دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

تقریباً همه جا بازیافت پذیری نخستین بازگشت

استادان راهنما

دکتر کامران شریفی و دکتر الهام دسترنج

استاد مشاور

آقای سید رضا موسوی

پژوهشگر

عمر کوسه غراوی

۱۳۹۲/۱۱/۲۸

نام خانوادگی دانشجو: کوسه غراوی نام: عمر

عنوان: تقریباً همه جا بازیافت پذیری نخستین بازگشت

استادان راهنما: دکتر کامران شریفی و دکتر الهام دسترنج
استاد مشاور: آقای سید رضا موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: دانشگاه شاهرود دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۱۱/۲۸ تعداد صفحات: ۵۰

واژگان کلیدی: انتگرال‌پذیر نخستین بازگشت، بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت، انتگرال‌پذیر لبگ، توابع اندازه‌پذیر، تقریباً عمومی بازیافت‌پذیر

چکیده

در این پایان نامه ابتدا رابطه‌ی بین بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت با اندازه پذیری و انتگرال‌پذیری آن ارائه می‌شود. برای این منظور ابتدا مفهوم انتگرال پذیری نخستین بازگشت و بازیافت پذیری نخستین بازگشت را معرفی کرده و مقایسه ای بین انتگرال پذیری نخستین بازگشت و انتگرال پذیری ریمان انجام می دهیم. سپس با کمک مفاهیم معرفی شده و رابطه ی بین بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت وفرآیند نخستین بازگشت نشان داده می‌شود که، تابع $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ اندازه پذیر است اگر و تنها اگر f بازیافت پذیر نخستین بازگشت باشد.

تقدیم به

روح پدر بزرگوارم و

مادر عزیزتر از جانم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ خانواده‌ام مخصوصاً مادر عزیز و برادر بزرگترم که همیشه پشتیبان وحامی من بوده و همچنین استادان راهنمای خود، جناب آقای دکتر کامران شریفی و خانم دکتر الهام دسترنج ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده آنها، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به بهترین شکل اینجانب را راهنمایی کردند، کمال امتنان را دارم.

عمر کوسه غراوی

۱۳۹۲/۱۱/۲۸

پیش گفتار

در این پایان نامه ابتدا به معرفی مفهوم بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت می‌پردازیم.این مفهوم اولین بار توسط دو ریاضیدان $Michael.J.EVANS$ و $Paul.D.HUMKE$ معرفی شد.

برای این منظور ابتدا در فصل اول این پایان نامه، مفهوم‌ها و قضیه‌هایی از نظریه اندازه آورده شده است، که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ادامه و در فصل دوم مفهوم بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت را معرفی می‌کنیم وبرای تابع حقیقی مقدار f روی $[0,1]$، ارتباط بین اندازه‌پذیری و بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت آن را مقایسه می‌کنیم.

در پایان و در فصل سوم توابع بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت را طبقه‌بندی و رابطه‌ی بین آنها را بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیمی از آنالیز حقیقی

۱.۱ اندازه واندازه پذیری

در این فصل مفاهیم مقدماتی و مورد نیاز نظریه اندازه را به طور اختصار می‌آوریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و C دسته‌ای ناتهی از زیر مجموعه های Xباشد.
۱) Cرا یک نیم حلقه، از زیر مجموعه های X گوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته وتفاضل هر دو عضو Cبرابر با اجتماع متناهی از اعضای دوبه‌دوی مجزای Cباشد.
۲) C را یک حلقه از زیر مجموعه های X گوییم اگر Cتحت اجتماع‌های متناهی وتفاضل بسته باشد.
۳) C را یک نیم میدان (نیم جبر) از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته ومکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد.
۴) C را یک σ-میدان از زیر مجموعه‌های X گوییم اگرC تحت اجتماع شمارش‌پذیر ومکمل بسته باشد.

ملاحظه ۲.۱.۱. *دسته‌های گوناگون از بازه‌ها در$\mathbb{R}$ وحاصلضرب‌های دکارتی آنها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه‌ها هستند. همچنین دسته های گوناگون از بازه‌ها وشعاع‌ها وحاصلضرب‌های دکارتی آنها واجتماع‌های آنها الگوهای مناسبی به ترتیب برای نیم جبرها و جبرها هستند.*

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم C دسته‌ای ناتهی ودلخواه از زیر مجموعه‌ها باشد. منظور از یک اندازه روی C تابعی مانند μ با دامنه C است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند.
۱) برای Aدر C، $0 \le \mu(A) \le \infty$.

۲) هرگاه $\{A_n \ , n \geq ۱\}$، دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دو به دو مجزای C باشد به‌طوری‌که $(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n) \in C$ آنگاه $\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n)$.

ملاحظه ۴.۱.۱. *خاصیت (۲) را σ-جمع‌پذیری برای μ می‌گوییم.*

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم C دسته ای دلخواه از زیر مجموعه های X باشد. کوچکترین σ-جبر (بر حسب رابطه‌ی شمول) شامل C از زیر مجموعه‌های Xرا σ-جبر تولید شده توسطC می‌نامیم وبه صورت $\sigma(C)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(C)$ اشتراک تمام σ-جبرهای شامل C است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا$\mathbb{R}^n$) و C دسته‌ی تمام بازه ها باشد. σ -جبر تولید شده توسط C را σ-جبر بورل گوییم وبا $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه ها به صورت $[a, b)$یا $[a, b]$ یا (a, b) که در آن aوb اعداد گویا هستند ویا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد $\mathcal{B}$اند.

ملاحظه ۷.۱.۱. *الف) به طور کلی در یک فضای توپولوژیکی σ-جبر تولید شده توسط مجموعه‌های باز را σ-جبر بورل می نامیم وبا $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم.*
ب) دسته‌ی مجموعه های بورل، کوچکترین σ-جبری است که حاوی همه ی مجموعه های باز است.

تعریف ۸.۱.۱. هر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز یک مجموعه$\mathcal{G}_\delta$ وهر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته، یک مجموعه $\mathcal{F}_\sigma$ نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\mathcal{G}_\delta$ را یک مجموعه $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ نامیم وهر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\mathcal{F}_\sigma$ را یک مجموعه‌ی $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. *$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ توسط هر کدام از مجموعه‌های زیر تولید می‌شود:*

الف) بازه‌های باز: $E_۱ = \{(a, b); a < b\}$

ب) بازه‌های بسته: $E_۲ = \{[a, b]; a < b\}$

ج) بازه‌های نیم باز: $E_۳ = \{(a, b]; a < b\}$ *یا* $E_۴ = \{[a, b); a < b\}$

د) نیم‌خط‌های باز: $E_۵ = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$ *یا* $E_۶ = \{(-\infty, a); a \in \mathbb{R}\}$

ه) نیم خط‌های بسته: $E_۷ = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$ *یا* $E_۸ = \{(-\infty, a]; a \in \mathbb{R}\}$

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم Cساختاری (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های Xو μ اندازه‌ای روی C باشد. اندازه μ را روی C، متناهی گوییم هرگاه برای هر A درC ، $\mu(A) < \infty$ وσ-متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n \ , n \geq ۱\}$ از اعضای C وجود داشته باشد به طوری‌که $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ وبرای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های Xو μ اندازه ای روی $\mathcal{H}$ باشد. همچنین فرض کنیم دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد که اندازه‌ی هر جمله‌ی آن متناهی است و این دنباله X را بپوشاند(به عنوان الگو می توان Xرا $\mathbb{R}$ وH را نیم حلقه‌ی بازه ها در نظر گرفت). برای زیر مجموعه ی دلخواه A از X اندازه‌ی خارجی Aرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq ۱} \mu(I_n) \quad : I_n \in \mathcal{H} \ \ , A \subset \bigcup_{n\geq ۱} I_n\}.$$

ملاحظه ۱۳.۱.۱. *الف)برای* $I \in H$ ، $\mu^*(I) = \mu(I)$.

ب) اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ *دنباله ای دلخواه از زیر مجموعه های* X *باشد آنگاه*

$$\mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum \mu^*(A_n).$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱۴.۱.۱. زیر مجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یاμ)اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم $\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A)$.

ملاحظه ۱۵.۱.۱. *الف)هر عضو* $\mathcal{H}$ *وهر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط* $\mathcal{H}$ *اندازه پذیرند.*

ب)اگر A *نسبت به* μ^* *اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه‌ی دلخواه* B*از* X *داریم*

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

پ)در تحقیق تساوی بالا برای A ، *مجموعه‌ی* B *را مجموعه‌ی آزمونی گوییم.*

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱۶.۱.۱. *دسته‌ی مجموعه‌های اندازه‌پذیر نسبت به* μ^* *یک* σ*-جبر در* X *شامل* $\mathcal{H}$ *و* μ^* *یک اندازه روی این* σ*-جبر است. تحدید* μ^* *به* $\mathcal{H}$ *برابر* μ *است.*

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۱.۱۷. *(قضیه گسترش کارتئودوری) اگر $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه های X و μ اندازه‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری که تعداد شمارش پذیر از اعضای $\mathcal{H}$ با اندازه‌ی متناهی X را بپوشاند، آنگاه μ گسترشی یگانه به یک اندازه روی σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{H}$ در X دارد.*

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۱.۱۸. اگر $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و H مجموعه‌بازه‌ها (یا جعبه‌ها) و μ تابع طول (یا تابع حجم) باشد، زیر مجموعه های اندازه پذیر $\mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) نسبت به μ^* (بر اساس تعریف (۱.۱.۱۴)) اصطلاحاً «اندازه پذیر لبگ» نامیده می‌شود. دسته ی چنین مجموعه هایی را «σ-جبر لبگ» می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. منظور از یک فضای اندازه‌پذیر عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$ ، که متشکل از یک مجموعه مانند X و σ-جبر $\mathcal{A}$ ، از زیر مجموعه های X می‌باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ را یک مجموعه ی اندازه پذیر می نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۰. منظور از یک فضای اندازه ، سه تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک «فضای اندازه‌پذیر» و μ یک «اندازه» روی σ-جبر $\mathcal{A}$ است.

ملاحظه ۱.۱.۲۱. *در فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ،*

الف) برای A_i های دوبه‌دوی مجزا $(i = 1, \dots, n)$ ، اگر $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ و $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. این خاصیت را متناهیاً جمع‌پذیری برای μ گوییم.

ب) اگر $B \in \mathcal{A}$ و $A \subseteq B$ آنگاه $\mu(A) \leq \mu(B)$. این خاصیت را یکنوایی برای μ گوییم. وهمچنین

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$$

پ) اگر $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ آنگاه داریم

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

ت) اگر $A \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\mu(A) < \infty$ آن‌گاه $\mu(\varnothing) = 0$.

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۱.۲۲. *فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد به طوری‌که $\mu(A_i) < \infty$; $\forall i$ آن‌گاه*

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۲۳.۱.۱. *مجموعه‌ی همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ یک σ-جبر است که آن را با $\mathcal{M}$ نمایش می‌دهیم. تابع μ تعریف شده روی $\mathcal{M}$ با*

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad ; A \in \mathcal{M},$$

یک اندازه روی $\mathbb{R}$ است.

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۲۴.۱.۱. *σ-جبر همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ $\mathcal{M}$ شامل مجموعه بورل است.*

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ و$(Y, \acute{\mathcal{A}})$ فضاهای اندازه‌پذیر باشند. تابع f ، $f : X \longrightarrow Y$ را اندازه پذیر نسبت به $(\acute{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ گوییم، اگر برای هر $\acute{A} \in \acute{\mathcal{A}}$ داشته باشیم، $f^{-1}(\acute{A}) \in \mathcal{A}$. از این پس هرگاه σ-جبرهای مفروض مشخص باشند ونیاز به تصریح نباشد، به‌طور ساده f را اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه شرط یاد شده برقرار باشد.

قضیه ۲۶.۱.۱. *اگر f را یک تابع حقیقی گسترش یافته روی X تعریف کنیم آن‌گاه چهار عبارت زیر معادلند:*

(۱) $\{x \,;\, f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

(۲) $\{x \,;\, f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$

(۳) $\{x \,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

(۴) $\{x \,;\, f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر f یک تابع حقیقی مقدار گسترش یافته باشد که در یکی از چهار عبارت بالا صدق کند آن‌گاه f یک تابع اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.

ملاحظه ۲۸.۱.۱. *اگر f تابعی حقیقی وپیوسته باشد، در این صورت f تابعی اندازه پذیر است.*

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۲۹.۱.۱. *اگر f و g توابع اندازه پذیر باشند و c ثابت باشد، آن‌گاه $f \pm g$ و $f + c$ و cf و f^2 ، fg نیز همگی اندازه‌پذیر هستند.*

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۳۰.۱.۱. *اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر روی X باشند آن‌گاه* $\sup\{f_n\}$ *و* $\inf\{f_n\}$ *و* $\limsup\{f_n\}$ *،* $\liminf\{f_n\}$ *همگی توابع اندازه پذیرند.*

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

ملاحظه ۳۱.۱.۱. *گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، تقریباً همه جا($a.e.$) برقرار است، اگر وتنها اگر مجموعه ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه پذیر و دارای اندازه μ صفر باشند.*

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای متریک و $A \subset X$ باشد. اگر $\bar{A} = X$ آن‌گاه A در X چگال نامیده می‌شود، از طرف دیگر اگر $(\bar{A})^\circ = \varnothing$ آن‌گاه A هیچ جا چگال نامیده می‌شود.

قضیه ۳۳.۱.۱. **(کاتگوری بئر)** *فرض کنیم X یک فضای متری کامل باشد.*

الف)اگر $\{U_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های چگال باز در X باشد، آن‌گاه $\bigcap_1^\infty U_n$ در X باز است.

ب) X اجتماع شمارش پذیری از مجموعه‌های هیچ جا چگال نیست.

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۳۴.۱.۱. مجموعه‌ای چون $A \subset X$ از کاتگوری اول است هرگاه A اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های هیچ جا چگال باشد؛ در غیر اینصورت A از کاتگوری دوم است.

