۲ عملگرهای لیبرا و رابرتسون

در این فصل عملگرهای لیبرا[۱۴] و رابرتسون[۱۵] برای کلاس توابع تک‌ارز مارپیچی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

نتایج این تحقیق نتیجه‌ی پژوهش‌های میلرتال و کوشی[۱۶] و وایت[۱۷] را مورد تاثیر قرار داده و تعمیم می‌دهد.[۳] و [۱۱]

یادآوری:

اگر $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \geq ۰\}$, و

$$C_\beta = \left\{f \mid f \in S\ ,\ \Re e \left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \beta\right\}$$

و

$$S^*_\beta = \left\{f \mid f \in S\ ,\ \Re e \left\{\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\} > \beta\right\}$$

و

$$\hat{S}^\alpha_\beta = \left\{f \in S | \Re e e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \beta \cos\alpha\ ,\ ۰ \leq \beta < ۱, \frac{-\pi}{۲} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۲}\right\}$$

همچنین $I^+ = \{n \mid n = ۱, ۲, ۳, \ldots\}$. تابع f تابعی ستاره‌گون، مرتبه‌ی β نسبت به مبدا می‌باشد، اگر و تنها اگر $f \in S^*_\beta$ ، و تابع f تابع α مارپیچی از مرتبه‌ی β است اگر و تنها اگر $f \in \hat{S}^\alpha_\beta$.

قضیه ۱.۶.۲. *فرض کنیم $K(z)$ تابع کویب[۱۸]، به صورت $z(۱ - z)^{-۲}$ باشد که تک ارز و ستاره‌گون نسبت به مبدا مختصات، برای $|z| < ۱$ باشد. از این رو تابع $S(z) = \frac{۲}{z}\int_۰^z k(t)dt$ نیز ،برای $|z| < ۱$ نسبت به مبدا مختصات، تک ارز و ستاره‌گون خواهد بود. مسیر انتگرال‌گیری محدود می‌باشد. اثبات در [۱۵] آمده است.*

قضیه ۲.۶.۲. *فرض کنیم $S(z)$, $K(z)$ به گونه تعریف شده در قضیه (۱.۶.۲) باشند. در اینصورت*

$$T(z) = [k(z) - s(z)]^{\frac{۱}{۲}}\ ,$$

---

[۱۴] Libera

[۱۵] Robertson

[۱۶] Causey and Milleretal

[۱۷] White

[۱۸] koebe

در D تک ارز و ستاره‌گون خواهد بود و در نامعادله‌ی زیر صدق خواهد کرد،

$$|T(z)| \leq \left(\frac{1-|z|}{|1-z|}\right) T(|z|) = [zk(z)]^{\frac{1}{2}} .$$

لیبرا[۹] ثابت کرد که قضیه‌ی (۱.۶.۲)

وقتی که $K(z)$ با هر $f \in S^*$ جایگزین شود همچنان درست خواهد بود. برناردی[۱۹] نتایج لیبرا را بطور گسترده ای تعمیم بخشید. محققین بسیاری، به مطالعه‌ی عملگرها به فرم

$$F_f(z) = \frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z t^{\gamma-1} f(t)dt, \tag{۲۷.۲}$$

پرداختند. در این رابطه، γ ثابتی حقیقی است و f ، متعلق به کلاس های توابعی از S است.

اخیرا عملگر (۲۷.۲)توسط کوشی و وایت[۲۰] و موکانو و رید[۲۱] بصورت جداگانه مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. [۳] و [۱۱]

قضیه ۳.۶.۲. قضیه‌ی [کوشی و وایت]

فرض کنید $(2\delta+\gamma) \leq min(2\alpha, 2c)$ و $f \in S^*$ و $g \in \bar{K}$ و $a, c \in I^+$ و $y, \delta \in \mathbb{R}^+$. در این‌صورت تابع F که بصورت زیر تعریف شده، متعلق به S^* است،

$$F(z) = \left[cz^{\alpha-c}\int_0^z t^{c-1}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^\delta \left(\frac{g(t)}{t}\right)^\gamma dt\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

قضیه ۴.۶.۲. [۳] فرض کنیم ξ , β^* , γ , ρ , δ ثابت‌های حقیقی باشند که در شرایط $\xi \geq 0$, $\xi+\delta = \beta^*+\gamma > 0$, $\beta^* > 0$ صدق می‌کنند، و

$$0 \leq \frac{p}{2} \leq \begin{cases} \delta, & \gamma \leq 0 \\ \min\left\{\delta\ ,\ \delta-\gamma+\frac{1}{2}\min(\frac{\beta^*}{\gamma}, \frac{\gamma}{\beta^*})\right\}, & \gamma > 0 \end{cases}$$

اگر $f \in S^*$ و $g \in \bar{K}$، آن‌گاه، تابع

$$f(z) = \left[\frac{\beta^*+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f^\xi(t) g^\rho(t) t^{\delta-\rho-1} dt\right]^{\frac{1}{\beta^*}},$$

---

[۱۹] Bernardi

[۲۰] White and Causy

[۲۱] Reade and Mocanu

متعلق به S^* خواهد بود.

