



دانشکده ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش بدون مش برای مسائل مقدار مرزی

استاد راهنما

دکتر مس فروش

پژوهشگر

سمیه حققی

تیر ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: حقی

نام: سمیه

عنوان: روش بدون مش برای مسائل مقدار مرزی

استاد راهنما: دکتر مس فروش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود تاریخ فارغ التحصیلی: تیر ۱۳۹۲
دانشکده ریاضی تعداد صفحات: ۷۱

واژگان کلیدی: عناصر متناهی، بدون شبکه، مساله مقدار مرزی، جواب خاص، جواب همگن، تابع وزن، تقریب کمترین مربعات متحرک، توابع شکل

چکیده

این پایان نامه به حل عددی مسائل مقدار مرزی به روش بدون شبکه توسعه یافته می پردازد. در فصل اول به بیان مفاهیمی از روش های بدون شبکه و تفاوت آنها با روش عناصر متناهی می پردازیم. در فصل دوم روش های تقریبی برای ساخت توابع شکل، از جمله روش تقریبی کمترین مربعات متحرک (MLS) معرفی می شوند. فصل آخر از دو بخش کلی تشکیل شده است، که در بخش اول به معرفی کامل و نحوه فرمول بندی و پیاده سازی روش بدون شبکه EFG بر پایه تقریب MLS می پردازیم، و در بخش دوم با معرفی روش بدون شبکه توسعه یافته و حل مثال پواسون یک بعدی تاثیر روش بدون شبکه توسعه یافته بر مسایل عددی سنجیده خواهد شد. رسم تمامی نمودارها در بخش مثال های عددی با استفاده از نرم افزار Matlab می باشد.

تقدیم به همه آشنایی که

می خوانند بیشتر بدانند

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

^۱ مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزار می...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.
در این جا وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مس فروش،
صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام
نمی رسید.

سمیه حقی
تیر ۱۳۹۲

فهرست مطالب

۱	مفاهیم بنیادی در روش‌های بدون شبکه	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۵	۲.۱ دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه	۵
۵	۱.۲.۱ چگونگی فرمول‌بندی	۵
۶	۲.۲.۱ نوع تقریب توابع	۶
۷	۳.۲.۱ نوع نمایش دامنه	۷
۹	۲ روش‌های تقریب توابع	۹
۹	۱.۲ مقدمه	۹
۹	۲.۲ روش‌های درونیایی نقطه‌ای	۹
۱۰	۱.۲.۲ روش درونیایی نقطه چندجمله‌ای (PPIM)	۱۰
۱۴	۲.۲.۲ روش درونیایی نقطه شعاعی (RPIM)	۱۴
۱۷	۳.۲ تقریب کمترین مربعات متحرک (MLS)	۱۷
۲۱	۱.۳.۲ ویژگی‌های تقریب کمترین مربعات متحرک	۲۱
۲۳	۲.۳.۲ تقریب شپارد	۲۳
۲۴	۳.۳.۲ معرفی روشی پایدار در تقریب MLS	۲۴
۲۵	۴.۲ تابع وزن و انتخاب اندازه‌ی محمل گره‌ای	۲۵
۲۵	۱.۴.۲ توابع وزن تقریب MLS	۲۵
۲۶	۲.۴.۲ اندازه‌ی محمل گره‌ها	۲۶
۲۸	۵.۲ ویژگی‌های توابع شکل	۲۸
۳۳	۳ روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته برای مسایل مقدار مرزی	۳۳

۳۳		مقدمه	۱.۳
۳۳		روش بازتولید نقطه با هسته	۲.۳
۳۹		توابع شکل در روش (RKPM)	۱.۲.۳
۴۰		روش گالرکین بدون شبکه‌ی (EFG)	۳.۳
۴۳		فرم‌های ضعیف بهبودیافته	۱.۳.۳
۴۴		پیاده‌سازی روش EFG	۲.۳.۳
۴۷		اعمال شرایط مرزی دیریکله به روش مستقیم	۳.۳.۳
۴۸		انتگرال‌گیری روش EFG	۴.۳.۳
۴۹		الگوریتم روش EFG	۵.۳.۳
۴۹		روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته	۴.۳
۵۶		مثال‌های عددی	۵.۳
۵۶		مساله یک بعدی	۱.۵.۳

۶۲

مراجع

۶۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۶۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مفاهیم بنیادی در روش‌های بدون شبکه

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه به معرفی روش بدون شبکه توسعه یافته^۱ برای مسائل مقدار مرزی^۲ به صورت

$$\begin{cases} u_{xx} + b(x) = 0, & \text{in } (a, b), \\ u(a) = \bar{u}_a, & u(b) = \bar{u}_b, \end{cases} \quad (1.1)$$

می‌پردازیم. در معادله (۱.۱) $b(x)$ ، تابع منبع^۳ می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله، همراه با شرایط مرزی^۴ و شرایط اولیه^۵، را یک **مساله مقدار مرزی** می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. **جواب خاص** برای یک مساله مقدار مرزی، به صورت یک عبارت تحلیلی می‌باشد، که در معادله دیفرانسیل شامل تابع منبع صدق می‌کند، ولی لزوماً در شرایط مرزی مساله صدق نخواهد کرد.

نکته ۳.۱.۱. **جواب عمومی** مساله مقدار مرزی را می‌توان، به صورت مجموع دو جواب خاص و جواب همگن به صورت

$$u(x) = u^o(x) + u^p(x),$$

^۱Extended meshfree method

^۲Boundary value problems

^۳Source term

^۴Boundary condition

^۵Initial conditions

نوشت که $u^0(x)$ و $u^p(x)$ به ترتیب، جواب خاص و جواب همگن می‌باشند.

بیشتر پدیده‌ها در طبیعت، مانند پدیده‌های مکانیکی، زمین‌شناسی، زیست‌شناسی یا شیمیایی را می‌توان به کمک معادلات جبری، معادلات دیفرانسیلی و یا معادلات انتگرال توصیف کرد. ایده‌آل‌ترین حالت پس از مدل‌سازی، زمانی رخ می‌دهد که جواب تحلیلی و دقیق معادلات به دست آید، ولی به دلیل پیچیدگی بسیاری از مسایل، تنها قادر به حل تحلیلی و دقیق برخی از این معادلات هستیم. ریاضیدانان برای حل این معادلات، روش‌های عددی گوناگونی برای حل تقریبی آنها ابداع کردند [۱]. امروزه مهندسان و محققان علوم با بسیاری از این روش‌ها و تکنیک‌ها برای انواع مختلف مسایل آشنا می‌باشند. به دلیل پیشرفت سریع تکنولوژی محاسباتی و کامپیوتری، روش‌های شبیه‌سازی عددی با یک مسیر رو به افزایش، به عنوان ابزاری مهم برای حل مسایل پیچیده در مهندسی و علوم به کار می‌روند.

تعریف ۴.۱.۱. شبیه‌سازی عددی، تبدیل مساله‌ای پیچیده به شکل گسسته می‌باشد، به گونه‌ای که بتوان با کامپیوتر آن را حل کرد.

معادلات اصلی مساله به صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی^۶، معادلات دیفرانسیل جزئی^۷، و معادلات انتگرالی^۸ بیان می‌شوند و شرایط مرزی و شرایط اولیه، برای تکمیل معادلات اصلی به کار می‌روند. بنابراین برای حل یک مساله به روش عددی به طوری که نتایج حاصل به خوبی نمایانگر فیزیک مساله باشد، باید روش عددی مناسبی استفاده کنیم. روش تفاضلات متناهی^۹، المان‌های مرزی^{۱۰}، حجم‌های متناهی^{۱۱} و روش بدون شبکه نمونه‌هایی از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل می‌باشند [۲]، [۳]. روش تفاضلات متناهی از اولین روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. استفاده از روش‌های تفاضلات متناهی برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، با مشکلاتی مواجه است، از آن جمله می‌توان به پایداری محدود روش تفاضلات متناهی صریح، افزایش هزینه‌های محاسباتی در روش تفاضلات متناهی ضمنی، پیاده‌سازی مشکل برای مسایل غیرخطی و کاهش دقت در رویارویی با مرزهای نامنظم اشاره نمود.

^۶Ordinary differential equations

^۷Partial differential equations

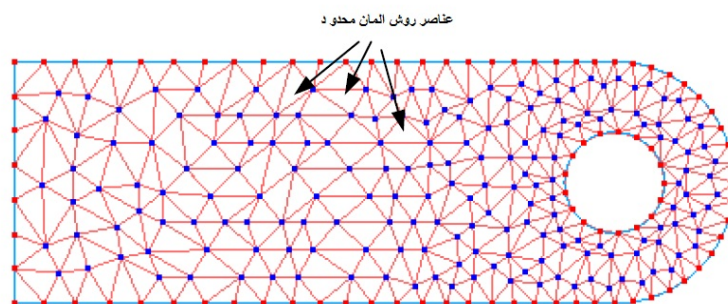
^۸Integral equations

^۹Finite difference method

^{۱۰}Boundary element method

^{۱۱}Finite volume method

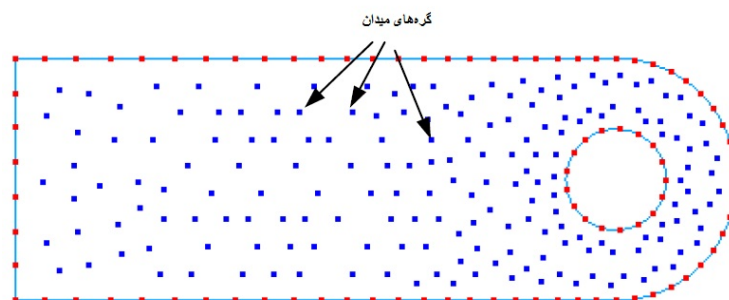
در دهه‌ی ۱۹۵۰ برای رفع این مشکلات روش عناصر متناهی مطرح شد. روش عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل، حاصل از مدل‌سازی سیستم‌های مهندسی، روشی کارا و مناسب است. در این روش، مطابق شکل ۱.۱ دامنه مساله با تعداد زیادی از عنصر با اشکال ساده که در نقاطی به نام گره به یکدیگر متصل شده‌اند، نشان داده می‌شود. تقریب به دست آمده، به ویژگی‌ها و تعداد عنصر به کار رفته، بستگی دارد و برای این که نتایج دقیقی از این روش به دست آید، باید تعداد عنصر بیشتری در نظر گرفته شود.



شکل ۱.۱: نمایش دامنه در روش عناصر متناهی

ایجاد شبکه، از اصلی‌ترین بخش‌های روش عناصر متناهی است. برای دسته خاصی از مسایلی، استفاده از شبکه‌بندی منجر به پیچیدگی‌های زیادی می‌گردد. استفاده از روش عناصر متناهی در مسایلی که دارای تغییر شکل زیادی در دامنه هستند، به دلیل به هم خوردن عناصر، منجر به کاهش دقت خواهد شد. بنابراین در مسایلی که تغییر شکل‌های زیاد در دامنه، گسترش شکاف و موارد شبیه به آن وجود دارد، استفاده از روش عناصر متناهی دارای پیچیدگی و خطای زیادی می‌باشد. بنابراین ایده‌ی روش‌های بدون شبکه، به منظور رهایی از پیچیدگی‌های حاصل از اتصال بین گره‌ها مطرح شد تا مشکلات ناشی از وجود شبکه را از بین ببرد [۴]، [۵]، [۶]، [۷].

جذابیت اصلی روش‌های بدون شبکه در امکان به‌روزرسانی ساده‌ی آنها است. در روش‌های بدون شبکه دامنه‌ی مساله مطابق شکل ۲.۱ توسط مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده با توزیع دلخواه نمایش داده می‌شود. این گره‌ها احتیاج به هیچ‌گونه ارتباط و اتصال با یکدیگر ندارند. بنابراین روش‌های بدون شبکه می‌توانند برای هر مساله با ناحیه هندسی دلخواه با توزیع مناسب گره‌ها، مناسب باشند. روش عناصر متناهی و روش بدون شبکه، به‌طور گسترده برای حل عددی مساله‌های مقدار مرزی به کار می‌روند. اما با وجود تابع منبع در مسایل مقدار مرزی، دقت جوابی که با استفاده از این روش‌ها به دست می‌آید، پایین می‌آید. بنابراین مساله مقدار مرزی ناهمگن توسط روش بدون شبکه توسعه یافته که در فصل سوم به آن می‌پردازیم، به مساله همگن تبدیل شده، معادله همگن



شکل ۲.۱: نمایش دامنه در روش بدون شبکه

با روش بدون شبکه حل می‌شود. در این بخش به مفاهیمی از روش بدون شبکه و تفاوت آن با روش عناصر متناهی به عنوان پیش‌زمینه‌ای برای روش بدون شبکه توسعه یافته می‌پردازیم. برای درک بهتر روش‌های بدون شبکه در شکل ۳.۱ مقایسه‌ای از مراحل حل مساله با استفاده از روش عناصر متناهی و بدون شبکه ارائه شده است [۱].

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مرحله تولید هندسه مساله و ساخت توابع شکل^{۱۲} در دو روش متفاوت است. در روش عناصر متناهی توابع شکل بر اساس عناصر ساخته می‌شوند. این توابع برای تمام عناصر یک شکل، یکسان می‌باشند. پیش از اینکه آنالیز روش عناصر متناهی شروع شود، توابع شکل برای انواع مختلفی از عناصر، از پیش تعیین شده هستند. در حقیقت معرفی عنصر و ایجاد اتصال بین گره‌ها به منظور محاسبه‌ی تابع شکل است. درحالی‌که در روش‌های بدون شبکه، توابع شکل معمولاً به ازای یک نقطه دلخواه در دامنه تعریف می‌شوند. در مورد تشکیل دستگاه معادلات در روش‌های بدون شبکه، باید گفت که دستگاه معادلات حاصل از این روش‌ها به لحاظ تنک^{۱۳} و نواری بودن، مانند روش عناصر متناهی می‌باشد ولی بسته به روشی که به کار گرفته می‌شود، می‌تواند بر خلاف روش عناصر متناهی، نامتقارن باشد. برای دسته‌بندی تفاوت‌های میان روش‌های بدون شبکه و روش عناصر متناهی، جدول ۱.۱ ارائه شده است.

^{۱۲}Shape functions

^{۱۳}Sparse

جدول ۱.۱: دسته‌بندی تفاوت‌های روش بدون شبکه و روش عناصر متناهی

عناوین	روش عناصر متناهی	روش بدون شبکه
شبکه	دارد	ندارد
ساخت توابع شکل	بر پایه المان‌های از پیش تعیین شده	بر پایه گره‌های موجود در دامنه‌های محمل موضعی
دستگاه معادلات حاصل	نواری-مقارن	نواری-بسته به نوع روش انتخابی، مقارن و یا نامقارن
اعمال شرایط مرزی دیریکله	ساده و استاندارد	بسته به نوع روش انتخابی، روش‌های مختلفی می‌توان اعمال کرد
سرعت محاسبه	سریع	در مقایسه با روش عناصر متناهی کندتر
دقت محاسبات	در مقایسه با تفاضلات متناهی دقیق‌تر	معمولاً بسیار دقیق تر از روش عناصر متناهی
آنالیز مسایل	برای مسایل سه بعدی، مشکل	ساده تر
مرحله پیشرفت	توسعه یافته	نو پاست و جای پیشرفت دارد
نرم افزارهای تجاری مرتبط	بسیار زیاد	محدود و کم

۲.۱ دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه

به عنوان اولین روش‌های بدون شبکه، می‌توان روش گردابی^{۱۴}، روش تفاضلات متناهی^{۱۵} با شبکه‌های دلخواه^{۱۶} و روش هیدرودینامیک ذرات هموار^{۱۷} را معرفی کرد. در حالت کلی روش‌های بدون شبکه بر اساس سه فاکتور زیر در دسته‌های مربوط به خود قرار می‌گیرند.

۱. چگونگی فرمول‌بندی

۲. نوع تقریب توابع

۳. نوع نمایش دامنه

۱.۲.۱ چگونگی فرمول‌بندی

در حالت کلی دو نوع فرمول‌بندی در روش‌های بدون شبکه وجود دارد: شکل قوی و شکل ضعیف. نوع اول بر اساس شکل قوی یا هم‌مکانی^{۱۸} می‌باشد. در این روش معادله‌ی اصلی مساله و معادلات مربوط به شرایط مرزی به‌طور مستقیم در گره‌ها توزیع شده، با استفاده از تکنیک

^{۱۴}Vertex method

^{۱۵}Finite difference method

^{۱۶}Arbitrary grids

^{۱۷}Smoothed particle hydrodynamics

^{۱۸}Colocation

هم‌مکانی، گسسته‌سازی می‌شوند. به عنوان مثال‌هایی از این نوع، می‌توان به روش تفاضلات متناهی تعمیم یافته، روش بدون شبکه هم‌مکانی، و روش نقاط متناهی (^{۱۹}FPM) اشاره کرد. این روش‌ها الگوریتم ساده‌ای دارند و کاملاً بی‌نیاز از شبکه هستند ولی این روش‌ها غالباً ناپایدار می‌باشند. در نوع دوم، روش‌های بدون شبکه براساس شکل ضعیف هستند. در روش‌های شکل ضعیف، معادله‌ی دیفرانسیل جزئی به شکل انتگرالی تبدیل می‌شود. روش‌های بدون شبکه زیادی در این نوع قرار می‌گیرند. از بهترین روش‌های این نوع می‌توان روش گالرکین بدون شبکه (^{۲۰}EFG)، روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی (^{۲۱}RPIM)، روش‌های درونیایی نقاط (^{۲۲}PIM)، روش بدون شبکه پتروگالرکین موضعی (^{۲۳}MLPG) را نام برد [۵]، [۶]، [۷]، [۱۱].

۲.۲.۱ نوع تقریب توابع

در دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه بر اساس نوع تقریب توابع، سه دسته‌ی کلی وجود دارد:

۱. روش‌های مبتنی بر تقریب کمترین مربعات متحرک (^{۲۴}MLS)

۲. روش‌های مبتنی بر روش نمایش انتگرالی

۳. روش‌های مبتنی بر درونیایی نقاط

دسته اول، بر اساس تقریب کمترین مربعات متحرک که در سال ۱۹۸۱ برای تقریب رویه‌ها و سطوح در برازش داده‌های پراکنده مطرح شد، عمل می‌کنند. در حقیقت MLS تقریبی پیوسته برای تابع مجهول می‌باشد. از روش‌های بدون شبکه‌ای که از این تقریب استفاده می‌کنند، می‌توان روش‌های المان پراکنده (^{۲۵}DEM)، روش EFG، روش MLPG و روش گره‌های مرزی (^{۲۶}BNM) را نام برد. در دسته دوم، از شکل انتگرالی برای تقریب تابع استفاده می‌شود. از جمله روش‌های این دسته، روش SPH، روش ^{۲۷}RKPM می‌باشند. دسته سوم، روش‌هایی مبتنی بر روش درونیایی نقاط هستند. در این روش‌ها برای ساخت توابع شکل، از درونیایی نقاط استفاده می‌شود و برخلاف

^{۱۹}Finite point method

^{۲۰}Element free galerkin method

^{۲۱}Radial point interpolation method

^{۲۲}Point interpolation method

^{۲۳}Meshless local petrov-galerkin

^{۲۴}Moving least squares

^{۲۵}Diffuse element method

^{۲۶}Boundary node method

^{۲۷}Reproducing kernel particle method

روش تقریب کمترین مربعات متحرک، توابع شکل در آن دارای خاصیت دلتای کرونکر می‌باشند. در این روش‌ها پایه‌های مختلفی شامل پایه‌های چندجمله‌ای و توابع پایه‌ای شعاعی ($RBF^{۲۸}$) به کار می‌رود.