نتیجه: هر فضای متری کامل در خودش از کاتگوری دوم است.

تعریف ۳۵.۱.۱. متمم یک مجموعه کاتگوری اول، پس مانده نامیده می‌شود.

۲.۱ انتگرال ریمان

قرارداد: از این به بعد در سراسر رساله اندازه‌ی لبگ مجموعه ی A را با نماد $\lambda(A)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. افراز $\mathcal{P}$ روی $[a, b]$ عبارت است از دسته ای متناهی از زیربازه‌های $[a, b]$، مانند $\{I_k \subseteq [a, b] \ : \ 1 \leq k \leq n \, ; n \in \mathbb{N}\}$ به‌طوری‌که برای هرم $1 \leq k \leq n \ ; \ \lambda(I_k) > 0$ و

$$\forall\ 1 \leq i, j \leq n\ ;\ i \neq j \ \ I_i \cap I_j = \varnothing \ \ ,\ \bigcup_{k=1}^{n} I_k = [a, b].$$

نرم افراز $\mathcal{P}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{\lambda(I_k) \ : \ I_k \in \mathcal{P}\}.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید f تابعی حقیقی و $\mathcal{P}$ افرازی روی بازه $[a,b]$ باشد. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، t_i نقطه‌ی دلخواهی از زیربازه‌ی I_k از افراز $\mathcal{P}$ باشد، آن گاه مجموع ریمان متناظر با افراز $\mathcal{P}$ وتابع f که آن را با نماد $S(\mathcal{P},f)$ نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S(\mathcal{P},f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\lambda(I_i).$$

گوییم تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است هرگاه عددی حقیقی مانند A وبرای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند $\mathcal{P}_\varepsilon$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{P}$ وهر انتخاب t_i از زیربازه های افراز $\mathcal{P}$، $|S(\mathcal{P},f) - A| < \varepsilon$. چنین Aای در صورت وجود یکتا است و آن را انتگرال ریمان تابع f می نامیم وبا نماد $\int_{[a,b]} f dx$ نشان می دهیم.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنید f بر بازه ی $[a,b]$ کراندار وE مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگیf روی بازه $[a,b]$ باشد، در این صورت f انتگرال پذیر ریمان است، اگر و فقط مجموعه ی E دارای اندازه لبگ صفر باشد.*

برهان. به [۲] رجوع کنید. □

۳.۱ انتگرال لبگ

تعریف ۱.۳.۱. اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σ-جبر $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه ی A را با χ_A نشان می دهیم وبه صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & if \;\; x \in A \\ 0 & if \;\; x \notin A \end{cases}.$$

تعریف ۲.۳.۱. تابع ساده، تابعی است با دامنه دلخواه ومقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ با مقادیر متمایز$a_1,\ldots,a_n$ باشد. می توان نوشت $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X \; ; \; \varphi(x) = a_i\}$ روشن است کهA_iها مجزا هستند.

اندازه‌پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_iها اندازه‌پذیرند. انتگرال φنسبت به اندازه‌ی μ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i).$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض φتابعی ساده روی فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ باشد(برای $A\in\mathcal{A}$، $\varphi\chi_A$ نیز یک تابع ساده می‌باشد). انتگرال φروی A را تعریف می کنیم

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \varphi\chi_A d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap A).$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر ونامنفی باشد. انتگرال fروی هر $A\in\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_A f d\mu = \sup\{\int \varphi d\mu \ ; \ \varphi \leq f\},$$

که درآن φ تابع ساده ونامنفی است.

قضیه ۵.۳.۱. *(**قضیه همگرایی یکنوا**)اگر $f_1, f_2, \ldots$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر، نامنفی و صعودی باشد و*
$lim_{n\to\infty} f_n = f$، آن‌گاه

$$lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

ملاحظه ۶.۳.۱. *اگر f تابع اندازه پذیر نامنفی روی مجموعه اندازه‌پذیر A و $a,b>0$ آن‌گاه*

$$\int_A (af+bg)d\mu = a\int_A f d\mu + b\int_A g d\mu.$$

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۷.۳.۱. *فرض کنیم f تابعی اندازه پذیر روی X و $A_1, A_2, \ldots$ دنباله ای از اعضای دوبه دوی مجزای $\mathcal{A}$ باشد و $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$، در این صورت خواهیم داشت*

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۳.۱. تابع اندازه پذیر ونامنفی f را روی مجموعه‌ی اندازه پذیر A «انتگرال‌پذیر» گوییم، هرگاه

$$\int_A f d\mu < \infty.$$

تعریف ۹.۳.۱. اگرf تابعی حقیقی با دامنه‌ی دلخواه باشد، متناظر با f برای هر x از دامنه‌ی f توابع f^- وf^+ ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^-(x) = max\{-f(x), 0\} \qquad , \qquad f^+(x) = max\{f(x), 0\}.$$

f^+وf^- را به ترتیب جزء مثبت و جزء منفی f می‌نامیم. در این صورت $f = f^+ - f^-$، یعنی هر تابع اندازه پذیر را می توان به صورت تفاضل دو تابع اندازه پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم $|f| = f^+ + f^-$. روشن است که اگر f اندازه پذیر باشد، آن گاه f^+وf^- نیز اندازه‌پذیراند.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم$(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. تابع اندازه‌پذیر f که روی X تعریف شده است را انتگرال پذیر گوییم، هرگاه $\int f^+$ و$\int f^-$ متناهی باشند. در این صورت، $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

قضیه ۱۱.۳.۱. *فرض کنید f یک تابع حقیقی کراندار تعریف شده روی$[a, b]$ باشد. اگر f انتگرال پذیر ریمان روی $[a, b]$ باشد، آن‌گاه f انتگرال‌پذیر لبگ است.*

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

توجه: عکس قضیه بالا لزوماً برقرار نیست به عنوان مثال تابع زیر در بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست ولی انتگرال لبگ آن وجود دارد وبرابر با$b - a$ می‌باشد.

مثال ۱۲.۳.۱.

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \notin \mathbb{Q} \\ ۱ & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

فصل ۲

تقریباً همه جا بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت

در این فصل ابتدا مفهوم بازیافت‌پذیری و انتگرال‌پذیری نخستین بازگشت را معرفی می‌کنیم.

۱.۲ مفهوم نخستین بازگشت

در سراسر این فصل منظور از I، بازه $[0, 1]$ و σ-میدان مفروض روی I، σ-میدان بورل و اندازه‌ی مفروض روی آن اندازه‌ی لبگ λ می‌باشد.

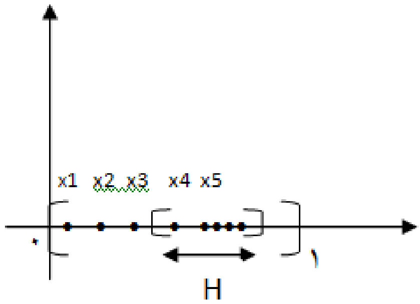
تعریف ۱.۱.۲. یک مسیر مانند $\bar{x}$، دنباله‌ای است به صورت $\{x_n\}_{n\geq 0}$ که جملات دنباله در $I = [0, 1]$ چگالند.

مثال ۲.۱.۲. دنباله اعداد گویا در $[0, 1]$ یک مسیر است.

تعریف ۳.۱.۲. هر مجموعه‌ی شمارش پذیر و چگال S که $S \subset I$، را محمل روی I می‌نامیم.

نمادگذاری: اگر $\bar{x} = \{x_n\}_{n\geq 0}$ یک مسیر روی I و H یک بازه در I باشد، آن‌گاه $r(\bar{x}, H)$ کوچکترین x_nای است که $x_n \in H$.

مثال ۴.۱.۲. در دنباله زیر $r(\bar{x}, H) = x_4$ است.



شکل(۱.۲)

نمادگذاری: اگر $x \in [۰, ۱]$ و $\varrho > ۰$ آن‌گاه $B_\varrho(x) = \{y \in [۰, ۱] ; |y - x| < \varrho\}$.

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید $x \in I$ و $\bar{x} = \{x_n\}_{n \geq ۰}$ یک مسیر روی I باشد. مسیر نخستین بازگشت x دنباله‌ای است به صورت $\mathcal{R}(\bar{x})_x = \{\omega_k(x)\}_{k=۱}^{\infty}; k \in \mathbb{N}$ به طوری‌که:

$$\omega_۱(x) = x_۰ \ \ , \ \omega_{k+۱}(x) = \begin{cases} r(\bar{x}, B_{|x-\omega_k(x)|}(x)) & ; \ if \ x \neq \omega_k(x) \\ \omega_k(x) & ; \ if \ x = \omega_k(x) \end{cases},$$

از چگال بودن $\bar{x}$ در $[۰, ۱]$داریم x $\omega_k(x) \longrightarrow x$(وقتی $k \longrightarrow \infty$).

مثال ۶.۱.۲. اگر $\bar{x}$ یک مسیر روی I و $x = x_۰$ باشد آن‌گاه مسیر $\mathcal{R}(\bar{x})_x$ به صورت زیر است.

حل:

$$\omega_۱(x_۰) = x_۰ \ \ , \ \ \omega_۲(x_۰) = \omega_۱(x_۰) = x_۰ \ \ , \ldots,$$

درنتیجه

$$\mathcal{R}(\bar{x})_{x_۰} = \{\omega_k(x_۰)\}_{k=۱}^{\infty} \ ; \omega_k(x_۰) = x_۰ \ \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

تعریف ۷.۱.۲. تابع f را در نقطه $x \in [۰, ۱]$، f، $\bar{x}$-بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت گوییم هرگاه

$$\lim_{k \to \infty} f(\omega_k(x)) = f(x).$$

تابع f، $\bar{x}$-بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت است هرگاه در هر نقطه‌ی $x \in [۰, ۱]$، $\bar{x}$-بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت باشد.

تابع f، بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت است هرگاه مسیری مانند $\bar{x}$وجود داشته باشد که f، $\bar{x}$-بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت باشد.

در نهایت تابع f تقریباً همه جا بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت است هرگاه نسبت به مسیری مانند $\bar{x}$تقریباً همه جا بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت باشد.

مثال ۸.۱.۲. برای هر مسیر مانند $\bar{x}$ از $[0,1]$ توابع حقیقی پیوسته روی $[0,1]$ ، $\bar{x}$-بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت هستند.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنیم f تابعی با مقادیر حقیقی و$\bar{x}$ مسیری روی $[0,1]$ باشد. برای هر افراز $\mathcal{P}$ روی $[0,1]$، مجموع ریمان نخستین بازگشت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_{(\bar{x},\mathcal{P})}(f)=\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J).$$

تعریف ۱۰.۱.۲. گوییم تابع f نسبت به $\bar{x}$، انتگرال‌پذیر نخستین بازگشت است هرگاه عددی حقیقی مانند T وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall\ \{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 1}\ \big(\|\mathcal{P}_n\|\to 0 \Longrightarrow |S_{(\bar{x},\mathcal{P}_n)}f-T|\to 0\big),$$

که در آن $\{\mathcal{P}_n\}$ دنباله ای از افرازهای $[0,1]$ است.

در این صورت T را انتگرال نخستین بازگشت تابع f نسبت به $\bar{x}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۲. فرض کنید تابع f، $f: I\longrightarrow \mathbb{R}$، انتگرال‌پذیر لبگ باشد آن‌گاه می‌گوییم مسیر$\bar{x}$ روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A از I، انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\ \delta>0\ |\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A)-\int_A f|<\varepsilon.$$

که در آن $\mathcal{P}$، هر افراز دلخواه از $[0,1]$ با نرم کمتر از δ است.

تعریف ۱۲.۱.۲. فرض کنید تابع f، $f: I\longrightarrow \mathbb{R}$، انتگرال‌پذیر لبگ باشد آن‌گاه می‌گوییم مسیر $\bar{x}=\{x_n\}$ روی I انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد، هرگاه برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A داشته باشیم:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\ \delta>0\ |\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A)-\int_A f|<\varepsilon,$$

که در آن $\mathcal{P}$، هر افراز دلخواه از $[0,1]$ با نرم کمتر از δ است.

در حقیقت می‌گوییم مسیر $\bar{x}$ روی I انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد هرگاه روی هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A از I انتگرال لبگ f را نتیجه دهد.

مثال ۱۳.۱.۲. فرض کنید f تابع همانی روی I و $\bar{x}=\{r_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ی اعداد گویا روی Iباشد آن‌گاه $\bar{x}$ انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد.

مثال ۱۴.۱.۲. اگر f انتگرال‌پذیر ریمان باشد هر مسیری روی I ، انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد.

قضیه ۱۵.۱.۲. *انتگرال نخستین بازگشت تابع f وجود دارد ومقدارش نسبت به هر $\bar{x}$ ثابت است اگر وتنها اگر، تابع f انتگرال‌پذیر ریمان باشد. در این حالت انتگرال نخستین بازگشت تابع f ، با انتگرال‌های ریمان ولبگ f برابر است.*

برهان. به [۶] رجوع کنید. $\square$

۲.۲ ارتباط بازیافت‌پذیری توابع با اندازه‌پذیری وانتگرال‌پذیری آن

لم ۱.۲.۲. *فرض کنید $\bar{x} = \{x_n\}$ ، یک مسیر و E مجموعه‌ی شمارش‌پذیر زیر باشد.*

$$E = \{\frac{x_n + x_m}{۲}; n = ۰, ۱, ۲, \ldots ; m = ۰, ۱, ۲, \ldots\} \cup \{۰, ۱\}.$$

در اینصورت برای هر $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و $t \in I - E$ ، ϵ مثبتی وجود دارد به طوری که ω_k روی همسایگی $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ ثابت است.