اثبات قضیه‌ی (۳.۶.۲) به گفته‌ی کوشی و وایت، به نتیجه‌ای از ساکاگوچی وابسته است[۲۲] در حالی‌که اثبات قضیه‌ی (۴.۶.۲)
به یک لم وابسته است، که این امر از نتایج بررسی های میلر و زلوتکیوز[۲۳] و لواندوسکی[۲۴] می‌باشد. از آنجا که این لم نسبت به نتیجه ساکاگوچی قوی‌تر است، قضیه‌ی (۴.۶.۲) نسبت به قضیه‌ی کوشی و وایت (۳.۶.۲) عمومیت بیشتری دارد. در این فصل، ما باید تئوری‌های خاصی را ثابت کنیم که نسبت به قضیه‌های (۳.۶.۲) و (۴.۶.۲) قوی‌تر باشند. این کار، از طریق فرآیند تعمیم قضیه‌ی اصلی موکانو و رید[۲۵] و میلر[۲۶] صورت می‌گیرد. [۳]

قضیه ۵.۶.۲. *فرض کنیم $\phi(z) = 1 + \dots$, $\psi(z) = 1 + \dots$ توابع تعریف شده در D باشند که دارای خاصیت $\phi(z)\psi(z) \neq 0$ می‌باشند. فرض کنید $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ثابتهای حقیقی باشند، طوری‌که $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\delta \geq 0$, $\alpha + \delta > 0$. اگر ثابتی غیر منفی، مانند J وجود داشته باشد، که در نامعادلات*

$$\delta + Re\left\{\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right\} \geq max[0, J - \lambda(J)],$$

و

$$J \geq \gamma + Re\left\{\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}\right\}\ ,\ \beta + \gamma > J,$$

صدق کند، طوری‌که $\lambda(0) = 0$، و $\lambda(J) = \frac{1}{2}max\left[\frac{(\beta+\gamma-J)}{J}, \frac{j}{(\beta+\gamma-J)}\right]$. و اگر $f \in S^*$، آن‌گاه، تابعی به صورت

$$F(z) = \left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\psi(z)}\int_0^z f^{\alpha}(t)\phi(t)t^{\delta-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

وجود خواهد داشت که متعلق به S^* است. تعمیم این قضایا، به نتیجه‌ی زیر از جک وابسته است[۲۷]

Sakaguchi[۲۲]

Zotkiewiez and Miller[۲۳]

Lewandowski[۲۴]

Reade and Mocanu[۲۵]

Miller[۲۶]

Jack[۲۷]

که توسط سافریگ[۲۸] نیز بیان گردید.

لم ۶.۶.۲ (لم جک). *اگر $w(\circ)=\circ$ و w به ازای $|z|\leq r<۱$, تحلیلی باشد، و $|w(z_۱)|=\max_{|z|=r}|w(z)|$ ، آن‌گاه،*

$$z_۱w'(z_۱)=kw(z_۱)\ ,\ k\geq ۱$$

روش های عمومی سازی قضیه (۱.۶.۲) در [۳] و [۱۱] بیان شده است. ما باید تعمیم قضیه‌ی (۲.۶.۲) را به شکل مشابه مورد بررسی قرار دهیم. ممکن است به دلیل اینکه به‌کارگیری نتایج ساکاگوچی ساده نیست، تعمیم قضیه‌ی (۲.۶.۲) صورت نپذیرفته است. با این‌حال، لم جک برای استفاده در شرایط مختلف به اندازه کافی ساده و قوی می‌باشد.

۷.۲ قضایای اساسی

تعمیم قضایای (۱.۶.۲) و (۳.۶.۲)و (۴.۶.۲) به صورت زیر است .

نتیجه ۱.۷.۲. *برای ساده نویسی فرمول های ریاضی، از تساوی زیر در ادامه مطالب استفاده می‌کنیم .*

$$S(\alpha,\beta_n)=\hat{S}^{\alpha}_{\beta_n}$$

قضیه ۲.۷.۲. *فرض کنید* $(f_\circ=f,\beta_\circ=\beta)$, $n=\circ,۱,۲,\dots$, $f_n\in S(\alpha,\beta_n)$, $\circ\leq\beta_n<۱$, $\frac{-\pi}{۲}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{۲}$ و

$$a,b,\lambda_n\in\mathbb{R}^+\ ,\ \left\{-b\beta+\sum_{n=۱}^{M}\lambda_n(۱-\beta_n)\right\}\cos\alpha\leq min\left\{Rec\ ,\ a\cos\alpha\right\}.$$

آنگاه تابع

$$F(z)=\left[\left(\frac{c+be^{i\alpha}}{z^{c-ae^{i\alpha}}}\right)\int_\circ^z\ t^{c-۱}[f(t)]^{be^{i\alpha}}\left\{\prod_{n=۱}^{M}\left(\frac{f_n(t)}{t}\right)^{\lambda}_{n}e^{i\alpha}\right\}\,dt\right]^{\left(\frac{e^{-i\alpha}}{a+b}\right)}\qquad(۲۸.۲)$$

متعلق است به

$$.S(\alpha,\frac{a+b\beta-\sum_{n=۱}^{M}\lambda_n(۱-\beta_n)}{a+b}),$$

در (۲۸.۲) همه‌ی توان‌ها، توان‌های اصلی می‌باشند.

---

[۲۸] Suffridge

برهان. می‌توانیم بنویسیم

$$G(t) = t^{c-۱}\,[f(t)]^{be^{i\alpha}}\left\{\prod_{n=۱}^{M}(\frac{f_n(t)}{t})^{\lambda_n e^{i\alpha}}\right\} \tag{۲۹.۲}$$

$$e^{i\alpha}\frac{zF'(z)}{F(z)} = (\frac{m\cos\alpha}{a+b}) + i\sin\alpha + (\frac{۱+w(z)}{۱-w(z)})(\frac{a+b-m}{a+b})\cos\alpha, \tag{۳۰.۲}$$

که در آن $m = b\beta + a - \sum_{n=۱}^{M}\lambda_n(۱-\beta_n)$. از این رو با توجه به رابطه‌ی (۲۸.۲)، از طریق مشتق‌گیری داریم .

