دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی ، گرایش جبر**

**عنوان**

# توسیع‌هایی از حلقه‌های تمیز و بررسی خواص حلقه‌های تمیز

استاد راهنما

**دکتر ابراهیم هاشمی**

پژوهشگر

بی بی حنیفه اوزونی دوجی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: اوزونی دوجی نام: بی بی حنیفه

---

عنوان: توسیع‌هایی از حلقه‌های تمیز و بررسی خواص حلقه‌های تمیز

---

استاد راهنما: دکتر ابراهیم هاشمی

---

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: جبر

---

دانشگاه: شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۶۶

---

واژگان کلیدی: حلقه‌های تمیز، حلقه‌های ماتریس، عناصر کامل، حلقه‌های که شامل تعدادی عنصر کامل هستند

---


**چکیده**

ابتدا در این پایان‌نامه حلقه $f$- تمیز را تعریف می‌کنیم و سپس به بررسی خواص حلقه‌های $f$ - تمیز می‌پردازیم. فرض کنیم $C = \begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ یک حلقه موریتاکانتکس باشد. شرایطی را که تحت آن $C$ یک حلقه $f$ - تمیز باشد را بیان می‌کنیم. همچنین حلقه‌هایی که شامل تعدادی عنصر کامل هستند را تعریف می کنیم و ساختار این حلقه ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در ادامه نشان می‌دهیم که اگر حلقه $R$ شامل تعدادی عنصر کامل باشد، آن‌گاه $M_n(R)$ نیز چنین است. در آخر به معرفی حلقه‌های تمیز و تمیز یکتا می‌پردازیم و برخی خواص این حلقه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه، برگرفته از مقالات

[۱] و [۱۰] می باشد .

تقدیم به

مادر و

همسر عزیزم

# سپاس گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم ودانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره‌ی پرخاطره از تحصیلم را به پایان رسانده‌ام، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد فرهیخته و فرزانه، جناب آقای دکتر هاشمی که همواره راهنما و راه‌گشای من در اتمام این پایان‌نامه بوده است، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، زحمات مادر مهربانم را ارج می‌نهم که همواره در پستی و بلندی‌های زندگی، همراهم بوده و دعای خیرش بدرقه ی راهم بوده است و تشکر می‌کنم از همسر صبورم که همراه وپشتیبان من بوده است. همچنین از دوستان عزیزم خانم سمیه ممی زاده، خانم خدیجه پاسبان، خانم زهرا وزیری و خانم سمیه حیدری که مرا در این مهم یاری نمودند نهایت سپاسگزاری را دارم و برایشان آرزوی موفقیت می‌کنم.

بی بی حنیفه اوزونی دوجی

۱۳۹۲

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

## ۱.۱ مقدمه

حلقه‌های تمیز بوسیله نیکلسون [۱] [۱۱]، تعریف شد. علاوه بر او نویسنده‌های زیادی حلقه های تمیز را مورد بررسی قرار داده‌اند: از جمله کامیلو [۲]، اندرسون [۳]، یو [۴] و خورانا. [۵]

اندرسون و کامیلو در [۱] نشان دادند که حلقه چند جمله‌ای‌ها روی حلقه تعویض‌پذیر ناصفر تمیز نیست. همچنین چن در [۳] نشان داد که اگر حلقه‌های $A$ و $B$ شامل تعدادی عنصر کامل باشند، آن‌گاه حلقه موریتاکانتکس $T$ نیز چنین است.

در این پایان‌نامه در فصل اول نمادها، تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم ابتدا حلقه‌های $f$ ـ تمیز را تعریف می‌کنیم و سپس به بررسی خواص حلقه‌های $f$ ـ تمیز می‌پردازیم و شرایطی که تحت آن حلقه موریتاکانتکس $T = \begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ یک حلقه $f$ـ تمیز باشد را بیان می‌کنیم و همچنین نشان می‌دهیم اگر حلقه $R$ یک حلقه $f$ ـ تمیز باشد، آن‌گاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز $f$ ـ تمیز است. در ادامه به معرفی حلقه‌هایی که شامل تعدادی عنصر کامل هستند می‌پردازیم و همچنین نشان می‌دهیم که اگر حلقه $R$ شامل تعدادی عنصر کامل باشد، آن‌گاه $M_n(R)$ نیز چنین است.

در فصل سوم به معرفی حلقه‌های تمیز می‌پردازیم و مثال‌هایی از آن بیان می‌کنیم. همچنین معادل‌هایی برای حلقه تمیز ارائه می‌دهیم. در ادامه روش‌های دیگری که می‌توان ویژگی‌های حلقه‌های تمیز را بررسی نمود، ارائه می‌دهیم. در آخرحلقه‌های تمیز یکتا را معرفی می‌کنیم و قضایا و گزاره‌هایی در این مورد بیان می‌کنیم. مطالب ارائه شده در این پایان‌نامه، برگرفته از مقالات [۱] و [۱۰] می باشد.

---

[۱] Nicholson
[۲] Comillo
[۳] Anderson
[۴] Yu
[۵] Khurana

## ۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این پایان نامه $R$ نمایانگر یک حلقه‌ی غیر صفر شرکت‌پذیر و یکدار است مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود و از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$U(R)$: مجموعه‌ی یکه‌های حلقه‌ی $R$،

$N(R)$: مجموعه‌ی غیر یکه‌های حلقه‌ی $R$،

$T_n(R)$: حلقه ماتریس‌های بالامثلثی $n \times n$ روی $R$،

$M_n(R)$: حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی $R$،

$GL_n(R)$: گروه خطی عمومی $n-$بعدی روی $R$،

$J(R)$: رادیکال جیکبسون حلقه $R$،

$K(R)$ : مجموعه عناصر کامل حلقه $R$،

$Ann(X)$ : صفرساز$X$،

$R[X]$ : حلقه چند جمله‌ای‌ها،

$R[[X]]$: حلقه‌های سریهای توانی،

$PID$: دامنه ایده‌آل اصلی،

$Spec(R)$: مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه $R$،

$Max(R)$: مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی $R$،

$Min(R)$: مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه‌ی $R$.

$Id(R)$: مجموعه خودتوان‌های حلقه $R$ ،

$R^{n\times 1}$ : مجموعه $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in R \right\}$،

$R^{1\times n}$: مجموعه $\left\{ \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in R \right\}$،

برای هر $\alpha, \beta \in U(R)$ و $a, b \in R$، قرار می‌دهیم:

$$B_{۱۲}(a)=\begin{pmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix},\quad B_{۲۱}(a)=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{pmatrix},\quad [\alpha,\beta]=\begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & \beta \end{pmatrix}.$$

بوضوح برای هر $\alpha_۱,\alpha_۲,\beta_۱,\beta_۲\in U(R)$، $x,y\in R$ و $۱\leq i,j\leq ۲$، رابطه‌های زیر برقرارند:

(۱) $B_{ij}(x)B_{ij}(y)=B_{ij}(x+y)$،

(۲) $B_{ij}(x)[\alpha_۱,\alpha_۲]=[\alpha_۱,\alpha_۲]B_{ij}(\alpha_i^{-۱}x\alpha_j)$،

(۳) $[\alpha_۱,\alpha_۲]B_{ij}(x)=B_{ij}(\alpha_i x\alpha_j^{-۱})[\alpha_۱,\alpha_۲]$،

(۴) $[\alpha_۱,\alpha_۲][\beta_۱,\beta_۲]=[\alpha_۱\beta_۱,\alpha_۲\beta_۲]$،

(۵) $[\alpha_۱,\alpha_۲]^{-۱}=[\alpha_۱^{-۱},\alpha_۲^{-۱}]$،

(۶) $B_{ij}^{-۱}(x)=B_{ij}(-x)$.

رابطه‌های فوق را رابطه های $\Delta$ می‌نامیم.

**تعریف ۱.۲.۱.** حلقه‌های $A$ و $B$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که ${}_AV_B$، $(A,B)$- دومدول و ${}_BW_A$، $(B,A)$- دومدول باشند و $\phi: W\otimes_A V\longrightarrow B$ و $\psi: V\otimes_B W\longrightarrow A$ هوموروفیسم‌های دومدولی باشند بطوری‌که $\psi(v\otimes w)v'=v\phi(w\otimes v'),\phi(w\otimes v)w'=w\psi(v\otimes w')$.

در این‌صورت $(A,B,V,W,\psi,\phi)$ را موریتاکانتکست می‌نامیم. فرض کنیم $T=\begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$.

عمل دوتایی ضرب روی $T$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & v' \\ w' & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+\psi(v\otimes w') & av'+vb' \\ wa'+bw' & \phi(w\otimes v')+bb' \end{pmatrix}.$$

می‌توان نشان داد که $T$ با دو عمل دوتایی جمع معمولی ماتریس‌ها و ضرب دوتایی فوق یک حلقه است.

$T$ را حلقه موریتاکانتکست می‌نامیم.

واضح است که کلاس حلقه‌های موریتاکانتکست شامل حلقه ماتریس‌های $۲\times ۲$ و حلقه ماتریس‌های مثلثی

است.

**تعریف ۲.۲.۱.** الف ) عنصر $a \in R$ را فون نیومن منظم می‌نامیم، هرگاه $a \in aRa$.

ب ) حلقه $R$ را فون نیومن منظم می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن فون نیومن منظم باشد.

**تعریف ۳.۲.۱.** الف ) عنصر $e$ از حلقه‌ی $R$ را خودتوان می‌نامیم، هرگاه $e^{2} = e$.

ب ) حلقه‌ی $R$ را بولی می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن خودتوان باشد.

ج ) خودتوان $e \in R$ را مرکزی می‌نامیم، هرگاه برای هر $r \in R$، $re = er$.

**تعریف ۴.۲.۱.** حلقه‌ی $R$ را تقلیل یافته می‌نامیم، هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد.

**تعریف ۵.۲.۱.** تمام ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$، با درایه‌هایی از حلقه $R$ را گروه خطی عمومی $n$ - بعدی روی $R$ می‌نامند و با نماد $GL_n(R)$ نمایش می‌دهند.

**تعریف ۶.۲.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی و یکدار باشد.

الف ) $0 \neq a \in R$ را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم، هرگاه $a$ یکه نباشد و اگر $a = xy$ باشد، آن‌گاه $x$ یا $y$ یکه باشد.

ب) $0 \neq p \in R$ را اول می‌نامیم، هرگاه $p$ یکه نباشد و اگر $p \mid xy$، آن‌گاه $p \mid x$ یا $p \mid y$.

پ ) گوییم دو عنصر $a$ و $b$ شریک هستند، هرگاه $a \mid b$ و $b \mid a$.

**تعریف ۷.۲.۱.** دامنه‌ی صحیح $R$ را یک دامنه تجزیه یکتا می‌نامیم و با علامت $UFD$ نمایش می‌دهیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف ) هرعنصر ناصفر غیر یکه $a$ از حلقه‌ی $R$ را بتوانیم به صورت $a = p_1 \ldots \ldots p_m$ بنویسیم، بطوری‌که $p_1, \ldots, p_m$ عناصری تحویل‌ناپذیر هستند.

ب ) اگر $p_1 \ldots p_m = q_1 \ldots q_n$، بطوری‌که $p_1, \ldots, p_m$ و $q_1, \ldots, q_n$ عناصری تحویل‌ناپذیر هستند، آن‌گاه $n = m$ باشد و $\delta \in S_n$ وجود داشته باشد بطوری‌که $q_i$ و $p_{\delta(i)}$ شریک باشند.

**تعریف ۱.۲.۸.** الف) فرض کنیم $R$ یک حلقه یکدار باشد. فرض کنیم $R[[x]]$ مجموعه تمام دنباله‌های $a_0 + a_1x + \ldots$ روی $R$ باشد. اعمال جمع و ضرب را روی آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(a_0 + a_1x + \ldots) + (b_0 + b_1x + \ldots) = ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots)$ و

$(a_0 + a_1x + \ldots)(b_0 + b_1x + \ldots) = (c_0 + c_1x + \ldots)$ بطوری‌که برای هر $k$، $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$. در نتیجه به سادگی می‌توان نشان داد $R[[x]]$ یک حلقه یکدار بوده و $(1, 0, \ldots)$ عضو خنثی ضربی آن است. آن را حلقه‌های سریهای توانی نامیده و عناصر $R[[x]]$ همان سریهای توانی روی $R$ هستند.

ب) فرض کنیم $R$ یک حلقه و $\delta$ یک درون‌ریختی روی $R$ باشد. حلقه سریهای توانی اریب را با $K = R[[x; \delta]]$ نمایش می‌دهیم. عناصر آن همانند عناصر سریهای توانی است. جمع و ضرب روی $K$ بطور طبیعی تعریف می‌شود، بطوری‌که برای هر $a \in R$، $xa = \delta(a)x$.

**تعریف ۱.۲.۹.** می‌گوییم که زیر مجموعه‌ی $S$ از حلقه جابجایی $R$ ضربی بسته است اگر

الف) $1 \in S$ و

ب) اگر $s_1, s_2 \in S$ ، آن‌گاه $s_1s_2 \in S$.

**تعریف ۱.۲.۱۰.** فرض کنیم $S$ زیرمجموعه‌ای ضربی بسته از حلقه جابجایی $R$ باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای $(b, t) \in R \times S$ و$(a, b)$

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : u(ta - sb) = 0.$$

در این‌صورت $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

رده هم‌ارزی شامل $(a, s) \in R \times S$ را با $a/s$ یا $\frac{a}{s}$ و مجموعه رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت $S^{-1}R$ تحت عمل‌های

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \text{و} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}$$

به ازای $a, b \in R$ و $s, t \in S$، حلقه‌ای جابجایی است. این حلقه جدید $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای $R$ نسبت به $S$ می‌نامیم.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** فرض کنیم $R$ حلقه‌ای جابجایی و $P$ ایده‌آلی اول از حلقه $R$ باشد. فرض کنیم $S := R \setminus P$. در این‌صورت حلقه $S^{-1}R$ را با $R_p$ نمایش می‌دهیم. $R_p$ را حلقه حاصل از موضعی سازی $R$ در $P$ می‌نامیم.

**قضیه ۱۲.۲.۱.** *اگر* $P \in Spec(R)$ *و* $P \cap S = \emptyset$، *آن‌گاه*

$P^e = \{\lambda \in S^{-1}R : \lambda = \dfrac{a}{s}, a \in P, s \in S\} \in Spec(S^{-1}R)$.

*برهان.* به [۱۲] قضیه ۳۲.۵ رجوع کنید. □

**گزاره ۱۳.۲.۱.** *فرض کنیم* $R$ *یک حلقه باشد و* $A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & c \end{pmatrix}$، *که* $A \in GL_2(R)$ *و* $\alpha \in U(R)$. *در این‌صورت عناصر* $d, e \in R$ *و* $\beta \in U(R)$ *وجود دارند بطوری‌که*

$$A = [\alpha, \beta] B_{21}(d) B_{12}(e),$$

*که در آن* $\beta = -b\alpha^{-1}a + c$، $d = \beta^{-1}b$ *و* $e = \alpha^{-1}a$.

*برهان.* ثابت می‌کنیم $x, y \in R$ وجود دارند که

$$B_{21}(x) \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & c \end{pmatrix} B_{12}(y) = [\alpha, \beta].$$

در واقع $x, y \in R$ باید در تساوی زیر صدق کنند:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha y + a \\ xa + b & (x\alpha + b)y + xa + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

پس $\alpha y + a = 0$ و $x\alpha + b = 0$. در نتیجه $y = -\alpha^{-1}a$، $x = -b\alpha^{-1}$ و $\beta = -b\alpha^{-1}a + c$. چون $B_{21}(x)AB_{12}(y)$ وارون‌پذیر است (وارون آن بصورت $B_{12}(-y)A^{-1}B_{21}(-x)$ می‌باشد.)، پس $[\alpha, \beta]$ وارون‌پذیر است. لذا $\beta \in U(R)$. پس

$$B_{21}(-b\alpha^{-1}) A B_{12}(-\alpha^{-1}a) = [\alpha, \beta].$$

با ضرب تساوی فوق از راست در $B_{۱۲}(\alpha^{-۱}a) = B^{-۱}_{۱۲}(-\alpha^{-۱}a)$ و از چپ در $B_{۲۱}(b\alpha^{-۱}) = B^{-۱}_{۲۱}(-b\alpha^{-۱})$، داریم:

$$A = B_{۲۱}(b\alpha^{-۱})[\alpha,\beta]B_{۱۲}(\alpha^{-۱}a).$$

ازبند (۲) روابط $\Delta$، داریم $B_{۲۱}(b\alpha^{-۱})[\alpha,\beta] = [\alpha,\beta]B_{۲۱}(\beta^{-۱}b)$. پس

$$A = [\alpha,\beta]B_{۲۱}(\beta^{-۱}b)B_{۱۲}(\alpha^{-۱}a).$$

□

**گزاره ۱.۲.۱۴.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد و $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \beta \end{pmatrix}$، که $A \in GL_۲(R)$ و $\beta \in U(R)$. در این‌صورت عناصر $d, e \in R$ و $\alpha \in U(R)$ وجود دارند بطوری‌که*

$$A = [\alpha,\beta]B_{۱۲}(d)B_{۲۱}(e),$$

*که $\alpha = a - b\beta^{-۱}c$، $d = \alpha^{-۱}b$ و $e = \beta^{-۱}c$.*

***برهان.*** مشابه گزاره‌ی قبل اثبات می شود. □

**تعریف ۱.۲.۱۵.** الف) حلقه‌ی $R$ را تجزیه پذیر می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل‌های $I_۱,\dots,I_n$ $(n > ۱)$ از $R$ موجود باشند بطوری‌که $R = I_۱ \oplus I_۲ \oplus \cdots \oplus I_n$.

ب) حلقه‌ای که تجزیه پذیر نباشد، تجزیه ناپذیر می‌نامیم.