برهان. با استقرا روی k درستی لم را تحقیق می کنیم. اگر $k = ۱$ آن‌گاه با توجه به تعریف (۵.۱.۲)داریم:

$$\forall t \in I ; \omega_۱(t) = x_۰ .$$

یعنی برای $k = ۱$ ، $\omega_۱$ همیشه ثابت است. حال فرض می کنیم لم برای $k - ۱$ برقرار باشد، نشان می‌دهیم برای k هم برقرار است. اگر $t_۰ \in I - E$ و $\epsilon_۱ > ۰$، آن‌گاه $y_۰ \in \{x_n\}$ وجود دارد به طوری که برای هر t که $t \in (t_۰ - \varepsilon_۱, t_۰ + \varepsilon_۱)$ داشته باشیم

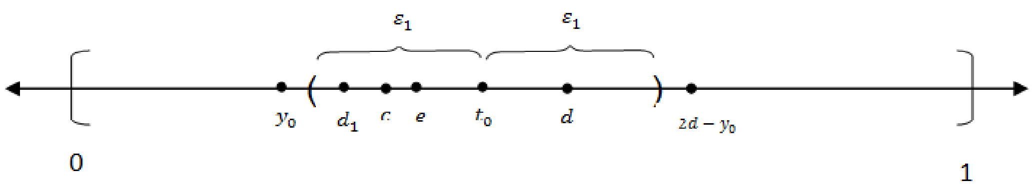
$$\omega_{k-۱}(t) = y_۰ .$$

چون $t_۰ \in I - E$ پس $t_۰ \notin E$. می‌توان $\varepsilon_۱$ را به اندازه‌ای کوچک گرفت به‌طوری‌که

$$y_۰ \notin (t_۰ - \varepsilon_۱, t_۰ + \varepsilon_۱).$$

بدون اینکه به کلیت مسأله خللی وارد شود می توان فرض کرد

$$y_۰ < t_۰ - \varepsilon_۱ .$$



شکل (۲.۲)

حال c,d را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$\begin{cases} c = t_۰ - \frac{\varepsilon_۱}{۲} \\ d = t_۰ + \frac{\varepsilon_۱}{۲} \end{cases} .$$

همچنین قرار می‌دهیم $N = min\{n; \bar{x} \in (y_۰, c)\}$. اکنون نشان می‌دهیم ε ای هست که ω_k روی $(t_۰ - \varepsilon_۱, t_۰ + \varepsilon_۱)$ ثابت باشد.

فرض کنید $\omega_k(d) = e$ و $d_۱ = \frac{y_۰ + e}{۲}$. در اینصورت روشن است که $e = r(\bar{x}(y_۰, ۲d - y_۰))$ وبرای هر $t \in (t_۰ - \varepsilon_۱, t_۰ + \varepsilon_۱) \cap (d_۱, d]$ داریم $\omega_k(t) = e$. زیرا:

با توجه به تعریف $\omega_k(x)$و جایگزینی $x = d$ داریم:

$$e = \omega_k(d) = \begin{cases} r(\bar{x}, B_{|d-\omega_{k-۱}(d)|}(d)) & ; \omega_{k-۱}(d) \neq d \quad (۱) \\ \omega_{k-۱}(d) & ; \omega_{k-۱}(d) = d \quad (۲) \end{cases} .$$

با توجه به فرض استقرا داریم $\omega_{k-۱}(d) = y_۰$. بنابراین با توجه به اینکه $y_۰ \neq d$ ، حالت(۲) برقرار نیست، یعنی $\omega_{k-۱}(d) \neq d$ درنتیجه

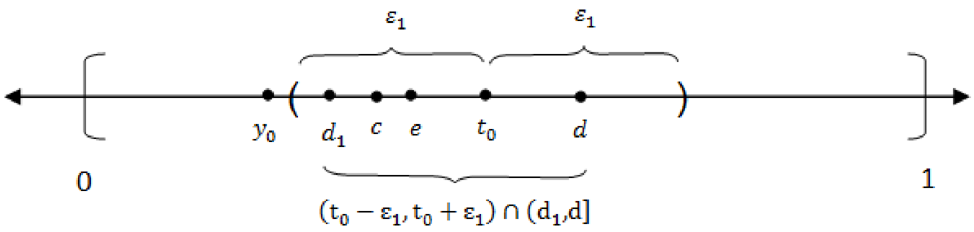
$$\omega_k(d) = r(\bar{x}, B_{|d-\omega_{k-۱}(d)|}(d)).$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} B_{|d-\omega_{k-۱}(d)|}(d) &= \{y \in [۰, ۱]; |d - y| < |d - \overbrace{\omega_{k-۱}(d)}^{y_۰}|\} \\ &= \{y \in [۰, ۱]; |d - y| < |d - y_۰|\} \\ &= \{y \in [۰, ۱]; y_۰ - d < d - y < d - y_۰\} \\ &= \{y \in [۰, ۱]; y_۰ < y < ۲d - y_۰\} \\ &\Rightarrow B_{|d-\omega_{k-۱}(d)|}(d) = (y_۰, ۲d - y_۰) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$e = \omega_k(d) = r(\bar{x}, (y_۰, ۲d - y_۰)).$$



شکل (۳.۲)

با توجه به شکل به روشنی می‌توان دید، برای هر $t \in (t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_1)\cap(d_1,d]$، $\omega_k(t)=e$.
پس با توجه به تعریف (۵.۱.۲) حالت (۲) نیز برای این قسمت اتفاق نمی افتد. زیرا $\omega_{k-1}(t)=y_0$ (فرض استقرا).

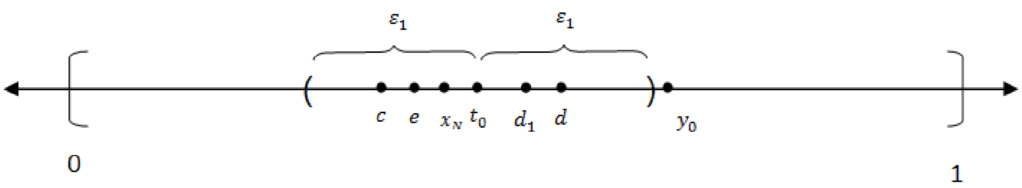
از سوی دیگر چون $y_0 \notin (t_0-\varepsilon_1)$ داریم $t\neq y_0$ و در نتیجه به موجب (۱) خواهیم داشت $\omega_k(t)=e$. زیرا اولین عضو دنباله‌ی $\bar{x}$ که در بازه ی $B_{|t-y_0|}(t)$ ، e خواهد بود.

اگر $e=x_N$ ، آن‌گاه از آن‌جا که $d_1<c$ ، ω_k ثابت e روی $[c,d]$ خواهد بود، زیرا $[c,d]$ نیز زیر بازه‌ای از $(t_0-\varepsilon_1,t_0+\varepsilon_1)\cap(d_1,d]$ است.

دو حالت ممکن است پیش آید: $d_1<t_0$ یا $d_1>t_0$.

اگر $d_1<t_0$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $\varepsilon=\min\{t_0-d_1, d-t_0\}$ ، و در نتیجه درستی حکم روشن است.

اگر $d_1>t_0$ ، آن‌گاه $\bar{x}^{-1}(e)<N$. (زیرا اگر $e\neq x_N$ ، باید داشته باشیم $e<x_N$. بنابراین اندیس عضوهای دنباله که با e نیز برابر می‌باشند از N کمتر می‌باشد. حالت $x_N<e$ رخ نمی‌دهد).



شکل (۴.۲)

اگر این حالت یعنی $d_1>t_0$ رخ دهد دوباره مراحل بالا را تکرار می کنیم و در این مراحل d_1 در نقش d عمل می کند وهمچنین $\omega_k(d_1)=e_1$ و $d_2=\frac{y_0+e_1}{2}$، آن‌گاه همانند نتیجه‌هایی که

برای قسمت قبل گرفتیم در اینجا نیز داریم:

$$e_1 = r(\bar{x}, (y_0, 2d - y_0)).$$

و

$$\forall t \in (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \cap (d_2, d_1]; \omega_k(t) = e_1.$$

مشابه مرحله نخست اگر $e_1 = x_N$ ، آن‌گاه $d_2 < c$ ودر نتیجه ω_k روی $[c, d_1]$ برابر با مقدار ثابت e_1خواهد شد.

در غیر این‌صورت دو حالت پیش می‌آید: $d_2 < t_0$ یا $d_2 > t_0$.

اگر $d_2 < t_0$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $\varepsilon = \min\{t_0 - d_2, d_1 - t_0\}$ وω_k روی بازه‌ی $[c, d_1]$ مقدار ثابتe_1 خواهد شد وبرهان کامل می‌شود ولی

اگر$d_2 > t_0$ ، آن‌گاه دوباره مراحل بالا را تکرار می‌کنیم و e_3 وd_3 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$e_3 = \omega_k(d_2) \qquad , \qquad d_3 = \frac{y_0 + e_2}{2}.$$

روشن است که هر کدام از مقدارهای e, e_1 متعلق به مجموعه‌ی $\{x_0, x_2, \ldots, x_{N-1}\}$ می‌باشند، از این رو e_i, d_i بیشتر از N بار رخ نمی‌دهد.

پس در یکی ازمراحلی که طی شد باید داشته باشیم $d_i < t_0$ یا$e_i = x_n$.

اگر $e_i = x_N$، آن‌گاه ω_k روی $[c, d_{i-1}]$ مقدار ثابت e_i را می‌گیرد و حکم ثابت می‌شود ولی

اگر $d_i < t_0$ ، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\varepsilon = \min\{t_0 - d_i, d_{i-1} - t_0\}$ از آن‌جا ω_k روی $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ مقدار ثابت e_i را اختیار خواهد کرد و در نتیجه اثبات لم کامل می‌شود. □

تعریف ۲.۲.۲. (تابع بئر یک) تابعی که حاصل حد نقطه به نقطه دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد، تابع بئریک نامیده می‌شود.

لم ۳.۲.۲. *فرض کنید $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع دلخواه و $\bar{x}$ مسیری رویI باشد. برای هر k از$\mathbb{N}$، تابع $f(\omega_k)$ متعلق به کلاس بئر یک است.*

برهان. $k \in \mathbb{N}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. با توجه به لم (۱.۲.۲) تعدادی مجموعه‌ی بسته شمارش‌پذیر T_nوجود دارد که روی آنها ω_k ثابت است، به‌طوری که $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = [0, 1]$.

بنابراین$f(\omega_k)$ روی هر T_n مقداری ثابت است که نشان می دهد $f(\omega_k)$ متعلق به کلاس بئر یک است. □

لم ۴.۲.۲. *اگر$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و$\bar{x}$ مسیری از I که روی هر زیربازه بسته از I انتگرال لبگ f را بدست دهد، آن‌گاه $\bar{x}$ انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد.*

برهان. قرار دهید

$$G = \{A \subset [۰,۱]; \text{A اندازه پذیر و } \bar{x} \text{ روی A انتگرال لبگ را بدست می‌دهد}\}.$$

با توجه به فرض چون حکم برای زیربازه های بسته‌یI برقرار است، پس $G \neq \varnothing$. برای تحقیق درستی حکم کافی است نشان دهیم که G یک σ-میدان (σ-جبر) است.

برای این منظور کافی است نشان دهیم G تحت متمم و اجتماع دنباله‌ی صعودی از زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر Iبسته است.

فرض کنید $A \in G$آن‌گاه برای هر افراز $\mathcal{P}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A^c) &= \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J-(J\cap A)) \\
&= \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))(\lambda(J)-\lambda(J\cap A)) \\
&= \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J) \\
&\quad - \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A).
\end{aligned}$$

حال اگر نرم $\mathcal{P}$ به صفر میل کند($\|\mathcal{P}\| \to ۰$) آن‌گاه عبارت اخیر به $\int_{[۰,۱]} f - \int_A f$ میل می‌کند. بنابراین

$$\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A^c) \longrightarrow \int_{A^c} f.$$

در واقع نشان دادیم که G تحت متمم بسته است وانتگرال وجود دارد.

فرض کنید $\bar{x}$ انتگرال f را روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A_n نتیجه دهد و $A_n \subseteq A_{n+۱} \subseteq [۰,۱]$. برای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ ثابت می‌کنیم که $\bar{x}$ انتگرال f را روی $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ نیز بدست می‌دهد. در این مورد f کراندار است، در نتیجه

$$\begin{aligned}
\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A) &= \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda[J\cap(A_n\cup(A-A_n))] \\
&= \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A_n) \\
&\quad + \sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap(A-A_n)). \qquad (۱.۲)
\end{aligned}$$

با استفاده از برهان خلف درستی این قسمت را تحقیق می‌کنیم. پس $\varepsilon_۰$ ودنباله $\{\mathcal{P}_i\}$ از افرازها از بازه‌ی $[۰,۱]$ با $\|\mathcal{P}_i\| \to ۰$ وجود دارد به طوری که

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A) - \int_A f| \geq \varepsilon_۰.$$

با توجه به رابطه (۱.۲) وبرای هر $i = ۱, ۲, \ldots$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A_n) - \int_{A_n} f| + |\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap(A-A_n)) - \int_{A-A_n} f| \geq \varepsilon_\circ,$$

در نتیجه

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A_n) - \int_{A_n} f| + |\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap(A-A_n))| + |\int_{A-A_n} f| \geq \varepsilon_\circ. \quad (۲.۲)$$

فرض کنید $\circ < \varrho < ۱$ و مقدارثابت $N_\circ$ را طوری در نظر می‌گیریم که
$|\int_{A-A_{N_\circ}} f| < \varrho\varepsilon_\circ$، همچنین $i_\circ$ را ثابت در نظر می‌گیریم به‌طوری که برای هر $i \geq i_\circ$ داریم

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A_{N_\circ}) - \int_{A_{N_\circ}} f| \geq \varrho\varepsilon_\circ.$$

درنتیجه با توجه به $|\int_{A-A_{N_\circ}} f| < \varrho\varepsilon_\circ$،

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A_{N_\circ}) - \int_{A_{N_\circ}} f| + |\int_{A-A_n} f| < \varrho\varepsilon_\circ + \varrho\varepsilon_\circ = ۲\varrho\varepsilon_\circ. \quad (۳.۲)$$

