دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی محض، گرایش جبر**

**عنوان**

# گروه‌های متناهی با رده‌های تزویج خاص

استاد راهنما

**دکتر سید حیدر جعفری**

دانشجو

**رقیه ملک پور**

بهمن ۹۲

به‌نام بی‌نامی که جان را فکرت آموخت

«الا بذکر الله تطمئن القلوب»

## خدای مهربانم...[1]

**همیشه** به یاری تو امید دارم...

**کمکم کن** که رشته‌ی امیدم نگسلد...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

## فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **رقیه ملک‌پور** رشته ریاضی محض گرایش جبر تحت عنوان **گروه‌های متناهی با رده‌های تزویج خاص** که در تاریخ ۹۲/۱۱/۱۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول ( با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۵ ) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹ ) ۲ـ بسیار خوب ( ۱۸/۹۹ ـ ۱۸ )

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶ ) ۴ـ قابل قبول ( ۱۵/۹۹ ـ ۱۴ )

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

| عضو هیأت داوران | نام ونام خانوادگی | مرتبهٔ علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| ۱ـ استادراهنما | دکتر سید حیدر جعفری | استادیار | |
| ۲ـ استاد مشاور | | | |
| ۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی | دکتر علیرضا خدامی | استادیار | خدامی |
| ۴ـ استاد ممتحن | دکتر مهدی‌رضا خورسندی | استادیار | |
| ۵ ـ استاد ممتحن | دکتر اسدالله فرامرزی | استادیار | |

رئیس دانشکده :دکتر احمد زیره امضاء

# تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم که لحظه ای بدون آنها وجود نخواهم داشت...

# سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای عزیز و مهربانم، جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیز و مهربانم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که همیشه بهترین یاور و پشتیبان من هستند.

رقیه ملک پور

بهمن ۹۲

# تعهدنامه

اینجانب **رقیه ملک‌پور** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **گروه‌های متناهی با رده‌های تزویج خاص** ، تحت راهنمایی **دکتر سید حیدر جعفری** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه ملک‌پور
بهمن ۹۲

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا رده‌های تزویج در گروه‌های متناهی را تعریف نموده و این ویژگی که حاصل‌ضرب هر دو رده تزویج غیرمعکوس از گروه $G$، یک رده تزویج از $G$ شود را در قالب شرط $A$ و هم‌چنین این ویژگی که به ازای هر $x, y \in G$ که $x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G)$ تساوی $x^G y^G = (xy)^G$ برقرار باشد را در قالب شرط $B$ بیان می‌کنیم.
در ادامه گروه‌های کامینا، گروه‌های فروبنیوس و نیز رابطه ایزوکلینیسم و ایزوکلینیک را در گروه‌های متناهی تعریف می‌کنیم و سپس ارتباط آن‌ها را با شرط‌های $A$ و $B$ مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.



کلمات کلیدی: رده تزویج، گروه آفین، گروه کامینا، ایزوکلینیسم، گروه فروبنیوس

# پیشگفتار

تاکنون ریاضیدانان در زمینه حاصل‌ضرب رده‌های تزویج در گروه‌های متناهی و نامتناهی مطالعات و بررسی‌های مختلف و زیادی انجام داده‌اند و به نتایج قابل توجهی دست یافته‌اند. از جمله در سال ۱۹۸۳، ریاضیدان آلمانی مینفرد دروست [۲] [۷] حاصل‌ضرب رده‌های تزویج در گروه‌های متقارن نامتناهی را مورد مطالعه قرار داد. در سال ۱۹۸۵، آراد و هرزوگ [۳] [۲] توان‌ها و حاصل‌ضرب رده‌های تزویج در گروه‌های ناآبلی متناهی ساده ($FINASIG$) و در گروه‌های نامتناهی را نیز مورد بررسی قرار دادند و در این مطالعات و بررسی‌ها از قضیه مهم زیر که در مرجع [۳] آمده است استفاده زیادی نمودند.

فرض کنید $G$ یک $FINASIG$ و $C \neq 1$ یک رده تزویج در $G$ باشد. در این‌صورت عدد صحیح مثبت $m$ی وجود دارد که $C^m = G$.

در سال ۱۹۹۳، لیو [۴] [۱۵] به مطالعه حاصل‌ضرب رده‌های تزویج دوری در گروه‌های $PSL(n, F)$ پرداخت. در سال ۱۹۹۵، ریاضیدان روسی گاردیو [۵] [۸] مطالعات آراد و هرزوگ را روی گروه‌های جبری و نیز در سال ۲۰۰۵، گاردیو [۹] چنین مطالعاتی را روی گروه‌های خطی به انجام رسانید. هم‌چنین از مطالعات و بررسی‌هایی که در سال ۲۰۱۳، در مورد حاصل‌ضرب رده‌های تزویج انجام گرفت می‌توان به مطالعات گرولک و همکاران [۶] [۱۱] روی حاصل‌ضرب رده‌های تزویج در گروه‌های متناهی و گروه‌های جبری ساده اشاره داشت. حال در این پایان‌نامه که از [۵] گرفته شده است گروه‌های متناهی $G$ی را معرفی و رده‌بندی می‌نماییم که حاصل‌ضرب هر دو رده تزویج غیرمعکوس از $G$ یک رده تزویج از $G$ شود. این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است که

- در فصل اول، تعاریف و قضایایی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است.
- در فصل دوم، ابتدا حاصل‌ضرب رده‌های تزویج در گروه‌های متناهی را بررسی نموده و این ویژگی که حاصل‌ضرب هر دو رده تزویج غیرمعکوس از گروه $G$، یک رده تزویج از $G$ شود را در قالب شرط $A$ و هم‌چنین این ویژگی که به ازای هر $x, y \in G$ که $x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G)$ تساوی $x^G y^G = (xy)^G$ برقرار باشد را در قالب شرط $B$ بیان می‌کنیم سپس قضایا و نتایجی را در این زمینه بیان کرده و به اثبات می‌رسانیم. در ادامه به معرفی گروه‌های کامینا [۷] پرداخته و نشان می‌دهیم که هر $p$-گروه فوق ویژه، گروه کامیناست و هم‌چنین اگر $G$ یک $p$-گروه کامینا باشد آنگاه

---

[۲] Manfred Droste

[۳] Arad and Herzog

[۴] Lev

[۵] Gordeev

[۶] Guralnick

[۷] Camina group

در شرط $A$ صدق می‌کند.
در پایان رابطه ایزوکلینیسم [۸] و ایزوکلینیک [۹] در گروه‌های متناهی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر گروهی در شرط $B$ صدق کند آنگاه هر گروه ایزوکلینیک با آن نیز در این شرط صدق می‌کند.

- در فصل سوم، گروه‌های ناآبلی غیرپوچ‌توانی را که در شرط $B$ صدق می‌کنند مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم و به بررسی دقیق‌تر ساختار و ویژگی‌های گروه‌های فروبنیوس [۱۰] می‌پردازیم. در ادامه به معرفی دو گروه $F^{\times} \rtimes F^{+}$ و $Q_۸ \rtimes E_۹$ پرداخته و ثابت می‌کنیم $F^{\times} \rtimes F^{+}$ و $Q_۸ \rtimes E_۹$ گروه‌های فروبنیوس هستند. سرانجام نشان می‌دهیم که این دو گروه فروبنیوس در شرط $A$ نیز صدق می‌کنند.

---

[۸] Isoclinism

[۹] Isoclinic

[۱۰] Frobenius group

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# پیش‌نیازها و تعاریف مقدماتی

این فصل برخی از تعاریف و مفاهیمی را بیان می‌کند که دانستن آن‌ها برای مطالعه فصل‌های بعدی ضروری است.

## ۱.۱ عمل گروه‌ها بر مجموعه‌ها و برخی تعاریف مقدماتی

**تذکر ۱.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. عضو همانی و نیز زیرگروه بدیهی از $G$ را با ۱ یا $1_G$ و هم‌چنین مجموعه $G-\{1\}$ را با $G^\#$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in G$ آنگاه زیرگروه $\langle x \rangle$ از $G$ را زیرگروه دوری تولید شده توسط $x$ می‌گوییم. هنگامی‌که $H$ یک زیرمجموعه، یک زیرگروه و یا یک زیرگروه نرمال از $G$ باشد به ترتیب آن‌ها را با $H \subseteq G$، $H \leq G$ و $H \trianglelefteq G$ و اگر $H$ مشمول اکید در $G$ باشد آنگاه به ترتیب آن‌ها را به‌صورت $H \subset G$، $H < G$ و $H \triangleleft G$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $N \subseteq G$. در این‌صورت $N$ را یک مجموعه نرمال در $G$ گوییم هرگاه به ازای هر $g \in G$، $gN = Ng$.

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in G$، $x^y = y^{-1}xy$ را مزدوج عنصر $x$ با $y$ می‌گوییم و $x^G = \{g^{-1}xg | g \in G\}$ را رده $G$-تزویج عنصر $x$ (یا به‌عبارت دیگر رده تزویج عنصر $x$ در $G$) می‌نامیم. به‌ویژه اگر $x \in G$ و $H \leq G$ آنگاه $x^H = \{x^h | h \in H\}$ رده $H$-تزویج عنصر $x$ و نیز $[x, H]$ مجموعه‌ی همه‌ی $[x, h]$ها که $h \in H$ را نشان می‌دهد.

**لم ۴.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in G$،*

$$x^G = y^G \Longleftrightarrow x \in y^G.$$

***برهان.*** فرض کنید $x, y \in G$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} x^G = y^G &\Longleftrightarrow \forall g \in G \quad \exists h \in G \quad g^{-1}xg = h^{-1}yh \\ &\Longleftrightarrow x = gh^{-1}yhg^{-1} \\ &\Longleftrightarrow x \in y^G. \end{aligned}$$

□

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in G$،

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$$

را یک جابه‌جاگر در $G$ می‌نامیم. هم‌چنین به‌آسانی دیده می‌شود که اگر $x \in G$ و $H \leq G$ آنگاه به ازای هر $h \in H$، $x^h = x[x, h]$ و بنابراین $x^H = x[x, H]$.

**تعریف ۶.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت زیرگروه تولید شده توسط مجموعه‌ی همه‌ی جابه‌جاگرها را زیرگروه جابه‌جاگر $G$ یا گروه مشتق $G$ می‌نامیم و با علامت $G'$ یا $[G, G]$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$G' = [G, G] = \langle \{[x, y] \mid x, y \in G\} \rangle.$$

**لم ۷.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $H \leq G$. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in G$،*

$$x^H y^H = (xy)^H \quad \Longleftrightarrow \quad [x, H]^y [y, H] = [xy, H]. \tag{۱.۱}$$

***برهان.*** فرض کنید $x^H y^H = (xy)^H$. بنا به تعریف ۵.۱.۱، $x^H = x[x, H]$ ، $y^H = y[y, H]$ و هم‌چنین $(xy)^H = xy[xy, H]$ پس

$$x^H y^H = x[x, H]y[y, H] = xy[x, H]^y[y, H].$$

بنابراین طبق فرض $xy[x, H]^y[y, H] = xy[xy, H]$ و در نتیجه $[x, H]^y[y, H] = [xy, H]$.
به‌عکس فرض کنید $[x, H]^y[y, H] = [xy, H]$. در این‌صورت با ضرب از چپ $xy$ در دو طرف این تساوی داریم

$$xy[x, H]^y[y, H] = x[x, H]y[y, H] = x^H y^H \tag{۲.۱}$$

و

$$xy[xy, H] = (xy)^H. \tag{۳.۱}$$

لذا تساوی (۲.۱) برابر تساوی (۳.۱) است. □

**تعریف ۸.۱.۱.** گروه $G$ و مجموعه‌ی ناتهی $X$ را در نظر بگیرید. فرض کنید به ازای هر $g$ از $G$ و هر $x$ از $X$، عضو یکتایی از $X$ که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به‌طوری‌که

(۱) به ازای هر $x$ از $X$، $x \bullet 1 = x$ و

(۲) به ازای هر $g_1$ و $g_2$ از $G$ و هر $x$ از $X$، $x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$.

در این‌صورت می‌گوییم $G$ بر $X$ (از راست) عمل می‌کند و $\bullet$ را عمل $G$ بر $X$ می‌گوییم. برای سهولت در نوشتن، به‌جای $x \bullet g$ از $xg$ استفاده می‌کنیم.

**تعریف ۹.۱.۱.** فرض کنید گروه $G$ بر مجموعه‌ی ناتهی $X$ عمل کند و $x \in X$. در این‌صورت مجموعه‌ی $\{g \in G \mid xg = x\}$ را پایدارساز $x$ در $G$ می‌نامیم و با علامت $St_G(x)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** فرض کنید گروه $G$ بر مجموعه‌ی ناتهی $X$ عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در $X$ چنین تعریف می‌کنیم

می‌گوییم $x_1 \sim x_2$ در صورتی‌که به ازای عضوی از $G$ مانند $g$، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در $X$ است. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل یا گاهی از اوقات یک $G$–مدار می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده هم‌ارزی شامل $x$ را مدار $x$ در $G$ می‌نامیم و آن را با علامت $Orb_G(x)$ (یا مختصرا با $Orb(x)$ ) نشان می‌دهیم. با توجه به این تعریف، $Orb_G(x) = \{xg \mid g \in G\}$.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** فرض کنید گروه $G$ بر مجموعه‌ی ناتهی $X$ عمل کند. در این‌صورت عمل را متعدی می‌گوییم هرگاه $X$ تنها مدار عمل باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر دو عضو $X$ مانند $x_1$ و $x_2$ عضوی از $G$ مانند $g$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_1 g = x_2$. گاهی از اوقات به‌جای اینکه بگوییم عمل متعدی است خواهیم گفت $G$ بر مجموعه‌ی $X$ به‌طور متعدی عمل می‌کند.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** فرض کنید گروه $G$ بر مجموعه‌ی ناتهی $X$ عمل کند. در این‌صورت عمل را باوفا می‌گوییم هرگاه $\bigcap_{x \in X} St_G(x) = 1$. به عبارت دیگر، به ازای هر دو عضو $G$ مانند $g_1$ و $g_2$ عضوی از $X$ مانند $x$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x.g_1 \neq x.g_2$.

**تعریف ۱۳.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $S \subseteq G$ و $H \leq G$. در این‌صورت ضرب‌گر راست[1] زیرمجموعه‌ی $S$ در زیرگروه $H$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M_H(S) = \{y \in H \mid Sy = S\}. \tag{۴.۱}$$

هم‌چنین در صورتی‌که $G$ متناهی باشد تعریف زیر را نیز برای ضرب‌گر راست زیرمجموعه‌ی $S$ در زیرگروه $H$ داریم

$$M_H(S) = \{y \in H \mid Sy \subseteq S\}.$$

**گزاره ۱۴.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $S \subseteq G$ و $H \leq G$. در این‌صورت $M_H(S)$ یک زیرگروه از $H$ و $S$ یک اجتماع از هم‌دسته‌های $sM_H(S)$ است به‌طوری‌که $s \in S$. از این‌رو $|M_H(S)|$ مرتبه $S$ را عاد می‌کند.*

[1] Right multiplier

**برهان.** طبق تعریف ۱۳.۱.۱، به‌وضوح $M_H(S) \subseteq H$. چون $M_H(S)$ شامل عنصر همانی از $H$ است پس $M_H(S) \neq \varnothing$. فرض کنید $x, y \in M_H(S)$. بنابراین

$$Sx = S \quad , \quad Sy = S. \tag{۵.۱}$$

در این‌صورت با ضرب از راست $y^{-۱}$ در دو طرف تساوی‌های (۵.۱) داریم

$$Sxy^{-۱} = Sy^{-۱} \quad , \quad S = Sy^{-۱}.$$

لذا $S = Sxy^{-۱}$ و بنابراین $xy^{-۱} \in M_H(S)$ در نتیجه $M_H(S) \leq H$. با توجه به تعریف ضرب‌گر راست، $M_H(S)$ بر $S$ (با ضرب) به‌صورت زیر عمل می‌کند.

$$\bullet : S \times M_H(S) \longrightarrow S.$$

$$(s, y) \longmapsto s.y$$

پس $S$ برابر اجتماع مدارهای مجزاست و $S = \cup\{s.y | y \in M_H(S)\}$. بنابراین $S = \bigcup_{s\in S} sM_H(S)$ و در نتیجه $|M_H(S)| \,|\, |S|$. $\square$

**گزاره ۱۵.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $S \subseteq G$ و $H \leq G$. در این‌صورت اگر $S$، $H$-پایا (با عمل تزویج) باشد یعنی به ازای هر $h \in H$، $S^h = S$ آنگاه $M_H(S)$ در $H$ نرمال است. به‌ویژه به ازای هر رده تزویج $x^G$ در $G$، $M_G(x^G)$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است.*

**برهان.** چون $S$، $H$-پایاست پس به ازای هر $h \in H$، $S = hSh^{-۱}$ یعنی به ازای هر $h \in H$، $hS = Sh$ و چون به ازای هر $y \in M_H(S)$، $Sy = S$ پس

$$S = hSh^{-۱} = hSyh^{-۱} \quad \Longrightarrow Shyh^{-۱} = S.$$

بنابراین $hyh^{-۱} \in M_H(S)$ و در نتیجه $M_H(S) \trianglelefteq H$. حال از آن‌جایی‌که $x^G$ یک مجموعه $G$-پایاست لذا $M_G(x^G)$ نیز یک زیرگروه نرمال از $G$ است.

$\square$

**لم ۱۶.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی و $e$ اپی‌مورفیسم طبیعی $G \longrightarrow \bar{G} = \dfrac{G}{Z(G)}$ باشد و $a, b \in G$. در این‌صورت*

$$a^G Z(G) = b^G Z(G) \Longleftrightarrow \bar{a}^{\bar{G}} = \bar{b}^{\bar{G}}.$$

**برهان.** فرض کنید $a^G Z(G) = b^G Z(G)$. در این‌صورت $g \in G$ و $z \in Z(G)$ وجود دارد که

$$a = b^g z \Longrightarrow aZ(G) = b^g Z(G) = (bZ(G))^{gZ(G)}$$
$$\Longrightarrow (aZ(G))^{\bar{G}} \subseteq (bZ(G))^{\bar{G}}.$$

به‌طور مشابه $(bZ(G))^{\bar{G}} \subseteq (aZ(G))^{\bar{G}}$. بنابراین $\bar{a}^{\bar{G}} = \bar{b}^{\bar{G}}$.
به‌عکس، فرض کنید $\bar{a}^{\bar{G}} = \bar{b}^{\bar{G}}$. چون $\bar{a}^{\bar{G}} = \bar{b}^{\bar{G}}$ پس $e^{-۱}(\bar{a}^{\bar{G}}) = e^{-۱}(\bar{b}^{\bar{G}})$ در نتیجه

$$a^G Z(G) = b^G Z(G).$$

□

**قضیه ۱۷.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی و $H$ یک $p$-زیرگروه نرمال از $G$ باشد. در این‌صورت برای هر $p$-سیلو زیرگروه $P$ از $G$، $P = HP$ و $H \subseteq P$.*

***برهان.*** از آن‌جایی‌که $H \trianglelefteq G$ لذا $HP \leq G$ و $|HP|$ توانی از $p$ است و $P \leq HP$ در نتیجه $P = HP$ و لذا $H \subseteq P$. □

**قضیه ۱۸.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک $p$-گروه باشد و $H < G$. در این‌صورت $H < N_G(H)$.*

***برهان.*** به [۱] صفحه ۷۱ رجوع شود. □

**قضیه ۱۹.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $N \lhd G$. در این‌صورت هر $p$-سیلو زیرگروه از $\frac{G}{N}$ به‌فرم $\frac{PN}{N}$ است که $P$ یک $p$-سیلو زیرگروه از $G$ می‌باشد.*

***برهان.*** به [۱] صفحه ۷۶ رجوع شود. □

**لم ۲۰.۱.۱.** ***(قانون مدولی ددکیند[۲])*** *فرض کنید $G$ یک گروه و $A$، $B$ و $C$ زیرگروه‌هایی از $G$ باشند که $B \leq A$. در این‌صورت $(BC) \cap A = B(C \cap A)$.*

***برهان.*** فرض کنید $d \in C \cap A$ و $bd \in BC$ که $b \in B$ و $d \in C$. چون $B \subseteq A$ پس $bd \in A$ لذا $B(C \cap A) \subseteq (BC) \cap A$. اکنون فرض کنید $a = bc \in (BC) \cap A$. چون $B \subseteq A$ پس $c = b^{-1}a \in C \cap A$ و درنتیجه $a = bc \in B(C \cap A)$. لذا $(BC) \cap A \subseteq B(C \cap A)$ و بنابراین لم برقرار است. □

**تعریف ۲۱.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک $p$-گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ را آبلی مقدماتی (یا مختصرا مقدماتی) می‌نامیم هرگاه $G$ آبلی و نیز مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی $G$ عدد اول $p$ باشد.

**تعریف ۲۲.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال از $G$ را زیرگروه فراتینی $G$ می‌نامیم و با $\Phi(G)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲۳.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک $p$-گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ را ویژه[۳] می‌نامیم هرگاه $G$ آبلی مقدماتی باشد یا $Z(G) = G' = \Phi(G)$. به‌علاوه اگر $G$ یک گروه غیرآبلی ویژه و $|Z(G)| = p$ آنگاه $G$ را فوق ویژه[۴] می‌نامیم.

**لم ۲۴.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک $p$-گروه فوق ویژه باشد. در این‌صورت $|G| = p^{2n+1}$ که $n$ یک عدد صحیح مثبت است.*

---

[۲] Dedekind-Identitat

[۳] Special

[۴] Extra special

***برهان.*** به [۴] صفحه ۳۴ رجوع شود.

□

**تعریف ۲۵.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $H \leq G$. در این‌صورت $H$ را یک زیرگروه مشخصه $G$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\delta \in Aut(G)$، ($Aut(G)$ گروه خودریختی‌های $G$ است) $\delta(H) = H$ و نیز $G$ را مشخصا ساده می‌نامیم هرگاه $G$ به‌جز ۱ و $G$ زیرگروه مشخصه دیگری نداشته باشد.

**قضیه ۲۶.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ مشخصا ساده است اگر و تنها اگر $G$ به حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروه‌های ساده خودکه دو به دو یکریخت‌اند تجزیه شود.*

***برهان.*** به [۱] صفحه ۱۰۷ رجوع شود. □

**نتیجه ۲۷.۱.۱.** *هر زیرگروه نرمال مینیمال مشخصا ساده است.*

**قضیه ۲۸.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه آبلی متناهی (غیربدیهی) باشد. در این‌صورت $G$ مشخصا ساده است اگر و تنها اگر $G$ آبلی مقدماتی باشد.*

***برهان.*** به [۱] صفحه ۱۰۶ رجوع شود. □

**تعریف ۲۹.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $H, N \leq G$ که $N \trianglelefteq G$، $H \cap N = ۱$ و $G = NH$. در این‌صورت می‌گوییم $G$ برابر حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $N$ با $H$ است و می‌نویسیم $G = N \rtimes H$.