$$z^{c-ae^{i\alpha}-۱}[F(z)]^{(a+b)e^{i\alpha}}\left\{(c-ae^{i\alpha}) + (a+b)e^{i\alpha}\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\} = (c+be^{i\alpha})G(z). \tag{۳۱.۲}$$

با استفاده از روابط (۳۰.۲) و (۳۱.۲) به فرم زیر می‌رسیم .

$$\begin{gathered} c-ae^{i\alpha}-۱+(a+b)e^{i\alpha}\frac{zF'(z)}{F(z)} + \frac{zw'(z)}{۱-w(z)} + \\ \frac{(۲a\cos\alpha - ۲m\cos\alpha - c + be^{-i\alpha})zw'(z)}{(c+be^{i\alpha}) + [۲a\cos\alpha - ۲m\cos\alpha - c + be^{-i\alpha})w(z)]} = \\ c-۱-\sum_{n=۱}^{M}\lambda_n e^{i\alpha} + be^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)} + \sum_{n=۱}^{M}\frac{\lambda_n e^{i\alpha}zf_n'(z)}{f_n(z)}. \end{gathered}$$

بنابراین،

$$bRe\left\{\frac{ze^{i\alpha}f'(z)}{f(z)}\right\} = -a\cos\alpha + (a+b)Re\left\{\frac{e^{i\alpha}zF'(z)}{F(z)}\right\} + \tag{۳۲.۲}$$

$$+\,Re\left\{\frac{۲(a+b-m)\cos\alpha zw'(z)}{(۱-w(z))\{c+be^{i\alpha}+w(z)[۲a\cos\alpha - ۲m\cos\alpha - c + be^{-i\alpha}]}\right\} +$$

$$+\sum_{n=۱}^{M}\lambda_n\cos\alpha - \sum_{n=۱}^{M}\lambda_n Re\left\{\frac{e^{i\alpha}zf_n'(z)}{f_n(z)}\right\}.$$

واضح است که $F(z)$ در D تحلیلی است و دارای یک صفر ساده در مبدا می باشد. بنابراین، بدون از دست دادن کلیت مساله، می‌توانیم فرض کنیم که $w(z)$ که توسط $f(z)$ در (۳۰.۲) تعریف شده، در D تحلیلی است. همچنین، می‌توان نتیجه گرفت که $w(۰) = ۰$. بنابراین، اگر نشان دهیم که در D ، $|w(z)| < ۱$. آن‌گاه، نتیجه می‌گیریم که $F(z)$ مارپیچی‌شکل از مرتبه‌ی $(\frac{m}{a+b})$ می‌باشد، هرگاه $۰ \le \frac{m}{a+b} < ۱$.

فرض کنید نقطه‌ی z_1 در D وجود دارد، طوری‌که، $|w(z_1)| = 1$. آن‌گاه، با استفاده از لم جک داریم .

$$z_1 w(z_1) = k w'(z_1) \quad , \quad k \geq 1.$$

برای این مقدار از $z = z_1$ می‌توان فهمید که عبارت (۳۲.۲) به فرم زیر درمی‌آید .

$$bRe\left\{\frac{z_1 f'(z_1)e^{i\alpha}}{f(z_1)} - \beta\cos\alpha\right\} \leq$$

$$\frac{-k(a+b-m)(Rec - a\cos\alpha + m\cos\alpha)\cos\alpha}{|c + be^{i\alpha} + w(z)\{2a\cos\alpha - 2m\cos\alpha - c + be^{-i\alpha}\}|^2} \leq 0,$$

اگر $Rec \geq (a-m)\cos\alpha$, $a+b-m \geq 0$.

اما این نتیجه با $f \in S(\alpha, \beta)$ در تناقض می‌باشد. بنابراین باید داشته باشیم .

$$|w(z)| < 1 \quad (z \in D)$$

و این به معنی اثبات قضیه می‌باشد. □

برخی نتایج قضیه‌ی (۲.۷.۲) به‌صورت زیر است .

نتیجه ۳.۷.۲. *فرض کنید* $\lambda_1 = \gamma$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_m = 0$ که $m \geq 2$ ، همچنین $c+b=c$, $a+b=\beta^*$, $\alpha = 0$, $b=\delta$ ، *آن‌گاه،* $f_1 = g \in S^*_{\frac{1}{2}\beta_1} (= k_0)$, $f \in S_0$. *بنابراین، با استفاده از قضیه‌ی* (۲.۷.۲) *داریم .*

$$F(z) = \left[\frac{c}{z^{c-\beta^*}}\int_0^z t^{c-1}(\frac{f(t)}{t})^{\delta}(\frac{g(t)}{t})^{\gamma}dt\right]^{\frac{1}{\beta^*}} \in S^*\left(0, \frac{2\beta - \gamma - 2\delta}{2\beta^*}\right),$$

برای $min(Rec, a) \geq \delta + \frac{\gamma}{2}$.

نتیجه‌ی (۳.۷.۲)، نسبت به قضیه‌ی (۳.۶.۲) عمومی‌تر و دقیق‌تر می‌باشد.

نتیجه ۴.۷.۲. *فرض کنید.* $M = 1$, $\alpha = 0 = \beta$, $a+b=\beta^*$, $\gamma = c-a$, $\rho = \lambda_1$, $b = \xi_1$, $c \in \mathbb{R}^+$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $f_1 = g$, $c+b = \xi+\delta = \beta^*+\gamma$.
آن‌گاه،با استفاده از قضیه‌ی (۲.۶.۲) *داریم.*
اگر $\gamma > 0$ ، *داریم* $F \in S^*(0, \frac{2\beta^*-2\xi-\rho}{2\beta^*})$ ، $0 \leq \frac{\rho}{2} \leq min(\delta, \delta-\gamma)$.
و اگر $\gamma \leq 0$ ، *داریم* $0 \leq \frac{\rho}{2} \leq \delta$.