از طرفی با توجه به رابطه(۲.۲) و (۳.۲)

$$\begin{aligned}
\forall i \geq i_\circ; |\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap A_{N_\circ}) - \int_{A_{N_\circ}} f| \\
+ |\sum_{J\in\mathcal{P}i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap(A-A_{N_\circ}))| + |\int_{A-A_{N_\circ}} f| \geq \varepsilon_\circ \\
\Longrightarrow |\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap(A-A_{N_\circ})| + ۲\varrho\varepsilon_\circ \geq \varepsilon_\circ \\
\Longrightarrow |\sum_{J\in\mathcal{P}_i} f(r(\bar{x},J))\lambda(J\cap(A-A_{N_\circ})| \geq (۱-۲\varrho)\varepsilon_\circ. \quad (۴.۲)
\end{aligned}$$

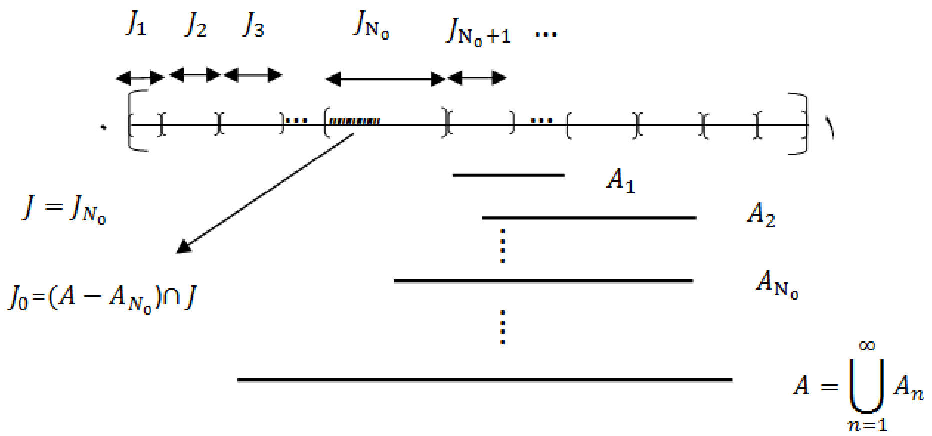
همچنین f روی مسیر $\bar{x}$ در بازه‌ی $[\circ, ۱]$، انتگرال‌پذیر است، زیرا طبق فرض برای هر زیربازه‌ی بسته از $[\circ, ۱]$ انتگرال‌پذیر است و چون $[\circ, ۱]$ زیربازه‌ی بسته خودش است بنابراین

$$\forall \varrho\varepsilon_\circ > \circ \exists \delta > \circ; mesh(\mathcal{P}) < \delta \ \ |\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x},J))\lambda(J) - \int_{[\circ,۱]} f| < \varrho\varepsilon_\circ, \quad (۵.۲)$$

با در نظر گرفتن $\varrho\varepsilon_\circ$ به جای ε.

مقدار $i_\circ$ را طوری در نظر می‌گیریم که $mesh(\mathcal{P}_{i_\circ}) < \delta$ و تظریف $\mathcal{P}_\circ$ از $\mathcal{P}_{i_\circ}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

برای هر $J \in \mathcal{P}_{i_\circ}$، فرض کنید $j_\circ$ بازه‌ی بسته به طول $\lambda((A - A_{N_\circ}) \cap J)$ که مشمول در درون J است به طوری‌که $r(J) \in J_\circ$.



شکل(۵.۲)

بازه‌ی $J_\circ$ درون J را با اندازه‌ی $\lambda((A - A_{N_\circ}) \cap J$ در نظر می‌گیریم.

بازه‌ی $J - J_\circ$ که دو بازه در دو طرف $J_\circ$ است را J_1 و J_{-1} معرفی می‌کنیم. با در نظر گرفتن $\mathcal{J}(J_k)$ به عنوان افرازی برای بازه‌ی J_k $(k = -۱, ۱)$داریم

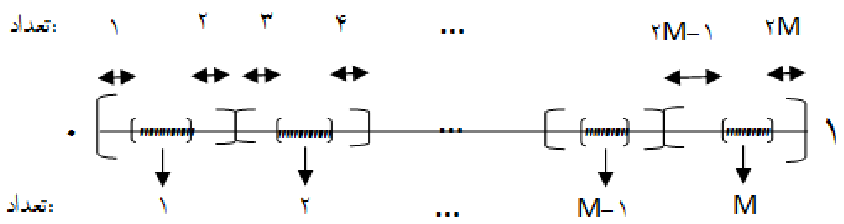
$$\sum_{J \in \mathcal{J}(J_k)} f(r(\bar{x}, J))\lambda(J) - \int_{J_k} f| < \frac{\varrho\varepsilon_\circ}{۲M},$$

که $n(\mathcal{P}_{i_\circ}) = M$.

زیرا برای هر $\varrho\varepsilon_\circ$ و افراز $\mathcal{P}$ که $mesh(\mathcal{P}) < \delta$ رابطه (۵.۲) برقرار است. بنابراین برای افراز $\mathcal{P}_{i_\circ}$ ، که $mesh(\mathcal{P}_{i_\circ}) < \delta$ و همچنین تظریف $\mathcal{P}_{i_\circ}$، یعنی $\mathcal{P}_\circ$ نیز برقرار است، پس

$$| \sum_{J \in \mathcal{P}_{i_\circ}} f(r(\bar{x}, J))\lambda(J) - \int_{[\circ,۱]} f| < \varrho\varepsilon_\circ. \tag{۶.۲}$$

چون هر بازه ای مانند J که از افراز $\mathcal{P}_{i_\circ}$ انتخاب می‌کنیم به دو بازه‌ی J_1و J_{-1} تبدیل می‌شود وچون تعداد بازه های $\mathcal{P}_{i_\circ}$، M بود درنتیجه تعداد بازه‌ها به $۲M$ افزایش می‌یابد، بنابراین رابطه‌ی (۶.۲) برای هر $J \in \mathcal{J}(J_k)$ برقرار است.



شکل(۶.۲)

تظریف $\mathcal{P}_\circ$ای که از افراز $\mathcal{P}_{i_\circ}$ بدست آمد، به صورت زیر در می‌آید.

$$\mathcal{P}_\circ=\{J_\circ ; J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\}\cup\bigcup_{\substack{J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\\ k=-1,1}}\mathcal{J}(J_k).$$

درواقع یک بازه $\mathcal{P}_{i_\circ}$ به سه بازه تقسیم می‌شود.

همچنین با توجه به اینکه $mesh(\mathcal{P}_{i_\circ})<\delta$، بنابراین $mesh(\mathcal{P}_\circ)<\delta$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}_\circ} f(r(\bar{x},J))\lambda(J)-\int_{[\circ,1]} f|<\varrho\varepsilon_\circ. \tag{۷.۲}$$

با توجه به افراز$\mathcal{P}_\circ=\{J_\circ ; J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\}\cup\bigcup_{\substack{J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\\ k=-1,1}}\mathcal{J}(J_k)$ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}\varrho\varepsilon_\circ &\geq |\sum_{J\in\mathcal{P}_\circ} f(r(\bar{x},J))\lambda(J)-\int_{[\circ,1]} f|\\ &\geq |\sum_{J_\circ\in\mathcal{P}_\circ} f(r(\bar{x},J_\circ))\lambda(J_\circ)-\int_{\cup\{J_\circ;J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\}} f\quad|\\ &-\sum_{J\in\mathcal{P}_{i_\circ}}\sum_{k=-1,1}\sum_{J\in\mathcal{J}(J_k)}|f(r(\bar{x},J))\lambda(J)-\int_{J_k} f|\\ &\geq |\sum_{J_\circ\in\mathcal{P}_\circ} f(r(\bar{x},J_\circ))\lambda(J_\circ)|\\ &-\sum_{J\in\mathcal{P}_{i_\circ}}\sum_{k=-1,1}\sum_{J\in\mathcal{J}(J_k)}|f(r(\bar{x},J))\lambda(J)-\int_{J_k} f|-|\int_{\cup\{J_\circ;J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\}} f\quad|.\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

از $|\int_{A-A_{N_\circ}} f|<\varrho\varepsilon_\circ$و(۴.۲)و $\lambda(J_\circ)=\lambda((A-A_{N_\circ})\cap J)$

$$|\sum_{J_\circ\in\mathcal{P}_\circ} f(r(\bar{x},J_\circ))\lambda(J_\circ)|\geq(1-2\varrho)\varepsilon_\circ. \tag{۹.۲}$$

و

$$|\int_{\cup\{J_\circ; J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\}} f \quad| < \varrho\varepsilon_\circ. \tag{۱۰.۲}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
&|\sum_{J\in\mathcal{J}(J_k)} f(r(\bar{x},J))\lambda(J) - \int_{J_k} f| < \frac{\varrho\varepsilon_\circ}{۲M}\\
&\Longrightarrow \sum_{k=-۱,۱} |\sum_{J\in\mathcal{J}(J_k)} f(r(\bar{x},J))\lambda(J) - \int_{J_k} f| < \frac{\varrho\varepsilon_\circ}{۲M} + \frac{\varrho\varepsilon_\circ}{۲M} = \frac{\varrho\varepsilon_\circ}{M}\\
&\Longrightarrow \sum_{\substack{J\in\mathcal{P}_{i_\circ}\\ n(\mathcal{P}_{i_\circ}=m)}} \sum_{k=-۱,۱} |\sum_{J\in\mathcal{J}(J_k)} f(r(\bar{x},J))\lambda(J) - \int_{J_k} f| < \overbrace{\frac{\varrho\varepsilon_\circ}{M} + \cdots + \frac{\varrho\varepsilon_\circ}{M}}^{\text{تا } M} = \varrho\varepsilon_\circ.
\end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

بنابراین از روابط (۸.۲)و(۹.۲)و(۱۰.۲)و(۱۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}_\circ} f(r(\bar{x},J))\lambda(J) - \int_{[\circ,۱]} f| \geq (۱-۲\varrho)\varepsilon_\circ - \varrho\varepsilon_\circ - \varrho\varepsilon_\circ = (۱-۴\varrho)\varepsilon_\circ. \tag{۱۲.۲}$$

برای $\varrho \leq \frac{۱}{۵}$ رابطه‌ی (۷.۲) و (۱۲.۲) با یکدیگر تناقض دارند. بنابراین فرض خلف باطل و چنین $\varepsilon_\circ$ای وجود ندارد. بنابراین قسمت اجتماع یکنوایی هم در G بسته است. پس G یک σ-میدان می‌باشد.

حال باید نشان دهیم σ-میدان G شامل مجموعه $\mathcal{B}_R$ می‌باشد، برای این‌کار کافیست نشان دهیم G شامل مجموعه های مولد $\mathcal{B}_R$ است.

مجموعه $\mathcal{B}_R$ به صورت $\mathcal{B}_R = \langle\{[a,b); a,b\in R\}\rangle$ نمایش داده می‌شود، یعنی مولدهای آن بازه های نیم‌باز هستند.

مجموعه G شامل بازه های به فرم $[a,b]$ می‌باشد و چون G یک σ-میدان است پس شامل متمم آن یعنی $[a,b]^c$ نیز هست. درواقع

$$[a,b]^c = (-\infty,a)\cup(b,\infty)\in G.$$

وبا توجه اینکه G یک σ-میدان است پس اشتراک دو مجموعه از G نیز عضو G می‌باشند یعنی:

$$[c,a]\cap\big((-\infty,a)(b,\infty)\big) = [c,a)\in G.$$

پس بازه‌های به فرم $[a,b)$ (نیم باز ها) عضو G می‌باشند. بنابراین σ-میدان G شامل مولدهای $\mathcal{B}_R$ است. در نتیجه مسیر $\bar{x}$ انتگرال f را نتیجه می‌دهد. □

لم ۵.۲.۲. *فرض کنیدتابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر و $\bar{x}$ مسیری روی I که انتگرال f را بدست دهد، در این صورت برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر مانند A و $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $C = \{J_1, \ldots, J_n\}$ گردایه‌ای از بازه های غیر همپوش که*

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad \lambda(J_k) < \delta \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda(J_k \cap A) < \delta,$$

آن‌گاه

$$\sum_{k=1}^{n} f(r(J_k))\lambda(J_k \cap A) < \varepsilon.$$

برهان. درستی لم را با برهان خلف تحقیق می‌کنیم. در اینصورت یک ε_0 برای هر δ وجود دارد که

$$\sum_{k=1}^{n} f(r(J_k))\lambda(J_k \cap A) \geq \varepsilon_0. \qquad (۱۳.۲)$$

اگر $1 > \varrho > 0$ را ثابت در نظر بگیریم ، با توجه به اینکه مسیر $\bar{x}$، انتگرال f را بدست می‌دهد، پس $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری‌که برای افراز $\mathcal{P}$ از بازه I $mesh(\mathcal{P}) < \delta_1$، آن‌گاه

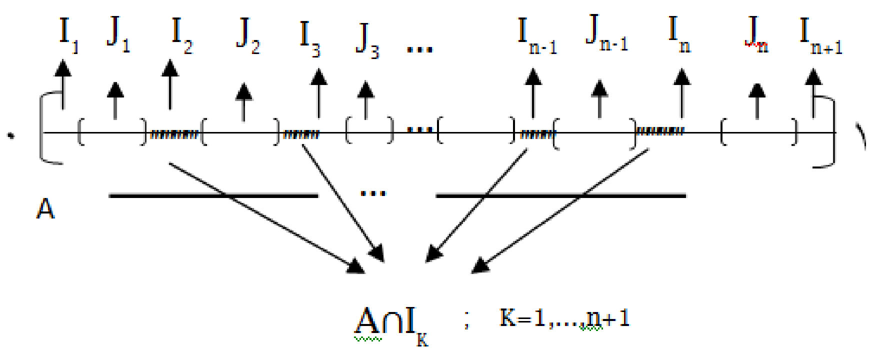
$$|\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(J))\lambda(J \cap A) - \int_A f| < \varrho\varepsilon_0. \qquad (۱۴.۲)$$

همچنین برای $\delta_2 > 0$، اگر $\lambda(A \cap H) < \delta_2$ (H بازه‌ی دلخواه) آن‌گاه

$$|\int_{A\cap H} f| < \varrho\varepsilon_0. \qquad (۱۵.۲)$$

قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, آن‌گاه گردایه‌ای از بازه های غیر همپوش مانند $C = \{J_1, \ldots, J_n\}$ که $\forall k \,;\, \lambda(J_k) < \delta$ و $\sum_{k=1}^{n} \lambda(J_k \cap A) < \delta$ وجود دارد. درنتیجه از (۱۳.۲)،

$$\sum_{k=1}^{n} f(r(J_k))\lambda(J_k \cap A) \geq \varepsilon_0.$$



شکل(۷.۲)

فرض کنید $\{I_k\,;\,k=1,\dots,n+1\}$ مجموعه‌ای از بازه‌های بسته متصل با $H=\bigcup_{k=1}^{n}J_k$، (مطابق شکل) و f روی I_k انتگرال‌پذیرباشد. بنابراین افراز $\mathcal{J}(I_k)$ برای بازه‌ی I_k که $mesh(\mathcal{J}(I_k))<\delta_1$ وجود دارد وچون $k=1,\dots,n+1$، بنابراین با توجه به رابطه‌ی(۱۴.۲) اگر بازه‌ی $[0,1]$ را به بازه‌ی I_k محدود کنیم، آن‌گاه با در نظر گرفتن افراز $\mathcal{J}(I_k)$ برای I_k داریم:

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}}f(r(J))\lambda(J\cap A)-\int_A f|<\varrho\varepsilon_0\Longrightarrow$$
$$|\sum_{J\in\mathcal{J}(I_k)}f(r(J))\lambda(J\cap A)-\int_{A\cap I_k}f|<\frac{\varrho\varepsilon_0}{n+1}.$$

افراز $\mathcal{P}$ را به صورت $\mathcal{P}=\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}\mathcal{J}(I_k)\right)\cup C$ تعریف می‌کنیم، آن‌گاه $\mathcal{P}$ افرازی از بازه $[0,1]$ که $mesh(\mathcal{P})<\delta_1$. زیرا

$$\begin{cases}\lambda(J_k)<\delta\le\delta_1\\ mesh(\mathcal{J}(I_k))<\delta_1\end{cases},$$

در نتیجه $mesh(\mathcal{P})<\delta_1$.