**تعریف ۳۰.۱.۱.** فرض کنید $H$ و $N$ دو گروه دلخواه و $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ یک همریختی باشد. (به ازای هر $h$ از $H$، تصویر $h$ با $\varphi$ را با $\varphi_h$ نشان می‌دهیم.) در حاصل‌ضرب دکارتی $H \times N$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم

$$(h_۱, n_۱)(h_۲, n_۲) = (h_۱h_۲, (n_۱\varphi_{h_۲})n_۲).$$

در این‌صورت مجموعه‌ی $H \times N$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم خارجی $H$ و $N$ با عمل $\varphi$ می‌نامیم و آن را با علامت $H \times_\varphi N$ نشان می‌دهیم و اصطلاحا می‌گوییم $H$ بر $N$ با $\varphi$ عمل می‌کند.
در حالتی که ابهامی در مورد $\varphi$ پیش نیاید یا مشخص کردن آن مورد نیاز نباشد، به‌جای علامت مذکور از علامت $H \ltimes N$ استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۳۱.۱.۱.** *فرض کنید $G = H \times_\varphi N$ که در آن $H$ و $N$ دو گروه و $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ یک همریختی باشد. در این‌صورت $G$ زیرگروه نرمالی مانند $L$ و زیرگروهی مانند $M$ دارد که $M \cong H$ و $L \cong N$ به‌طوری‌که $G = ML$ و $M \cap L = ۱$.*

***برهان.*** به [۱] صفحه ۱۸۱ رجوع شود. □

**قضیه ۳۲.۱.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $H, N \leq G$ که $N \trianglelefteq G$، $G = HN$ و $H \cap N = 1$. در این‌صورت $G \cong H \times_{\varphi} N$ که در آن $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ یک همریختی است.*

***برهان.*** کافی است تابع $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ را با ضابطه‌ی

$$\varphi : h \longmapsto \varphi_h \quad (h \in H)$$

تعریف کنیم که در آن به ازای هر $n$ از $N$، $n\varphi_h = h^{-1}nh$. به آسانی ملاحظه می‌شود که $G \cong H \times_{\varphi} N$. □

**تعریف ۳۳.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $H \leq G$. در این‌صورت زیرگروه $N$ از $G$ را یک مکمل (در $G$) می‌گوییم هرگاه $G = NH$ و $|H \cap N| = 1$.

**تعریف ۳۴.۱.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$. در این‌صورت $H$ را یک زیرگروه هال[۵] از $G$ می‌نامیم هرگاه $([G : H], |H|) = 1$.

**قضیه ۳۵.۱.۱.** *( شور-زازنهوس[۶] ) فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $N \trianglelefteq G$ که*

$$(|N|, |\frac{G}{N}|) = 1.$$

*در این‌صورت $N$ یک مکمل در $G$ دارد. به‌علاوه اگر $N$ یا $\frac{G}{N}$ حل‌پذیر باشند آنگاه تمام چنین مکمل‌هایی در $G$ مزدوج هستند.*

***برهان.*** به [۱۳] صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷ رجوع شود. □

**نتیجه ۳۶.۱.۱.** *اگر $G$ یک گروه متناهی باشد و $N \trianglelefteq G$ که $(|N|, |\frac{G}{N}|) = 1$ آنگاه $G$ زیرگروهی مانند $H$ دارد به‌طوری‌که $G \cong H \ltimes N$.*

## ۲.۱ گروه‌های پوچ‌توان و حل‌پذیر

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه و سری

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_{r-1} = G_r$$

یک سری زیرنرمال $G$ باشد. این سری را یک سری ترکیبی[۷] $G$ می‌نامیم در صورتی‌که به ازای هر $i$ طبیعی که $1 \leq i \leq r$، $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ یک گروه ساده (غیربدیهی) باشد. در سری ترکیبی فوق هر گروه خارج‌قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ را یک عامل ترکیبی می‌نامیم.

---

[۵] Hall subgroup

[۶] Schur-Zassenhaus

[۷] Composition series

**تعریف ۲.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت سری نرمال

$$1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_r = G$$

را یک سری اصلی[8] $G$ می‌نامیم در صورتی‌که به ازای هر $i$ که $1 \leq i \leq r$، $G$ هیچ زیرگروه نرمالی مانند $N_i$ نداشته باشد به‌طوری‌که $G_{i-1} < N_i < G_i$. هر گروه خارج‌قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ را یک عامل اصلی $G$ می‌نامیم.

**تذکر ۳.۲.۱.** هر گروه متناهی دارای یک سری ترکیبی و نیز دارای یک سری اصلی است. هم‌چنین ممکن است گروهی فاقد سری ترکیبی و نیز فاقد سری اصلی باشد.

**تعریف ۴.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی $G$ می‌گوییم هرگاه به ازای هر $i$ که $1 \leq i \leq r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}}).$$

**تعریف ۵.۲.۱.** گروه $G$ را پوچ‌توان می‌نامیم در صورتی‌که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی $G$ را رده پوچ‌توانی $G$ می‌گوییم و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۶.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت دنباله‌ی $\{\gamma_n(G)\}$ از زیرگروه‌های $G$ را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم

$$\gamma_1(G) = G \quad , \quad \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G] \quad (n \geq 1). \tag{۶.۱}$$

بدیهی است که $\gamma_2(G)$ همان گروه مشتق از $G$ است.

**تعریف ۷.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت سری

$$G = \gamma_1(G) > \gamma_2(G) > \ldots > \gamma_n(G) > \ldots$$

را سری مرکزی پایینی $G$ می‌نامیم.

**لم ۸.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت اگر $G$ متناهی باشد آنگاه در سری‌های مرکزی پایینی از $G$ عدد صحیح یکتای $c \geq 0$ وجود دارد که*

$$G = \gamma_1(G) > \gamma_2(G) > \ldots > \gamma_{c+1}(G) = \gamma_{c+2}(G) = \ldots \quad . \tag{۷.۱}$$

**تعریف ۹.۲.۱.** در لم ۸.۲.۱، $\gamma_\infty(G)$ را حد $\gamma_{c+1}(G)$ و سری

$$G = \gamma_1(G) > \gamma_2(G) > \ldots > \gamma_{c+1}(G) = \gamma_{c+2}(G) = \ldots = \gamma_\infty(G) \tag{۸.۱}$$

را سری مرکزی پایینی کامل $G$ می‌نامیم.

[8] Chief series

**تعریف ۱۰.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت دنباله‌ی $\{Z_n(G)\}_{n=0}$ از زیرگروه‌های $G$ را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم

$$Z_0(G) = 1 \quad , \quad \frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)} = Z(\frac{G}{Z_n(G)}) \quad (n \geq 0).$$

در صورتی‌که ابهامی در مورد گروه زمینه پیش نیاید به‌جای $Z_n(G)$ مختصرا می‌نویسیم $Z_n$.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت سری

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots \leq Z_n(G) \leq \ldots$$

را سری مرکزی بالایی $G$ می‌نامیم.

**قضیه ۱۲.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت*

*(۱) $G$ پوچ‌توان و از رده پوچ‌توانی $n$ است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی $n$ وجود داشته باشد که $\gamma_{n+1}(G) = 1$.*

*(۲) $G$ پوچ‌توان و از رده پوچ‌توانی $n$ است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی $n$ وجود داشته باشد که $Z_n(G) = G$.*

***برهان.*** به [۱] صفحه ۲۲۷ رجوع شود. □

**قضیه ۱۳.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $\frac{G}{\gamma_\infty(G)}$ پوچ‌توان است.*

***برهان.*** چون $G$ یک گروه متناهی است پس بنا به لم ۸.۲.۱ عدد صحیح یکتای $c \geq 0$ وجود دارد که

$$G = \gamma_1(G) > \gamma_2(G) > \ldots > \gamma_{c+1} = \gamma_{c+2} = \ldots = \gamma_\infty(G)$$

و از آن‌جایی‌که

$$\gamma_{c+1}(\frac{G}{\gamma_\infty(G)}) = \frac{\gamma_{c+1}(G)\gamma_\infty(G)}{\gamma_\infty(G)}$$

لذا

$$\gamma_{c+1}(\frac{G}{\gamma_\infty(G)}) = 1_{\frac{G}{\gamma_\infty(G)}}.$$

در نتیجه طبق قضیه ۱۲.۲.۱، $\frac{G}{\gamma_\infty(G)}$ پوچ‌توان و از رده پوچ‌توانی $c$ است. □

**نتیجه ۱۴.۲.۱.** *$\gamma_\infty(G)$ کوچک‌ترین زیرگروه نرمال $N$ از $G$ است به‌طوری‌که گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ پوچ‌توان است.*

**قضیه ۱۵.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه پوچ‌توان باشد و $N \lhd G$. در این‌صورت اگر $N \neq 1$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.*

***برهان.*** چون $G$ پوچ‌توان است پس عدد طبیعی مانند $n$ وجود دارد که $Z_n(G) = G$. قرار می‌دهیم
$$A = \{m | m \geq ۱, N \cap Z_m(G) \neq ۱\}.$$

واضح است که $n \in A$. بنابراین $A \neq \varnothing$. با فرض $s = minA$ داریم $N \cap Z_{s-۱}(G) = ۱$. اینک ملاحظه می‌کنیم که $[G, N \cap Z_s] \leq [G, Z_s] \leq Z_{s-۱}$. از طرفی چون $N \cap Z_s$ در $G$ نرمال است پس $[G, N \cap Z_s] \leq N \cap Z_s \leq N$. بنابراین
$$[G, N \cap Z_s] \leq N \cap Z_{s-۱} = ۱.$$

از آن‌جا معلوم می‌شود که $N \cap Z_s \leq Z(G) \cap N$. حال چون $N \cap Z_s \neq ۱$ پس حکم ثابت می‌شود. □

**گزاره ۱۶.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $N \leq Z(G)$. در این‌صورت اگر $\frac{G}{N}$ پوچ‌توان باشد آنگاه $G$ نیز پوچ‌توان است. به‌علاوه $c(G) = c(\frac{G}{N})$ یا $c(G) = c(\frac{G}{N}) + ۱$.*

***برهان.*** فرض کنید $\varphi$ اپی‌مورفیسم طبیعی $\varphi : G \longrightarrow \frac{G}{N}$ باشد. چون $\frac{G}{N}$ پوچ‌توان است پس برای برخی $n \geq ۰$، $\gamma_{n+۱}(\frac{G}{N}) = ۱_{\frac{G}{N}}$. با توجه به این‌که $\varphi(\gamma_{n+۱}(G)) = \gamma_{n+۱}(\varphi(G))$ لذا
$$\varphi(\gamma_{n+۱}(G)) = \gamma_{n+۱}(\varphi(G)) = \gamma_{n+۱}(\frac{G}{N}) = ۱_{\frac{G}{N}}.$$

در نتیجه $\gamma_{n+۱}(G) \leq Ker\varphi = N$ . چون $N \leq Z(G)$ پس $[N, G] = ۱$ و در نتیجه
$$\gamma_{n+۲}(G) = [\gamma_{n+۱}(G), G] \leq [N, G] = ۱.$$

لذا $G$ پوچ‌توان و از رده پوچ‌توانی $c(\frac{G}{N})$ یا $c(\frac{G}{N}) + ۱$ است. □

**تعریف ۱۷.۲.۱.** گروه $G$ را حل‌پذیر می‌نامیم در صورتی‌که یک سری زیرنرمال مانند
$$۱ = G_۰ \lhd G_۱ \lhd \ldots \lhd G_n = G$$
داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $i$ که $۱ \leq i \leq n$، گروه $\frac{G_i}{G_{i-۱}}$ آبلی باشد. اگر $G$ حل‌پذیر باشد آنگاه طول کوتاه‌ترین سری با خاصیت مذکور را طول حل‌پذیری $G$ می‌نامیم. گروه $G$ را حل‌ناپذیر می‌گوییم هرگاه حل‌پذیر نباشد.

**قضیه ۱۸.۲.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

*(۱) $G$ حل‌پذیر است.*

*(۲) عامل‌های اصلی $G$ آبلی مقدماتی‌اند.*

*(۳) عامل‌های ترکیب $G$ از مرتبه عدد اول $p$ هستند.*

***برهان.*** به [۱۸] صفحه ۲۳۹ رجوع شود. □

## ۱.۳ گروه‌های فروبنیوس و آفین

**تعریف ۱.۳.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد که به‌طور متعدی بر مجموعه‌ی ناتهی $X$ عمل کند. در این‌صورت $G$ یک گروه فروبنیوس روی مجموعه $X$ است هرگاه

(۱) به ازای هر $x \in X$، $St_G(x) \neq ۱_G$،

(۲) به ازای هر $x, y \in X$ به‌طوری که $x \neq y$، $St_G(x) \cap St_G(y) = ۱_G$.

**تعریف ۲.۳.۱.** فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس روی مجموعه $X$ باشد. در گروه فروبنیوس $G$ به زیرگروه $H$ که عنصر $x \in X$ را در $G$ ثابت نگه می‌دارد مکمل فروبنیوس[۹] و به

$$N = (G - \bigcup_{g \in G} H^g) \cup ۱_G$$

هسته فروبنیوس[۱۰] می‌گوییم.

**قضیه ۳.۳.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ باشد. در این‌صورت $N$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است.*

*برهان.* به [۱۰] صفحه ۱۷۳ رجوع شود. □

**گزاره ۴.۳.۱.** *فرض کنید $G$ گروه فروبنیوس با مکمل فروبنیوس $H$ و هسته فروبنیوس $N$ باشد. در این‌صورت $G$ حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $N$ با $H$ است.*

*برهان.* چون $G$ گروه فروبنیوس با مکمل فروبنیوس $H$ و هسته فروبنیوس $N$ است پس

$$N = (G - \cup\{H^g \mid g \in G\}) \cup ۱_G \quad , \quad N \cap H = ۱.$$

همچنین $N \trianglelefteq G$ و $H \leq G$. بنابراین

$$|NH| = \frac{|N| \times |H|}{|N \cap H|} = \frac{[G:H] \times |H|}{۱} = |G|$$

و در نتیجه $G = NH$. از این‌رو بنا به تعریف ۲۹.۱.۱، $G = N \rtimes H$. □

**گزاره ۵.۳.۱.** *گروه $G$ فروبنیوس است اگر و تنها اگر شامل زیرگروه سره $H \neq ۱$ باشد به‌طوری‌که به ازای هر $g \in G - H$، $H \cap H^g = ۱$.*

*برهان.* به [۱۰] صفحه ۱۷۲ رجوع شود. □

**قضیه ۶.۳.۱.** *فرض کنید گروه $G$ حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه غیربدیهی $H$ با زیرگروه نرمال $N$ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

---

[۹] Frobenius complement

[۱۰] Frobenius kernel

*(۱) $G$ یک گروه فروبنیوس با مکمل فروبنیوس $H$ و هسته فروبنیوس $N$ است.*

*(۲) به ازای هر $h \in H^{\#}$، $C_N(h) = ۱$.*

***برهان.*** به‌وضوح داریم $G = HN$. بنا به گزاره ۵.۳.۱، $G$ یک گروه فروبنیوس با مکمل فروبنیوس $H$ و هسته فروبنیوس $N$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $g \in G - H$، $H \cap H^g = ۱$. از طرف دیگر چون $H \cap N = ۱$ پس به ازای هر $h \in H^{\#}$ و هر $g \in N^{\#}$،

$$h^g \in H \cap H^g \Longleftrightarrow g^{-۱}h^{-۱}gh = [g,h] \in H \cap N \Longleftrightarrow g \in C_N(h)^{\#}.$$

بنابراین نتیجه حاصل می‌شود.

□

**لم ۷.۳.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$، $H \leq G$ که $G = NH$ و $N \cap H = ۱$. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

*(۱) به ازای هر $۱ \neq n \in N$، $C_G(n) \leq N$.*

*(۲) به ازای هر $۱ \neq n \in N$، $C_H(n) = ۱$.*

*(۳) به ازای هر $۱ \neq h \in H$، $C_G(h) \leq H$.*

*(۴) هر $x \in G - N$ با یک عنصر از $H$ مزدوج است.*

*(۵) اگر $۱ \neq h \in H$، آنگاه $h$ با هر عنصر از $Nh$ مزدوج است.*

*(۶) $H$ یک مکمل فروبنیوس در $G$ است.*

***برهان.*** به [۱۴] رجوع شود. □

**قضیه ۸.۳.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ باشد. در این‌صورت $N$ پوچ‌توان است.*

***برهان.*** به[۲۰] صفحه ۹۲ رجوع شود. □

**گزاره ۹.۳.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ و مکمل فروبنیوس $H$ باشد به‌طوری‌که $M \leq N$، $M \neq N$ و نیز $M \trianglelefteq G$. در این‌صورت $\frac{G}{M}$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $\frac{N}{M}$ است.*

***برهان.*** به [۱۰] صفحه ۱۷۷ رجوع شود. □

**قضیه ۱۰.۳.۱.** *فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با مکمل فروبنیوس $H$ باشد. در این‌صورت اگر $P \in Syl_p(H)$ آنگاه*

*(۱) اگر $p = 2$ آنگاه $P$ یا دوری یا کواترنیون تعمیم یافته است.*

*(۲) اگر $p \neq 2$ آنگاه $P$ دوری است.*

***برهان.*** به [۱۰] صفحه ۱۸۰ رجوع شود. $\square$

**تعریف ۱۱.۳.۱.** فرض کنید $F$ یک میدان و $n$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ که درایه‌های هر یک از آن‌ها در $F$ اند، با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه خطی عام[۱۱] از درجه $n$ می‌نامیم و با $GL(n, F)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱۲.۳.۱.** فرض کنید $F$ یک میدان متناهی و $n$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت $\tau_{a,b} : F^n \longrightarrow F^n$ که به ازای هر $x \in F^n$، $\tau_{a,b}(x) = ax + b$ را یک تبدیل آفین [۱۲] روی $F^n$ می‌نامیم به‌طوری‌که در آن $a$ یک ماتریس $n \times n$ و $b$ برداری از $F^n$ است.

**تعریف ۱۳.۳.۱.** فرض کنید $F$ یک میدان متناهی و $n$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات آفین معکوس‌پذیر از فضای برداری $F$ از بعد $n$ به فضای برداری $F$ از بعد $n$ تحت عمل دوتایی ترکیب توابع (عمل ترکیب را با $\circ$ نشان می‌دهیم) یک گروه تشکیل می‌دهد که آن را گروه آفین [۱۳]از درجه $n$ روی میدان $F$ می‌نامیم و با $Aff(n, F)$ نمایش می‌دهیم. در واقع

$$Aff(n, F) = \left\{ \tau_{a,b} : F^n \longrightarrow F^n \mid a \in GL(n, F), b \in F^n \right\}$$

که به ازای هر $x \in F^n$، $\tau_{a,b}(x) = ax + b$ و هم‌چنین

$$\tau_{a,b} \circ \tau_{c,d} = \tau_{ac, ad+b}.$$

**گزاره ۱۴.۳.۱.** *فرض‌کنید $F$ یک میدان متناهی و $n$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت $Aff(n, F) = T \rtimes H$ که $T = \{\tau_{1,b} | b \in F^n\}$ و $H = \{\tau_{a,0} | a \in GL(n, F)\}$.*

***برهان.*** چون $\tau_{1,0} \in H, T$ پس $H \neq \varnothing$ و $T \neq \varnothing$. حال از آن‌جایی‌که به ازای هر $\tau_{a,0}$ و $\tau_{a',0}$ از $H$، $\tau_{a,0} \circ \tau_{a',0}^{-1}(x) = \tau_{aa'^{-1},0}(x)$ عضوی از $H$ است لذا $H \leq Aff(n, F)$ و به همین ترتیب $T \leq Aff(n, F)$. چون به ازای هر $\tau_{a,b} \in Aff(n, F)$ و $\tau_{1,b'} \in T$،

$$\tau_{a,b} \circ \tau_{1,b'} \circ \tau_{a,b}^{-1}(x) = \tau_{1,ab'}(x) \in T$$

پس $T \trianglelefteq Aff(n, F)$. طبق تعریف ۱۳.۳.۱ هر نگاشت آفین به‌فرم $\tau_{a,b} = \tau_{1,b} \circ \tau_{a,0}$ است لذا $Aff(n, F) = TH$ و چون $T \cap H = 1$ پس بنا به تعریف ۲۹.۱.۱، $Aff(n, F) = T \rtimes H$. $\square$

[۱۱] General linear group

[۱۲] Affine transformation

[۱۳] Affine group

**گزاره ۱۵.۳.۱.** *فرض کنید $F$ یک میدان متناهی و $n$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت*
$$Aff(n,F) \cong F^n \rtimes_\varphi GL(n,F).$$

***برهان.*** زیرگروه‌های $T$ و $H$ از گزاره ۱۴.۳.۱ را در نظر بگیرید. چون $\alpha : GL(n,F) \longrightarrow H$ با ضابطه $a \longmapsto \tau_{a,0}$ و $\beta : F^n \longrightarrow T$ با ضابطه $b \longmapsto \tau_{1,b}$ دو نگاشت یک به یک و پوشا هستند پس $GL(n,F) \cong H$ و $F^n \cong T$ . حال بنا به گزاره ۱۴.۳.۱ و قضیه ۳۲.۱.۱ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

**نتیجه ۱۶.۳.۱.** *فرض کنید $F$ یک میدان متناهی باشد. در این‌صورت*
$$Aff(1,F) \cong F^+ \rtimes_\varphi F^\times.$$

*که $F^\times$ گروه ضربی از $F$ و $F^+$ گروه جمعی از $F$ است.*

***برهان.*** از آن‌جایی‌که $GL(1,F) \cong F^\times$ لذا بنا به گزاره ۱۵.۳.۱ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

**تذکر ۱۷.۳.۱.** در ادامه به جای $F^+ \rtimes_\varphi F^\times$ از $F^+ \rtimes F^\times$ استفاده می‌کنیم.

# فصل ۲

# گروه‌های متناهی پوچ‌توان با رده‌های تزویج خاص

این فصل شامل سه بخش است که قضایای اصلی هر سه بخش برگرفته از [۵] می‌باشد. در بخش اول، حاصل‌ضرب رده‌های تزویج در گروه متناهی $G$ را مطرح نموده و این ویژگی که حاصل‌ضرب هر دو رده تزویج غیرمعکوس از $G$، یک رده تزویج از $G$ باشد را در قالب شرط‌های $A$ و $B$ بیان می‌کنیم و در ادامه لم‌ها و گزاره‌هایی را در این زمینه مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش دوم، گروه‌های کامینا را تعریف نموده و نشان می‌دهیم که اگر $G$ یک $p$-گروه کامینا باشد آنگاه $G$ در شرط $A$ صدق می‌کند. در بخش سوم، رابطه ایزوکلینیسم و ایزوکلینیک در گروه‌های متناهی را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که اگر گروهی در شرط $B$ صدق کند آنگاه هر گروه ایزوکلینیک با آن نیز در شرط $B$ صدق می‌کند.

## ۱.۲ حاصل‌ضرب رده‌های تزویج

**لم ۱.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $x, y \in G$. در این‌صورت حاصل‌ضرب رده‌های تزویج $x^G$ و $y^G$ یک رده تزویج است اگر و تنها اگر در تساوی زیر صدق کند.*

$$x^G y^G = (xy)^G. \tag{۱.۲}$$

***برهان.*** فرض کنید حاصل‌ضرب رده‌های تزویج $x^G$ و $y^G$ یک رده تزویج باشد. در این‌صورت $a$ عضو $G$ وجود دارد که $x^G y^G = a^G$. چون $x \in x^G$ و $y \in y^G$ پس $xy \in a^G$ لذا بنا به لم ۴.۱.۱، $(xy)^G = a^G$. حالت عکس نیز به‌وضوح برقرار است. □

**تذکر ۲.۱.۲.** اگر $x \in Z(G)$ آنگاه $x^G y^G = xy^G$ و نیز $(xy)^G = xy^G$ و در نتیجه تساوی (۱.۲) برقرار است. لذا در تمام این پایان‌نامه $x$ و $y$ را عضوهایی از مجموعه $G - Z(G)$ در نظر می‌گیریم.