نتیجه ۵.۷.۲. *اگر داشته باشیم* $M = 1$, $\alpha = 0$, $a+b=\beta^*$, $\gamma = c-a$, $\lambda_1 = \rho$, $b = \xi$ *و* $f, g \in k_{\beta=0} \subset S^*_{\frac{a}{2}}$, $c \in \mathbb{R}$, $\beta = \frac{1}{2} = \beta_1$, $f_1 = g$, $c+b = \xi+\delta = \beta^*+\gamma$ ، *آن‌گاه،* $F \in S^*_{\frac{2\beta^*-2\xi-\rho}{2\beta^*}}$ ، *که* F *تابع تعریف‌شده در قضیه‌ی* (۲.۷.۲) *می‌باشد، هرگاه،*

$$-\xi \leq \rho \leq min(2\delta+\xi, 2\delta+\xi-2\gamma).$$

نتیجه‌ی (۵.۷.۲)، تعمیم قضیه‌ی[۶] از [۳]می‌باشدیعنی ، $F \in S^*_0$، در صورتی‌که یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم.

۱. $0 \le \rho \le min\{2\delta+\xi, 2\delta+\xi-2\gamma+\frac{1}{2}min(\frac{\beta^*}{\gamma},\frac{\gamma\gamma}{\beta^*})$ اگر $\gamma > 0$

۲. $0 \le \rho \le 2\delta+\xi$ اگر $\gamma < 0$

نتیجه ۶.۷.۲. *اگر داشته باشیم.* $b=0=\alpha\ ,\ a=1\ ,\ c=1=M\ ,\ f_1 \in S^*_{\frac{1}{2}} = S(0,\frac{1}{2}) \subseteq k_0$ *آن‌گاه، با استفاده از قضیه‌ی (۲.۷.۲)، داریم .*

$$F(z)=\int_0^z (\frac{f(t)}{t})^{\lambda_1}\,dt \in S(0, 1-\frac{\lambda_1}{2})\ ,\qquad \frac{\lambda_1}{2}\le 1. \tag{33.2}$$

عبارت (۳۳.۲)، بهبودی برای نتیجه‌ی مارکس - رایت[۲۹] و نیز نتیجه موکانو و رید[۳۰]به حساب می‌آید.

نتیجه ۷.۷.۲. *اگر* $b>0\ ,\ a=\lambda_n=0$ *آن‌گاه،*

$$F(z)=\left[\frac{c+be^{i\alpha}}{z^c}\int_0^z t^{c-1}[f(t)]^{be^{i\alpha}}\,dt\right]^{\frac{1}{be^{i\alpha}}} \in S(\alpha,\beta),\quad f\in S(\alpha,\beta).$$

$min(\Re c, 0) > -b\beta$ *علاوه بر این، اگر* $\alpha = 0 = \beta$ *، آن‌گاه،* $f \in S^*$ *به این معنی است که* $F \in S^*$ *به ازای* $Rec > 0$ *می‌باشد. هرگاه c حقیقی باشد، این نتیجه بر یافته‌های سای[۳۱] منطبق است.*

نتیجه ۸.۷.۲. *اگر* $a = 0 = \lambda_n$ *، آن‌گاه، تابع F تعریف شده در نتیجه‌ی (۷.۷.۲) تعمیمی از تابع βمحدب ، α مارپیچی است. که تعمیمی از تابع α محدب ، با توجه به گفته موکانو[۳۲]، می‌باشد.* [۱۲]

یک روش تقریبا متفاوت، که برای اثبات قضیه‌ی (۱.۵.۲) استفاده شد، به ما اجازه می دهد که قضیه‌ی (۷.۷.۲) را به صورت زیر تعمیم دهیم.

---

۲۹ Merkes-Wright

۳۰ Reade and Mocanu

۳۱ Singh

۳۲ Mocanu

قضیه ۹.۷.۲. فرض کنیم $\psi(z) = ۱ + \dots$ و $\phi(z) = ۱ + \dots$ در D تحلیلی باشند و $\phi(z)\psi(z) \neq ۰$ باشد و فرض کنیم $Re\gamma \geq ۰\ ,\ Re(\gamma - \delta) = \alpha - \beta\ ,\ \beta > ۰\ ,\ \alpha \geq ۰$ و $f \in S^*$ باشد. آنگاه $F \in S^*_{m_۰}$ به ازای $m_۰$ های خاص،
می‌باشد بطوریکه ،

$$F(z) = \left[(\frac{\beta + \gamma}{z^{\gamma}\psi(z)}) \int_۰^z f^{\alpha}(t)\phi(t)t^{\delta - ۱}\, dt \right]^{\frac{۱}{\beta}} = z + \dots$$

و

$$۰ \leq m_۰ < ۱$$

علاوه بر این اگر

$$m = max_{z\in D}\frac{۱}{\beta}\left\{Re(\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)})\right\} + m_۰$$

آنگاه m در نامعادله زیر صدق می‌کند.

$$\alpha + m\beta - \beta - Re\left\{\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right\}[|\gamma + \beta| + |\beta - ۲m\beta - \gamma|]^۲ \leq ۲\beta(۱ - m)(m\beta + Re\{\gamma\})$$

(۳۴.۲)