از روابط (۱۴.۲) و (۱۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\varrho\varepsilon_0 &> |\sum_{J\in\mathcal{P}}f(r(J))\lambda(J\cap A)-\int_A f|\\
&=|\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{J\in\mathcal{J}(I_k)}f(r(J))\lambda(J\cap A)+\sum_{J\in C}f(r(J))\lambda(J\cap A)-\int_{A-H}f-\int_{A\cap H}f|\\
&\ge|\sum_{J\in C}f(r(J))\lambda(J\cap A)|-|\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{J\in\mathcal{J}(I_k)}f(r(J))\lambda(J\cap A)-\int_{A-H}f|-|\int_{A\cap H}f|\\
&=\overbrace{|\sum_{J\in C}f(r(J))\lambda(J\cap A)|}^{\ge\varepsilon_0}-|\sum_{k=1}^{n+1}\overbrace{\Big(\sum_{J\in\mathcal{J}(I_k)}f(r(J))\lambda(J\cap A)-\int_{A-I_k}f\Big)}^{\le\frac{\varrho\varepsilon_0}{n+1}}|-|\overbrace{\int_{A\cap H}f|}^{\le\varrho\varepsilon_0}\\
&\ge\varepsilon_0-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varrho\varepsilon_0}{n+1}-\varrho\varepsilon_0=(1-2\varrho)\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $\varrho\le\frac{1}{4}$ نامساوی به تناقض می‌انجامد بنابراین فرض خلف باطل و چنین ε_0ای وجود ندارد واثبات لم کامل می‌شود. $\square$

لم ۶.۲.۲. *فرض کنید تابع* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *انتگرال‌پذیر و* $\bar{x}$ *مسیری روی* I *که انتگرال لبگ* f *را بدست می‌دهد. در اینصورت برای هر مجموعه‌ی اندازه پذیر* A *و* $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ *وجود دارد به طوری‌که:*

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(\bar{x}, J))\lambda(J\cap A) - \int_{A\cap\bigcup_{J\in\mathcal{P}} J} f \quad | < \varepsilon,$$

برای هر گردایه‌ی $\mathcal{P}$ *از بازه‌های غیر همپوش که* $\lambda(A - \bigcup_{J\in\mathcal{P}} J) < \delta$.

برهان. فرض کنیم لم صحیح نباشد. بنابراین $\varepsilon_۰ > ۰$ای وجود دارد، به طوری‌که برای هر n یک گردایه‌ی $C_n = \{J_۱^n, \ldots, J_{N_n}^n\}$ از بازه‌های غیر همپوش که $\lambda(J_k^n) < \frac{۱}{n}$ $(k = ۱, \ldots, N_n)$ و $\lambda(A - H_n) < \frac{۱}{n}$ وجود دارد که $H_n = \bigcup_{k=۱}^{N_n} J_k^n$. بنابراین داریم:

$$|\sum_{k=۱}^{N_n} f(r(J_k))\lambda(J_k^n) - \int_{A\cap H_n} J \quad | \geq \varepsilon_۰.$$

با انتخاب $۰ < \varrho < ۱$ و $\delta > ۰$ داریم:

(۱): اگر $mesh(\mathcal{P}) < \delta$ آن‌گاه با انتخاب $\varepsilon = \varrho\varepsilon_۰$ وتعریف (۱۲.۱.۲)

$$|\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_A f| < \varrho\varepsilon_۰.$$

(۲):از لم (۵.۲.۲) نیز با انتخاب $\varrho\varepsilon_۰$ به جای ε استفاده می‌کنیم.

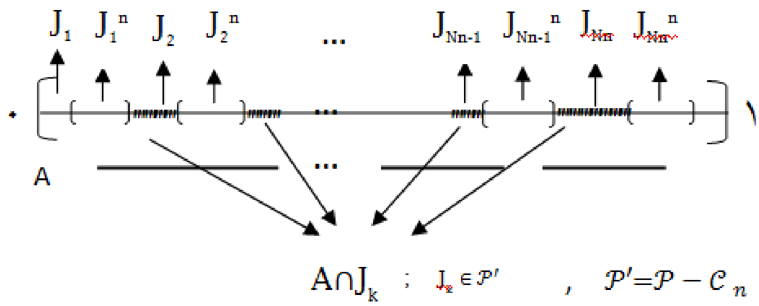
(۳):اگر $\lambda(A\cap E) < \delta$ آن‌گاه $|\int_{A\cap E} f| < \varrho\varepsilon_۰$.

با انتخاب $n > \frac{۱}{\delta}$ و گسترش C_n به افراز $\mathcal{P}$ ازبازه‌ی $[۰, ۱]$ که $mesh(\mathcal{P}) < \delta$ وهمچنین با تعریف $\acute{\mathcal{P}} = \mathcal{P} - C_n$ و با در نظر گرفتن $\varepsilon = \varrho\varepsilon_۰$ شرایط لم(۵.۲.۲) برقرار است زیرا:

$$mesh(\mathcal{P}) < \delta \xrightarrow{\acute{\mathcal{P}}=\mathcal{P}-C_n} mesh(\acute{\mathcal{P}}) < \delta \to \forall\ J\in\mathcal{P} \quad \lambda(J) < \delta, \tag{۱۶.۲}$$

و

$$\begin{aligned}\lambda(A - H_n) < \frac{۱}{n} &\Longrightarrow \lambda(A - H_n) < \delta\\ &\Longrightarrow \lambda(\bigcup_{J\in\acute{\mathcal{P}}}(A\cap J)) < \delta\\ &\Longrightarrow \sum_{J\in\acute{\mathcal{P}}}\lambda(A\cap J) < \delta\\ &\Longrightarrow |\int_{A-H_n} f| < \varrho\varepsilon_۰,\end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$



شکل (۸.۲)

از رابطه‌ی(۱۶.۲) و(۱۷.۲) و لم(۵.۲.۲)داریم:

$$|\sum_{J\in\acute{\mathcal{P}}} f(r(J))\lambda(J\cap A)| < \varrho\varepsilon_\circ. \qquad (18.2)$$

بنابراین از (۱),(۲),(۳)و رابطه‌ی(۱۸.۲) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\varrho\varepsilon_\circ &> |\sum_{J\in\mathcal{P}} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_A f| \\
&= |\sum_{J\in C_n} f(r(J))\lambda(J\cap A) + \sum_{J\in\acute{\mathcal{P}}} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A-H_n} f - \int_{A\cap H_n} f| \\
&\geq |\sum_{J\in C_n} f(r(J))\lambda(J\cap A) - \int_{A\cap H_n} f| - |\sum_{J\in\acute{\mathcal{P}}} f(r(J))\lambda(J\cap A)| - |\int_{A-H_n} f| \\
&\geq \varepsilon_\circ - \varrho\varepsilon_\circ - \varrho\varepsilon_\circ = (1-2\varrho)\varepsilon_\circ.
\end{aligned}$$

که به ازای $\varrho \leq \frac{1}{4}$ نامساوی به تناقض می‌انجامد. درنتیجه فرض خلف باطل وچنین $\varepsilon_\circ$ای وجود ندارد و اثبات لم کامل می‌شود.

□

قضیه ۷.۲.۲. *فرض کنیدتابع f، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ و مسیر $\bar{x}$ انتگرال لبگ f را بدست می‌دهد، آن‌گاه مسیر $\bar{x}$، $f(x)$ را تقریباً همه جا بازیافت می‌کند.*

برهان. $c > \circ$ را ثابت ومجموعه B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B = \{x\ ; \limsup f(\omega_n(x)) > f(x) + c\}.$$

برای اثبات این قضیه کافی است نشان دهیم $\lambda(B) = \circ$. از لم(۳.۲.۲) نتیجه می گیریم که B اندازه پذیر است. بنابراین کافی است ثابت کنیم ، اگر مجموعه‌ی F که $F \subset B$ بسته و f روی F پیوسته باشد، آن‌گاه $\lambda(F) = \circ$.

فرض کنیم مجموعه‌ی F، $F \subset B$ که $\lambda(F) > 0$ وجود دارد. $\varepsilon > 0$ و $0 < \delta < \frac{\lambda(F)}{2}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که لم(۶.۲.۲) برای مجموعه‌ی F و $c\varepsilon$ برقرار باشد.

فرض کنید

$$\forall\, x, \acute{x} \in F\, ; |x - \acute{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\acute{x})| < \frac{c}{2},$$

$\mathcal{J}$ را خانواده‌ای از بازه های به فرم $J = [x-h, x+h]$ که

$$h < \delta, x \in F, f(r(J)) > f(x) + c,$$

آن‌گاه $\mathcal{J}$ یک پوشش اساسی از مجموعه‌ی F است. بنابراین گردایه مجزای متناهی $J_1, \dots, J_n \in \mathcal{J}$ وجود دارد به طوری‌که اگر $H = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ آن‌گاه

$$\lambda(F - H) < \delta.$$

از طرفی

$$f(r(J)) > f(x) + c \Rightarrow f(r(J)) > f(x) + \tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{2} > f(r(J)) - \tfrac{c}{2} > f(x) + \tfrac{c}{2}. \tag{۱۹.۲}$$

مرکز بازه‌ی J_k را به صورت x_k نمایش می‌دهیم، درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{F\cap H} f &= \sum_{k=1}^{n} \int_{F\cap J_k} f \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) + \frac{c}{2} \right) \lambda(F \cap J_k) \\
&\overset{(1)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \left(f(J_k) - \frac{c}{2} \right) \lambda(F \cap J_k) = \sum_{k=1}^{n} for(J_k)\lambda(F \cap J_k) - \frac{c}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda(F \cap J_k) \\
&\leq \int_{F\cap H} f + c\varepsilon - \frac{c}{2}\lambda(F \cap H) \\
&\Rightarrow \int_{F\cap H} f \leq \int_{F\cap H} f + c\varepsilon - \frac{c}{2}\lambda(F \cap H) \\
&\Rightarrow \lambda(F \cap H) \leq 2\varepsilon,
\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

از طرفی چون $0 < \delta < \frac{\lambda(F)}{2}$ و $\lambda(F - H) < \delta$ آن‌گاه

$$\lambda(F - H) < \tfrac{\lambda(F)}{2}. \tag{۲۱.۲}$$

پس با توجه به رابطه‌ی (۲۰.۲) و(۲۱.۲)

$$
\begin{aligned}
\lambda(F) &= \lambda\big((F\cap H)\cup(F-H)\big)\\
&= \lambda(F\cap H)+\lambda(F-H)\\
&< ۲\varepsilon+\frac{\lambda(F)}{۲}\\
&\Rightarrow \lambda(F)-\frac{\lambda(F)}{۲}<۲\varepsilon\\
&\Rightarrow \lambda(F)<۴\varepsilon.
\end{aligned}
$$

که تناقض با فرض، درنتیجه فرض خلف باطل و اثبات قضیه کامل می‌شود. □

تذکر: در[۶] نشان داده شده که اگر f انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه مسیری مانند $\bar{x}$ موجود است که انتگرال نخستین بازگشت را نتیجه می‌دهد. طبیعتاً، مسیرهایی برای توابع اندازه پذیرو کراندار وجود دارند که یا با بدست آوردن عدد نادرست ویا با بدست نیاوردن هیچ عددی باعث می‌شود که انتگرال نتیجه ندهد. قضیه‌ی (۷.۲.۲) این شرط لازم را ایجاد می‌کند که $\bar{x}$ باید در آن صدق کند تا انتگرال به نتیجه برسد، همانطور که قضیه‌ی بعد ثابت می‌کند این شرط هم لازم وهم کافی است. عکس قضیه‌ی(۷.۲.۲)در حالت کلی برای توابع غیر کراندار درست نیست.برای مثال تابع زیر این ادعا رانشان می‌دهد.