**لم ۲.۱.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $x, y \in G$. در این‌صورت اگر $x^G = (y^{-1})^G$ آنگاه $x^G y^G \neq (xy)^G$.*

***برهان.*** فرض کنید $x^G = (y^{-1})^G$ و $x^G y^G = (xy)^G$. چون $y^{-1} \in (y^{-1})^G$ و $y \in y^G$ پس $y^{-1}y \in (y^{-1})^G (y)^G$ بنابراین $1 \in (y^{-1})^G (y)^G = (xy)^G$. حال از آن‌جایی‌که $\{1\}$ یک رده تزویج است بنابراین $(xy)^G = 1^G$. در این‌صورت $x^G y^G$ تنها شامل رده تزویج بدیهی $\{1\} = 1^G$ است لذا $|x^G y^G| = 1$ اما داریم

$$|x^G y^G| = \bigcup_{b \in y^G} |x^G b| \geq |x^G| > 1$$

و بنابراین $x^G y^G$ می‌بایست شامل حداقل یک رده تزویج دیگر نیز باشد که این یک تناقض است. $\square$

حال با توجه به لم ۲.۱.۳ تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۲.۱.۴.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. گوییم $G$ در شرط $A$ صدق می‌کند در صورتی‌که به ازای هر $x, y \in G$ که $x^G \neq (y^{-1})^G$ تساوی $x^G y^G = (xy)^G$ برقرار باشد.

به‌وضوح هر گروه آبلی متناهی درشرط $A$ صدق می‌کند.

**لم ۲.۱.۵.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $x, y \in G$. در این‌صورت اگر $x^G Z(G) = (y^{-1})^G Z(G)$ آنگاه $x^G y^G \neq (xy)^G$.*

***برهان.*** فرض کنید $x^G Z(G) = (y^{-1})^G Z(G)$. از این‌رو

$$\{g^{-1} x g Z(G) | g \in G\} = \{h^{-1} y^{-1} h Z(G) | h \in G\}$$

بنابراین $h \in G$ وجود دارد به‌قسمی که $xZ(G) = h^{-1} y^{-1} h Z(G)$. در نتیجه $xh^{-1} y h \in Z(G)$ لذا $|(xh^{-1} y h)^G| = 1$. به‌وضوح $xh^{-1} y h \in x^G y^G$. حال فرض کنید $x^G y^G = (xy)^G$ در این‌صورت $xh^{-1} y h \in (xy)^G \cap Z(G)$. بنا به لم ۱.۱.۴، $|(xy)^G| = |(xh^{-1} y h)^G|$. لذا $|x^G y^G| = |(xy)^G| = 1$ از طرفی داریم

$$|x^G y^G| = \bigcup_{b \in y^G} |x^G b| \geq |x^G| > 1.$$

پس $x^G y^G$ می‌بایست شامل حداقل یک رده تزویج دیگر نیز باشد که این یک تناقض است. $\square$

حال با توجه به لم ۲.۱.۵ تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۲.۱.۶.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. گوییم $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند در صورتی‌که به ازای هر $x, y \in G$ که $x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G)$ تساوی $x^G y^G = (xy)^G$ برقرار باشد.

به‌وضوح هر گروه آبلی متناهی درشرط $B$ صدق می‌کند.

**گزاره ۷.۱.۲.** *اگر گروه متناهی $G$ در شرط $B$ صدق کند و $N \trianglelefteq G$ آنگاه گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ در شرط $B$ صدق می‌کند.*

***برهان.*** فرض کنید $\bar{G}$ گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ و $e$ اپی‌مورفیسم طبیعی $G \longrightarrow \frac{G}{N}$ باشد که به ازای هر $x \in G$، این نگاشت $G$-رده تزویج $x^G$ را به‌روی $\bar{G}$-رده تزویج $e(x)^{\bar{G}}$ و از این‌رو $x^G Z(G)$ را به‌درون $e(x)^{\bar{G}} Z(\bar{G})$ می‌برد. فرض کنید $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$ که $\bar{x}^{\bar{G}} Z(\bar{G}) \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}} Z(\bar{G})$. در این‌صورت $\bar{x} = e(x)$ و $\bar{y} = e(y)$. اگر $x^G Z(G) = (y^{-1})^G Z(G)$ آنگاه

$$\bar{x}^{\bar{G}} Z(\bar{G}) = e(x^G Z(G)) Z(\bar{G}) = e((y^{-1})^G Z(G)) Z(\bar{G}) = (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}} Z(\bar{G}).$$

که به تناقض با فرض $\bar{x}^{\bar{G}} Z(\bar{G}) \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}} Z(\bar{G})$ می‌رسیم. بنابراین

$$x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G).$$

حال از آن‌جایی‌که $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند لذا داریم $x^G y^G = (xy)^G$. در این‌صورت با به‌کار بردن اپی‌مورفیسم $e$ روی تساوی فوق، تساوی $\bar{x}^{\bar{G}} \bar{y}^{\bar{G}} = (\bar{x}\bar{y})^{\bar{G}}$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین $\bar{G}$ در شرط $B$ صدق می‌کند. □

**گزاره ۸.۱.۲.** *اگر گروه متناهی $G$ در شرط $B$ صدق کند و $Z(G) \leq N \trianglelefteq G$ آنگاه گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ در شرط $A$ صدق می‌کند.*

***برهان.*** فرض کنید $\bar{G}$ گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ و $e$ اپی‌مورفیسم طبیعی $G \longrightarrow \frac{G}{N}$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$ که $\bar{x}^{\bar{G}} \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$. چون $Z(G) \leq N$ پس

$$e(Z(G)) = \frac{Z(G)N}{N} = N = 1_{\bar{G}}.$$

در این‌صورت اگر $x^G Z(G) = (y^{-1})^G Z(G)$ آنگاه

$$\bar{x}^{\bar{G}} = e(x^G Z(G)) = e((y^{-1})^G Z(G)) = (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}.$$

لذا اگر $\bar{x}^{\bar{G}} \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$ آنگاه $x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G)$. حال چون $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند پس $x^G y^G = (xy)^G$. اکنون با به‌کار بردن اپی‌مورفیسم $e$ داریم $\bar{x}^{\bar{G}} \bar{y}^{\bar{G}} = (\bar{x}\bar{y})^{\bar{G}}$ و بنابراین حکم برقرار است. □

**گزاره ۹.۱.۲.** *اگر گروه متناهی $G$ در شرط $A$ صدق کند و $N \trianglelefteq G$ آنگاه گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ نیز در شرط $A$ صدق می‌کند.*

***برهان.*** فرض کنید $\bar{G}$ گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ و $e$ اپی‌مورفیسم طبیعی $G \longrightarrow \frac{G}{N}$ باشد و هم‌چنین فرض کنید $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$ که $\bar{x}^{\bar{G}} \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$. در این‌صورت اگر $x^G = (y^{-1})^G$ آنگاه $\bar{x}^{\bar{G}} = (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$. بنابراین اگر $\bar{x}^{\bar{G}} \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$ آنگاه $x^G \neq (y^{-1})^G$ و چون $G$ در شرط $A$ صدق می‌کند پس $x^G y^G = (xy)^G$. حال با استفاده اپی‌مورفیسم $e$ روی این تساوی داریم $\bar{x}^{\bar{G}} \bar{y}^{\bar{G}} = (\bar{x}\bar{y})^{\bar{G}}$ و بنابراین حکم برقرار است. □

**گزاره ۱۰.۱.۲.** *اگر گروه متناهی $G$ در شرط $A$ صدق کند آنگاه $G$ در شرط $B$ نیز صدق می‌کند.*

***برهان.*** فرض کنید $G$ در شرط $A$ صدق کند و $x, y \in G$ که $x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G)$ لذا $x^G \neq (y^{-1})^G$. چون $G$ در شرط $A$ صدق می‌کند پس $x^G y^G = (xy)^G$ و در این‌صورت حکم برقرار است. □

**گزاره ۱۱.۱.۲.** *اگر گروه متناهی $G$ در شرط $A$ صدق کند آنگاه به ازای هر $x \in G - Z(G)$، $x^G Z(G) = x^G$.*

*به‌علاوه اگر $H$ یک زیرگروه غیرمرکزی از $G$ باشد آنگاه $Z(G) \leq [H, G]$.*

***برهان.*** فرض کنید $x$ یک عضو دلخواه از $G - Z(G)$ و $z$ یک عضو دلخواه از $Z(G)$ باشد. چون $z \in Z(G)$ پس $z^G = z$. بنابراین $x$ و $z$ در تساوی (۱.۲) صدق می‌کنند. در این‌صورت داریم

$$x^G z = x^G z^G = (xz)^G.$$

لذا به ازای هر $x \in G - Z(G)$ و $z \in Z(G)$ حاصل‌ضرب $x^G z$ برابر $((x^{-1}z^{-1})^{-1})^G = (xz)^G$ است. اگر $x^G \neq x^G z$ آنگاه با داشتن شرط $A$ برای $y = x^{-1}z^{-1}$ داریم

$$x^G (x^{-1}z^{-1})^G = (x(x^{-1}z^{-1}))^G = (z^{-1})^G = \{z^{-1}\}.$$

اما $|x^G y^G| \geq |x^G| > 1$ و $|\{z^{-1}\}| = 1$ لذا تساوی فوق غیر ممکن است. در نتیجه به ازای هر $z \in Z(G)$، $x^G z = x^G$ پس $x^G Z(G) = x^G$.

حال اگر $H$ یک زیرگروه غیرمرکزی از $G$ باشد آنگاه بعضی عناصر $x$ از $H$ وجود دارند که متعلق به $Z(G)$ نیستند. با به‌کار بردن استدلال فوق داریم $x^G Z(G) = x^G$. از این‌رو

$$Z(G) = [x, 1]Z(G) \subseteq [x, G]Z(G) = x^{-1}x^G Z(G) = x^{-1}x^G = [x, G] \subseteq [H, G].$$

بنابراین حکم برقرار است. □

**گزاره ۱۲.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند و*

$$Z(G) \leq N \trianglelefteq G \quad , \quad M = [N, G]Z(G) \subseteq N.$$

*در این‌صورت به ازای هر $x \in N - M$، $[x, G]$ یک زیرگروه نرمال $G$ است.*

***برهان.*** ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر $y \in [x, G]$، $[x, G]y \subseteq [x, G]$. از آن‌جایی‌که $x \notin M$ لذا $x \in N - M$ و چون $N - M$ به عنوان مجموعه نرمال است پس $x^G \subseteq N - M$. از طرفی چون $y \in M$ و $M \trianglelefteq G$ پس $(y^{-1})^G \subseteq M$. بنابراین رده‌های تزویج $x^G$ و $(y^{-1})^G$ به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌های مجزای $N - M$ و $M$ هستند. در نتیجه $x^G \neq (y^{-1})^G$. چون $M$ شامل $Z(G)$ است لذا $x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G)$ و چون $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند پس داریم $x^G y^G = (xy)^G$. اما $y \in [x, G]$، در این‌صورت $z \in G$ وجود دارد که $y = [x, z] = x^{-1}x^z$. از این‌رو $xy = x^z$ با $x$ مزدوج است. لذا

$$x[x, G]y = x^G y \subseteq x^G y^G = (xy)^G = x^G = x[x, G].$$

بنابراین به‌ازای هر $y \in [x, G]$،
$$[x, G]y \subseteq [x, G].$$
پس $[x, G]$ نسبت به ضرب بسته است و در نتیجه $[x, G]$ یک زیرگروه از $G$ است. حال به ازای هر $w, z \in G$ از اتحاد جابه‌جاگر $[x, zw] = [x, w][x, z]^w$ داریم
$$[x, G]^w = [x, w]^{-۱}[x, G] = [x, G].$$
بنابراین $[x, G]$ در $G$ نرمال است و حکم ثابت می‌شود. □

**گزاره ۱۳.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند و*
$$Z(G) \leq N \trianglelefteq G \quad , \quad M = [N, G]Z(G) \subseteq N.$$
*در این‌صورت اگر به ازای هر $x \in N - M$ و $y \in N$ داشته باشیم $xM \neq y^{-۱}M$ آنگاه*
$$[x, G][y, G] = [xy, G].$$

***برهان.*** برای رده تزویج $x^G = x[x, G]$ داریم $x[x, G] \subseteq x[N, G]$. ازاین‌رو
$$x^G Z(G) \subseteq x[N, G]Z(G) = xM.$$
به‌طور مشابه $(y^{-۱})^G$ نیز مشمول در $y^{-۱}M$ است. چون دو هم‌دسته $xM$ و $y^{-۱}M$ مساوی نیستند پس این دو هم‌دسته مجزا از هم می‌باشند و داریم $x^G Z(G) \neq (y^{-۱})^G Z(G)$ و چون $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند پس داریم $x^G y^G = (xy)^G$. با توجه به (۱.۱) تساوی قبل معادل تساوی زیر است.
$$[x, G]^y [y, G] = [xy, G].$$
بنا به گزاره ۱۲.۱.۲، $[x, G] \trianglelefteq G$ بنابراین $[x, G]^y = [x, G]$ و در نتیجه $[x, G][y, G] = [xy, G]$. □

**گزاره ۱۴.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند و*
$$Z(G) \leq N \trianglelefteq G \quad , \quad M = [N, G]Z(G) \subseteq N.$$
*در این‌صورت به ازای هر $x \in N - M$، $[x, G]$ شامل $[M, G]$ است. به‌علاوه به ازای هر $a \in xM$، $[x, G] = [a, G]$.*

***برهان.*** اگر $y \in M$ آنگاه $xM \neq M = y^{-۱}M$. از این‌رو بنا به گزاره ۱۳.۱.۲،
$$[x, G][y, G] = [xy, G].$$
بنابراین $|[x, G]| \leq |[xy, G]|$. با یک استدلال مشابه و با جای‌گذاری $xy \in N - M$ و $y^{-۱} \in M$ به‌ترتیب به جای $x$ و $y$ داریم
$$|[xy, G]| \leq |[(xy)y^{-۱}, G]| = |[x, G]|.$$
لذا $|[xy, G]| = |[x, G]|$. به ازای هر $z \in [y, G]$، $[x, G]z$ زیرمجموعه‌ی $[x, G][y, G] = [xy, G]$ است. از طرفی $|[x, G]| = |[x, G]z|$. حال چون $[x, G]z$ و $[x, G][y, G] = [xy, G]$ دارای تعداد عناصر یکسان هستند لذا با هم برابرند. در واقع
$$[x, G]z = [x, G][y, G] = [xy, G].$$

چون $[xy,G] \in [xy,1] = 1$ پس $z^{-1}$ متعلق به زیرگروه متناهی $[x,G]$ است. بنابراین به ازای هر $y \in M$ و به ازای هر $z \in [y,G]$ داریم $z \in [x,G]$. لذا $[M,G] \leq [x,G]$ و در نتیجه به ازای هر $y \in M$،

$$[xy,G] = [x,G][y,G] = [x,G].$$

□

**گزاره ۱۵.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند و*

$$Z(G) \leq N \trianglelefteq G \quad , \quad M = [N,G]Z(G) \subseteq N$$

*در این‌صورت به ازای هر $x \in N - M$، $[x,G] = [N,G]$. از این‌رو به ازای هر $x \in N - M$، $x^G = x[x,G]$ برابر $x[N,G]$ است.*

***برهان.*** فرض کنید $x,y \in N - M$ و $xM \neq yM$. در این‌صورت $xy^{-1} \in N - M$. بنا به گزاره ۱۲.۱.۲، $[x,G]$، $[y,G]$ و $[xy^{-1},G]$ زیرگروه‌هایی نرمال از $G$ هستند. به‌علاوه از آن‌جایی‌که $xM \neq M$ لذا تساوی $xy^{-1}M = xMy^{-1}M$ برابر $y^{-1}M$ نیست. حال با جای‌گذاری $xy^{-1}$ به‌جای $x$ طبق گزاره ۱۳.۱.۲ داریم

$$[xy^{-1},G][y,G] = [(xy^{-1})y,G] = [x,G].$$

از این رو زیرگروه $[y,G]$ مشمول در $[x,G]$ است. به طور مشابه $[x,G] \subseteq [y,G]$. در این‌صورت هرگاه $x,y \in N - M$ در هم‌دسته‌های مختلف $xM$ و $yM$ از $M$ قرار گیرند داریم

$$[x,G] = [y,G].$$

از طرف دیگر بنا به گزاره ۱۴.۱.۲ برای هر $x,y \in N - M$ که $xM = yM$ داریم

$$[x,G] = [y,G].$$

بنابراین $[x,G]$ مستقل از انتخاب $x \in N - M$ است. در نتیجه اگر $g \in G$ و $y \in N - M$ آنگاه

$$[y,g] \in [y,G] = [x,G] \Longrightarrow [y,g] \in [x,G]$$

و طبق گزاره ۱۴.۱.۲، $[x,G]$ شامل $[M,G]$ است پس اگر $g \in G$ و $y \in M$ آنگاه

$$[y,g] \in [M,G] \subseteq [x,G] \Longrightarrow [y,g] \in [x,G].$$

لذا $[N,G] \subseteq [x,G]$ و چون از قبل داشتیم $[N,G] \subseteq [x,G]$ پس $[x,G] = [N,G]$. □

**لم ۱۶.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند و $N \trianglelefteq G$ و همچنین $N \cap Z(G) = 1$. در این‌صورت به ازای هر $x,y \in N$،*

$$x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G) \Longleftrightarrow x^G \neq (y^{-1})^G.$$

**برهان.** فرض کنید $x^GZ(G) = (y^{-1})^GZ(G)$. در این‌صورت برای عضو $x$ از $x^G$، $z \in Z(G)$ و $g \in G$ وجود دارند که $x = (y^{-1})^g z$ و بنابراین $y^g x = z$. چون $z \in Z(G)$ و $y^g x \in N$ پس $y^g x = z \in N \cap Z(G) = 1$. لذا $x = (y^{-1})^g$ و $x \in (y^{-1})^G$ در نتیجه بنا به لم ۴.۱.۱، $x^G = (y^{-1})^G$.

به‌عکس فرض کنید $x^G = (y^{-1})^G$. در این‌صورت به‌وضوح $x^GZ(G) = (y^{-1})^GZ(G)$. □

**گزاره ۱۷.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند و $N$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از $G$ باشد. در این‌صورت اگر $[N, G] = N$ آنگاه $N^\#$ تنها یک رده $G$-تزویج است که $|N^\#| > 1$. از این‌رو $N$ یک $p$-گروه آبلی مقدماتی است.*

**برهان.** $N \cap Z(G)$ زیرگروه نرمال از $G$ و مشمول در $N$ است و از آن‌جایی‌که
$$[N, G] = N > 1 = [N \cap Z(G), G]$$
لذا $N \cap Z(G) \neq N$ و در نتیجه $N \cap Z(G) = 1$. از این‌رو بنا به لم ۱۶.۱.۲ به ازای هر $x, y \in N$،
$$x^GZ(G) \neq (y^{-1})^GZ(G) \Longleftrightarrow x^G \neq (y^{-1})^G.$$
بنابراین هرگاه $x, y \in N$ و $x^G \neq (y^{-1})^G$ پس بنا به شرط $B$،
$$x^Gy^G = (xy)^G. \tag{۲.۲}$$
فرض کنید $x \in N^\#$. چون $N \trianglelefteq G$ پس $x^G \subseteq N^\#$. حال فرض کنید $x^G \subsetneq N^\#$. در این‌صورت $y \in N^\#$ وجود دارد به‌طوری‌که $x^G \neq (y^{-1})^G$. لذا با توجه به (۲.۲) داریم $x^Gy^G = (xy)^G$. فرض کنید $(xy)^G \neq y^G$. در این‌صورت اگر $xy$ و $y^{-1}$ را به‌ترتیب به‌جای $x$ و $y$ در (۲.۲) قرار دهیم آنگاه $(xy)^G(y^{-1})^G = x^G$. بنابراین $x^Gy^G(y^{-1})^G = x^G$. از این‌رو بنا به تعریف ضرب‌گر در ۱۳.۱.۱، $y^G(y^{-1})^G$ یک زیرمجموعه از $M_G(x^G)$ است.

بنا به گزاره ۱۵.۱.۱، $M_G(x^G)$ یک زیرگروه نرمال از $G$ و از آن‌جایی‌که $x^G \subsetneq N$ یک اجتماع غیر تهی از هم‌دسته‌های $M_G(x^G)$ است لذا $M_G(x^G)$ به‌طور اکید مشمول در $N$ است. بنابراین باید $M_G(x^G)$ برابر یک باشد.

از این‌رو $y^G(y^{-1})^G = 1$. در نتیجه $y^G$ می‌بایست تنها شامل یک عنصر $y \in Z(G)$ باشد که این غیر ممکن است، زیرا $N \cap Z(G) = 1$. بنابراین $(xy)^G = y^G$. در این‌صورت
$$y^Gx^G = x^Gy^G = (xy)^G = y^G.$$
در نتیجه $x^G$ یک زیرمجموعه از $M_G(y^G)$ است. اما $M_G(y^G)$ مانند $M_G(x^G)$ باید یک باشد. لذا $x^G = 1$ که این غیرممکن است زیرا $x \in N^\#$. پس $x^G = N^\#$. البته $|N^\#| > 1$ زیرا در غیر این‌صورت برخلاف فرض $N$ در $G$ مرکزی می‌شود.