**نتیجه ۱.۲.۱۶.** *حلقه‌ی $R$ تجزیه ناپذیر است، اگر و تنها اگر ۱ تنها خودتوان مرکزی غیرصفر حلقه $R$ باشد.*

***برهان.*** به [۲] نتیجه ۷.۷ رجوع کنید. □

**نتیجه ۱.۲.۱۷.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه و $I_۱,\dots,I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه $R$ باشند بطوری‌که برای هر $i \neq j$، $I_i + I_j = R$. در این‌صورت $\frac{R}{I_۱ \cap \ldots \cap I_n} \cong \prod_{i=۱}^{n} \frac{R}{I_i}$.*

**برهان.** به [۹] نتیجه ۲.۲۷ رجوع کنید. □

**قضیه ۱۸.۲.۱.** *فرض کنید $R$ یک حلقه جابجایی و یکدار بوده و $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ . در این‌صورت $f$ یک یکه در $R$ است، اگر و تنها اگر $a_0$ یک یکه در $R$ بوده و $a_1, \dots, a_n$ عناصر پوچ‌توانی از $R$ باشد.*

**برهان.** به [۹] رجوع کنید.

**تعریف ۱۹.۲.۱.** حلقه تعویض‌پذیر $R$ را موضعی می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل ماکسیمال منحصر بفرد داشته باشد؛ اگر $M$ ایده‌آل ماکسیمال منحصر بفرد $R$ باشد، آن‌گاه آن را به صورت $(R, M)$ نمایش می‌دهیم.

**قضیه ۲۰.۲.۱.** *هرگاه $R$ یک حلقه جابجایی و یکدارباشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند :*

(۱) *$R$ یک حلقه موضعی است.*

(۲) *تمام غیریکه‌های $R$ مشمول ایده‌آلی سره مانند $M$ هستند.*

(۳) *غیر یکه‌های $R$ یک ایده‌آل تشکیل می‌دهند.*

**برهان.** (۱) $\Longleftarrow$ (۲): هرگاه $a \in R$ یک غیریکه باشد، آن‌گاه $R \neq (a)$. بنابراین $(a)$ مشمول ایده‌آل ماکسیمال منحصربه فرد $M$ است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳): واضح است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) : می‌دانیم $N(R) = \cup_{m \in Max(R)} m \trianglelefteq R$. چون $1 \notin N(R)$، لذا $N(R)$ ایده‌آل سره‌ای از $R$ است و لذا ایده‌آل ماکسیمالی از $R$ مانند $\underline{n}$ وجود دارد که $N(R) \subseteq \underline{n}$. حال فرض کنیم $\underline{m}$ ایده‌آل ماکسیمال دلخواهی از $R$ باشد. در این‌صورت

$$\underline{m} \subseteq \cup_{m \in Max(R)} m \subseteq \underline{n}.$$

چون $\underline{m}$ ماکسیمال است، پس $\underline{m} = \underline{n}$. یعنی حلقه‌ی $R$ موضعی است. □

**لم ۲۱.۲.۱.** *فرض کنیم $R$ حلقه‌ای جابجایی باشد و $r \in R$. در این‌صورت $r \in J(R)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، $1 - ra$ در $R$ وارون‌پذیر باشد.*

***برهان.*** به [۱۲] لم ۱۷.۳ رجوع کنید. □

**تعریف ۲۲.۲.۱.** گوییم حلقه $R$ خاصیت برد پایدار یک دارد، هرگاه $aR + bR = R$ که $a, b \in R$، آن‌گاه $y \in R$ وجود داشته باشد بطوری‌که $a + by \in U(R)$.

**نتیجه ۲۳.۲.۱.** *اگر حلقه $R$ خاصیت برد پایدار یک داشته باشد، آن‌گاه برای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایدار یک دارد.*

***برهان.*** به [۵] نتیجه ۱.۱.۶ رجوع کنید. □

**لم ۲۴.۲.۱.** *فرض کنیم $R$ حلقه‌ای با برد پایدار یک باشد و $M$ یک $R$- مدول راست باشد. اگر $M$ توسط دو زیر مجموعه $\{a_۱, \ldots, a_n\}$ و $\{b_۱, \ldots, b_n\}$ تولید شود، آن‌گاه $U \in GL_n(R)$ وجود دارد بطوری‌که $(a_۱, \ldots, a_n) = (b_۱, \ldots, b_n)U$.*

***برهان.*** فرض کنیم $M$ یک $R$ - مدول راست باشد و $a_۱, a_۲, \cdots, a_n, b_۱, b_۲, \cdots, b_n \in M$. چون $a_۱R + a_۲R + \ldots + a_nR = b_۱R + b_۲R + \ldots + b_nR$، پس $(a_۱, \ldots, a_n)M_n(R) = (b_۱, \ldots, b_n)M_n(R)$. لذا ماتریس‌های $A$ و $B$ از $M_n(R)$ وجود دارند که $(a_۱, \ldots, a_n)A = (b_۱, \ldots, b_n)$ و $(a_۱, \ldots, a_n) = (b_۱, \ldots, b_n)B$. چون حلقه $R$ خاصیت برد پایدار یک دارد، پس بنا به نتیجه ۲۳.۲.۱، $M_n(R)$ نیز خاصیت برد پایدار یک دارد. از طرفی چون $BA + (I_n - BA) = I_n$، پس $C \in M_n(R)$ وجود دارد که $B + (I_n - BA)C = U \in GL_n(R)$. بنابراین

$$(b_۱, \ldots, b_n)U = (b_۱, \ldots, b_n)(B + (I_n - BA)C) = (a_۱, \ldots, a_n).$$

□

**لم ۲۵.۲.۱.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد و $x \in R$. اگر برای هر $\underline{m} \in Max(R)$، $\frac{x}{۱} \in R_{\underline{m}}$، $= ۰$، آن‌گاه $x = ۰$.*

**برهان.** فرض کنیم $\frac{x}{1} \in R_{\underline{m}}$ $= 0$. پس $r \in R - \underline{m}$ وجود دارد بطوری‌که $rx = 0$ و لذا $r \in Ann(x)$.
در نتیجه برای هر $\underline{m} \in Max(R)$، $(R - \underline{m}) \cap Ann(x) \neq \emptyset$. بنابراین برای هر $\underline{m} \in Max(R)$، $Ann(x) \nsubseteq \underline{m}$. لذا $Ann(x) = R$. در نتیجه $x = 0$. □

# فصل ۲

# حلقه‌های $f$ ـ تمیز و حلقه‌هایی که شامل تعداد زیادی عنصر کامل هستند

## ۱.۲ حلقه‌های $f$ ـ تمیز

*در این بخش ابتدا گزاره‌هایی از حلقه‌های $f$ ـ تمیز را بیان می‌کنیم.*

**تعریف ۱.۱.۲.** عنصر $x \in R$ را کامل می‌نامیم، هرگاه $s, t \in R$ وجود داشته باشند بطوری‌که $sxt = ۱$.
مجموعه عناصر کامل را با علامت $K(R)$ نمایش می‌دهیم.
واضح است که عناصر وارون‌پذیر یکطرفه و دوطرفه در $K(R)$ هستند.

**تعریف ۲.۱.۲.** الف ) عنصر $x \in R$ را $f$ـ تمیز می‌نامیم، هرگاه آن را بتوان به صورت حاصل جمعی از یک عنصر کامل و یک خودتوان نوشت.

ب ) حلقه‌ی $R$ را $f$ ـ تمیز می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن $f$ـ تمیز باشد.

**گزاره ۳.۱.۲.** (۱) *هر تصویر همریخت از یک حلقه‌ی $f$ ـ تمیز، $f$ ـ تمیز است.*

(۲) *حاصلضرب مستقیم $R = \prod R_i$ از حلقه‌های $\{R_i\}$ ، $f$ـ تمیز است، اگر و تنها اگر هر $R_i$ ، $f$ ـ تمیز باشد.*

***برهان.*** (۱) فرض کنیم $R$ یک حلقه‌ی $f$ ـ تمیز باشد و $\psi : R \longrightarrow \frac{R}{I}$ یک همریختی حلقه‌ای باشد.
چون $R$ حلقه $f$ ـ تمیز است، پس برای هر $r \in R$ داریم $r = e + w$ که $e$ یک عنصر خودتوان است
و $w \in K(R)$. لذا $s, t \in R$ وجود دارند بطوری‌که $swt = ۱$. بنابراین $r + I = e + w + I \in \frac{R}{I}$.
حال نشان می‌دهیم که $w + I$ یک عنصر کامل از $\frac{R}{I}$ است.

$$swt = ۱ \Longrightarrow (s + I)(w + I)(t + I) = swt + I = ۱ + I.$$

لذا $w + I$ یک عنصر کامل از $\frac{R}{I}$ است. در نتیجه $\frac{R}{I}$ نیز یک حلقه $f$ ـ تمیز است.

(۲) $\Longleftarrow$ فرض کنیم که هر $R_i$ یک حلقه $f$ ـ تمیز باشد. برای $x = (x_i) \in R$ و هر $i$ ، داریم $x_i = e_i + w_i$
که $e_i$ خودتوان و برای $s_i, t_i \in R$، داریم $s_i w_i t_i = ۱$. بنابراین $x = e + w$ که $e = (e_i) \in \prod R_i$

یک عنصر خودتوان است و $w=(w_i)\in K(\prod R_i)$ که $(s_i)(w_i)(t_i)=(1)\in\prod R_i$. در نتیجه $x$ عنصر $f$ ـ تمیز است.

$\Longleftarrow$ : فرض کنیم که $\prod R_i$ یک حلقه $f$ـ تمیز باشد. چون هر $R_i$ تصویر همریختی از $\prod R_i$ است ($\theta_k:\prod R_i\longrightarrow R_k$ با ضابطه $(x_i)\mapsto x_k$ همریختی حلقه‌ای است.)، پس بنا به بند (۱)، $R_i$ها نیز حلقه‌های $f$ـ تمیز هستند.

□

**تعریف ۴.۱.۲.** فرض کنیم $L$ یک ایده‌آل از حلقه $R$ باشد. گوییم خودتوان‌ها به پیمانه $L$ بالا برده می‌شوند [۱]، هرگاه برای هر $x\in R$، اگر $x-x^2\in L$، آن‌گاه خودتوان $e\in R$ وجود داشته باشد بطوری‌که $(e-x)\in L$.

**گزاره ۵.۱.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. اگر خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا برده شوند، آن‌گاه $R$ حلقه $f$ ـ تمیز است، اگر و تنها اگر $\overline{R}=\dfrac{R}{J(R)}$ حلقه $f$ـ تمیز باشد.*

***برهان.*** $\Longleftarrow$: فرض کنیم $R$ یک حلقه $f$ـ تمیز باشد. پس طبق گزاره‌ی ۳.۱.۲، $\overline{R}$ نیز حلقه $f$ ـ تمیز است.

$\Longrightarrow$: فرض کنیم که $\overline{R}$ حلقه $f$ ـ تمیز باشد. اگر $x\in R$، آن‌گاه $\overline{x}=\overline{e}+\overline{w}$ که $e^2-e\in J(R)$ و $\overline{swt}=\overline{1}$ و $s,t\in R$. چون خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا برده می‌شوند، پس خودتوان $e'$ از $R$ وجود دارد که $x=e'+w+r$ و $r\in J(R)$. چون $\overline{swt}=\overline{1}$، پس برای $h\in J(R)$ داریم $swt=1+h\in 1+J(R)\subseteq U(R)$. لذا $s_1,t_1\in R$ وجود دارند که $s_1wt_1=1$. بنابراین $s_1(w+r)t_1=1+s_1rt_1\in 1+J(R)\subseteq U(R)$. پس برای $u\in U(R)$ داریم $s_1(w+r)t_1u^{-1}=1$. بنابراین $w+r$ یک عنصر کامل از حلقه $R$ است. در نتیجه $x$ عنصر $f$ ـ تمیز است. □

**گزاره ۶.۱.۲.** *فرض کنیم $R$ حلقه‌ی $f$ ـ تمیز باشد. اگر خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا برده شوند، آن‌گاه برای هر $n\geq 1$، $\dfrac{R[x]}{<x^{n+1}>}$ نیز $f$ ـ تمیز است.*

---
[۱] Idempotents can be lifted modulo L

**برهان.** فرض کنیم که $R$ یک حلقه $f$ـ تمیز باشد. عنصر $\overline{x} = x + < x^{n+1} >$ در $\frac{R[x]}{< x^{n+1} >}$ را با نماد $u$ نشان می‌دهیم. پس $\frac{R[x]}{< x^{n+1} >} = R[u] = R + Ru + \ldots + Ru^n$ و $u^{n+1} = 0$. می‌توان به آسانی نشان داد که $J(R[u]) = J(R) + < u >$ که $< u >$ ایده‌آل تولید شده توسط $u$ از $R[u]$ است. لذا طبق بند (۱) گزاره‌ی ۳.۱.۲، $\frac{R}{J(R)} \simeq \frac{R[u]}{J(R[u])}$ نیز حلقه $f$ ـ تمیز است. حال ادعا می‌کنیم که خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R[u])$ بالا برده می‌شوند. فرض کنیم $f + J(R[u])$ یک خودتوان در $\frac{R[u]}{J(R[u])}$ باشد. پس $f = a_0 + a_1u + \ldots + a_nu^n$ که $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$. می‌دانیم $J(R[u]) = J(R) + < u >$. پس $(a_0 + J(R[u]))^2 = a_0^2 + J(R[u]) = a_0 + J(R[u])$ و لذا $a_0^2 - a_0 \in J(R)$. از طرفی چون خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا برده می‌شوند، پس $e = e^2 \in R \subseteq R[u]$ وجود دارد که $e - a_0 \in J(R) \subseteq J(R[u])$. پس بنا به گزاره‌ی ۵.۱.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

**گزاره ۷.۱.۲.** *فرض کنیم $\alpha$ یک درون ریختی از حلقه $R$ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *$R$ یک حلقه‌ی $f$ ـ تمیز است.*

(۲) *حلقه‌ی سریهای توانی $R[[x]]$، $f$ ـ تمیز است.*

(۳) *حلقه‌ی سریهای توانی اریب $R[[x, \alpha]]$، $f$ـ تمیز است.*

**برهان.** (۲) $\Longleftarrow$ (۱)، (۳) $\Longleftarrow$ (۱) واضح است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنیم $h = a_0 + a_1x + \ldots \in R[[x, \alpha]]$. بنا به فرض $a_0 = e_0 + u_0$ که $e_0^2 = e_0$ و $u_0 \in K(R)$. پس $s_0, t_0 \in R$ وجود دارند که $s_0u_0t_0 = 1$. قرار می‌دهیم $h' = h - e_0 = u_0 + a_1x + \ldots$. رابطه

$$u = (s_0 + 0 + \ldots)h'(t_o + 0 + \ldots) = 1 + s_0a_1\alpha(t_0)x + \ldots$$

نشان می‌دهد که $u \in U(R[[x; \alpha]])$. در نتیجه $h' \in K(R[[x; \alpha]])$ و $h = e_0 + h'$ که $e_0^2 = e_0 \in R[[x; \alpha]]$. بنابراین $h$ یک عنصر $f$ـ تمیز از حلقه $R[[x; \alpha]]$ است. در نتیجه $R[[x; \alpha]]$ حلقه $f$ ـ تمیز است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۲) : چون $R[[x]] = R[[x; 1_R]]$ است، لذا برهان مشابه (۱) $\Longrightarrow$ (۳) است. □

**گزاره ۸.۱.۲.** *اگر $R$ حلقه‌ی $f$ ـ تمیز باشد، آن‌گاه برای $n \geq 1$، $M_n(R)$ نیز $f$ ـ تمیز است.*

***برهان.*** فرض کنیم که $R$ حلقه $f$ ـ تمیز باشد. پس برای هر $x \in R$، داریم $x = e + w$ که $e^2 = e$ و $w \in K(R)$. لذا $s, t \in R$ وجود دارند که $swt = 1$.

فرض کنیم$k \geq 1$، و حلقه $M_k(R)$، $f$ ـ تمیز باشد. نشان می‌دهیم $M_{k+1}(R)$ نیز $f$ـ تمیز است.

فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{k+1}(R)$$

که

$$a_{11} \in R, a_{12} \in R^{1\times k}, a_{21} \in R^{k\times 1} \text{و} a_{22} \in M_k.$$

لذا $a_{11} = e + w$ که $e^2 = e$ و برای $s, t \in R$، داریم $swt = 1$. چون $a_{22} - a_{21}tsa_{12} \in M_k(R)$، پس بنا به فرض ماتریس خودتوان $E$ و ماتریس کامل $W$ وجود دارند که $a_{22} - a_{21}tsa_{12} = E + W$. لذا برای $S, T \in M_{k\times k}(R)$، داریم $SWT = I_k$. بنابراین

$$A = diag(e, E) + \begin{pmatrix} w & a_{12} \\ a_{21} & W + a_{21}tsa_{12} \end{pmatrix}$$

که $diag(e, E) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

واضح است که $diag(e, E)$ یک ماتریس خودتوان در $M_{k+1}(R)$ است.

از طرفی

$$P = \begin{pmatrix} s & 0 \\ -Sa_{21}ts & S \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} t & -tsa_{12}T \\ 0 & T \end{pmatrix} \in M_{k+1}(R)$$

وجود دارند که

$$P \begin{pmatrix} w & a_{12} \\ a_{21} & W + a_{21}ta_{12} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{k+1}$$

که نشان می‌دهد $\begin{pmatrix} w & a_{12} \\ a_{21} & W + a_{21}tsa_{12} \end{pmatrix}$ یک ماتریس کامل است. بنابراین $A$ یک عنصر $f$ ـ تمیز است.
در نتیجه $M_{k+1}(R)$، $f$ ـ تمیز است. □

**گزاره ۹.۱.۲.** *اگر $a \in R$ یک عنصر $f$ـ تمیز باشد، آن‌گاه برای هر $b \in R$، $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ در $M_2(R)$، $f$ - تمیز است.*

**برهان.** چون $a \in R$ یک عنصر $f$ـ تمیز است، پس $a = e + w$ که $e = e^2$ و برای $s, t \in R$، داریم $swt = 1$.

لذا

$$A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

که $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ یک عنصر خودتوان است. همچنین داریم:

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & -tsb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که نشان می‌دهد $\begin{pmatrix} w & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یک عنصر کامل است. بنابراین $A$ ، $f$ ـ تمیز است. □

**قضیه ۱۰.۱.۲.** *فرض کنیم $C = \begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ حلقه موریتاکانتکس باشد که $\psi, \varphi = 0$. در این‌صورت $C$ یک حلقه $f$ ـ تمیز است، اگر وتنها اگر $A$ و $B$ حلقه‌های $f$ـ تمیز باشند.*

**برهان.** $\Longleftarrow$: فرض کنیم $C$ یک حلقه‌ی $f$ـ تمیز باشد. فرض کنیم $I = \begin{pmatrix} 0 & V \\ W & B \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} A & V \\ W & 0 \end{pmatrix}$.
بوضوح $I$ و $J$ ایده‌آل‌هایی از حلقه $C$ هستند که $A \simeq \frac{C}{I}$، $B \simeq \frac{C}{J}$. چون $C$ حلقه $f$ ـ تمیز است، پس بنا به بند (۱) گزاره‌ی ۳.۱.۲، $\frac{C}{I}$ و $\frac{C}{J}$ نیز حلقه‌های $f$ ـ تمیز هستند. در نتیجه $A$ و $B$ نیز حلقه‌های $f$ ـ تمیز هستند.