مثال ۸.۲.۲. برای تابع زیر می‌توان مسیر $\bar{x}$ که f را همه جا بپوشاند، پیدا کرد. اما $\bar{x}$، انتگرال f را نتیجه نمی‌دهد. (تابع f کراندار نیست)

$$
f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt{x}} & ;x\in(۰,۱]\\ ۰ & ;x=۰\end{cases}.
$$

قضیه ۹.۲.۲. (ایگوروف) *فرض کنیم X یک فضای اندازه‌پذیر ، $\lambda(X)<\infty$ و $f_۱,f_۲,\dots$ و f توابع مختلط اندازه پذیری روی X باشند به‌طوری که $f_n\xrightarrow{a.e}f$ دراین صورت به ازای هر $\varepsilon>۰$ زیر مجموعه‌ای چون $E\subset X$ وجود دارد به‌طوری که $\lambda(E)<\varepsilon$ و $f_n\longrightarrow f$ به طور یکنواخت بر E^c.*

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۱۰.۲.۲. (لوزین) *اگر $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ تابع اندازه‌پذیر لبگ و $\varepsilon>۰$، آن‌گاه مجموعه‌ی فشرده‌ای مانند $E\subset[a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda(E^c)<\varepsilon$ و $f|_E$ پیوسته است.*

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۱۱.۲.۲. *فرض کنید* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *تابع کراندار و اندازه پذیر باشد. مسیر* $\bar{t} = \{t_n\}$ *تقریباً همه جاf را بازیافت می‌کند اگر وتنها اگر مسیر* $\bar{t}$ *انتگرال لبگ* f *را بدست دهد.*

برهان. عکس قضیه با توجه به قضیه‌ی(۷.۲.۲) واضح است.
فرض کنیم $\bar{t} = \{t_n\}$ ، f را تقریباً همه جا بازیافت می‌کند و$|f|$ توسط ثابت M کراندار باشد.
$\varepsilon > \circ$ و چون $f(\omega_k(x)) \longrightarrow f(x)$ بنابراین با توجه به قضیه‌ی ایگوروف ، m و مجموعه‌ی $A \subseteq [\circ, 1]$ که $\lambda(A) > 1 - \epsilon$ وجود دارد به‌طوری که

$$\forall\ k > m, x \in A \Longrightarrow |f(\omega_k(x)) - f(x)| < \epsilon, \tag{۲۲.۲}$$

برای هر $\delta > \circ$ مجموعه B_δ را به صورت زیر در تعریف می‌کنیم

$$B_\delta = \{x \in [\circ, 1]; (\forall\ i \le m)|x - \omega_i(x)| \ge \delta\}.$$

قرار می‌دهیم $C_n = \{x; \{\omega_1(x), \dots, \omega_m(x)\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}\}$ آن‌گاه $\lambda(C_n) \longrightarrow 1$. (چون وقتی $n \longrightarrow \infty$ همه x ها را شامل می‌شود)
در نتیجه nای وجود دارد که $\lambda(C_n) > 1 - \epsilon$، آن‌گاه با جایگزینی $\acute{\delta} = \frac{\epsilon}{2n}$به جای δ در مجموعه‌ی B_δ نتیجه می‌شود

$$\lambda(B_{\acute{\delta}}) > 1 - \epsilon, \tag{۲۳.۲}$$

با توجه به رابطه‌ی(۲۳.۲) و $\lambda(A) > 1 - \epsilon$،

$$\begin{aligned} \lambda(A \cap B_{\acute{\delta}}) &= \lambda(A) + \lambda(B_{\acute{\delta}}) - \lambda(A \cup B_{\acute{\delta}}) \\ &> 1 - \epsilon + 1 - \epsilon - 1 = 1 - 2\epsilon. \end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

پس با توجه به قضیه‌ی لوزین مجموعه F که $F \subseteq A \cap B_{\acute{\delta}}$ وجود دارد به طوری که $\lambda(F) > 1 - 3\epsilon$و f روی F پیوسته است .
زیرا با توجه به قضیه‌ی لوزین داریم:

$$F \subseteq A \cap B_{\acute{\delta}} \Longrightarrow \lambda(F^c) < \epsilon, f|_E \text{ پیوسته},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} F \subseteq A \cap B_{\acute{\delta}} &\Longrightarrow F \cup F^c = A \cap B_{\acute{\delta}} \\ &\Longrightarrow \lambda(F \cup F^c) = \lambda(A \cap B_{\acute{\delta}}) \\ &\Longrightarrow \lambda(F) = \lambda(A \cap B_{\acute{\delta}}) - \lambda(F^c) \\ &> 1 - 2\epsilon - \epsilon = 1 - 3\epsilon. \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\lambda(F) > ۱ - ۳\epsilon.$$

$\eta < \acute{\delta}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که(تعریف پیوستگی)

$$\forall\, x, y \in F\ ; |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \quad (۲۵.۲)$$

می‌دانیم اندازه‌ی افراز ρ کمتر از η است بنابراین افراز $\rho_\circ$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho_\circ = \{J \in \rho\, ; \lambda(J \cap F) \leq \frac{۱}{۲}\lambda(J)\} \quad , \quad \rho_۱ = \rho - \rho_\circ.$$

از طرفی برای هر $J \in \rho_\circ$,

$$\lambda(J) = \lambda(J \cap F) + \lambda(J - F) \leq \frac{۱}{۲}\lambda(J) + \lambda(J - F).$$

پس $\lambda(J) \leq ۲\lambda(J - F)$ درنتیجه

$$\textstyle\sum_{J \in \rho_\circ} \lambda(J) < ۶\epsilon. \quad (۲۶.۲)$$

ادعا می‌کنیم اگر $J \in \rho_۱$ و $x \in J \cap F$ آنگاه

$$|f(x) - f(r(\bar{t}, J))| < ۲\epsilon.$$

فرض کنید $J \in [a, b]$ و $y = r(J) = r(\bar{t}, J)$. می توان $\acute{x} \in F \cap J$ را طوری پیدا کرد که $y \in [a, b]$. (زیرا $\lambda(F \cap J) > \frac{۱}{۲}\lambda(J)$). آن‌گاه با توجه به رابطه‌ی(۲۳.۲) ، برای هر k که $k > m$ داریم $y = \omega_k(\acute{x})$.

از طرفی از رابطه‌ی (۲۲.۲) و(۲۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(\acute{x}) + f(\acute{x}) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f(\acute{x}) + |f(\acute{x}) - f(x)| \\ &\leq \epsilon + \epsilon = ۲\epsilon. \end{aligned} \quad (۲۷.۲)$$

در نتیجه از رابطه(۲۶.۲) و (۲۷.۲) ،

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{J\in\rho} f(r(J))\lambda(J\cap F) - \int_F f| \leq \sum_{J\in\rho}\int_{J\cap F}|f(r(J)) - f| \\
&= \sum_{J\in\rho_0}\int_{J\cap F}|f(r(J)) - f| + \sum_{J\in\rho_1}\int_{J\cap F}|f(r(J)) - f| \\
&\leq \sum_{J\in\rho_0}\Big(\int_{J\cap F}|f(r(J))| + \int_{J\cap F}|f|\Big) + \sum_{J\in\rho_1}\int_{J\in\rho_1}|f(r(J)) - f| \\
&\leq \sum_{J\in\rho_0}(M\lambda(J) + M\lambda(J)) + 2\epsilon = 2M\sum_{J\in\rho_0}\lambda(J) + 2\epsilon \\
&< 12M\epsilon + 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

اختلاف عبارت $|\sum_{J\in\rho} f(r(J))\lambda(J\cap F) - \int_F f|$ و$|\sum_{J\in\rho} f(r(J))\lambda(J) - \int_I f|$ به صورت $2M\lambda(F^c) \leq 6M\epsilon$ ،بنابراین

$$|\sum_{J\in\rho} f(r(J))\lambda(J) - \int_I f| < 18M\epsilon + 2\epsilon.$$

استدلال بالا برای هر زیر بازه H از I برقرار است و چون مسیر $\bar{t}$ انتگرال لبگ f را برای هر زیر بازه از $[0,1]$ بدست می‌دهد در نتیجه مسیر $\bar{t}$ انتگرال لبگ f را بدست می دهد که با توجه به لم(۴.۲.۲) اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

از لم(۴.۲.۲)نتیجه می‌شود که مسیر $\bar{x}$ انتگرال لبگ f را بدست می‌دهدپس با استفاده از قضیه‌ی (۱۱.۲.۲) می‌توانیم قضیه‌ی زیر از توابع اندازه پذیر را اثبات کنیم.

قضیه ۱۲.۲.۲. *تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ اندازه پذیر است اگر وتنها اگر f تقریباً همه جا بازیافت پذیر باشد.*

برهان. اولاً فرض کنیم f تقریباً همه جا بازیافت‌پذیر باشد یعنی $\{f(\omega_k(x))\} \xrightarrow{a.e.} f$. از لم (۳.۲.۲)اندازه پذیری f نتیجه می‌شود.

بالعکس، فرض کنیم f اندازه پذیر باشد، مشابه قضیه قبل فرض f کراندار باشد. از [۶] می دانیم مسیر $\bar{x}$ انتگرال f را روی هر بازه بدست می‌دهد. بنابراین این مسیر انتگرال لبگ f را نتیجه می‌دهد. از قضیه‌ی (۱۱.۲.۲)مشاهده می‌شود مسیر $\bar{x}$تقریباً همه جا f را بازیافت می‌کند.

در نهایت اگر f اندازه‌پذیر ولی کراندار نباشد آن گاه $\arctan(f)$ اندازه پذیر و کراندار است. از قسمت قبل نتیجه می شود مسیر $\bar{x}$ای وجود دارد که تقریباً همه جا $\arctan(f)$ را بازیافت می‌کند. مشاهده می‌شود که برای هر نقطه مانند x ، مسیر $\bar{x}$، $\arctan(f)$ را بازیافت می‌کند، بنابراین این

مسیر f را نیز بازیافت می کندو درنتیجه $\bar{x}$ تقریباً همه جا f را بازیافت می کند و اثبات کامل می‌شود. $\square$

توجه: مجموعه A را دارای خاصیت بئر گوییم اگر $A = G\Delta P$ که G باز و P کاتگوری اول و Δ نمایش دهنده‌ی تفاضل متقارن است، و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت بئر است اگر $f^{-1}(U)$ برای هر مجموعه‌ی باز U دارای خاصیت بئر باشد.

قضیه ۱۳.۲.۲. *تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت بئر است اگر وتنها اگر f بازیافت‌پذیر باشد، به جز روی نقاطی از مجموعه‌ی کاتگوری اول.*

برهان. اولاً فرض کنیم مسیر $\bar{x}$ در I ، $f(x)$ را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند که S یک مجموعه‌ی کاتگوری اول است، یعنی برای هر $x \in I - S$،

$$\{f(\omega_k(x))\} \longrightarrow f(x).$$

از لم (۳.۲.۲) هر $f(\omega_k)$ دارای خاصیت بئر است وچون برای هر $x \in I - S$ داریم $\{f(\omega_k(x))\} \longrightarrow f(x)$ ،در نتیجه f نیز دارای خاصیت بئر است.

بالعکس، فرض کنیم $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت بئر باشد. در اینصورت یک مجموعه‌ی کاتگوری اول مانند S وجود دارد که تابع تحدید شده‌ی آن روی $I - S$ یعنی $f|_{I-S}$ پیوسته است. (در [۱۷]و [۱۸]).

می‌توان فرض کرد که $I - S$ هیچ نقطه تنهایی ندارد و D هر مجموعه‌ی محملی که پیرامون $I - S$ کشیده شده است. اگر $\bar{x}$ مسیری از مجموعه‌ی محمل D باشد. در اینصورت بوضوح $\bar{x}$ در هر نقطه از $I - S$ ، f را بازیافت می کند. $\square$

فصل ۳

بیشتر یا کمتر، توابع بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت

در این بخش قصد داریم تا یک طبقه بندی از توابعی که در هنگام تقویت یا تضعیف مفهوم بازیافت‌پذیری نخستین بازگشت در روش‌های بدیهی مختلف بوجود می‌آیند را دنبال کنیم.

۱.۳ توابع بازیافت‌پذیر به جز روی مجموعه‌های کوچک

در این بخش توابعی که $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ که به جز روی نقاطی از مجموعه‌ی کوچک بازیافت‌پذیر هستند در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۳. مجموعه‌ی $S \subset \mathbb{R}$ پراکنده است,اگر شامل هیچ زیر مجموعه چگال ناتهی در خودش نباشد و یا معادل با اینکه S یک $\mathcal{G}_\delta$ شمارش‌پذیراست.

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنید $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.گوییم f

۱-تقریباً بازیافت‌پذیر($f \in \mathcal{AR}$) است، اگر مسیر $\bar{x}$ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می کند. S مجموعه‌ای با اندازه صفر است.

۲-نوعاً بازیافت‌پذیر($f \in \mathcal{TR}$) است ، اگر مسیر $\bar{x}$ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می کند. S مجموعه‌ای از کاتگوری اول است.

۳-نزدیکاً بازیافت‌پذیر($f \in \mathcal{NR}$) است، اگر مسیر $\bar{x}$ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می کند. S مجموعه‌ی شمارش پذیر است.

۴-بسیار نزدیکاً بازیافت‌پذیر($f \in \mathcal{SR}$) است، اگر مسیر $\bar{x}$ای وجود داشته باشد که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می کند. S یک مجموعه‌ی پراکنده است.

در فصل قبل نشان دادیم که $f \in \mathcal{AR}$ اگر وتنها اگر f اندازه‌پذیر و $f \in \mathcal{TR}$ اگر وتنها اگر f خاصیت بئر را داشته باشد. هدف اول ما در این فصل دسته بندی $\mathcal{NR}$ به کلاس‌های کوچکتر است. ازتعدادی لم های ساده‌تر برای این‌کار استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۳. تابع $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع اندازه‌پذیر بورل، از کلاس بورل اول گفته می‌شود اگر$f^{-1}(H)$ یک $\mathcal{G}_\delta$-مجموعه در X باشد ، H یک مجموعه‌ی بسته در Y باشد.

تعریف ۴.۱.۳. تابع $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع اندازه‌پذیر بورل، از کلاس بورل دوم گفته می‌شود اگر$f^{-1}(H)$ یک $\mathcal{F}_{\delta\sigma}$-مجموعه در X، باشد ، H یک مجموعه‌ی بسته در Yباشد.