چون $N$ نرمال مینیمال است پس طبق نتیجه ۲۷.۱.۱، $N$ مشخصا ساده است و نیز بنا به تعریف ۲۶.۱.۱، $N$ به حاصل ضرب تعداد متناهی از زیرگروه‌های ساده خود که دو به دو یکریخت‌اند تجزیه

می‌شود.
حال اگر $N$ آبلی نباشد آنگاه $N$ یک حاصل‌ضرب مستقیم از گروه‌های ساده ناآبلی است. بنابراین مرتبه آن می‌بایست حداقل بر دو عدد اول متمایز $p$ و $q$ قابل تقسیم باشد. در این‌صورت $N^{\#}$ شامل حداقل دو رده مجزای $G$-تزویج، شامل یکی با نماینده‌ی از مرتبه $p$ و یکی با نماینده‌ی از مرتبه $q$ است که این تناقض است و بنابراین $N$ آبلی است.
اینک چون $N$ نرمال مینیمال و آبلی است پس بنا به قضیه ۲۸.۱.۱، $N$ یک $p$-گروه آبلی مقدماتی است. $\square$

**گزاره ۱۸.۱.۲.** *فرض کنید $G$ گروه متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند و*

$$1 < N = [N, G] \trianglelefteq G \quad , \quad Z(G) \cap N = 1.$$

*در این‌صورت اگر $M \trianglelefteq G$، $M < N$ و $\frac{N}{M}$ یک عامل اصلی از $G$ باشد آنگاه $N - M$ تنها یک رده $G$-تزویج در $G$ است.*

***برهان.*** زیرگروه نرمال $M$ از $G$ که مشمول در $N$ است را در نظر بگیرید که $\frac{N}{M}$ یک عامل اصلی از $G$ باشد. چون $\frac{N}{M}$ عامل اصلی است پس یک زیرگروه نرمال مینیمال از $\frac{G}{M}$ است. از آن‌جایی‌که $[N, G] = N$ لذا تحت اپی‌مورفیسم $e : G \longrightarrow \frac{G}{M}$ داریم

$$[\frac{N}{M}, \frac{G}{M}]_{\frac{G}{M}} = \frac{N}{M}.$$

بنا به گزاره‌های ۷.۱.۲ و ۱۷.۱.۲، $(\frac{N}{M})^{\#} = (\frac{N}{M}) - 1_{\frac{G}{M}}$ تنها یک رده $\frac{G}{M}$- تزویج با اندازه $|(\frac{N}{M})^{\#}| \geq 2$ است. از این‌رو در گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{M}$ هر رده $G$-تزویج $x^G \subseteq N - M$ تصویر $e(x^G) = (\frac{N}{M})^{\#}$ را دارد.
حال فرض کنید $N - M$ تنها یک رده $G$-تزویج نباشد. در این‌صورت عناصر $x \in N - M$ و $y \in M$ وجود دارند به‌طوری‌که $(yx)^G$ و $x^G$ دو رده $G$-تزویج مجزا مشمول در $N - M$ هستند. چون $Z(G) \cap N = 1$ و $(yx)^G \neq (x)^G$ پس اگر $(yx)^G Z(G) = (x)^G Z(G)$ آنگاه $yx \in (yx)^G$ و $z \in Z(G)$ وجود خواهند داشت به‌طوری‌که $yx = (x)^g z$. لذا $(x^{-1})^g (yx) = z \in N \cap Z(G) = 1$ و بنابراین $(yx) = (x)^g$. در نتیجه $(yx)^G = (x)^G$ که این تناقض است. بنابراین $(yx)^G Z(G) \neq (x)^G Z(G)$. لذا

$$(yx)^G Z(G) \neq (x)^G Z(G) = ((x^{-1})^{-1})^G Z(G).$$

در این‌صورت طبق شرط $B$ داریم

$$(yx)^G (x^{-1})^G = ((yx)x^{-1})^G = y^G.$$

اما اپی‌مورفیسم $e$ هر دو رده تزویج $(x^{-1})^G \subseteq N - M$ و $(yx)^G$ را به‌روی رده‌ی تزویج $(\frac{N}{M})^{\#}$ می‌برد و نیز $y^G \subseteq M$ را به $1_{\frac{G}{M}}$ می‌برد. پس

$$(\frac{N}{M})^{\#} (\frac{N}{M})^{\#} = 1_{\frac{G}{M}}$$

که این یک تناقض است زیرا $|(\frac{N}{M})^{\#}| \geq ۲$. □

**گزاره ۱۹.۱.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت اگر $G$ در شرط $B$ صدق کند آنگاه $G$ حل‌پذیر است.*

***برهان.*** فرض کنید $G$ حل‌پذیر نباشد. در این‌صورت با توجه به قضیه ۱۸.۲.۱، $G$ شامل زیرگروه‌های نرمال $M$ و $N$ به‌صورت زیر است

$$M \lhd N \unlhd G,$$

به‌طوری‌که $\frac{N}{M}$ یک زیرگروه نرمال مینیمال غیر آبلی از $\frac{G}{M}$ است. (طبق تذکر ۳.۲.۱ هر گروه متناهی دارای یک سری اصلی است.) چون $\frac{N}{M}$ نرمال مینیمال در $\frac{G}{M}$ است پس $\frac{N}{M} = [\frac{N}{M}, \frac{G}{M}]$. بنا به قضیه ۷.۱.۲ گروه خارج قسمتی $\frac{G}{M}$ نیز در شرط $B$ صدق می‌کند. حال شرایط گزاره ۱۷.۱.۲ برقرار است. از این‌رو $\frac{N}{M}$ باید یک $p$-گروه آبلی مقدماتی باشد که این با فرض در تناقض است و در نتیجه $G$ حل‌پذیر است. □

## ۲.۲ گروه‌های کامینا و حاصل‌ضرب رده‌های تزویج

**تعریف ۱.۲.۲.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت اگر $N \neq ۱$ یک زیرگروه نرمال از $G$ باشد که به ازای هر $x \in G - N$ و هر $n \in N$، $x$ با $xn$ در $G$ مزدوج باشد آنگاه $(G, N)$ را زوج کامینا [۱] و $N$ را هسته کامینا [۲] می‌نامیم. به عبارت دیگر به ازای هر $x \in G - N$،

$$x^G = xN.$$

**تعریف ۲.۲.۲.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی ناآبلی باشد. در این‌صورت اگر $(G, G')$ یک زوج کامینا باشد آنگاه $G$ را گروه کامینا [۳] می‌نامیم.

**نتیجه ۳.۲.۲.** *با توجه به تعریف ۱.۲.۲ گروه متناهی ناآبلی $G$ یک گروه کامینا است هرگاه هر هم‌دسته غیربدیهی $x[G,G] \in (\frac{G}{[G,G]})^{\#}$ یک رده $G$-تزویج $x^G = x[x,G]$ باشد. این به‌طور بدیهی معادل است با*

$$[x, G] = [G, G], \quad \forall x \in G - [G, G]. \tag{۳.۲}$$

**لم ۴.۲.۲.** *اگر $(G, N)$ یک زوج کامینا باشد آنگاه $Z(G) \leq N \leq G' = [G, G]$.*

---

[۱] Camina pair

[۲] Camina kernel

[۳] Camina group

***برهان.*** چون $(G,N)$ یک زوج کامینا است پس به ازای هر $x \in G - N$، $[x,G] = N$. به‌وضوح $[x,G] \subseteq [G,G]$ و بنابراین $N \leq [G,G]$. حال فرض کنید $z \in Z(G) - 1$. در این‌صورت اگر $z \notin N$ آنگاه چون $(G,N)$ یک زوج کامینا است پس $zN = (z)^G = \{z\}$ و بنابراین $|N| = 1$ که این تناقض است. در نتیجه $Z(G) \leq N$. □

**گزاره ۵.۲.۲.** *هر گروه کامینای پوچ‌توان $G$ یک $p$-گروه است.*

***برهان.*** چون $G$ پوچ‌توان است پس برابر حاصل‌ضرب مستقیم $p$-سیلو زیرگروه‌هایش است و از آن‌جایی‌که $G$ ناآبلی است لذا حداقل یک $p$-سیلو زیرگروه ناآبلی $G_p$ دارد. در این‌صورت $G$ برابر $G_p \times G_{p'}$ از $G_p$ با $p'$-زیرگروه $G_{p'}$ یکتای هال از $G$ است. بنابراین $[G,G]$ حاصل‌ضرب مستقیم از $[G_p,G_p] \leq G_p$ با $[G_{p'},G_{p'}] \leq G_{p'}$ است. به‌عبارت دیگر

$$[G,G] = [G_p \times G_{p'}, G_p \times G_{p'}] = [G_p,G_p] \times [G_{p'},G_{p'}].$$

از آن‌جایی‌که $G$ یک گروه کامینا است لذا $x \in G_p - [G_p,G_p] = G_p - [G,G]$ وجود دارد که بر طبق (۳.۲) داریم

$$[x,G] = [G,G] = [G_p,G_p] \times [G_{p'},G_{p'}].$$

حال برای $G \trianglelefteq G_p \ni x$، $[x,G] \subseteq G_p$ و در نتیجه $[G_{p'},G_{p'}] = 1$. بنابراین عامل مستقیم آبلی $G_{p'}$ در $G$ مرکزی است. از این رو به‌ازای هر $y \in G_{p'} - [G,G]$، $[y,G] = 1 < [G,G]$. اما طبق (۳.۲)، $[y,G] = [G,G]$. این تناقض نشان می دهد که $G_{p'} = 1$. در نتیجه $G = G_p$ یک $p$-گروه است. □

**قضیه ۶.۲.۲.** *فرض کنید $G$ یک $p$-گروه کامینا باشد. در این‌صورت $G$ یک گروه پوچ‌توان با رده پوچ‌توانی ۲ یا ۳ است.*

***برهان.*** به [۶] صفحه ۷۸۸ رجوع شود. □

**تعریف ۷.۲.۲.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی و $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد. در این‌صورت $G$ را یک گروه $n$-کامینا می‌نامیم هرگاه $G$ یک گروه کامینا و $G'$ اجتماعی از $n$ رده‌ی تزویج باشد.

**توجه ۸.۲.۲.** در ادامه این بخش، گروه‌های پوچ‌توان ناآبلی را که در شرط‌های $A$ و $B$ صدق می‌کنند مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم و خواهیم دید که چنین گروه‌هایی دقیقا مرتبط با $p$-گروه‌های کامینا هستند.

**تعریف ۹.۲.۲.** گروه $Q_8 = \langle i,j | i^4 = 1, i^2 = j^2, j^{-1}ij = i^{-1} \rangle$ را گروه کواترنیون[۴] می‌نامیم که یک گروه ناآبلی و از مرتبه ۸ است.

[۴] Quaternion group

**تعریف ۱۰.۲.۲.** به ازای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$،

$$Q_{۴n} = \langle i, j | i^{۲n} = ۱, i^n = j^۲, j^{-۱}ij = i^{-۱} \rangle$$

را گروه کواترنیون تعمیم یافته [5] می‌نامیم که یک گروه ناآبلی و از مرتبه $۴n$ است.

**تعریف ۱۱.۲.۲.** گروه $D_۸ = \langle f, g | g^۴ = f^۲ = ۱, f^{-۱}gf = g^{-۱} \rangle$ را گروه دووجهی [6] (تقارن‌های مربع) می‌نامیم که یک گروه ناآبلی و از مرتبه ۸ است.

**گزاره ۱۲.۲.۲.** *فرض کنید $G$ یک $p$-گروه فوق ویژه باشد. در این‌صورت $G$ یک گروه کامینا با هسته‌ی کامینایی برابر مرکز گروه است.*

***برهان.*** فرض کنید $N = G' = Z(G) = Z_p$. در این‌صورت $|N| = p$ و بنابراین $N$ دقیقا شامل $p$ رده تزویج است. حال فرض کنید $x \in G$. چون $G' \subseteq N$ پس به ازای هر $y \in G$، $[x, y] \in N$ و در نتیجه $y^{-۱}xy \in xN$. لذا $x^G \subseteq xN$ و بنابراین $|x^G| \leq p$. از طرف دیگر بنا به لم ۲۴.۱.۱، $|G| = p^{۲n+۱}$ و از این‌رو $|C_G(x)| \leq p^{۲n}$. پس $|x^G| \geq p$ و در نتیجه $|x^G| = p$. لذا $x^G = xN$. □

**مثال ۱۳.۲.۲.** در گروه کواترنیون $Q_۸$، $Z(Q_۸) = [Q_۸, Q_۸] = \Phi(Q_۸)$ و همچنین در گروه دووجهی $D_۸$، $Z(D_۸) = [D_۸, D_۸] = \Phi(D_۸)$ و چون این دو گروه ناآبلی‌اند و

$$|Z(Q_۸)| = |Z(D_۸)| = ۲$$

پس بنا به تعریف ۲۳.۱.۱، $Q_۸$ و $D_۸$ گروه‌های فوق ویژه و لذا طبق گزاره ۱۲.۲.۲، $Q_۸$ و $D_۸$ گروه‌های کامینا با هسته‌ی کامینایی برابر مرکز گروه هستند.

**قضیه ۱۴.۲.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $۱ \neq H \trianglelefteq G$. در این‌صورت اگر $(G, H)$ یک زوج کامینا و $G$ یک گروه پوچتوان از رده ۲ باشد آنگاه*

*(۱) $G$ یک $p$-گروه ویژه است و*

*(۲) $H = \gamma_۲(G)$.*

***برهان.*** به [۱۷] صفحه ۳۵۳ رجوع شود. □

**قضیه ۱۵.۲.۲.** *فرض کنید $G$ یک $p$-گروه متناهی از رده پوچتوانی ۳ باشد به‌طوری‌که $(G, \gamma_۲(G))$ یک زوج کامینا است و*

$$|G : \gamma_۲(G)| = p^m \quad , \quad |\gamma_۲(G) : \gamma_۳(G)| = p^n.$$

*در این‌صورت: (۱) $(G, \gamma_۳(G))$ نیز یک زوج کامینا است و*
*(۲) $m = ۲n$ و $n$ زوج است.*

---
[5] Generalized quaternion group

[6] Dihedral group

**برهان.** به [۱۷] صفحه ۳۵۷ رجوع شود. □

**نتیجه ۱۶.۲.۲.** *فرض کنید $G$ یک $p$-گروه متناهی از رده پوچ‌توانی ۳ باشد به‌طوری‌که $(G, \gamma_2(G))$ یک زوج کامینا است. در این‌صورت*

$$\gamma_2(G) = Z_2(G) \quad , \quad \gamma_3(G) = Z(G).$$

**برهان.** به [۱۷] صفحه ۳۵۸ رجوع شود. □

**قضیه ۱۷.۲.۲.** *گزاره‌های زیر برای هرگروه ناآبلی متناهی پوچ‌توان $G$ معادلند:*

(۱) *$G$ در شرط $A$ صدق می‌کند.*

(۲) *$G$ در شرط $B$ صدق می‌کند و $Z(G) \leq [G, G]$.*

(۳) *$G$ یک $p$-گروه کامینا است.*

**برهان.** ۱ $\Longleftarrow$ ۲ : چون $G$ در شرط $A$ صدق کند پس بنا به گزاره ۱۰.۱.۲، $G$ در شرط $B$ نیز صدق می‌کند. با توجه به این‌که $G$ ناآبلی است با به کار بردن گزاره ۱۱.۱.۲ و با جای‌گذاری $G$ به‌جای $H$ می‌توان به نتیجه $Z(G) \leq [G, G]$ رسید.
۲ $\Longleftarrow$ ۳ : از آن‌جایی‌که $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند و $Z(G) \leq [G, G]$ لذا با جای‌گذاری $G$ به‌جای $N$ در گزاره ۱۵.۱.۲، رابطه (۳.۲) برقرار است و چون $G$ پوچ‌توان است پس $G$ یک $p$-گروه کامینا می‌باشد.
۳ $\Longleftarrow$ ۱ : چون $G$ یک $p$-گروه کامینا است پس بنا به قضیه ۶.۲.۲ رده پوچ‌توانی $p$-گروه $G$، ۲ یا ۳ است. اگر $G$ یک گروه پوچ‌توان از رده ۳ باشد آنگاه با توجه به قضیه ۱۵.۲.۲ و نتیجه ۱۶.۲.۲ و نیز با توجه به تعریف $p$-گروه کامینا، به ازای هر $x \in G$ رده‌های تزویج $G$ از به‌صورت زیر هستند

$$x^G = x\gamma_2(G) = x[G, G] \qquad \forall \quad x \in G - \gamma_2(G)$$

$$x^G = x\gamma_3(G) = xZ(G) \qquad \forall \quad x \in \gamma_2(G) - \gamma_3(G)$$

$$x^G = \{x\} \qquad \forall \quad x \in \gamma_3(G)$$

بنا به مطالب فوق و نیز لم ۴.۲.۲، $G$ سری مرکزی پایینی زیر را دارد

$$1 = \gamma_4(G) \subseteq \gamma_3(G) = Z(G) \subseteq \gamma_2(G) = G' \subseteq \gamma_1(G) = G. \tag{۴.۲}$$

با توجه به سری (۴.۲) عناصر دلخواه $x$ و $y$ از $G$ در دو زیرمجموعه $\gamma_1(G) - \gamma_2(G)$ یا $\gamma_2(G) - \gamma_3(G)$ قرار می‌گیرند. بنابراین سه حالت زیر امکان پذیر است:
**(حالت اول)** $x, y \in \gamma_1(G) - \gamma_2(G)$. چون $y \in \gamma_1(G) - \gamma_2(G)$ پس $y^{-1} \in \gamma_1(G) - \gamma_2(G)$.
در این‌صورت $x, y^{-1} \notin Z(G)$ و نیز با توجه به رده‌های تزویج فوق

$$x^G = xG' \quad , \quad (y^{-1})^G = y^{-1}G'.$$

فرض کنید $x^G \neq (y^{-۱})^G$. در این‌صورت $xG' \neq y^{-۱}G'$ که این نتیجه می‌دهد $xy \notin G'$. بنابراین $(xy)^G = (xy)G'$. پس

$$x^G y^G = xG'yG' = (xy)G' = (xy)^G.$$

در نتیجه به ازای $x, y \in \gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$ حکم برقرار است.

**(حالت دوم)** $x \in \gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$ و $y \in \gamma_۲(G) - \gamma_۳(G) = \gamma_۲(G) - Z(G)$. در این‌صورت بنا به رده‌های تزویج فوق، $x^G = xG'$ و $y^G = y\gamma_۳(G)$. حال فرض کنید $x^G \neq (y^{-۱})^G$. بنابراین

$$x^G y^G = xG' y\gamma_۳(G) = xG'\gamma_۳(G) = xG'.$$

از طرفی چون $x \notin \gamma_۲(G)$ و $y \in \gamma_۲(G)$ پس $xy \notin \gamma_۲(G)$. لذا

$$(xy)^G = xyG' = xG'.$$

در نتیجه $x^G y^G = (xy)^G$ و حکم برقرار است.

**(حالت سوم)** $x, y \in \gamma_۲(G) - \gamma_۳(G)$. لذا با توجه به سری (۴.۲)، $x, y \notin Z(G)$. پس بنا به رده‌های تزویج فوق

$$x^G = x\gamma_۳(G) \quad , \quad y^G = y\gamma_۳(G).$$

حال فرض کنید $x^G \neq (y^{-۱})^G$. بنابراین $x\gamma_۳(G) \neq (y^{-۱})\gamma_۳(G)$ در نتیجه $xy \notin \gamma_۳(G)$. از آن‌جایی‌که $x, y \in \gamma_۲(G) - \gamma_۳(G) = \gamma_۲(G) - Z(G)$ لذا $xy \in \gamma_۲(G) - Z(G)$. پس

$$(xy)^G = (xy)\gamma_۳(G).$$

از طرف دیگر

$$x^G y^G = x\gamma_۳(G) y\gamma_۳(G) = (xy)\gamma_۳(G)$$

و بنابراین حکم برقرار است.

اما اگر $G$ یک گروه پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی ۲ باشد آنگاه با توجه به قضیه ۱۴.۲.۲ و نیز با توجه به تعریف $p$-گروه کامینا، به ازای هر $x \in G$ رده‌های تزویج از $G$ به‌صورت زیر هستند

$$x^G = x\gamma_۲(G) \quad \forall \quad x \in G - \gamma_۲(G)$$

$$x^G = x \qquad \forall \quad x \in \gamma_۲(G)$$

بنا به مطالب فوق و نیز لم ۴.۲.۲، $G$ سری مرکزی پایینی زیر را دارد

$$۱ = \gamma_۳(G) \subseteq \gamma_۲(G) = G' = Z(G) \subseteq \gamma_۱(G) = G. \tag{۵.۲}$$

با توجه به سری (۵.۲) عناصر دلخواه $x$ و $y$ از $G$ تنها در زیرمجموعه $\gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$ قرار می‌گیرند. در نتیجه تنها یک حالت امکان پذیر است که در این‌صورت، قضیه شبیه حالت‌های قبل ثابت می‌شود. □

## ۳.۲ ایزوکلینیسم و حاصل‌ضرب رده‌های تزویج

**تعریف ۱.۳.۲.** فرض کنید $G$ و $H$ دو گروه متناهی باشند. در این‌صورت زوج $(\varphi, \psi)$ را یک ایزوکلینیسم از $G$ به $H$ می‌نامیم هرگاه

(۱) نگاشت $\varphi$ یک ایزومورفیسم از $\frac{G}{Z(G)}$ به $\frac{H}{Z(H)}$ باشد،

(۲) نگاشت $\psi$ یک ایزومورفیسم از $[G, G]$ به $[H, H]$ باشد،

(۳) نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
\frac{G}{Z(G)} \times \frac{G}{Z(G)} \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "a_G"'] & \frac{H}{Z(H)} \times \frac{H}{Z(H)} \arrow[d, "a_H"] \\
{[G, G]} \arrow[r, "\psi"'] & {[H, H]}
\end{tikzcd}$$

به عبارت دیگر $a_H \circ (\varphi \times \varphi) = \psi \circ a_G$، که به ازای هر $g_1, g_2 \in G$،

$$a_G(g_1 Z(G), g_2 Z(G)) = [g_1, g_2]$$

و نیز به ازای هر $h_1, h_2 \in H$،

$$a_H(h_1 Z(H), h_2 Z(H)) = [h_1, h_2].$$

اگر یک ایزوکلینیسم از $G$ به $H$ وجود داشته باشد آنگاه می‌گوییم $G$ با $H$ ایزوکلینیک است و به اختصار می‌نویسیم $G \sim H$.

**لم ۲.۳.۲.** *ایزوکلینیک بودن یک رابطه هم‌ارزی در میان گروه‌های متناهی است.*

**لم ۳.۳.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ با یک گروه آبلی متناهی $H$ ایزوکلینیک است اگر و تنها اگر $G$ آبلی باشد.*

***برهان.*** اثبات واضح است. □

**قضیه ۴.۳.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد به‌طوری‌که $N \trianglelefteq G$ و $N \not\subseteq [G, G]$. در این‌صورت $G$ با $\frac{G}{N}$ ایزوکلینیک است اگر و تنها اگر $[G, G]$ متناهی باشد و $N \cap [G, G] = 1$.*

***برهان.*** به [۱۲] صفحه ۱۳۴ رجوع شود. □

هر دو گروه متناهی یکریخت، ایزوکلینیک هستند اما عکس این مطلب لزوما برقرار نیست. مثال زیر نشان می‌دهد گروه‌های کواترنیون $Q_8$ و دووجهی $D_8$ دو گروه غیریکریخت هستند که ایزوکلینیک می‌باشند.

**مثال ۵.۳.۲.** گروه کواترنیون $Q_8$ دارای شش عنصر از مرتبه ۴ اما گروه دووجهی $D_8$ دارای دو عنصر از مرتبه ۴ است. لذا این دو گروه یکریخت نیستند. حال نگاشت $\psi$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\psi : [Q_8, Q_8] = \{-1, 1\} \longrightarrow [D_8, D_8] = \{1, g^2\}$$

$$\psi : \begin{cases} 1 \longmapsto 1 \\ -1 \longmapsto g^2 \end{cases}$$

که یک هومورفیسم یک به یک و پوشاست و بنابراین $[Q_8, Q_8] \cong [D_8, D_8]$. به‌علاوه نگاشت $\varphi$ را به‌صورت زیر تعریف می کنیم

$$\varphi : \frac{Q_8}{Z(Q_8)} \longrightarrow \frac{D_8}{Z(D_8)}$$

$$\varphi : \begin{cases} i\{-1, 1\} \longmapsto f\{1, g^2\} \\ j\{-1, 1\} \longmapsto g\{1, g^2\} \end{cases}$$

که یک هومورفیسم یک به یک و پوشاست و بنابراین $\frac{Q_8}{Z(Q_8)} \cong \frac{D_8}{Z(D_8)}$. با در نظرگرفتن نگاشت‌های $a_{Q_8}$ و $a_{D_8}$ از آن‌جایی‌که

$$\psi \circ a_{Q_8}(i\{-1, 1\}, i\{-1, 1\}) = \psi[i, i] = \psi(1) = 1$$

و

$$a_{D_8} \circ \varphi(i\{-1, 1\}, i\{-1, 1\}) = a_{D_8}(f\{1, g^2\}, f\{1, g^2\}) = [f, f] = 1$$

لذا در این حالت

$$\psi \circ a_{Q_8}(i\{-1, 1\}, i\{-1, 1\}) = a_{D_8} \circ \varphi(i\{-1, 1\}, i\{-1, 1\}),$$

به‌طور مشابه

$$\psi \circ a_{Q_8}(j\{-1, 1\}, j\{-1, 1\}) = a_{D_8} \circ \varphi(j\{-1, 1\}, j\{-1, 1\}).$$

هم‌چنین

$$\psi \circ a_{Q_8}(i\{-1, 1\}, j\{-1, 1\}) = \psi[i, j] = \psi(i^{-1}j^{-1}ij) = \psi(-1) = g^2$$

$$a_{D_8} \circ \varphi(i\{-1, 1\}, j\{-1, 1\}) = a_{D_8}(f\{1, g^2\}, g\{1, g^2\}) = [f, g] = f^{-1}g^{-1}fg = g^2.$$

لذا در این حالت نیز

$$\psi \circ a_{Q_8}(i\{-1, 1\}, j\{-1, 1\}) = a_{D_8} \circ \varphi(i\{-1, 1\}, j\{-1, 1\})$$

و بنابراین در هر یک از حالت‌های فوق نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd}
\frac{Q_8}{Z(Q_8)} \times \frac{Q_8}{Z(Q_8)} \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "a_{Q_8}"'] & \frac{D_8}{Z(D_8)} \times \frac{D_8}{Z(D_8)} \arrow[d, "a_{D_8}"] \\
{[Q_8, Q_8]} \arrow[r, "\psi"'] & {[D_8, D_8]}
\end{tikzcd}$$

در نتیجه بنا به تعریف ۱.۳.۲ گروه کواترنیون $Q_8$ و دووجهی $D_8$ ایزوکلینیک هستند و می‌نویسیم $Q_8 \sim D_8$.