$\Longrightarrow$: فرض کنیم که $A$ و $B$ حلقه‌های $f$ ـ تمیز باشند. پس برای هر $r = \begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix} \in C$، داریم $a = e_1 + u_1$ و $b = e_2 + u_2$، که $e_1, e_2 \in R$ خودتوان‌هایی ازحلقه $R$ هستند و $u_1, u_2 \in K(R)$. فرض کنیم که $s_1u_1t_1 = 1$ و $s_2u_2t_2 = 1$ که $s_1, t_1, s_2, t_2 \in R$. پس داریم:

$$r=\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u_1 & v \\ w & u_2 \end{pmatrix}=E+U.$$

واضح است که $E^2=E$. همچنین رابطه

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ -s_2wt_1s_1 & s_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v \\ w & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & -t_1s_1vt_2 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

نشان می‌دهد که $U$ یک ماتریس کامل است. پس $r$ یک عنصر $f$ـ تمیز است. □

**گزاره ۱۱.۱.۲.** (۱) *فرض کنیم $R$، $S$ دو حلقه و $M$ یک $(R,S)$ـ دو مدول باشد. فرض کنیم $E=\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی باشد. در این‌صورت $E$ حلقه‌ی $f$ ـ تمیز است، اگر وتنها اگر $R$ و $S$، حلقه‌های $f$ـ تمیز باشند.*

(۲) *برای هر $n\geq 1$، $R$ حلقه‌ی $f$ـ تمیز است، اگر و تنها اگر حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $T_n(R)$، یک حلقه $f$ ـ تمیز باشد.*

***برهان.*** (۱) چون حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی حالت خاصی از حلقه‌های موریتا کانتکس با همورفیسم‌های صفر است، پس برهان بند (۱)، مشابه برهان قضیه ۱۰.۱.۲ است.

(۲) $\Longleftarrow$: بنا به گزاره ۸.۱.۲، واضح است.

$\Longrightarrow$: واضح است.

□

**تعریف ۱۲.۱.۲.** حلقه $R$ را شبه دئو چپ می‌نامیم، هرگاه هر ایده‌آل چپ ماکسیمال از $R$، یک ایده‌آل دو طرفه باشد.

حلقه‌های جابجایی و حلقه‌های موضعی به این دسته ازحلقه‌ها تعلق دارند.

**تعریف ۱۳.۱.۲.** الف ) عنصر $x$ از حلقه $R$ را تمیز می‌نامیم، هرگاه بتوان آن را به صورت حاصل جمعی از یک یکه و یک خودتوان نوشت.

ب ) حلقه $R$ را تمیز می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن تمیز باشد.

**قضیه ۱۴.۱.۲.** *فرض کنیم $R$ حلقه شبه دئو چپ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $R$ *حلقه تمیز است.*

(۲) $R$ *حلقه $f$ ـ تمیز است.*

***برهان.*** (۱) $\Longleftarrow$ (۲): واضح است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱): کافی است نشان دهیم که اگر $w \in K(R)$، آن‌گاه $w \in U(R)$. فرض کنیم برای $s, t \in R$، $swt = ۱$. بنابراین $s$ وارون‌پذیر راست است. (فرض خلف ) فرض کنیم که $s$ وارون‌پذیر چپ نباشد. پس $Rs \neq R$. لذا ایده‌آل چپ ماکسیمالی مانند $M$ از $R$ وجود دارد که $Rs \subseteq M \neq R$. چون $R$ یک حلقه‌ی شبه‌دئو چپ است، پس $M$ یک ایده‌آل دو طرفه است. از طرفی $s \in M$، پس $sR \subseteq M \neq R$ که این با وارون‌پذیر راست بودن $s$ تناقض دارد. بنابراین $wts = ۱$ که این تساوی نشان می‌دهد که $w$ یک عنصر وارون‌پذیرراست است. حال نشان می‌دهیم که $w \in K(R)$ وارون‌پذیر چپ است. (فرض خلف ) فرض کنیم که $w$ وارون‌پذیر چپ نباشد، پس $Rw \neq R$. لذا ایده‌آل چپ ماکسیمال مانند $N$ از $R$ وجود دارد که $Rw \subseteq N \neq R$. چون $R$ یک حلقه شبه دئو چپ است، پس $N$ یک ایده‌آل دو طرفه است. ازطرفی $w \in N$، پس $wR \subseteq N \neq R$، که این با وارون‌پذیر راست بودن $w$ تناقض دارد. پس $w$ یک عنصر وارون‌پذیر چپ است. در نتیجه $w$ وارون‌پذیر است. $\square$

**تعریف ۱۵.۱.۲.** $R$ یک حلقه ددکیند متناهی است، هرگاه برای هر $x, y \in R$، اگر $xy = ۱$، آن‌گاه $yx = ۱$.

**تعریف ۱۶.۱.۲.** $R$ را یک حلقه آبلی می‌نامیم، هرگاه خودتوان‌های آن مرکزی باشند.

**نتیجه ۱۷.۱.۲.** *هر حلقه آبلی $f$ ـ تمیز، یک حلقه تمیز است.*

**برهان.** کافی است ثابت کنیم که هر حلقه آبلی ددکیند متناهی است. فرض کنیم که $ab = 1$ که $a, b \in R$ ، پس $ba = b(ab)a = ba.ba = (ba)^2$. لذا $ba$ یک عنصر خودتوان از حلقه $R$ است، پس بنا به فرض مرکزی است. چون $ba$ خودتوان مرکزی است، پس $1 = (ab)(ab) = a(ba)b = ba(ab) = ba \cdot 1 = ba$ که نشان می‌دهد $R$ یک حلقه ددکیند متناهی است. بنابراین $R$ یک حلقه‌ی شبه دئو چپ است. پس بنا به قضیه‌ی ۱۴.۱.۲ نتیجه حاصل است. □

**تعریف ۱۸.۱.۲.** فرض کنیم $G$ یک گروه و $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت $RG$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$RG = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i \mid r_i \in R, g_i \in G, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

همچنین به ازای هر $r_i, s_i \in R$ و $g_i, h_i \in G$، عمل دوتایی جمع و ضرب را روی $RG$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i g_i + \sum_{j=1}^{m} s_j h_j = r_1 g_1 + \cdots + r_n g_n + s_1 h_1 + \cdots + s_m h_m,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} s_j h_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (r_i s_j)(g_i h_j).$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $RG$ با عمل جمع و ضرب فوق یک حلقه است. $RG$ را حلقه گروهی $G$ روی $R$ می‌نامیم.

**گزاره ۱۹.۱.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد که $2 \in U(R)$ و $G = \{1, g\}$ یک گروه باشد. در این‌صورت*

*(۱) $R$ یک حلقه $f$ ـ تمیز است، اگر و تنها اگر هر عنصر آن حاصل جمعی از یک عنصر کامل و ریشه دوم یک باشد.*

*(۲) $RG$ حلقه $f$ ـ تمیز است، اگر و تنها اگر $R$ حلقه $f$ ـ تمیز باشد.*

**برهان.** (۱) $\Leftarrow$: فرض کنیم $R$ حلقه $f$ ـ تمیز باشد و $x \in R$. پس $\dfrac{(x+1)}{2} = e + u$ که $e^2 = e$ و $u \in K(R)$. لذا $x = (2e-1) + 2u$ که $(2e-1)^2 = 1$ و $2u \in K(R)$.

$\Longrightarrow$: فرض کنیم هر عنصر $R$ از حاصل جمعی از یک عنصر کامل و ریشه دوم یک باشد. در این

صورت برای هر $x \in R$، داریم $2x - 1 = t + w$ که $t^2 = 1$ و $w$ یک عنصر کامل از $R$ است. بنابراین $x = \frac{t+1}{2} + \frac{w}{2}$ که $(\frac{t+1}{2})^2 = \frac{t+1}{2}$ و $\frac{w}{2} \in K(R)$. در نتیجه $R$ حلقه $f$ـ تمیز است.

(۲) $\Leftarrow$ : فرض کنیم $RG$ حلقه $f$ـ تمیز باشد. چون $R$ تصویری از $RG$ است، پس $R$ نیز حلقه $f$ ـ تمیز است.

$\Rightarrow$ : فرض کنیم که $R$ حلقه $f$ـ تمیز باشد. چون $2 \in U(R)$، پس $\theta : RG \longrightarrow R \times R$ با ضابطه $\theta : a + bg \mapsto (a+b, a-b)$ یک یکریختی است. بنابراین $RG \simeq R \times R$. چون $R$ یک حلقه $f$ـ تمیز است، پس بنا به بند (۲) گزاره‌ی ۳.۱.۲، $R \times R$ نیز حلقه $f$ ـ تمیز است. در نتیجه $RG$ نیز حلقه‌ی $f$ـ تمیز است.

□

**گزاره ۲۰.۱.۲.** *فرض کنیم $R$ حلقه $f$ـ تمیز و $e$ یک خودتوان مرکزی در $R$ باشد. در این‌صورت $eRe$ نیز حلقه‌ی $f$ ـ تمیز است.*

***برهان.*** فرض کنیم $R$ حلقه $f$ـ تمیز باشد. چون $e$ خودتوان مرکزی است، پس $\theta : R \longrightarrow eRe = Re$ با ضابطه $r \mapsto re$ یک همریختی حلقه‌ای است. لذا بنا به بند (۱) گزاره‌ی ۳.۱.۲، $eRe$ نیز حلقه‌ی $f$ـ تمیز است. □

**تعریف ۲۱.۱.۲.** فرض کنیم $V$ یک حلقه باشد و ${}_RV_R$ یک $(R,R)$ـ دو مدول باشد که برای هر $v, w \in V$ و $r \in R$، $(vw)r = v(wr)$، $(vr)w = v(rw)$ و $(rv)w = r(vw)$. ایده‌آل توسعه یافته از حلقه $R$ بوسیله $V$، یک گروه آبلی جمعی $I(R,V) = R \oplus V$ است که عمل دوتایی جمع و ضرب را روی آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(r,v)(s,w) = (rs, rw + vs + vw)، \ (r,v) + (s,w) = (r+s, v+w).$$

**گزاره ۲۲.۱.۲.** *فرض کنیم $R$ حلقه‌ی $f$ـ تمیز باشد و برای هر $v \in R$، عنصر $w \in R$ وجود داشته باشد بطوری‌که $v + w + wv = 0$. در این‌صورت ایده‌آل توسعه یافته $E = I(R, V)$ نیز $f$ـ تمیز است.*

***برهان.*** فرض کنیم $s = (r, v) \in E$. پس بنا به فرض $r = e + u$ که $e^2 = e$ و $u \in K(R)$. لذا $s = (e, 0) + (u, v)$. واضح است که $(e, 0)$ یک خودتوان در $E$ است. حال نشان می‌دهیم که $(u, v) \in K(E)$. فرض کنیم $sut = 1$ که $s, t \in R$. چون $svt \in V$، پس بنا به فرض $w \in V$ وجود دارد که $svt + w + wsvt = 0$. لذا داریم:

$$(s, ws)(u, v)(t, 0) = (sut, 0 + svt + wsut + wsvt + 0) = (1, 0).$$

در نتیجه $(u, v) \in K(E)$ و لذا $E$ حلقه‌ی $f$ ـ تمیز است. □

## ۲.۲ حلقه‌هایی که شامل تعداد زیادی عنصر کامل هستند

*در این بخش ابتدا برخی از ویژگی‌های حلقه‌هایی که شامل تعداد زیادی عنصر کامل هستند را بررسی می کنیم و در آخر نشان می‌دهیم که اگر حلقه‌ی $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل باشد، آن‌گاه حلقه ماتریس $n \times n$ روی $R$ نیز شامل تعداد زیادی عنصرکامل است.*

**لم ۱.۲.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *اگر* $w \in K(R)$، *آن‌گاه برای هر* $u \in U(R)$، $uw, wu \in K(R)$.

۲) $w \in K(R)$، *اگر و تنها اگر* $\overline{w} \in K(\overline{R})$ *که* $\overline{R} = \dfrac{R}{J(R)}$.

***برهان.*** ۱) فرض کنیم $w \in K(R)$ و $u \in U(R)$. پس $s, t \in R$ وجود دارند که $swt = ۱$. لذا $su^{-۱}uwt = ۱$ و $swuu^{-۱}t = ۱$. در نتیجه $wu$و$uw \in K(R)$.

(۲) $\Longleftarrow$ : فرض کنیم $w \in K(R)$. پس $s, t \in R$وجود دارندکه $swt = ۱$. بنابراین $\overline{swt} = \overline{۱}$.

$\Longrightarrow$ : فرض کنیم $\overline{w} \in K(\overline{R})$. پس $\overline{s}, \overline{t} \in \overline{R}$ وجود دارند که $\overline{swt} = \overline{۱}$. بنابراین $swt = ۱ + r \in U(R)$ که $r \in J(R)$. در نتیجه $swt(۱+r)^{-۱} = ۱$ که نشان می‌دهد $w \in K(R)$.

□

**گزاره ۲.۲.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *هرگاه* $a, b \in R$ *و* $aR + bR = R$، *آن‌گاه* $w \in K(R)$ *وجوددارد بطوری‌که* $a + bw \in U(R)$.

(۲) *هرگاه* $a, b \in R$ *و* $aR + bR = R$، *آن‌گاه* $w \in K(R)$ *وجود دارد بطوری‌که* $a + bw$ *وارون‌پذیر چپ است.*

(۳) *هرگاه* $a, b \in R$ *و* $aR + bR = R$، *آن‌گاه* $w \in K(R)$ *وجود دارد بطوری‌که* $a + bw$ *وارون‌پذیر راست است.*

***برهان.*** (۱) $\Leftarrow$ (۲)، (۱) $\Leftarrow$ (۳) واضح است.

(۳) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $aR + bR = R$، پس بنا به فرض $w \in K(R)$ وجود دارد که $a + bw = u$ وارون‌پذیر راست است. فرض کنیم برای $v \in R$، $uv = ۱$. چون $vR + (۱ - vu)R = R$، پس بنا به فرض $w_۱ \in K(R)$ وجود دارد که $v + (۱ - vu)w_۱ = w_۲$ وارون‌پذیر راست است. لذا داریم:

$$uw_۲ = u(v + (۱ - vu)w_۱) = ۱$$

که نشان می‌دهد $w_۲$ یک یکه در $R$ است. در نتیجه $u$ نیز یک یکه در $R$است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) : فرض کنیم $aR + bR = R$. پس بنا به فرض $w \in K(R)$ وجوددارد که $a + bw = u$ وارون‌پذیر چپ است. فرض کنیم برای $v \in R$، $vu = ۱$ ( $v$ وارون‌پذیر راست است). چون $vR + ۰R = R$، پس بنا به فرض $w_۱ \in K(R)$ وجود دارد که $v + ۰w_۱ = v$ وارون‌پذیر چپ است. لذا $v \in U(R)$ و در نتیجه $a + bw = u \in U(R)$. □

**تعریف ۳.۲.۲.** گوییم حلقه $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است، هرگاه $aR + bR = R$ که $a, b \in R$، آن‌گاه $w \in K(R)$ وجود داشته باشد بطوری‌که $a + bw \in U(R)$.

**گزاره ۴.۲.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

**(۱)** *$R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است .*

**(۲)** *هرگاه $a, b \in R$ و $ax + b = ۱$، آن‌گاه $w \in K(R)$ وجود دارد بطوری‌که $a + bw \in U(R)$ .*

**(۳)** *هرگاه $a, b \in R$ و $ax+b = ۱$، آن‌گاه $y \in R$ وجود دارد بطوری‌که $a+by \in U(R)$ و $۱-xy \in K(R)$ .*

***برهان.*** (۱) $\Leftarrow$ (۲): بنا به تعریف، واضح است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳): چون $xa + (۱ - xa) = ۱$، پس بنا به فرض $w \in K(R)$ وجود دارد بطوری‌که $x + (۱ - xa)w = u \in U(R)$. بنابراین

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ ۱ & x \end{pmatrix}^{-۱} B_{۲۱}(w) = \begin{pmatrix} x & ۱-xa \\ -۱ & a \end{pmatrix} B_{۲۱}(w) = \begin{pmatrix} u & ۱-xa \\ aw-۱ & a \end{pmatrix} \in GL_۲(R). \qquad (\hbar)$$

در نتیجه بنا گزاره ۱.۲.۱۳، $v^{-۱} \in U(R)$ و $e, d \in R$ وجود دارند بطوری‌که

$$\begin{pmatrix} u & ۱-xa \\ aw-۱ & a \end{pmatrix} = [u, v^{-۱}]B_{۲۱}(e)B_{۱۲}(d)$$

که $v^{-۱} = (۱-aw)u^{-۱}(۱-xa)+a$، $e = v(aw-۱)$ و $d = u^{-۱}(۱-xa)$.