تعریف ۵.۱.۳. فرض $\varepsilon > 0$. نقطه‌ی x از مجموعه S، ε-منفرد است اگر فاصله‌ی بین xو S حداقل ε باشد.

لم ۶.۱.۳. *اگر $E = \{e_n\}$ پراکنده و $\{y_n\}$ یک مجموعه‌ی شمارش‌پذیر باشد، آن‌گاه*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \notin E \\ y_n & ; \ x = e_n \end{cases}$$

تابع بئر یک است.

برهان. اگر نشان دهیم h در کلاس بورل اول قرار دارد، معادل با حکم مورد نظر ماست. فرض کنید U مجموعه‌ی باز باشد، در اینصورت $h^{-1}(U) = E_U \cup Z_U$ که $E_U \subset E$ و Z_U، $\varnothing$ یا $[0,1] - E$ می‌باشد که بستگی دارد U شامل 0 باشد یا نباشد. در هر کدام از این دو مورد $E_U \in \mathcal{F}_\sigma$.

□

لم ۷.۱.۳. *فرض کنید f تابع بئر یک و $\{y_n\}$ شمارش‌پذیر و $E = \{e_n\}$ پراکنده باشد. آن‌گاه*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \notin E \\ y_n & ; \ x = e_n \end{cases},$$

تابع بئر یک است.

برهان. از آنجائیکه E پراکنده است با توجه به لم (۶.۱.۳) داریم $h \in B_1$ که

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \notin E \\ y_n - f(e_n) & ; \ x = e_n \end{cases},$$

اما $g(x) = f(x) + h(x)$ وچون کلاس توابع بئر یک تحت عمل جمع بسته است نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

□

لم ۸.۱.۳. *اگر f متعلق به کلاس بئر دو باشد، آن‌گاه تابع بئر یک g^* وجود دارد به‌طوری‌که $E = \{x \; ; \; f(x) \neq g^*(x)\}$ شمارش‌پذیر و چنین گرافی از g^* محصور در متمم E، چگال در گراف g^* است.*

برهان. فرض کنید f متعلق به کلاس بئر دو باشد. در اینصورت تابع بئریک g وجود دارد که $E = \{x \; ; \; f(x) \neq g(x)\}$ شمارش‌پذیر است. قرار می‌دهیم $A = [0, 1] - E$. از $C(f \mid_A, x)$ برای مشخص کردن مجموعه‌ی خوشه‌ای $f \mid_A$ در x استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$E_1 = \{x \in E \; ; g(x) \in C(f \mid_A, x)\},$$

$$E_2 = \{x \in E \; ; g(x) \notin C(f \mid_A, x)\} = \{x \in E \; ; g(x) \notin C(g \mid_A, x)\}.$$

و برای هر عدد طبیعی n قرار می دهیم

$$E_{2,n} = \{x \in E_2 \; ; \text{است} C(f \mid_A, x) \text{از} \text{ منفرد } -\frac{1}{n}, g(x)\}.$$

ملاحظه می‌کنیم که $E_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{2,n}$.

ادعا می‌کنیم برای هر n، $E_{2,n}$ پراکنده است. n را ثابت در نظر گرفته وفرض می‌کنیم $E_{2,n}$ شامل زیر مجموعه چگال در خود مانند D می‌باشد. آن‌گاه $\bar{D}$ کامل و چون g متعلق به کلاس بئر یک است، نقطه $s \in \bar{D}$ درجائیکه تابع $g \mid_{\bar{D}}$ پیوسته است، وجود دارد.

$\frac{1}{4n} > \varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ ، بنابراین اگر $x \in \bar{D}$ و $|x - s| < \delta$ آن‌گاه

$$|g(x) - g(s)| < \varepsilon.$$

سپس $x^* \in D$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|x^* - s| < \delta$.

از آنجائیکه $\bar{D}$ کامل و E شمارش‌پذیر است، دنباله‌ی $\{x_k\}$ در $\bar{D} \cap A$ وجود دارد به‌طوری که $x_k \to x^*$. چون $x_k \in A$ و فاصله‌ی $g(x^*)$ از $C(g \mid_A, x^*)$ حداقل $\frac{1}{n}$ می‌باشد، عدد طبیعی k وجود دارد که برای هر $k > K$،

$$|g(x_k) - g(x^*)| > \frac{1}{2n} \qquad , \qquad |x_k - x^*| < \delta - |x^* - s|.$$

برای $k > K$ داریم $x_k \in \bar{D} \; , \; |x_k - s| < \delta$، درنتیجه

$$|g(x_k) - g(s)| \geq |g(x_k) - g(x^*)| - |g(x^*) - g(s)| > \frac{1}{2n} - \varepsilon > \varepsilon$$

که تناقض با فرض می‌باشد، بنابراین این تناقض ادعای ما را که $E_{2,n}$ پراکنده است، ثابت می‌کند.

در مرحله بعد $H_0 = E_1$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $H_n = E_{2,n+1} - E_{2,n}$. حال قرار می‌دهیم $h_0(x) = g(x)$ و

$$h_{n+1}(x) = \begin{cases} h_n(x) & ; x \notin H_n \\ y^*(x) & ; x \in H_n \end{cases},$$

که $y^*(x)$ نقطه‌ای از $C(g\mid_A, x)$ که $\frac{1}{n+1} < |y^*(x)-g(x)| < \frac{1}{n}$. این شرط برای هر $n \geq 1$ ودر هر نقطه‌ای از $C(g\mid_A, x)$ برقرار است. با توجه به لم(۷.۱.۳) به ازای هر n ، h_n متعلق به کلاس بئروان می‌باشد. از طرفی روشن است که $\{h_n\}$ به طور یکنواخت کوشی و همگرا به تابع بئریک g^* است.
در نهایت وقتی $x \in A$ ،$g^*(x) = g(x)$ وبرای هر $x \in E$ ، $g^*(x) \in C(g^*\mid_A, x) = C(g\mid_A, x)$.
از طرفی گراف $f\mid_A = g\mid_A$ نیز چگال در گرافی از تابع بئریک g^* می‌باشد.

□

قضیه ۹.۱.۳. *تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متعلق به $\mathcal{NR}$ است اگر وتنها اگر f متعلق به کلاس بئر دو باشد.*

برهان. فرض کنید $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متعلق به کلاس بئر دو باشد، وبا توجه به لم(۸.۱.۳) ، g^* را تابع بئریک در نظر می گیریم. فرض کنید A در جائیکه fو g^* سازگارند، مجموعه‌ی ناشمارا باشد. چون $g^*\mid_A$ چگال در گراف g^* ، پس مجموعه‌ی محمل D را که $g^*\mid_D$ چگال در g^* است، وجود دارد. آن‌گاه قضیه‌ی (۱) در[۸] ثابت می‌کند مسیر $\bar{x}$ از D وجود دارد که g^* را در هرجایی بازیافت می‌کند.

چون fوg^* روی مجموعه‌ی A وبه طور خاص روی مجموعه‌ی D سازگارند، مسیر$\bar{x}$ در هر نقطه‌ای از A، f، را بازیافت می‌کند. بنابراین f نزدیکاً همه‌جا بازیافت‌پذیر است.

بالعکس، فرض کنید $f \in \mathcal{NR}$ و $\bar{x}$ مسیری که در هر نقطه از مجموعه‌ی ناشمارای A، f را بازیافت می‌کند. بدون اینکه به کلیت مسأله خللی وارد شود، هر $\bar{x}(n)$ را متعلق به A درنظر می‌گیریم. در [۱۶] نشان داده شده که یک تابع متعلق به کلاس بئر دو است اگر وتنها اگر اختلاف تصویر وارون هر مجموعه‌ی باز از مجموعه‌ی $\mathcal{F}_\sigma$ یک مجموعه‌ی شمارا باشد. نشان می دهیم f این ویژگی را دارد.

A را به عنوان فضای متریک در نظر می‌گیریم، تابع $f\mid_A: A \longrightarrow \mathbb{R}$ تقریباً همه‌جا بازیافت‌پذیر روی A است. از[۷] می‌دانیم اگر یک تابع از فضای متریک به فضای متریک تفکیک‌پذیر، تقریباً همه‌جا بازیافت‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع از کلاس بورل اول است.(قضیه‌ی ۱ در[۷])

حال U را مجموعه باز در $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. از آنجائیکه $f\mid_A$ کلاس بورل اول است، زیرمجموعه‌ی F از $[0, 1]$ وجود دارد که یک، $\mathcal{F}_\sigma$-مجموعه می‌باشد، به‌طوری‌که $(f\mid_A)^{-1}(U) = F \cap A$.

درنتیجه

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= (f\mid_A)^{-1}(U) \cup \left(f^{-1}(U) \cap A^c\right) \\ &= (F \cap A) \cup \left(f^{-1}(U) \cap A^c\right) \\ &= \left[(F\cap A) \cup (F \cap A^c) \cup \left(f^{-1}(U) \cap F^c \cap A^c\right)\right] - \left[A^c - f^{-1}(U)\right] \\ &= F \cup \left(f^{-1}(U) \cap F^c \cap A^c\right) - \left(A^c - f^{-1}(U)\right). \end{aligned}$$

چون $f^{-1}(U) \cap F^c \cap A^c$ و $A^c - f^{-1}(U)$ هر دو مجموعه‌ی شمارش‌پذیرند$f^{-1}(U)$، اختلاف بین دو مجموعه‌ی شمارش‌پذیر می‌باشد. □

اگر محدوده‌ی مجموعه‌ها را گسترش دهیم به‌طوری‌که شمارش‌پذیر نباشد ولی بستار شمارش پذیر داشته باشد آن‌گاه دقیقاً به کلاس توابع بئریک می‌رسیم. با توجه به [۵] در حالت کلی داریم:

قضیه ۳.۱.۱۰. *فرض کنید* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *، آن‌گاه عبارات زیر معادل یکدیگرند:*

۱- f متعلق به کلاس بئر یک است.

۲- f بازیافت‌پذیر است.

۳- f به جز روی مجموعه‌ی پراکنده، بازیافت‌پذیر است.

برهان. معادل بودن ۱ و ۲ در [۱۱]نشان داده شده وهمچنین واضح است که ۳ $\Rightarrow$ ۲ نیز برقرار است. کافی است ثابت کنیم ۲ $\Rightarrow$ ۳ .

فرض کنیم D مجموعه‌ی محمل و $E \subset I - D$ پراکنده باشد و $\bar{x} = \{x_n\}$ مسیری از D که f را به جز روی مجموعه‌ی E بازیافت می‌کند. مسیر $\bar{y}$ از $D \cup E$ که f را روی I بازیافت می‌کند، تولید می‌کنیم. به طور خاص $\bar{y}$ را طوری تعریف کنیم که برای هر $x \in I - E$، مسیر نخستین بازگشت به x بر پایه مسیر $\bar{y}$ ، یعنی $R(\bar{y}, x)$ ومسیر نخستین بازگشت به x بر پایه مسیر $\bar{x}$یعنی $R(\bar{x}, x)$، یک دم دنباله‌ی مشترک دارند. بنابراین این مسیرها را به گونه‌ای مرتب می‌کنیم که برای هر $x \in I - E$ ، $R(\bar{y}, x)$ شامل تعداد متناهی نقاط از E باشد. E را به صورت $\{e_k\}$ مرتب می‌کنیم. مسیر اصلاح شده $\bar{y}$ را با قرار دادن هر e_k بین دو جمله در $\bar{x}$ تعریف می‌کنیم. از آنجائیکه E پراکنده در نتیجه، یک مجموعه‌ی $\mathcal{G}_\delta$ - شمارش‌پذیر است که $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$، هر G_i مجموعه باز و $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$.

فرض کنید n_1 به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، اگر (a, b) عنصری از G_1 شامل e_1، آن‌گاه $k_1, k_2 < n_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $a < x_{k_1} < e_1 < x_{k_2} < b$.

در اینصورت n_2 بزرگتر از n_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که اگر (a, b) عنصری از G_2 شامل e_2 باشد آن‌گاه $k_1, k_2 < n_2$ وجود داشته باشند به طوری‌که $a < x_{k_1} < e_2 < x_{k_2} < b$.

با ادامه‌ی این روند مجموعه‌ی $D \cup E$ را به صورت زیر مرتب می‌کنیم
$$\bar{y} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, e_1, x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2}, e_2, x_{n_2+1} \ldots\}.$$
حال اگر $R(\bar{y}, x)$ آن‌گاه $\{e_{k_j}\} \subseteq R(\bar{y}, x)$ آن‌گاه $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j = E$. بنابراین اگر $x \in I - E$ آن‌گاه $R(\bar{y}, x)$ شامل تنها تعداد متناهی از نقاط E می‌شود، بنابراین بعضی از نقاط روی $R(\bar{y}, x)$ و $R(\bar{x}, x)$ سازگارند. در نتیجه $\bar{y}$، f را روی I بازیافت می‌کند. □

۲.۳ توابع عموماً بازیافت‌پذیر به جز روی مجموعه‌های کوچک

در قسمت قبلی امکان تضعیف شرط بازیافت‌پذیری را بیان کردیم. در این قسمت راه تقویت آن را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۳. تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، عموماً بازیافت‌پذیر نامیده می‌شود($f \in \mathcal{UR}$) اگر برای هر مجموعه‌ی محمل D مسیر $\bar{x}$ از D وجود داشته باشد، به‌طوری‌که f نسبت به $\bar{x}$ بازیافت‌پذیر نخستین بازگشت است.

در[۸]نشان داده شده که $f \in \mathcal{UR}$ اگر وتنها اگر f یک تابع شبه پیوسته در کلاس بئریک باشد.

تعریف ۲.۲.۳. تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، تابع شبه پیوسته در نقطه‌ی x است اگر هر همسایگی از $(x, f(x))$ شامل نقاطی از گراف $f \mid_{C(f)}$ باشد($C(f)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی نقاط پیوستگی f می‌باشد). $Q(f)$ مجموعه‌ای از نقاط شبه پیوستگی fمی‌باشد و قرار می‌دهیم
$NQ(f) = [0, 1] - Q(f)$. اگر $Q(f) = I$ در اینصورت f یک تابع شبه پیوسته است.