۳.۲.۱ نوع نمایش دامنه

روش‌های بدون شبکه بر اساس نمایش دامنه به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند:

۱. روش‌های بدون شبکه از نوع دامنه

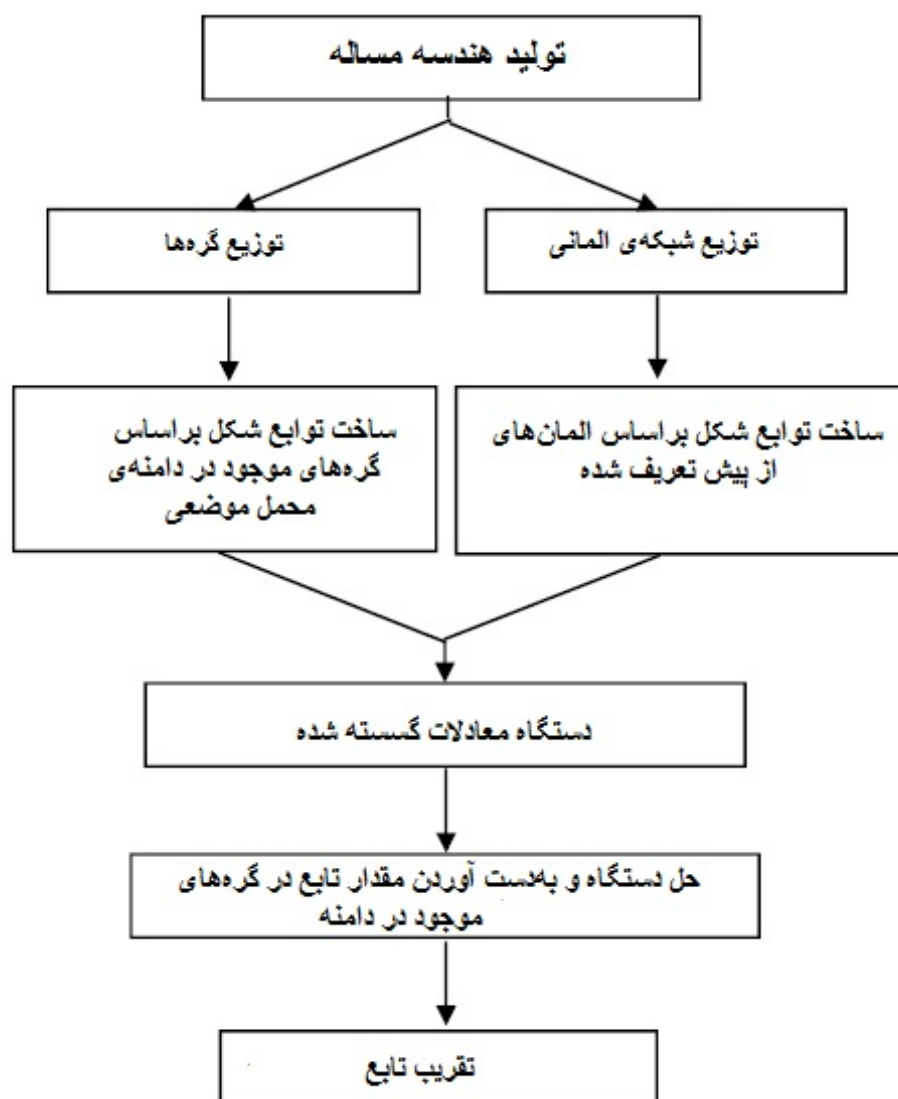
۲. روش‌های بدون شبکه از نوع مرز

در دسته‌ی اول، گره‌های تقریب، روی مرز و دامنه‌ی مساله توزیع می‌شوند. بنابراین هم گره‌های روی مرز و هم گره‌های داخل دامنه‌ی مساله، برای تشکیل دستگاه و یافتن جواب مساله استفاده می‌شوند. روش گالرکین بدون شبکه (EFG) و بسیاری از روش‌های دیگر در این دسته قرار می‌گیرند. در روش‌های موجود در دسته دوم، تنها مرز مساله توسط گره‌های تقریب نمایش داده می‌شود و هیچ گره‌ای در دامنه‌ی مساله توزیع نمی‌شود. از جمله روش‌های موجود در این دسته، می‌توان به روش گره‌های مرزی (BNM)، روش‌های معادله انتگرال مرزی موضعی ($LBIE^{۲۹}$) و روش‌های درونیایی نقاط مرزی شعاعی ($BRPIM^{۳۰}$) اشاره کرد.

^{۲۸}Radial basis function

^{۲۹}Local boundary integral equation

^{۳۰}Boundary radial point interpolation method



شکل ۳.۱: مقایسه دو روش عناصر متناهی و بدون شبکه

فصل ۲

روش‌های تقریب توابع

۱.۲ مقدمه

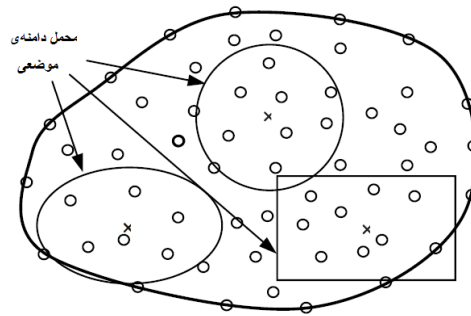
در تمام نسخه‌های روش‌های بدون شبکه، قبل از حل معادله دیفرانسیل مربوطه در دامنه‌ی مساله، ابتدا تابع مجهول با توابع شکل در دامنه مساله تقریب زده می‌شوند. تکنیک‌های مختلفی برای تولید توابع شکل وجود دارد، که در حالت کلی بر اساس نوع درونیاب/تقریب تابع به سه دسته کلی تقسیم‌بندی می‌شوند: RPIM، PPIM و MLS، که هرکدام از توابع پایه‌ی خاصی استفاده می‌کنند. با استفاده از این توابع پایه و دنبال نمودن روند مشخصی در هر گروه، توابع شکل تولید می‌گردند. این توابع متناسب با نوع تابع پایه به کار گرفته شده دارای ویژگی‌های خاصی هستند. از این مرحله به بعد توابع شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند و در فرایندی مشابه روش عناصر متناهی، معادله دیفرانسیل مربوطه در کل دامنه مساله حل می‌شود.

در این بخش این سه تقریب را با جزییات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۲ روش‌های درونیابی نقطه‌ای

روش درونیابی نقطه‌ای برای تقریب تابع و ساخت توابع شکل مفید می‌باشد. این روش تابع $u(X)$ روی دامنه Ω در نقطه دلخواه X را به شکل:

$$u^h(X) = \sum_{i=1}^m B_i(X) a_i,$$



شکل ۱.۲: محمل دامنه‌ی موضعی در روش بدون شبکه برای ساخت توابع شکل

تقریب می‌زند.

$B_i(X)$ ، توابع پایه‌ای هستند که در فضای مختصات دکارتی $X = [x, y]$ تعریف شده‌اند، و m تعداد توابع پایه‌ای و a_i ضرایب می‌باشند. برای تقریب ابتدا محمل دامنه‌ی موضعی^۱ برای نقطه X که شامل n گره باشد ارایه می‌شود. تاکنون دو نوع از روش‌های درونیایی نقطه‌ای برای ساخت توابع شکل با بکارگیری تابع‌های پایه متفاوت گسترش یافته است که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند [۱۸].

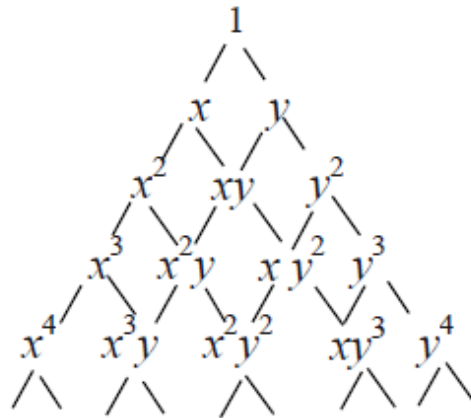
تعریف ۱.۲.۲. یک محمل دامنه موضعی برای نقطه x در دامنه، گره‌هایی که برای تقریب جواب معادله در x مورد نیاز است را تعیین می‌کند. محمل دامنه موضعی می‌تواند شکلهای متفاوتی مانند دایره یا مستطیل داشته باشد. شکل ۱.۲ را مشاهده کنید.

۱.۲.۲ روش درونیایی نقطه چندجمله‌ای (PPIM)

یکی از ایده‌های ساده و پرکاربرد در تولید توابع شکل، استفاده از چندجمله‌ای‌های پاسکال^۲ به عنوان توابع پایه است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد در روش‌های بدون شبکه دامنه‌ی مساله به وسیله گره‌های ثابتی مشخص می‌شود تابع اسکالر $u(X)$ تعریف شده در این محدوده را در نظر می‌گیریم این تابع در نقطه مشاهده X را می‌توانیم به صورت

^۱Local support domain

^۲Pascales



شکل ۲.۲: مثلث پاسکال از چندجمله‌ای‌ها برای دامنه دوبعدی

$$u^h(X) = \sum_{i=1}^m p_i(X) a_i = \{p_1(X) \quad p_2(X) \quad \dots \quad p_m(X)\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^T \mathbf{a}, \quad (1.2)$$

تقریب بزنیم که $p_i(X)$ چندجمله‌ای‌های پاسکال در مختصات $X^T = [x, y]$ هستند، که در شکل ۲.۲ نشان داده شده است (در حالت دو بعدی).

تعریف ۲.۲.۲. به ماتریس مربعی مقارنی که درایه‌های آن از تک‌جمله‌ای‌ها تشکیل شده باشند، ماتریس ممان گفته می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. چندجمله‌ای‌های پایه کامل از درجه p به شکل

$$\mathbf{p}^T(X) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^{p-1} \quad x^p\} \quad (1-D)$$

$$\mathbf{p}^T(X) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \dots \quad x^p \quad y^p\} \quad (2-D)$$

نوشته می‌شوند.

در این حالت برای تعیین ضرایب a_i ، یک محمل دامنه موضعی برای نقطه مشاهده X شامل n گره تعیین می‌شود. توجه کنید که در روش PPIM، تعداد گره‌ها در محمل دامنه موضعی، همیشه

برابر تعداد توابع پایه‌ای می‌باشد، به این معنی که $n = m$. بنابراین اگر فرض کنیم که مقدار تابع $u(X)$ در محل گره‌ها مشخص باشد، با برابر قرار دادن این تابع با مقادیر معلوم در محل گره‌ها به تعداد a_i معادله داریم به این معنی که

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{i=1}^m a_i P(X_1) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + \dots + a_m P_m(X_1), \\ u_2 = \sum_{i=1}^m a_i P(X_2) = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 + \dots + a_m P_m(X_2), \\ \vdots \\ u_n = \sum_{i=1}^m a_i P(X_n) = a_1 + a_2 x_n + a_3 y_n + \dots + a_m P_m(X_n). \end{cases} \quad (2.2)$$

معادله (۲.۲) را می‌توان به شکل u ماتریسی

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \mathbf{a}, \quad (3.2)$$

نوشت که

$$\mathbf{U}_s = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T,$$

برداری از مقدارهای گره‌ای تابع^۳ و

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

برداری از ضرایب مجهول^۴، و

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & P_m(X_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \dots & P_m(X_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & \dots & P_m(X_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \dots & P_m(X_n) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

^۳Nodal function values

^۴Unknown coefficient

ماتریس ممان^۵ نامیده می‌شود. چون در این روش $n = m$ می‌باشد، لذا P_m ماتریسی مربعی^۶ از مرتبه $(n \times n)$ یا $(m \times m)$ است. با حل (۳.۲) داریم

$$\mathbf{a} = P_m^{-1} \mathbf{U}_s. \quad (۵.۲)$$

با جایگذاری (۵.۲) در (۱.۲) و با توجه به اینکه $n = m$ خواهیم داشت:

$$u^h(X) = P^T(X) P_m^{-1} \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^m \phi_i u_i = \Phi^T(X) \mathbf{U}_s,$$

که $\Phi(X)$ برداری از توابع شکل بوده و به صورت:

$$\Phi^T(X) = P^T(X) P_m^{-1} = \{\phi_1(X) \quad \phi_2(X) \quad \dots \quad \phi_n(X)\},$$

نمایش داده می‌شود.

نکته ۴.۲.۲. مشتقات توابع شکل چون به صورت چندجمله‌ای می‌باشند، به راحتی قابل محاسبه هستند.

توابع شکلی که به این روش تولید می‌شوند، به دلیل اینکه تابع مجهول از میان تمامی گره‌ها می‌گذرد دارای خاصیت دلتای کرونکر می‌باشد یعنی:

$$\phi_i(X = X_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

همچنین برای این توابع خاصیت یگانگی مجموع^۷ برقرار است یعنی:

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(X) = 1.$$

^۵Moment matrix

^۶Square matrix

^۷Partition of unity

۲.۲.۲ روش درونیایی نقطه شعاعی (RPIM)

برای غلبه بر مشکل تکنیکی ماتریس جواب در روش درونیایی نقطه‌ای چندجمله‌ای PPIM، توابع پایه شعاعی^۸ RBF، پیشنهاد شده‌اند، در این حالت تابع میدان $u(X)$ در دامنه Ω به صورت

$$u^h(X) = \sum_{i=1}^n R_i(X) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(X) b_j = \mathbf{R}^T(X) \mathbf{a} + \mathbf{P}^T(X) \mathbf{b}, \quad (6.2)$$

تقریب زده می‌شود، که $R_i(X)$ ، بیانگر توابع پایه شعاعی^۹، n تعداد توابع پایه شعاعی، $P_j(X)$ نشان دهنده توابع پایه پاسکال و m تعداد توابع پایه پاسکال می‌باشد. زمانی که $m = 0$ ، تنها توابع پایه شعاعی به کار می‌روند. ضرایب a_i و b_j ثابت‌هایی هستند که باید تعیین شوند.

تعداد زیادی توابع پایه شعاعی وجود دارند، جدول (۱.۲) چهار نوع از آن‌ها که بیشتر به کار می‌رود نشان می‌دهد. در بیشتر توابع پایه پارامترهای ثابتی وجود دارند که مقدار آنها باید بر اساس ماهیت مساله مورد نظر تعیین شود تا روش بهینه شود، برای مثال در MQ-RBF دو پارامتر q و α_c وجود دارند. در حالت استاندارد q برابر با ۵/۰ انتخاب می‌شود.

جدول ۱.۲: انواع توابع پایه‌ای شعاعی با پارامترهای شکل بی‌بعد

پارامترهای شکل	عبارت	عناوین
$\alpha_c \geq 0, q$	$R_i(x, y) = (r_i^q + (\alpha_c d_c)^q)^q$	Multi-quadrics(MQ)
α_c	$R_i(x, y) = \exp[-\alpha_c (\frac{r_i}{d_c})^q]$	Gaussian(EXP)
η	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	Thin Plate Spline(TPS)
η	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	Logarithmic

برای تعیین ضرایب a_i و b_j در (۶.۲)، یک محمل دامنه برای نقطه مشاهده X تعیین می‌شود، که شامل n گره باشد. ضرایب a_i و b_j با اجرای معادله (۶.۲) در n گره درون محمل دامنه از نقطه مشاهده X تعیین می‌شوند. که در نهایت منجر به n معادله خطی می‌شود که هر کدام مربوط به یک گره است. شکل ماتریسی این معادله به صورت

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b}, \quad (7.2)$$

^۸Reproducing basis function

^۹Radial basis functions

بیان می‌شود، که

$$\mathbf{U}_s = [u_1, u_2, \dots, u_n],$$

برداری از مقادیر تابع می‌باشد. $\mathbf{R}_s$ ، ماتریس ممانی از توابع پایه شعاعی به صورت

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)}, \quad (8.2)$$

و $\mathbf{P}_m$ ، ماتریس ممان چندجمله‌ای‌ها^{۱۰} به صورت

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m(X_1) & P_m(X_2) & \dots & P_m(X_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)},$$

هستند.

برداری از ضرایب برای توابع پایه شعاعی و چندجمله‌ای‌ها به ترتیب به صورت

$$\mathbf{a}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n\},$$

و

$$\mathbf{b}^T = \{b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m\},$$

می‌باشند.

در (۸.۲)، در r_k در $R_i(r_k)$ به صورت

$$r_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2},$$

^{۱۰}polynomial moment matrix

تعریف می‌شود.

به هر حال $(n + m)$ متغیر در معادله (۷.۲) وجود دارد، m شرط محدودیت^{۱۱} به صورت:

$$\sum_{i=1}^n P_j(X_i) a_i = \mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (9.2)$$

را در نظر می‌گیریم، بنابراین m معادله دیگر به دست می‌آید. با ترکیب معادلات (۷.۲) و (۹.۲) مجموعه‌ای از معادلات به صورت

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{a}_0, \quad (10.2)$$

خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}_0^T = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m\},$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\},$$

به علت متقارن بودن ماتریس $\mathbf{R}_0$ ، ماتریس $\mathbf{G}$ نیز متقارن خواهد بود. با حل معادله (۱۰.۲)،

$$\mathbf{a}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s, \quad (11.2)$$

به دست می‌آید.

معادله (۶.۲) می‌تواند به صورت

$$u(X) = \mathbf{R}^T(X) \mathbf{a} + \mathbf{P}^T(X) \mathbf{b} = \{\mathbf{R}^T(X) \quad \mathbf{P}^T(X)\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix},$$

^{۱۱}Constraint

نوشته شود.

با به کار بردن (۱۱.۲) معادله

$$u(X) = \{\mathbf{R}^T(X) \quad \mathbf{P}^T(X)\} \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s = \tilde{\Phi}^T(X) \tilde{\mathbf{U}}_s \quad (12.2)$$

به دست می آید.

در (۱۲.۲)، $\tilde{\Phi}(X)$ برداری از توابع شکل است که به صورت

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^T(X) &= \{\mathbf{R}^T(X) \quad \mathbf{P}^T(X)\} \mathbf{G}^{-1} \\ &= \{\phi_1(X) \quad \phi_1(X) \quad \dots \quad \phi_n(X) \quad \phi_{n+1}(X) \quad \dots \quad \phi_{n+m}(X)\}, \end{aligned}$$

نشان داده می شود.