از طرفی بنا به بند (۳) و (۴) رابطه $\triangle$، داریم:

$$[u, ۱][۱, v^{-۱}] = [u, v^{-۱}] \quad ، \quad [۱, v^{-۱}]B_{۲۱}(e) = B_{۲۱}(v^{-۱}e)[۱, v^{-۱}].$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} u & ۱-xa \\ aw-۱ & a \end{pmatrix} = [u, ۱]B_{۲۱}(v^{-۱}e)[۱, v^{-۱}]B_{۱۲}(d).$$

از طرفین تساوی بالا وارون می‌گیریم. لذا بنا به بند (۵) و (۶) رابطه $\triangle$، داریم:

$$B_{۲۱}^{-۱}(v^{-۱}e) = B_{۲۱}(-v^{-۱}e) \text{ و } B_{۱۲}^{-۱}(d) = B_{۱۲}(-d) \text{ ، } [۱, v^{-۱}]^{-۱} = [۱, v] \text{ و } [u, ۱]^{-۱} = [u^{-۱}, ۱].$$

پس

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & ۱-xa \\ aw-۱ & a \end{pmatrix}^{-۱} &= B_{۱۲}(-d)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & v \end{pmatrix} B_{۲۱}(-v^{-۱}e)\begin{pmatrix} u^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^{-۱}+deu^{-۱} & -dv \\ eu^{-۱} & v \end{pmatrix}. \qquad (\hbar\hbar) \end{aligned}$$

در نتیجه بنا به $(\hbar)$ و $(\hbar\hbar)$، داریم:

$$B_{۲۱}(-w)\begin{pmatrix} a & -b \\ ۱ & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{-۱}+deu^{-۱} & -dv \\ eu^{-۱} & v \end{pmatrix} \in GL_۲(R).$$

پس بنا به گزاره ۱.۲.۱۴، $q \in U(R)$ و $c, y \in R$ وجود دارند که

$$\begin{pmatrix} u^{-۱}+deu^{-۱} & -dv \\ eu^{-۱} & v \end{pmatrix} = [q, v]B_{۱۲}(c)B_{۲۱}(y)$$

که $q = (u^{-۱}+deu^{-۱})+d$ ، $y = v^{-۱}eu^{-۱}$، و $c = -q^{-۱}dv$. لذا داریم:

$$B_{۲۱}(-w)\begin{pmatrix} a & -b \\ ۱ & x \end{pmatrix} = [q,v]B_{۱۲}(c)B_{۲۱}(y).$$

با ضرب تساوی فوق از چپ در $B_{۲۱}^{-۱}(-w) = B_{۲۱}(w)$ و از راست در $B_{۲۱}^{-۱}(y) = B_{۲۱}(-y)$، داریم:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ ۱ & x \end{pmatrix} B_{۲۱}(-y) = B_{۲۱}(w)\begin{pmatrix} q & ۰ \\ ۰ & v \end{pmatrix} B_{۱۲}(c) = \begin{pmatrix} q & qc \\ wq & wqc+v \end{pmatrix}.$$

در نتیجه $a+by = q \in U(R)$ و $۱ - xy = wq \in K(R)$.

(۳) $\Longleftarrow$ (۲): فرض کنیم $ax+b=۱$. چون $xa + (۱-xa) = ۱$، پس بنا به فرض $y \in R$ وجود دارد که $x + (۱-xa)y = u \in U(R)$ و $۱ - ay \in K(R)$.

لذا داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix}^{-۱} B_{۲۱}(-y) = \begin{pmatrix} x & xa-۱ \\ ۱ & a \end{pmatrix} B_{۲۱}(-y) = \begin{pmatrix} u & xa-۱ \\ w & a \end{pmatrix} \in GL_{۲}(R). \qquad (\ell)$$

در نتیجه بنا به گزاره ۱.۲.۱۳، $v \in U(R)$ و $z,h \in R$ وجود دارند که

$$\begin{pmatrix} u & xa-۱ \\ w & a \end{pmatrix} = [u,v]B_{۲۱}(h)B_{۱۲}(z)$$

که $v = -wu^{-۱}(۱-xa)+a$ ، $h = v^{-۱}w$ و $z = u^{-۱}(xa-۱)$.

از طرفی بنا به بند (۳) و (۴) رابطه $\triangle$، داریم:

$[۱,v]B_{۲۱}(v^{-۱}w) = B_{۲۱}(w)[۱,v]$ و $[u,v] = [u,۱][۱,v]$. بنابراین

$$\begin{pmatrix} u & xa-۱ \\ w & a \end{pmatrix} = [u,۱]B_{۲۱}(w)[۱,v]B_{۱۲}(z). \qquad (\ell\ell)$$

در نتیجه بنا به $(\ell)$ و $(\ell\ell)$، داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix}^{-۱} B_{۲۱}(-y) = [u,۱]B_{۲۱}(w)[۱,v]B_{۱۲}(z).$$

با ضرب رابطه فوق از راست در $B_{۲۱}^{-۱}(-y) = B_{۲۱}(y)$، داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -۱ & x \end{pmatrix}^{-۱} = [u,۱]B_{۲۱}(w)[۱,v]B_{۱۲}(z)B_{۲۱}(y).$$

از طرفین رابطه فوق وارون می‌گیریم.

بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = B_{21}(-y)B_{12}(-z)[1, v^{-1}]B_{21}(-w)[u^{-1}, 1].$$

از طرفی بنا به بند (۲) رابطه $\triangle$، داریم $B_{21}(-w)[u^{-1}, 1] = [u^{-1}, 1]B_{21}(-wu^{-1})$. پس

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} = B_{21}(-y)B_{12}(-z)[1, v^{-1}][u^{-1}, 1]B_{21}(-wu^{-1}).$$

با ضرب رابطه فوق در $B_{21}^{-1}(-wu^{-1}) = B_{21}(wu^{-1})$، داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & x \end{pmatrix} B_{21}(wu^{-1}) = B_{21}(-y)B_{12}(-z)[1, v^{-1}][u^{-1}, 1].$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} a + bwu^{-1} & b \\ -1 + xwu^{-1} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{-1} & -zv^{-1} \\ -yu^{-1} & (yz+1)v^{-1} \end{pmatrix}.$$

در نتیجه $a + bwu^{-1} = u^{-1} \in U(R)$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $wu^{-1} \in K(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) : فرض کنیم $aR + bR = R$. پس داریم، $ax + by = 1$ که $x, y \in R$. لذا بنابه فرض $w_1 \in K(R)$ وجود دارد که $b + axw_1 = q \in U(R)$. بنابراین $axw_1q^{-1} + bq^{-1} = 1$. پس بنابه فرض $w_2 \in K(R)$ وجود دارد که $a + bq^{-1}w_2 \in U(R)$، که بنا به لم ۱.۲.۲، $q^{-1}w_2 \in K(R)$. در نتیجه حلقه $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است. $\square$

**تعریف ۵.۲.۲.** فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. حلقه‌ی متقابل $R$، که با $R^{op}$ نمایش می دهیم، بصورت $\{a^{op} : a \in R\}$است، که در آن دو عمل جمع و ضرب به صور ت زیر تعریف می‌شوند:

$$a^{op} + b^{op} = (a+b)^{op}, \quad a^{op}.b^{op} = (ba)^{op}.$$

**گزاره ۶.۲.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *هرگاه $a, b \in R$ و $ax + b = 1$، آن‌گاه $w \in K(R)$ وجود دارد بطوری‌که $a + bw \in U(R)$.*

**(۲)** *هرگاه* $a, b \in R$ *و* $ax + b = ۱$*، آن‌گاه* $w \in K(R)$ *وجود دارد بطوری‌که* $x + wb \in U(R)$*.*

***برهان.*** (۱) $\Longleftarrow$ (۲): فرض کنیم $ax + b = ۱$. پس بنابه گزاره‌ی ۴.۲.۲، $y \in R$ وجود دارد که $a + by \in U(R)$ و $۱ - xy \in K(R)$.

قرار می‌دهیم

$$u = a + by \in U(R) \qquad , \qquad w = (۱ - xy)u^{-۱}$$

$$v = x + (۱ - xy)u^{-۱}b \qquad , \qquad z = a + y(۱ - xa).$$

چون $a + by = u$، پس $u^{-۱}a + u^{-۱}by = ۱$.

حال ادعا می‌کنیم که $v$ وارون پذیر است و وارون آن $z$ است.

بنا به فرض داریم:

$$va = xa + (۱ - xy)u^{-۱}ba \qquad (۱)$$

$$vy = xy + (۱ - xy)u^{-۱}by = xy + ۱ - u^{-۱}a - xy + xyu^{-۱}a$$

$$= ۱ - (۱ - xy)u^{-۱}a \qquad (۲)$$

$$vy(۱ - xa) = ۱ - xa - (۱ - xy)u^{-۱}a(۱ - xa) = ۱ - xa - (۱ - xy)u^{-۱}(۱ - ax)a$$

$$= ۱ - xa - (۱ - xy)u^{-۱}ba \qquad (۳)$$

از رابطه (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که $vz = ۱$.

از طرفی

$$zx = ax + y(۱ - xa)x = ax + yx(۱ - ax) = ax + yxb \qquad (۴)$$

$$z(۱ - xy) = a - axy + y(۱ - xa) - y(۱ - xa)xy = a - axy + y(۱ - xa) - yxby$$

$$= a + (۱ - ax)y - yx(a + by) = a + by - yxu = (۱ - yx)u \qquad (۵)$$

$$z(۱ - yx)u^{-۱}b = (۱ - yx)b \qquad (۶)$$

از رابطه (۴) و (۶) نتیجه می‌گیریم که

$$zv = ax + b = ۱.$$

در نتیجه $v = x + (۱ - xy)u^{-۱}b \in U(R)$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، $(۱ - xy)u^{-۱} \in K(R)$.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱) : فرض کنیم $ax + b = ۱$. پس بنا به بند (۲)، $w \in K(R)$ وجود دارد که $x + wb \in U(R)$. یعنی $w^{op} \in K(R^{op})$ وجود دارد که $x^{op} + b^{op}w^{op} \in U(R^{op})$. لذا بنا به گزاره‌ی ۴.۲.۲، $y^{op} \in R^{op}$ وجود دارد که $۱ - a^{op}y^{op} \in K(R^{op})$ و $x^{op} + b^{op}y^{op} \in U(R)$. یعنی $y \in R$ وجود دارد که $۱ - ya \in K(R)$ و $x + yb \in U(R)$. پس

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -y & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ ۱ & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ w & u \end{pmatrix} \in GL_۲(R).$$

لذا بنا به گزاره‌ی ۱۴.۲.۱، $\alpha \in U(R)$ و $z, d \in R$ وجود دارند بطوری‌که

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ w & u \end{pmatrix} = [\alpha, u]B_{۱۲}(z)B_{۲۱}(d).$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ w & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha zd & \alpha z \\ ud & u \end{pmatrix}.$$

پس $\alpha z = -b$، $ud = w$ و $\alpha + \alpha zd = a$. در نتیجه $d = u^{-۱}w$ و $a - \alpha zd = \alpha$. بنابراین با قرار دادن مقدار $d$ و $\alpha z$ در $a - \alpha zd = \alpha$ داریم:

$$a + bu^{-۱}w \in U(R).$$

بنابراین نتیجه حاصل است. □

*گزاره ۶.۲.۲، نشان می‌دهد که حلقه $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است، اگر و تنها اگر حلقه $R^{op}$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل باشد. بنابراین حلقه شامل تعداد زیادی عنصر کامل، نسبت به چپ و راست متقارن است.*

**گزاره ۷.۲.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است، اگر و تنها اگر $\overline{R}=\dfrac{R}{J(R)}$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل باشد.*

**برهان.** $\Longleftarrow$ : فرض کنیم $\overline{ax}+\overline{b}=\overline{1}$. پس برای $r\in J(R)$، $ax+b=1+r\in U(R)$. لذا $1=ax(1+r)^{-1}+b(1+r)^{-1}$. در نتیجه بنا به گزاره‌ی ۴.۲.۲، $w\in K(R)$ وجود دارد که $a+b(1+r)^{-1}w\in U(R)$. بنابراین $\overline{a}+\overline{b(1+r)^{-1}w}\in U(\overline{R})$ و لذا بنا به لم۱.۲.۲، $\overline{(1+r)^{-1}w}\in K(\overline{R})$. پس طبق گزاره‌ی ۴.۲.۲، $\overline{R}$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است.

$\Longrightarrow$ : فرض کنیم $ax+b=1$. پس بنا به فرض $\overline{w}\in K(\overline{R})$ وجود دارد بطوری‌که $\overline{a}+\overline{bw}=\overline{u}\in U(\overline{R})$. در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲، $w\in K(R)$ وجود دارد که $a+bw=u+r\in U(R)$ و $r\in J(R)$. بنابراین $R$ نیز شامل تعداد زیادی عنصر کامل است. $\square$

**مثال ۸.۲.۲.** فرض کنیم که $R$ یک حلقه موضعی باشد و $2\notin J(R)$. در این‌صورت $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است.

**حل.** *چون $R$ موضعی است، پس بنا به قضیه۲۰.۲.۱ ، $\overline{R}=\dfrac{R}{J(R)}$ یک حلقه‌ی تقسیم است. ازطرفی بنابه گزاره‌های قبل کافی است نشان دهیم که $\overline{R}$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است. فرض کنیم در $\overline{R}$، $ax+b=1$. اگر $x\neq 0$، آن‌گاه داریم $a+bx^{-1}=x^{-1}\in U(\overline{R})$ که $x^{-1}\in U(\overline{R})\subseteq K(\overline{R})$. اگر $x=0$، آن‌گاه $b=1$. در این‌صورت اگر $a\neq 1$، آن‌گاه $a+b(1-a)=1\in U(\overline{R})$ که $(1-a)\in U(\overline{R})\subseteq K(\overline{R})$. اگر $a=1$، آن‌گاه $a+b\cdot a=2\in U(\overline{R})$ که $a\in U(\overline{R})\subseteq K(\overline{R})$. به این ترتیب برهان کامل می‌شود.*

**قضیه ۹.۲.۲.** *برای حلقه $R$ گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *$R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است.*

(۲) *هرگاه $aR+bR=dR$ که $a,b,d\in R$، آن‌گاه $w\in K(R)$ و $u\in U(R)$ وجود دارند بطوری‌که $au+bw=d$.*

**(۳)** *هرگاه $a_1R + \cdots + a_mR = dR$ که $m \geq 2$ و $a_1, \ldots, a_m, d \in R$، آن‌گاه $u \in U(R)$ و $w_2, \ldots, w_m \in K(R)$ وجود دارند بطوری‌که $a_1u_1 + a_2w_2 + \cdots + a_mw_m = d$.*

***برهان.*** (۲) $\Longleftarrow$ (۱) و (۳) $\Longleftarrow$ (۲) واضح است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۲) چون $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است، پس $R$ خاصیت برد پایدار یک دارد. فرض کنیم $aR + bR = dR$ که $a, b, d \in R$. مجموعه‌های $\{a, b\}$ و $\{d, 0\}$ زیر مجموعه‌هایی از $R^2$ هستند. پس بنا به فرض $R$- مدول‌های تولید شده توسط $(\{a, b\})$ و $(\{d, 0\})$ با هم برابر هستند. لذا بنا به لم ۲۴.۲.۱، $U = (u_{ij}) \in GL_2(R)$ وجود دارد بطوری‌که $(a, b) = (d, 0)U$. واضح است که $u_{11}R + u_{12}R = R$. پس بنا به فرض $w \in K(R)$ وجود دارد بطوری‌که $u_{11} + u_{12}w = u \in U(R)$ و لذا $du_{11} + du_{12}w = du$. در نتیجه $a + bw = du$. بنابراین $au^{-1} + bwu^{-1} = d$ که $u^{-1} \in U(R)$ و $wu^{-1} \in K(R)$.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳) با استقرا روی $m$ قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم که $a_1R + \cdots + a_mR = dR$ که $m \geq 2$ و $a_1, \ldots, a_m, d \in R$. اگر $m = 2$، آن‌گاه بنا به بند (۲)، نتیجه حاصل است. فرض کنیم که نتیجه برای هر $m \leq k (k \geq 2)$ برقرار باشد. فرض کنیم $m = k + 1$. پس $x_1, \ldots, x_{k+1} \in R$ وجود دارند که $a_1x_1 + \cdots + a_{k+1}x_{k+1} = d$. لذا $a_1R + \cdots + a_{k-1}R + (a_kx_k + a_{k+1}x_{k+1})R = dR$. پس بنا به فرض استقرا $a_1u_1 + a_2w_2 + \cdots + (a_kx_k + a_{k+1}x_{k+1}w_k) = d$ که $u_1 \in U(R)$ و $w_2, \ldots, w_k \in K(R)$. در نتیجه $(a_1u_1 + a_2w_2)R + \cdots + a_kR + a_{k+1}R = dR$.

لذا بنابه فرض استقرا $v_1 \in U(R)$ و $v_2, \ldots, v_k \in K(R)$ وجود دارند که

$$(a_1u_1 + a_2w_2)v_1 + \cdots + a_kv_{k-1} + a_{k+1}v_k = a_1u_1v_1 + a_2w_2w_1 + \cdots + a_kv_{k-1} + a_{k+1}v_k = d.$$

با توجه به این‌که $u_1v_1 \in U(R)$ و $w_2v_1, v_2, \ldots, v_k \in K(R)$، پس نتیجه حاصل است.

□

**نتیجه ۱۰.۲.۲.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $R$ *شامل تعداد زیادی عنصر کامل است.*

(۲) *هرگاه* $Ra_1 + \cdots + Ra_m = Rd$ *که* $m \geq 2$ *و* $a_1, \ldots, a_m, d \in R$ ، *در این‌صورت* $u_1 \in U(R)$ *و* $w_2, \ldots, w_m \in K(R)$ *وجود دارند بطوری‌که* $u_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_m a_m = d$.