همچنین اگر $G(z) = F(z)\psi^{\frac{۱}{\beta}}(z)$ آنگاه $G \in S^*_m$ که در آن m بیشترین مقدار بدست آمده از رابطه (۳۴.۲) می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $G(z) = F(z)\psi^{\frac{۱}{\beta}}(z)$ و $۰ \leq m < ۱$, $\frac{zG'(z)}{G(z)} = \frac{۱+(۱-۲m)w(z)}{۱-w(z)}$ آنگاه $w(z)$ در U تحلیلی است و $w(۰) = ۰$ پس از ساده کردن،داریم.

$$\alpha Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} = Re(\gamma - \delta) + m\beta + (۱ - m)Re\left\{\frac{۱ + w(z)}{۱ - w(z)}\right\}\beta$$
$$+Re\left\{\frac{۲\beta(۱ - m)zw'(z)}{(۱ - w(z))(\gamma + \beta) + (\beta - ۲m\beta - \gamma)w(z)}\right\} - Re\left\{\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right\}.$$

اکنون اگر شرایط $|w(z)| < ۱$ برای تمام z های عضو D ممکن نباشد، آنگاه یک $z_۱ \in D$ وجود دارد بطوریکه $|w(z_۱)| = ۱$ از این رو با استفاده از لم جک داریم. $z_۱w'(z_۱) = kw(z_۱)\ ,\ k \geq ۱$
برای یک چنین zای داریم .

$$\alpha Re\left\{\frac{z_۱f'(z_۱)}{f(z_۱)}\right\} \leq Re\gamma - \delta - Re\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} + m\beta - \frac{۲f(۱ - m)((m\beta + Re(\gamma))}{|\gamma + \beta| + |(\beta - ۲m\beta - \gamma)|^۲},$$

(۳۵.۲)

نامعادله‌ی آخر با $f \in S^*$ در تناقض است اگرچه رابطه‌ی (۳۴.۲) برقرار است. بنابراین در D باید داشته باشیم $|w(z)| < ۱$. و این قضیه برای $G \in S_m^*$ اثبات می‌شود، و نیز به معنی $F \in S_{m_۰}^*$ می‌باشد. در ادامه، حالتی خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد.

(A') فرض کنیم $I_m(\gamma - \delta) = ۰$، آن‌گاه، $\gamma - \delta = \alpha - \beta$ در این‌حالت (۳۴.۲) یک جواب ساده خواهد داشت. این امکان وجود دارد که

i) $\beta - ۲m\beta - \gamma \geq ۰$،

ii) $\beta - ۲m\beta - \gamma \leq ۰$.

برای حالت i، بایستی m در رابطه‌ی

$$m\beta + \gamma \geq ۲\beta \left\{\alpha - m\beta - \beta - Re(\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)})\right\}(۱-m),$$

صدق کند.

در حالی‌که در حالت ii، باید m در نامعادله‌ی

$$\beta(۱-m) \geq ۲(\gamma + m\beta)\left[\alpha - \beta - m\beta - Re\left\{\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right\}\right],$$

صدق کند. □

توابع دیگری که توسط عملگرهای انتگرالی تعریف می‌شوند.

قضیه ۱۰.۷.۲. *[لیبرا] فرض کنیم f ستاره‌ای شکل باشد. $F(z) = \frac{۱+c}{z^c}\int_۰^z t^{c-۱}f(t)dt$، آن‌گاه، $F \in S_m^*$ که در آن m در نامعادله‌ی*

$$m[|۱+c| + |۱+-c-۲m|]^۲ \leq ۲(۱-m)(m + Re\{c\}),$$

صدق می‌کند، و $۰ \leq m \leq ۱$.

برهان. یک محاسبه‌ی ساده نشان می‌دهد،

$$\left[c + \frac{zF'(z)}{F(z)}F(z) = (۱+c)f(z)\right], \tag{۳۶.۲}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}F(z) = (۱-m)\left(\frac{۱+w(z)}{۱-w(z)}\right) + m\,; \quad ۰ \leq m < ۱ \tag{۳۷.۲}$$

آن‌گاه، از (۳۶.۲) و (۳۷.۲) می‌توان نتیجه گرفت،

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = m + (1-m)(\frac{1+w(z)}{1-w(z)}) + \frac{2(1-m)zw'(z)}{[1-w(z)][(1+c)+(1-c-2m)w(z)]}, \tag{۳۸.۲}$$

از (۳۷.۲) می‌توان نتیجه گرفت که $w(0)=0$ و $w(z)$، در D تحلیلی است اگر $|w(z)|<1$ در D ممکن نباشد، در این‌صورت یک $z_1 \in D$ وجود دارد طوری‌که $|w(z_1)|=1$. و با استفاده از لم جک،

$$z_1 w'(z_1) = kw(z_1),$$

به ازای $k \geq 1$. بنابراین در $z=z_1$ با توجه به عبارت (۳۸.۲) داریم،

$$\begin{aligned} Re\left\{\frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)}\right\} &= m + \frac{2(1-m)KRe\{(w(z_1)-1)((1+\bar{c})+(1-\bar{c}-2m)\bar{w}(z_1))\}}{|(1-w(z_1))|^2|(1+c)+(1-c-2m)w(z)|^2} \\ &= m - \frac{2k(1-m)(m+c_1)}{|(1+c)+(1-c-2m)w(z_1)|^2} \ ; \ c_1 = Re\{c\} \\ &\leq m - \frac{2(1-m)(m+c_1)}{|(1+c)+(1-c-2m)w(z_1)|^2} \ ; \ c_1 \geq -m \\ &\leq m - \frac{2(1-m)(m+c_1)}{(|1+c|+|1-c-2m|^2} \ ; \ c_1 \geq -m \end{aligned}$$