نکته ۵.۲.۲. توابع شکل تعیین شده با این روش هم خاصیت دلتای کرونگر و هم یگانگی مجموع را دارا هستند.

۳.۲ تقریب کمترین مربعات متحرک (MLS)

روش کمترین مربعات متحرک، که به اختصار آن را MLS می نامیم، یکی از روش های تقریب مناسب برای محاسبه جواب در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می باشد. این روش از مرتبه ی همواری و دقت مناسبی برخوردار است. در این روش به جای حل یک دستگاه معادلات بزرگ، چندین دستگاه معادلات کوچک حل می شوند.

تقریب کمترین مربعات متحرک، به عنوان توسیعی از روش شپارد^{۱۲} اولین بار در نظریه تقریب توسط لنکستر^{۱۳} برای تقریب رویه های چندبعدی معرفی شد [۱۶]. بعدها این روش به طور گسترده در بسیاری از روش های بدون شبکه، مانند روش گالرکین بدون شبکه، پتروگالرکین موضعی بدون شبکه، روش نقاط متناهی و ... برای ساخت توابع شکل به کار گرفته شد [۲۰].

در تقریب کمترین مربعات متحرک، فرض می کنیم مقادیر $\{u(X_j)\}_{j=1}^N$ ، متناظر با مجموعه گره های $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^s$ و $s \geq 1$ دلخواه، داده شده اند. هدف از تقریب

^{۱۲}Shepard

^{۱۳}Lancaster

کمترین مربعات متحرک، در حقیقت یافتن بهترین تقریب ممکن برای تابع u در فضای تقریب $U = \text{span}\{P_1(X), P_2(X), \dots, P_m(X)\}, m \leq N$ ، و در نزدیکی نقطه‌ی X است که در آن، $\{P_j(X)\}_{j=1}^m$ پایه‌های فضای چندجمله‌ای با درجه‌ی حداکثر d در فضای R^s هستند. توجه به این نکته ضروری است که غالباً توابع پایه‌ای، چندجمله‌ای‌های با ضریب پیشرو یک‌ه از مثلث پاسکال می‌باشند.

برای مثال در فضای یک بعدی، پایه‌های خطی به شکل $P = [1 \ x]$ و پایه‌های مربعی به شکل $p = [1 \ x \ x^2]$ هستند و در فضای دو بعدی، پایه‌های خطی به شکل $p = [1 \ x \ y]$ و پایه‌های مربعی به شکل $p = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]$ می‌باشند.

در تقریب کمترین مربعات متحرک، در هر نقطه X ، تقریب تابع برحسب مقدار تابع در گره‌های نزدیک به X بدست می‌آید و میزان تاثیر هر گره مطابق با وزنی که از تابع وزن می‌گیرد، اعمال می‌شود. تابع وزن $W : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای است که با دور شدن از نقطه‌ی X مقدار کمتری می‌گیرد و در فاصله مشخصی از آن، صفر خواهد شد. در ارتباط با تابع وزن در بخش ۴.۲ به طور مفصل توضیح خواهیم داد.

در تقریب کمترین مربعات متحرک، X را ثابت نگه داشته و برای Z نزدیک به X ، تقریب $u^h(X, Z)$ را برای $u(Z)$ به صورت

$$u^h(X, Z) = \sum_{j=1}^m c_j(X) P_j(Z), \quad (13.2)$$

تعریف می‌کنیم. توجه داریم که در این حالت ضرایب $c_j(X)$ با X تغییر می‌کنند، دلیل استفاده از کلمه‌ی متحرک نیز همین است. برای به دست آوردن ضرایب $c_j(X)$ در (۱۳.۲)، کافی است که $\|u(Z) - u^h(X, Z)\|_{2, wX}^2$ مینیمم شود که در آن از نرم وزن دار القایی توسط ضرب داخلی $\langle f, g \rangle_{wX}$ استفاده شده که به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید ضرب داخلی l_2 وزن دار به صورت

$$\langle f, g \rangle_{wX} = \sum_{i=1}^N f(X_i) g(X_i) w \left(\frac{X - X_i}{r} \right)$$

باشد. در حقیقت توابع وزن موثر در تقریب کمترین مربعات متحرک از بکارگیری ضرب داخلی وزن دار ناشی می‌شوند. همان طور که مشاهده می‌شود، توابع وزن $w \left(\frac{X - X_i}{r} \right)$ تنها به ازای گره‌های X_j ای که در محمل $w \left(\frac{X - \cdot}{r} \right)$ قرار دارند، مقدار می‌گیرند و برای بقیه‌ی گره‌های داخل

مجموع، صفر هستند. r اندازه‌ی محمل گره‌ای می‌باشد که در ادامه با آن آشنا می‌شویم. با در نظر گرفتن ضرب داخلی وزن‌دار معرفی شده، نرم القایی حاصل از آن به صورت

$$\|f\|_{\Psi, wX}^2 = \sum_{i=1}^N [f(X_i)]^2 \mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right), \quad (14.2)$$

تعریف می‌شود.

بنابراین با اعمال نرم القایی وزن‌دار ارایه شده، به دنبال مینیم کردن $F(X)$ تعریف شده به صورت

$$F(X) = \|u(Z) - u^h(X, Z)\|_{\Psi, wX}^2 = \sum_{i=1}^N [u(X_i) - u^h(X, X_i)]^2 \mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right), \quad (15.2)$$

هستیم.

$u^h(X, Z)$ را می‌توان به شکل برداری $u^h(X, Z) = \mathbf{P}^T(Z)C(X)$ نوشت، بنابراین:

$$F(X) = \sum_{i=1}^N \left[u(X_i) - \mathbf{P}^T(X_i)C(X) \right]^2 \mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right). \quad (16.2)$$

فرم ماتریسی معادله (۱۶.۲) به شکل:

$$F(X) = [\mathbf{P}.C(X) - \hat{u}]^T . \mathbf{W} . [\mathbf{P}.C(X) - \hat{u}], \quad (17.2)$$

خواهد بود که در آن

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P^T(X_1) \\ P^T(X_2) \\ \vdots \\ P^T(X_N) \end{bmatrix}_{N \times 1},$$

و

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w\left(\frac{X - X_1}{r}\right) & \dots & \circ \\ \dots & \ddots & \dots \\ \circ & \dots & w\left(\frac{X - X_N}{r}\right) \end{bmatrix}_{N \times N},$$

و

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u(X_1) \\ u(X_2) \\ \vdots \\ u(X_N) \end{bmatrix}.$$

برای کمینه‌سازی تابع $F(X)$ برحسب بردار ضرایب C ، کافی است معادله $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ را حل کنیم، بنابراین

$$\frac{\partial F}{\partial C} = P^T \cdot \mathbf{W} \cdot (P \cdot C - \hat{u}) = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W} \cdot P \cdot C - \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{u} = 0. \quad (18.2)$$

با تعریف ماتریس‌های $A(X)$ و $B(X)$ به‌شکل

$$A(X) = P^T \cdot \mathbf{W} \cdot P, \quad B(X) = P^T \cdot \mathbf{W}, \quad (19.2)$$

رابطه (18.2) به تساوی $A(X)c(X) - B(X)\hat{u} = 0$ تبدیل می‌شود. بنابراین در صورت وارون‌پذیر بودن $A(X)$ ، بردار ضرایب $c(X)$ را می‌توان از تساوی $c(X) = [A(X)]^{-1} B(X)\hat{u}$ به‌دست آورد و در نهایت داریم:

$$u^h(X, Z) = P^T(Z) \cdot [A(X)]^{-1} B(X)\hat{u}. \quad (20.2)$$

با در نظر گرفتن $Z = X$ ، تقریب کمترین مربعات متحرک تابع u به‌صورت

$$u(X) \approx u^h(X) = P^T(X) \cdot [A(X)]^{-1} B(X)\hat{u}. \quad (21.2)$$

است. معادله (21.2) را می‌توان به‌صورت

$$u^h(X) = \sum_{i=1}^N \phi_i(X) u(X_i) = \Phi(X)\hat{u}. \quad (22.2)$$

نوشت، که در آن $\Phi(X)$ ، بردار توابع شکل، به‌صورت

$$\Phi(X) = [\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_N(X)] = P^T(X) \cdot [A(X)]^{-1} B(X), \quad (23.2)$$

می باشد، که

$$A(X) = \sum_{i=1}^N w \left(\frac{X - X_i}{r} \right) P(X_i) P^T(X_i), \quad (24.2)$$

و

$$B(X) = \left[w \left(\frac{X - X_1}{r} \right) P(X_1), \dots, w \left(\frac{X - X_N}{r} \right) P(X_N) \right], \quad (25.2)$$

می باشد. بنابراین با استفاده از توابع شکل به دست آمده و رابطه‌ی (۲۲.۲)، تقریب کمترین مربعات متحرک تابع u به دست می آید. توجه داریم که، در تقریب کمترین مربعات متحرک نیاز به واریون پذیری ماتریس A می باشد. شرایط واریون پذیری این ماتریس به طور خلاصه به صورت قضیه ۱.۳.۲ بیان می شود [۱۵].

قضیه ۱.۳.۲. ماتریس $A(X)$ در هر نقطه‌ی $X \in \mathbb{R}^s$ واریون پذیر است، اگر X با حداقل m تابع شکل پوشانده شود، یعنی اندیس‌های $i_1, i_2, \dots, i_m$ موجود باشند به طوری که

$$\|X - X_{i_j}\| < r_{i_j}, j = 1, 2, \dots, m,$$

که در آن شعاع محمل $r_{i_j} \left(\frac{X - X_{i_j}}{r_{i_j}} \right)$ و w و $m = \dim(\Pi_d^s)$ است. برای حالت $s = 1$ ، به راحتی می توان قضیه را بررسی کرد. با در نظر گرفتن پایه های خطی $\{1, x\}$ در فضای $\mathbb{R}$ ، ماتریس $A(X)$ به صورت

$$A(X) = w \left(\frac{X - X_1}{r} \right) \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_1^2 \end{bmatrix} + \dots + w \left(\frac{X - X_N}{r} \right) \begin{bmatrix} 1 & x_N \\ x_N & x_N^2 \end{bmatrix}$$

به دست می آید، بنابراین اگر $N = 1$ باشد، ماتریس $A(X)$ واریون پذیر نخواهد بود و در نتیجه شرط لازم برای واریون پذیری این ماتریس، $N \geq m$ است.

۱.۳.۲ ویژگی های تقریب کمترین مربعات متحرک

لم ۲.۳.۲. تقریب کمترین مربعات متحرک، در سه خاصیت زیر صدق می کنند [۱۵]:

۱. مرتبه همواری تقریب کمترین مربعات متحرک برابر با مرتبه همواری تابع وزن است.

۲. هر چند جمله‌ای $-S$ متغیره از درجه کمتری مساوی d توسط کمترین مربعات متحرک به‌طور دقیق ساخته می‌شود، یعنی برای هر $P(X) \in \Pi_d^S$ ویژگی سازگاری

$$P(X) = P^h(X) = \sum_{i=1}^N \phi_i(X) P(X_i),$$

برقرار است.

۳. اگر $\mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right) \in C^k(\Omega)$ و $D^\alpha \phi_i(X)$ مشتق مرتبه‌ی $|\alpha|$ تابع $\phi_i(X)$ باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^N D^\alpha \phi_i(X) (X - X_i)^\beta = (-1)^\beta \beta! \delta_{\alpha, \beta}, \quad |\alpha| \leq K, |\beta| \leq d.$$

برهان. تنها اثبات دو ویژگی اول بیان می‌شود.

۱. چون چند جمله‌ای‌ها در فضای $C^\infty(\Omega)$ قرار دارند، لذا از تعریف کمترین مربعات متحرک واضح است که هرگاه $\mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right) \in C^K(\Omega)$ ، در این صورت $u^h(X) \in C^K(\Omega)$.

۲. فرض کنید $\mathbf{P}^T(X) = [P_1(X), P_2(X), \dots, P_m(X)]$ پایه‌ای باشد که تقریب کمترین مربعات متحرک بر اساس آن ساخته شده است. در این صورت

$$\begin{aligned} (P^T)^h(X) &= \sum_{i=1}^N \phi_i(X) \mathbf{P}^T(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(X) [A(X)]^{-1} B(X) \mathbf{P}^T(X_i) \\ &= \mathbf{P}^T(X) [A(X)]^{-1} \sum_{i=1}^N B(X) \mathbf{P}^T(X_i) \\ &= \mathbf{P}^T(X) [A(X)]^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right) \mathbf{P}(X_i) \mathbf{P}^T(X_i) \\ &= \mathbf{P}^T(X) [A(X)]^{-1} A(X) = \mathbf{P}^T(X). \end{aligned}$$

بنابراین $(P^T)^h(X) = \mathbf{P}^T(X)$ می‌باشد. چون هر عضو پایه‌ی فضای Π_d^S $\mathbf{P}(X) \in \Pi_d^S$ به‌طور دقیق ساخته می‌شود، لذا هر ترکیب خطی از آنها را نیز می‌توان به‌طور دقیق ساخت.

با توجه به خاصیت سازگاری تقریب کمترین مربعات متحرک، اگر قرار دهیم $u(X) \equiv 1$ داریم:

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(X) \equiv 1.$$

پس توابع شکل در تقریب کمترین مربعات متحرک، یک افراز یکه‌ای^{۱۴} تشکیل می‌دهند. از آنجا که توابع شکل در خاصیت دلتای کرونکر صدق نمی‌کنند، یعنی $\phi_i(X_j) \neq \delta_{i,j}$ ، بنابراین داریم $u^h(X_i) \neq u(X_i)$. این مساله موجب می‌شود که اعمال شرایط مرزی دیریکله به راحتی انجام نشود.

□

۲.۳.۲ تقریب شپارد

تقریب شپارد^{۱۵} حالت خاصی از تقریب کمترین مربعات متحرک، است. [۱۶] این تقریب به ازای $m = 1$ و با تابع پایه‌ای $P_1(X) \equiv 1$ ، در روش کمترین مربعات متحرک به دست می‌آید. توابع شکل این تقریب، با استفاده از روابط (۲۴.۲) و (۲۵.۲) موجود در روش کمترین مربعات متحرک، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A(X) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right) P_1(X_i) P_1(X_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right), \\ B(X) &= \left[\mathbf{w} \left(\frac{X - X_1}{r} \right) P_1(X_1), \dots, \mathbf{w} \left(\frac{X - X_N}{r} \right) P_1(X_N) \right] \\ &= \left[\mathbf{w} \left(\frac{X - X_1}{r} \right), \dots, \mathbf{w} \left(\frac{X - X_N}{r} \right) \right]. \end{aligned}$$

معکوس ماتریس A به راحتی طبق رابطه‌ی

$$[A(X)]^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w} \left(\frac{X - X_i}{r} \right)}$$

به دست می‌آید. بنابراین داریم:

^{۱۴}Partition of unity

^{۱۵}Shepard

$$\phi_j(X) = \frac{w\left(\frac{X - X_j}{r}\right)}{\sum_{i=1}^N w\left(\frac{X - X_i}{r}\right)}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (26.2)$$

در نتیجه توابع شکل از رابطه‌ی (۲۶.۲) محاسبه می‌شوند. ویژگی مربوط به افراز یکه بودن توابع شکل حاصل از تقریب کمترین مربعات متحرک را، می‌توان برای این حالت خاص نیز مشاهده کرد. برای هر $X \in \mathbb{R}^s$ داریم:

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(X) = \sum_{i=1}^N \frac{w\left(\frac{X - X_j}{r}\right)}{\sum_{i=1}^N w\left(\frac{X - X_i}{r}\right)} = 1 \implies \sum_{i=1}^N \phi_i(X) = 1. \quad (27.2)$$

بنابراین گاهی تقریب شپارد را، روش افراز یکه نیز می‌نامند.

۳.۳.۲ معرفی روشی پایدار در تقریب MLS

در مقاله [۲۲] نشان داده شده است که، شکل دیگری از تقریب کمترین مربعات متحرک که مرکزی و مقیاس شده نامیده می‌شود، از دیدگاه نظری با تقریب کمترین مربعات متحرک معادل بوده و از نظر عددی پایدارتر است. اساس این روش، همان تقریب کمترین مربعات متحرک است و تنها تفاوت آن، در این است که برای هر X ، اعضای پایه با مرکز X و شعاع r مقیاس می‌شوند. در حقیقت اگر پایه‌ی فضای چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی حداکثر d در فضای $\mathbb{R}^s$ را، برای تقریب کمترین مربعات متحرک در همسایگی X به صورت $\mathbf{P}^T = [P_1(X), P_2(X), \dots, P_m(X)]$ داشته باشیم، در تقریب مرکزی و مقیاس شده‌ی کمترین مربعات متحرک تابع u برای Z نزدیک به X ، به صورت

$$\mathbf{P}^T \left(\frac{X - Z}{r} \right) = \left[P_1 \left(\frac{X - Z}{r} \right), \dots, P_m \left(\frac{X - Z}{r} \right) \right],$$

هستند.

۴.۲ تابع وزن و انتخاب اندازه‌ی محمل گره‌ای

همان‌طور که در رابطه (۱۷.۲) مشاهده می‌شود، محاسبه‌ی تابع وزن w در ساخت توابع شکل ضروری است. همان‌طور که در [۲۱] بحث شده است، تابع وزن باید خواص زیر را داشته باشد [۱۷]:

۱. غیر منفی باشد.
۲. دارای محمل فشرده باشد.
۳. پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

۱.۴.۲ توابع وزن تقریب MLS

توابع وزن متفاوتی برای این تقریب پیشنهاد شده‌اند، برای مثال توابع نمایی، مخروطی، اسپلاین، گاوسی و کسری. از آنجایی که تاکنون هیچ اثبات ریاضی دقیقی برای تعیین نوع تابع وزن مناسب در دسترس نمی‌باشد، انتخاب تابع وزن دارای گستره‌ی انتخاب وسیعی است. مطالعه‌ی مقایسه‌ی سرعت همگرایی خطا در توابع وزن مختلف، در مقالات زیادی انجام شده است ولی تحقیقات بیشتری در این موضوع مورد نیاز است. پنج نوع تابع وزن معروف به‌صورت زیر معرفی می‌شوند.