***برهان.*** می‌دانیم که حلقه $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است، اگر و تنها اگر حلقه $R^{op}$، شامل تعداد زیادی عنصر کامل باشد. پس مشابه قضیه ۹.۲.۲، اثبات می‌شود. $\square$

**قضیه ۱۱.۲.۲.** *اگر حلقه‌ی $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل باشد، آن‌گاه برای هر* $n \geq 1$، $M_n(R)$ *نیز شامل تعداد زیادی عنصر کامل است.*

***برهان.*** اگر $BC + D = I_n$ در $M_n(R)$ باشد، آن‌گاه

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ -I_n & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & CB - I_n \\ I_n & B \end{pmatrix}^{-1} \in GL_{2n}(R).$$

قرار می‌دهیم $A = (A_{ij})$، که $1 \leq i, j \leq 2$ و $A_{ij} = (a_{st}^{ij}) \in M_n(R)$، و $1 \leq s, t \leq n$. بنابراین عناصر $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in R$ در ستون اول $A^{-1}$ وجود دارند که

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{11}x_1 + \cdots + a_{1n}^{11}x_n + a_{11}^{12}y_1 + \cdots + a_{1n}^{12}y_n = 1,\\
&\qquad\vdots\\
&a_{n1}^{11}x_1 + \cdots + a_{nn}^{11}x_n + a_{n1}^{12}y_1 + \cdots + a_{nn}^{12}y_n = 0,\\
&a_{11}^{21}x_1 + \cdots + a_{1n}^{21}x_n + a_{11}^{22}y_1 + \cdots + a_{1n}^{22}y_n = 0,\\
&\qquad\vdots\\
&a_{n1}^{21}x_1 + \cdots + a_{nn}^{21}x_n + a_{n1}^{22}y_1 + \cdots + a_{nn}^{22}y_n = 0.
\end{aligned} \tag{$\wp$}$$

در بند اول $(\wp)$، بنا به گزاره‌ی ۴.۲.۲، $z_1 \in R$ وجود دارد که

$$a_{11}^{11} + (a_{21}^{11}x_2 + \cdots + a_{1n}^{11}x_n + a_{11}^{12}y_1 + \cdots + a_{1n}^{12}y_n)z_1 = u_1 \in U(R)$$

و $1 - x_1z_1 = w_1 \in k(R)$. چون $a^{11}_{21}x_1 + \cdots + a^{11}_{2n}x_n + a^{12}_{21}y_1 + \cdots + a^{12}_{2n}y_n = 0$، پس

$$a^{11}_{22}x_2z_1 + \cdots + a^{11}_{2n}x_nz_1 + a^{12}_{21}y_1z_1 + \cdots + a^{12}_{2n}y_nz_1 = -a^{11}_{21}x_1z_1.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} a^{11}_{21} + a^{11}_{22}x_2z_1 + \cdots + a^{11}_{2n}x_nz_1 + a^{12}_{21}y_1z_1 + \cdots + a^{12}_{2n}y_nz_1 &= a^{11}_{21} - a^{11}_{21}x_1z_1 \\ &= a^{11}_{21}(1 - x_1z_1) = a^{11}_{21}w_1. \end{aligned}$$

بطور مشابه با توجه به بندهای دیگر $(\wp)$ داریم:

$$\begin{gathered} a^{11}_{31} + a^{11}_{32}x_2z_1 + \cdots + a^{11}_{3n}x_nz_1 + a^{12}_{31}y_1z_1 + \cdots + a^{12}_{3n}y_nz_1 = a^{11}_{31}w_1, \\ \vdots \\ a^{11}_{n1} + a^{11}_{n2}x_2z_1 + \cdots + a^{11}_{nn}x_nz_1 + a^{12}_{n1}y_1z_1 + \cdots + a^{12}_{nn}y_nz_1 = a^{11}_{n1}w_1, \\ a^{21}_{11} + a^{21}_{12}x_2z_1 + \cdots + a^{21}_{1n}x_nz_1 + a^{22}_{11}y_1z_1 + \cdots + a^{22}_{1n}y_nz_1 = a^{21}_{11}w_1, \\ \vdots \\ a^{21}_{n1} + a^{21}_{n2}x_1z_1 + \cdots + a^{21}_{nn}x_nz_1 + a^{22}_{n1}y_1z_1 + \cdots + a^{22}_{nn}y_nz_1 = a^{21}_{n1}w_1. \end{gathered}$$

بنابراین

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2z_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nz_1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1z_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nz_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & a^{11}_{12} & \cdots & a^{11}_{1n} & a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n} \\ a^{11}_{21}w_1 & a^{11}_{22} & \cdots & a^{11}_{2n} & a^{12}_{21} & \cdots & a^{12}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{11}_{n1}w_1 & a^{11}_{n2} & \cdots & a^{11}_{nn} & a^{12}_{n1} & \cdots & a^{12}_{nn} \\ a^{21}_{11}w_1 & a^{21}_{12} & \cdots & a^{21}_{1n} & a^{22}_{11} & \cdots & a^{22}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{21}_{n1}w_1 & a^{21}_{n2} & \cdots & a^{21}_{nn} & a^{22}_{n1} & \cdots & a^{22}_{nn} \end{pmatrix}.$$

از طرفی

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_{۲}z_{۱} & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n z_{۱} & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ y_{۱}z_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n z_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_{۲}z_{۱} & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n z_{۱} & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right]$$

$$\times B_{۲۱}\left(\begin{pmatrix} y_{۱}z_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n z_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}\right).$$

پس

$$A_{۱} = \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -a^{۱۱}_{۲۱}w_{۱}u_{۱}^{-۱} & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^{۱۱}_{n۱}w_{۱}u_{۱}^{-۱} & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right] A \left[\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ x_{۲}z_{۱} & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n z_{۱} & ۰ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right]$$

$$\times B_{۲۱}\left(\begin{pmatrix} y_{۱}z_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n z_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} u_{۱} & a^{۱۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۱۱}_{۱n} & a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ ۰ & b^{۱۱}_{۲۲} & \cdots & b^{۱۱}_{۲n} & b^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & b^{۱۲}_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & b^{۱۱}_{n۲} & \cdots & b^{۱۱}_{nn} & b^{۱۲}_{n۱} & \cdots & b^{۱۲}_{nn} \\ a^{۲۱}_{۱۱}w_{۱} & a^{۲۱}_{۱۲} & \cdots & a^{۲۱}_{۱n} & a^{۲۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۲۲}_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱}w_{۱} & a^{۲۱}_{n۲} & \cdots & a^{۲۱}_{nn} & a^{۲۲}_{n۱} & \cdots & a^{۲۲}_{nn} \end{pmatrix} \in GL_{۲n}(R).$$

بنابراین عناصر $x'_{۱}, \ldots, x'_n, y'_{۱}, \ldots, y'_n \in R$ در ستون دوم $A_{۱}^{-۱}$ وجود دارند که

$$\begin{gathered} u_{۱}x'_{۱} + a^{۱۱}_{۱۲}x'_{۲} + \cdots + a^{۱۱}_{۱n}x'_n + a^{۱۲}_{۱۱}y'_{۱} + \cdots + a^{۱۲}_{۱n}y'_n = ۰, \\ ۰ \times x'_{۱} + b^{۱۱}_{۲۲}x'_{۲} + \cdots + b^{۱۱}_{۲n}x'_n + b^{۱۲}_{۲۱}y'_{۱} + \cdots + b^{۱۲}_{۲n}y'_n = ۱, \\ \vdots \\ ۰ \times x'_{۱} + b^{۱۱}_{n۲}x'_{۲} + \cdots + b^{۱۱}_{nn}x'_n + b^{۱۲}_{n۱}y'_{۱} + \cdots + b^{۱۲}_{nn}y'_n = ۰, \qquad (\wp\wp) \\ a^{۲۱}_{۱۱}w_{۱}x'_{۱} + a^{۲۱}_{۱۲}x'_{۲} + \cdots + a^{۲۱}_{۱n}x'_n + a^{۲۲}_{۱۱}y'_{۱} + \cdots + a^{۲۲}_{۱n}y'_n = ۰, \end{gathered}$$

$$\vdots$$

$$a^{21}_{n1}w_1x'_1 + a^{21}_{n2}x'_2 + \cdots + a^{21}_{nn}x'_n + a^{22}_{n1}y'_1 + \cdots + a^{22}_{nn}y'_n = 0.$$

با توجه به بند دوم $(\wp\wp)$، و با استفاده از گزاره‌ی ۴.۲.۲، $z_2 \in R$ وجود دارد که

$$b^{11}_{22} + \left(0 \times x'_1 + b^{11}_{23}x'_3 + \cdots + b^{11}_{2n}x'_n + b^{12}_{21}y'_1 + \cdots + b^{12}_{2n}y'_n\right) z_2$$

$$= 0 \times z_2 + b^{11}_{22} + b^{11}_{23}x'_3z_2 + \cdots + b^{11}_{2n}x'_nz_2 + b^{12}_{21}y'_1z_2 + \cdots + b^{12}_{2n}y'_nz_2 = u_2 \in U(R)$$

و $1 - x'_2z_2 = w_2 \in U(R)$.

مشابه روند قبل داریم:

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 & x'_1z_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x'_3z_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x'_nz_2 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y'_1z_2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y'_nz_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & a^{11}_{12}w_2 & a^{11}_{13} & \cdots & a^{11}_{1n} & a^{12}_{11} & \cdots & a^{12}_{1n} \\ 0 & u_2 & b^{11}_{23} & \cdots & a^{11}_{2n} & a^{12}_{21} & \cdots & a^{12}_{2n} \\ 0 & b^{11}_{32} & b^{11}_{33} & \cdots & a^{11}_{3n} & a^{12}_{31} & \cdots & a^{12}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b^{11}_{n2} & b^{11}_{n3} & \cdots & a^{11}_{nn} & a^{12}_{n1} & \cdots & a^{12}_{nn} \\ a^{21}_{11}w_1 & a^{21}_{12}w_2 & a^{21}_{13} & \cdots & a^{21}_{1n} & a^{22}_{11} & \cdots & a^{22}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{21}_{n1}w_1 & a^{21}_{n2}w_2 & a^{21}_{n3} & \cdots & a^{21}_{nn} & a^{22}_{n1} & \cdots & a^{22}_{nn} \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
A_۲ &= \left[\begin{pmatrix} ۱ & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & ۱ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & -b^{۱۱}_{۳۲} w_۲ u_۲^{-۱} & ۱ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & -b^{۱۱}_{n۲} w_۲ u_۲^{-۱} & \circ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right] A_۱ \left[\begin{pmatrix} ۱ & x'_۱ z_۲ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & ۱ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & x'_۳ z_۲ & ۱ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & x'_n z_۲ & \circ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}, I_n\right] \\
&\quad \times B_{۲۱}\left(\begin{pmatrix} \circ & y'_۱ z_۲ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & y'_n z_۲ & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} u_۱ & a^{۱۱}_{۱۲} w_۲ & a^{۱۱}_{۱۳} & \cdots & a^{۱۱}_{۱n} & a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ \circ & u_۲ & b^{۱۱}_{۲۳} & \cdots & b^{۱۱}_{۲n} & b^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & b^{۱۲}_{۲n} \\ \circ & \circ & c^{۱۱}_{۳۳} & \cdots & c^{۱۱}_{۳n} & c^{۱۲}_{۳۱} & \cdots & c^{۱۲}_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & c^{۱۱}_{n۳} & \cdots & c^{۱۱}_{nn} & c^{۱۲}_{n۱} & \cdots & c^{۱۲}_{nn} \\ a^{۲۱}_{۱۱} w_۱ & a^{۲۱}_{۱۲} w_۲ & a^{۲۱}_{۱۳} & \cdots & a^{۲۱}_{۱n} & a^{۲۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۲۲}_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱} w_۱ & a^{۲۱}_{n۲} w_۲ & a^{۲۱}_{n۳} & \cdots & a^{۲۱}_{nn} & a^{۲۲}_{n۱} & \cdots & a^{۲۲}_{nn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

برای سادگی می‌نویسیم:

$$A_۲ = [*,*]\, A_۱\, [*,*]\, B_{۲۱}(*).$$

از طرفی $A_۱ = [*,*]\, A\, [*,*]\, B_{۲۱}(*)$، پس

$$A_۲ = [*,*]\, [*,*]\, A\, [*,*]\, B_{۲۱}(*)\, [*,*]\, B_{۲۱}(*).$$

در نتیجه با استفاده ازبندهای (۲)، (۱) و (۴) روابط $\Delta$، می‌توان نوشت:

$$A_۲ = [*,*]\, A\, [*,*]\, B_{۲۱}(*).$$

بطور مشابه با ادامه دادن روند بالا عناصر $u_۳, \ldots, u_n, w_۳, \ldots, w_n \in U(R)$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} A_n &= [*,*]\, A\, [*,*]\, B_{۲۱}(*) \\ &= \begin{pmatrix} u_۱ & * & * & \cdots & * & a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ ۰ & u_۲ & * & \cdots & * & b^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & b^{۱۲}_{۲n} \\ ۰ & ۰ & u_۳ & \cdots & * & c^{۱۲}_{۳۱} & \cdots & c^{۱۲}_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & u_n & d^{۱۲}_{n۱} & \cdots & d^{۱۲}_{nn} \\ a^{۲۱}_{۱۱} w_۱ & a^{۲۱}_{۱۲} w_۲ & a^{۲۱}_{۱۳} w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{۱n} w_n & a^{۲۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۲۲}_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱} w_۱ & a^{۲۱}_{n۲} w_۲ & a^{۲۱}_{n۳} w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{nn} w_n & a^{۲۲}_{n۱} & \cdots & a^{۲۲}_{nn} \end{pmatrix} \in GL_{۲n}(R). \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $U = \begin{pmatrix} u_۱ & * & * & \cdots & * \\ ۰ & u_۲ & * & \cdots & * \\ ۰ & ۰ & u_۳ & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & u_n \end{pmatrix}$، $V = \begin{pmatrix} a^{۱۲}_{۱۱} & \cdots & a^{۱۲}_{۱n} \\ b^{۱۲}_{۲۱} & \cdots & b^{۱۲}_{۲n} \\ c^{۱۲}_{۳۱} & \cdots & c^{۱۲}_{۳n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d^{۱۲}_{n۱} & \cdots & d^{۱۲}_{nn} \end{pmatrix}$ و

$$\begin{pmatrix} a^{۲۱}_{۱۱} w_۱ & a^{۲۱}_{۱۲} w_۲ & a^{۲۱}_{۱۳} w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{۱n} w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{۲۱}_{n۱} w_۱ & a^{۲۱}_{n۲} w_۲ & a^{۲۱}_{n۳} w_۳ & \cdots & a^{۲۱}_{nn} w_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} w_۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & w_۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & w_۳ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & w_n \end{pmatrix} = -diag\left(w_۱, \ldots, w_n\right).$$

پس

$$A_n = \begin{pmatrix} U & V \\ -diag\left(w_۱, \ldots, w_n\right) & A_{۲۲} \end{pmatrix}.$$

چون $U \in GL_n(R)$، لذا با استفاده از گزاره‌ی ۱.۲.۱۳، $E \in GL_n(R)$ وجود دارد که

$$A_n = [U, E]\, B_{۲۱}\left(-E^{-۱} diag\left(w_۱, \ldots, w_n\right)\right) B_{۱۲}\left(U^{-۱} V\right),$$

که $E = A_{۲۲} + diag\left(w_۱, \ldots, w_n\right) U^{-۱} V$.

از طرفی چون $A_n = [*,*]\, A\, [*,*]\, B_{۲۱}(*)$، پس $W, X, Y, Z \in GL_n(R)$ و $S \in M_n(R)$ وجود دارند که $A_n = [W, X]\, A\, [Y, Z]\, B_{۲۱}(S)$. پس

$$[W,X]A[Y,Z]B_{21}(S) = [U,E]B_{21}(-E^{-1}diag(v_1,\dots,v_n))B_{12}(U^{-1}V).$$

بنابراین

$$A = [W^{-1},X^{-1}][U,E]B_{21}(-E^{-1}diag(w_1,\dots,w_n))B_{12}(U^{-1}V)B_{21}(-S)[Y^{-1},Z^{-1}]$$

$$= [W^{-1}U,X^{-1}E]B_{21}(-E^{-1}diag(w_1,\dots,w_n))B_{12}(U^{-1}V)B_{21}(-S)[Y^{-1},Z^{-1}].$$

پس با استفاده از بند (۲) روابط $\Delta$، داریم:

$$A = [W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{21}(-ZE^{-1}diag(w_1,\dots,w_n)Y^{-1})$$

$$B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

از بند (۲) روابط $\Delta$، داریم:

$$[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{21}(-ZE^{-1}diag(w_1,\dots,w_n)Y^{-1}) =$$

$$B_{21}(-ZE^{-1}XZE^{-1}diag(w_1,\dots,w_n)Y^{-1}W^{-1}UY^{-1})[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}].$$

قرار می‌دهیم $W' = -ZE^{-1}XZE^{-1}diag(w_1,\dots,w_n)$. پس

$$A = B_{21}(W')[W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

با ضرب عبارت فوق از چپ در $B_{21}(-W')$، داریم:

$$B_{21}(-W')\begin{pmatrix} B & D \\ -I_n & C \end{pmatrix} = [W^{-1}UY^{-1},X^{-1}EZ^{-1}]B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

بنابراین $C+(-W')D = X^{-1}EZ^{-1} \in GL_n(R)$ که $-W' \in GL_n(R)$. در نتیجه طبق گزاره‌ی ۴.۲.۲، $M_n(R)$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل است. □

**نتیجه ۱۲.۲.۲.** *اگر $R$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل باشد، آن‌گاه هر ماتریس $n \times n$ روی $R$، بصورت مجموع یک ماتریس وارون‌پذیر و یک ماتریس کامل است.*

**برهان.** فرض کنیم $A \in M_n(R)$. چون $R$ شامل تعداد زیادی عنصرکامل است، پس از قضیه‌ی قبل، $M_n(R)$ نیز شامل تعداد زیادی عنصر کامل است. از طرفی چون $AM_n(R)+I_nM_n(R) = M_n(R)$، پس $W \in K(M_n(R)$ وجود دارد که $A + I_n \times W = U \in GL_n(R)$. بنابراین $A = (-IW) + U$. □

**قضیه ۱۳.۲.۲.** *اگر $A$ و $B$ شامل تعداد زیادی عنصر کامل باشند، آن‌گاه حلقه موریتاکانتکست $T = \begin{pmatrix} A & V \\ W & B \end{pmatrix}$ نیز شامل تعداد زیادی عنصر کامل است.*

**برهان.** فرض کنیم که در $T$،

$$F = \begin{pmatrix} b_۱ & n_۱ \\ m_۱ & b_۲ \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_۱ & n_۲ \\ m_۲ & c_۲ \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_۱ & n \\ m & d_۲ \end{pmatrix}.$$

اگر $FC + D = I_۲$، آن‌گاه

$$G = \begin{pmatrix} F & D \\ -I_۲ & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & CF - I_۲ \\ I_۲ & F \end{pmatrix}^{-۱} \in GL_۲(T).$$