**گزاره ۶.۳.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)}$. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

*(۱) $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند.*

*(۲) اگر $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{G}$ و $\bar{x}^{\bar{G}} \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$ آنگاه برای تابع $c = c_G : \bar{G} \times \bar{G} \longrightarrow [G, G]$ با ضابطه $c(\bar{x}, \bar{y}) = [x, y]$ داریم*

$$c(\bar{x}, \bar{G})^{\bar{y}} c(\bar{y}, \bar{G}) = c(\bar{x}\bar{y}, \bar{G}).$$

***برهان.*** فرض کنید $x, y \in G$. در این‌صورت تحت اپی‌مورفیسم طبیعی از $G$ به‌روی $\bar{G}$، $x^G Z(G) \subseteq G$ تصویر معکوس از $\bar{x}^{\bar{G}} \subseteq \bar{G}$ و به‌طور مشابه $(y^{-1})^G Z(G) \subseteq G$ تصویر معکوس از $(\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$ است. بنا به لم ۱۶.۱.۱، $x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G)$ در شرط $B$ معادل $\bar{x}^{\bar{G}} \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}$ در قسمت دوم گزاره است. به عبارت دیگر

$$x^G Z(G) \neq (y^{-1})^G Z(G) \Longleftrightarrow \bar{x}^{\bar{G}} \neq (\bar{y}^{-1})^{\bar{G}}.$$

همچنین از (۱.۱) می‌دانیم که $x^G y^G = (xy)^G$ در شرط $B$ معادل

$$[x, G]^y [y, G] = [xy, G] \tag{۶.۲}$$

است. با توجه به تابع $c$، تساوی (۶.۲) معادل $c(\bar{x}, \bar{G})^{\bar{y}} c(\bar{y}, \bar{G}) = c(\bar{x}\bar{y}, \bar{G})$ در قسمت دوم گزاره است. $\square$

**نتیجه ۷.۳.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت اگر $G$ در شرط $B$ صدق کند آنگاه هرگروه متناهی $H$ ایزوکلینیک با $G$ نیز در شرط $B$ صدق می‌کند.*

***برهان.*** فرض کنید $G$ در شرط $B$ صدق کند و نیز $H$ با $G$ ایزوکلینیک باشد. در این‌صورت بنا به گزاره ۶.۳.۲، $G$ در قسمت دوم گزاره ۶.۳.۲ صدق می‌کند. واضح است که $G$ در قسمت دوم گزاره ۶.۳.۲

صدق می‌کند اگر و تنها اگر $H$ در قسمت دوم گزاره ۶.۳.۲ صدق کند. بنابراین $H$ نیز در شرط $B$ صدق می‌کند. $\square$

**لم ۸.۳.۲.** *فرض کنید $G$ و $H$ دوگروه متناهی و زوج $(\varphi, \psi)$ یک ایزوکلینیسم از $G$ به $H$ باشد. در این‌صورت به ازای هر عدد صحیح مثبت $n$،*

$$\psi(\gamma_{n+1}(G)) = \gamma_{n+1}(H).$$

***برهان.*** چون $G$ با $H$ ایزوکلینیک است پس دو یکریختی $\varphi$ و $\psi$ و نیز نگاشت‌های $a_G$ و $a_H$ وجود دارند به‌طوری‌که نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd}
\frac{G}{Z(G)} \times \frac{G}{Z(G)} \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "a_G"'] & \frac{H}{Z(H)} \times \frac{H}{Z(H)} \arrow[d, "a_H"] \\
{[G, G]} \arrow[r, "\psi"'] & {[H, H]}
\end{tikzcd}$$

از آن‌جایی‌که نمودار فوق جابه‌جایی است لذا

$$\begin{aligned}
\psi(\gamma_{n+1}(G)) &= \psi([G, \gamma_n(G)]) \\
&= \psi \circ a_G(\bar{G}, \overline{\gamma_n(G)}) \\
&= a_H \circ \varphi \times \varphi(\bar{G}, \overline{\gamma_n(G)})
\end{aligned}$$

و چون $\varphi \times \varphi$ و $\psi$ یکریختی هستند پس

$$\begin{aligned}
a_H \circ \varphi \times \varphi(\bar{G}, \overline{\gamma_n(G)}) &= a_H(\varphi(\frac{G}{Z(G)}), \varphi(\frac{\gamma_n(G)}{Z(G)})) \\
&= a_H(\frac{H}{Z(H)}, \frac{\gamma_n(H)}{Z(H)}) \\
&= [H, \gamma_n(H)] \\
&= \gamma_{n+1}(H).
\end{aligned}$$

$\square$

**قضیه ۹.۳.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت حداقل یک گروه متناهی $H$ ایزوکلینیک با $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(H) \leq [H, H]$. به‌علاوه اگر $G$ یک $p$-گروه باشد آنگاه $H$ نیز $p$-گروه است.*

***برهان.*** به [۱۲] صفحه ۱۳۵ رجوع شود. □

**قضیه ۱۰.۳.۲.** *فرض کنید $G$ یک گروه ناآبلی متناهی پوچ‌توان باشد. در این‌صورت $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $G$ با یک $p$-گروه کامینا ایزوکلینیک باشد.*

***برهان.*** فرض کنید $G$ در شرط $B$ صدق کند. بنا به قضیه ۹.۳.۲ حداقل یک گروه متناهی $H$ ایزوکلینیک با $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(H) \leq [H, H]$. از آن‌جایی‌که $G$ پوچ‌توان و از رده پوچ‌توانی $c \geq ۲$ است لذا

$$۱ = \gamma_{c+۱}(G) < \gamma_c(G) \leq \gamma_۲(G) = [G, G].$$

از این‌رو با توجه به لم ۸.۳.۲،

$$۱ = \gamma_{c+۱}(H) < \gamma_c(H) \leq \gamma_۲(H) = [H, H].$$

بنابراین $H$ ناآبلی و پوچ‌توان با رده پوچ‌توانی $c$ یکسان با $G$ است. چون $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند پس بنا به نتیجه ۷.۳.۲، $H$ نیز در شرط $B$ صدق می‌کند. از این‌رو $H$ یک گروه ناآبلی متناهی پوچ‌توان است که در شرط $B$ صدق می‌کند و نیز $Z(H) \leq [H, H]$. بنابراین طبق قضیه ۱۷.۲.۲، $H$ یک $p$-گروه کامینا است.
به‌عکس فرض کنید گروه متناهی $G$ با $p$-گروه $H$ که یک گروه کامینا است ایزوکلینیک باشد. چون $H$، $p$-گروه کامینا است پس بنا به گزاره ۱۷.۲.۲، $H$ در شرط $B$ صدق می‌کند و از آن‌جایی‌که $G$ با $H$ ایزوکلینیک است لذا طبق نتیجه ۷.۳.۲، $G$ نیز در شرط $B$ صدق می‌کند و در نتیجه حکم برقرار است. □

# فصل ۳

# گروه‌های متناهی غیرپوچ‌توان با رده‌های تزویج خاص

این فصل شامل دو بخش است که مطالب و قضایای اصلی هر دو بخش برگرفته از [۵] می‌باشد. در این فصل گروه‌های ناآبلی غیرپوچ‌توانی[۱] را که در شرط $B$ صدق می‌کنند مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. در بخش اول، ابتدا به بررسی دقیق‌تر ساختار و ویژگی‌های گروه‌های فروبنیوس پرداخته و مثال‌ها و قضایایی را در این زمینه بیان می‌کنیم. سپس گروه‌های $F^{+} \rtimes F^{\times}$ و $E_9 \rtimes Q_8$ را معرفی نموده و ثابت می‌کنیم $F^{+} \rtimes F^{\times}$ و $E_9 \rtimes Q_8$ گروه‌های فروبنیوس هستند. در بخش دوم، نشان می‌دهیم که گروه‌های $F^{+} \rtimes F^{\times}$ و $E_9 \rtimes Q_8$ در شرط $A$ نیز صدق می‌کنند.

## ۱.۳ ویژگی‌های گروه‌های فروبنیوس

**قضیه ۱.۱.۳.** *گروه متناهی $G$ یک گروه فروبنیوس است اگر و تنها اگر شامل زیرگروه غیربدیهی، سره و نرمال $N$ باشد که برای هر عضو غیربدیهی $x$ از $N$، $C_G(x) \leq N$.*

***برهان.*** فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با مکمل فروبنیوس $H$ و هسته فروبنیوس $N$ باشد و $1_G \neq x \in N$. در این‌صورت نشان می‌دهیم $C_G(x) \leq N$. اکنون فرض کنید که برای $h \in H$ و $x \in N$، $h \in H \cap C_G(x)$. چون $h \in C_G(x)$ پس $hxh^{-1} = x$ و در نتیجه $h = xhx^{-1} = h^x \in H^x$. بنابراین $h \in H \cap H^x = 1_G$ و از این‌رو $h = 1_G$. اینک فرض کنید $1_G \neq y \in C_G(x)$. در این‌صورت ثابت می‌کنیم $y \in N$.
فرض کنید $y \notin N$. در این‌صورت بنا به تعریف هسته فروبنیوس در ۲.۳.۱، $z \in G$ وجود دارد که $1_G \neq y \in H^z$. چون $y \in C_G(x)$ پس $yxy^{-1} = x$ و از آن‌جایی‌که $y \in H^z$ لذا $h \in H$ وجود دارد

[۱] Non-nilpotent

به‌طوری‌که $y = zhz^{-1}$ و در نتیجه $z^{-1}yz = h$. لذا برای $z' \in G$، $y^{z^{-1}} = y^{z'} = h \in H$. اینک با توجه به این‌که $yxy^{-1} = x$ داریم

$$\begin{aligned}&(zhz^{-1})x(zhz^{-1})^{-1} = x \Longrightarrow zh(z^{-1}xz)h^{-1}z^{-1} = x\\ &\Longrightarrow zh(x^{z^{-1}})h^{-1}z^{-1} = x \Longrightarrow h(x^{z^{-1}})h^{-1} = z^{-1}xz\\ &\Longrightarrow h(x^{z^{-1}})h^{-1} = x^{z^{-1}}.\end{aligned}$$

در نتیجه $h \in C_G(x^{z^{-1}})$ و از این‌رو $y^{z^{-1}} \in C_G(x^{z^{-1}})$. به این ترتیب $y^{z^{-1}} \in H \cap C_G(x^{z^{-1}})$. چون $x^{z^{-1}} \in N$ $(N \trianglelefteq G)$ و $x^{z^{-1}} \neq 1_G$ $(x \neq 1_G)$ و همچنین $y^{z^{-1}} \in H \cap C_G(x^{z^{-1}})$ پس طبق بخش اول اثبات $y^{z^{-1}} = 1_G$ و از این‌رو $y = 1_G$ که این یک تناقض است. بنابراین $y \in N$ و در نتیجه $C_G(x) \subseteq N$.

به‌عکس فرض کنید $G$ یک گروه متناهی و شامل زیرگروه نرمال، سره و غیر بدیهی $N$ باشد که برای هر عضو غیربدیهی $x$ از $N$، $C_G(x) \leq N$. ابتدا نشان می‌دهیم که $N$ یک زیرگروه نرمال هال از $G$ است. فرض کنید $N$ یک زیرگروه نرمال هال از $G$ نباشد. در این‌صورت عدد اول $p$ وجود دارد به‌طوری‌که $p||N|$ و $p|[G:N]$. حال فرض کنید $|G| = p^{\alpha}m$ و $|N| = p^{\beta}m'$ که $\alpha > \beta$ و $(p,m) = 1 = (p,m')$ و همچنین $P$ یک $p$–سیلو زیرگروه از $N$ و $Q$ یک $p$–سیلو زیرگروه از $G$ باشد به‌طوری‌که $\{1_G\} \leq P \leq Q$ و $P \neq Q$. در این‌صورت $|P| = p^{\beta}$ و $|Q| = p^{\alpha}$. چون $Q$ یک $p$–گروه غیر بدیهی است پس $Z(Q) \neq 1$. به‌وضوح $P \leq Q \cap N$، $Q \cap N \leq N$ و $Q \cap N \leq Q$. بنابراین $Q \cap N$ یک $p$–زیرگروه از $N$ است.

حال از آن‌جایی‌که $P$ یک $p$–زیرگروه ماکسیمال از $N$ است لذا $Q \cap N \leq P$ و در نتیجه $P = Q \cap N$. فرض کنید $x \in Z(Q)$ که $O(x) = p$. در این‌صورت به ازای هر $g \in Q$، $xg = gx$. بنابراین $Q \subseteq C_G(x)$.

حال اگر $x \in P$ آنگاه $x \in N$ و از این‌رو $C_G(x) \leq N$. لذا $Q \subseteq C_G(x) \subseteq N$ و چون $Q \cap N = P$ پس این یک تناقض است. بنابراین $x \notin P$. چون برای هر $1_G \neq y \in P$، $y \in Q$ $(P \leq Q)$ پس $xy = yx$ و بنابراین $x \in C_G(y)$. حال $1_G \neq y \in N$ و طبق فرض $C_G(y) \leq N$. از این‌رو $x \in N$ به‌طوری‌که $x \in Q \cap N = P$ و این یک تناقض است. بنابراین $N$ می‌بایست یک زیرگروه نرمال هال از $G$ باشد.

بنا به قضیه ۳۵.۱.۱ (شور– زازنهوس) و نتیجه ۳۶.۱.۱ مکمل $H$ برای $N$ در $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $G = NH$ و $N \cap H = 1_G$. فرض کنید $x \in G - H$ و $H \cap H^x \neq 1_G$. چون $G = NH$ پس می‌توانیم بنویسیم $x = nh$ که $n \in N$ و $h \in H$. بنابراین

$$H^x = H^{nh} = (nh)(H)(nh)^{-1} = nh(H)h^{-1}n^{-1} = n(hHh^{-1})n^{-1} = nHn^{-1} = H^n.$$

در نتیجه $H \cap H^n \neq 1_G$ و بنابراین $1_G \neq y \in H \cap H^n$ که $y \in H$ و نیز $1_G \neq h' \in H$ وجود دارد

به‌طوری‌که $y = nh'n^{-1}$. لذا

$$nh'n^{-1} \in H \Longrightarrow (nh'n^{-1})h'^{-1} \in H \Longrightarrow n(h'n^{-1}h'^{-1}) \in H.$$

اما $n(h'n^{-1}h'^{-1}) \in N$ زیرا $(N \trianglelefteq G)$ $h'n^{-1}h'^{-1} \in N$. در نتیجه $nh'n^{-1}h'^{-1} \in N \cap H = 1_G$ و از این‌رو $nh' = h'n$. لذا $h' \in C_G(x) \leq N$ و چون $h' \neq 1_G$ پس این یک تناقض است. بنابراین به ازای هر $x \in G - H$، $H \cap H^x = 1_G$ و در نتیجه بنا به قضیه ۵.۳.۱، $G$ یک گروه فروبنیوس است. $\square$

**لم ۲.۱.۳.** *مرکز هر گروه فروبنیوس بدیهی است.*

***برهان.*** فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ و مکمل فروبنیوس $H$ باشد. در این‌صورت بنا به قضیه ۱.۱.۳ به ازای هر $x \in N$، $C_G(x) \leq N$. از طرفی چون به ازای هر $x \in G$، $Z(G) \leq C_G(x)$ پس $Z(G) \leq N$. حال فرض کنید $1 \neq x \in Z(G)$. چون $Z(G) \leq N$ و از طرفی طبق گزاره ۴.۳.۱، $H \cap N = 1$ پس $x \notin H$. بنا به گزاره ۵.۳.۱ به ازای هر $g \in G - H$، $H^g \cap H = 1$ اما برای $x \in Z(G)$، $H^x = H$ که تناقض است. $\square$

**نتیجه ۳.۱.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه باشد. در این‌صورت اگر $G$ پوچ‌توان غیربدیهی باشد آنگاه $G$ یک گروه فروبنیوس نیست.*

***برهان.*** چون $G$ پوچ‌توان غیربدیهی است پس $Z(G) \neq 1$ لذا بنا به لم ۲.۱.۳ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

**لم ۴.۱.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ و مکمل فروبنیوس $H$ باشد. در این‌صورت*

*(۱) $N \subseteq G'$.*

*(۲) اگر مکمل فروبنیوس آبلی باشد آنگاه $N = G'$.*

***برهان.*** (۱). فرض کنید $1 \neq h \in H$. در این‌صورت بنا به لم ۷.۳.۱ به ازای هر $n \in N$، $g \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $h^g = nh$. از این‌رو

$$h^g = ghg^{-1} = nh \Longrightarrow ghg^{-1}h^{-1} = n$$

$$\Longrightarrow [g,h] = n \Longrightarrow N \subseteq G'.$$

(۲). چون $H$ آبلی است و $\frac{G}{N} \cong H$ پس $\frac{G}{N}$ نیز آبلی است. لذا $G' \subseteq N$ و چون بنا به (۱)، $N \subseteq G'$، پس $N = G'$. $\square$

**گزاره ۵.۱.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ و مکمل فروبنیوس $H$ باشد. در این‌صورت $N = [N, H]$.*

*برهان.* بنا به قضیه ۳.۳.۱، $N$ در $G$ نرمال است پس به‌وضوح $[N,H] \leq N$. اما برای نشان دادن این‌که برای گروه فروبنیوس $G$ حالت تساوی آن برقرار است کافی است عنصر ثابت $H \ni h \neq ۱$ را در نظر بگیرید. چون $C_N(h) = ۱$ پس عناصر $\{n^{-۱}h^{-۱}nh | n \in N\}$ عناصر متمایزی از $N$ هستند و از این‌رو می‌بایست تمام عناصر از $N$ را در برداشته باشد و در نتیجه $N = [N,H]$. □

**نتیجه ۶.۱.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ و مکمل فروبنیوس $H$ باشد. در این‌صورت $N = [N,G]$.*

*برهان.* بنا به گزاره ۵.۱.۳، $N = [N,H]$ که به‌وضوح $N = [N,H] \leq [N,G]$ و چون $N \trianglelefteq G$ پس $[N,G] \leq N$. در نتیجه $N = [N,G]$. □

**مثال ۷.۱.۳.** گروه‌های آبلی فروبنیوس نیستند.

**مثال ۸.۱.۳.** $p$-گروه‌ها فروبنیوس نیستند زیرا مرکز هر $p$-گروه غیر بدیهی است.

**مثال ۹.۱.۳.** گروه‌های ناآبلی کواترنیون $Q_۸$ و دووجهی $D_۸$ گروه‌های فروبنیوس نیستند زیرا ۲-گروه هستند.

**مثال ۱۰.۱.۳.** بر طبق نتیجه ۱۶.۳.۱، $G \cong F^+ \rtimes F^\times$ یک گروه آفین از درجه یک است. در واقع $G$ برابر $Aff(۱,F)$ و گروهی (تحت ترکیب توابع) از همه توابع $\tau_{a,b} : F \longrightarrow F$ است که $a \in F^\times$ و $b \in F^+$ و به ازای هر $x \in F$، $\tau_{a,b}(x) = ax + b$. به‌عبارت دیگر

$$G \cong Aff(۱,F) = \{\tau_{a,b} | a \in F^\times, b \in F^+\}.$$

اگر $F$ متناهی باشد و $|F| = q$ آنگاه $|G| = q(q-۱)$.
اینک اگر $|F| = ۲$ آنگاه $|G| = |Aff(۱,F)| = ۲$ و در نتیجه $G$ دوری است و لذا بنا به لم ۲.۱.۳، $G$ در این حالت گروه فروبنیوس نیست.
اکنون فرض کنید $F$ یک میدان متناهی باشد که $|F| = q$ و $q > ۲$. بنا به گزاره‌های ۱۴.۳.۱ و ۱۵.۳.۱ و نتیجه ۱۶.۳.۱ گروه تبدیلات $N = \{\tau_{۱,b} | b \in F\}$ یک زیرگروه نرمال از $G$ و یکریخت با گروه جمعی از میدان $F$ و هم‌چنین $H = St_G(۰) = \{\tau_{a,۰} | a \in F^\times\}$ یک زیرگروه از $G$ و یکریخت با گروه ضربی میدان $F$ و در نتیجه $G$ حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $N$ با $H$ است.
اگر $b \neq ۰$ آنگاه $\tau_{۱,b}$ هیچ نقطه ثابتی در $F$ ندارد. زیرا اگر نقطه ثابتی مانند $x \in F$ داشته باشد آنگاه $\tau_{۱,b}(x) = x + b = x$ دلالت دارد که $b = ۰$ و این تناقض با فرض $b \neq ۰$ است. اگر $a \neq ۱$ آنگاه $\tau_{a,b}$ نقطه ثابت منحصربفرد $\dfrac{b}{۱-a}$ را دارد. حال فرض کنید $N \ni \tau \neq ۱$، $\pi \in C_G(\tau)$ و

$$\tau(x) = x + a \quad , \quad \pi(x) = bx + c.$$

در این‌صورت

$$\tau^{-۱}(x) = x - a \quad , \quad \pi^{-۱}(x) = b^{-۱}(x - c).$$

چون $\tau = \pi\tau\pi^{-۱}$ پس

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \tau\pi\tau^{-۱}(x) \\ &= \tau\pi(x-a) \\ &= \tau(bx-ab+c) \\ &= bx-ab+c+a. \end{aligned}$$

از این‌رو

$$bx+c = bx-ab+c+a \Longrightarrow ۰ = a(۱-b).$$

لذا $a = ۰$ یا $b = ۱$. اگر $a = ۰$ آنگاه $\tau(x) = x$ و در نتیجه $\tau = ۱$ که با فرض در تناقض است. بنابراین $b = ۱$، در نتیجه $\pi(x) = x+c$ و $\pi \in N$ از این‌رو $C_G(\tau) \subseteq N$. لذا طبق قضیه‌ی ۱.۱.۳، $G = N \rtimes H$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N \cong F^+ \cong F^+ \rtimes ۱$ و مکمل فروبنیوس $H \cong F^\times \cong ۱ \rtimes F^\times$ است.