۱. تابع وزن کسری W^1
۲. تابع وزن نمایی (همان گاوسی انتقال یافته) W^2
۳. تابع مخروطی W^3
۴. تابع اسپلاین مکعبی W^4
۵. تابع اسپلاین درجه‌ی چهار W^5

$$W^1(d_I) = \begin{cases} \frac{d_{mI}^2}{d_I^2 + l^2 d_{mI}^2} \left(1 - \frac{d_I^2}{d_{mI}^2} \right), & d_I \leq d_{mI}, \\ 0, & d_I > d_{mI}, \end{cases} \quad (28.2)$$

$$W^{\forall}(d_I) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_I}{c}\right)^{\forall k}} - e^{-\left(\frac{d_{mI}}{c}\right)^{\forall k}}}{1 - e^{-\left(\frac{d_{mI}}{c}\right)^{\forall k}}}, & d_I \leq d_{mI}, \\ 0, & d_I > d_{mI}, \end{cases} \quad (29.2)$$

$$W^{\exists}(d_I) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\exists k}, & d_I \leq d_{mI}, \\ 0, & d_I > d_{mI}, \end{cases} \quad (30.2)$$

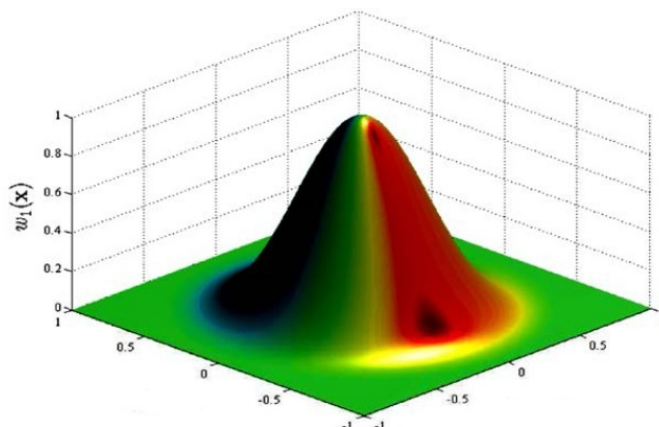
$$W^{\forall\exists}(d_I) = \begin{cases} \frac{\forall}{\exists} - \forall \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\forall} + \forall \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\exists}, & d_I \leq \frac{\forall}{\exists} d_{mI}, \\ \frac{\exists}{\forall} - \forall \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\forall} + \forall \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\exists} + \frac{\exists}{\forall} \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\exists}, & \frac{\forall}{\exists} d_{mI} < d_I \leq d_{mI}, \\ 0, & d_I > d_{mI}, \end{cases} \quad (31.2)$$

$$W^{\Delta}(d_I) = \begin{cases} 1 - \Delta \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\forall} + \Delta \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\exists} - \Delta \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^{\Delta}, & d_I \leq \frac{\forall}{\Delta} d_{mI}, \\ 0, & d_I > d_{mI}. \end{cases} \quad (32.2)$$

در تعاریف بالا، d_I فاصله‌ی بین نقطه مفروض X و گره I را مشخص می‌کند، d_{mI} اندازه‌ی محمل گره‌ای می‌باشد، که در ادامه به آن خواهیم پرداخت، k و l و c پارامترهای صحیح هستند. این توابع وزن اغلب دارای مشتق از مرتبه‌ی بالا هستند که سهم به‌سزایی در همواری و سازگاری مرتبه‌ی بالای تقریب به‌دست آمده از روش‌های بدون شبکه بر پایه‌ی تقریب کمترین مربعات متحرک دارند. تابع وزن W^1 روی یک دامنه‌ی دو بعدی در شکل ۳.۲ رسم شده است. در شکل ۴.۲ و شکل ۵.۲، مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم تابع W^1 روی یک ناحیه‌ی دو بعدی رسم شده است [۲۳].

۲.۴.۲ اندازه‌ی محمل گره‌ها

اندازه‌ی محمل گره‌ها، مساله‌ی مهمی است که در بیشتر مقالات، به این مساله پرداخته شده است. همان‌طور که از تعریف توابع شکل در بخش ۳.۲ مشخص است، این پارامتر، مشخص‌کننده‌ی



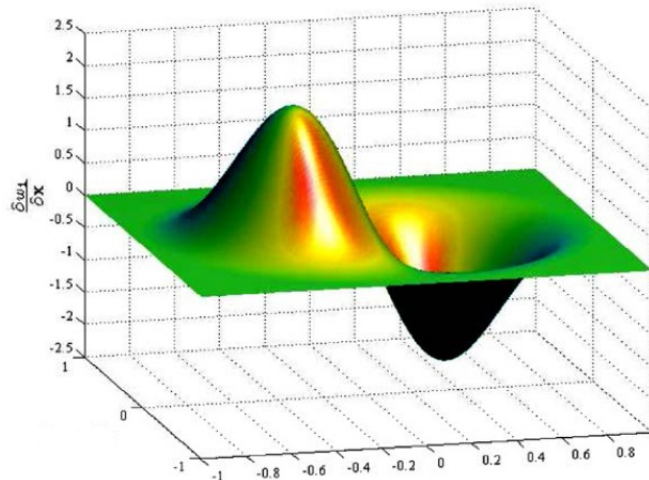
شکل ۳.۲: نمودار تابع وزن کسری W^1 روی یک ناحیه دو بعدی

اندازه‌ی محمل تابع شکل $\phi_i(X)$ است. اندازه‌ی محمل گره‌ها باید به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار شود، تا شرایط وارون پذیری ماتریس $A(X)$ برقرار باشد، قضیه (۱.۳.۲) را ببینید، از طرفی افزایش مقدار آن موجب افزایش خطای تقریب می‌شود. دالبو^{۱۶} و بلیچکو^{۱۷} پیشنهاد کردند که $d_{mI} = d_{\max} c_I$ به کار رود که c_I یک مقدار به اندازه‌ی کافی بزرگ است، که شامل تعداد کافی از گره‌ها در محمل می‌باشد. $d_{\max}$ ضریبی است که به‌طور تجربی مقداری بین ۲ و ۴ می‌گیرد. در کتاب‌های زیادی اندازه‌ی محمل گره‌ای، برابر با ضریبی از فاصله‌ی گره‌ای میانگین در نظر گرفته شده است. توجه داریم که پارامتر تاخیر r ذکر شده در بخش ۳.۲، در حقیقت همان d_{mI} می‌باشد. توجه به این نکته ضروری است که پارامتر α یا $d_{\max}$ (ضریب c_I) را، باید قبل از شروع تحلیل‌ها، تعیین کرد. در حقیقت ضریب α نقش ذره‌بینی را بازی می‌کند که ضخامت اشتراک محمل‌ها را تغییر می‌دهد.

برای فهم بهتر این تغییر در محمل، مثالی از تابعی مربعی با توزیع گره‌ای یکنواخت را در نظر می‌گیریم. رنگ‌ها در شکل ۶.۲ تعداد گره‌ها در محمل را مشخص می‌کنند. مشاهده می‌شود که اشتراک محمل‌ها برای حالت $\alpha = 15$ بیشتر از $\alpha = 10$ است. در محاسبات این پایان‌نامه $d_{mI} = d_{\max} \times h$ در نظر گرفته شده است که در آن h فاصله بین گره‌ها در یک توزیع یکنواخت گره‌ای است و $d_{\max} > 1/4$. باید توجه داشت که برای مساله‌های دو بعدی با پایه‌های خطی، شرط $d_{\max} > 1/4$ الزامی است.

^{۱۶}Dalbo

^{۱۷}Belytschko



شکل ۴.۲: نمودار مشتق اول تابع وزن کسری W^1 روی یک ناحیه دو بعدی

۵.۲ ویژگی‌های توابع شکل

در روش عناصر متناهی، توابع شکل، عنصر به عنصر ساخته می‌شوند. توابع شکل روش عناصر متناهی در هر گره، تنها در همان گره مقدار یک می‌گیرند و در بقیه‌ی گره‌های متصل به آن صفر هستند. این ویژگی، به خاصیت دلتای کرونکر معروف است. این ویژگی برای اعمال شرایط مرزی دیریکله بسیار مناسب است. این در حالی است که، توابع شکل روش‌های بدون شبکه که از تقریب کمترین مربعات متحرک به‌دست می‌آیند، در برخی از ویژگی‌های توابع شکل روش عناصر متناهی، مانند خاصیت افراز یک‌ه^{۱۸} و بازتولیدکنندگی خطی^{۱۹} مشترک هستند، اما خاصیت دلتای کرونکر توابع شکل روش عناصر متناهی را ندارند.

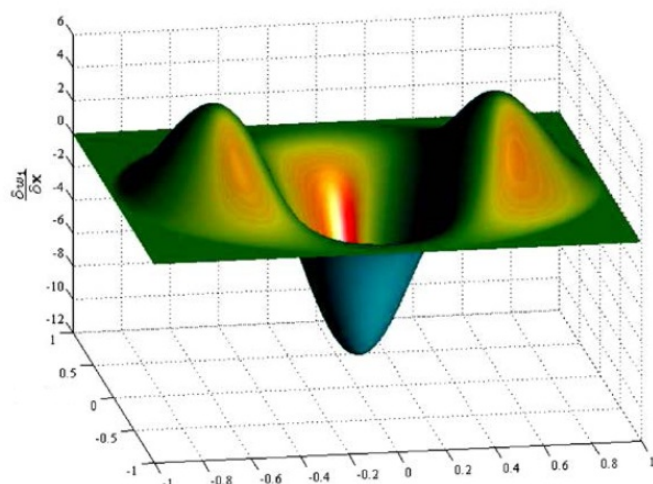
نیاز اصلی تمام توابع شکل، شرط افراز یک‌ه می‌باشد. همان‌طور که در بخش ۳.۲ نیز بیان شد، خاصیت افراز یک‌ه‌ی مجموعه‌ی توابع شکل $\phi_I(X)$ ، به این صورت تعریف می‌شود که برای هر نقطه در دامنه، خاصیت زیر برقرار باشد:

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{X}) = 1,$$

که در آن n ، تعداد گره‌های توزیع شده در دامنه می‌باشد. شرط‌های دیگری وجود دارد که توابع شکل باید در آنها صدق کنند. اولین شرط، بازتولیدکنندگی خطی است که در حالت دو بعدی به

^{۱۸}Partition of unity reproduction

^{۱۹}Linear reproducing



شکل ۵.۲: نمودار مشتق دوم تابع وزن کسری W^1 روی یک ناحیه دو بعدی

صورت زیر مطرح می‌شود:

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{X}) x_I = x,$$

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{X}) y_I = y,$$

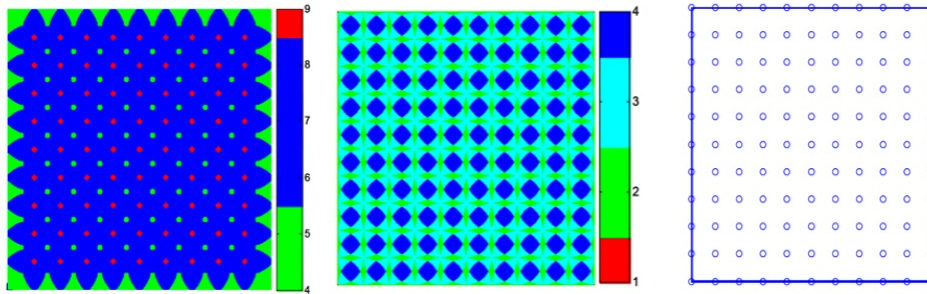
که در آن x_I و y_I ، مختصات گره‌ای I در محمل $\mathbf{X}$ هستند. برای توابع شکل تولید شده از طریق MLS ، می‌توان ویژگی‌های بیشتری به دست آورد. برای مثال:

$$\sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{X})_i X_I^j = \delta_{i,j}$$

که X_I^j ، j امین مولفه X_I را نشان می‌دهد.

در شکل ۷.۲ توابع شکل روی ناحیه‌ی یک‌بعدی رسم شده‌اند که ۱۱ گره در $X = 0, 1, 2, \dots, 10$ جایگذاری شده‌اند.

در این شکل، محمل‌های گره‌ای به‌طور یکسان برای تمام گره‌ها، $d_{mI} = 2/1$ در نظر گرفته شده‌اند و دو نوع تابع وزن W^1 و W^2 تعریف شده در (۲۸.۲)، (۳۱.۲) مقایسه شده‌اند. مشتقات توابع شکل در شکل ۸.۲ رسم شده‌اند و تاثیر استفاده از توابع وزن متفاوت نیز دیده می‌شود. همواری مشتقات به شدت تحت تاثیر اندازه‌ی محمل‌های گره‌ای است و زمانی که این مقدار به $1/3$ کاهش یابد، مشتق توابع شکل، همان‌طور که در شکل (۹.۲) دیده می‌شود، دیگر هموار نیست.

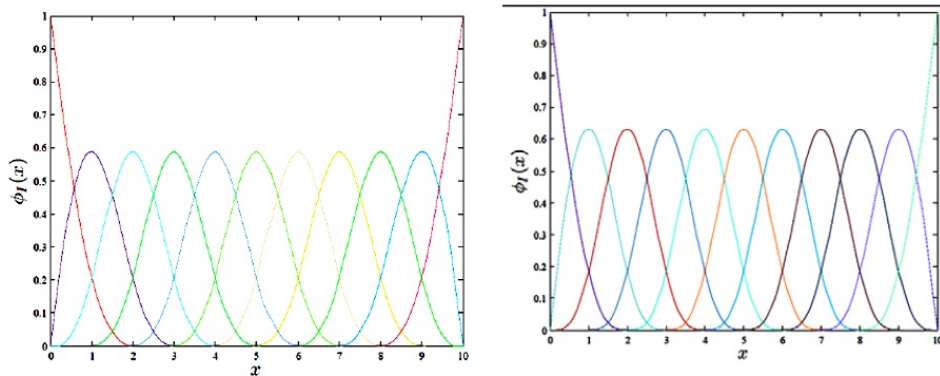


الف) توزیع گره‌ها

ب) $\alpha = 10$

ج) $\alpha = 15$

شکل ۶.۲: نمودار تعداد گره‌ها در محمل برای دامنه‌ی مربعی

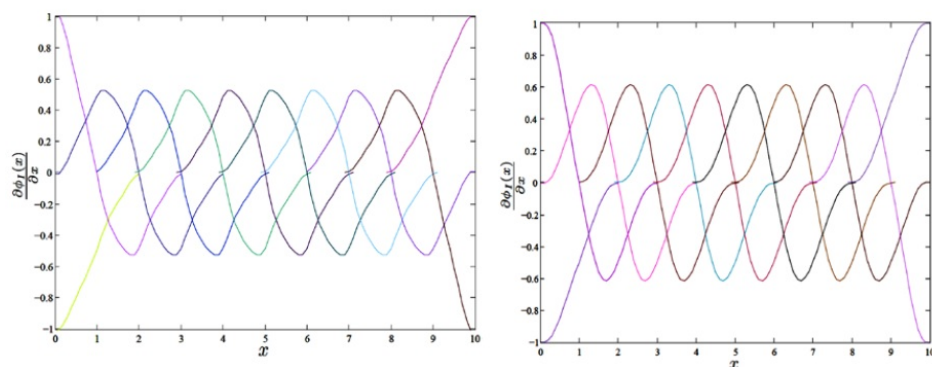


الف) با استفاده از تابع وزن w^1

ب) با استفاده از تابع وزن w^4

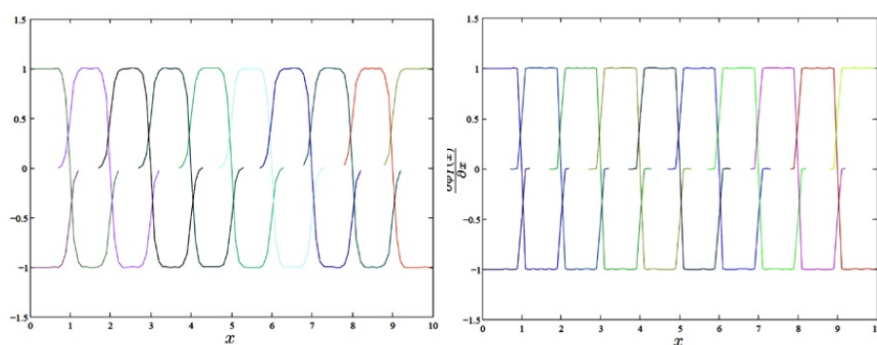
شکل ۷.۲: نمودار توابع شکل روی ناحیه یک بعدی

به عنوان توضیح تکمیلی برای توابع شکل بر مبنای تقریب کمترین مربعات متحرک رسم مقادیر توابع شکل روی ناحیه دو بعدی در شکل ۱۰.۲ (ب) ارایه شده است. تعداد نه گره در یک شبکه، روی یک ناحیه‌ای 2×2 ، مرتب شده‌اند (شکل ۱۰.۲ الف) و تابع شکل برای گره‌ای به مختصات $(1, 1)$ نشان داده شده است. مختصات توابع شکل نسبت به جهت افقی، برای مثال محور X ، در شکل ۱۱.۲ رسم شده است. می توان مشاهده کرد که توابع شکل و مشتق آن، رفتاری مانند حالت یک بعدی دارد.



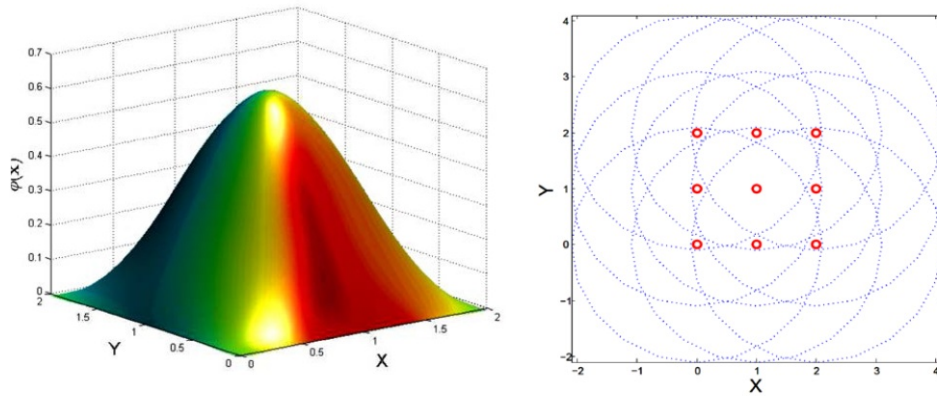
الف) با استفاده از تابع وزن w^1 ب) با استفاده از تابع وزن w^4

شکل ۸.۲: نمودار مشتق اول توابع شکل روی ناحیه یک بعدی برای $d_{mI} = ۱$



الف) با استفاده از تابع وزن w^1 ب) با استفاده از تابع وزن w^4

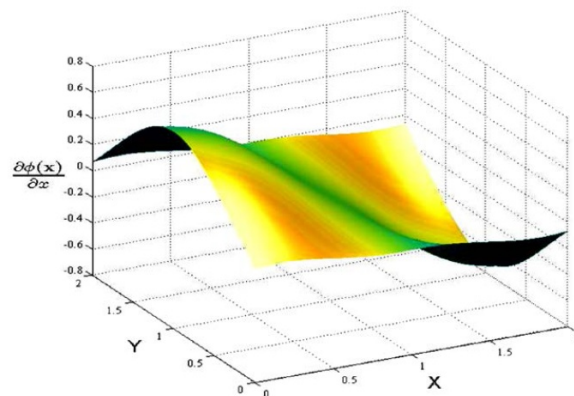
شکل ۹.۲: مشتق اول توابع شکل روی ناحیه یک بعدی برای $d_{mI} = ۱/۳$



(ب) تابع شکل در گره مرکزی

(الف) توزیع گره‌ها روی ناحیه دو بعدی

شکل ۱۰.۲: توزیع گره‌ها روی ناحیه دو بعدی و نمودار توابع شکل روی دامنه برای $d_{mI} = 2/1$ با استفاده از تابع وزن W^1



شکل ۱۱.۲: نمودار مشتق تابع شکل روی یک ناحیه دو بعدی برای $d_{mI} = 2/1$ با استفاده از تابع وزن W^1

فصل ۳

روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته برای مسایل مقدار مرزی

۱.۳ مقدمه

این فصل از چهار بخش کلی تشکیل شده است، در بخش اول مبانی و فرمول‌بندی روش بازتولید نقطه با هسته و نیز مفهوم توابع شکلی در این روش، به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت، در بخش دوم به معرفی کامل و نحوه فرمول‌بندی و پیاده‌سازی روش بدون شبکه EFG بر پایه تقریب MLS می‌پردازیم، در بخش سوم که بخش اصلی این پایان‌نامه به‌شمار می‌رود روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته معرفی می‌شود، و در بخش پایانی با حل مثال عددی تاثیر روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته بر مسایل عددی سنجیده خواهد شد.