اما، عبارت سمت راست، کوچکتر مساوی صفر است. بنابراین، به تناقضی با $f \in S^*_\circ$ می‌رسیم. بنابراین، باید داشته باشیم $|w(z)|<1$ ، و قضیه‌ی (۱۰.۷.۲) اثبات می‌شود. □

در نتیجه، اگر داشته باشیم $c=1$، آن‌گاه،

$$F(z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt,$$

و $f \in S^*$ تابعی ستاره‌گون از مرتبه‌ی m است، که m بیشترین مقدار مثبت می‌باشد، که در نامعادله‌ی

$$2\left[\frac{\sqrt{17}-3}{4} - m\right]\left[m + \frac{\sqrt{17}+3}{4}\right] \geq 0,$$

صدق می کند. بنابراین، باید داشته باشیم $m=\frac{\sqrt{17}-3}{4}$. بنابراین، نتیجه‌ی میلر مکانو و رید[۳۳] را به‌دست آوردیم، که بهبودی برای قضیه‌ی لیبرا به حساب می‌آید.

---

[۳۳] $Miller, MocanuandReade$

به‌طور مشابه، اگر c عددی حقیقی باشد، طوری‌که $c+m \geq ۰$ ، و m بیشترین مقدار مثبتی باشد که در نامعادله‌ی

$$m \leq \frac{۲(۱-m)(m+c)}{\{|۱+c|+|c+۲m-۱|\}^{۲}},$$

صدق می‌کند. آن‌گاه، با توجه به قضیه‌ی (۱۰.۷.۲) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $f \in S^*$ ، تابع

$$F(z) = \frac{(۱+c)}{(z^c)} \int_{۰}^{z} t^{c-۱} f(t)dt,$$

نیز عضو S^*_m می‌باشد. می‌توان فهمید که $m \geq \frac{۱-c}{۲}$. و بنابراین باید داشته باشیم

$$m = \frac{\{-(۲c+۱)+\sqrt{(۲c-۱)^{۲}+۸(۱+c)}\}}{۴},$$

که این نتیجه‌ای دیگر از میلر مکانو و رید می‌باشد، که با روش خود به‌دست آوردیم.

قضیه ۱۱.۷.۲. *اگر* $\alpha \geq ۰$, $f \in S^*$ *و* $۰ \leq \beta \leq ۱$, $F(z) = [z^{\beta-۱} \int_{۰}^{z} [\frac{(f(t))}{t}]^{\alpha} dt]^{\frac{۱}{\beta}}$ ، *آن‌گاه،* $F \in S^*_m$ *طوری‌که،* m *در نامعادله‌ی*

$$(\alpha-\beta+m\beta)[۱+|۲\beta-۲m\beta-۱|]^{۲} \leq ۲\beta(۱-m)[۱-\beta(۱-m)],$$

صدق می‌کند.

برهان. می‌توان نوشت

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = (۱-m)(\frac{۱+w(z)}{۱-w(z)})+m = \frac{۱+(۱-۲m)w(z)}{۱-w(z)}, \ ۰ \leq m < ۱.$$

آن‌گاه، خواهیم داشت،

$$\alpha\Re\frac{zf'(z)}{f(z)} = \alpha-\beta+m\beta+\beta(۱-m)Re\frac{۱+w(z)}{۱-w(z)}$$

$$+Re\frac{۲\beta zw'(z)(۱-m)}{[۱-w(z)][۱+(۲\beta-۲m\beta-۱)w(z)]}, \tag{۳۹.۲}$$

واضح است که $w(۰)=۰$, $w(z)$ در D تحلیلی است و اگر در D , $|w(z)|<۱$ نباشد، آن‌گاه، $z_۱ \in D$ وجود دارد طوری‌که $|w(z_۱)|=۱$، و با استفاده از لم جک داریم $z_۱w'(z_۱) = kw(z_۱)$; $k \geq ۱$. آن‌گاه، به ازای این مقدار $z_۱$ داریم.

$$\alpha Re\frac{z_۱f'(z_۱)}{f(z_۱)} \leq \alpha-\beta+m\beta-\frac{۲\beta(۱-m)(۱+m\beta-\beta)}{۱+|۲\beta-۲m\beta-۱|^{۲}},$$

این عبارت با $f \in S^*$ در تناقض است. بنابراین، باید داشته باشیم $|w(z)|<۱$ کامل است. □

این نتیجه در [۲۰] اثبات شده است.

قضیه ۱۲.۷.۲. *اگر $f \in S^*$ ، آن‌گاه،*

$$F(z) = \int_{\circ}^{z} [\frac{f(t)}{t}]^{\alpha}\, dt \in S_m^* \quad \circ \le \alpha \le \text{۱},$$

و

$$m = \frac{(\text{۱} - \text{۲}\alpha) + \sqrt{\text{۴}\alpha^{\text{۲}} - \text{۴}\alpha + \text{۹}}}{\text{۴}}.$$

برهان. با انتخاب $\beta = \text{۱}$ در قضیه‌ی (۱۱.۷.۲) خواهیم داشت، $F \in S_m^*$. اگر m در نامعادله‌ی

$$\alpha - \text{۱} + m - \frac{\text{۲}m(\text{۱} - m)}{[\text{۱} + |\text{۱} - \text{۲}m|]^{\text{۲}}} \le \circ, \tag{۴۰.۲}$$

صدق کند دو حالت وجود دارد .

(i) $m \ge \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$،

یا

(ii) $m \le \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$.