**نتیجه ۱۱.۱.۳.** *فرض کنید $G = F^+ \rtimes F^\times$. در این‌صورت $G' = [G,G] = F^+ \times ۱$. به‌علاوه*

$$\gamma_۲(G) = \gamma_۳(G) = \gamma_۴(G) = \gamma_۵(G) = \ldots = \gamma_\infty(G) = F^+ \times ۱.$$

***برهان.*** بنا به مثال ۱۰.۱.۳، $G = F^+ \rtimes F^\times$ یک گروه فروبنیوس با مکمل فروبنیوس $F^\times \cong ۱ \rtimes F^\times$ است. اینک چون $F^\times$ آبلی است (با توجه به اینکه $F$ میدان است و خاصیت جابه‌جایی در آن برقرار است.) پس با توجه به لم ۴.۱.۳،

$$G' = [G,G] = F^+ \times ۱.$$

از این‌رو بنا به نتیجه ۶.۱.۳،

$$\gamma_۲(G) = \gamma_۳(G) = \gamma_۴(G) = \gamma_۵(G) = \ldots = \gamma_\infty(G) = F^+ \times ۱.$$

□

**نتیجه ۱۲.۱.۳.** *فرض کنید $G = F^+ \rtimes F^\times$. در این‌صورت $G$ غیرپوچ‌توان است.*

***برهان.*** بنا به نتیجه ۱۱.۱.۳ سری مرکزی پایینی از $G = F^+ \rtimes F^\times$ هیچ‌گاه به یک نمی‌رسد لذا طبق قضیه ۱۲.۲.۱، $G = F^+ \rtimes F^\times$ یک گروه غیرپوچ‌توان است. □

**مثال ۱۳.۱.۳.** عناصر

$$\rho_۱ = (۲۴۳۷)(۵۶۹۸) \quad , \quad \rho_۲ = (۲۵۳۹)(۴۸۷۶),$$

$$\pi_۱ = (۱۲۳)(۴۵۶)(۷۸۹) \quad , \quad \pi_۲ = (۱۴۷)(۲۵۸)(۳۶۹)$$

را از گروه متقارن $S_۹$ در نظر بگیرید. به‌وضوح

$$\pi_۱^۳ = \pi_۲^۳ = ۱ \quad , \quad \pi_۱\pi_۲ = \pi_۲\pi_۱$$

و

$$\rho_1^2 = (23)(47)(59)(68) = \rho_2^2 \quad , \quad \rho_2\rho_1\rho_2^{-1} = \rho_1^{-1}.$$

هم‌چنین

$$\rho_1\pi_1\rho_1^{-1} = \pi_2 \quad , \quad \rho_1\pi_2\rho_1^{-1} = \pi_1^2$$

$$\rho_2\pi_1\rho_2^{-1} = \pi_1\pi_2 \quad , \quad \rho_2\pi_2\rho_2^{-1} = \pi_1\pi_2^2.$$

قرار می‌دهیم

$$N = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \quad , \quad H = \langle \rho_1, \rho_2 \rangle.$$

در این‌صورت $N, H \leq S_9$. هم‌چنین بنا به ویژگی‌های عناصر $\pi_1$، $\pi_2$، $\rho_1$ و $\rho_2$ ملاحظه می‌شود که $N \cong E_9$ ( $E_9$ یک ۳-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه ۹ است) و $H \cong Q_8$. به‌علاوه $H \subseteq N_{S_9}(N)$ و در نتیجه $NH \leq S_9$. قرار می‌دهیم $G = NH$. چون $NH$ زیرگروه است پس $NH = \langle N, H \rangle$. در واقع

$$G = NH = \langle N, H \rangle = \langle \pi_1, \pi_2, \rho_1, \rho_2 \rangle.$$

اکنون چون $N \cap H = 1$ و $N \trianglelefteq G$ و نیز $H \leq G$ پس $G = N \rtimes H$ که با توجه به یکریختی‌های مذکور، $G \cong E_9 \rtimes Q_8$. ( $G$ برابر حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم داخلی $N$ و $H$ و یکریخت با حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم خارجی $E_9$ با $Q_8$ است). اینک چون به ازای هر $n \in N$، $C_G(n) \leq N$ پس بنا به قضیه ۱.۱.۳، $G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $N$ و مکمل فروبنیوس $H$ است. بنابراین با توجه به یکریختی فوق، $E_9 \rtimes Q_8$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $E_9 \cong E_9 \rtimes 1$ و مکمل فروبنیوس $Q_8 \cong 1 \rtimes Q_8$ است.

**نتیجه ۱۴.۱.۳.** *فرض کنید $G = E_9 \rtimes Q_8$. ( $G$ حاصل‌ضرب نیم مستقیم خارجی گروه آبلی مقدماتی $E_9$ با گروه کواترنیون $Q_8$ است). در این‌صورت طبق قضیه ۳۱.۱.۱، $G$ زیرگروه نرمالی مانند $\bar{E_9}$ و زیرگروهی مانند $\bar{Q_8}$ دارد که $\bar{E_9} \cong E_9$ و $\bar{Q_8} \cong Q_8$ به‌طوری‌که $G = \bar{E_9}\bar{Q_8}$ و $\bar{E_9} \cap \bar{Q_8} = 1$. در واقع*

$$\bar{E_9} = \{(b, 1) | b \in E_9\} \quad , \quad \bar{Q_8} = \{(1, q) | q \in Q_8\}$$

*و $G$ برابر حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم داخلی $\bar{E_9}$ با $\bar{Q_8}$ است.*

**تذکر ۱۵.۱.۳.** در نتیجه زیر منظور از $E_9$ و $Q_8$، $\bar{E_9}$ و $\bar{Q_8}$ می‌باشد.

**نتیجه ۱۶.۱.۳.** *فرض کنید $G = E_9 \rtimes Q_8$. در این‌صورت $G' = E_9 \rtimes Z(Q_8)$. به‌علاوه*

$$\gamma_3(G) = \gamma_4(G) = \gamma_5(G) = \gamma_6(G) = \ldots = \gamma_\infty(G) = E_9 \times 1.$$

***برهان.*** چون $G = E_9 \rtimes Q_8$ لذا طبق قضیه دوم یکریختی

$$\frac{G}{E_9} = \frac{E_9 Q_8}{E_9} \cong \frac{Q_8}{E_9 \cap Q_8} = Q_8$$

و در نتیجه $(\frac{G}{E_۹})' \cong Q'_۸$. بنا به نتیجه ۶.۱.۳، $[E_۹, G] = E_۹$ و بنابراین $E_۹ \subseteq G'$. از این‌رو داریم

$$(\frac{G}{E_۹})' = \frac{[G,G]}{E_۹} = \frac{G'}{E_۹} \cong Q'_۸.$$

از آن‌جایی‌که $Q'_۸ = [Q_۸, Q_۸] = Z(Q_۸)$ لذا $|Q'_۸| = |\frac{G'}{E_۹}| = ۲$ بنابراین

$$|G'| = ۲|E_۹|$$

و چون $Z(Q_۸) \cap E_۹ = ۱$، $Z(Q_۸) \leq G'$، $E_۹ \trianglelefteq G'$ و نیز $G' = E_۹ Z(Q_۸)$ پس

$$G' = E_۹ \rtimes Z(Q_۸).$$

حال بنا به نتیجه ۶.۱.۳،

$$\gamma_۳(G) = [G, G'] = [G, E_۹ Z(Q_۸)] = [G, E_۹][G, Z(Q_۸)] = E_۹ \times ۱$$

بنابراین

$$\gamma_۴(G) = [G, \gamma_۳(G)] = E_۹ \times ۱$$

و در نتیجه

$$\gamma_۳(G) = \gamma_۴(G) = \gamma_۵(G) = \gamma_۶(G) = \ldots = \gamma_\infty(G) = E_۹ \times ۱.$$

□

**نتیجه ۱۷.۱.۳.** *فرض کنید $G = E_۹ \rtimes Q_۸$. در این‌صورت $G$ غیرپوچ‌توان است.*

***برهان.*** بنا به نتیجه ۱۶.۱.۳ سری مرکزی پایینی از $G = E_۹ \rtimes Q_۸$ هیچ‌گاه به یک نمی‌رسد لذا طبق قضیه ۱۲.۲.۱، $G = E_۹ \rtimes Q_۸$ یک گروه غیرپوچ‌توان است. □

## ۲.۳ حاصل‌ضرب رده‌های تزویج در گروه‌های غیرپوچ‌توان

**تذکر ۱.۲.۳.** در تمام لم‌ها و قضایای این بخش $G$ یک گروه متناهی غیرپوچ‌توان است که در شرط $B$ صدق می‌کند و $K = \gamma_\infty(G)$.

**لم ۲.۲.۳.** $1 < K = [K, G] \lhd G$.

***برهان.*** چون $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند پس بنا به گزاره ۱۹.۱.۲، $G$ حل‌پذیر است و چون $G$ غیرپوچ‌توان است پس $K \neq 1$. حال از آن‌جایی‌که $G$ حل‌پذیر است و نیز $\gamma_\infty(G) = [\gamma_\infty(G), G]$، لذا $1 < K = [K, G] \lhd G$. □

**لم ۳.۲.۳.** *فرض کنید مکمل $C$ برای $K$ در $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(G) \leq C$. در این‌صورت گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $K \cong \frac{KZ(G)}{Z(G)}$ و مکمل فروبنیوس $\frac{C}{Z(G)}$ است. به‌علاوه گروه خارج‌قسمتی $\frac{C}{Z(G)} \cong \frac{G}{KZ(G)}$ یا دوری غیربدیهی یا یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است.*

***برهان.*** چون $C$ یک مکمل برای $K$ در $G$ است پس بنا به تعریف ۳۳.۱.۱، $G = KC$ که $K \cap C = 1$. حال اگر $C = Z(G)$ آنگاه $G = KC = KZ(G)$ و در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۳،

$$1 < K = [K, KZ(G)] = [K, K] \lhd G$$

که این غیر ممکن است زیرا $K$ بنا به گزاره ۱۹.۱.۲ حل‌پذیر است. لذا

$$Z(G) < C \quad , \quad \frac{C}{Z(G)} > 1.$$

به آسانی دیده می‌شود که $G$، برابر حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از $K$ و $C$ است. اکنون فرض کنید $x$ یک عضو دلخواه از $C - Z(G)$ باشد. در این‌صورت

$$x \in G = K \rtimes C \quad , \quad x \notin KZ(G) = \gamma_\infty(G)Z(G).$$

از آن‌جایی‌که $\gamma_\infty(G)$ برابر $\gamma_{c+1}(G)$ در (۸.۱) است لذا عدد صحیح $n$، $1 \leq n \leq c$ چنان وجود دارد که

$$x \in \gamma_n(G)Z(G) - \gamma_{n+1}(G)Z(G).$$

اکنون گزاره ۱۵.۱.۲ را با جای‌گذاری $\gamma_n(G)Z(G)$ به جای $N$ به‌کار می‌بریم. در این‌صورت بنا به تعریف ۶.۲.۱، $[N, G]$ برابر است با

$$[\gamma_n(G)Z(G), G] = [\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G).$$

بنابراین $x \in N - [N, G]Z(G)$. از این‌رو بنا به گزاره ۱۵.۱.۲ داریم

$$x^G = x[N, G] = x\gamma_{n+1}(G).$$

چون $\gamma_\infty(G) \subseteq \gamma_{n+1}(G)$ پس $\gamma_{n+1}(G)$ برابر اجتماع هم‌دسته‌هایی از $\gamma_\infty(G)$ است. در واقع

$$\gamma_{n+1}(G) = \bigcup_{y\in\gamma_{n+1}(G)} y\gamma_\infty(G) = \bigcup_{y\in\gamma_{n+1}(G)} yK.$$

به‌ویژه $x^G$ یک اجتماع از هم‌دسته‌های $K = \gamma_\infty(G)$ است که $K = \gamma_\infty(G) \leq \gamma_{n+1}(G)$. در نتیجه با در نظر گرفتن اپی‌مورفیسم طبیعی $\varphi : G \longrightarrow \frac{G}{K}$، $x^G$ تصویر معکوس از $(xK)^{\frac{G}{K}}$ در گروه خارج قسمتی $\frac{G}{K}$ است. از این‌رو $|x^G|$ برابر است با $|K||(xK)^{\frac{G}{K}}|$. اپی‌مورفیسم طبیعی $\varphi$، $C$ را به‌روی $\frac{G}{K}$ و $x$ را به $xK$ می‌برد. از این‌رو به‌طور یک به یک $x^C \subseteq C$ را به‌روی $(xK)^{\frac{G}{K}}$ می‌برد. لذا

$$|K||x^C| = |K||(xK)^{\frac{G}{K}}| = |x^G|.$$

از طرفی

$$|K||C| = |K \rtimes C| = |G|.$$

در نتیجه

$$|C_G(x)| = \frac{|G|}{|x^G|} = \frac{|K||C|}{|K||x^C|} = \frac{|C|}{|x^C|} = |C_C(x)|$$

و این تنها زمانی می‌تواند اتفاق بیفتد که $C_G(x)$ برابر $C_C(x)$ باشد. در این‌صورت

$$C_K(x) = K \cap C_G(x) \leq K \cap C = 1.$$

بنابراین به ازای هر $x \in C - Z(G)$، $C_K(x) = 1$. از آن‌جایی‌که $Z(G)$ مشمول در عامل $C$ از حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $G = K \rtimes C$ است لذا گروه خارج‌قسمتی $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)}$ حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $\bar{C} \rtimes \bar{K}$ از زیرگروه نرمال غیربدیهی $K \cong \bar{K} = \frac{KZ(G)}{Z(G)}$ با زیرگروه مکمل غیربدیهی $\bar{C} = \frac{C}{Z(G)}$ است. استدلال‌های فوق دلالت می‌کنند که به ازای هر $\bar{x} \in \bar{C}^\# = \bar{C} - 1$، $C_{\bar{K}}(\bar{x}) = 1$.

در نتیجه طبق قضیه ۶.۳.۱، $\bar{G}$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $\bar{K}$ و مکمل فروبنیوس $\bar{C}$ است.

حال ثابت می‌کنیم که $\bar{C}$ یا دوری یا یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است.

چون $\frac{G}{K}$ پوچ‌توان و $\bar{C}$ تصویر همریخت آن است پس $\bar{C}$ نیز پوچ‌توان است. بنابراین $\bar{C}$ برابر حاصل‌ضرب مستقیم $p$-سیلو زیرگروه‌هایش است. بنا به قضیه ۱۰.۳.۱ تمام زیرگروه‌های سیلوی مکمل فروبنیوس $\bar{C}$ دوری هستند به‌جز ۲-سیلو زیرگروه که می‌تواند دوری یا یک گروه کواترنیون تعمیم یافته از مرتبه $4n$ باشد که $n \geq 2$. از این‌رو یا $\bar{C}$ دوری و یا برابر حاصل‌ضرب مستقیم $\bar{Q} \times \bar{D}$ از یک گروه کواترنیون ناآبلی تعمیم یافته $\bar{Q}$ با گروه دوری $\bar{D}$ از مرتبه فرد است.

اگر $\bar{C}$ دوری باشد آنگاه اثبات تمام است. اکنون فرض کنید $\bar{C} = \bar{Q} \times \bar{D}$.

بنا به گزاره ۸.۱.۲ گروه خارج‌قسمتی $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)}$ در شرط $A$ صدق می‌کند از این‌رو طبق قضیه ۹.۱.۲ گروه خارج‌قسمتی $\frac{\bar{G}}{\bar{K}}$ نیز در شرط $A$ صدق می‌کند.

بنابراین $\frac{\bar{G}}{\bar{K}} \cong \bar{C}$ یک گروه متناهی ناآبلی و پوچ‌توان است که در شرط $A$ صدق می‌کند. پس طبق قضیه ۱۷.۲.۲، $\bar{C}$ یک $p$-گروه کامینا است. چون ۲-سیلو زیرگروه $\bar{Q}$ از $\bar{C}$ غیربدیهی است پس $\bar{C}$

یک ۲-گروه است و $\bar{C}=\bar{Q}$.

گروه کواترنیون تعمیم یافته $\bar{C}=\bar{Q}$ شامل عنصر $\bar{x}$ از مرتبه $\frac{|\bar{C}|}{۲}$ است که $\bar{x}\in\bar{C}-[\bar{C},\bar{C}]$. در این‌صورت $\bar{x}^{\bar{C}}$ از مرتبه ۲ است که با توجه به (۳.۲)،

$$|\bar{x}^{\bar{C}}|=|\bar{x}[\bar{C},\bar{C}]|=|[\bar{C},\bar{C}]|=۲.$$

لذا گروه کواترنیون تعمیم یافته $\bar{C}$ یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است و از این‌رو لم برقرار است. □

**لم ۴.۲.۳.** *اگر $K$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از $G$ باشد آنگاه مکمل $C$ برای $K$ در $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(G)\leq C$.*

***برهان.*** چون $K$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از $G$ است و از طرفی $K=[K,G]$ پس بنا به گزاره ۱۷.۱.۲، $K$ یک $p$-گروه آبلی مقدماتی است. بر طبق قضیه ۱۳.۲.۱ گروه خارج‌قسمتی $\bar{G}=\frac{G}{K}=\frac{G}{\gamma_\infty(G)}$ پوچ‌توان و بنابراین $\bar{G}$ برابر حاصل‌ضرب مستقیم $p$-سیلو زیرگروه‌هایش است. از این‌رو $\bar{G}$ برابر حاصل‌ضرب مستقیم $\bar{G}_p\times\bar{G}_{p'}$ از $p$-سیلو زیرگروه یکتای $\bar{G}_p$ و $p'$- زیرگروه یکتای هال $\bar{G}_{p'}$ است. به‌وضوح $G_pK$ برابر تصویر معکوس از $\bar{G}_p$ و بنا به قضیه ۱۹.۱.۱، $G_p$ یک $p$-سیلو زیرگروه از $G$ است. همچنین طبق قضیه ۱۷.۱.۱، $G_p=G_pK$ و قرار می‌دهیم $P=G_p$. در این‌صورت

$$\frac{P}{K}=\frac{G_p}{K}=\bar{G}_p.$$

حال چون $P\trianglelefteq G$ و $([G:P],|P|)=۱$ پس بنا به نتیجه ۳۶.۱.۱ زیرگروه مکمل $D\leq G$ برای $P$ در $G$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$G=P\rtimes D.$$

در این‌صورت $D\cong\frac{DK}{K}$ برابر $\bar{G}_{p'}$ است. در واقع

$$\bar{G}=\frac{P}{K}\times\frac{DK}{K}\cong\frac{P}{K}\times D$$

و $D$ پوچ‌توان است و $D\leq N_G(P)$ و همچنین $D$ باگروه خارج‌قسمتی $\frac{P}{K}$ جابه‌جا می‌شود. از آن‌جایی‌که

$$D\cap N_P(D)=۱\quad,\quad D\trianglelefteq N_P(D)D\quad,\quad N_P(D)\trianglelefteq N_P(D)D,$$

لذا

$$N_P(D)D=N_P(D)\times D\Longrightarrow N_P(D)\leq C_P(D).$$

از طرفی همیشه $C_P(D)\leq N_P(D)$ در نتیجه $N_P(D)=C_P(D)$. قرار می‌دهیم $DK=H$. به آسانی ملاحظه می‌شود که $D$ یک مکمل برای $K$ در $H$ است. چون به ازای هر $x\in P$،

$$x^{-۱}Dx\subseteq DK$$

پس $x^{-۱}Dx$ نیز یک مکمل برای $K$ در $H$ است. بنا به قضیه ۳۵.۱.۱ هر دو مکملی که برای $K$ در $H$ وجود دارند در $H$ با هم مزدوج هستند از این‌رو $D$ با $x^{-۱}Dx$ در $H$ مزدوج است. به‌عبارت دیگر

$$\forall x\in P,\quad \exists dk\in DK=H\quad;\quad x^{-۱}Dx=D^{dk}=D^{k}$$

$$\Longrightarrow x^{-1}Dx = k^{-1}Dk$$

$$\Longrightarrow Dx = xk^{-1}Dk$$

$$\Longrightarrow D = xk^{-1}Dkx^{-1}$$

$$\Longrightarrow xk^{-1} \in N_P(D)$$

$$\Longrightarrow P = N_P(D)K.$$

حال اگر $D = 1$ آنگاه $G = P$ و $G$ یک $p$–گروه و در نتیجه پوچ‌توان است که مخالف فرض است لذا $D > 1$. بنا به این‌که $DK$ تصویر معکوس از $\bar{G}_{p'} = \frac{DK}{K}$ و در نتیجه یک زیرگروه نرمال از $G$ است داریم

$$N_K(DK) = N_G(DK) \cap K = G \cap K = K$$

و با توجه به این‌که $K$ آبلی است داریم

$$N_K(D) \trianglelefteq N_K(DK) = K.$$

طبق فرض $K$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از $G$ است لذا $N_K(D)$ یا باید مساوی $K$ و یا باید مساوی ۱ باشد. اکنون اگر $N_K(D) = K$ آنگاه

$$P = N_P(D)K = N_P(D) = C_P(D).$$

لذا $P = C_P(D)$ و در این حالت $G$ حاصل‌ضرب مستقیم $P \times D$ و بنابراین پوچ‌توان می‌شود که این با فرض در تناقض است. در نتیجه $N_K(D) = 1$.