در این بخش کلاس‌های مختلف بدست آمده از ترکیب مفهوم عمومیت با نتایج قسمت قبل را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنید$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. گوییم f
۱- تقریباً عمومی بازیافت پذیر($f \in \mathcal{AUR}$) است اگر مجموعه‌ی S با اندازه صفر وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند.
۲-عموماً تقریبی بازیافت پذیر($f \in \mathcal{UAR}$) است اگر برای هر مجموعه‌ی محمل D مسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی $S(\bar{x})$ با اندازه‌ی صفر وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{x}$ ، f را در هر نقطه از $I - S(\bar{x})$ بازیافت می‌کند.

۳-نوعاً عمومی بازیافت پذیر($f \in \mathcal{TUR}$) است اگر مجموعه‌ی کاتگوری اول مانند S وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند.

۴-عموماً نوعی بازیافت پذیر($f \in \mathcal{UTR}$) است اگر برای هر مجموعه‌ی محمل Dمسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی کاتگوری اول $S(\bar{x})$ وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{x}$، f را در هر نقطه از $I - S(\bar{x})$ بازیافت می‌کند.

۵-نزدیکاً عمومی بازیافت پذیر($f \in \mathcal{NUR}$) است اگر مجموعه‌ی شمارش‌پذیر S وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند.

۶-عموماً نزدیک بازیافت پذیر($f \in \mathcal{UNR}$) است اگر برای هر مجموعه‌ی محمل D مسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی شمارش پذیر $S(\bar{x})$ وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{x}$ ، f را در هر نقطه از $I - S(\bar{x})$ بازیافت می‌کند.

۷-بسیار نزدیکاًعمومی بازیافت پذیر($f \in \mathcal{SUR}$) است اگر مجموعه‌ی پراکنده S وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی محمل D دارای مسیری است که f را در هر نقطه از $I - S$ بازیافت می‌کند.

۸-عموماً بسیار نزدیک بازیافت پذیر($f \in \mathcal{USR}$) است اگر برای هر مجموعه‌ی محمل D مسیر $\bar{x}$ از D و مجموعه‌ی پراکنده $S(\bar{x})$ وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{x}$ ، f را در هر نقطه از $I - S(\bar{x})$ بازیافت می‌کند.

قضیه ۴.۲.۳. *فرض کنید f متعلق به $\mathcal{UAR}$ یا$\mathcal{AUR}$ و $r < s$. در اینصورت هیچ بازه‌ای مانند J در هیچ کدام از دو مجموعه‌ی $E_۱ = f^{-۱}((-\infty, r])$ و $E_۲ = f^{-۱}([s, +\infty))$ که در J چگال باشند، وجود ندارد.*

برهان. قضیه را برای $f \in \mathcal{UAR}$ ثابت می‌کنیم، اثبات برای $\mathcal{AUR}$ به طور مشابه است. فرض بازه J وجود دارد ومجموعه محمل $D_۱$ و $D_۲$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $i = ۱, ۲$، $D_i \subset E_i \cap J$.

چون $f \in \mathcal{UAR}$، مسیر $\bar{x}_۱$ از $D_۱$ و مسیر $\bar{x}_۲$ از $D_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که تقریباً برای هر $x \in [۰, ۱]$،

$$\{f(\omega_{\bar{x}_۱}, k(x))\} \to f(x) \qquad , \qquad \{f(\omega_{\bar{x}_۲}, k(x))\} \to f(x).$$

تقریباً برای هر$x \in J$، $f(x) \leq r$ و $f(x) \geq s$.

و چون $r < s$ ، درنتیجه به تناقض می‌رسیم و اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنید f متعلق به $\mathcal{UAR}$ یا $\mathcal{UTR}$ و $r < s$. آن‌گاه* $\{x\,;\lim_{t\to x} f(x)$ *وجود دارد*$\}$ *پس‌مانده است.*

برهان. قرار می‌دهیم $A = \{x\,;\lim_{t\to x} f(x)$ وجود ندارد$\}$ ومجموعه‌ی A_{rs} را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A_{rs} = \{x \in A\,; \liminf_{t\to x} f(t) \leq r < s \leq \limsup_{t\to x} f(t)\}.$$

آن‌گاه $A = \bigcup_{r<s\in\mathbb{Q}} A_{rs}$ و با توجه به قضیه‌ی(۴.۲.۳) اگر $r < s$ ، مجموعه‌ی A_{rs} در هیچ جا چگال نمی‌باشد. بنابراین A جزء مجموعه‌ی کاتگوری اول است واثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۶.۲.۳. *اگر f متعلق به $\mathcal{UTR}$ یا $\mathcal{UAR}$ باشد. آن‌گاه $C(f)$ پس مانده است.*

برهان. قرار می‌دهیم $B = ([0,1] - C(f)) - A$ که A مجموعه‌ی تعریف شده درقضیه‌ی (۵.۲.۳)است. به عبارت دیگر B مجموعه نقاط ناپیوستگی رفع شدنی f می‌باشد. برای $r < s$ تعریف می‌کنیم:

$$B_{rs} = \{x \in B\,; f(x) \leq r < s \leq \lim_{t\to x} f(t)\}\ ,$$

$$B'_{rs} = \{x \in B\,; \lim_{t\to x} f(t) \leq r < s \leq f(x)\}.$$

داریم $B = \bigcup_{r<s\in\mathbb{Q}} (B_{rs} \cup B'_{rs})$. از قضیه‌ی (۴.۲.۳) وبا ثابت در نظر گرفتن $r < s$، B_{rs} و B'_{rs} هر دو در هیچ جا چگال نیستند. بنابراین B مجموعه‌ی کاتگوری اول است. درنتیجه با استفاده از قضیه‌ی (۵.۲.۳) اثبات کامل می‌شود. □

مراجع

[1] Aliprantis,D. *Principles Of Real Analysis*, 3rd, Academic Press, Aug(1998) .

[2] Apostal Tom M,*Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Publishing Company, (1975)

[3] Bear,Herbert Stanley, *A Primer of Lebesgue Integration*, A Harcourt Scinence and Technology Company, (1995)

[4] Brosik J.,*On the Points of Bilateral Quasicontinuity of Functions*, Real Anal. Exch. 19(1993-94), 529-536

[5] Cwiek I., Pawlak R. and Swiatek B.,*On Some Subclasses of Baire 1 Fuctions*, Real Anal. Extch. 27(2001/2002), 415-422

[6] U.B Darji,M.J.Evans, *A First Return Examination of the Lebesgue Integral*, Real Anal. Exachange 27 (2001)573-581

[7] U.B Darji and M.J.Evans, *Recovering Baire 1 Functions*, Mathematika 42(1995), 43-48.

[8] U.B Darji,M.J.Evans and Homke P. D.,*First return Approachability*, J. math. Anal. and Appl. 199(1996),545-557

[9] U.B Darji,M.J.Evans,C.Freiling,and R.J.O'Malley,*Fine Properties of Baire One Functions*, Fund. Math. 155(1998), 177-188.

[10] U.B Darji,M.J.Evans,and R.J.O'Malley, *First Return Path Systems: Differentiability, Continuity, and Orderings*, Act Math. Hungar. 66(1995), 83-103.

[11] U.B Darji,M.J.Evans,and R.J.O'Malley, *A First Return Characterization for Baire One Function*, Real Analysis Exchange 19(1993), 510-515.

[12] T. G.De Barra, *Measure Theory And Integration*, New Age International(P) Limited, Publishers(1981).

[13] Evans M. J., Humke P. D. and O'Malley R. J.,*Consistent Recovery and Polygonal Approximation of Functions*, Real Anal. Extch. 28(2002-2003), 641-648

[14] Gerald B. Folland,*Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, A Wiley-Iriterscience Publication(1999).

[15] J.Grahl,*A probabilistic Method for Calculating Lebesgue Integrals*, Dissertation, Univercity Collage London(2006), 39pp

[16] Hausdorff,*Uber Halfstetige Funktionen and Deren Verallgemeimerung*, Math. Z. 5 (1919), 292-309 . F.

[17] C.Kuratowski,*Topologie* ,Vol. 1, 4th ed.,Monograf.Mat. 20,PWN,Warszawa,1958.

[18] J.C.Oxtoby, *Measure and Category. A Survey of the Analogies Between Topological and Measure Spaces*, 2nd ed., Grad.Texts in Math. 2, Springer, New York, 1980

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اجتماع یکنوا	Monotone Unions
افراز	Partition
انتگرال‌پذیری نخستین بازگشت	First Return Integrable
انتگرال نخستین بازگشت	First Return Integrab
اندازه	Measure
اندازه لبگ	Lebesgue Measurable
بازیافت نخستین بازگشت	First Return Recovery
بئریک	Bair One
پراکنده	Scattered
پیوسته	Continous
تابع پیوسته	Simple Function
ترتیب	Ordering
تقریباً عمومی بازیافت‌پذیر	Almost Universally Recoverable
جبر	Algebra
σ-جبر	σ- Algebra
چگال	Dense
خاصیت بئر	Baire Property

درجه .... Honorary

دم،دنباله .... Tail

دنباله .... Sequence

زیربازه .... Subinterval

سازگار .... Agree

شبه پیوسته .... Quasicontinuous

شمارش، تعداد .... Enumeration

عمومی .... Universal

عنصر،عضو .... Component

فضای اندازه .... Measure Space

فضای اندازه‌پذیر .... Measurable Space

قضیه ایگوروف .... Egorov's Theorem

قضیه گسترش کاراتئودوری .... Caratheodory Extension Theorem

قضیه لوزین .... Luzin's Theorem

قضیه همگرایی یکنوا .... Monotone Convergence Theorem

کاتگوری اول .... First Category

کاتگوری بئر .... Baire Category

کراندار .... Bounded

کلاس بورل اول .... First Borel Class

گردایه .... Callection

متصل، مجاور .... Contiguous

متقارن، قرینه .... Symmetric

متمم .... Complement

σ-متناهی .... σ- finite

محصور .... Restricted

مجزا .... Disjoint

مجموعه‌ی بورل .... Borel Set

مجموعه‌ی خوشه ای .... Cluster Set

مجموعه‌ی محمل .... Support Set

مسیر .... Trajectory

منفرد .... Isolated

ناشمارا .... Co-countable

ناپیوستگی رفع شدنی .... Removable Discontinuity

نوعاً بازیافت‌پذیر .... Typically Recoverable

نوعاً عمومی بازیافت‌پذیر .... Typically Univesally Recoverable

نیم حلقه .... Semiring

واحد، یکه .... Unit

همسایگی .... Neigborhood

همگرا .... Converge

هیچ جا چگال .... Nowhere Dense

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Agree	سازگار
Algebra	جبر
σ-Algebra	σ-جبر
Almost Recoverable	تقریباً همه جا
Almost Universally Recoverable	تقریباً عمومی بازیافت پذیر
Baire Category	کاتگوری بئر
Baire One	بئر یک
Baire Property	خاصیت بئر
Borel Set	مجموعه بورل
Bounded	کراندار
Caratheodory Extension Theorem	قضیه گسترش کاراتئودوری
Cluster Set	مجموعه خوشه‌ای
Co-countable	ناشمارا
Callection	گردایه
Complement	متمم
Component	عنصر
Contiguous	متصل،مجاور

Continous .... پیوسته

Converge .... همگرا

Dense .... چگال

Disjoint .... مجزا

Egorov's Theorem .... قضیه ایگوروف

Enumeration .... شمارش،تعداد

First Borel Class .... کلاس بورل اول

First Category .... کاتگوری اول

First Return Integrab .... انتگرال نخستین بازگشت

First Return Integrable .... انتگرال‌پذیری نخستین بازگشت

First Return Recovery .... بازیافت نخستین بازگشت

σ-Finite .... σ-متناهی

Honorary .... درجه

Isolated .... منفرد

Lebesgue Measurable .... اندازه لبگ

Luzin's Theorem .... قضیه لوزین

Measure .... اندازه

Measure Space .... فضای اندازه

Measurable Space .... فضای اندازه‌پذیر

Monotone Unions .... اجتماع یکنوا

Monoton Convergence Theorem .... قضیه همگرایی یکنوا

Nearly Recoverable .... نزدیکاً بازیافت‌پذیر

Nearly Universally Recoverable .... نزدیکاً عمومی بازیافت‌پذیر

همسایگی .... Neighborhood

هیچ جا چگال .... Nowhere Dense

ترتیب .... Ordering

افراز .... Partition

شبه پیوسته .... Quasicontinuous

ناپیوستگی رفع شدنی .... Remvable Discontinuity

پس مانده .... Residual

محصور .... Restricted

پراکنده .... Scattered

نیم حلقه .... Semiring

فضای متریک تفکیک‌پذیر .... Seprable Metric Space

دنباله .... Sequence

تابع ساده .... Simple Function

زیربازه .... Subinterval

مجموعه محمل .... Support Set

متقارن،قرینه .... Symmetric

دم،دنباله .... Tail

مسیر .... Trajectory

نوعاً بازیافت‌پذیر .... Typically Recoverable

نوعاً عمومی بازیافت‌پذیر .... Typically Universally Recoverable

واحد، یکه .... Unit

عمومی .... Univesal

بسیار نزدیکاً عمومی بازیافت‌پذیر .... Very Nearly Universally Recoverable

Surname: Koseh Gharravi Name: Omar

Title: Almost Everywhere First-Return Recovery

Supervisors: Dr Kamran Sharifi and Dr Elham Dastranj
Advisor: Seyed Reza Moosavi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics
Field: Complex Analysis

Technology University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: February 2014 Number of pages: 50

Keywords: First return integrable, First-return recoverable, Lebesgue integrable, measurable functions, Almost universally recoverable

Abstract

We present a new characterization of Lebesgue measurable functions ;namely,a function $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ is measurable if and only if it first-return recoverable almost everywhere.this result is established by demonstrating a connection between almost everywhere first-return recovery and and a first-return process for yielding the integral of a measurable function.

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Almost Everywhere First-Return Recovery

Supervisors

Dr Kamran Sharifi and Dr Elham Dastranj

Advisor

Seyed Reza Moosavi

by

Omar Koseh Gharravi

February 2014