اگر $\circ \le \alpha \le \text{۱}$ ، آن‌گاه، عبارت (۴۰.۲)، همواره با شرط $m \le \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ برقرار است. صدق می‌کند . بنابراین $m \ge \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$. در این حالت نتیجه می‌گیریم که اگر

$$x_{\text{۱}} = \frac{(\text{۱} - \text{۲}\alpha) - \sqrt{\text{۴}\alpha^{\text{۲}} - \text{۴}\alpha + \text{۹}}}{\text{۴}} \le m \le \frac{(\text{۱} - \text{۲}\alpha) + \sqrt{\text{۴}\alpha^{\text{۲}} - \text{۴}\alpha + \text{۹}}}{\text{۴}} = x_{\text{۲}},$$

نامعادله‌ی (۴۰.۲) همواره درست است. همچنین، $x_{\text{۱}} \le \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \le x_{\text{۲}}$ یک عبارت درست است. بنابراین،

$$m = [\frac{(\text{۱} - \text{۲}\alpha) + \sqrt{\text{۴}\alpha^{\text{۲}} - \text{۴}\alpha + \text{۹}}}{\text{۴}}],$$

اگر $\alpha > \text{۱}$، با ادامه ی همین روش نتایج سیلویا[۳۴] محقق خواهد شد. □

قضیه ۱۳.۷.۲. *اگر داشته باشیم* $\frac{-\pi}{\text{۲}} \le \lambda \le \frac{\pi}{\text{۲}}$, $f(z)f'(z) \setminus z \neq \circ$, $f \in S$ *و*

$$Re\{(e^{i\alpha} - \alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha(\text{۱} + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\} > \beta \cos\lambda \ , \ \circ \le \lambda \le \text{۱} \ , \ -\infty \le \alpha \le +\infty$$

آن‌گاه، f تابع λ-مارپیچی از مرتبه‌ی $m > \beta$ خواهد بود. یعنی اگر $\alpha \ge \text{۱}$ آنگاه

$$f \in S(\lambda, m).$$

و اگر $\alpha \le \text{۱}$ آنگاه $f \in S(\lambda, \beta)$ که در آن m بیشترین عدد حقیقی می‌باشد که در نامساوی زیر صدق می‌کند،

[۳۴] Silvia

$$(m-\beta)\left\{۱+[۱-۴m(۱-m)\cos^{۲}\lambda]^{\frac{۱}{۲}}\right\}\leq ۲m\alpha(۱-m)\cos\lambda,$$

در حالت خاص، اگر قرار دهیم $\beta=۰=\lambda$ آن‌گاه، توابع محدب کلاس α، که توسط مکانو تعریف شده‌اند تولید می‌شوند. اگر $\alpha\geq ۱$، آن‌گاه، این توابع از مرتبه‌ی $m=\frac{\sqrt{۸\alpha+\alpha^{۲}}-\alpha}{۴}$ این امر تا حدودی نتایج میلر، مکانو و رید [۳۵] را بهبود می‌بخشند. ما از اثبات این نکته، به‌جهت سادگی، صرف نظر می‌کنیم.

توجه داریم که $f(z)=z\in S^{*}$ و نیز بدیهی است که،

$$S(z)=\frac{۲}{z}\int_{۰}^{z}tdt=z\in S^{*}.$$

و $T(z)=[z-\frac{۲}{z}\int_{۰}^{z}tdt]^{۲}\equiv ۰$ یک تابع غیرتک‌ارز می‌باشد. بنابراین، هیچ راه‌حل دقیق برای قضیه‌ی (۲.۶.۲) به‌دست نمی‌آید.

قضیه ۱۴.۷.۲. *اگر $f\in C_{۰}$، آن‌گاه،*

$$T(z)=۲\left[f(z)-\frac{۱}{z}\int_{۰}^{z}f(t)dt\right]\in S_{m}^{*}.$$

که در آن $m=(\frac{\sqrt{۱۷}-۳}{۴})$.

برهان. اثبات این قضیه، مشابه اثبات قضیه‌ی (۱۰.۷.۲) است. فقط با در نظر گرفتن این فرض که

$$۰\leq m\leq\frac{(۱-m)}{۲(۱+m)}.$$

و یا با بکارگیری قضیه‌ی (۱۰.۷.۲)، اثبات انجام می‌گیرد. این نتیجه، بهبودی برای نتایج لیبرا به حساب می‌آید. □

قضیه ۱۵.۷.۲. *اگر $f\in C_{۰}$، آن‌گاه،*

$$F(z)=(\frac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{z})\left[\int_{۰}^{z}f(te^{i\alpha})dt-\int_{۰}^{z}f(te^{i\beta})dt\right]\in S_{m}^{*}.$$

به ازای $\alpha\neq\beta$ و $\alpha,\beta\in[۰,۲\pi)$، طوری‌که $m=\frac{(\sqrt{۱۷}-۳)}{۴}$. اثبات این قضیه، نیاز به لم زیر دارد.

لم ۱۶.۷.۲. *اگر $f\in C_{\delta}$، آن‌گاه، $\alpha,\beta\in[۰,۲\pi)$, $\alpha\neq\beta$. تابع*

$$F_{۰}(z)=\left\{\frac{f(e^{i\alpha}z)-f(ze^{i\beta})}{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}\right\}\in S_{\delta}^{*}$$

[۳۵] *Miller, Mocanu and Reade*

اثبات این لم، در [۲] آورده شده است. لم (۱۶.۷.۲) و قضیه‌ی (۱۰.۷.۲) بیان می‌کند، که $F(z)$ تعریف شده در قضیه‌ی (۱۱.۷.۲) است، به S_m^* متعلق است، که m در نامعادله‌ی $m \leq \frac{(۱-m)}{۲(۱+m)}$، صدق می کند. این عبارت، قضیه‌ی قبل را اثبات می‌کند. به‌طور مشابه، لم (۱۶.۷.۲) و قضیه‌ی (۱۰.۷.۲) بیان می‌کند که $F(z)$ تعریف شده با قضیه‌ی (۲.۷.۲)، به S_m^* تعلق دارد، که در آن m با نامعادله‌ی قضیه‌ی (۱۰.۷.۲) تعریف می‌شود.