۲.۳ روش بازتولید نقطه با هسته

یکی از قدیمی‌ترین روش‌های بدون شبکه، هیدرودینامیک ذرات هموار SPH^۱ می‌باشد، در روش SPH پاسخ سیستم به کمک تابعی که به تابع کرنل^۲ معروف است بازتولید می‌شود. این روش روی مرزها، یا هنگامی که نقاط کمی در دامنه در نظر گرفته شوند، قادر به ارایه پاسخی دقیق نیست. در سال ۱۹۹۲، نایرولس^۳ و همکاران وی تنها بر پایه نقاط پخش شده در دامنه و مشخصات مرزی محیط مورد نظر، روابط گالرکین را به کمک روش حداقل مجموع مربعات متحرک MLS

^۱ Smooth particle hydrodynamics

^۲ Kernel function

^۳ Nayroles

^۴ برای مساله مورد نظر به دست آوردند و روش خود را روش عناصر پراکنده^۵ نامیدند. از آنجا که توابع درونیاب به کار رفته در این روش بر خلاف روش عناصر متناهی فاقد خاصیت دلتای کرونگر^۶ بودند، اعمال شرایط مرزی و بارهای نقطه‌ای با مشکلات بیشتری همراه بود. بلیتشک^۷ و همکارانش از ضرایب لاگرانژ^۸ برای اعمال شرایط مرزی سود جستند. این روش از سایر روش‌های بدون المان‌بندی دقیق‌تر بود. از طرفی لیو^۹ و همکاران وی با روش SPH و افزودن جمله‌ای به کرنل تبدیل، جهت تصحیح عملکرد آن در مرزهای موجود روش بازتولید نقطه با هسته^{۱۰} را پدید آوردند که نسبت به SPH به مراتب دقیق‌تر بود. روش باز تولید نقطه با هسته اولین بار توسط لیو و همکاران وی معرفی شد، RKPM از جمله روش‌هایی است که متکی بر تابعی پیوسته به عنوان هسته اصلی باز تولید تابع مورد نظر می‌باشد، از آنجا که در این بخش به کرات با آن برخورد خواهیم کرد ابتدا آن را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۳. تابع شبیه‌ساز یا هسته اصلی بازتولید^{۱۱} به گروهی از عملگرها اطلاق می‌شود که طی فرایند انتگرال‌گیری بر دامنه تابعی دلخواه آن تابع را بازتولید می‌کنند. یکی از مشهورترین این گروه‌ها تبدیل فوریه است.

همان‌گونه که گفته شد SPH و RKPM از جمله روش‌های متکی بر تابع شبیه ساز جهت باز تولید تابع مورد نظر می‌باشند. در روش SPH تابع مورد نظر به کمک رابطه زیر بازتولید خواهد شد (بدیهی است در گام‌های بعدی تابع بازتولید شده به عنوان تخمینی از پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم در نظر گرفته می‌شود):

$$u^h(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi - x)u(x)dx, \quad (1.3)$$

که در این رابطه $u^h(\xi)$ تابع بازتولید شده و $\phi(\xi - x)$ تابع شبیه‌ساز می‌باشد. از نقطه ضعف این روش عملکرد ضعیف آن در دامنه‌های محدود است.

برای جبران این ضعف لیو و همکاران وی در سال ۱۹۹۳ با پیشنهاد تابعی جهت تصحیح مراحل بازتولید در نقاط مجاور مرز، نشان دادند که در صورت به کارگیری تابع تصحیح^{۱۲} یا جمله تصحیح

^۴Moving least square

^۵Diffuse element Method

^۶Kronker delta

^۷Belytschk

^۸Lagrange multipliers

^۹Liu

^{۱۰}Reproducing kernel particle method

^{۱۱}Reproducing kernel

^{۱۲}Correction function

مرز^{۱۳} نه تنها در نقاط مجاور مرز، بلکه در سایر نقاط دامنه هم جواب‌ها بهبود می‌یابند. مدل پیشنهادی ليو که RKPM نامیده شد به صورت

$$u^h(\xi) = \int_{\Omega} u(x)C(\xi; \xi - x)\phi(\xi - x)d(x), \quad (2.3)$$

قابل بیان است. در رابطه (۲.۳)، Ω دامنه محاسباتی و C تابع تصحیح می‌باشد. همچنین:

$$K(\xi; \xi - x) = C(\xi; \xi - x)\phi(\xi - x),$$

در رابطه اخیر، $K(\xi; \xi - x)$ تابع کرنل^{۱۴} و $\phi(\xi - x)$ تابع پنجره‌ای^{۱۵} نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۳. یک تابع پنجره‌ای که با اسامی tapering function و یا apodization function مشهور است، تابعی ریاضی است که بیرون بعضی از نواحی انتخابی صفر می‌باشد.

با نگاهی مجدد به رابطه (۲.۳) می‌توان دریافت که با انتخاب تابع دلتای دیراک^{۱۶} به عنوان کرنل این تبدیل انتگرالی، تساوی دو طرف رابطه برقرار خواهد بود. تابع پنجره‌ای مطلوب، تابعی است که تا حد امکان به تابع دلتای دیراک شبیه و نزدیک باشد. به دلیل ملاحظات مربوط به پایداری عددی روش، انتخاب توابع پنجره‌ای با دامنه پوششی بسیار کوچک (شبیه به تابع دلتای دیراک) عملاً ممکن نیست و حد پایینی بر آن متصور است. در عمل سعی می‌شود توابع پنجره‌ای اختیاری تا آنجایی که ممکن است شبیه به تابع دلتای دیراک باشند، در این میان تابع توزیع گوسی^{۱۷} و توابع اسپلاین^{۱۸} مناسب‌تر به نظر می‌رسند.

برای انعطاف‌پذیری هر چه بیشتر تابع پنجره‌ای، پارامتری به نام پارامتر اتساع^{۱۹} تعریف می‌کنیم. این پارامتر کنترل‌کننده کمی گسترده‌گی تابع پنجره‌ای بر دامنه تابع پاسخ می‌باشد. این پارامتر تاثیر شگرفی بر پایداری عددی روش RKPM دارد. از این رو نظر به اهمیت این پارامتر تابع پنجره‌ای را به فرم $\phi_a(\xi - x)$ نمایش خواهیم داد (a پارامتر اتساع است):

$$\phi_a(\xi - x) = \frac{1}{a}\phi\left(\frac{\xi - x}{a}\right).$$

^{۱۳}Boundary correction term

^{۱۴}Kernel function

^{۱۵}Window function

^{۱۶}Dirac delta function

^{۱۷}Gaussian distribution function

^{۱۸}Spline function

^{۱۹}Dilation parameter

با توجه به این تعریف، هر چه پارامتر اتساع بزرگتر انتخاب شود، تابع پنجره‌ای ناحیه وسیع‌تری از دامنه تابع پاسخ Ω را پوشش می‌دهد. به علاوه به ازای مقادیر بسیار کوچک این پارامتر ($a \rightarrow 0$) تابع پنجره‌ای به سمت تابع دلتای دیراک میل خواهد کرد. بنابراین به کار بردن تابع پنجره‌ای به فرم $\phi_a(\xi - x)$ و جایگذاری در رابطه (۲.۳) به جای فرم قبلی داریم:

$$u^h(\xi) = \int_{\Omega} u(x) C(\xi; \xi - x) \phi_a(\xi - x) dx, \quad (3.3)$$

که

$$\bar{\phi}_a(\xi, \xi - x) = C(\xi; \xi - x) \phi_a(\xi - x).$$

همان‌طور که در سطرهای آتی خواهیم دید، تابع تصحیح تابعی از توابع دلخواه و مستقل خطی (مانند تک جمله‌ای‌ها) به همراه ضرایبی مجهول می‌باشد که این ضرایب پس از اعمال شرایط بازتولید محاسبه می‌شوند. برای به دست آوردن معادلات لازم جهت باز تولید تابعی دلخواه چنین عمل می‌شود:

در رابطه (۳.۳)، ابتدا بسط تیلور تابع $u(x)$ را حول نقطه ξ به دست می‌آوریم:

$$u(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} (\xi - x)^\alpha u^{(\alpha)}(\xi), \quad (4.3)$$

با جایگذاری رابطه (۴.۳) در معادله (۳.۳) خواهیم داشت:

$$u^h(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \left(\int_{\Omega} (\xi - x)^\alpha \bar{\phi}_a(\xi, \xi - x) dx \right) u^{(\alpha)}(\xi), \quad (5.3)$$

برای سادگی بیشتر معادله (۵.۳) گشتاور درجه α تابع $\bar{\phi}_a(\xi, \xi - x)$ به شکل

$$\bar{m}_\alpha(a, \xi) = \int_{\Omega} (\xi - x)^\alpha \bar{\phi}_a(\xi, \xi - x) dx, \quad (6.3)$$

تعریف می‌شود. در این صورت معادله (۵.۳) را می‌توان به شکل

$$u^h(\xi) = \bar{m}_0(a, \xi) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \bar{m}_\alpha(a, \xi) u^{(\alpha)}(\xi), \quad (7.3)$$

بازنویسی نمود.

اگر بخواهیم رابطه (۷.۳) قادر به بازتولید دقیق یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، معادلات زیر بایستی برآورده شوند،

$$\begin{cases} \bar{m}_0(a, \xi) = 1, \\ \bar{m}_\alpha(a, \xi) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

به‌طور خلاصه:

$$\bar{m}_\alpha(a, \xi) = \delta_{\alpha 0}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (۸.۳)$$

که در رابطه اخیر δ تابع دلتای کرونکر می‌باشد.

در صورت تعریف $n+1$ ضریب مجهول در تابع تصحیح، می‌توان $n+1$ معادله هم‌زمان (۸.۳) را برآورده نمود، از این‌رو تعریف می‌کنیم:

$$C(\xi; \xi - x) = \sum_{\alpha=0}^n \beta_\alpha(\xi)(\xi - x)^\alpha,$$

که به‌شکل ماتریس

$$C(\xi; \xi - x) = \mathbf{P}^T(\xi - x)\boldsymbol{\beta}(\xi), \quad (۹.۳)$$

نیز قابل بیان می‌باشد.

در رابطه بالا، $\mathbf{P}^T(\xi - x)$ بردار حاوی تک‌جمله‌ای‌های پایه و دارای $n+1$ مولفه و $\boldsymbol{\beta}(\xi)$ بردار حاوی ضرایب مجهول می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۹.۳) در معادله (۸.۳)، برای $\alpha = 0, 1, \dots, n$ به $n+1$ معادله اساسی لازم به‌صورت

$$\int_{\Omega} \left\langle (\xi - x)^\alpha (\xi - x)^{\alpha+1} (\xi - x)^{\alpha+2} \dots (\xi - x)^{\alpha+n} \right\rangle \phi_a(\xi - x) d(x) \begin{Bmatrix} \beta_0(\xi) \\ \beta_1(\xi) \\ \beta_2(\xi) \\ \vdots \\ \beta_n(\xi) \end{Bmatrix} = \delta_{\alpha}, \quad (۱۰.۳)$$

جهت تعیین ضرایب مجهول β_i خواهیم رسید.

با تعریف رابطه‌ای شبیه به معادله (۶.۳) برای گشتاور تابع پنجره‌ای $\phi_a(\xi-x)$ ، معادله (۱۰.۳)، برای $\alpha = 0, 1, \dots, n$ به صورت معادله (۱۲.۳) بازنویسی خواهد شد.

$$m_\alpha(a, \xi) = \int_{\Omega} (\xi - x)^\alpha \phi_a(\xi - x) d(x), \quad (11.3)$$

$$\left\langle m_\alpha(a, \xi) \quad m_{\alpha+1}(a, \xi) \quad m_{\alpha+2}(a, \xi) \quad \dots \quad m_{\alpha+n}(a, \xi) \right\rangle \begin{Bmatrix} \beta_0(\xi) \\ \beta_1(\xi) \\ \beta_2(\xi) \\ \vdots \\ \beta_n(\xi) \end{Bmatrix} = \delta_{\alpha}, \quad (12.3)$$

دستگاه معادلات (۱۲.۳) به شکل ماتریسی زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} m_0(a, \xi) & m_1(a, \xi) & m_2(a, \xi) & \dots & m_n(a, \xi) \\ m_1(a, \xi) & m_2(a, \xi) & m_3(a, \xi) & \dots & m_{n+1}(a, \xi) \\ m_2(a, \xi) & m_3(a, \xi) & m_4(a, \xi) & \dots & m_{n+2}(a, \xi) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(a, \xi) & m_{n+1}(a, \xi) & m_{n+2}(a, \xi) & \dots & m_{2n}(a, \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0(\xi) \\ \beta_1(\xi) \\ \beta_2(\xi) \\ \vdots \\ \beta_n(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix},$$

یا

$$\mathbf{M}(a, \xi) \beta(\xi) = \mathbf{P}(0). \quad (13.3)$$

با دقت در رابطه فوق، ماتریس $\mathbf{M}$ را به صورت

$$\mathbf{M}(a, \xi) = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\xi - x) \mathbf{P}^T(\xi - x) \phi_a(\xi - x) d(x),$$

نیز می‌توان نوشت.

$\mathbf{M}$ ماتریس گرام^{۲۰} مجموعه توابع پایه $\langle 1 \quad (\xi-x) \quad \dots \quad (\xi-x)^n \rangle$ نسبت به تابع $\phi_a(\xi-x)$ می‌باشد. این توابع پس از ضرب انتگرالی (که از این پس آن را با نماد $(\cdot, \cdot)$ با نشان می‌دهیم) استقلال خطی خود را حفظ می‌کنند به عبارت دیگر درایه‌های ماتریس $\int_{\Omega} \mathbf{P}(\xi - x) \mathbf{P}^T(\xi - x) d(x)$ همگی

^{۲۰} Gram matrix

مستقل خطی اند. از طرف دیگر می دانیم که اگر مجموعه ای از توابع نسبت به عملگر $(\cdot, \cdot)$ مستقل خطی بوده، همچنین ϕ تابعی مثبت یا منفی باشد آنگاه این مجموعه از توابع نسبت به عملگر $(\cdot, \cdot)_\phi$ هم مستقل خطی خواهند بود. از آنجا که تابع پنجره ای تابعی همواره مثبت است، تمام درایه های ماتریس M مستقل خطی بوده، ماتریس، نامنفرد خواهد بود. از این رو با حل دستگاه معادلات همزمان (۱۳.۳) می توان ضرایب β_i را تعیین نمود:

$$\beta(\xi) = M^{-1}(a, \xi)P(\circ). \quad (14.3)$$

پس از تعیین بردار ضرایب مجهول $\beta(\xi)$ از رابطه (۱۴.۳)، تابع تصحیح محاسبه شده، سپس به روش ذکر شده در بخش بعدی تقریب مناسبی از پاسخ سیستم بر دامنه محاسباتی ساخته خواهد شد.

۱.۲.۳ توابع شکل در روش (RKPM)

پس از تعیین ضرایب β_i ، تابع تصحیح مرز تعیین شده، به کمک آن و با استفاده از معادله (۳.۳)، تابع مورد نظر بازتولید خواهد شد.

اما این روابط به تنهایی کاربرد عملی ندارند، برای استفاده از آنها در مسایل مورد نظر باید انتگرال موجود در رابطه (۳.۳) را گسسته نمود، در روش سنتی، این انتگرال به روش ذوزنقه ای^{۲۱} و بر روی نقاط^{۲۲} پخش شده در دامنه گسسته می شود.

در حالت یک بعدی گسسته سازی، انتگرال مورد بحث به صورت زیر انجام می شود:

$$u^h(\xi) = \int_{\Omega} u(x) \bar{\phi}_a(\xi, \xi - x) dx = \sum_{i=1}^{NP} u(x_i) \bar{\phi}_a(\xi, \xi - x_i) \Delta x_i. \quad (15.3)$$

در رابطه (۱۵.۳)، NP بیانگر تعداد کل نقاط پخش شده در دامنه است. برای همانندسازی معادله (۱۵.۳) با روابط آشنای روش عناصر متناهی رابطه به صورت

$$u^h(\xi) = \sum_{i=1}^{NP} \Psi_i(\xi) u_i, \quad (16.3)$$

بازنویسی می شود که در آن،

^{۲۱}Trapezoidal rule

^{۲۲}Nodes/particles

$$\begin{aligned}\Psi_i(\xi) &= \bar{\phi}_a(\xi, \xi - x_i)\Delta x_i = C(\xi, \xi - x_i)\phi_i(\xi - x_i)\Delta x_i \\ &= \mathbf{P}^T(\xi - x)\beta(\xi)\phi_i(\xi - x_i)\Delta x_i.\end{aligned}\quad (17.3)$$

در روابط اخیر، i شماره گره مورد نظر در دامنه و x_i مختصات آن می‌باشد. رابطه (۱۶.۳) همان رابطه آشنای به کار رفته در روش عناصر متناهی می‌باشد. بنابراین تابع $\Psi_i(\xi)$ به صورت تابع شکلی گره i ام در نقطه‌ای به مختصات ξ تعریف خواهد شد. قابل توجه آنکه از این پس مراحل عملیاتی شباهت زیادی به روش عناصر متناهی خواهند داشت، که در فصل اول پایان نامه به بیان آن پرداخته شد.