پس $x_۱, y_۱ \in A$ و $x_۲, y_۲ \in M$ در ستون اول $A^{-۱}$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} b_۱x_۱ + \psi(n_۱, x_۲) + d_۱y_۱ + \psi(n, y_۲) &= ۱, \\ m_۱x_۱ + b_۲x_۲ + my_۱ + d_۲y_۲ &= ۰, \qquad (\wp) \\ -x_۱ + \psi(۰, x_۲) + c_۱y_۱ + \psi(n_۲, y_۲) &= ۰, \\ ۰ \times x_۱ - x_۲ + m_۲y_۱ + c_۲y_۲ &= ۰. \end{aligned}$$

با توجه به بند اول $(\wp)$، و با استفاده از گزاره‌ی ۴.۲.۲، $z_۱ \in A$ وجود دارد که

$$b_۱ + \psi(n_۱, x_۲)z_۱ + d_۱y_۱z_۱ + \psi(\psi n_۲, y_۲)z_۱ = u_۱ \in U(A) \text{و} ۱ - x_۱z_۱ = w_۱ \in K(A).$$

بنابراین

$$G\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & o \\ x_۲z_۱ & ۱ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_۱z_۱ & ۰ \\ y_۲z_۱ & ۰ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_۱ & n_۱ \\ m_۱w_۱ & b_۲ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d_۱ & n \\ m & d_۲ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -w_۱ & ۰ \\ o & -۱ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_۱ & n_۲ \\ m_۲ & c_۲ \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in GL_۲(T).$$

از طرفی

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2z_1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1z_1 & 0 \\ y_2z_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2z_1 & 1 \end{pmatrix}, I_2\right] \times B_{21}\left(\begin{pmatrix} y_1z_1 & 0 \\ y_2z_1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

پس

$$\begin{aligned} G_1 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_1w_1u_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}, I_2\right] G \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2z_1 & 1 \end{pmatrix}, I_2\right] B_{21}\left(\begin{pmatrix} y_1z_1 & 0 \\ y_2z_1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & n_1 \\ 0 & b'_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d_1 & n \\ m'_2 & d'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -w_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 & n_2 \\ m_2 & c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in GL_2(T). \end{aligned}$$

بنابراین عناصر $x'_1, y'_1 \in N$ و $x'_2, y'_2 \in B$ در ستون دوم $G_1^{-1}$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} u_1x'_1 + n_1x'_2 + d_1y'_1 + ny'_2 &= 0, \\ \phi(0, x'_1) + b'_2x'_2 + \phi(m'_2, y'_1) + d'_2y'_2 &= 1, \\ w_1x'_1 + c_1y'_1 + n_2y'_2 &= 0, \qquad (\wp\wp) \\ \phi(0, x'_1) - x'_2 + \phi(m_2, y'_1) + c_2y'_2 &= 0. \end{aligned}$$

باتوجه به بند دوم $(\wp\wp)$، و با استفاده از گزاره‌ی ۴.۲.۲، $z_2 \in B$ وجود دارد که

$$b'_2 + \phi(0, x'_1)z_2 + \phi(m'_2, y'_1)z_2 + d'_2y'_2z_2 = u_2 \in U(B) \text{و} 1 - x'_2z_2 = w_2 \in K(B).$$

مشابه روند قبل داریم:

$$G_1 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x'_1z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & y'_1z_2 \\ 0 & y'_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & n_1 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d_2 & n_2 \\ m'_2 & d'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -w_1 & 0 \\ 0 & -w_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 & n_2 \\ m_2 & c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$G_2 = G_1 \left[\begin{pmatrix} 1 & x'_1z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_2\right] B_{21}\left(\begin{pmatrix} 0 & y'_1z_2 \\ 0 & y'_2z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & n_1 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d_2 & n \\ m'_2 & d'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -w_1 & 0 \\ 0 & -w_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 & n_2 \\ m_2 & c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

برای سادگی می‌نویسیم:

$$G_۲ = G_۱[*, *]B_{۲۱}(*).$$

از طرفی چون $G_۱ = [*, *]G[*, *]$، پس

$$G_۲ = G_۱[*, *]B_{۲۱}(*) = [*, *]G[*, *]B_{۲۱}(*)[*, *]B_{۲۱}(*).$$

در نتیجه با استفاده از بندهای (۲) و (۴) رابطه $\Delta$، می‌توان نوشت

$$G_۲ = [*, *]G[*, *]B_{۲۱}(*).$$

بنابراین

$$[*, *]G[*, *]B_{۲۱}(*) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_۱ & n \\ ۰ & u_۲ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d_۲ & n \\ m'_۲ & d'_۲ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -w_۱ & ۰ \\ ۰ & -w_۲ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_۱ & n_۲ \\ m_۲ & c_۲ \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in GL_۲(T).$$

قرار می‌دهیم

$$U = \begin{pmatrix} u_۱ & n \\ ۰ & u_۲ \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} d_۲ & n \\ m'_۲ & d'_۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w_۱ & ۰ \\ ۰ & w_۲ \end{pmatrix} = -dig(w_۱, w_۲), C = \begin{pmatrix} c_۱ & n_۲ \\ m_۲ & c_۲ \end{pmatrix}.$$

پس

$$G_۲ = \begin{pmatrix} U & V \\ -dig(w_۱, w_۲) & C \end{pmatrix}.$$

چون $U \in U(T)$، پس بنا به گزاره‌ی ۱۳.۲.۱، $E \in U(T)$ وجود دارد بطوری‌که

$$[*, *]G[*, *]B_{۲۱}(*) = [U, E]B_{۲۱}(-E^{-۱}dig(w_۱, w_۲)B_{۱۲}[U^{-۱}V]$$

که

$$E = \begin{pmatrix} c_۱ & n \\ m & c_۲ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_۱ & ۰ \\ ۰ & w_۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_۱ & n'_۱ \\ ۰ & u_۲ \end{pmatrix}^{-۱} \begin{pmatrix} d_۱ & n_۲ \\ m'_۲ & d'_۲ \end{pmatrix} \in U(T) \text{ و } W = -E^{-۱}dig(w_۱, w_۲).$$

از طرفی چون $G_۲ = [*, *]G[*, *]B_{۲۱}(*)$، پس $F, X, Y, Z \in GL_۲(T)$ و $S \in T$ وجود دارند که $G_۲ = [F, X]G[Y, Z]B_{۲۱}(S)$. بنابراین

$$[F, X]G[Y, Z]B_{۲۱}(S) = [U, E]B_{۲۱}(-E^{-۱}dig(w_۱, w_۲))B_{۱۲}(U^{-۱}V).$$

پس داریم:

$$G = [F^{-1}U, X^{-1}][U, E]B_{21}(W)B_{12}(U^{-1}V)B_{21}(-S)[Y^{-1}, Z^{-1}]$$

$$= [F^{-1}U, X^{-1}E]B_{21}(W)B_{12}(U^{-1}V)B_{21}(-S)[Y^{-1}, S^{-1}].$$

لذا با استفاده از بند (۲) روابط $\triangle$، داریم:

$$G = [F^{-1}UY^{-1}, X^{-1}EZ^{-1}]B_{21}(-ZE^{-1}WY^{-1})B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

از بند (۳) روابط $\Delta$ ، داریم:

$$[F^{-1}UY^{-1}, X^{-1}EZ^{-1}]B_{21}(-ZE^{-1}WY^{-1}) = B_{21}(-X^{-1}WU^{-1}F)[F^{-1}UY^{-1}, X^{-1}EZ^{-1}].$$

قرار می‌دهیم $W' = X^{-1}WU^{-1}F$.

پس

$$G = B_{21}(-W')[F^{-1}UY^{-1}, X^{-1}EZ^{-1}]B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

با ضرب عبارت فوق از چپ در $B_{21}(W')$، داریم:

$$B_{21}(W')\begin{pmatrix} F & D \\ -I_2 & C \end{pmatrix} = [F^{-1}UY^{-1}, X^{-1}EZ^{-1}]B_{12}(YU^{-1}VZ^{-1})B_{21}(-ZSY^{-1}).$$

بنابراین $C + (W')D = Y^{-1}EZ^{-1} \in U(T)$ که $W' \in K(T)$. در نتیجه طبق قضیه ۴.۲.۲، $T$ نیز شامل تعداد زیادی عنصر کامل است. $\square$

# فصل ۳

# حلقه‌های جابجایی تمیز

## ۱.۳ حلقه‌های جابجایی تمیز

*در این فصل $R$ حلقه‌ای جابجایی و یکدار است. در این بخش مثال‌هایی از حلقه‌های تمیز بیان می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که حلقه‌ی $R$ تمیزاست، اگر و تنها اگر $\frac{R}{\sqrt{0}}$ حلقه تمیز باشد. همچنین نشان می‌دهیم که حلقه چند جمله‌ای‌ها تمیز نیست.*

*در حلقه‌های جابجایی حلقه‌های $f$ ـ تمیز و تمیز معادل هستند. لذا می توانیم از قضایا و گزاره‌های ارائه شده در فصل قبل استفاده کنیم.*

**گزاره ۱.۱.۳.** *هرحلقه موضعی، یک حلقه تمیز است.*

***برهان.*** فرض کنیم $(R, M)$ یک حلقه موضعی است و $x \in R$، بنا به قضیه ۲۰.۲.۱، $x \in U(R)$ یا $x \in M$. اگر $x \in U(R)$، آن‌گاه $x = x + 0$. اگر $x \in M$، آن‌گاه $x = (x-1) + 1$ که $x - 1 \in U(R)$ و $1 \in Id(R)$. بنابراین $x$ یک عنصر تمیز است. در نتیجه $R$ حلقه تمیز است. $\square$

**قضیه ۲.۱.۳.** *برای حلقه جابجایی $R$، شرایط زیر معادلند:*

(۱) *$R$ موضعی است.*

(۲) *$R$ تمیز و تجزیه ناپذیر است.*

(۳) *هر عنصر $x \in R$ به صورت $x = u + e$ است که $u \in U(R)$ و $e \in \{0, 1\}$.*

***برهان.*** (۱) $\Longleftarrow$ (۲) چون $R$ موضعی است، پس $R$ تجزیه ناپذیر است. زیرا اگر $R$ حلقه تجزیه ناپذیر نباشد، آن‌گاه ایده‌آل‌های غیر بدیهی $I, J$ از $R$ وجود دارند که $R = I \oplus J$. از طرفی چون $R$ موضعی است، پس تنها یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $M$ دارد. لذا $I, J \subseteq M$. در نتیجه $R \subseteq M$ که این تناقض است. بنابراین $R$ تجزیه ناپذیر است. از طرفی چون $R$ موضعی است، پس بنا به گزاره‌ی ۱.۱.۳، $R$ تمیز است. پس $R$ تمیز و تجزیه ناپذیر است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنیم $R$ تمیز باشد. پس هر عنصر $x \in R$ را می‌توان به صورت $x = u + e$ نوشت

که $u \in U(R)$ و $e \in Id(R)$. چون $R$ تجزیه ناپذیر است، پس بنابه نتیجه ۱۶.۲.۱، $Id(R) = \{0, 1\}$.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) کافی است نشان دهیم که هر عنصر غیر یکه از $R$ در $J(R)$ قرار می‌گیرد. فرض کنیم که $x \in R$، غیر یکه باشد. پس برای هر $r \in R$، $rx$ نیز غیر یکه است. لذا $rx = u + 1$ که $u \in U(R)$. بنابراین $1 - rx = u \in U(R)$. در نتیجه بنا به گزاره‌ی ۲۱.۲.۱، $x \in J(R)$. □

**تعریف ۳.۱.۳.** حلقه جابجایی $R$ را یک حلقه $pm$ می‌نامیم، هرگاه هر ایده‌آل اول از $R$ مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال منحصر بفرد باشد.

به سادگی می‌توان نشان داد که حلقه $R$، $pm$ است اگر برای هر ایده‌آل اول $P$، حلقه $\frac{R}{P}$ موضعی باشد.

**نتیجه ۴.۱.۳.** *اگر حلقه $R$ تمیز باشد، آن‌گاه $R$ یک حلقه‌ی $pm$ است.*

***برهان.*** فرض کنیم حلقه $R$ تمیز و $P$ یک ایده‌آل اول از $R$ باشد. پس بنا به بند (۱) قضیه ۳.۱.۲، $\frac{R}{P}$ یک حلقه تمیز است. از طرفی چون $P$ ایده‌آل اول است، پس $\frac{R}{P}$ دامنه صحیح است. لذا $\{0, 1\}$ تنها خودتوان‌های آن هستند. در نتیجه طبق قضیه ۲.۱.۳، $\frac{R}{P}$ یک حلقه موضعی است. بنابراین $R$ یک حلقه $pm$ است. □

**قضیه ۵.۱.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی با تعداد متناهی ایده‌آل اول مینیمال باشد ( به عنوان مثال، حلقه نوتری )، در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *$R$ حاصلضرب تعداد متناهی از حلقه‌های موضعی است.*

(۲) *حلقه $R$ تمیز است.*

(۳) *$R$ یک حلقه $pm$ است.*

***برهان.*** (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنیم که $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ که هر $R_i$ یک حلقه موضعی است. پس بنابه گزاره‌ی ۱.۱.۳، $R_i$ ها تمیز هستند. بنابراین طبق بند (۲) گزاره‌ی ۳.۱.۲، $R$ نیز حلقه تمیز است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳) بنا به نتیجه ۴.۱.۳واضح است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) چون هر ایده‌آل اول مینیمال از $R$ مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال منحصر بفرد است، پس $R$ تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال مانند $M_1$ ، ... ، $M_n$ دارد. فرض کنیم $I_i = 0R_{M_i} \cap R$. پس $I_i = \left\{a \in R \mid \exists s \in R - M_i; as = 0\right\}$. لذا بنا به لم ۲۵.۲.۱، $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = 0$. حال داریم $\sqrt{I_i} = \sqrt{0R_{M_i}} \cap R = \cap\left\{P \mid M_i \text{ ایده‌آل اول مینیمال } R \text{ مشمول در } P\right\}$. چون هرایده‌آل اول مینیمال از $R$ مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال منحصربفرد است، پس $\dfrac{R}{I_i}$ ها حلقه‌های موضعی هستند. زیرا اگر $\dfrac{\underline{n}}{I_i}$ ایده‌آل ماکسیمالی از $\dfrac{R}{I_i}$، آنگاه $I_i \subseteq \underline{n}$. از طرفی $|Min(R)| < \infty$ و

$$\prod_{\substack{P \in Min(R)\\ P \subseteq M_i}} P \subseteq \bigcap_{\substack{P \in Min(R)\\ P \subseteq M_i}} P = \sqrt{I_i} \subseteq \underline{n}.$$

در نتیجه ایده‌آل اول $P \in Min(R)$ وجود دارد که $P \subseteq \underline{n}$. بنابراین $\underline{n} = M_i$.

حال نشان می‌دهیم $I_i$ها متباین هستند. فرض کنیم $\sqrt{I_i} + \sqrt{I_j} \neq R$ (فرض خلف). پس ایده‌آل ماکسیمالی مانند $\underline{m}$ وجود دارد که

$$\bigcap_{\substack{p \in Min(R)\\ p \subseteq M_i}} P = \sqrt{I_i} \subseteq \sqrt{I_i} + \sqrt{I_j} \subseteq \underline{m}.$$

لذا $M_i = \underline{m}$. از طرفی

$$\bigcap_{\substack{p \in Min(R)\\ p \subseteq M_j}} P = \sqrt{I_j} \subseteq \sqrt{I_i} + \sqrt{I_j} \subseteq \underline{m}.$$

در نتیجه $M_j = \underline{m}$. بنابراین $M_i = M_j$ که تناقض است. بنابراین $\sqrt{I_i} + \sqrt{I_j} = R$. لذا $I_i$ها دو به دو متباین هستند. بنابراین طبق نتیجه ۱۷.۲.۱ داریم، $R \cong \dfrac{R}{I_1} \times \cdots \times \dfrac{R}{I_n}$. در نتیجه حلقه $R$ حاصلضرب تعداد متناهی از حلقه‌های موضعی است. $\square$

**لم ۶.۱.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی و $e \in R$ خودتوان باشد. در این‌صورت $2e - 1 \in U(R)$، $1 - e \in Id(R)$ و $e = (2e - 1) + (1 - e)$. اگر $e = u + f$ که $u \in U(R)$ و $f \in Id(R)$، آن‌گاه $u = 2e - 1$ و $f = 1 - e$.*

***برهان.*** فرض کنیم $M$ یک ایده‌آل ماکسیمال از $R$ باشد. چون $e \in M$ یا $1 - e \in M$، پس

$2e-1 \notin M$. لذا $2e-1 \in U(R)$. درنتیجه $1-e \in Id(R)$ و $e=(2e-1)+(1-e)$.