چون $N_K(D) = 1$ پس $N_K(D) = N_P(D) \cap K = 1$ و ازطرفی $P = N_P(D)K$ بنابراین $N_P(D)$ یک مکمل برای $K$ در $P$ است. بر طبق ابتدای اثبات، $D \trianglelefteq N_G(D)$ یک مکمل برای $P$ در $G$ است و با $N_P(D) = C_P(D)$ جابه‌جا می‌شود از این‌رو

$$C = N_G(D) = N_P(D) \times D$$

یک مکمل برای $K$ در $G$ است و چون

$$N_P(D) = C_P(D) \quad , \quad Z(G) \leq C_G(D) \leq C_P(D)$$

پس به‌وضوح $Z(G) \leq C$ و بنابراین اثبات تمام است. □

به‌طور کلی داریم

**لم ۵.۲.۳.** *گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{KZ(G)}$ یا دوری غیربدیهی یا یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است.*

***برهان.*** بنا به لم ۲.۲.۳، $K = [K, G] > 1$ پس $K \cap Z(G) \trianglelefteq G$ اکیدا مشمول در $K$ است. از این‌رو زیرگروه نرمال $M$ از $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $K \cap Z(G) \leq M \lhd K$ و $\frac{K}{M}$ یک عامل اصلی از $G$ است (در این‌صورت $\frac{K}{M}$ نرمال مینیمال در $\frac{G}{M}$ است). در نتیجه $N = MZ(G)$ یک زیرگروه

نرمال از $G$ شامل $Z(G)$ است که $K \cap N = M$. گروه خارج‌قسمتی $\bar{G} = \dfrac{G}{N}$ بنا به گزاره ۷.۱.۲ در شرط $B$ و نیز بنا به گزاره ۸.۱.۲ در شرط $A$ صدق می‌کند. اپی‌مورفیسم طبیعی $e$ از $G$ به‌روی $\bar{G}$، $K$ را به روی زیرگروه نرمال مینیمال $\dfrac{K}{M} \cong \dfrac{KN}{N} = \bar{K}$ می‌برد. در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۳،

$$1 < \bar{K} = [\bar{K}, \bar{G}]_{\bar{G}}.$$

چون $G$ حل‌پذیر است پس $\bar{G}$ نیز حل‌پذیر و از این‌رو $\bar{K}$ نرمال اکید در $\bar{G}$ است. گروه خارج‌قسمتی $\dfrac{\bar{G}}{\bar{K}}$ یک تصویر همریخت از گروه پوچ‌توان $\dfrac{G}{K}$ و از این‌رو پوچ‌توان است. بنابراین $\bar{K}$ برابر $\gamma_\infty(\bar{G})$ است. اکنون تمام مفروضات این بخش، با جای‌گذاری $\bar{G}$ و $\bar{K}$ به‌ترتیب به‌جای $G$ و $K$ برقرارند. به‌علاوه چون $\bar{G}$ در شرط $A$ صدق می‌کند و $\bar{K}$ یک زیرگروه غیرمرکزی از $\bar{G}$ است پس طبق گزاره ۱۱.۱.۲،

$$Z(\bar{G}) \leq [\bar{K}, \bar{G}]_{\bar{G}} = \bar{K}.$$

از آن‌جایی‌که $\bar{K}$ یک زیرگروه نرمال مینیمال غیرمرکزی از $\bar{G}$ است لذا $Z(\bar{G}) = 1$. در این‌صورت در لم ۴.۲.۳ با جای‌گذاری $\bar{G}$ و $\bar{K}$ به‌ترتیب به‌جای $G$ و $K$ زیرگروه مکمل $\bar{C}$ برای $\bar{K}$ در $\bar{G}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$1 = Z(\bar{G}) \leq \bar{C}.$$

در نتیجه بنا به لم ۳.۲.۳ گروه خارج‌قسمتی $\dfrac{\bar{G}}{\bar{K}} = \dfrac{\bar{G}}{\bar{K}Z(\bar{G})}$ یا دوری غیربدیهی و یا یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است و چون با توجه به قضیه سوم یکریختی

$$\frac{\bar{G}}{\bar{K}} = \frac{\frac{G}{N}}{\frac{KN}{N}} \cong \frac{G}{KN} = \frac{G}{KMZ(G)} = \frac{G}{KZ(G)}$$

پس لم برقرار است. □

**لم ۶.۲.۳.** *مکمل $C$ برای $K$ در $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(G) \leq C$.*

***برهان.*** فرض کنید $\bar{G}$ گروه خارج‌قسمتی $\dfrac{G}{KZ(G)}$ و $e$ اپی‌مورفیسم طبیعی از $G$ به‌روی $\bar{G}$ باشد. در این‌صورت بنا به لم ۵.۲.۳، $\bar{G} \neq 1$ و یا دوری یا یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است.
در ابتدا فرض کنید $\bar{G}$ دوری باشد. در این‌صورت عنصر $x \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که تصویر آن تحت اپی‌مورفیسم $e$ یعنی $\bar{x} = e(x)$ یک نیست و گروه خارج‌قسمتی $\bar{G}$ را تولید می‌کند، به‌عبارتی $\bar{G} = \langle \bar{x} \rangle$. به‌وضوح $C = \langle x \rangle Z(G)$ یک زیرگروه آبلی از $C_G(x)$ است به‌طوری‌که $G = CK$ و چون $C$ یک زیرگروه آبلی و $K$ یک زیرگروه نرمال در $G$ است پس $[CK, CK] \leq K$. در واقع داریم

$$[G, G] \leq K = \gamma_\infty(G) \leq \gamma_2(G) = [G, G].$$

در نتیجه $K$ برابر $[G, G]$ است. از آن‌جایی‌که $\bar{x} \neq 1$ لذا

$$x \in G - KZ(G) = G - [G, G]Z(G).$$

حال با به‌کار بردن گزاره ۱۵.۱.۲ و با جای‌گذاری $G$ به‌جای $N$ داریم
$$x^G = x[G,G] = xK.$$

از این‌رو
$$|C_G(x)| = \frac{|G|}{|x^G|} = \frac{|G|}{|K|}$$

و چون $G = CK$ پس
$$\frac{|C|}{|C \cap K|} = \frac{|G|}{|K|} = |C_G(x)|.$$

لذا $C \leq C_G(x)$ اما از طرفی داریم $C \leq C_G(x)$ پس $C = C_G(x)$ و بنابراین $C \cap K = ۱$. در نتیجه $C$ یک مکمل برای $K$ در $G$ است که شامل $Z(G)$ می‌باشد. از این‌رو برای هنگامی‌که $\bar{G}$ دوری است لم ثابت شده است.

حال فرض کنید گروه خارج‌قسمتی $\bar{G}$ یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ و $\bar{x} \in \bar{G} - [\bar{G}, \bar{G}]$ باشد که $x \in G$ و $e(x) = \bar{x}$. در این‌صورت $\bar{x}$ از مرتبه ۴ است. لذا $x$ را می‌توان یک ۲−عنصر در نظر گرفت، یعنی مرتبه آن توانی از ۲ باشد. قرار می‌دهیم $A = \langle x \rangle Z(G)$ که $A = \langle x \rangle Z(G)$ یک زیرگروه آبلی از $C_G(x)$ است و هم‌چنین
$$e(A) = e(\langle x \rangle Z(G)) = e(\langle x \rangle) = \langle \bar{x} \rangle.$$

به‌وضوح $e(C_G(x)) = \dfrac{C_G(x)K}{KZ(G)}$ و چون $|\dfrac{C_G(x)K}{KZ(G)}| = |C_{\bar{G}}(\bar{x})| = ۴$ و $\dfrac{C_G(x)K}{KZ(G)} \subseteq C_{\bar{G}}(\bar{x})$ پس
$$e(C_G(x)) = \frac{C_G(x)K}{KZ(G)} = C_{\bar{G}}(\bar{x}).$$

می‌دانیم در گروه کواترنیون $\bar{G}$، $\langle \bar{x} \rangle$برابر $C_{\bar{G}}(\bar{x})$ است. بنابراین
$$e(A) = e(C_G(x)) = C_{\bar{G}}(\bar{x}) = \langle \bar{x} \rangle$$

و از این‌رو $AK = C_G(x)K$ تصویر معکوس از $\langle \bar{x} \rangle$ در گروه خارج‌قسمتی $\bar{G} = \dfrac{G}{KZ(G)}$ است. چون $۱ < K \leq KZ(G)$ پس
$$\frac{C_G(x)K}{K} = C_{\frac{G}{K}}(xK)$$

که $AK = C_G(x)K$ تصویر معکوس از گروه‌های خارج‌قسمتی زیر در $\dfrac{G}{K}$ است.
$$\frac{AK}{K} = \frac{C_G(x)K}{K} = C_{\frac{G}{K}}(xK).$$

در این‌صورت چون
$$\frac{\bar{G}}{C_{\bar{G}}(\bar{x})} = \frac{\frac{G}{KZ(G)}}{C_{\frac{G}{KZ(G)}}(xKZ(G))} = \frac{\frac{G}{KZ(G)}}{\frac{C_G(x)K}{KZ(G)}} \cong \frac{G}{C_G(x)K}$$

و $\frac{|\bar{G}|}{|C_{\bar{G}}(\bar{x})|} = \frac{8}{4} = 2$ پس $|\frac{G}{C_G(x)K}| = 2$ و چون

$$\frac{\frac{G}{K}}{C_{\frac{G}{K}}(xK)} = \frac{\frac{G}{K}}{\frac{C_G(x)K}{K}} \cong \frac{G}{C_G(x)K}$$

پس

$$|\frac{\frac{G}{K}}{C_{\frac{G}{K}}(xK)}| = 2.$$

از آن‌جایی‌که $\bar{x} \in \bar{G} = \frac{G}{KZ(G)}$ در $\bar{G} - [\bar{G}, \bar{G}]$ واقع می‌شود لذا $x \in G - [G, G]Z(G)$. اکنون با جای‌گذاری $G$ به‌جای $N$ درگزاره ۱۵.۱.۲، $x^G = x[G, G]$. از این‌رو $x^G$ به‌صورت اجتماع هم‌دسته‌هایی از $K = \gamma_\infty(G)$ و بنابراین $x^G$ تصویر معکوس از $(xK)^{\frac{G}{K}}$ در گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{K}$ است. در نتیجه

$$|x^G| = |K||(xK)^{\frac{G}{K}}|$$

و چون $[G : C_G(x)] = |x^G|$ پس

$$[\frac{G}{K} : C_{\frac{G}{K}}(xK)] = |(xK)^{\frac{G}{K}}|.$$

از طرفی

$$[\frac{G}{K} : C_{\frac{G}{K}}(xK)] = 2$$

لذا

$$|(xK)^{\frac{G}{K}}| = 2.$$

از این‌رو تصویر معکوس $(xK)^{\frac{G}{K}}$ یعنی $x^G$ مرتبه‌اش برابر با $2|K|$ است. اما داریم

$$|x^G| = \frac{|G|}{|C_G(x)|} = \frac{2|C_G(x)K|}{|C_G(x)|} = \frac{2|K|}{|C_K(x)|}.$$

حال چون $|x^G| = 2|K|$ پس $|C_K(x)| = 1$ و در نتیجه $C_K(x) = 1$.

از آن‌جایی‌که $C_K(x) = K \cap C_G(x) = 1$ لذا $C_G(x)$ یک مکمل برای $K$ در $C_G(x)K$ است. با توجه با این‌که $C_G(x)K = AK$ و $A \leq C_G(x)$ (لذا $A \cap K = 1$) بنابراین $C_G(x)$ برابر با $A$ است.

فرض کنید $A_2$ یک ۲−سیلو زیرگروه از گروه آبلی $A = \langle x \rangle Z(G)$ و $S$ نیز یک ۲−سیلو زیرگروه دلخواه از $G$ و شامل $A_2$ باشد. چون $AK$ اندیس دو در $G$ دارد و $A \subseteq AK$ لذا ۲−سیلو زیرگروه از $A$ با ۲−سیلو زیرگروه از $G$ برابر نیست و داریم $A_2 < S$ در نتیجه بنا به قضیه ۱۸.۱.۱، $A_2 < N_S(A_2)$. بنابراین ۲−سیلو زیرگروه $A_2$ از $A$، ۲−سیلو زیرگروه از $N_G(A_2)$ نیست. لذا $A < N_G(A_2)$. ۲−عنصر $x \in A$ در $A_2$ واقع می‌شود از این‌رو

$$C_K(A_2) \leq C_K(x) = 1.$$

داریم $K \trianglelefteq G$ و $A_2 \leq G$ بنابراین $K \trianglelefteq KA_2$ و با توجه به این‌که $K \cap A_2 = 1$ لذا $KA_2 = K \rtimes A_2$.

قرار می‌دهیم $L = N_K(A_2)$. داریم

$$L = N_K(A_2) \subseteq N_G(A_2) \leq G$$

$$\Longrightarrow LA_{۲} \leq G$$

و چون $K \leq L$ پس $L \cap A_{۲} = ۱$. هم‌چنین $L \trianglelefteq LA_{۲}$ و نیز $A_{۲} \trianglelefteq LA_{۲}$ از این‌رو $LA_{۲} = L \times A_{۲}$، در واقع

$$N_K(A_{۲})A_{۲} = N_K(A_{۲}) \times A_{۲}.$$

یعنی اعضای $N_K(A_{۲})$ با اعضای $A_{۲}$ جابه‌جا می‌شوند. به‌عبارت دیگر

$$N_K(A_{۲}) \leq C_K(A_{۲}).$$

از طرفی همیشه داریم $C_K(A_{۲}) \leq N_K(A_{۲})$ در نتیجه $N_K(A_{۲}) = C_K(A_{۲}) = ۱$. بنابراین $KN_G(A_{۲}) \leq G$ برابر حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $K \rtimes N_G(A_{۲})$ و اکیدا شامل $K \rtimes A$ است. اما $K \rtimes A$ اندیس دو در $G$ دارد بنابراین $K \rtimes N_G(A_{۲})$ می‌بایست برابر $G$ باشد. در نتیجه $N_G(A_{۲}) = C$ یک مکمل برای $K$ در $G$ است به‌طوری‌که $Z(G) \leq C$. □

**لم ۷.۲.۳.** $[G, G] \cap Z(G) = ۱$.

***برهان.*** بنا به لم۶.۲.۳، $Z(G)$ مشمول در $C$ و با توجه به لم ۳.۲.۳ گروه خارج‌قسمتی $\bar{C} = \frac{C}{Z(G)}$ یا دوری یا یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است. چون

$$\frac{G}{K[C,C]} = \frac{KC}{K[C,C]} = \frac{K[C,C]C}{K[C,C]} \cong \frac{C}{K[C,C] \cap C} = \frac{C}{[C,C]}$$

و $\frac{C}{[C,C]}$ آبلی است پس $\frac{G}{K[C,C]}$ نیز آبلی است و در نتیجه $[G,G] \subseteq K[C,C]$. از طرفی به‌وضوح $K[C,C] \subseteq [G,G]$ لذا $[G,G] = K[C,C]$ و از آن‌جایی‌که $K = [K,G]$ پس زیرگروه مشتق $G = K \rtimes C$ عبارت است از

$$[G,G] = K \rtimes [C,C]. \tag{۱.۳}$$

اگر $\bar{C}$ دوری باشد آنگاه $C$ آبلی است. در نتیجه $[C,C] = ۱$ و در این‌صورت طبق (۱.۳)، $[G,G] = K$. بنا به لم۶.۲.۳، $K \cap Z(G) = ۱$ پس $[G,G] \cap Z(G) = ۱$. بنابراین در این حالت لم برقرار است. حال فرض کنید $\bar{C}$ گروه کواترنیون از مرتبه ۸ و $e$ اپی‌مورفیسم طبیعی از $C$ به‌روی $\bar{C}$ باشد. در این‌صورت مرکز $\bar{C}$ دوری و از مرتبه ۲ است که آن را با $\bar{Z}$ نشان می‌دهیم و در واقع به ازای هر $x \in C - Z(G)$ عبارت است از

$$\bar{Z} = Z(\bar{C}) = \langle x^{۲} Z(G) \rangle = \frac{\langle x^{۲} \rangle Z(G)}{Z(G)}$$

و از آن‌جایی‌که $\bar{Z}$ نیز در $\bar{C}$ نرمال است لذا تصویر معکوس آن نیز یک زیرگروه نرمال آبلی از $C$ است که آن را با $Z$ نشان می‌دهیم و عبارت است از

$$Z = e^{-۱}(\bar{Z}) = \langle x^{۲} \rangle Z(G),$$

به‌طوری‌که $C \lhd Z < Z(G)$. چون $Z(\bar{C}) = \bar{Z}$ تنها زیرگروه مینیمال از $\bar{C}$ است پس به ازای هر $\bar{y} \in \bar{C}^{\#}$، $\bar{Z} \subset \langle \bar{y} \rangle$. از این‌رو به ازای هر $y \in C - Z(G)$،

$$Z = \langle x^{۲} \rangle Z(G) < \langle y \rangle Z(G),$$

که $\langle y \rangle Z(G)$ یک گروه آبلی است و در نتیجه $Z \leq Z(C)$. از آن‌جایی‌که $\frac{\bar{C}}{\bar{Z}}$ یکریخت با گروه چهارتایی کلاین است لذا $\frac{\bar{C}}{\bar{Z}}$ یک ۲-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه ۴ و در نتیجه پوچ‌توان است. طبق قضیه سوم یکریختی داریم $\frac{\bar{C}}{\bar{Z}} \cong \frac{C}{Z}$. در این‌صورت $\frac{C}{Z}$ نیز یک ۲-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه ۴ و در نتیجه پوچ‌توان است و چون داریم $Z \leq Z(C)$ پس بنا به گزاره ۱۶.۲.۱، $C$ یک گروه پوچ‌توان و از رده پوچ‌توانی ۲ است. با توجه به این‌که $\bar{C} = \frac{C}{Z(G)}$ کواترنیون است داریم

$$Z(\bar{C}) = [\bar{C}, \bar{C}] = \frac{[C, C]Z(G)}{Z(G)}.$$

بنابراین $Z = \langle x^{۲} \rangle Z(G) = [C, C]Z(G)$ و در نتیجه $[C, C] \leq Z$. چون $\frac{C}{Z}$ تولید شده توسط دو عنصر $xZ, yZ$ است که $x, y \in C$ پس

$$C = \langle x, y, z \mid z \in Z(G) \rangle$$

لذا $[C, C] = \langle [x, y] \rangle$. اپی‌مورفیسم طبیعی $e : C \longrightarrow \bar{C}$، $[C, C]$ را به‌روی $[\bar{C}, \bar{C}]_{\bar{C}}$ می‌برد که $\bar{Z} = [\bar{C}, \bar{C}]_{\bar{C}}$ و نیز $|\bar{Z}| = |[\bar{C}, \bar{C}]_{\bar{C}}| = ۲$. چون

$$\frac{[C, C]Z(G)}{Z(G)} \cong \frac{[C, C]}{[C, C] \cap Z(G)} \quad , \quad |[C, C]| = ۲ = |\bar{Z}|$$

پس $[C, C] \cap Z(G) = ۱$. از این‌رو اشتراک $Z(G) = ۱ \times Z(G)$ (که یک زیرگروه از حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $G = K \rtimes C$ است) با $[G, G] = K \rtimes [C, C]$ برابر $۱ \rtimes ۱ = ۱$ است و بنابراین حکم برقرار است. $\square$

**لم ۸.۲.۳.** *$K$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از $G$ است.*

***برهان.*** فرض کنید $K$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از $G$ نباشد. چون $G \trianglerighteq K > ۱$ پس دو زیرگروه نرمال $L$ و $M$ از $G$ وجود دارند که

$$M \lhd L \lhd K$$

در صورتی که هم $\frac{K}{L}$ و هم $\frac{L}{M}$ عامل‌های اصلی از $G$ هستند. بنا به لم ۶.۲.۳ مکمل $C$ برای $K$ در $G$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(G) \leq C$. از این‌رو $Z(G) \cap K = ۱$. طبق لم ۳.۲.۳ گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $\frac{KZ(G)}{Z(G)} \cong K$ و مکمل فروبنیوس $\frac{C}{Z(G)}$ است. از این‌رو طبق نتیجه ۶.۱.۳ داریم

$$\frac{KZ(G)}{Z(G)} = \frac{[K, G]Z(G)}{Z(G)}.$$

از آن‌جایی‌که $K \cap Z(G) = 1$ لذا $|K| = |[K, G]|$ و چون $[K, G] \subseteq K$ پس $K = [K, G]$. چون $\frac{KC}{Z(G)} = \frac{G}{Z(G)}$ پس $H \leq G$ وجود دارد که $\frac{LC}{Z(G)} = \frac{H}{Z(G)}$. چون $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $\frac{KZ(G)}{Z(G)} \cong K$ است پس بنا به قضیه ۱.۱.۳ به ازای هر $x \in \frac{KZ(G)}{Z(G)}$، $C_{\frac{G}{Z(G)}}(x) \leq \frac{KZ(G)}{Z(G)}$ و از آن‌جایی‌که $\frac{LZ(G)}{Z(G)} \leq \frac{KZ(G)}{Z(G)}$ لذا به ازای هر $x \in \frac{LZ(G)}{Z(G)}$، $C_{\frac{H}{Z(G)}}(x) \leq \frac{LZ(G)}{Z(G)}$ و در نتیجه طبق قضیه ۱.۱.۳، $\frac{H}{Z(G)}$ نیز یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $\frac{LZ(G)}{Z(G)}$ و مکمل فروبنیوس $\frac{C}{Z(G)}$ است. از این‌رو طبق نتیجه ۶.۱.۳ داریم

$$\frac{LZ(G)}{Z(G)} = \frac{[L, G]Z(G)}{Z(G)}.$$

از آن‌جایی‌که $L \cap Z(G) = 1$ لذا $|L| = |[L, G]|$ و چون $[L, G] \subseteq L$ پس $L = [L, G]$ و نیز به همین ترتیب $M = [M, G]$. چون $Z(G) \cap K = 1$ و $K = [K, G]$ و نیز همچنین طبق ابتدای اثبات $\frac{K}{L}$ و $\frac{L}{M}$ عامل‌های اصلی از $G$ هستند پس بنا به گزاره ۱۸.۱.۲، $(K - L)$ و $(L - M)$ برابر تنها یک رده تزویج در $G$ می‌باشند. حال زیرگروه نرمال $N = MZ(G) \trianglelefteq G$ را در نظر بگیرید. چون $M \cap Z(G) = 1$ و $M \trianglelefteq MZ(G)$ و نیز $Z(G) \trianglelefteq MZ(G)$ پس $N = MZ(G)$ حاصل‌ضرب مستقیم $M \times Z(G)$ است. از آن‌جایی‌که $\frac{MZ(G)}{Z(G)} \leq \frac{KZ(G)}{Z(G)}$ لذا طبق گزاره ۹.۳.۱ گروه خارج‌قسمتی

$$\frac{\frac{G}{Z(G)}}{\frac{MZ(G)}{Z(G)}} \cong \frac{G}{MZ(G)} = \frac{G}{N} = \bar{G}$$

یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس

$$\frac{\frac{KZ(G)}{Z(G)}}{\frac{MZ(G)}{Z(G)}} \cong \frac{KZ(G)}{MZ(G)} \cong \frac{K}{K \cap (MZ(G))} = \frac{K}{M(K \cap Z(G))} = \frac{K}{M}$$

که

$$\bar{K} = \frac{KN}{N} = \frac{(K \times Z(G))}{(M \times Z(G))} \cong \frac{K}{M}$$

و مکمل فروبنیوس

$$\bar{C} = \frac{CN}{N} = \frac{(M \rtimes C)}{(M \times Z(G))} \cong \frac{C}{Z(G)}$$

است. چون طبق قضیه دوم یکریختی داریم

$$\bar{L} = \frac{LN}{N} \cong \frac{L}{N \cap L} = \frac{L}{M}$$

و از طرفی $\frac{L}{M}$ یک عامل اصلی از $G$ و لذا یک زیرگروه نرمال مینیمال از $\frac{G}{M}$ و مشمول در $\frac{K}{M}$ است پس $\bar{L}$ نیز یک زیرگروه نرمال مینیمال از $\bar{G} = \frac{G}{N}$ و مشمول در $\bar{K}$ است. همچنین با توجه این‌که

$\frac{K}{L} \cong \frac{\bar{K}}{\bar{L}}$ و $\frac{K}{L}$ عامل اصلی از $G$ و نرمال مینیمال در $\frac{G}{L}$ است لذا $\frac{\bar{K}}{\bar{L}}$ نیز یک عامل اصلی از $\bar{G}$ و یک زیرگروه نرمال مینیمال از $\frac{\bar{G}}{\bar{L}}$ است. در نتیجه $(\bar{K}-\bar{L})$ و نیز $(\bar{L}^{\#} = \bar{L} - ۱)$ برابر تنها یک رده $\bar{G}$-تزویج هستند. چون $\bar{K} = \frac{KN}{N}$ هسته فروبنیوس $\bar{G} = \frac{G}{N}$ است پس طبق قضیه ۸.۳.۱، $\bar{K}$ پوچ‌توان است. از این‌رو چون $\bar{L} \trianglelefteq \bar{K}$ و $\bar{L} \neq ۱$ پس بنا به قضیه ۱۵.۲.۱، $\bar{L} \cap Z(\bar{K}) \neq ۱$ و از آن‌جایی‌که $\bar{L}$ زیرگروه نرمال مینیمال از $\bar{G}$ است لذا $\bar{L} \leq Z(\bar{K})$. به‌عبارتی دیگر $\bar{L}$ در $\bar{K}$ مرکزی است، یعنی تمام اعضای $\bar{L}$ با تمام اعضای $\bar{K}$ جابه‌جا می‌شوند و چون $\bar{L} - ۱$ برابر یک رده $\bar{G}$-تزویج است پس $x \in \bar{L}^{\#}$ وجود دارد که

$$\begin{aligned}\bar{L}^{\#} = x^{\bar{G}} &= \{\bar{g}^{-۱}x\bar{g} | \bar{g} \in \bar{G}\}\\ &= \{\bar{g}^{-۱}x\bar{g} | \bar{g} \in \bar{C}\}.\end{aligned}$$