۳.۳ روش گالرکین بدون شبکه‌ی (EFG)

روش EFG اولین بار در سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو^{۲۳} پیشنهاد گردید. این روش به عنوان بهبودی از روش عناصر پراکنده (DEM) است، که توسط نایرولز^{۲۴} و همکاران معرفی شد. مشابه دیگر روش‌های بدون شبکه، این روش نیز تنها به مجموعه‌ای از گره‌های توزیع شده در دامنه‌ی مساله نیاز دارد و بی نیاز از ایجاد اتصالات بین گره‌ها می‌باشد. ارتباط بین گره‌ها، طبق تابع وزن گره‌ای که محمل فشرده دارد، تعریف می‌شود. منظور از محمل فشرده داشتن تابع وزن، این است که تابع وزن، برای هر گره تنها در ناحیه اطراف خود، که ناحیه تاثیر^{۲۵} گره نامیده می‌شود، مقدار می‌گیرد. برای ساختن توابع شکل در روش EFG، معمولاً از تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده می‌شود، تقریب کمترین مربعات متحرک مبتنی بر سه مولفه می‌باشد:

۱. تابع وزن با محمل فشرده متناظر با هر گره،

۲. توابع پایه‌ای چندجمله‌ای،

۳. مجموعه‌ی ضرایب (که به موقعیت گره بستگی دارد)

همان‌طور که گفته شد، محمل تابع وزن با ناحیه‌ی تاثیر هر گره تعیین می‌شود. اشتراک این نواحی تاثیر گره‌ها به عنوان ارتباطات گره‌ای معرفی می‌شود. بلیچکو در مقالات زیادی نتایج دقیقی را از اعمال روش گزارش داد. همچنین بلیچکو با انجام دادن چندین آزمایش عددی و اعلام نتایج

^{۲۳}Belytschko

^{۲۴}Nayroles

^{۲۵}Domain of influence

حاصل به سرعت همگرایی روش و مقایسه آن با روش عناصر متناهی اشاره کرد، او نشان داد که نامنظم بودن گره‌ها در دامنه مساله بر روی اعمال روش تاثیر نخواهد گذاشت. به این ترتیب، این روش‌ها برای حل طیف وسیعی از مسایل خطی و غیرخطی الاستیک در حالت دوبعدی و سه‌بعدی، مسایل ساختارهای صفحه و پوسته و نیز مسایل الکترو مغناطیس به کار رفت. همچنین تکنیک‌های ترکیب روش EFG با روش‌های عناصر متناهی برای اعمال شرایط مرزی دیریکله، که در ادامه به آن اشاره خواهد شد، و یا ترکیب با روش المان‌های مرزی مطرح گردید. تمامی کاربردهای این روش، ترکیب آن با روش‌های دیگر و بهبودهای آن مثلاً در زمینه‌ی انتگرال‌گیری عددی، گواه بر این مطلب است که کم‌کم روش EFG به عنوان روشی کارا و مناسب در حوزه‌ی محاسبات مکانیکی و نیز در مسایل گسترش شکاف و ... کاربرد گسترده‌ای خواهد داشت. برای اینکه دید کلی از روش داشته باشیم، بهتر است به طور خلاصه مراحل این روش را بیان کنیم. در این روش:

۱. دامنه‌ی مساله با تعدادی از گره‌های پراکنده نمایش داده می‌شود.
 ۲. تقریب کمترین مربعات متحرک برای ساخت توابع شکل به کار گرفته می‌شود.
 ۳. فرم ضعیف گالرکین روی معادله پیاده شده و توسط تقریب MLS معادله گسسته‌سازی می‌شود.
 ۴. فرم ماتریسی مساله به دست می‌آید.
 ۵. برای حل مساله نیاز به محاسبه‌ی عبارت‌های انتگرالی می‌باشد، که برای محاسبه‌ی انتگرال‌ها، دامنه‌ی مساله سلول‌بندی می‌شود.
- لازم است در اینجا به برخی نکات در خصوص روش EFG، اشاره کنیم.

۱. در روش EFG، توابع شکل ساخته شده از طریق MLS، فاقد خاصیت دلتای کرونکر می‌باشند. لذا تکنیک‌های خاصی برای اعمال شرایط مرزی دیریکله در این روش ارائه شده‌اند که در ادامه به مطالعه‌ی آنها خواهیم پرداخت.

۲. در این روش همان‌طور که اشاره شد، برای ساخت دستگاه معادلات نهایی، نیاز به انتگرال‌گیری عددی داریم. به این منظور سلول‌های انتگرال‌گیری در دامنه‌ی مساله ایجاد می‌شوند. به همین جهت شاید نتوان این روش را روش بدون شبکه‌ی واقعی نامید. انجام انتگرال‌گیری عددی در دامنه مساله چندین روش عددی توسط محققین مطرح شده است که از آن جمله محققین

بسل و بلیچکو بودند که در سال ۱۹۹۶ روش گره‌های انتگرال‌گیری پایدار را به منظور پرهیز از انجام انتگرال‌گیری عددی به کار بردند. هم‌چنین روش EFG مطرح شد که نیاز به ایجاد سلول‌های انتگرال‌گیری را برطرف می‌کند. از آن جمله، دو روش جدید هستند که در سال‌های اخیر مطرح شده‌اند.

۳. روش EFG از لحاظ محاسباتی پرهزینه تر از روش FEM می‌باشد. در اینجا به ذکر پاره‌ای از دلایل آن می‌پردازیم.

(آ) برای ساخت توابع شکل در روش MLS به روش کمترین مربعات متحرک، به ازای هر گره تقریب باید یک دستگاه معادلات حل شود، اگر چه لازم به ذکر است که ابعاد این دستگاه در مقایسه با دیگر تقریب‌های بدون شبکه مثل RBF بسیار کوچکتر است و به جای حل یک دستگاه معادلات بزرگ، چندین دستگاه معادلات کوچک حل می‌شوند.

(ب) در فرآیند ساخت توابع شکل به روش کمترین مربعات متحرک، جستجو به دنبال گره‌های موجود در ناحیه تاثیر نقطه مفروض انجام می‌شود که این کار به لحاظ محاسباتی پرهزینه است.

(ج) معمولاً پهنای نواری دستگاه معادلات نهایی در EFG نسبت به FEM بیشتر است و آن هم به این دلیل است که در ساخت توابع شکل به روش کمترین مربعات متحرک، تعداد نقاط بیشتری به کار می‌رود.

جی آر لیو و جیو^{۲۶} در سال ۲۰۰۱ از روش درونیایی نقاط (PIM) برای ساخت توابع شکل در روش EFG استفاده کرده و از سلول‌های انتگرال‌گیری برای به دست آوردن انتگرال‌های حاصل از فرم ضعیف گالرکین در دامنه مساله استفاده نمودند. یکی از خواص PIM این است که توابع شکل حاصل از آن دارای خاصیت دلتای کروکر می‌باشند، لذا شرایط مرزی دیریکله در آن به سادگی اعمال می‌شود. از جمله مشکلات این روش، این است که ممکن است ماتریس نهایی منفرد باشد. روش دیگری نیز که برای ساخت توابع شکل به کار می‌رود، روش RPIM است، که در آن از توابع پایه‌ای شعاعی به منظور غلبه بر مشکل معکوس ناپذیری ماتریس حاصل، استفاده می‌شود. به هر حال، به دلیل مزایای موجود در تقریب MLS، در این پایان‌نامه روش EFG را بر مبنای تقریب کمترین مربعات متحرک به کار می‌گیریم. در این بخش بر فرمول‌بندی و پیاده‌سازی روش EFG بر

^{۲۶}GR. Liu and Gu

پایه تقریب MLS تمرکز می‌کنیم. در فصل قبل روش کمترین مربعات متحرک به‌طور کامل بیان شد، توابع وزن مربوط به آن و ویژگی توابع شکل به‌دست آمده از تقریب MLS بیان شد. در اینجا فرم‌های ضعیف بهبود یافته برای اعمال شرایط مرزی دیریکله در روش EFG توضیح داده می‌شود. سرانجام برای درک بهتر روش EFG، مساله پواسون را در نظر گرفته و روش EFG را به‌طور کامل بر روی آن پیاده‌سازی می‌کنیم.

۱.۳.۳ فرم‌های ضعیف بهبود یافته

همان‌طور که اشاره شد، در روش عناصر متناهی، شرایط مرزی دیریکله می‌تواند به‌طور مستقیم در گره‌ها اعمال شود، زیرا توابع شکل در FEM درونیاب هستند و نتایجی که از این طریق به‌دست می‌آیند در شرط‌های سازگاری مرزهای دیریکله صدق می‌کنند. روش‌های بدون شبکه برخلاف FEM، از توابع شکلی استفاده می‌کنند، که به‌وسیله تقریب کمترین مربعات متحرک ساخته می‌شوند، بنابراین در خاصیت دلتای کروکر صدق نمی‌کنند. در نتیجه فرم ضعیف به‌کار رفته در FEM استاندارد، که شرایط مرزی دیریکله به‌طور مستقیم در مقادیر گره‌ای اعمال می‌شوند، دیگر برای روش بدون شبکه بر پایه تقریب MLS، معتبر نیست و اعمال شرایط مرزی دیریکله به راهکارهای اضافه‌تری نیاز دارد. روش‌هایی که برای حل این مشکل، گسترش پیدا کردند را می‌توان در سه رده‌ی زیر دسته‌بندی کرد [۲۳]:

۱. اصلاح توابع شکل روش EFG، به منظور تحمیل مستقیم شرایط مرزی دیریکله.
 ۲. ترکیب روش FEM با روش بدون شبکه، به‌طوری‌که، در نزدیکی مرزهای دیریکله روش عناصر متناهی، به‌کار گرفته شود.
 ۳. اصلاح فرم ضعیف به منظور شامل شدن عبارت موثر در طول مرزهای دیریکله.
- برای مثال‌هایی از دسته‌ی اول، می‌توان به استفاده از توابع وزن منفرد و روش‌های تبدیل اشاره کرد. در مورد دسته‌ی دوم نیز می‌توان گفت، که پیشنهاد ترکیب FEM با روش EFG توسط بلیچکو ارایه شد، که در آن نیازمند ایجاد ارتباطی بین توابع شکل FEM و توابع شکل روش EFG می‌باشیم. در این روش‌ها نیاز به شبکه‌بندی مساله می‌باشد، که برای روش بدون شبکه این مطلب چندان خوشایند نیست.
- در این بخش، روی دسته‌ی سوم، تحت عنوان اصلاح فرم ضعیف، تمرکز می‌کنیم که دارای فرمول‌بندی کلی ساده‌ای است. از روش‌های این دسته می‌توان به روش مستقیم، روش جریمه،

روش ضرایب لاگرانژ و روش شبه نیچز^{۲۷} اشاره کرد. در این پایان‌نامه روش‌های مستقیم و جریمه به‌کار گرفته شده است.

۲.۳.۳ پیاده‌سازی روش EFG

معادله خطی پواسون زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\Delta u &= P(X), \quad X \in \Omega, \\ u(X) &= u_D(X), \quad X \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(X) &= u_N(X), \quad X \in \Gamma_N,\end{aligned}\quad (18.3)$$

که در آن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ دامنه‌ی کراندار با مرز $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ، بردار نرمال خارجی در $X = (x, y)$ و u_N, P ، Δ ، Γ عمگر لاپلاس دو بعدی، $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y}$ ، $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ، مقدار مشخص نیومان و دیریکله روی مرزهای Γ_N (نیومان) و Γ_D (دیریکله) هستند.

بنابراینچه در مقدمه در دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه گفته شد، می‌توان روش‌های فرم‌قوی (هم‌مکانی) و یا روش‌های فرم‌ضعیف را برای حل معادله (۱۸.۳) به‌کار برد. از آنجا که روش EFG روش فرم ضعیف سراسری می‌باشد، فرم ضعیف مساله را روی کل ناحیه Ω به‌کار می‌بریم. در این‌جا تنها به این نکته اشاره می‌کنیم که روش EFG، فرم ضعیف متقارن را به‌کار می‌گیرد. در حقیقت با اعمال روش باقیمانده وزنی بر معادله (۱۸.۳) به فرم ضعیف زیر می‌رسیم:

$$\int_{\Omega} (\Delta u - P) v d\Omega = 0, \quad (19.3)$$

که در آن u تابع تقریب^{۲۸} و v تابع آزمون^{۲۹} می‌باشد. با استفاده از قضیه دیورژانس در رابطه (۱۹.۳) به فرم ضعیف متقارن می‌رسیم، برای این منظور ابتدا از تساوی زیر که از قاعده زنجیره‌ای مشتق به‌دست آمده، استفاده می‌کنیم:

$$(\Delta u)v = u_{,ii}v = (u_{,i}v)_{,i} - u_{,i}v_{,i}, \quad (20.3)$$

^{۲۷}Nitscle-like Method

^{۲۸}Trial Function

^{۲۹}Test Function

که در آن منظور از $(\cdot)_i$ در واقع $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ است که $(y \text{ یا } x)$ $x_i = x$ و منظور از عبارت $u_{,i}v_{,i}$ در حقیقت $u_{,i}v_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ می‌باشد. از طرفی طبق قضیه دیورژانس^{۳۰} داریم:

$$\int_{\Omega} (u_{,i}v)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i}n_i v d\Gamma. \quad (21.3)$$

با استفاده از رابطه (۲۰.۳) و (۲۱.۳) در فرم ضعیف (۱۹.۳) خواهیم داشت:

$$\int_{\Gamma} u_{,i}n_i v d\Gamma - \int_{\Omega} (u_{,i}v_{,i} + pv) d\Omega = 0.$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در روش‌های بدون شبکه، شرایط مرزی دیریکله را نمی‌توان به طور طبیعی به کار برد. بنابراین باید آنها را به مساله تحمیل کنیم. در این جا ابتدا از روش جریمه استفاده می‌کنیم و در ادامه روش مستقیم را نیز به کار می‌گیریم. بنابراین با اعمال شرایط مرزی دیریکله به روش جریمه، مانند آنچه در [۱۴] بیان شده است، خواهیم داشت:

$$\int_{\Gamma} u_{,i}n_i v d\Gamma - \int_{\Omega} (u_{,i}v_{,i} + pv) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_D} (u - u_D) v d\Gamma = 0. \quad (22.3)$$

که α پارامتر جریمه است. در حقیقت روش جریمه به این صورت می‌باشد، که در آن $\alpha \gg 1$ مقدار بسیار بزرگی، انتخاب می‌شود. در حقیقت مقادیر بسیار بزرگ α موجب می‌شود هنگامی که Γ_D در (۲۲.۳) وجود دارد، تنها عبارت $\alpha \int_{\Gamma_D} (u - u_D) v d\Gamma$ باقی بماند و این نیز به معنای $u(X) = u_D(X)$ همان شرط مرزی دیریکله می‌باشد.

در رابطه (۲۲.۳) منظور از $u_{,i}n_i$ در واقع همان $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ است. با در نظر گرفتن شرط مرزی نیومان و اینکه Γ را می‌توان به صورت $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ نوشت، داریم:

$$\int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma + \int_{\Gamma_N} u_N v d\Gamma - \int_{\Omega} (u_{,i}v_{,i} + pv) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_D} (u - u_D) v d\Gamma = 0. \quad (23.3)$$

با دوباره نویسی رابطه (۲۳.۳) و جابجایی عبارات معلوم در سمت راست، داریم:

$$\int_{\Omega} u_{,i}v_{,i} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} u v d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma = \int_{\Gamma_N} u_N v d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_D} u_D v d\Gamma - \int_{\Omega} p v d\Omega. \quad (24.3)$$

^{۳۰}Divergence Theorem

برای تقریب فضای آزمون، می‌توان هر نوع تقریب بدون شبکه نظیر توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده^{۳۱} و تقریب MLS را به کار ببریم. معمولاً در روش EFG از تقریب MLS استفاده می‌شود. بنابراین با بکارگیری تقریب MLS برای توابع آزمون، داریم

$$u(X) = \sum_{j=1}^N \phi_j(X) u(X_j).$$

با جایگذاری تقریب $u(X)$ ، در معادله (۲۴.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N \phi_{j,k}(X) u(X_j) \right) v_{,k} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=1}^N \phi_j(X) u(X_j) \right) v d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j(X)}{\partial n} u(X_j) \right) v d\Gamma = \int_{\Gamma_N} u_N(X) v d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_D} u_D(X) v d\Gamma - \int_{\Omega} p(X) v d\Omega. \end{aligned} \quad (25.3)$$

از آنجا که روش EFG یک روش ضعیف گالرکین می‌باشد، بنابراین باید فضای تقریب و فضای تست یکسان باشند. بنابراین توابع تقریب و تست را از یک فضا انتخاب می‌کنیم. چون تابع آزمون را بر اساس تقریب MLS در نظر گرفته‌ایم، تابع تست را نیز بر اساس توابع شکل تقریب MLS در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم $v(X, X_i) = \phi_i(X)$. در واقع برای اینکه به فرم ماتریس مساله برسیم باید رابطه (۲۵.۳) را به ازای N تابع تست $v(X, X_i)$ ، که N تعداد گره‌های تقریب می‌باشد، داشته باشیم. بنابراین با در نظر گرفتن N تابع تست، N معادله خواهیم داشت و متناظر با آن، N مجهول $u(X_j)$ ، $j = 1, 2, \dots, N$ داریم. در نتیجه ماتریس نهائی دستگاه معادلات، ماتریسی $N \times N$ خواهد بود. پس، رابطه (۲۵.۳)، برای $i = 1, 2, \dots, N$ به N معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N u(X_j) \left(\int_{\Omega} \phi_{j,k} v_{,k}(X, X_i) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} \phi_j v(X, X_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \phi_j(X)}{\partial n} v(X, X_i) d\Gamma \right) \\ & = \int_{\Gamma_N} u_N(X) v(X, X_i) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_D} u_D(X) v(X, X_i) d\Gamma - \int_{\Omega} p(X) v(X, X_i) d\Omega \end{aligned}$$

حال با جایگذاری $v(X, X_i) = \phi_i(X)$ ، به دستگاه معادلات

$$K \cdot \hat{u} = f \quad (26.3)$$

می‌رسیم، که در آن درایه‌های ماتریس سختی^{۳۲} k و بردار معلوم f به صورت

^{۳۱}CSRB

^{۳۲}Stiffness Matrix

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \phi_{j,k}(X) \phi_{i,k}(X) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} \phi_j(X) \phi_i(X) d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \phi_j(X)}{\partial n} \phi_i(X) d\Gamma, \quad (27.3)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_N} u_N(X) \phi_i(X) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_D} u_D(X) \phi_i(X) d\Gamma - \int_{\Omega} P(X) \phi_i(X) d\Omega, \quad (28.3)$$

هستند. بردار مجهولات u در (۲۶.۳) به صورت $\hat{u} = [u(X_1) \quad u(X_2) \quad \dots \quad u(X_N)]$ و متناظر با گره‌های تقریب $X_1, \dots, X_N$ می‌باشد.

توجه داریم که در روابط (۲۷.۳) و (۲۸.۳)، برای گره‌های i که مقدار $\phi_i(X)$ در آنها به ازای X ‌های روی مرز مساله صفر است، و به عبارتی مرز مساله تاثیری روی آنها نمی‌گذارد، انتگرال‌های روی Γ_D و Γ_N صفر هستند.