مراجع

[1] *L.A.Aksentev and I.R.Nezhimetdinov, Sufficient conditions for univalence of certain integral transforms, Tr.Semin. Karaev.Zadacham. Kazan,18(1982),3-11 (in Russian); English translation in :Amer. Math.Soc.Transl.,136(2)(1987),1-9*

[2] *S. BAJPAI. and K Mehrok, On Univalence of certain analytic functions associated with starlike,convex and close-to-convex functions, Indian J. Pur.e ag.d App Math. 4 (1973).66-72.*

[3] *W.M.Causey, . and W.L.White, Starlikeness of certain functions withintegral representations,J. Math. Anal. Appl. 64 (1978) 458-466.*

[4] *P.N.Chichra, Regular functions f(z) for which zf'(z) is a $\alpha-spiral-like$, proceeding of the American Mathematical society, Vol.49,pp,(1975)151-160.*

[5] *A.W.Goodman, on uniformly convex functions, Annales polonici Mathemstici,*

Vvol.56, No.1, pp.(1991)87-92 .

[6] *A.W. Goodman, Univalent functions, I-II,Mariner Publ.Co.,Tampa Florida,(1983)53.*

[7] *Y.J.Kim , E.P.Merkes . on an Integral of powers of a spirallike function, KYuagpook Math.12(1972)249-253.*

[8] *Y.C.Kim And T.Sugawa, The Alexander transform of a spirallike function, J.Math.Anal.Appl.,325(1)(2007),608-611.*

[9] *R.J. Libera, Some Classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 755-758.*

[10] *O.Mayer,The functions Theory of an variable Complex, Bucureti,(1981),2.*

[11] *S.Miller,S. Mocanu, P.T. and Reade, Maxwell 0, Starlike integraloperators, Pacific J. Math. 79 (1978), 157-168.*

[12] *P.T Mocanu, Une propriet de convexit generalize dans la representation conforme, Mathematics (Cluj) ii (1969), 127-133.*

[13] *X.Oinghua And L.Sanya,Alexandre Transformations,vol.10,iss.1.art.17(2009)(1-14).*

[14] *H.Ozlem And S.Bulut,Convexity and spirallikeness conditions for two new General Integral Operators.Journal of mathematics volume 2.13.Article rp 841837 ,(2013)(1-8).*

[15] *MS. Robertson , An external problem for functions with positive real part , Mich.Math . J.4 (1964),327-335.*

[16] *M.S. Robertson, Univalent functions f(z) for which zf'(z) is spirallike, Michigan Math. J.16(1969) ,97-101.*

[17] *F. Rønning,On starlike functions associated with parabolic regions, Annales Universitatis Mariae CurieSkłodowska. A.Mathematica, vol. 45, pp. 117–122, 1991.*

[18] *G.Saltik, E.Deniz, and E.Kadioglu, Two new general p-valent integral operators, Mathematical and Comouter Modeling, Vol.52, No.9-10, pp.(2010)1605-1609.*

[19] *S. Shams, S. R. Kulkarni, and J. M. Jahangiri, Classes of uniformly starlike and convex functions, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 55, no. 53–56, pp.(2004) 2959–2961.*

[20] *S.Shyam, K.Bajpai,Spirallike Integral OPrators,internat.J.math.smath.sci. Vol.4No.2(1981)337-351.*

[21] *H.Silverman,Complex variables.(1975)12-14* .

[22] *A. Yoshikaw , on a subclass of spirallike functions. mem.Fac.sci.kyushu univ, A 25,(1971)271-79.*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بستار	Closure
پیوسته	Continuous
تابع	Function
تابعی	Functional
تام	Complete
حد	Limit
زیر مجموعه	Subset
صحیح	Integer
فضای متری	Metric Space
معین	definite
مثبت	Positive
مختلط	Complex
نمودار	Graph
تابع تک ارز	univalent function
تابع تحلیلی	Analytic function
تابع یک به یک	Injective function
تابع ستاره گون	Starlike function
تابع مارپیچ	Spirallike function

زیر رده .... Subclass

همبند ساده .... Simple Connected

عملگر انتگرال .... Integral operator

میدان .... Field

مشتق .... Derivative

مثبت .... Positive

مختلط .... Complex

معادله .... Equation

واحد .... Unit

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Closure .... بستار

Complete .... تام

Continuous .... پیوسته

Function .... تابع

Integer .... صحیح

Limit .... حد

Nonnegative .... نامنفی

Analytic function .... تابع تحلیلی

Complex .... مختلط

Derivative .... مشتق

Equation .... معادله

Field .... میدان

Integral operator .... عملگر انتگرال

Injective function .... تابع یک به یک

Positive .... مثبت

Simple Connected .... همبند ساده

Spirallike function .... تابع مارپیچ

Starlike function .... تابع ستاره گون

زیر رده .... Subclass

تابع تک ارز .... univalent function

واحد .... Unit

مثبت .... posititive

Aabstract

In this thesis, we express definitions and theorems related to class of spirallike functions also we study some Integral operators and determine conditions for the spirallkeness of these integral operators we explain conditions for convexity breafly.

keywords: Analytic Function , univalent Function , Starlike Functions , Spirallike Functions , Integral Operator

Shahrood University Of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in Pure Mathematics

The Integral Operator On The Spirallike Function

Supervisor

Dr Ahmad zireh

Advisor

Mr seyed Reza Musavi

by

Fatemeh Karimi

Feb 2013