فرض کنیم که $e=u+f$ که $u \in U(R)$ و $f \in Id(R)$. بنابراین

$$e=u+f \Longrightarrow ef=e(ef)=(u+f)ef=uef+ef \Longrightarrow uef=0.$$

چون $u \in U(R)$، پس $ef=0$. لذا

$$0=ef=(u+f)f=uf+f \Longrightarrow f=-uf \text{ و}$$

$$e=e^2=(u+f)e=ue+fe=ue \Longrightarrow ue=e=u+f=u-uf=u(1-f).$$

از طرفی $u \in U(R)$، پس $e=1-f$. در نتیجه $f=1-e$. □

**لم ۷.۱.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد. اگر $S \subseteq Id(R)$ بطوری‌که هر عنصر خودتوان $x \in R$ را بتوان به صورت $x=u+e$ نوشت که $u \in U(R)$ و $e \in S$، آن‌گاه $S=Id(R)$.*

**برهان.** فرض کنیم $f \in Id(R)$. پس $1-f \in Id(R)$. لذا بنابه فرض $1-f=u+e$ که $u \in U(R)$ و $e \in S \subseteq Id(R)$. پس بنا به لم ۶.۱.۳، $f=(1-f)-1=e$. بنابراین $f \in S$ و لذا $Id(R) \subseteq S$. در نتیجه $Id(R)=S$. □

**قضیه ۸.۱.۳.** *برای حلقه جابجایی $R$، گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *$R$ حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های موضعی است.*

(۲) *$R$ حلقه تمیز با تعداد متناهی خودتوان است، یا معادلا $R$ حلقه تمیزی است که حاصلضرب تعداد متناهی از حلقه‌های تجزیه ناپذیر است.*

(۳) *مجموعه متناهی $\{e_1,\dots,e_n\}$ از خودتوان های $R$ وجود دارند بطوری‌که هر عنصر $x \in R$ را بتوان به صورت $x=u+e_i$ نوشت که $u \in U(R)$ و $e_i \in \{e_1,e_2,\dots,e_n\}$.*

**برهان.** (۱) $\Longleftarrow$ (۲): فرض کنیم که $R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_s$ که هر $R_i$ حلقه موضعی است. پس بنابه گزاره ۱.۱.۳، $R_i$ ها حلقه‌های تمیز هستند. لذا بنابه بند (۲) گزاره ۳.۱.۲، $R$ نیز حلقه تمیز است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳): بنا به نتیجه ۲.۱.۳، واضح است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱): چون $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq Id(R)$ و هر عنصر $x \in R$ را می‌توان به صورت $x = u + e_i$ نوشت که $u \in U(R)$ و $e_i \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$، پس بنا به لم ۷.۱.۳، $Id(R) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. بنابراین $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_s$ که هر $R_i$ تجزیه ناپذیر است. از طرفی بنابه فرض $R$ حلقه‌ای تمیز است، پس بنابه بند (۲) گزاره‌ی ۳.۱.۲، $R_i$ها نیز حلقه‌های تمیز هستند. در نتیجه بنا به قضیه ۲.۱.۳، $R_i$ها حلقه‌های موضعی هستند. □

**قضیه ۹.۱.۳.** *فرض کنیم $R$ حلقه جابجایی باشد. در این‌صورت $R$ حلقه تمیز است، اگر و تنها اگر $\frac{R}{\sqrt{0}}$ حلقه تمیز باشد.*

**برهان.** $\Longleftarrow$: فرض کنیم $R$ حلقه تمیز باشد. بنابراین بنا به گزاره‌ی ۳.۱.۲، $\frac{R}{\sqrt{0}}$ نیز حلقه تمیز است.

$\Longrightarrow$: برای $x \in R$، $\overline{x} \in \frac{R}{\sqrt{0}}$ یک یکه است، اگر و تنها اگر $x$ یک یکه باشد. همچنین هر خودتوان از $\overline{R}$ به یک خودتوان از $R$ انتقال می‌یابد.

فرض کنیم $x \in R$، پس $\overline{x} \in \overline{R} = \frac{R}{\sqrt{0}}$. بنابراین بنابه فرض $\overline{x} = u + e$ که $u \in U(\overline{R})$ و $e \in Id(\overline{R})$. فرض کنیم که $e$ به یک خودتوان از $R$ مانند $f$ انتقال یابد. پس $\overline{x - f} = \overline{x} - e = u$. لذا $x - f \in U(R)$. در نتیجه $x = (x - f) + f$ یک عنصر تمیز است. بنابراین $R$ حلقه تمیز است. □

**قضیه ۱۰.۱.۳.** *اگر $R$ یک حلقه جابجایی فون نیومن منظم باشد، آن‌گاه $R$ تمیز است.*

**برهان.** فرض کنیم که $x \in R$. چون $R$ حلقه فون نیومن منظم است، پس $y \in R$ وجود دارد که $x = xyx$. لذا $x$ را می‌توان به صورت $x = ue$ نوشت که $e = xy \in Id(R)$ و

$(u^{-1} = ye + 1 - e)$ $u = (xe + 1 - e) \in U(R)$. حال داریم:

$$x = ue - (1 - e) + (1 - e)$$

که $(v^{-1} = e - 1 + u^{-1}e)v = ue - (1 - e) \in U(R)$ و $(1 - e) \in Id(R)$.

لذا $x \in R$ تمیز است. در نتیجه حلقه $R$ تمیز است. □

**تعریف ۱۱.۱.۳.** فرض کنیم $R$ حلقه‌ای جابجایی و ناصفر باشد:

الف ) عبارتی چون

$$p_0 \subset p_1 \subset \ldots \subset p_n$$

که در آن $p_0, \ldots, p_n$ ایده‌آل‌های اول $R$ هستند، یک زنجیره از ایده‌آل‌های اول $R$ می‌نامیم. طول این زنجیره تعداد علامات $\subset$، یعنی یکی کمتر از تعداد ایده‌آل‌های اول موجود در آن است.

ب ) **بعد** $R$ را برابر با

$$sup\Big\{n \in \mathbb{N}_0 : \text{زنجیره‌ای به طول } n \text{ از ایده‌آل‌های اول} R \text{وجود داشته باشد}\Big\}$$

تعریف می‌کنیم مشروط براینکه مجموعه فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این‌صورت آن را $\infty$ می‌نامیم. بعد $R$ را با $dimR$ نشان می‌دهیم.

**نتیجه ۱۲.۱.۳.** *هر حلقه جابجایی که بعد آن صفر باشد، یک حلقه تمیز است.*

***برهان.*** فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد که $dimR = 0$. چون $dimR = 0$، پس $dim\dfrac{R}{\sqrt{0}} = 0$. در نتیجه $\dfrac{R}{\sqrt{0}}$ یک حلقه تقلیل یافته با بعد صفر یا معادلا یک حلقه فون نیومن منظم است. بنابراین طبق قضیه ۱۰.۱.۳، $\dfrac{R}{\sqrt{0}}$ یک حلقه تمیز است و لذا بنا به قضیه ۹.۱.۳، $R$ نیز حلقه تمیز است. □

**گزاره ۱۳.۱.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد. در این‌صورت $R[X]$ حلقه تمیز نیست.*

**برهان.** عنصر $x+1$ را در $R[X]$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $1+x=(e_0+e_1x)+(b_0+b_1x)=(e_0+b_0)+(e_1+b_1)x$ که $e_0+e_1x$ یک عنصر خودتوان و $b_0+b_1x$ یک یکه در $R[x]$ باشد. پس بنا به قضیه ۱.۲.۱۸، $b_0\in U(R)$ و $b_1$ پوچ‌توان است. پس $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $b_1^m=0$. از طرفی چون $e_0+e_1x$ خودتوان است، پس $e_1^2=0$. بنابراین $(e_1+b_1)^{m+2}=0$. طرفین تساوی $1+x=(e_0+b_0)+(e_1+b_1)x$ را به توان $m+2$ می‌رسانیم. پس داریم:

$$1+\cdots+x^{m+2}=(e_0+b_0)+\cdots+(e_0+b_0)(e_1+b_1)^{m+1}x^{m+1}.$$

که این یک تناقض است. پس $x+1$ تمیز نیست و لذا حلقه‌ی $R[x]$ تمیز نیست. $\square$

**مثال ۳.۱.۱۴.** فرض کنیم $K$ یک میدان باشد و $R=K[[X,Y]]$. فرض کنیم $S=R-\{(X)\cup(Y)\}$. در این‌صورت $R_s$حلقه تمیز نیست.

**حل.** چون $K$ میدان است، پس $R$ یک حلقه موضعی است که $(X,Y)$ ایده‌آل ماکسیمال آن است. لذا طبق گزاره‌ی ۳.۱.۱، $R$ حلقه تمیز است. فرض کنیم $f,g\in S$. پس $X\nmid f,g$ و $Y\nmid f,g$ . لذا $f=Xh+e$ و $g=Xm+n$. در نتیجه $fg=X(hXm+hn+em))+en$. بنابراین $X\nmid fg$. بطور مشابه برای $Y\nmid f,g$ نیز برقرار است. پس $fg\in S$. همچنین $1\in S$. در نتیجه $S$ یک مجموعه ضربی بسته است.

حال نشان می‌دهیم که $R_s$ یک $PID$ است. چون $K$ میدان است، پس $R$ دامنه صحیح است. لذا $R_s$ نیز دامنه صحیح است. فرض کنیم $I=(Xf)$ و $J=(Yg)$ باشد و $f,g\in R_s$. بوضوح $I$ و $J$ ایده‌آل‌های $R_s$ هستند. حال ادعا می‌کنیم که ایده‌آل‌های سره $R_s$ به صورت $I=(Xf)$ و $J=(Yg)$ است. فرض کنیم $K$ ایده‌آلی از $R_s$ باشد که با $I$ و $J$ برابر نباشد. در این‌صورت $K\cap S\neq\emptyset$ و لذا $K=R_s$. در نتیجه $R_s$ یک $PID$ است. از طرفی $(X)\in spec(R)$ و $(X)\cap S=\emptyset$، پس طبق قضیه ۱.۲.۱۲، $(\frac{X}{1})\in spec(R_s)$. بطور مشابه $(\frac{Y}{1})\in spec(R_s)$. بنابراین $R_s$، دو ایده‌آل اول دارد. چون $R_s$یک $PID$ است، پس $(\frac{X}{1})$ و $(\frac{Y}{1})$ ایده‌آل‌های ماکسیمال $R_s$ هستند. همچنین

$Id(R_s) = \{۰, ۱\}$. پس بنا به نتیجه ۱۶.۲.۱، $R_s$ یک حلقه تجزیه ناپذیر است. اما $R_s$ حلقه تمیز نیست. چون $R_s$ حلقه تجزیه ناپذیر است، پس اگر تمیز نیز باشد، بنا به قضیه ۲.۱.۳، موضعی می‌شود که این تناقض است. زیرا $R_s$ دو ایده‌آل ماکسیمال دارد. بنابراین $R_s$ حلقه تمیز نیست.

*از مثال بالا دریافتیم که موضعی سازی از یک حلقه تمیز، همیشه تمیز نیست.*

## ۲.۳ روش‌های دیگری که می‌توان حلقه‌های تمیز رابررسی نمود

**قضیه ۱.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد. در این‌صورت $R = U(R) \cup Id(R)$ ، اگر و تنها اگر $R$ یک میدان یا یک حلقه بولی باشد.*

***برهان.*** $\Leftarrow$ واضح است.

$\Rightarrow$ فرض کنیم $M$ یک ایده‌آل ماکسیمال از $R$ باشد. پس $M \subseteq Id(R)$؛ برای هر $m \in M$، $m(1-m) = 0$ و لذا در $R_M$، $\frac{m}{1} = \frac{0}{1}$. پس $R_M$ یک میدان است. اگر $R$ دارای فقط یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $M$ باشد، آن‌گاه در این حالت $R \cong R_M$ و لذا $R$ میدان خواهد بود. حال فرض کنیم که $R$ دو ایده‌آل ماکسیمال متمایز مانند $M$ و $N$ داشته باشد. پس $\frac{R}{MN} \simeq \frac{R}{M} \times \frac{R}{N}$ که هر عنصر آن یکه یا خودتوان است. فرض کنیم $x \in \frac{R}{M}$. پس $(x, 0) \in \frac{R}{M} \times \frac{R}{N}$ یکه نیست و لذا خودتوان است. بنابراین $x \in \frac{R}{M}$ نیز خودتوان است. درنتیجه $\frac{R}{M} \simeq \mathbb{Z}_2$. از طرفی چون $R_M$ یک میدان است، پس $\mathbb{Z}_2 \simeq \frac{R}{M} \simeq \frac{R_M}{M_M} \simeq R_M$. بنابراین $R$ یک حلقه بولی است. $\square$

**گزاره ۲.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه $R$ تمیز است.*

(۲) *هر عنصر $x \in R$ نمایشی به صورت $x = u - i$ دارد که $u \in U(R)$ و $i \in Id(R)$.*

(۳) *هر عنصر $x \in R$ نمایشی به صورت $x = u + i$ دارد که $u \in U(R) \cup \{0\}$ و $i \in Id(R)$.*

(۴) *هر عنصر $x \in R$ نمایشی به صورت $x = u - i$ دارد که $u \in U(R) \cup \{0\}$ و $i \in Id(R)$.*

***برهان.*** (۱) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم $x \in R$. قرار می‌دهیم $-x = u + i$ که $u \in U(R)$ و $i \in Id(R)$. بنابراین $x = (-u) - i$ که $-u \in U(R)$ و $i \in Id(R)$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم $x \in R$. پس بنا به فرض $-x = u - i$ که $u \in U(R)$ و $i \in Id(R)$. بنابراین $x = (-u) + i$ که $-u \in U(R)$ و $i \in Id(R)$.

(۳) $\Longleftarrow$ (۴) مشابه (۲) $\Longleftarrow$ (۱) اثبات می‌شود.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳) واضح است. $\square$

**گزاره ۳.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ حلقه جابجایی باشد که دقیقا دو ایده‌آل ماکسیمال دارد و $\text{۲} \in U(R)$. در این‌صورت هر $x \in R$، نمایشی به صورت $x = u + e$ یا $x = u - e$ دارد که $u \in U(R)$ و $e \in Id(R)$.*

***برهان.*** فرض کنیم $M_\text{۱}$ و $M_\text{۲}$ ایده‌آل‌های ماکسیمال $R$ باشند. فرض کنیم $x \in R$. اگر $x \in U(R)$، آن‌گاه $x = x + \text{۰}$ که $x \in U(R)$ و $\text{۰} \in Id(R)$. اگر $x \in M_\text{۱} \cap M_\text{۲} \in J(R)$، آن‌گاه $x + \text{۱} = u_\text{۱}$ و $x - \text{۱} = u_\text{۲}$. بنابراین $x = u_\text{۱} - \text{۱} = u_\text{۲} + \text{۱}$ که $u_\text{۱}, u_\text{۲} \in U(R)$ و $\text{۱} \in Id(R)$. حال فرض کنیم که $x \in M_\text{۱} - M_\text{۲}$. پس $x - \text{۱}, x + \text{۱} \notin M_\text{۱}$. فرض کنیم که $x - \text{۱}, x + \text{۱} \in M_\text{۲}$. پس $\text{۲}x = (x - \text{۱}) + (x + \text{۱}) \in M_\text{۲}$. لذا $x \in M_\text{۲}$ که بافرض تناقض دارد. در نتیجه $x - \text{۱}, x + \text{۱} \notin M_\text{۲}$ و لذا $x - \text{۱} \in U(R)$ یا $x + \text{۱} \in U(R)$. بنابراین $x = u + \text{۱}$ یا $x = u - \text{۱}$ که $u \in U(R)$ و $\text{۱} \in Id(R)$. همچنین برای حالتی که $x \in M_\text{۲} - M_\text{۱}$ مشابه روند قبل اثبات می شود. در نتیجه برای هر $x \in R$، $x = u - e$ یا $x = u + e$ که $u \in U(R)$ و $e \in Id(R)$. $\square$

**مثال ۴.۲.۳.** فرض کنیم $R = Z_{(\text{۳})} \cap Z_{(\text{۵})} = \left\{ \frac{a}{b} | \, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq \text{۰} \text{ و } \text{۳} \nmid b, \text{۵} \nmid b \right\}$. در این‌صورت هر عنصر $x \in R$ را می‌توان به صورت $x = u - e$ یا $x = u + e$ نوشت که $u \in U(R)$ و $e \in Id(R)$. اما $R$ حلقه تمیز نیست.

**حل.** می‌دانیم که $M_\text{۱} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in < \text{۳} >, b \neq \text{۰} \text{ و } \text{۳} \nmid b \right\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathbb{Z}_{(\text{۳})}$ است و $M_\text{۲} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in < \text{۵} >, b \neq \text{۰} \text{ و } \text{۵} \nmid b \right\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathbb{Z}_\text{۵}$ است. پس داریم:

$$I = R \cap M_\text{۱} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in < \text{۳} >, b \neq \text{۰} \text{ و } \text{۳} \nmid b, \text{۵} \nmid b \right\} \text{ و}$$
$$J = R \cap M_\text{۲} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in < \text{۵} >, b \neq \text{۰} \text{ و } \text{۳} \nmid b, \text{۵} \nmid b \right\}.$$

حال ادعا می‌کنیم که $Max(R) = \{I, J\}$. (فرض خلف ) فرض کنیم که $I$ ایده‌آل ماکسیمال نباشد. پس ایده‌آل ماکسیمالی مانند $N$ وجود دارد که $I \subsetneq N$. در نتیجه $\frac{a}{b} \in N - I$ وجود دارد. پس $۳ \nmid a$. لذا $(۳, a) = ۱$. پس $m, n \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که $am + ۳n = ۱$ (چون $\frac{a}{b} \in N$، پس $b.\frac{a}{b} \in N$ و از طرفی $۳ \in N$ ). پس $۱ \in N$، یعنی $I = R$ که این تناقض است. بطور مشابه برای $J$ هم برقرار است.

حال نشان می‌دهیم که $I$ و $J$ تنها ایده‌آل‌های ماکسیمال $R$ هستند. فرض کنیم $\frac{a}{b} \in R - (I \cup J)$. پس $(a, ۱۵) = ۱$. از طرفی $(b, ۱۵) = ۱$. لذا $\frac{b}{a} \in R$. پس هر عضو خارج از $I$ و $J$ وارون‌پذیر است. بنابراین نتیجه حاصل است. چون $R$ دقیقا دو ایده‌آل ماکسیمال دارد و $۲ \in U(R)$، پس طبق گزاره‌ی ۳.۲.۳، هر عنصر آن را می‌توان بصورت $x = u + e$ یا $x = u - e$ نوشت که $u \in U(R)$ و $e \in Id(R)$. از طرفی چون $\mathbb{Z}$ دامنه صحیح است، پس $R$ نیز دامنه صحیح است. لذا $Id(R) = \{۰, ۱\}$. پس بنا به نتیجه ۱۶.۲.۱، $R$ حلقه تجزیه ناپذیر است. اما $R$ حلقه تمیز نیست. زیرا اگر $R$ تمیز نیز باشد، آن‌گاه بنا به قضیه ۲.۱.۳، موضعی می‌شود که این تناقض است. پس $R$ حلقه تمیز نیست.