۳.۳.۳ اعمال شرایط مرزی دیریکله به روش مستقیم

شرایط مرزی دیریکله را می‌توان به صورت مستقیم (روش هم‌مکانی) با استفاده از تقریب MLS پیاده‌سازی کرد. چون برای گره‌هایی که روی مرز دیریکله توزیع شده‌اند، شرایط مرزی دیریکله برقرار است، پس داریم

$$u_h(X_i) = u_D(X_i), \quad X_i \in \Gamma_D. \quad (29.3)$$

با در نظر گرفتن تقریب MLS، برای $u_h(X_i)$ در (۲۹.۳) داریم:

$$\sum_{j=1}^N \phi_j(X_i) u(X_i) = u_D(X_i), \quad X_i \in \Gamma_D. \quad (30.3)$$

و در نهایت رابطه (۳۰.۳) را در ماتریس k و بردار f ، برای سطرها متناظر با گره‌های $X_i \in \Gamma_D$ جایگزین می‌کنیم. در این صورت

$$k_{ij} = \phi_j(X_i), \quad X_i \in \Gamma_D, \quad (31.3)$$

و

$$f_i = u_D(X_i), \quad X_i \in \Gamma_D, \quad (32.3)$$

اگر پیاده‌سازی روش به گونه‌ای بود که تنها سطرهاى متناظر با گره‌های روی مرز دیریکله، در k و f ، از مرز دیریکله تاثیر می‌گرفتند، به عبارتی $\phi_i(X)$ در انتگرال روی Γ_D ، تنها برای i های متناظر با گره‌های روی مرز دیریکله غیر صفر بود، در این صورت برای دیگر سطرهاى k و f که متناظر با گره‌های $X_i \notin \Gamma_D$ هستند، روابط (۲۷.۳) و (۲۸.۳) را خواهیم داشت، که در آن‌ها $\alpha = 0$ را در نظر می‌گیریم. اما اگر روش به گونه‌ای باشد که مرز دیریکله برای برخی از گره‌هایی که روی مرز دیریکله نیستند نیز تاثیرگذار باشد، یا در حقیقت $\phi_i(X)$ در انتگرال روی Γ_D برای گره‌های i که روی مرز دیریکله نیستند، مقدار غیر صفر بگیرد، در این صورت باید برای این سطرها همان روابط (۲۷.۳) و (۲۸.۳) را داشت که در آن‌ها α دیگر صفر نخواهد بود و برای سطرهاى i ام که $X_i \notin \Gamma_D$ ارتباطی با مرز دیریکله ندارند، یا به عبارتی در انتگرال روی Γ_D برای گره‌ی i ام صفر است، α را صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین در روش EFG با بکارگیری روش مستقیم در اعمال شرایط مرزی دیریکله خواهیم داشت:

$$k_{ij} = \begin{cases} \phi_j(X_i), & X_i \in \Gamma_D, \\ \int_{\Omega} \phi_{j,k}(X) \phi_{i,k}(X) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_D} \phi_j(X) \phi_i(X) d\Gamma & \\ - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \phi_j(X)}{\partial n} \phi_i(X) d\Gamma, & X_i \notin \Gamma_D, \end{cases} \quad (33.3)$$

$$f_i = \begin{cases} u_D(X_i), & X_i \in \Gamma_D, \\ \int_{\Gamma_N} u_N(X) \phi_i(X) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_D} u_D(X) \phi_i(X) d\Gamma & \\ - \int_{\Omega} P(X) \phi_i(X) d\Omega, & X_i \notin \Gamma_D. \end{cases} \quad (34.3)$$

۴.۳.۳ انتگرال‌گیری روش EFG

در فرم ماتریسی روش EFG، که از اعمال شرایط مرزی دیریکله به روش جریمه (۲۷.۳) و (۲۸.۳) یا روش مستقیم (۳۳.۳) و (۳۴.۳) به دست آمده باشد، دیده می‌شود که عبارت انتگرالی در آن وجود دارد. برای محاسبه این انتگرال‌ها در روش EFG، در تعاریف اولیه از این روش [۱۸] ناحیه مساله شبکه‌بندی می‌شود و در هر سلول از فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوسی استفاده شده تا در نهایت با جمع مقادیر به دست آمده روی سلول‌ها، انتگرال‌های روی Ω به دست آیند. برای انتگرال‌های روی Γ_D و Γ_N نیز، مرز مساله را قطعه‌بندی کرده و در هر قطعه، از روش انتگرال‌گیری گاوسی استفاده می‌کند. همان‌طور که اشاره شد، به کار بردن سلول در روش EFG موجب می‌شود که این روش به عنوان یک روش کاملاً بی‌نیاز از شبکه محسوب نشود. گرچه توجه داریم که ایجاد شبکه و اتصال

بین گره‌ها از ایجاد سلول‌بندی ناحیه‌ی مساله، متفاوت است و سلول‌بندی ناحیه به مراتب ساده‌تر از آن می‌باشد. برای حل این مشکل نیز روش‌های جدیدی در حوزه‌ی EFG به وجود آمده‌اند [۱۲].

۵.۳.۳ الگوریتم روش EFG

برای درک بهتر روش EFG، الگوریتم ساده‌ای از این روش ارائه می‌دهیم:

۱. توزیع گره‌ها در دامنه مساله و مشخص کردن مختصات گره‌ها،
۲. ایجاد سلول‌های انتگرال‌گیری در دامنه مساله،
۳. مشخص کردن توابع پایه‌ای و پارامترهای مربوط به محمل توابع وزن در تقریب کمترین مربعات متحرک،
۴. تعیین نقاط، وزن‌های انتگرال‌گیری و ژاکوبی برای هر سلول،
۵. حلقه روی نقاط انتگرال‌گیری،
- (آ) تعیین گره‌های موجود در ناحیه تاثیر نقطه‌ی انتگرال‌گیری (گره‌های موثر)
- (ب) محاسبه تابع وزن برای گره‌های موثر در نقطه انتگرال‌گیری X_q ،
- (ج) محاسبه‌ی توابع شکل و مشتقات آن در نقطه انتگرال‌گیری X_q ،
- (د) مقداردهی و جایگذاری مولفه‌های مربوط در ماتریس k و بردار f ،
۶. محاسبه‌ی بردار مجهولات u_I از طریق ماتریس k و بردار f ساخته شده،

۴.۳ روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته

همان‌طور که در فصل‌های قبل اشاره کردیم، روش عناصر متناهی و روش‌های بدون شبکه برای به‌دست آوردن جواب‌های عددی مساله‌های مقدار مرزی به‌کار می‌روند. اما دقت جواب‌هایی که از طریق این روش‌ها به دست می‌آید، به‌دلیل وجود تابع منبع در مسایل مقدار مرزی پایین می‌آید. به‌ویژه تابع منبع می‌تواند درجه رفتارهای غیرخطی جواب را افزایش بدهد، لذا برای دقت قابل قبول، به تقریب درجه بالا با گسسته‌سازی ظریف‌تر نیاز پیدا می‌کنیم [۱۹].

مثال یک بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} u_{,xx} + b(x) &= 0 \quad \text{in } (0, 1), \\ b(x) &= \begin{cases} (2\alpha^2 - 4[\alpha^2(x - 0.5)]^2) \exp(-[\alpha(x - 0.5)]^2) & \text{for } 0.42 \leq x \leq 0.58, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 1, \quad \alpha = 50. \end{aligned} \quad (35.3)$$

برای به دست آوردن جواب دقیق^{۳۳} معادله (۳۵.۳) به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$u_{xx} = -(2\alpha^2 - 4[\alpha^2(x - 0.5)]^2) \exp(-[\alpha(x - 0.5)]^2),$$

آنگاه

$$u_x = c_1 - \int_0^1 (2\alpha^2 - 4[\alpha^2(x - 0.5)]^2) \exp(-[\alpha(x - 0.5)]^2) dt.$$

با انتخاب $\alpha(x - 0.5) = t$ داریم:

$$\begin{aligned} u_x &= c_1 - \frac{1}{\alpha} \int (2\alpha^2 - 4\alpha^2 t^2) e^{-t^2} dt = c_1 - 2\alpha t e^{-t^2} \\ &= c_1 - 2\alpha^2 (x - 0.5) e^{-[\alpha(x - 0.5)]^2}, \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} u &= c_2 + c_1 x - \int 2\alpha^2 (x - 0.5) e^{-[\alpha(x - 0.5)]^2} dt \\ &= c_2 + c_1 x - \int 2t e^{-t^2} dt \\ &= c_2 + c_1 x + e^{-[\alpha(x - 0.5)]^2}. \end{aligned} \quad (36.3)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی داده شده، ضرایب ثابت c_1 و c_2 را به صورت

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow c_2 = e^{-0.25\alpha^2} \\ u(1) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \end{cases}$$

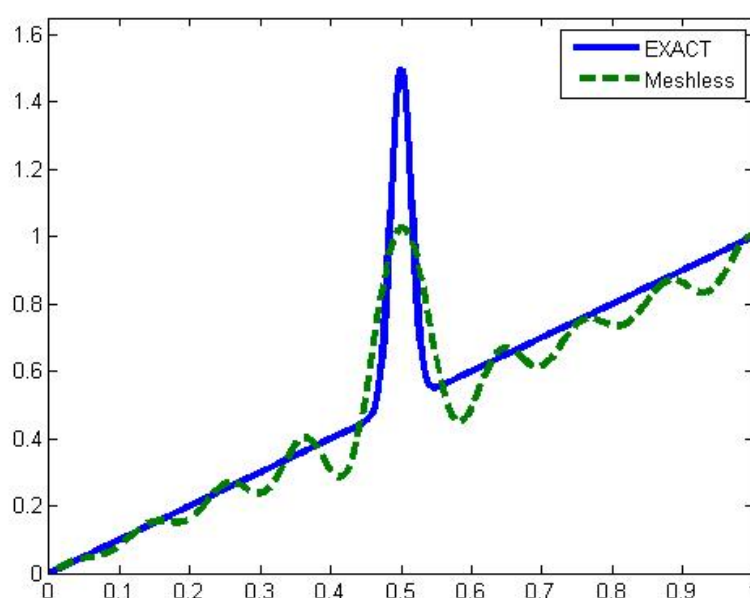
به دست می‌آوریم و با جایگذاری در رابطه (۳۶.۳) جواب دقیق معادله (۳۵.۳) به صورت

$$u(x) = \exp(-\alpha^2(x - 0.5)^2) + x - \exp(-0.25\alpha^2).$$

^{۳۳}Exact Solution

به دست می‌آید.

جواب تقریبی این مثال با استفاده از روش بدون شبکه RPIM با تقریب RBF با بکارگیری ۲۰ گره^{۳۴} و پایه‌های خطی به دست آمده است (جزئیات حل در بخش مثال‌های عددی آورده شده). در شکل ۱.۳ جواب تقریبی و جواب دقیق با یکدیگر مقایسه شده‌اند، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، این دو نمودار دقیقا در قسمت‌هایی که تابع منبع مقدار دارد با یکدیگر اختلاف شدیدی دارند و در دیگر قسمت‌های دامنه اختلاف چندانی ندارند. در این بخش به دنبال حل این مشکل هستیم. سه دانشمند چینی به نام‌های جان-شان چن^{۳۵}، وانگ^{۳۶} و استنلی^{۳۷} در صدد حل این مشکل، روش بدون شبکه توسعه یافته را پیشنهاد دادند که در ادامه با این روش آشنا خواهیم شد.



شکل ۱.۳: جواب دقیق و بدون شبکه در مثال یک بعدی

برای نشان دادن روش بدون شبکه پیشرفته مساله یک بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_{xx} + b(x) = 0, & \text{in } (a, b), \\ u(a) = \bar{u}_a, & u(b) = \bar{u}_b. \end{cases} \quad (37.3)$$

^{۳۴}Node

^{۳۵}Jiun-Shyan Chen

^{۳۶}Wang

^{۳۷}Stanley

براساس روش پیشنهادی شان چن و همکاران [۱۹]، جواب عمومی این مساله به صورت مجموع دو جواب خصوصی و همگن به صورت

$$u(x) = u^o(x) + u^p(x), \quad (38.3)$$

نوشته می شود. جواب خصوصی به کمک تابع گرین^{۳۸}، $g(x)$ به صورت

$$u^p(x) = \int_a^b g(x-x')b(x')dx', \quad (39.3)$$

تعریف می شود.

تعریف ۱.۴.۳. جواب معادله دیفرانسیلی که تابع منبع آن دلتای دیراک باشد، **تابع گرین** می نامند.

تعریف ۲.۴.۳. تابع دلتای دیراک (یا ضربه) با دو مشخصه‌ی زیر تعریف می شود:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x = 0. \end{cases}$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

در حقیقت این تابع مشتق اول تابع پله واحد است، با این شرط که همواره مساحت زیر نمودار این تابع برابر با مقدار یک است.

حال اگر تابع دلخواهی مانند f ، در تابع ضربه، ضرب شود، طبق همین تعریف، حاصل در همه نقاط برابر با صفر است مگر در نقطه‌ای که مقدار تابع ضربه برابر با بی نهایت است. از طرفی چون مقدار y ها در نمودار حاصل ضرب به اندازه‌ی مقدار f در نقطه‌ی ضربه تغییر می کند در نتیجه مساحت مستطیل به همان اندازه تغییر می کند.

با این توضیحات، اگر در تابع ضربه تابع دیگری ضرب شود، داریم:

$$f(t)\delta(t-t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{if } t = t_0, \\ 0 & t \neq t_0. \end{cases}$$

اگر $a < t_0 < b$ ، تابع دلتای دیراک طبق توضیحات گفته شده در خاصیت زیر که به خاصیت غربالی مشهور است صدق می کند.

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$

^{۳۸}Green function

برای به دست آوردن جواب خصوصی نیاز داریم که تابع گرین را به دست آوریم. برای به دست آوردن تابع گرین در این مساله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

با توجه به تعریف تابع گرین داریم:

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -\delta(x), \quad (40.3)$$

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابع دلخواهی باشد که:

$$f(x) = \frac{dg(x)}{dx}, \quad (41.3)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۴۱.۳) و تعریف دلتای دیراک داریم:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d^2 g}{dx^2} = -\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x = 0. \end{cases}$$

در حقیقت این تابع مشتق اول تابع پله است، پس $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \text{متناهی} & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

حال با توجه به رابطه (۴۱.۳)، با انتگرال‌گیری از طرفین تابع گرین به دست می‌آید. جواب همگن، در معادله همگن با شرایط مرزی تغییر یافته به وسیله جواب خصوصی صدق می‌کند. برای به دست آوردن معادله همگن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا از طرفین معادله (۳۹.۳) دو بار نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d^2 u^p(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \int_a^b g(x-x')b(x')dx',$$

با انتقال مشتق به درون انتگرال داریم:

$$\frac{d^2 u^p(x)}{dx^2} = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} g(x-x')b(x')dx',$$

با در نظر گرفتن تعریف تابع گرین و خاصیت غربالی تابع دلتای دیراک داریم:

$$\frac{d^2 u^p(x)}{dx^2} = \int_a^b \delta(x-x')b(x')dx' = b(x).$$

پس جواب خصوصی در معادله دیفرانسیل شامل تابع منبع صدق می‌کند. با دو بار مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۳۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= \frac{d^2 (u^p(x) + u^\circ(x))}{dx^2} \\ &= \frac{d^2 u^p(x)}{dx^2} + \frac{d^2 u^\circ(x)}{dx^2}\end{aligned}$$

پس معادله همگن به صورت

$$\frac{d^2 u^\circ(x)}{dx^2} = 0 \quad (42.3)$$

به دست می‌آید. جواب معادله همگن به کمک روش بدون شبکه قابل محاسبه است، که در بخش نتایج عددی به آن خواهیم پرداخت. شرایط مرزی معادله (۴۲.۳) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}u(a) &= \bar{u}_a, \\ u^p(a) + u^\circ(a) &= \bar{u}_a,\end{aligned}$$

پس

$$u^\circ(a) = \bar{u}_a - u^p(a).$$

و

$$\begin{aligned}u(b) &= \bar{u}_b, \\ u^p(b) + u^\circ(b) &= \bar{u}_b,\end{aligned}$$

پس

$$u^\circ(b) = \bar{u}_b - u^p(b).$$

برای مساله پواسون دو بعدی به صورت زیر:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u + b(X) &= 0, & \text{in } \Omega, \\ u &= p, & \text{on } \partial_u \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h, & \text{on } \partial_h \Omega,\end{aligned} \quad (43.3)$$

که $\partial_u \Omega$ و $\partial_h \Omega$ به ترتیب مرزهای طبیعی^{۳۹} و اساسی^{۴۰} می‌باشد و $\partial_u \Omega \cup \partial_h \Omega = \partial \Omega$ و $\mathbf{n}$ بردار نرمال عمود^{۴۱} روی مرز است و $\partial_u \Omega \cap \partial_h \Omega = \emptyset$ ، جواب گرین در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 g + \delta(X - \bar{X}) = 0,$$

و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(X, \bar{X}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad r = \|\bar{X} - X\| = [(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

با استفاده از تابع گرین جواب خصوصی به صورت

$$u^p(X) = \int_a^b g(x, y) b(y) dy.$$

به دست می‌آید.

جواب همگن از معادله همگن زیر با استفاده از روش بدون شبکه به دست خواهد آمد، که در بخش نتایج عددی به آن خواهیم پرداخت.

$$\nabla^2 u^\circ = 0, \quad \text{in } \Omega.$$

شرایط مرزی معادله همگن با استفاده از جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$u(X) = p,$$

$$u^\circ(X) + u^p(X) = p,$$

پس

$$u^\circ(X) = p - u^p(X).$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h,$$

$$\frac{\partial u^\circ(X)}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u^p(X)}{\partial \mathbf{n}} = h,$$

پس

$$\frac{\partial u^\circ(X)}{\partial \mathbf{n}} = h - \frac{\partial u^p(X)}{\partial \mathbf{n}}.$$

^{۳۹} Natural boundaries

^{۴۰} Essential

^{۴۱} Outward normal

۵.۳ مثال‌های عددی

در این بخش، جواب‌های به‌دست آمده از روش روش درونیابی نقطه شعاعی و روش درونیابی نقطه شعاعی توسعه یافته با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در حل این مسایل تقریب RBF با پایه‌های خطی به‌کار رفته است.

۱.۵.۳ مساله یک بعدی

مساله یک بعدی به‌صورت

$$\begin{aligned} u_{,xx} + b(x) &= 0 \quad \text{in } (0, 1), \\ b(x) &= \begin{cases} (2\alpha^2 - 4[\alpha^2(x - 0.5)]^2) \exp(-[\alpha(x - 0.5)]^2) & \text{for } 0.42 \leq x \leq 0.58, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 1, \quad \alpha = 50. \end{aligned} \quad (44.3)$$

را در نظر بگیرید.