در نتیجه $\bar{L}^{\#} = x^{\bar{C}} = x^{\bar{G}}$ به‌طوری‌که $|\bar{L}^{\#}| = |x^{\bar{C}}| = |\bar{C}|$ ( در واقع رده $\bar{G}$-تزویج $\bar{L}^{\#}$ یک رده $\bar{C}$-تزویج از مرتبه $|\bar{C}|$ است). چون $\frac{\bar{K}}{\bar{L}}$ زیرگروه نرمال مینیمال در $\frac{\bar{G}}{\bar{L}}$ و از طرفی $\frac{\bar{G}}{\bar{L}}$ حل‌پذیر است پس $\frac{\bar{K}}{\bar{L}}$ آبلی است. اکنون با توجه به این‌که $\frac{\bar{K}}{\bar{L}}$ آبلی و از طرفی $\bar{K} - \bar{L}$ نیز برابر یک رده $\bar{G}$-تزویج است لذا $\bar{k}\bar{L} \in (\frac{\bar{K}}{\bar{L}})^{\#}$ وجود دارد که

$$\begin{aligned}(\frac{\bar{K}}{\bar{L}})^{\#} &= (\bar{k}\bar{L})^{\frac{\bar{G}}{\bar{L}}}\\ &= \{(\bar{g}\bar{L})^{-۱}(\bar{k}\bar{L})(\bar{g}\bar{L}) | \bar{g} \in \bar{G}\}\\ &= \{(\bar{g}\bar{L})^{-۱}(\bar{k}\bar{L})(\bar{g}\bar{L}) | \bar{g} \in \bar{C}\}\\ &\Longrightarrow |(\frac{\bar{K}}{\bar{L}})^{\#}| = |\bar{C}|.\end{aligned}$$

به‌عبارت دیگر مرتبه رده $\frac{\bar{G}}{\bar{L}}$-تزویج $(\frac{\bar{K}}{\bar{L}})^{\#}$ از گروه خارج‌قسمتی $\frac{\bar{G}}{\bar{L}}$ برابر مرتبه $\bar{C}$ است. بنابراین

$$|\frac{\bar{K}}{\bar{L}}| = |\bar{L}| = |\bar{C}| + ۱.$$

بنا به قضیه ۱.۱.۳ به ازای هر $\bar{x} \in \bar{K} - \bar{L}$، چون $C_{\bar{G}}(\bar{x}) \subseteq \bar{K}$ پس $C_{\bar{G}}(\bar{x})$ برابر $C_{\bar{K}}(\bar{x})$ و شامل $\langle\bar{x}\rangle Z(\bar{K})$ است که همچنین $\langle\bar{x}\rangle \bar{L} \leq \langle\bar{x}\rangle Z(\bar{K})$. حال چون $\bar{x} \notin \bar{L}$ لذا

$$\bar{L} < C_{\bar{G}}(\bar{x}) \leq \bar{K}.$$

در نتیجه

$$|\bar{x}^{\bar{G}}| = \frac{|\bar{G}|}{|C_{\bar{G}}(\bar{x})|} < \frac{|\bar{G}|}{|\bar{L}|} = \frac{|\bar{C}||\bar{K}|}{|\bar{L}|} = |\bar{C}|\frac{|\bar{K}|}{|\bar{L}|} = |\bar{C}|^{۲} + |\bar{C}|. \qquad (۲.۳)$$

اما $\bar{x}^{\bar{G}} = \bar{K} - \bar{L}$ از مرتبه زیر است

$$|\bar{K}| - |\bar{L}| = (|\bar{C}| + ۱)^{۲} - (|\bar{C}| + ۱) = |\bar{C}|^{۲} + |\bar{C}|$$

که این با نابرابری (۲.۳) در تناقض است و از این‌رو لم برقرار است. □

**تذکر ۹.۲.۳.** در ادامه‌ی این بخش $G$ یک گروه دلخواه است که ممکن است در شرایط تذکر ۱.۲.۳ صدق نکند.

سه قضیه‌ی مهم زیر را که بدون اثبات بیان می‌کنیم روابط بین گروه‌های کامینا و گروه‌های فروبنیوس را نشان می‌دهند.

**قضیه ۱۰.۲.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ گروه کامینا است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*

(۱) *$G$ یک $p$-گروه کامینا باشد به‌طوری‌که رده پوچ‌توانی آن ۲ یا ۳ است.*

(۲) *$G$ یک گروه فروبنیوس باشد به‌طوری‌که مکمل فروبنیوس آن دوری است.*

(۳) *$G$ یک گروه فروبنیوس باشد به‌طوری‌که مکمل فروبنیوس آن یکریخت با گروه کواترنیون است.*

***برهان.*** به [۱۶] صفحه ۱ رجوع شود. □

**قضیه ۱۱.۲.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ گروه ۲-کامینا است اگر و تنها اگر*

(۱) *$G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $Z_{p^r}$ و مکمل فروبنیوس $Z_{p^r-1}$ باشد به‌طوری‌که $p$ یک عدد اول است و $r \geq 1$ یا*

(۲) *$G$ یک ۲-گروه فوق ویژه باشد.*

***برهان.*** به [۱۹] صفحه ۲۵۱ رجوع شود. □

**قضیه ۱۲.۲.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ گروه ۳-کامینا است اگر و تنها اگر*

(۱) *$G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $Z_{p^r}$ و مکمل فروبنیوس $Z_{\frac{p^r-1}{2}}$ باشد به‌طوری‌که $p$ یک عدد اول است و $r \geq 1$ یا*

(۲) *$G$ یک ۳-گروه فوق ویژه باشد یا*

(۳) *$G$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $Z_{3^2}$ و مکمل فروبنیوس $Q_8$ باشد.*

***برهان.*** به [۱۹] صفحه ۲۵۱ رجوع شود. □

**قضیه ۱۳.۲.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی غیرپوچ‌توان باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

*(۱)* $G$ *در شرط* $A$ *صدق می‌کند.*

*(۲)* $G$ *در شرط* $B$ *صدق می‌کند و* $Z(G)=1$.

*(۳)* $G$ *در شرط* $B$ *صدق می‌کند و* $Z(G)\leq [G,G]$.

*(۴)* $G$ *با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:*

*(آ)* $F^{+}\rtimes F^{\times}$ *که* $F$ *یک میدان متناهی است و* $|F|>2$.

*(ب)* $E_9\rtimes Q_8$.

***برهان.*** $1\Longrightarrow 2$. چون $G$ در شرط $A$ صدق می‌کند پس بنا به گزاره ۲.۱.۱۰، $G$ در شرط $B$ نیز صدق می‌کند. از این‌رو تمام نتایجی را که در این بخش به‌دست آوردیم برای $G$ و $K=\gamma_\infty(G)$ نیز معتبر هستند. بنا به لم ۳.۲.۲، $1<K=[K,G]$ لذا طبق گزاره ۲.۱.۱۱، $Z(G)\leq [K,G]=K$. اما بر طبق لم ۳.۲.۶، $Z(G)\cap K=1$ و در نتیجه $Z(G)=1$. به عبارت دیگر اگر $Z(G)=1$ آنگاه شرط $A$ معادل شرط $B$ است. بنابراین گزاره (۱) برقرار است اگر و تنها اگر گزاره (۲) برقرار باشد.

$2\Longrightarrow 3$. چون $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند پس بنا به لم ۳.۲.۷، $[G,G]\cap Z(G)=1$ و از آن‌جایی‌که $Z(G)=1$ لذا $Z(G)\leq [G,G]$.

$3\Longrightarrow 2$. بر طبق لم ۳.۲.۷، $[G,G]\cap Z(G)=1$. اینک چون $Z(G)\leq [G,G]$ پس باید داشته باشیم $Z(G)=1$.

$2\Longrightarrow 4$. بر طبق لم ۳.۲.۸، $K=\gamma_\infty(G)$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از $G$ است و از آن‌جایی‌که $K=[K,G]$ لذا بنا به گزاره ۲.۱.۱۷، $K^{\#}=K-1$ تنها یک رده $G$–تزویج است که $|K^{\#}|\geq 2$ و نیز $K$ یک $p$–گروه آبلی مقدماتی است.

همچنین با توجه به لم ۳.۲.۶ مکمل $C$ برای $K$ در $G$ وجود دارد که $Z(G)\leq C$. طبق فرض $Z(G)=1$ پس بنا به لم ۳.۲.۳، $\frac{G}{Z(G)}=\frac{G}{1}=G=K\rtimes C$ یک گروه فروبنیوس با هسته فروبنیوس $K$ و مکمل فروبنیوس $C$ است که مکمل فروبنیوس یا دوری غیربدیهی و یا یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ است. طبق قضیه ۱.۱.۳۲، $C$ روی $K$ با تزویج عمل می‌کند. به عبارتی داریم

$$C\times K\longrightarrow K.$$

$$(c,k)\longmapsto k^{c}=c^{-1}kc$$

با توجه به این‌که $G$ یک گروه فروبنیوس است لذا بنا به قضیه ۱.۳.۶ پایدارساز یک عنصر از $K$ در $C$ عبارت است از

$$St_C(k)=\{c\in C|c^{-1}kc=k\}=C_C(k)=1,$$

همچنین $C$– مدار عنصر $k\in K$ به‌صورت زیر است

$$Orb_C(k)=\{k^{c}|c\in C\}.$$

از این‌رو $|C| = |\{k^c|c \in C\}|$. چون $K^{\#}$ تنها یک رده $G$-تزویج در $G$ است لذا $|C| = |K^{\#}|$.
بنابراین

$$|K| = |C| + ۱.$$

حال اگر $C$ دوری باشد آنگاه $G$ حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از یک گروه آبلی مقدماتی $K$ ازمرتبه $p^n > ۲$ به ازای $n \geq ۱$ و نیز یک گروه دوری $C$ از مرتبه $p^n - ۱$ است که به‌طور باوفا روی $K$ عمل می‌کند. در این‌صورت $G$ یکریخت با گروه $F^+ \rtimes F^\times$ برای میدان متناهی $F$ از مرتبه $p^n$ در بخش (آ) از گزاره (۴) است.
حال اگر $C$ یک گروه کواترنیون از مرتبه ۸ باشد آنگاه $|K| = |C| + ۱ = ۹$. در این‌صورت $G$ یکریخت با گروه $Q_۸ \rtimes E_۹$ در بخش (ب) از گزاره (۴) است.
۴ $\Longleftarrow$ ۱. طبق مثال ۱۰.۱.۳، $G = F^+ \rtimes F^\times$ یک گروه فروبنیوس است پس بنا به لم ۲.۱.۳، $Z(G) = ۱$ و نیز بنا به قضیه ۱۰.۲.۳، $G$ یک گروه کامینا است. لذا به ازای هر $x \in G - [G,G]$، $x^G = x[G,G]$. همچنین بنا به قضیه ۱۱.۲.۳، $G$ یک گروه ۲-کامینا است لذا طبق تعریف ۷.۲.۲ زیرگروه جابه‌جاگر از آن، اجتماعی از دو رده تزویج است. به‌وضوح یکی از این دو رده تزویج، رده تزویج یک است. برطبق نتیجه ۱۱.۱.۳، $[G,G] = F^+ \times ۱$ و

$$\gamma_۲(G) = \gamma_۳(G) = \gamma_۴(G) = \gamma_۵(G) = \ldots = \gamma_\infty(G) = F^+ \times ۱.$$

اینک با توجه به مطالب فوق، به ازای هر $x \in G$ رده‌های تزویج از $G$ به‌صورت زیر هستند

$$x^G = x[G,G] = x(F^+ \times ۱) \quad \forall x \in G - [G,G]$$

$$x^G = [G,G]^{\#} = (F^+)^{\#} \times ۱ \quad \forall x \in [G,G] - ۱$$

$$x^G = ۱ \qquad\qquad x = ۱$$

بنابراین عناصر دلخواه $x$ و $y$ از $G$ در دو زیرمجموعه $\gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$ یا $\gamma_۲(G) - ۱$ قرار می‌گیرند. در این‌صورت سه حالت زیر امکان پذیر است:
**(حالت اول)** $x, y \in \gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$. لذا $x, y^{-۱} \notin Z(G)$. چون $y \in \gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$ پس $y^{-۱} \in \gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$. حال بنا به رده‌های تزویج فوق داریم

$$x^G = xG' \quad , \quad (y^{-۱})^G = y^{-۱}G'.$$

فرض کنید $x^G \neq (y^{-۱})^G$. بنابراین $xG' \neq y^{-۱}G'$ که این نتیجه می‌دهد $xy \notin G'$ و از این رو $(xy)^G = (xy)G'$. در این‌صورت

$$x^G y^G = xG'yG' = (xy)G' = (xy)^G.$$

در نتیجه به ازای $x, y \in \gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$ حکم برقرار است.
**(حالت دوم)** $x \in \gamma_۱(G) - \gamma_۲(G)$ و $y \in (\gamma_۲(G))^{\#}$. در این صورت بنا به رده‌های تزویج فوق داریم

$$x^G = x\gamma_۲(G) \quad , \quad y^G = (\gamma_۲(G))^{\#}.$$

فرض کنید $x^G \neq (y^{-1})^G$. به‌وضوح

$$x^G y^G = x\gamma_2(G)(\gamma_2(G))^{\#} = x\gamma_2(G).$$

چون $x \notin \gamma_2(G)$ و $y \in (\gamma_2(G))^{\#}$ پس $xy \notin \gamma_2(G)$. در نتیجه

$$(xy)^G = xy\gamma_2(G) = x\gamma_2(G).$$

بنابراین $G$ در شرط $A$ صدق می‌کند.

**(حالت سوم)** $x, y \in (\gamma_2(G))^{\#}$. در این صورت بنا به رده‌های تزویج فوق داریم، $x^G = (y^{-1})^G = (\gamma_2(G))^{\#}$ لذا این حالت در نظر گرفته نمی‌شود.

بنابراین در هر یک از سه حالت فوق حکم برقرار است.

اکنون فرض کنید $G = E_9 \rtimes Q_8$. طبق مثال ۱۳.۱.۳، $G$ یک گروه فروبنیوس است پس بنا به لم ۲.۱.۳، $Z(G) = 1$ و نیز بنا به قضیه ۱۰.۲.۳، $G$ یک گروه کامینا است. لذا به ازای هر $x \in G - [G, G]$، $x^G = x[G, G]$. همچنین بنا به قضیه ۱۲.۲.۳، $G$ یک گروه ۳-کامینا است لذا زیرگروه جابه‌جاگر از آن، اجتماعی از سه رده تزویج است. به‌وضوح یکی از این دو رده تزویج، رده تزویج یک است. برطبق نتیجه ۱۶.۱.۳، $[G, G] = G' = E_9 \rtimes Z(Q_8)$ و $\gamma_3(G) = E_9 \times 1$ و نیز

$$\gamma_4(G) = \gamma_5(G) = \gamma_6(G) = \ldots = \gamma_\infty(G) = E_9 \times 1.$$

اینک با توجه به مطالب فوق، به ازای هر $x \in G$ رده‌های تزویج از $G$ به‌صورت زیر هستند

$$x^G = x\gamma_2(G) = x(E_9 \rtimes Z(Q_8)) \quad \forall x \in G - \gamma_2(G)$$

$$x^G = x\gamma_3(G) = x(E_9 \times 1) \quad \forall x \in \gamma_2(G) - \gamma_3(G)$$

$$x^G = \gamma_3(G)^{\#} = (E_9)^{\#} \times 1 \quad \forall x \in \gamma_3(G) - 1$$

$$x^G = 1 \quad x = 1$$

بنابراین عناصر دلخواه $x$ و $y$ از $G$ در سه زیرمجموعه $\gamma_1(G) - \gamma_2(G)$ یا $\gamma_2(G) - \gamma_3(G)$ یا $\gamma_3(G) - 1$ قرار می‌گیرند که اثبات قضیه در هر یک از حالت‌های ممکن، مانند مرحله قبل است.

□

**قضیه ۱۴.۲.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی غیرپوچ‌توان باشد. در این‌صورت $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $G$ با یکی از گروه‌های زیر ایزوکلینیک باشد.*

*(۱)* $F^+ \rtimes F^\times$ *که $F$ یک میدان متناهی است و* $|F| > 2$.

*(۲)* $E_9 \rtimes Q_8$.

***برهان.*** فرض کنید $G$ در شرط $B$ صدق کند. در این‌صورت تمام نتایج این بخش برای $G$ و $K = \gamma_\infty(G)$ نیز برقرار است. به‌ویژه بنا به لم ۷.۲.۳ داریم $[G, G] \cap Z(G) = 1$.
لذا طبق قضیه ۴.۳.۲، $G$ با گروه خارج قسمتی $\bar{G} = \dfrac{G}{Z(G)}$ ایزوکلینیک است. هم‌چنین طبق گزاره ۸.۱.۲، $\dfrac{G}{Z(G)}$ در شرط $A$ صدق می‌کند. به‌علاوه $\gamma_\infty(\bar{G}) = \bar{K} = \dfrac{KZ(G)}{Z(G)} \cong K > 1$ تصویر از $\gamma_\infty(G) = K$ است. از این‌رو بنا به قضیه ۱۳.۲.۳، $\bar{G}$ با یکی از گروه‌های $F^\times \rtimes F^+$ یا $Q_8 \rtimes E_9$ یکریخت و در نتیجه $G$ با یکی از این گروه‌ها ایزوکلینیک است.
حال به‌عکس فرض کنید $G$ با یکی از گروه‌های $F^\times \rtimes F^+$ یا $Q_8 \rtimes E_9$ ایزوکلینیک باشد. هر یک از این گروه‌ها با توجه به قضیه ۱۳.۲.۳ در شرط $B$ صدق می‌کنند. بنابراین طبق نتیجه ۷.۳.۲، $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند. $\square$

**قضیه ۱۵.۲.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $G$ با گروهی که در شرط $A$ صدق می‌کند ایزوکلینیک باشد. از این‌رو $G$ باید با یکی از گروه‌های زیر ایزوکلینیک باشد.*

*(۱) هر گروه آبلی متناهی.*

*(۲) $p$-گروه کامینا.*

*(۳) $F^\times \rtimes F^+$ که $F$ یک میدان متناهی است و $|F| > 2$.*

*(۴) $Q_8 \rtimes E_9$.*

***برهان.*** بنا به لم ۳.۳.۲ هرگاه $G$ یک گروه آبلی متناهی باشد حکم برقرار است. فرض کنید $G$ یک گروه ناآبلی پوچ‌توان باشد. در این‌صورت بنا به قضیه ۱۰.۳.۲، $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $G$ با یک $p$-گروه کامینا ایزوکلینیک باشد. حال فرض کنید $G$ یک گروه ناآبلی غیرپوچ‌توان باشد. در این‌صورت بنا به قضیه ۱۴.۲.۳، $G$ در شرط $B$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $G$ با $F^\times \rtimes F^+$ و یا با $Q_8 \rtimes E_9$ ایزوکلینیک باشد.

$\square$

**قضیه ۱۶.۲.۳.** *فرض کنید $G$ یک گروه ناآبلی متناهی باشد که در شرط $B$ صدق می‌کند. در این‌صورت $G$ در شرط $A$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $Z(G) \leq [G, G]$.*

***برهان.*** از قضیه‌های ۱۷.۲.۲ و ۱۳.۲.۳ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

# مراجع


[۱] ع.ر. جمالی. *مباحثی در نظریه‌ی گروه‌ها*. انتشارات مبتکران، ۱۳۸۰.

[2] Z. Arad and M. Herzog. *Products of conjugacy classes in group*. Springer Verlag, 1985.

[3] J.L. Brenner, M. Randall and J.Riddell. Covering theorems for FINASIGS. *I,colloq. Math*, 32:39-48,1974.

[4] C.R. Leedham-Green and S. Mckay. *The structure of groups of prime power order*. New York, 2002.

[5] E.C. Dade and M.K. Yadav. Finite groups with many product conjugacy classes. *Israel journal of mathematics*, 154:29-49, 2006.

[6] R. Dark and C.M. Scoppola. On Camina groups of prime power order. *Journal of algebra*, 181:787–802,1996.

[7] M. Droste. *Product of cojugacy classes of the infinite symmetric group*. Springer Verlag, 1983.

[8] N.L. Gordeev. Products of conjugacy classes in algebraic groups. *Journal of algebra*, 173:715-744,1995.

[9] N.L. Gordeev. Products of conjugacy classes in perfect linear groups. *Journal of algebra*, 321:67-89,2005.

[10] L.C. Grove and J.wileg Sons. *Groups and characters*. New york, 1997.

[11] R.M. Guralnick, G. Malle and P.H. Tiep. Products of conjugacy classes in finite and algebraic simple groups. *Advances in mathematics*, 234:618-652, 2013.

[12] P. Hall. The classification of prime power groups. *Journal fur die reine angewandte mathematik*, 182:130-141,1940.

[13] B. Huppert. *Endliche gruppen*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New york, 1967.

[14] I.M. Isaacs. *Charater theory of finite groups*. New york, 1967.

[15] A. Lev. Products of cyclic conjugacy classes in the groups PSL(n,F). *Linear algebra and its applications*, 179:59-83,1993.

[16] M.L. Lewis. *Classifying Camina groups*. Department of mathematical sciences,Kent university, 2011.

[17] I.D. Macdonald. Some p-groups of Frobenius and extra-special type. *Israel journal of mathematics*, 40:350-364, 1981.

[18] A. Machi. *An introduction to ideas and methods of the theory of groups*. Springer, 2012.

[19] A.S. Muktibodh and S.H.Ghate. On Camina group and generalizations. *Algebra and discrete mathematics*, 65:250-260, 2013.

[20] D.S. Passman. *Permutation groups*. New york, 2012.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| آبلی مقدماتی | Elementary Abelian |
| استدلال | Argument |
| استقرا | Induction |
| باوفا | Faithful |
| بدیهی | Trivial |
| پایدارساز | Stabilizer |
| پوچ‌توان | Nilpotent |
| تعمیم یافته | Generalized |
| جابه‌جاگر | Commutator |
| حاصل‌ضرب مستقیم | Direct Product |
| حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم | Semi-Direct Product |
| حل‌پذیر | Solvable |
| خودریختی | Automorphism |
| رده پوچ‌توانی | Nilpotency class |
| رده تزویج | Conjugacy class |
| زیرگروه مشخصه | Characteristic Subgroup |
| سری مرکزی | Central Series |
| سری مرکزی بالایی | Upper Central Series |
| سری مرکزی پایینی | Lower Central Series |
| عمل | Action |
| عامل اصلی | Chief Factor |
| عامل ترکیب | Composition Factor |
| فضای برداری | Vector Space |
| گروه چهارتایی کلاین | Kleins 4-Group |
| گروه متقارن | Symetric Group |
| گروه مشتق | Derived Group |

متعدی ........ Transitive
متناهی ........ Finite
مدار ........ Orbit
مزدوج ........ Conjugate
مرتبه ........ Order
مشخصا ساده ........ Characteristically Simple
مکمل ........ Complement
میدان ........ Field
نرمال مینیمال ........ Minimal Normal
هسته ........ Kernel
هم‌دسته ........ Coset

**Aabstract**

In this thesis first we define conjugacy classes finite groups and we express this the feature which the product of any two non-inverse conjugacy classes is equal to a conjugacy class, in terms of A and B hypotheses.
Then we define Camina groups, Frobenius groups and the isoclinism and isoclinic in finite groups and Then we study Their relation with hypotheses A and B.

kewordsy: conjugacy class, Affine group, Camina group, Isoclinism, Frobenius group

Shahrood University Of Technology

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

# Finite groups with special conjugacy classes

Supervisor
Dr. Sayyed Heidar Jafari

by
Roghayeh Malekpour

2014