**گزاره ۵.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ یک $UFD$ باشد و $\{p_\alpha\}$ مجموعه همه عناصر اول غیر شریک در $R$ باشد بطوری که $p_\alpha \nmid p_\beta - ۱$. در این صورت هر عنصر $x \in R$ نمایشی به صورت $x = (u_۱ + e_۱) \ldots (u_n + e_n)$ دارد که $u_i \in U(R)$ و $e_i \in \{۰, ۱\}$.*

***برهان.*** چون $p_\alpha \nmid p_\beta - ۱$، پس $p_\beta - ۱ = u_\beta$. بنابراین $p_\beta = u_\beta + ۱$. از طرفی چون $R$ یک $UFD$ است، پس $e_i \in \{۰, ۱\}$. در نتیجه هر عنصر ناصفر غیر یکه آن را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از یک یکه و $u_\beta + ۱$ نوشت. $\square$

**مثال ۶.۲.۳.** فرض کنیم $R = Z_{(۳)} \cap Z_{(۵)}$. در این صورت هر عنصر $x \in R$، نمایشی به صورت $x = (u_۱ + e_۱) \ldots (u_n + e_n)$ دارد که $u_i \in U(R)$ و $e_i \in \{۰, ۱\}$.

**حل.** از مثال ۴.۲.۳، داریم که $R$ دامنه صحیح است و $e_i \in \{۰, ۱\}$. حال نشان می‌دهیم که $R$ یک

$UFD$ است. فرض کنیم که $\frac{m}{n} \in R$ وارون‌پذیر نباشد. پس $m \mid ۳$ یا $m \mid ۵$ . اگر $m \mid ۳$، آن‌گاه $\frac{m}{n} = (\frac{۳}{۱}.\frac{t_۱}{s_۱})\dots(\frac{۳}{۱}.\frac{t_n}{s_n})$. اگر $m \mid ۵$، آن‌گاه $\frac{m}{n} = (\frac{۵}{۱}.\frac{t_۱}{s_۱})\dots(\frac{۵}{۱}.\frac{t_m}{s_m})$ و اگر $m \mid ۱۵$ آن‌گاه $\frac{m}{n} = (\frac{۳}{۱}.\frac{t_۱}{s_۱})\dots(\frac{۳}{۱}.\frac{t_n}{s_n})(\frac{۵}{۱}.\frac{t_{n+۱}}{s_{n+۱}})\dots(\frac{۵}{۱}.\frac{t_m}{s_m})$ که $\frac{t_i}{s_i}$ عناصری وارون‌پذیر هستند. قرار می‌دهیم $(\frac{۳}{۱}.\frac{t_i}{s_i}) = p_i$ و $(\frac{۵}{۱}.\frac{t_i}{s_i}) = p'_i$. پس $p_i$ و $p'_i$ عناصری تحویل‌ناپذیر هستند. از طرفی چون $m, n \in \mathbb{Z}$، پس این تجزیه یکتاست. بنابراین $R$ یک $UFD$ است. همچنین $۱ - \frac{۵}{۱} \nmid \frac{۳}{۱}$ و $۱ - \frac{۳}{۱} \nmid \frac{۵}{۱}$ . در نتیجه بنابه گزاره‌ی ۵.۲.۳، هر عنصر $x \in R$ را می توان بصورت $x = (u_۱ + e_۱)\dots(u_n + e_n)$ نوشت که $e_i \in \{۰, ۱\}$ و $u_i \in U(R)$. اما از مثال ۴.۲.۳، داریم که $R$ حلقه تمیز نیست.

**لم ۷.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد. اگر $e, f \in R$ خودتوان باشند و $e - f \in J(R)$، آن‌گاه $e = f$.*

***برهان.*** فرض کنیم $e - f \in J(R)$. چون $J(R)$ ایده‌آلی از $R$ است، پس $f(۱ - e) = (e - f)(e - ۱) \in J(R)$. از طرفی $f(۱ - e)$ عنصری خودتوان است، پس $f(۱ - e) = ۰$ ( زیرا تنها عنصر خودتوان در $J(R)$، عنصر صفر است ). بنابراین $f = ef$. همچنین $f - e \in J(R)$. لذا مشابه روند قبل داریم $e = ef$. بنابراین

$$e - f = ef - ef = ۰ \Longrightarrow e = f$$

□

**تعریف ۸.۲.۳.** حلقه $R$ را تمیز یکتا می‌نامیم، هرگاه هر $x \in R$ نمایش منحصر بفردی به صورت $x = u + i$ داشته باشد که $u \in U(R)$ و $i \in Id(R)$.

**قضیه ۹.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد و برای هر ایده‌آل ماکسیمال $M$ از $R$، $\frac{R}{M} \cong \mathbb{Z}_۲$. اگر $x \in R$ نمایشی به صورت $x = u + i$ داشته باشد که $u \in U(R)$ و $i \in Id(R)$، آن‌گاه این نمایش منحصر به فرد است.*

**برهان.** فرض کنیم $x \in R$، $x = u_1 + e_1 = u_2 + e_2$ که $u_1, u_2 \in U(R)$ و $e_1, e_2 \in Id(R)$. فرض کنیم $M$ ایده‌آل ماکسیمالی از $R$ باشد. پس در $\frac{R}{M} \cong \mathbb{Z}_2$، $\overline{u_1} + \overline{e_1} = \overline{u_2} + \overline{e_2}$ که $\overline{u_1}, \overline{u_2}$ یکه‌هایی در $\mathbb{Z}_2$ هستند. لذا $\overline{u_1} = \overline{u_2}$. در نتیجه $\overline{e_1} = \overline{e_2}$. پس $e_1 - e_2 \in M$ و لذا بنابه لم ۷.۲.۳، $e_1 = e_2$. بنابراین $u_1 = u_2$. □

**نتیجه ۱۰.۲.۳.** *حلقه موضعی $(R, M)$ تمیز یکتاست، اگر وتنها اگر $\frac{R}{M} \cong \mathbb{Z}_2$.*

**برهان.** $\Leftarrow$ بنابه قضیه ۹.۲.۳، $R$ تمیز یکتاست.

$\Longrightarrow$ فرض کنیم $u \in U(R)$. پس $u + 1 \notin U(R)$. زیرا در غیر این صورت $u + 1 = (u + 1) + 0$ که دو نمایش برای $u + 1$ به صورت حاصل جمعی از یک یکه و یک خودتوان وجود دارد. در نتیجه $(u + 1) \in M$. بنابراین در $\overline{R} = \frac{R}{M}$، $\overline{u} + \overline{1} = \overline{0}$. از طرفی چون هر عنصر غیر صفر از $\overline{R}$ تصویری از یک یکه از $R$ است، پس $\overline{R}$ میدانی که برای هر $0 \neq x \in \overline{R}$، $x + 1 = 0$. در نتیجه $\overline{R}$ دقیقا دو عضو دارد. و بنابراین $\overline{R} \cong \mathbb{Z}_2$. □

**قضیه ۱۱.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد.*

(۱) *حاصلضرب مستقیم $R = \prod R_\alpha$ از حلقه‌های جابجایی $\{R_\alpha\}$ تمیز یکتاست، اگر و تنها اگر هر $R_\alpha$ تمیز یکتا باشد.*

(۲) *حلقه $R$ تمیز یکتاست، اگر و تنها اگر $\frac{R}{\sqrt{0}}$ تمیز یکتا باشد.*

(۳) *حلقه $R$ تمیز یکتاست، اگر و تنها اگر $R[[X]]$ تمیز یکتا باشد.*

**برهان.**۱) مشابه بند (۲) گزاره ی ۳.۱.۲، اثبات می‌شود.

(۲) $\Longleftarrow$: فرض کنیم که $R$ یک حلقه تمیز یکتا باشد. پس بنا به قضیه ۹.۱.۳، $\overline{R} = \frac{R}{\sqrt{0}}$ نیز یک حلقه تمیز است. حال یکتابودن را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $x \in R$، $\overline{x} = u_1 + e_1 = u_2 + e_2$ که $u_1, u_2 \in U(\overline{R})$ و $e_1, e_2 \in Id(\overline{R})$. (فرض خلف)فرض کنیم که $e_1 \neq e_2$ باشد. $f_i \in Id(R)$

را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overline{f_i} = e_i$. بنابراین $f_1 \neq f_2$. پس $\overline{x - f_i} = u_i \in U(\overline{R})$. در نتیجه $v_i = x - f_i \in U(R)$. بنابراین $x = v_1 + f_1 = v_2 + f_2$ که دو نمایش متفاوت برا ی $x$ هستند که این با یکتا بودن $R$ تناقض دارد. لذا $e_1 = e_2$. در نتیجه $u_1 = u_2$. بنابراین نتیجه حاصل است.

$\Longrightarrow$: فرض کنیم که $\overline{R} = \frac{R}{\sqrt{0}}$ یک حلقه تمیز یکتا باشد. پس بنا به قضیه ۹.۱.۳، $R$ یک حلقه تمیز است. فرض کنیم که برای هر $x \in R$، $x = u_1 + e_1 = u_2 + e_2$ که $u_1, u_2 \in U(R)$ و $e_1, e_2 \in Id(R)$. پس $\overline{x} = \overline{u_1} + \overline{e_1} = \overline{u_2} + \overline{e_2}$. چون $\overline{R}$ یک حلقه تمیز یکتاست، پس $\overline{e_1} = \overline{e_2}$. لذا $e_1 - e_2 \in \sqrt{0} \subseteq J(R)$. در نتیجه بنابه لم ۷.۲.۳، $e_1 = e_2$. پس $u_1 = u_2$. بنابراین $R$ حلقه تمیز یکتاست.

(۳) $\Longrightarrow$: فرض کنیم $R[[X]]$ حلقه تمیز یکتا باشد، پس هر عنصر آن حاصل جمعی منحصر بفرد از یک یکه و یک خودتوان است. بنابراین عناصر زیر حلقه $R$ از $R[[X]]$ نیز چنین است. بنابراین $R$ نیز حلقه تمیز یکتاست.

$\Longleftarrow$: فرض کنیم $R$ یک حلقه تمیز یکتاست. فرض کنیم که در $R[[X]]$، $u_1 + e_1 = u_2 + e_2$ که $u_1, u_2 \in U(R[[X]])$ و $e_1, e_2 \in R[[X]]$. چون $Id(R) = Id(R[[X]])$، پس $e_1, e_2 \in Id(R)$. لذا $u_1(0) + e_1 = u_2(0) + e_2$ که $u_1(0), u_2(0) \in U(R)$ و $e_1, e_2 \in Id(R)$. پس $e_1 = e_2$ و $u_1(0) = u_2(0)$. در نتیجه $u_1 = u_2$. بنابراین $R[[X]]$ حلقه تمیز یکتاست. □

**قضیه ۱۲.۲.۳.** *فرض کنیم $R$ یک حلقه جابجایی باشد و $dimR = 0$. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *حلقه $R$ تمیز یکتاست.*

(۲) *$\frac{R}{\sqrt{0}}$ حلقه بولی است.*

(۳) *برای هر ایده‌آل ماکسیمال $M$ از $R$، $\frac{R}{M} \cong \mathbb{Z}_2$.*

***برهان.*** (۱) $\Longleftarrow$ (۲): بنابه فرض $R$ یک حلقه تمیز یکتاست، پس بنابه قضیه ۱۱.۲.۳، $\frac{R}{\sqrt{0}}$ نیز یک حلقه تمیز یکتاست . از طرفی $\frac{R}{\sqrt{0}}$ یک حلقه تقلیل یافته با بعد صفر است. پس $\frac{R}{\sqrt{0}}$ یک حلقه فون نیومن منظم است. بنابراین کافی است ثابت کنیم که حلقه تمیز یکتای فون نیومن منظم $R$ ، یک حلقه بولی است. فرض کنیم $x \in R$، $x = u + 1$ که $u \in U(R)$. چون حلقه $R$ فون نیومن است، پس $a \in R$ وجود دارد بطوری‌که $x = xax = ax^2$. حال داریم $x = x - (1 - ax) + (1 - ax)$ که $x - (1 - ax) \in U(R)$ (اگر $M$ یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه $R$ باشد و $x \in M$، آن‌گاه $x-(1-ax) \notin M$ و اگر $x \notin M$، آن‌گاه $ax \notin M$. لذا $1-ax \in M$. در نتیجه $x-(1-ax) \notin M$ ) و $(1 - ax)^2 = (1 - ax)$. لذا $(1 - ax) \in Id(R)$. چون $R$ یک حلقه تمیز یکتاست، پس $x - (1 - ax) = u$ و $1 - ax = 1$. لذا $ax = 0$. پس $x = ax^2 = 0$. بنابراین $u + 1 = 0$ در نتیجه $U(R) = \{1\}$. از طرفی چون حلقه $R$ فون نیومن منظم است، پس هر $x \in R$ را می‌توان به صورت $x = eu$ نوشت که $u \in U(R)$ و $e \in Id(R)$. چون $U(R) = \{1\}$، $x = e \cdot 1 = e$. لذا $R$ یک حلقه بولی است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳): فرض کنیم $M$ یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه $R$ باشد. چون $dimR = 0$، پس هر ایده‌آل اول حلقه $R$ یک ایده‌آل ماکسیمال است. از طرفی چون $\frac{R}{\sqrt{0}}$یک حلقه بولی است، پس برای هر $x \in R$، $(x + \sqrt{0})^2 = x^2 + \sqrt{0} = x + \sqrt{0}$. لذا $x(x - 1) \in \sqrt{0} = \cap M$. در نتیجه $x(x - 1) \in M$. با توجه به اینکه $M$ ایده‌آل ماکسیمال است، پس $M$ ایده‌آل اول است. بنابراین $x \in M$ یا $x - 1 \in M$. اگر $x \in M$، آن‌گاه $x + M = M$ و اگر $x - 1 \in M$، آن‌گاه $x - 1 + M = M$. یعنی $x + M = 1 + M$. در نتیجه $\frac{R}{M} \cong \mathbb{Z}_2$.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱): بنابه قضیه ۹.۲.۳، واضح است. □

# مراجع


[1] *D. D. Anderson and V. P. Camillo,* Commutative rings whose element are a sum of a unit and idempotent*, J. Algebra 30 ( 2002), no. 7, 3327-3336.*

[2] *F. W. Anderson and K. R. Fuller,* Rings and categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1992.*

[3] *H. Chen,* Morita contexts with many units*, Comm. Algebra 30 (2002), no. 3, 1499-1512.*

[4] *H. Chen,* On stable range conditions*, Comm. Algebra 28 (2000), no. 8, 3913–3924.*

[5] *H. Chen,* Rings related to stable rang conditions*, Hangzhou Normal University, China, 2010.*

[6] *H. Chen,* Units, idempotents, and stable range conditions*, Comm. Algebra 29 (2001), no. 2, 703-717.*

[7] *H. Chen and F. Li,* Rings with many unit-regular elements*, Chinese J. Contemp. Math. 21 (2000), no. 1, 33-38.*

[8] *J. Han and W. K. Nicholson,* Extensions of clean rings*, Comm. Algebra 29 (2001), no. 2, 703-717.*

[9] *T. W. Hungerford,* Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.*

[10] *B. Li and L. Feng,* F-clean ring and rings having many full elements*, J. Korean. Math. Soc. 47 (2010), no. 2, 247-261.*

[11] *W. K. Nicholson,* Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 269–278.*

[12] *R. Y. Sharp,* Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, 1990.*

[13] *G. Xiao and W. Tong,* N-clean rings and weakly unit stable rangs*, Comm. Algebra 33 (2005), no. 5, 1501-1517.*

# فهرست الفبایی

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| ایده‌آل اول مینیمال | *Minimal prime ideal* |
| ایده‌آل توسعه یافته | *Ideal - extension* |
| بعد صفر | *Zero-dimensional* |
| حلقه آبلی | *Abelian ring* |
| حلقه‌ی تجزیه ناپذیر | *Indecomposition ring* |
| حلقه تقلیل یافته | *Reduced ring* |
| حلقه تمیز | *Clean ring* |
| حلقه تمیز یکتا | *Uniquely clean ring* |
| حلقه شبه دئو چپ | *Left quasi-duo ring* |
| حلقه‌ی متقابل | *Opposite ring* |
| حلقه موضعی | *local ring* |
| خودتوان مرکزی | *Central idempotent* |
| ددکیند متناهی | *Dedekind finit* |
| رادیکال جیکبسون | *Jacobson radical* |
| عنصر کامل | *Full element* |
| متباین | *Comaximal* |
| موضعی سازی | *Localiation* |

موریتاکانتکست ........ *Morita context*

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| حلقه آبلی | *Abelian ring* |
| خودتوان مرکزی | *Central idempotent* |
| حلقه تمیز | *Clean ring* |
| متباین | *Comaximal* |
| ددکیند متناهی | *Dedekind finit* |
| عنصر کامل | *full element* |
| توسیع ایده‌آل | *Ideal - extension* |
| حلقه تجزیه ناپذیر | *Indecomposable ring* |
| رادیکال جیکبسون | *Jacobson radical* |
| حلقه شبه دئو چپ | *Left quasi-due ring* |
| موضعی سازی | *Localization* |
| حلقه موضعی | *local ring* |
| ایده‌آل اول مینیمال | *Minimal prime ideal* |
| موریتا کانتکست | *Morita context* |
| حلقه متقابل | *Oposite ring* |
| حلقه تقلیل یافته | *Reduced ring* |
| حلقه تمیز یکتا | *Uniquely clean ring* |

حلقه فون نیومن منظم ........................................ *Von Neuman regular ring*

بعدصفر ........................................................ *Zero - dimensional*

*Surname: ozoni davaji* *Name: bi bi hanifeh*

---

*Title: some extensions of clean rings*

---

*Supervisor: Dr. Ebrahim Hashemi*

---

*Degree: Master of Science* *Subject: Pure Mathematics*

*Field: Algebra*

---

*Shahrood University of Technology* *Faculty Of Mathematical Sciences*

*Date: 2013* *Number of pages: 66*

---

*Keywords: full element, f-clean rings, matrix rings, rings having any full elements*

---

***Abstract***

*In this thesis, we introduce the concept of f-clean rings. Let* $C = \begin{pmatrix} A & B \\ W & B \end{pmatrix}$ *be a Morita context ring. We determine conditions under which the ring* $C$ *is f-clean. Moreover, we introduce the concept of rings having many full elements are closed under matrix rings and Morita context rings.*

*We introduce clean rings and uniquely clean rings. We also consider vari0us properties of then.*

*Shahrood University of Technology*
*Faculty Of Mathematical Sciences*

*Dissertation Submitted in Partial*
*Fulfillment of The Requirements For The*
*Degree of Master of Science in*
*Pure Mathematics*

# some extensions of clean rings

*Supervisor*
***Dr. Ebrahim Hashemi***

*by*
***bi bi hanifeh ozoni davaji***

*2013*