این معادله را ابتدا با روش درونیابی نقطه شعاعی و سپس با روش درونیابی نقطه شعاعی توسعه یافته حل می‌کنیم، و با بکارگیری برنامه مطلب نمودار جواب‌ها را روی دامنه رسم می‌کنیم. البته تمامی مراحل حل به‌صورت دستی بسیار زمان‌بر است بنابراین قسمت‌های مهم مساله که به‌صورت دستی قابل حل می‌باشد، نوشته می‌شود.

برای به‌دست آوردن جواب تقریبی این مثال با روش درونیابی نقطه شعاعی با تقریب توابع پایه شعاعی و ۲۰ گره در دامنه به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

تابع $u(x)$ در نقطه x در دامنه مساله به‌صورت

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{20} \phi_j(x) a_j, \quad (45.3)$$

تقریب زده می‌شود، که ۲۰ تعداد کل گره‌ها در دامنه، a_j ضرایب ثابت و ϕ_j توابع شکل می‌باشند. توابع شکل برای تقریب RBF، برای مسایل یک بعدی به‌طور کلی به‌صورت

$$\phi_j(x) = \exp(-\epsilon(x - X(j))^2),$$

تعریف می‌شود. بنابراینچه در مقدمه در دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه گفته شد، می‌توان روش‌های فرم قوی و فرم ضعیف را برای حل مساله (۴۴.۳) به‌کار برد. از آنجا که روش RPIM، روش فرم

ضعیف سراسری می‌باشد، فرم ضعیف مساله را روی دامنه به کار می‌بریم، پس

$$\int_0^1 w \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + b(x) \right) dx = 0,$$

با ضرب تابع تست در عبارت پیرانتزی و انتقال دادن عبارتی که شامل تابع منبع می‌باشد، به سمت راست داریم:

$$\int_0^1 w \frac{d^2 u}{dx^2} dx = - \int_0^1 w b(x) dx,$$

با استفاده از رابطه جز به جز در ریاضیات به فرم ضعیف به صورت

$$\left[w \frac{du}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = - \int_0^1 w b(x) dx. \quad (46.3)$$

می‌رسیم. با جایگذاری تابع تقریب (۴۵.۳)، در معادله (۴۶.۳) داریم:

$$\left[w \frac{d \left(\sum_{j=1}^{20} a_j \phi_j \right)}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{d \left(\sum_{j=1}^{20} a_j \phi_j \right)}{dx} dx = - \int_0^1 w b(x) dx. \quad (47.3)$$

چون تابع آزمون را براساس تقریب RBF در نظر گرفته‌ایم، تابع تست را نیز براساس توابع شکل تقریب توابع پایه شعاعی در نظر می‌گیریم، بنابراین $w = \phi_i$ در واقع برای اینکه به فرم ماتریسی مساله برسیم باید رابطه (۴۷.۳)، را به ازای ۲۰ تابع تست، که ۲۰ تعداد کل گره‌های دامنه می‌باشد، داشته باشیم. بنابراین با در نظر گرفتن ۲۰ تابع آزمون $w = \phi_i, i = 1, 2, \dots, 20$ ، ۲۰ معادله خواهیم داشت و متناظر با آن ۲۰ مجهول $a_j, j = 1, 2, \dots, 20$ داریم. در نتیجه ماتریس نهایی دستگاه معادلات، ماتریسی 20×20 خواهد بود. پس معادله (۴۷.۳) به ۲۰ معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{20} a_j \left(\left[\phi_i \frac{d\phi_j}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \right) = - \int_0^1 \phi_i b(x) dx \quad i = 1, \dots, 20.$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات به صورت

$$K.C = F, \quad (48.3)$$

می‌باشد، که در آن درایه‌های ماتریس K و بردار F به صورت:

$$K_{ij} = \left[\phi_i \cdot \frac{d\phi_j}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \cdot \frac{d\phi_j}{dx} dx,$$

$$F_i = - \int_0^1 \phi_i(x) \cdot b(x) dx.$$

هستند. بردار مجهولات در (۴۸.۳)، به صورت $C = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{20}]$. برای سطرهای متناظر با گره‌های $x_i \in \Gamma_D$ روی مرز درایه‌های ماتریس K و بردار F به صورت

$$\begin{cases} K_{ij} = \phi_j(X(i)), \\ F_1 = 0, \\ F_{20} = 1. \end{cases}$$

به دست می‌آید. برای به دست آوردن ضرایب مجهول طرفین رابطه (۴۸.۳) را در معکوس ماتریس مربعی K ضرب می‌کنیم. داریم:

$$C = K^{-1}F.$$

حال با داشتن ضرایب ثابت می‌توان جواب تقریبی را در هر نقطه از دامنه‌ی مساله به دست آورد. به دلیل محاسبات سنگین و زمانبر با استفاده از متلب می‌توانیم نمودار جواب دقیق و بدون شبکه درونیابی نقطه شعاعی را در کل دامنه به دست آوریم. نمودار این دو جواب در شکل ۱.۳ نشان داده شده است.

برای حل معادله به روش درونیابی نقطه شعاعی توسعه یافته، روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -\delta(x), \\ u^p(x) = \int_0^1 g(x-x')b(x')dx', \end{cases}$$

از روابط مشخص است، برای به دست آوردن جواب خصوصی نیاز داریم تابع گرین را به دست آوریم، برای این کار فرض می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{dg(x)}{dx}, \quad (49.3)$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -\delta(x).$$

با توجه به تعریف دلتای دیراک داریم

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{cases} \infty & x = 0, \\ 0 & x \neq 0. \end{cases}$$

رابطه‌ای که به آن رسیدیم، مشتق اول تابع پله می‌باشد. پس $f(x)$ ، به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \text{متناهی} & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۴۹.۳) داریم:

$$R(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x \frac{dg(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ x & x > 0. \end{cases}$$

پس تابع گرین برای این مساله به صورت

$$g(x) = -R(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ -x & x > 0. \end{cases}$$

به دست می‌آید.

جواب همگن در معادله همگن به صورت

$$u_{xx}^{\circ}(x) = 0,$$

صدق می‌کند. برای حل معادله همگن از روش بدون شبکه درونیابی نقطه شعاعی استفاده می‌کنیم.

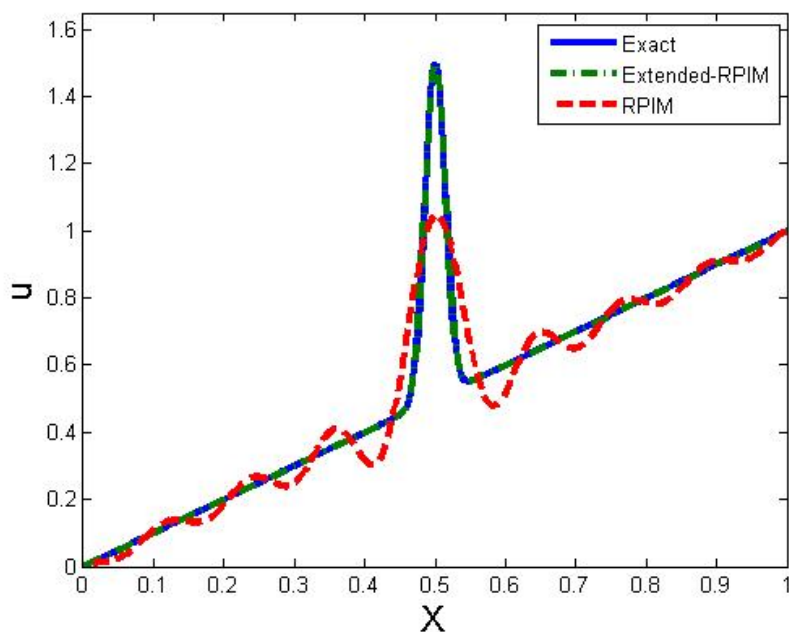
تذکر ۱.۵.۳. تمامی مراحل حل توسط روش بدون شبکه، برای معادله همگن نظیر مراحل حلی است که روش بدون شبکه برای معادله اصلی به کار می‌برد، اما چون در معادله همگن، تابع منبع مقدار ندارد، سطرهای مربوط به نقاطی که روی مرز قرار ندارند، برای بردار F صفر می‌باشد.

شرایط مرزی معادله همگن با توجه به بخش ۴.۳ به صورت

$$u^{\circ}(0) = 0,$$

$$u^{\circ}(1) = 1 - u^p(1).$$

به دست می‌آید. حل بقیه قسمت‌های مساله به صورت دستی زمان‌بر است، بنابراین با بکارگیری برنامه متلب، نمودار جواب درونیایی نقطه شعاعی توسعه یافته در شکل ۲.۳ رسم شده است. همان‌طور که از شکل ۲.۳ مشاهده می‌شود، نمودار جواب بدون شبکه توسعه یافته با نمودار جواب



شکل ۲.۳: جواب بدون شبکه توسعه یافته، جواب دقیق و جواب بدون شبکه در مثال یک بعدی

دقیق اختلاف چندانی ندارند، در صورتی که جواب بدون شبکه اختلاف قابل ملاحظه‌ای با جواب دقیق دارد. پس به این نتیجه می‌رسیم که روش بدون شبکه توسعه یافته نسبت به روش بدون شبکه از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد.

نتیجه گیری

در این پایان نامه، هدف ما بررسی حل عددی مسایل مقدار مرزی بود. بیشتر پدیده‌ها در طبیعت به کمک معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرالی یا معادلات جبری بیان می‌شوند، ولی به دلیل پیچیدگی‌های بسیاری از مسایل تنها قادر به حل تحلیلی و دقیق برخی از این معادلات هستیم. ریاضیدانان برای حل این معادلات، روش‌های عددی گوناگونی از جمله روش تفاضلات متناهی، المان‌های مرزی، حجم‌های متناهی را ابداع کردند. روش عددی جدیدی که اخیراً مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته روش‌های بدون شبکه می‌باشد، که برای حل انواع مسایل خطی و غیرخطی و مسایلی که دارای تغییر شکل زیاد در دامنه می‌باشند مفید است. در این پایان نامه به معرفی روش‌های بدون شبکه می‌پردازیم و در انتها با حل مثال عددی نشان می‌دهیم روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته دقت قابل قبولی نسبت به روش بدون شبکه‌ی معمولی دارد.

مراجع

- [1] G.R.Liu, and Y.T.Gu, (2005), "**An Introduction To Meshfree Methods And Their Programming**", **Spring**, Newyork.
- [2] Verka Prolović, Zoran Bonić,(2008), "Finite Difference Method Application in Design of Foundation Girder of Variable Cross-Section Loaded on Ends" **Facta Universitatis, Architecture and Civil Engineering**, 179-185.
- [3] T. Belytschko, N. Moes, S. Usui, C. Parimi, (2001), "Arbitrary discontinuities in finite elements," , **Int. J. Numer. Methods Engrg.** **50**, pp. 993-1013.
- [4] A. Huerta, S. Fernandez-Mendez, (2000), " Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods ", **Int. J. Numer. Methods Engrg.** **48**, 1615-1636.
- [5] A. ZENISEK, (1973), "Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method," , **J. Approximation Theory**, **7**, pp. 334-351.
- [6] A. Prokić , D. Lukić , (2007), "Dynamic behaviorof braced thin walled beams, International Applied Mechanics", **Vol.43**, pp. 1290–1303.
- [7] B. Tabarrok, Y. Xiong, (1991), "Finite element formulations that include particular solutions of govering equations" **Int. J. Numer. Methods Engrg.** **31**, 777–787.
- [8] Alain Tramecon, Patrick de Luca, Christophe Binetruy and Jörg Kuhnert, (2006), "Finite Pointset Method (FPM): A Meshfree Approach for Incompressible Flow Simulations Applied to Composite Materials",**The 8th International Conference on Flow Processes in Composite Materials (FPCM8) Douai, FRANCE**, 11 – 13.
- [9] G. STRANG, (1972), "Approximation in the finite element method, Number.", **Math.19**, pp, 81-98.
- [10] J.J. MONAGHAN, (1994), " Simulating free surface flows with SPH ", **J. Comput. Phys.**, **vol. 110**, pp.399.
- [11] J. KUHNERT, (2000), "An upwind finite pointset method for compressible Euler and Navier-Stokes equations", **ITWM, Kaiserslautern, Germany**.
- [12] John Dolbow and Ted Belytschko, (1998), "An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method ",**Master's Thesis, Chalmers University of Technology**.

- [13] Lu, Y.Y., T. Belytschko and L.Gu (2002), "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple and less costly alternative to the finite element and boundary element methods", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 113, 397–414.
- [14] S.N.Atluri and S.Shen (2002), "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple and less costly alternative to the finite element and boundary element methods", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, pp, 11–52.
- [15] C. Zuppa, (2003), "Error estimates for moving least square approximations" Bulletin of the Brazilian Mathematical Society , **vol. 34, pp. 231-249.**
- [16] D. Shepard, (1968), "A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data" **In Proceedings of the 23th National Conferance ACM, pp. 517-524.**
- [17] G. R. Liu, (2003), "**Mesh free methods: moving beyond the finite element method**" ed: CRC Press, Boca Raton.
- [18] J. Dolbow and T. Belytschko, (1998), "An introduction to programming the meshless Element FreeGalerkin method", **Archives of Computational Methods in Engineering, vol. 5, pp. 207-241.**
- [19] Jiun-Shyan Chen, Dongdong Wang, Stanley B. Dong, (2003), " An extended mesh-free method for boundary value problems" , **Department of Civil and Environmental Engineering, University of California – Los Angeles, 5731G Boelter Hall, Los Angeles, CA 90095-1593, USA.**
- [20] P. Lancaster and K. Salkauskas, (1981), "Surfaces generated by moving least squares methods", **Mathematics of Computation, vol. 37, pp. 141-158.**
- [21] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl, (1996), "Meshless methods: an overview and recent developments" **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139, pp. 3-47.**
- [22] X. Jin, G. Li, and N. R. Aluru, (2001), "On the equivalence between least-squares and kernel approximations in meshless methods", **Computer Modeling in Engineering and sciences, vol. 2, pp. 447-462,.**
- [23] X. Zhuang,(2010), "**Meshless methods: theory and application in 3D fracture modelling with level sets**", Doctoral thesis, Durham University.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Spline	اسپلاین
Stanley	استنلی
Partition	افراز
Initial	اولیه
Finite Element	المان محدود
Experiment	آزمایش
Noise	اغتشاش
Expecte Value	امیدریاضی
Probablity Measure	اندازه احتمال
Element	المان
Meshfree Method	بدون شبکه
Partition	بخش
Extended	پیشرفته
Basis	پایه
Window	پنجره
Distribution	توزیع
Step Function	تابع پله
Green Function	تابع گرین
Partioal	جزیی
Term	جمله
Jiun-Shyan Chen	جان-شان چن
Volume	حجم

Particular	خاص
Kronker	دلتای کرانکر
Delta Dirac	دلتای دیراک
Interpolation	درونیابی
Geological	زمین‌شناسی
Biological	زیست‌شناسی
Boundary Condition	شرایط مرزی
Chemical	شیمیایی
Radial	شعاعی
Shape	شکل
Coefficient	ضرایب
Essential	ضروری
Lagrange Multipliers	ضرایب لاگرانژ
Kernel	کرنل
Least	کمترین
Gaussian	گاوسی
Constraint	محدودیت
Natural Boundaries	مرزهای طبیعی
Boundary	مرزی
Ordinary	معمولی
Squares	مربعات
Support	محمل
Matrix	ماتریس
Eigen Value	مقدار ویژه
Elementary	مقدماتی
Unknown	مجهول
Moment	ممان
value	مقدار
Finite Point	نقاط متناهی

Outward Normal	نرمال عمود
Domain Of Influence	ناحیه تاثیر
Node	نقاط
Smooth	هموار
Nucler	هسته
Convergence	همگرایی
Homogeneous	همگن
Wang	وانگ

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adapt	سازگار
Approximate	تقریب
Boundary	مرزی
Biological.....	زیست شناسی
Basis.....	پایه
Boundary	مرزی
Condition.....	شرایط
Chemical	شیمیایی
Coefficient	ضرایب
Constraint	محدودیت
Distribution.....	توزیع
Delta Dirac.....	دلتای دیراک
Dilation Parameter.....	پارامتر اتساع
Domain Of Influnce.....	ناحیه تاثیر
Differentioal	دیفرانسیل
Element	المان
Essentioal.....	ضروری
Extended	پیشرفته
Finite.....	متناهی
Green Function	تابع گرین
Gram Matrix.....	ماتریس گرام
Homogeneous.....	همگن

Initial	اولیه
Interpolation	درونیایی
Jiun-Shyan Chen	جان-شان چن
Kernel	کرنل
Least	کمترین
Local	موضعی
Linear	خطی
Lagrange Multipliers	ضرایب لاگرانژ
Mesh Free	بدون شبکه
Moving	بدون جابجایی
Moment	ممان
Matrix	ماتریس
Node	گره
Natural Boundaries	مرزهای طبیعی
Ordinary	معمولی
Outward Normal	نرمال عمود
Partioal	جزیی
Pascales	پاسگال
Partition	بخش
Particle	نقاط
Particular	خاص
Radial	شعاعی
Reproducing	تولید
Shape	شکل
Step Function	تابع پله
Squarese	مربعات
Support	محمل
Smooth	هموار
Solution	جواب

Stanely	استنلی
Spline	اسپلاین
Term	جمله
Trapezodal Rule	قانون ذوزنقه ای
Unknown	مجهول
Unity	یکه
Volume	حجم
Window	پنجره
Wang	وانگ

Surname: Haghi

Name: Somayeh

Title: Meshfree method for boundary value problems

Supervisor: Dr.A. Mesforush

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Shahrood University

Faculty of sciences

Date: 2013

Number of pages: 71

Keywords: Shape function; Weight function; Particular solution; Homogeneous solution; Meshfree; MLS; FEM; Boundary value problem

Abstract

In this thesis...

An extended meshfree method is presented for treating boundary value problems, where the total solution is expressed by a combination of particular and homogeneous solutions, each of which is assigned a specific role. The particular solution is any analytical (or numerical) expression satisfying the governing differential equation containing the source term but not necessarily the boundary conditions. A general method is presented for constructing this solution. Thus, the problem is reduced to a homogeneous equation where the original boundary conditions are modified by the particular solution. Herein, the meshfree method is used to solve this homogeneous equation, which involves a lower order behavior so that a relatively coarse discretization is acceptable. Several boundary value problems from potential theory as well as from shear deformable plate theory are solved, where linear exactness [Int. J. Numer. Methods Engrg. 50 (2001) 435; Int. J. Numer. Methods Engrg. 53 (2002) 2587] and bending exactness [Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193 (2004) 1065], respectively, are imposed in their meshfree approximation fields. Numerical results demonstrate that this extended meshfree approach significantly improves the solution accuracy with commensurately less computational effort compared to the conventional meshfree formulation.



Shahrood University
Faculty of sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Meshfree method for boundary value problems

Supervisor
Dr.A. Mesforush

by
Somayeh Haghi

2013